

## Álgebra De Boole

y

### Puertas Lógicas

## Álgebra De Boole

### SUMA

$$0 + 0 = 0 \quad 1 + 1 = 1$$

$$0 + 1 = 1 \quad 1 + 0 = 1$$

### MULTIPLICACIÓN

$$0 \circ 0 = 0$$

$$0 \circ 1 = 0$$

### COMPLEMENTACION

$$\overline{0}$$
$$= 1$$

$$\overline{1}$$
$$= 0$$

**Ejemplo con otros signos:**

$$\overline{A} + \overline{A} = \overline{A}$$

$$A + A = A$$

$$A + 0 = A$$

$$\overline{A} + 0 = \overline{A}$$

$$A + 1 = 1$$

$$\overline{A} + 1 = 1$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \circ A = A$$

$$\overline{A} \circ \overline{A} = \overline{A}$$

$$A \circ 0 = 0$$

$$\overline{A} \circ 0 = 0$$

$$A \circ 1 = A$$

$$\overline{A} \circ 1 = \overline{A}$$

$$A \circ \overline{A} = \frac{A_0 = 0 \circ 1 = 0}{A_1 = 1 \circ 0 = 0}$$

TEOREMA DE MORGAN

$$\overline{A+B+C} = \overline{A} \overline{B} \overline{C}$$

$$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \bullet A+BC+D &= \overline{A} \overline{BCD} = \overline{A}(\overline{B+C})\overline{D} = \overline{A} \overline{B} \overline{D} + \overline{A} \overline{D} \overline{C} \\ \bullet A+AB &= A(1+B) = A \end{aligned}$$

Factor Común

Ejercicios:

$$\begin{aligned} \bullet A + \overline{A}B &= \overline{\overline{A+B}} = \overline{\overline{A} \overline{A} B} = \overline{\overline{A} (A+B)} = \overline{\overline{A} B} = \overline{\overline{A+B}} = \underline{\underline{A+B}} \\ \bullet A(A+B) &= AA + AB = A(1+B) = A \circ 1 = \underline{\underline{A}} \\ \bullet (A+B)(A+C) &= AA + AC + BA + BC = A(1+C) + B(A+C) = A + BA + BC = \\ &= A(B+1) + BC = \underline{\underline{A+BC}} \\ \bullet \overline{A+B+C} + \overline{ABC} &= \overline{A+B+C} + \overline{\overline{A+B+C}} = \overline{A+B+C} = \underline{\underline{\overline{ABC}}} \\ \bullet (A+B)(\overline{A}+C) &= AC + \overline{A}B + BC = AC + \overline{A}B + BC(A+\overline{A}) = \overline{AC} + \overline{A}B + ABC + \overline{A}BC = \\ &= AC(1+B) + \overline{A}B(1+C) = \underline{\underline{AC + \overline{A}B}} \\ \bullet \overline{A+B+C} + \overline{ABC} &= \overline{ABC} + \overline{ABC} = \underline{\underline{1}} \\ \bullet (Z + \overline{XY})(Y+W) &= (Z + \overline{XY})(Y+W) = \overline{Z} \circ \overline{XY} + (Y+W) = (\overline{Z+X}) \circ Y + Y+W = \\ &= Y((\overline{Z+X}) + 1) + W = \underline{\underline{Y+W}} \\ \bullet (\overline{XXY})(Y\overline{XY}) &= (\overline{X\overline{XY}})(Y\overline{XY}) = \overline{XY}(X+Y) = (\overline{X+Y})(X+Y) = \overline{XX} + \overline{XY} + \overline{YX} + \overline{YY} = \\ &= \underline{\underline{\overline{XY} + \overline{YX}}} = \underline{\underline{X \quad Y}} \\ \bullet \overline{XYZ} + \overline{Y}(\overline{XZ} + X\overline{Z}) &= \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} + \overline{Y}(\overline{XZ} + X\overline{Z}) = \overline{Y}((\overline{XZ} + X\overline{Z}) + 1) + \overline{X} + \overline{Z} = \\ &= \underline{\underline{\overline{Y+X+Z}}} = \underline{\underline{\overline{YXZ}}} \end{aligned}$$

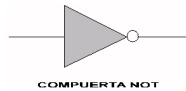
$$\bullet \bar{X} + \bar{X}\bar{Y} + \bar{Y}\bar{Z} + \bar{Z}\bar{W} = \bar{X} + \bar{X}\bar{Y} + Y + \bar{Z} + \bar{Z} + \bar{W} = \bar{X} + \bar{X} + \bar{Y} + Y + \bar{Z} + \bar{Z} + \bar{W} = \\ = \bar{X} + 1 + \bar{Z} + \bar{W} = 1 + \bar{Z} + \bar{W} = 1 + \bar{W} = 1$$

$$\bullet \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{B}\bar{C}\bar{D}(A + \bar{A}) + \\ + ABC(\bar{D} + D) + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{B}\bar{C}DA + ABC\bar{D} + ABCD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} = \\ = \bar{A}\bar{B}\bar{C}(\bar{D} + D) + \bar{A}\bar{B}D(\bar{C} + C) + ACD(\bar{B} + \bar{B} + ABCD) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}D + ACD(\bar{B} + \bar{B}) + ABCD = \\ = AD(\bar{B} + BC) + ACD + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = ADB\bar{C} + ACD + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = AC(D\bar{B} + \bar{D})\bar{A}\bar{B}\bar{C} = \\ = \underline{\underline{AC(D + B) + \bar{A}\bar{B}\bar{C}}}$$

## Puertas Lógicas

### PUERTA NOT O INVERSORA

Se trata de una operación que solo maneja una variable de entrada y otra de salida. La salida toma el estado opuesto o inverso del que tiene la entrada.



