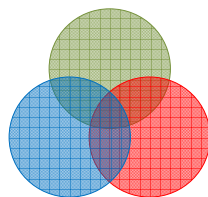


# **Cálculo III (0253)**



**Semestre 3-2009**

## **TEMA 3**

### **INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES Y SUS APLICACIONES**



<b>Semestre 3-2009</b>	<b>José Luis Quintero Octubre 2009</b>
----------------------------	--

			<b>Integrales Dobles y Triples</b>
<b>U.C.V.</b>	<b>F.I.U.C.V.</b>	<b>CÁLCULO III (0253) - TEMA 3</b>	<b>Prof. José Luis Quintero</b>

Las notas presentadas a continuación tienen como único fin, el de prestar apoyo al estudiante y facilitar su entendimiento en el tema de integrales dobles y triples y sus aplicaciones.

La guía contempla un pequeño resumen de la teoría correspondiente que sirve de repaso a los contenidos teóricos que componen el tema. Se presentan ejercicios resueltos y propuestos, algunos son originales, otros se han tomado de guías redactadas por profesores, también hay ejercicios tomados de exámenes y de algunos textos. Se ha tratado de ser lo más didáctico posible y se espera prestar un apoyo a la enseñanza del Cálculo III en Ingeniería.

Agradezco las observaciones y sugerencias que me puedan hacer llegar en la mejora del presente material, las mismas pueden ser enviadas a la siguiente dirección de correo:

[quinterodavila@hotmail.com](mailto:quinterodavila@hotmail.com).



## INDICE GENERAL

**Integrales  
Dobles y Triples**

**U.C.V.**

**F.I.U.C.V.**

**CÁLCULO III (0253) - TEMA 3**

**Prof.  
José Luis Quintero**

<b>3.1.</b>	La integral doble	246
<b>3.2.</b>	Propiedades de la integral doble	248
<b>3.3.</b>	Cálculo de la integral doble	249
<b>3.4.</b>	Cambio de variables en la integral doble	251
<b>3.5.</b>	Momentos y centro de masa	255
<b>3.6.</b>	Momento de inercia	257
<b>3.7.</b>	Ejercicios resueltos	258
<b>3.8.</b>	La integral triple	273
<b>3.9.</b>	Cambio de variables en la integral triple	275
<b>3.10.</b>	Coordenadas cilíndricas	275
<b>3.11.</b>	Coordenadas esféricas	277
<b>3.12.</b>	Aplicaciones de las integrales triples	279
<b>3.13.</b>	Ejercicios resueltos	282
<b>3.14.</b>	Ejercicios propuestos	296



# LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 246 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

## 3.1. LA INTEGRAL DOBLE

Sea  $F$  una región de área  $A$  del plano "xy",  $F$  incluye su frontera (Región Cerrada). Subdividimos al plano "xy" en rectángulos mediante rectas paralelas a los ejes de coordenadas (figura 1). Partiendo de algún lugar conveniente (tal como el extremo superior izquierdo de  $F$ ), numeramos sistemáticamente todos los rectángulos que están dentro de  $F$ . Supongamos que hay "n" de tales rectángulos y los designamos con  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .

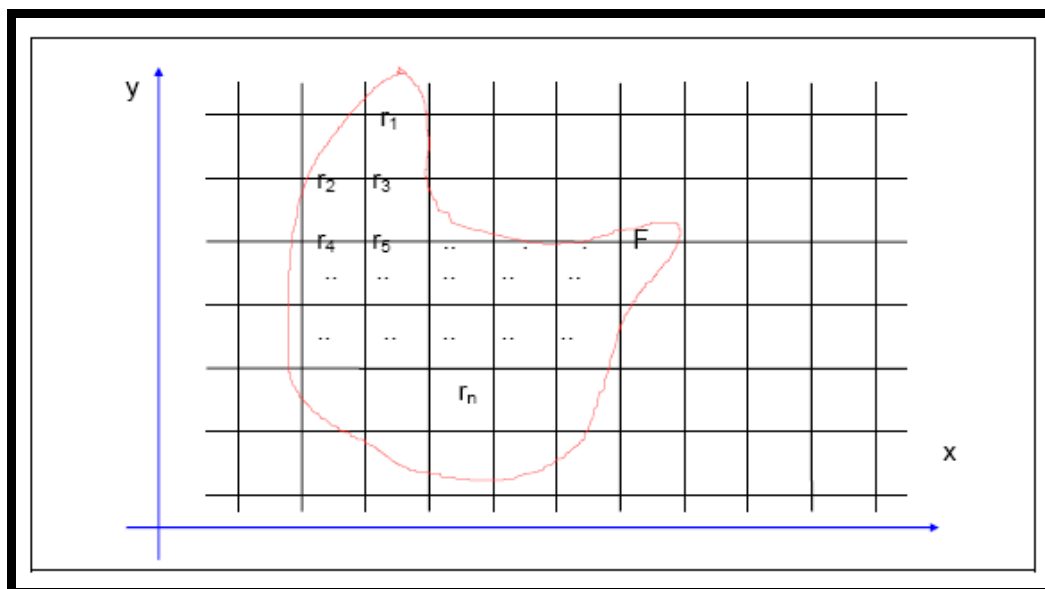


Figura 1. Intuición geométrica del área para la integral doble

Se utilizan los símbolos  $A(r_1), A(r_2), \dots, A(r_n)$  para las áreas de estos rectángulos. El conjunto de los  $n$  rectángulos  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  se llama una subdivisión  $\Delta$  de  $F$ . La norma de la subdivisión que generalmente se indica con  $\|\Delta\|$ , es la longitud de la diagonal del mayor rectángulo de la subdivisión  $\Delta$ . Suponga que  $z = f(x, y)$  es una función definida para todo  $(x, y)$  de la región  $F$ . La definición para la **integral doble** de  $f$  sobre la región  $F$  es análoga a la definición de integrales para funciones de una variable. Se elige un punto arbitrario en cada uno de los rectángulos de la subdivisión  $\Delta$ , designando las coordenadas del punto en el rectángulo  $r_i$  con  $(\xi_i, \eta_i)$ . Ahora formamos la suma:

$$f(\xi_1, \eta_1) \cdot A(r_1) + f(\xi_2, \eta_2) \cdot A(r_2) + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \cdot A(r_n).$$



# LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 247 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

En forma compacta

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) A(r_i). \quad (1)$$

Esta suma es una aproximación a la integral doble que se definirá; y se denomina **suma integral**. Las sumas tales como (1) pueden formarse para subdivisiones con cualquier norma positiva y con el  $i$ -ésimo punto  $(\xi_i, \eta_i)$  elegido en forma arbitraria en el rectángulo  $r_i$ .

## Definición 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) A(r_i) = L$$

si dado un

$$\xi > 0; \exists \delta > 0 / \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(r_i) - L < \varepsilon$$

para toda subdivisión  $\Delta$  con  $||\Delta|| < \delta$  y para todas las elecciones posibles de los puntos  $(\xi_i, \eta_i)$  en los rectángulos  $r_i$ . Puede demostrarse que si el número  $L$  existe entonces debe ser único.

**Definición 2.** Si  $f$  está definida en una región  $F$  y el número  $L$ , definido anteriormente, existe, se dice que  $f$  es integrable sobre  $F$ , y se escribe:

$$\iint_F f(x, y) dA.$$

A esta expresión se le llamará también **integral doble de  $f$  sobre  $F$** .

La integral doble tiene una interpretación geométrica como volumen de un sólido. Cada término de la sumatoria (1) representa el volumen de un cuerpo elemental de base  $(r_i)$  y altura  $h = f(\xi_i, \eta_i)$ . Siendo  $z = f(x, y)$  una función continua en el dominio cerrado representado por la región  $F$ , la sumatoria (1) tiene un límite si  $n$  tiende a infinito. Siendo este límite siempre el mismo, cualquiera sea el modo de la división del dominio de los elementos  $\Delta r_i$ , y la selección del punto de coordenadas  $(\xi_i, \eta_i)$  en los dominios parciales  $\Delta r_i$ . Este límite se llama integral doble de la función  $f(x, y)$  sobre  $F$  y si  $f(x, y) \geq 0$ , la integral doble es igual al volumen del cuerpo limitado por la superficie  $z = f(x, y)$ , el plano  $z = 0$  y la superficie cuyas generatrices son paralelas al eje  $Oz$  a través de la frontera de  $F$ . (figura 2)

$$V(s) = \iint_F f(x, y) dA,$$

siendo  $V(s)$  el volumen del sólido definido por  $(x, y) \in F \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)$ .



# LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 248 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

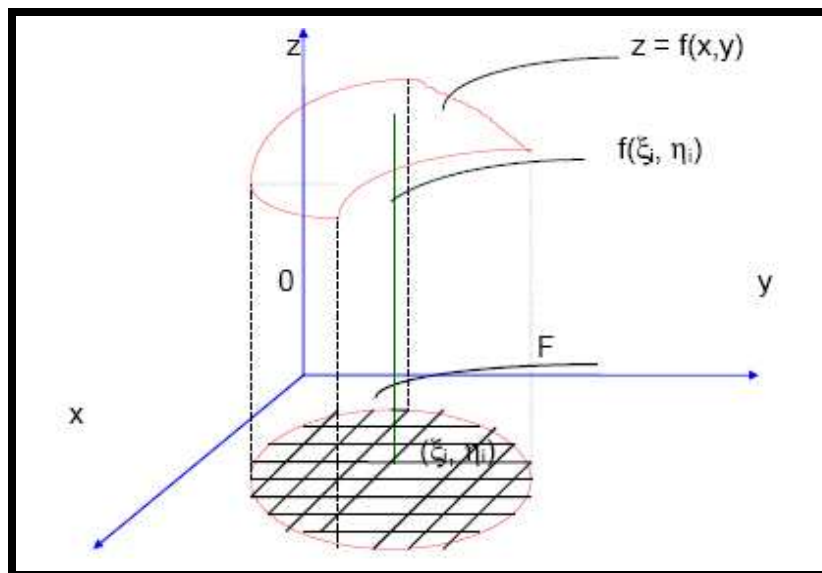


Figura 2. Intuición geométrica del volumen para la integral doble

## 3.2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE

Se enunciarán varias propiedades de las integrales dobles en analogía con las propiedades de la integral definida de funciones de una variable.