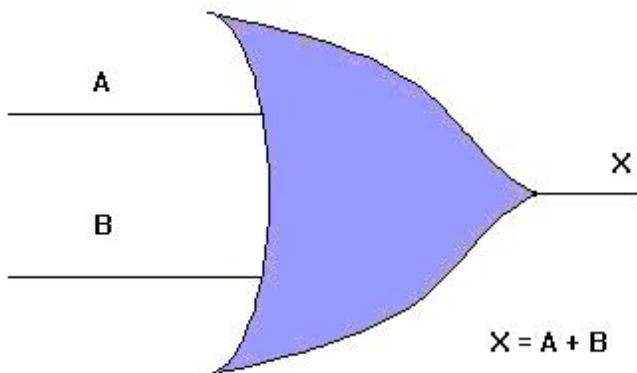
### Tabla De La Verdad De La Puerta Inversora NOT

VALOR EN LA ENTRADA	VALOR EN LA SALIDA
0	1
1	0

### PUERTA OR O SUMADORA

Cuando distintas variables lógicas se combinan mediante la función OR, el resultado toma el estado alto, verdadero o 1 si alguna de ellas tiene dicho estado. La ecuación que representa la función OR de dos variables de entrada es la siguiente:

$$X = A + B$$



**COMPUERTA OR**

**Tabla De La Verdad De La Puerta Sumadora OR**

VALOR EN LA PARTE A	VALOR EN LA PARTE B	VALOR OBTENIDO EN LA SALIDA
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**PUERTA NOR O SUMADORA INVERSORA**

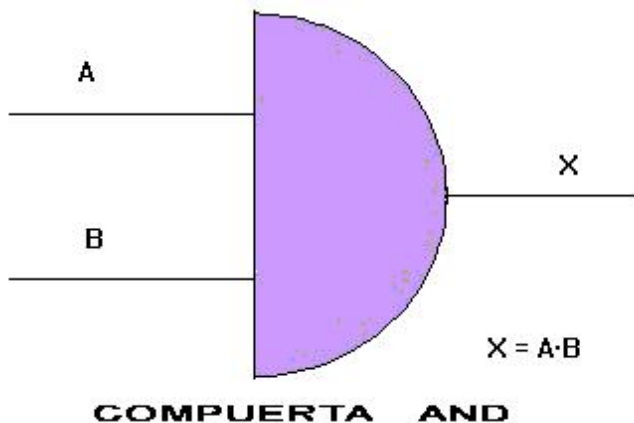
Esta puerta produce la función inversa de la puerta OR, es decir, la negación de la suma lógica de las variables de entrada. Su comportamiento es equivalente a la de la puerta OR seguida de una NOT.

**Tabla De La Verdad De La Puerta Sumadora Inversora NOR**

VALOR EN LA PARTE A	VALOR EN LA PARTE B	VALOR OBTENIDO EN LA SALIDA
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

**PUERTA AND O MULTIPLICADORA**

Cuando varias variables lógicas, de tipo binario, se combinan mediante la operación lógica AND, producen una variable de salida, que solo toma el nivel lógico 1, estado alto o verdadero, si todas ellas tienen dicho nivel o estado. La ecuación lógica de la función AND para dos variables de entrada es la siguiente:



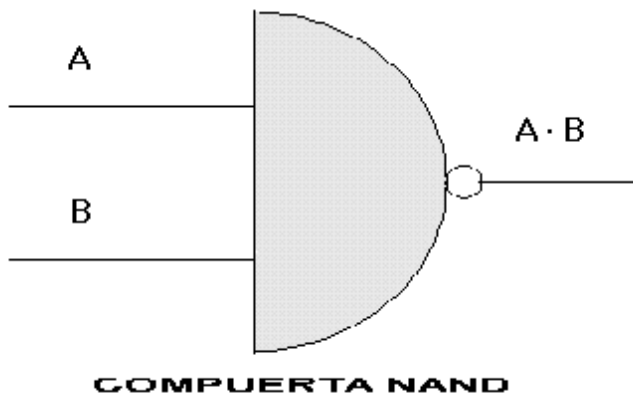
**Tabla De La Verdad De La Puerta Multiplicadora AND**

VALOR EN LA	VALOR EN LA	VALOR OBTENIDO
-------------	-------------	----------------

PARTE A	PARTE B	EN LA SALIDA
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

#### PUERTA NAND O MULTIPLICADORA INVERSORA

La puerta NAND produce la función inversa de la AND, o sea, la negación del producto lógico de las variables de entrada. Actúa como una puerta AND seguida de una NOT.

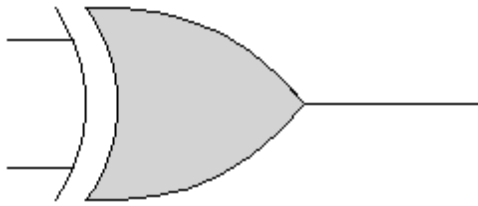


**Tabla De La Verdad De La Puerta Multiplicadora Inversora NAND**

VALOR EN LA PARTE A	VALOR EN LA PARTE B	VALOR OBTENIDO EN LA SALIDA
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

#### PUERTA OR EXCLUSIVA (OREX)

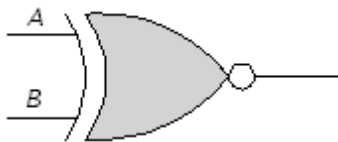
La salida de esta compuerta es 1, estado alto o verdadero si cada entrada es 1 pero excluye la combinación cuando las dos entradas son 1. La función OR exclusiva tiene su propio símbolo gráfico o puede expresarse en términos de operaciones complementarias AND, OR.



**Tabla De La Verdad De La Puerta OR Exclusiva (OREX)**

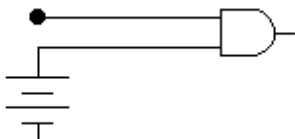
VALOR EN LA PARTE A	VALOR EN LA PARTE B	VALOR OBTENIDO EN LA SALIDA
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

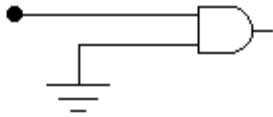
**PUERTA NOR EXCLUSIVA (NOREX)**



**Tabla De La Verdad De La Puerta NOR Exclusiva (NOREX)**

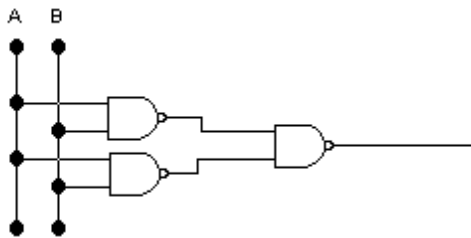
VALOR EN LA PARTE A	VALOR EN LA PARTE B	VALOR OBTENIDO EN LA SALIDA
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



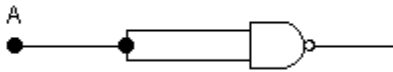


### Ejercicios:

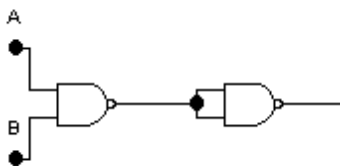
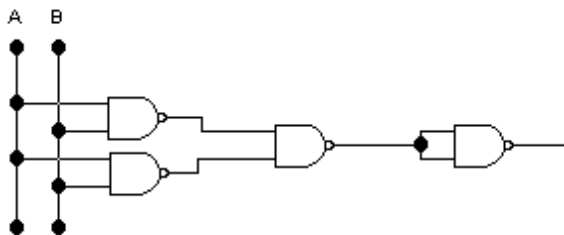
- Implementar solo con NAND las puertas: NOT, OR, NOR y AND.



### NOT OR

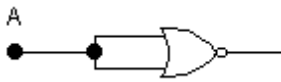
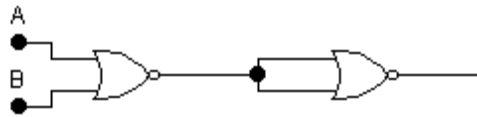


### NOR AND

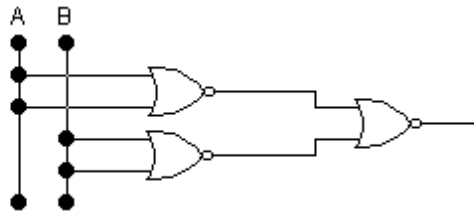
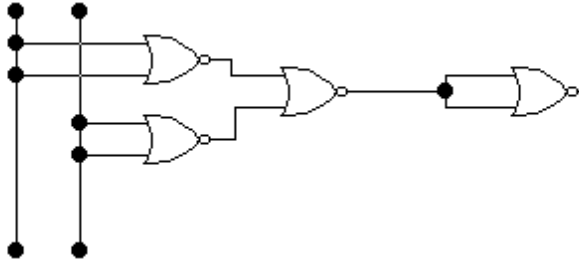