- a. Si  $c$  es un número y  $f$  es integrable sobre una región cerrada  $F$ , entonces  $c \cdot f$  es integrable y

$$\iint_F c \cdot f(x, y) dA = c \iint_F f(x, y) dA.$$

- b. Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre una región cerrada  $F$ , entonces

$$\iint_F [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_F f(x, y) dA + \iint_F g(x, y) dA.$$

- c. Suponga que  $f$  es integrable sobre una región cerrada  $F$  y  $m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in F$  entonces si  $A(F)$  designa el área de la región  $F$ , tenemos

$$m \cdot A(F) \leq \iint_F f(x, y) dA \leq M \cdot A(F).$$



## PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 249 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

- d. Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $F$  y  $f(x,y) \leq g(x,y) \forall (x,y) \in F$ , entonces

$$\iint_F f(x,y) dA \leq \iint_F g(x,y) dA$$

- e. Si se hace una partición de la región cerrada  $F$  en las regiones  $F_1$  y  $F_2$ ; es decir  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  y  $F_1 \cup F_2 = F$  y si  $f(x,y)$  es continua en  $F$  se tiene

$$\iint_F f(x,y) dA = \iint_{F_1} f(x,y) dA + \iint_{F_2} f(x,y) dA$$

### 3.3. CÁLCULO DE LA INTEGRAL DOBLE

La definición de integral doble no es muy útil para la evaluación en cualquier caso particular. Naturalmente, puede suceder que la función  $f(x,y)$  y la región  $F$  sean simples, de manera que el límite de la suma (1) pueda calcularse directamente. Sin embargo, en general no se pueden determinar tales límites. Como en el caso de las integrales simples, conviene desarrollar métodos simples y de rutina para determinar el valor de una integral doble dada. Sea  $F$  en rectángulo cuyos lados son  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$ ,  $y = d$  (ver figura 3).

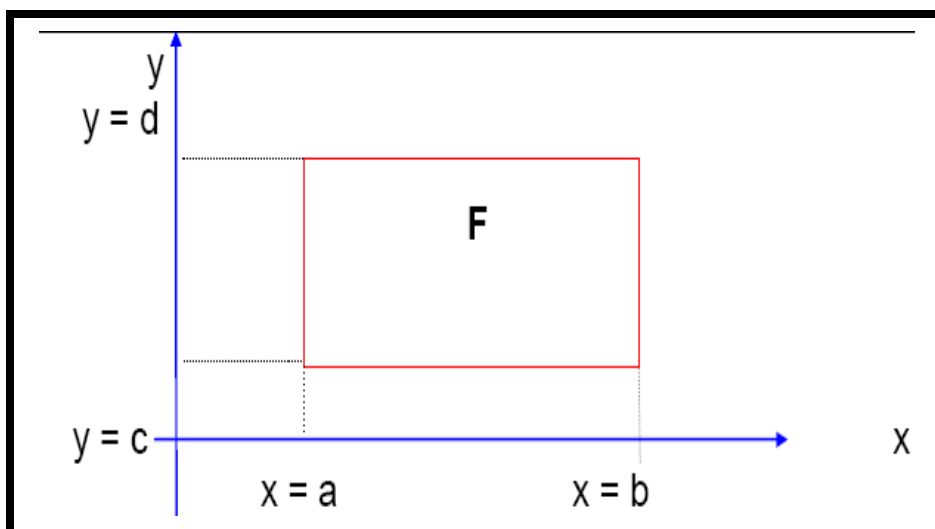


Figura 3. Intuición geométrica de la definición de integral doble

Se supone que  $z = f(x,y)$  es continua en cada  $(x,y) \in F$ . Se forma la integral simple con respecto a  $x$



# CÁLCULO DE LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 250 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

donde se mantiene fijo  $y$  al realizar la integración. Naturalmente, el valor de la integral anterior dependerá del valor utilizado para  $y$  o sea que se puede escribir:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx .$$

La función  $A(y)$  está definida para  $c \leq y \leq d$  y se puede demostrar que si  $f(x, y)$  es continua en  $F$  entonces  $A(y)$  es continua en  $[c, d]$ .

Se puede calcular la integral de  $A(y)$  y se escribe mediante la forma dada por la integral

$$A(y) = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy . \quad (2)$$

Se podría haber fijado primero  $x$ , luego formar la integral

$$B(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

entonces

$$\int_a^b B(x) dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx . \quad (3)$$

Observe que las integrales se calculan sucesivamente por lo que reciben el nombre de **integrales iteradas**. En (2) se integra primero con respecto a  $x$  (considerando  $y$  constante) y luego con respecto a  $y$ ; en (3) se integra utilizando un orden inverso. Se pueden definir las integrales iteradas sobre regiones  $F$  limitadas por curvas.

**Ejemplo 1.** Dada la función  $f(x, y) = xy$  la región triangular  $F$  limitada por las rectas de ecuaciones  $y = 0$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 2$ , halle los valores de ambas integrales iteradas.

**Solución.**

Integrando respecto a  $y$  primero se tiene:





# CÁLCULO DE LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 251 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$\int_0^2 \int_0^{2x} xy dy dx = \int_0^2 \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_0^{2x} dx = \int_0^2 \frac{4x^3}{2} dx = 8.$$

Integrando en x se tiene:

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 xy dx dy = \int_0^4 \left[ \frac{yx^2}{2} \right]_{y/2}^2 dy = \int_0^4 \left[ 2y - \frac{y^3}{8} \right] dy = 8.$$

**Ejemplo 2.**

$$\text{a. } \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx = \int_0^3 \left[ \int_1^2 x^2 y dy \right] dx = \int_0^3 \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_1^2 dx = \int_0^3 \left[ 2x^2 - \frac{x^2}{2} \right] dx = \frac{27}{2}.$$

$$\text{b. } \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy = \int_1^2 \left[ \int_0^3 x^2 y dx \right] dy = \int_1^2 \left[ \frac{yx^3}{3} \right]_0^3 dy = \int_1^2 9y dy = \frac{27}{2}.$$

**Ejemplo 3.** Halle el volumen del sólido S que está limitado por  $x^2 + 2y^2 + z = 16$ , los planos  $x = 2$ ,  $y = 2$  y los tres planos coordenados.

**Solución.**

$$V = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx dy = 48.$$

**Ejemplo 4.** Evalúe

$$\iint_D (x + 2y) dA,$$

donde D es la región limitada por las parábolas  $y = 2x^2$ ,  $y = 1 + x^2$ .

**Solución.**

$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy dx = \frac{32}{15}.$$

## 3.4. CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE

Sean S y T dos regiones de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\mathbf{F}: T \rightarrow S$  una aplicación biyectiva definida por  $\mathbf{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , esto es, por el par de funciones



# CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 252 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

La transformación inversa  $\mathbf{F}^{-1} : S \rightarrow T$  está dada por el par de funciones

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Bajo ciertas hipótesis (de continuidad y diferenciabilidad) se verifica la siguiente fórmula de transformación para integrales dobles

$$\iint_S f(x, y) dA = \iint_T f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d\bar{A},$$

donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

indica el **jacobiano** de la transformación  $\mathbf{F}$ , es decir el determinante:

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Las hipótesis de continuidad y derivabilidad que se exigen son:

- Las funciones  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  son continuas y tienen derivadas parciales continuas en  $T$ .
- $J(u, v) \neq 0$  en todo punto  $(u, v) \in T$ .
- $f(x, y)$  es continua sobre  $S$ .

## Cambios de variables frecuentes:

### a. Coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}, J = r$$

### b. Transformaciones lineales:

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}, J = ad - bc.$$

Se supone  $ad - bc \neq 0$ .



# CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 253 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**Ejemplo 5.** Calcule

$$\iint_R \frac{2}{x} dA,$$

donde R es la región del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones  
 $y = \ln(x)$ ,  $y = 1 + \ln(x)$ ,  $y = 2 - \ln(x)$ ,  $y = 1 - \ln(x)$ .

**Solución.**

Cambio de variables:

$$u = y - \ln(x), \quad v = y + \ln(x).$$

Por lo tanto,

$$x = e^{\frac{(v-u)}{2}}, \quad y = \frac{u+v}{2}.$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e^{\frac{v-u}{2}} & \frac{1}{2}e^{\frac{v-u}{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}e^{\frac{v-u}{2}}. \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x} & 1 \\ \frac{1}{x} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}.$$

Nuevas ecuaciones:

$$u = 0, \quad u = 1, \quad v = 2, \quad v = 1.$$

$$\int_0^1 \int_1^2 dv du = 1.$$

**Ejemplo 6.** Calcule

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

donde S es el dominio del plano definido por las condiciones  
 $x^2 + y^2 \geq 9$ ,  $x^2 + y^2 \leq 16$ .

**Solución.**

Cambio a coordenadas polares:

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_T r^2 dr d\theta = \frac{74\pi}{3},$$

donde

$$T = \{(r, \theta) / 3 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

**Ejemplo 7.** Usando integrales dobles, encuentre la región encerrada por la curva de ecuación polar  $r = 1 + \cos(\theta)$  que es exterior a la curva de ecuación polar  $r = 1$ .

**Solución.**

Gráfico (ver figura 4).



# CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 254 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

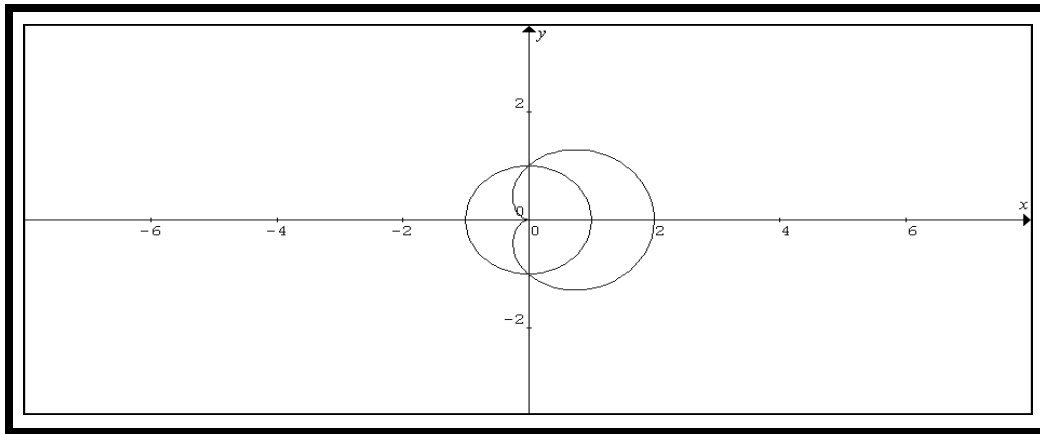


Figura 4. Representación gráfica de la región del ejemplo 7

$$\begin{aligned}\text{ÁREA} &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos(\theta)} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} [(1+\cos(\theta))^2 - 1] d\theta = \int_0^{\pi/2} [2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} [2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)] d\theta = 2 + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 8.** Plantee la integral

$$I = \iint_R |x^3 y^3| dA$$

eliminando las barras de valor absoluto, donde R es la región triangular de vértices  $(-1, -1)$ ,  $(2, 2)$  y  $(0, 2)$ .