- Implementar solo con NOR las puertas: NOT, OR, NAND y AND

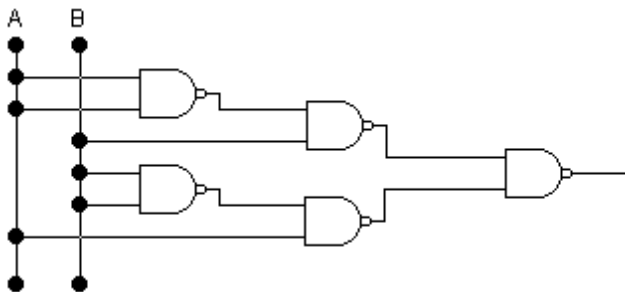
### NOT OR



### NAND AND

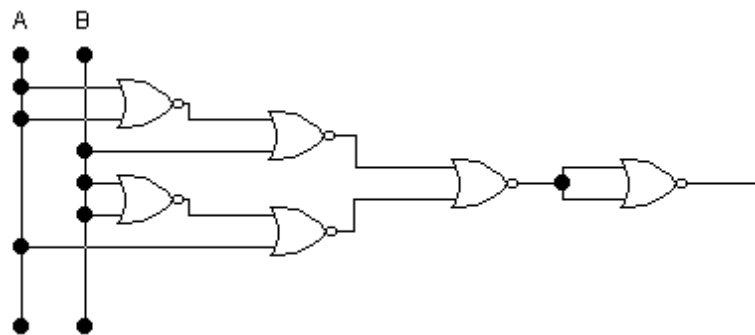


- Implementar solo con NAND la puerta OREX.

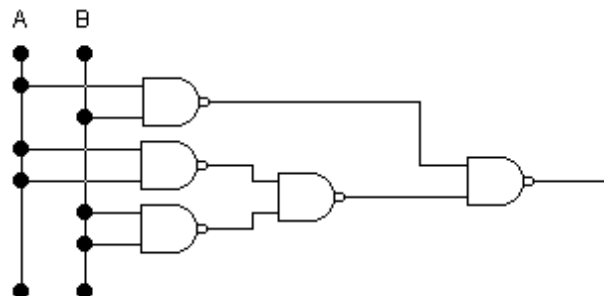


- Implementar solo con NOR la puerta OREX

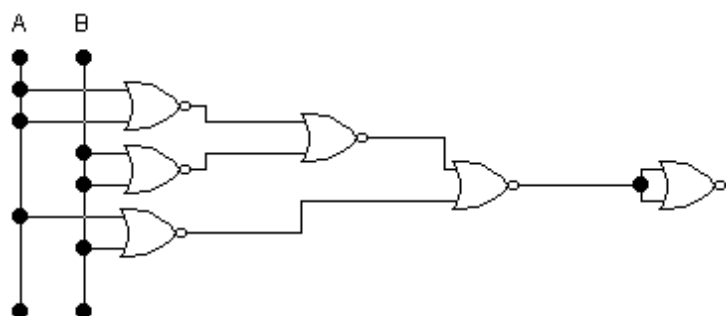




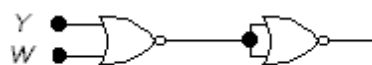
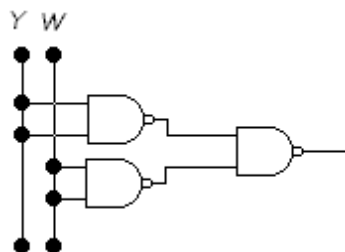
- Implementar solo con NAND la puerta NOEX



- Implementar solo con NOR la puerta NOEX

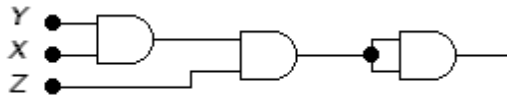


- Implementar  $Y+W$  con NAND Implementar  $Y+W$  con NOR

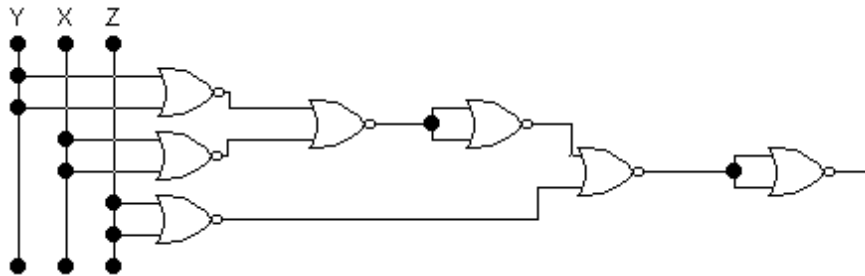


- Implementar  $\overline{YXZ}$

con AND



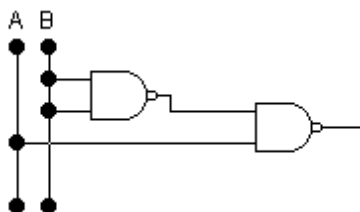
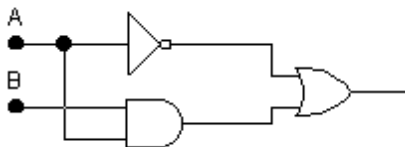
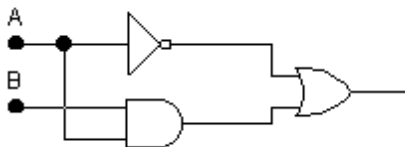
- Implementar  $\overline{YXZ}$   
con NOR



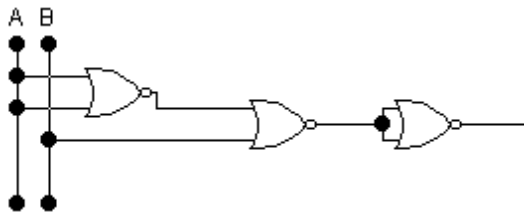
### Ejercicios Hoja1:

- Obtener simplificada la señal de salida.
- Implementar con puertas la salida ya simplificada.