**Solución.**

$$|x^3 y^3| = \begin{cases} x^3 y^3 & \text{si } (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \quad \vee \quad (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \\ -x^3 y^3 & \text{si } (x \geq 0 \wedge y \leq 0) \quad \vee \quad (x \leq 0 \wedge y \geq 0) \end{cases}$$

(ver figura 5)

$$I = \int_{-1}^0 \int_{(y-2)/3}^y x^3 y^3 dx dy - \int_0^2 \int_{(y-2)/3}^0 x^3 y^3 dx dy + \int_0^2 \int_0^y x^3 y^3 dx dy$$



U.C.V.



F.I.U.C.V.

# CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 255 de 305

Prof.  
José Luis Quintero

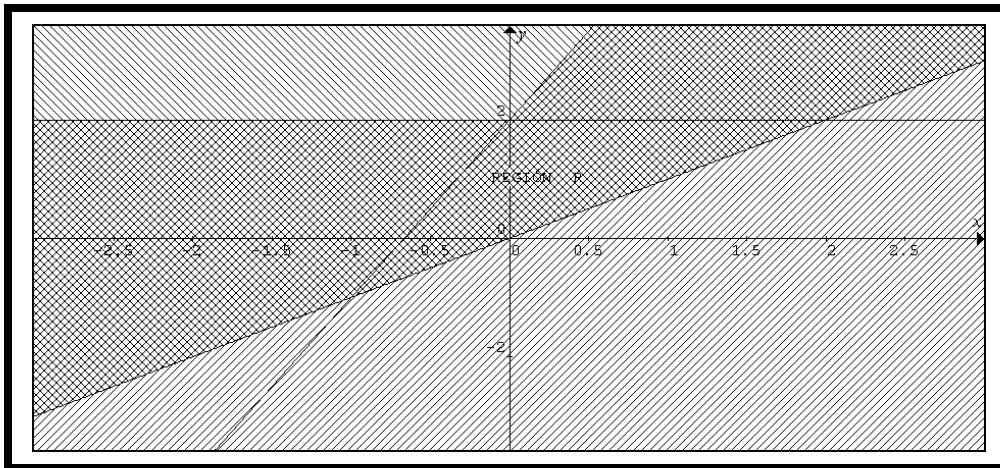


Figura 5. Representación gráfica de la región del ejemplo 8

## 3.5. MOMENTOS Y CENTRO DE MASA

Suponga que una lámina ocupa una región  $R$  del plano  $xy$  y que su densidad viene dada por la función continua  $\rho(x, y)$  para todo  $(x, y)$  en  $R$ . Se define la **masa** de la lámina mediante la integral doble

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA.$$

Los **momentos** de la lámina respecto del eje  $x$  y el eje  $y$  respectivamente, se definen mediante las integrales dadas por

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y) dA, \quad M_y = \iint_R x\rho(x, y) dA.$$

Las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  del **centro de masa** de la lámina vienen dadas por

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right).$$



# MOMENTOS Y CENTRO DE MASA

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 256 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**Ejemplo 9.** Halle el centro de masa de una lámina triangular con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $(0,2)$  si la función de densidad es  $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$ .

**Solución.**

$$m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dy dx = \frac{8}{3},$$

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x(1 + 3x + y) dy dx = 1, \quad M_x = \int_0^1 \int_0^{2-2x} y(1 + 3x + y) dy dx = \frac{11}{6}.$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{3}{8}, \frac{11}{16} \right).$$

**Ejemplo 10.** Una lámina tiene la forma de la región del plano  $xy$  limitada por las curvas  $y^2 = 2x$ ,  $y^2 = 8x$ ,  $xy = 3$ ,  $xy = 9$ .

Calcule la masa de la lámina si la densidad en cada punto  $(x,y)$  de ella está dada por  $\rho(x,y) = xy$ .

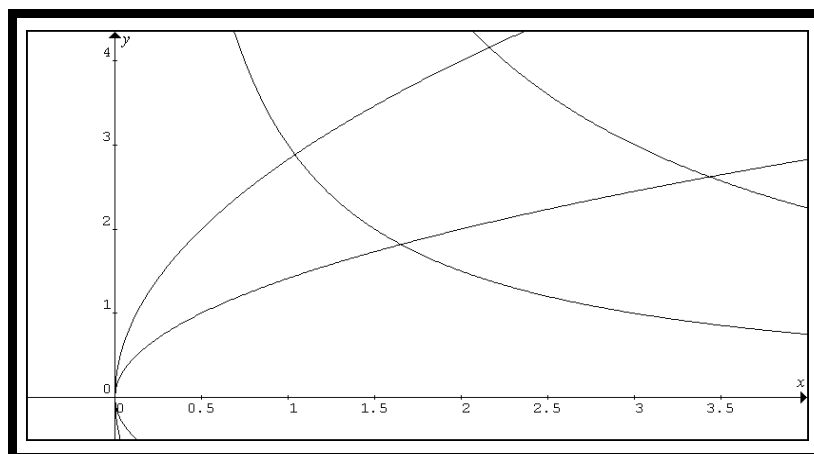
**Solución.**

Cambios de variable:

$$u = y^2 / x, \quad v = xy$$

$$J(x,y) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{y^2}{x} - \frac{2y^2}{x} = -\frac{3y^2}{x} = -3u \Rightarrow J(u,v) = -\frac{1}{3u}.$$

Región actual (ver figura 6)



**Figura 6. Región actual del ejemplo 10**

Región nueva (ver figura 7)



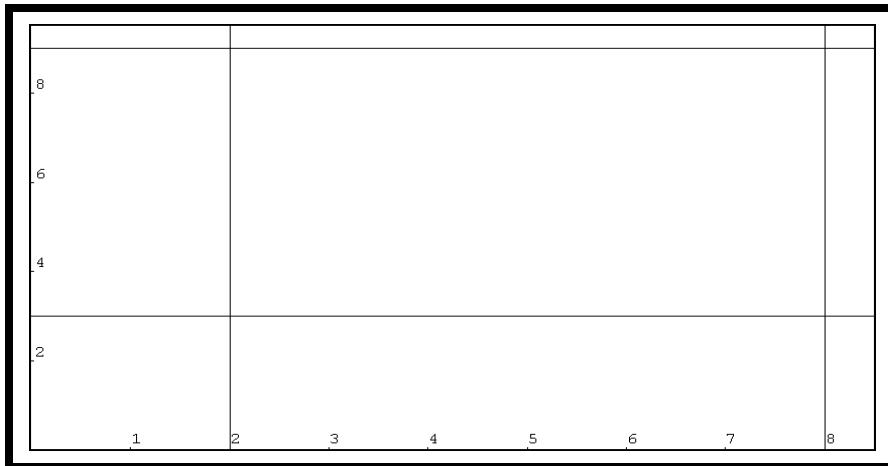
U.C.V.



F.I.U.C.V.

**MOMENTOS Y CENTRO DE MASA**

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 257 de 305Prof.  
José Luis Quintero**Figura 7. Región nueva del ejemplo 10**

$$m = \frac{1}{3} \int_3^9 \int_2^8 \frac{v}{u} du dv = 24 \ln(2).$$

**3.6. MOMENTO DE INERCIA**

El momento de inercia (también llamado segundo momento) de una partícula de masa  $m$  alrededor de un eje se define como  $mr^2$ , donde  $r$  es la distancia de la partícula al eje. El momento de inercia de un cuerpo es considerado como una medida de la resistencia a girar cuando actúa en él una fuerza de rotación. En particular si el eje de giro es el eje  $X$  o el eje  $Y$  entonces el momento de inercia respecto al eje  $X$  o al eje  $Y$  es respectivamente

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA, \quad I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) dA.$$

La suma de estos dos momentos se llama "momento polar de inercia" y se denota como  $I_0$ . Así se tiene que

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA,$$



# MOMENTO DE INERCIA

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 258 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

donde  $I_0$  también es el momento de inercia respecto del eje  $z$ .

**Ejemplo 11.** Una lámina tiene la forma de la región limitada por  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$  y su densidad es  $\rho(x, y) = x^2$ . Halle los momentos  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_0$ .

**Solución.**

$$m = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} x^2 dy dx = \frac{8}{15}, \quad I_y = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} x^4 dy dx = \frac{8}{35},$$

$$I_x = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} y^2 x^2 dy dx = \frac{1574}{945}, \quad I_0 = I_x + I_y = \frac{1790}{945}.$$

## 3.7. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Al plantear una integral doble sobre una región plana  $R$ , se obtuvo la suma de integrales iteradas

$$\int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} f(x, y) dy dx + \int_{-1}^5 \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} f(x, y) dy dx.$$

Dibuje la región  $R$  y exprese la integral doble cambiando el orden de integración utilizado.

**Solución.**

$$\int_{-2}^4 \int_{(y^2-6)/2}^{y+1} f(x, y) dx dy.$$

Gráfico (ver figura 8)

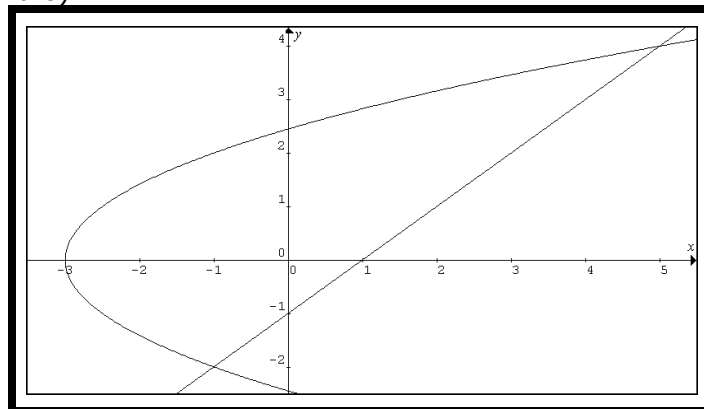


Figura 8. Gráfica de la región del ejercicio 1





## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 259 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

2. La integral doble sobre una región S del plano xy viene dada por

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy \, dy \, dx.$$

a. Grafique la región de integración.