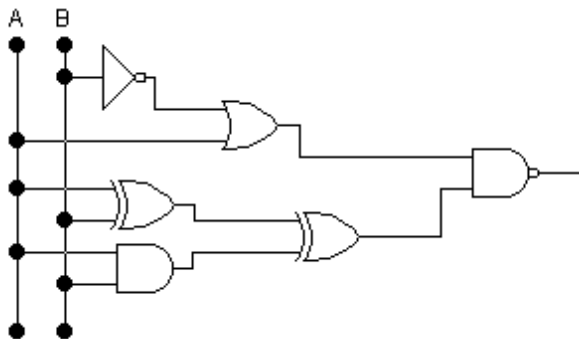
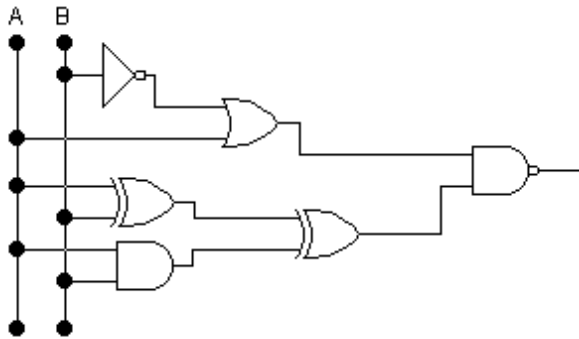
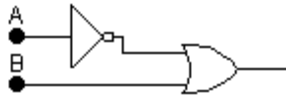
### Esquema 1



Implementar con NOR Implementar con NAND



Implementar con las menos puertas posibles

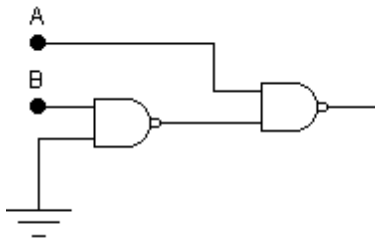
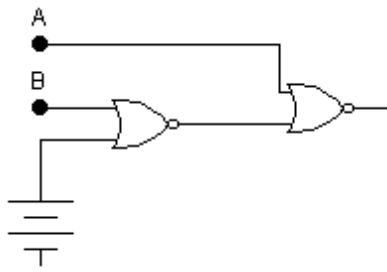


## Esquema 2

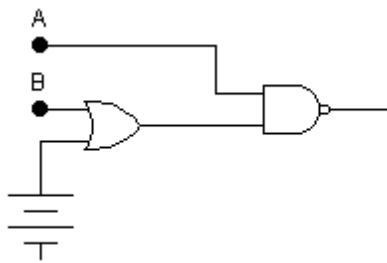
$$\begin{aligned}
 * \overline{(AB + AB)}(AB) + (\overline{AB} + \overline{AB})(\overline{AB}) &= (A + B)(\overline{A} + \overline{B})(AB) + (\overline{A}B + A\overline{B})(\overline{A} + \overline{B}) = \\
 &= (AB + \overline{B}A)AB + (\overline{A}B + A\overline{B})(\overline{A} + \overline{B}) = AB + (\overline{A}B\overline{A} + \overline{A}B\overline{B} + A\overline{B}\overline{A} + A\overline{B}\overline{B}) = AB + (\overline{A}B + A\overline{B}) = \\
 &= AB + \overline{A}B + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) + \overline{A}B = A + \overline{A}B = \overline{\overline{A + \overline{A}B}} = \overline{\overline{A}(A + \overline{B})} = \overline{\overline{A}B} = \underline{\underline{A + B}}
 \end{aligned}$$

$$* \overline{(A + B)(A + B)} = \overline{AA + AB + BA + BB} = \overline{A + AB + BA} = \overline{A(B + \overline{B}) + A} = \overline{A + A} = \underline{\underline{A}}$$

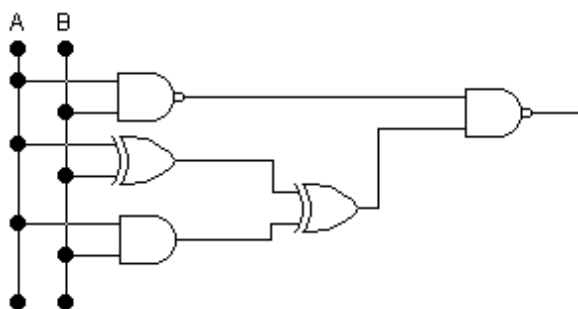
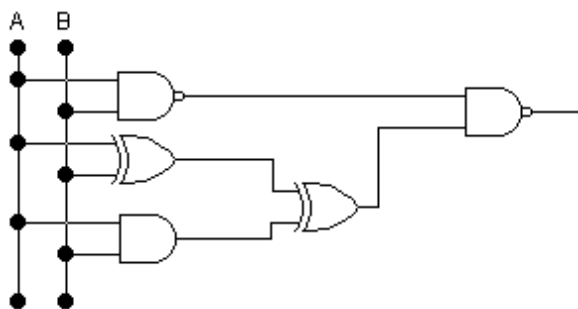
Implementar con NOR Implementar con NAND