**Solución.**

Gráfico (ver figura 9)

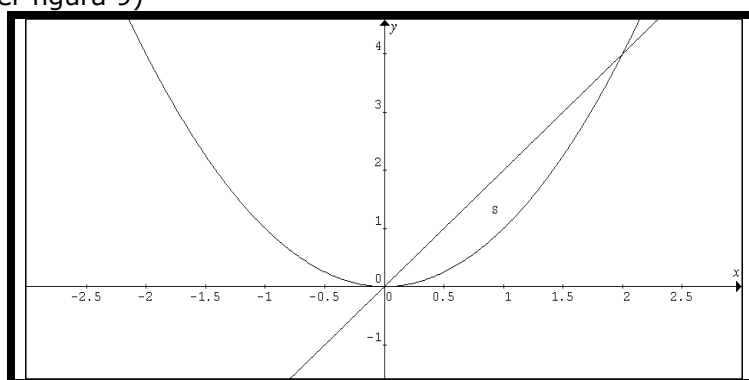


Figura 9. Gráfica de la región S del ejercicio 2

b. Exprese I en coordenadas polares.

**Solución.**

Ecuaciones polares:

$$y = 2x \Rightarrow r \sin(\theta) = 2r \cos(\theta) \Rightarrow \theta = \arctg(2)$$

$$y = x^2 \Rightarrow r \sin(\theta) = r^2 \cos^2(\theta) \Rightarrow r[r \cos^2(\theta) - \sin(\theta)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\arctg(2)} \int_0^{\operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta)} r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \, dr \, d\theta.$$

c. Dé una interpretación de lo que calcula I.

**Solución.**

Calcula el volumen de un sólido cuya tapa es la superficie  $z = xy$  y cuya base es la región S y con una superficie lateral cilíndrica.

3. Sea

$$I = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy \, dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy \, dx.$$

a. Plantee I en el orden  $dx \, dy$ .

**Solución.**

Dibujo de la región de integración (ver figura 10)



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 260 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy dx dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} xy dx dy$$

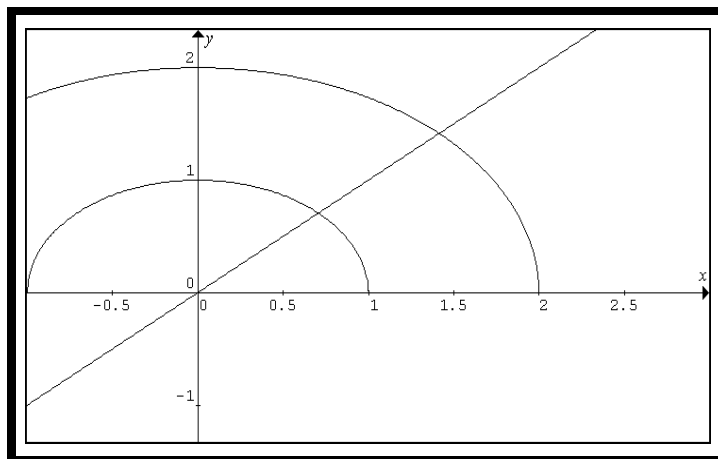


Figura 10. Gráfica de la región del ejercicio 3

b. Calcule el valor de I.

**Solución.**

$$I_1 = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy dx dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} y \left( \frac{4-y^2-1+y^2}{2} \right) dy = \frac{3y^2}{4} \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{3}{8}$$

$$I_2 = \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} xy dx dy = \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y \left( \frac{4-y^2-y^2}{2} \right) dy = \left( y^2 - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

4. La integral doble sobre una región simétrica R del plano, está dada por

$$2 \left[ \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3}x} x^2 y^2 dy dx + \int_{\sqrt{3}/2}^{3/2} \int_{x/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}x} x^2 y^2 dy dx + \int_{3/2}^{3\sqrt{3}/2} \int_{x/\sqrt{3}}^{\sqrt{9-x^2}} x^2 y^2 dy dx \right].$$

a. Dibuje la región de integración completa.

**Solución.**

Intersecciones: (ver figura 11)

$$y = \sqrt{3}x, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\sqrt{3}y = x, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + 3y^2 = 1 \Rightarrow 4y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 261 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$y = \sqrt{3}x, x^2 + y^2 = 9. x^2 + 3x^2 = 9 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\sqrt{3}y = x, x^2 + y^2 = 9. y^2 + 3y^2 = 9 \Rightarrow 4y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

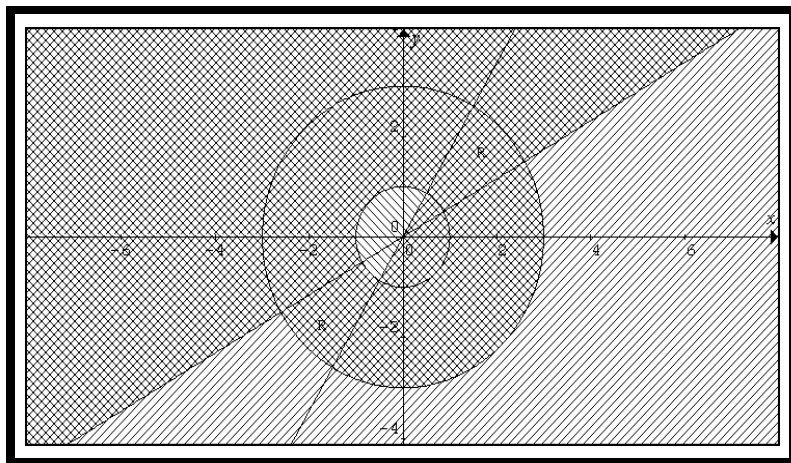


Figura 11. Gráfica de la región del ejercicio 4

- b. Exprese la integral cambiando el orden de integración.