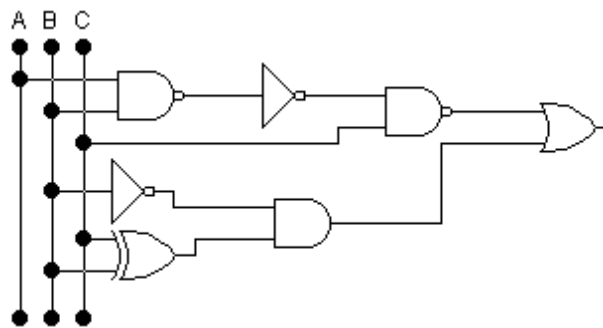
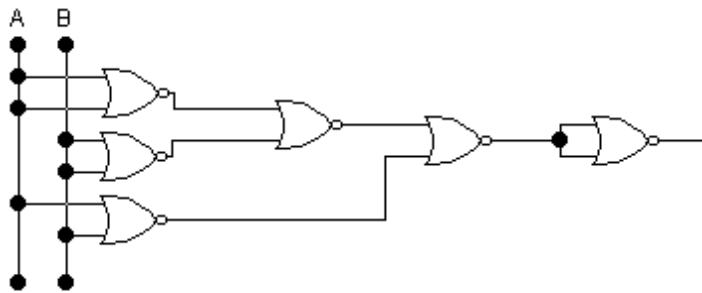
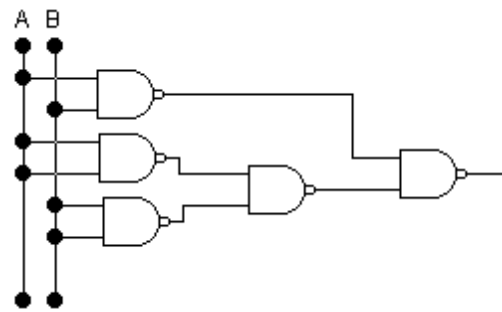
**Implementar con las menos puertas posibles**



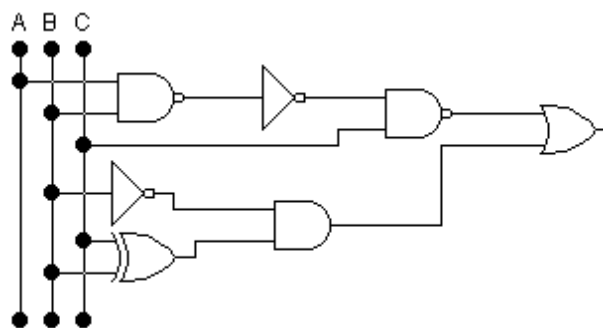
### Esquema 3



**Implementar con NOR Implementar con NAND**



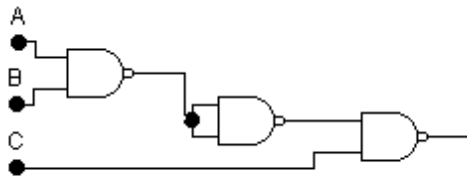
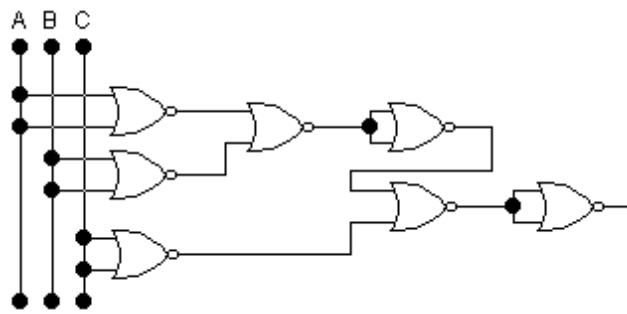
**Esquema 4**



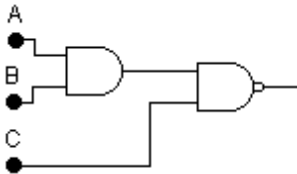
$$* \overline{\overline{\overline{BAC} + \overline{ACB}}} = \overline{\overline{\overline{BAC} + \overline{ACB}}} = \overline{(B + A + \overline{C}) \circ (\overline{A} + C + B)} = \overline{B\overline{A} + BC + B + AC + AB + \overline{A}\overline{C} + \overline{C}B} = \overline{B(1 + \overline{A} + C + A + \overline{C}) + A(C + \overline{C})} = \underline{\underline{A + B}}$$

$$** \overline{\overline{\overline{A + B + \overline{ABC}}}} = \overline{\overline{(A + B)(\overline{ABC})}} = \overline{\overline{ABC} \circ \overline{ABC}} = \underline{\underline{ABC}}$$

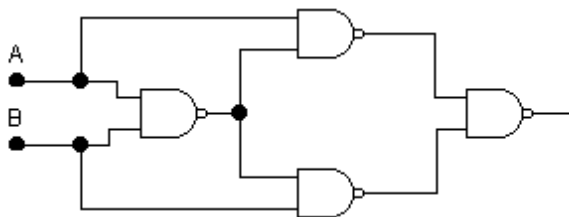
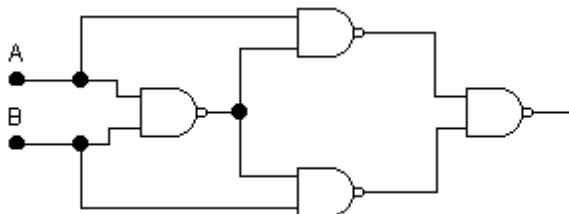
Implementar solo con NOR Implementar solo con NAND



Implementar con las menos puertas posibles

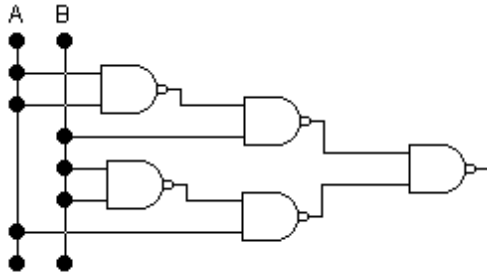
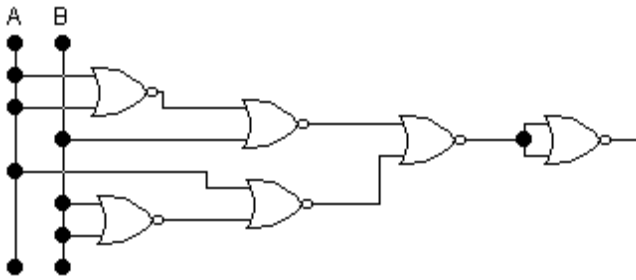


**Esquema 5**

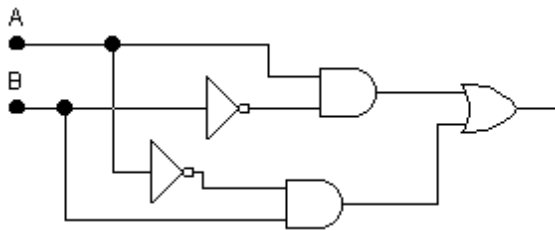
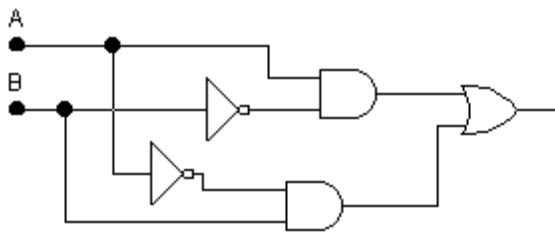


$$* \overline{(A+B)(A+C)} = \overline{A\bar{A} + \bar{A}B + BA + B\bar{B}} = \overline{\bar{A}B + BA} = \overline{(A+B)(\bar{B} + \bar{A})} = A\bar{B} + \bar{A}B = A \oplus B$$

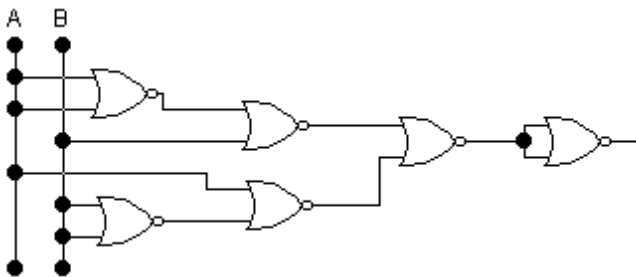
Implementar con NOR Implementar con NAND

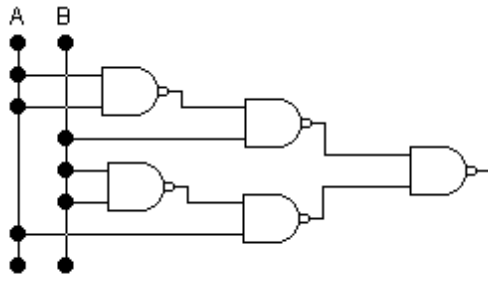


**Esquema 6**

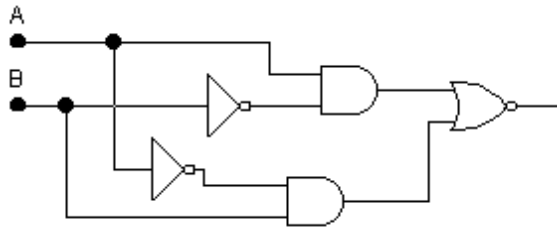
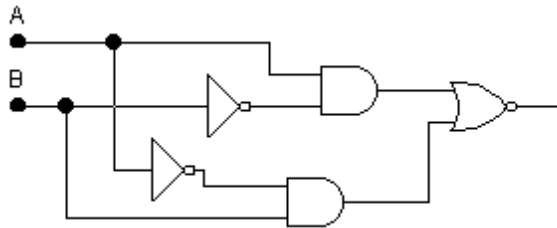


**Implementar con NOR Implementar con NAND**

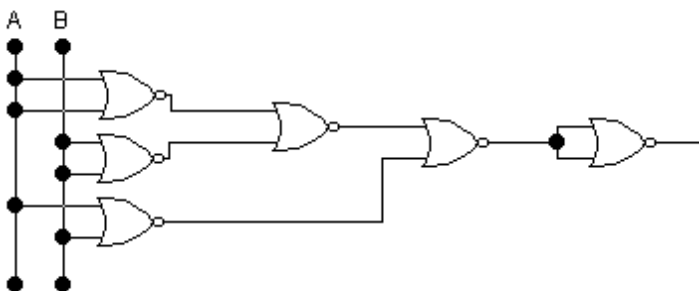
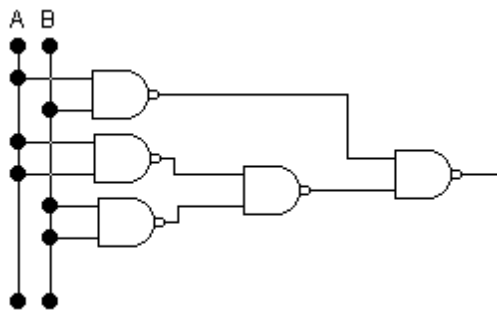




**Esquema 7**



**Implementar con NOR Implementar con NAND**





$$X = \overline{A + B}$$

$$X = \overline{A \circ B}$$

COMPUERTA OREX

A

B

$$X = A \quad B = A\bar{B} + \bar{A}B$$

COMPUERTA NOREX

$$X = A \quad B = AB + \bar{A}\bar{B}$$

MASA (0)

PILA (1)

AL AIRE (1)

$$\overline{A \circ A} = \bar{A}$$

$$\overline{\bar{A} \circ \bar{B}} = A + B$$

$\bar{A}$

$\bar{B}$

$\bar{B}$

$\bar{A}$

A + B

$$\overline{AB}$$

A + B

$$\overline{A + A} = \bar{A}$$

$$\overline{\bar{A} \circ \bar{B}}$$

A B

$\bar{B}$

$\bar{A}$

$$\overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

$$\overline{A \circ B}$$

$$\overline{A + B}$$

$$\overline{A + B}$$

$$\overline{A}$$

$$\overline{B}$$

$$A \circ B$$

$$\overline{A}$$

$$\overline{B}$$

$$A + \overline{B}$$

$$\overline{A} + B$$

$$\overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$$

$$\overline{B}$$

$$\overline{A} \circ B$$

$$\overline{A}$$

$$\overline{B}$$

$$\overline{A \circ B}$$

$$A + B$$

$$AB + \overline{A}\overline{B} = A \odot B$$

$$\overline{A}$$

$$\overline{B}$$

$$\overline{A + B}$$

$$A \circ B$$

$$\overline{A}B + \overline{B}A$$

$$AB + \overline{A}\overline{B} = A \odot B$$

$$Y$$

$$W$$

$$Y + W$$

$$Y + W$$

$$\overline{Y + W}$$

$$Y$$

$$YX$$

$$X$$

$$YX$$

$$YXZ$$

$$Z$$

$$Y + X$$

$$\overline{YXZ}$$

$$\overline{A}$$

$$A \circ B$$

$$* \overline{A} + B$$

$$\overline{B+1} = 0$$

$$\overline{B}$$

$$\overline{A}$$

$$A \circ \overline{B}$$

$$\overline{A} + B$$

$$\overline{B}$$

$$\overline{A} + B$$

$$\overline{A}$$

$$\overline{A} + B$$

$$\overline{A}B + \overline{B}A$$

$$A \circ B$$

$$\overline{A + \bar{B}}$$

$$1$$

$$\bar{A}$$

$$0$$

$$\overline{B \circ 0} = 1$$

$$\bar{A}$$

$$1$$

$$B + 1 = 1$$

$$\bar{A}$$

$$\bar{A} + \bar{B}$$

$$\bar{A}B + \bar{B}A$$

$$A \circ B$$

$$* A + B$$

$$* * A \quad B$$

$$\bar{A}$$

$$\bar{B}$$

$$\overline{A + B}$$

$$A \circ B$$

$$A \quad B$$

$$\bar{A}$$

$$\bar{B}$$

$$A \circ B$$

$$\bar{B}$$

$$\overline{ABC}$$

$$A \quad C$$

$$\overline{AB}$$

$$\overline{A} + B$$

$$\overline{A}$$

$$\overline{B}$$

$$A \circ \overline{B}$$

$$A \quad B$$

$$\overline{A}$$

$$\overline{B}$$

$$\overline{A} + B$$

$$A \quad B$$

$$\overline{A}$$

$$\overline{B}$$

$$A \circ B$$

$$\overline{C}$$

$$ABC$$

$$A \circ B$$

$$A \circ B$$

$$\overline{B}$$

$$\overline{A}$$

$$A \circ \overline{B}$$

$$A \quad B$$

$$A \quad B$$

$$A \circ \overline{B}$$

$$\overline{B}$$

$$\overline{A}$$

$$A \quad B$$

$$\overline{A} + B$$

$\overline{A}$

$\overline{B}$

$\overline{A}$

$\overline{B}$

$A \circ \overline{B}$

$\overline{B}$

$\overline{A}$

$\overline{A + B}$

$\overline{B}$

$A \quad B$

$A \circ B$

$\overline{A}$

$1 \circ 1 = 1$

$1 \circ 0 = 0$

ENTRADA/INPUT

SALIDA/OUTPUT

$X = A \circ B$