**Solución.**

$$2 \left[ \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{3}y} x^2 y^2 dx dy + \int_{\sqrt{3}/2}^{3/2} \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}y} x^2 y^2 dx dy + \int_{3/2}^{3\sqrt{3}/2} \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2 y^2 dx dy \right].$$

- c. Calcule la integral usando coordenadas polares.

**Solución.**

Transformaciones:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1. x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r = 3.$$

$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow \tan(\theta) = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}. x = \sqrt{3}y \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_1^3 r^5 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) dr d\theta = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) d\theta \int_1^3 r^5 dr$$

$$\frac{728}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) d\theta = \frac{728}{12} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{182}{6} \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \cos(4\theta)) d\theta$$

$$\frac{91}{3} \left[ \theta - \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{91}{3} \left[ \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right] = \frac{91}{3} \left[ \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{12} \right] = \frac{91(2\pi + 3\sqrt{3})}{36}$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 262 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

5. Sea la región D definida como

$$y \geq \sqrt{1 - (x + 1)^2} \quad , \quad y \geq \sqrt{1 - (x - 1)^2} \quad , \quad y \leq \sqrt{4 - x^2} .$$

Plantee la(s) integral(es) que permite(n) calcular el área de la región D en coordenadas:

a. cartesianas en el orden  $dx dy$ .

**Solución.**

Gráfico (ver figura 12)

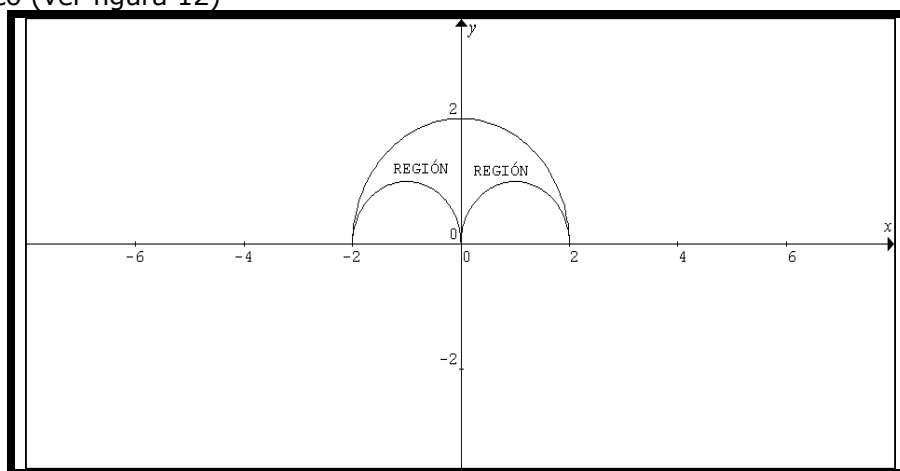


Figura 12. Representación gráfica de las curvas del ejercicio 5

$$A = 2 \left[ \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} dx dy + \int_0^1 \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx dy \right] .$$

b. polares.

**Solución.**

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r \cos(\theta) = 0 \Rightarrow r(r - 2 \cos(\theta)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \cos(\theta) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$A = 2 \int_0^{\pi/2} \int_{2 \cos(\theta)}^2 r dr d\theta .$$

6. Calcule el área de la región R determinada por las condiciones dadas por

$$x^2 + y^2 - x < 0, \quad x^2 + y^2 - y > 0, \quad y > 0 .$$

**Solución.**

Gráfico de la región R: (ver figura 13)



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 263 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

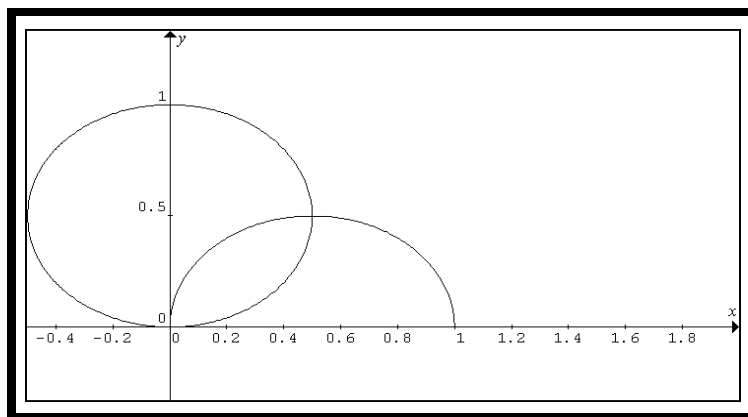


Figura 13. Gráfica de la región del ejercicio 6

Ecuaciones polares:

$$x^2 + y^2 - x = 0 \Rightarrow r^2 = r \cos(\theta) \Rightarrow r = \cos(\theta). \quad x^2 + y^2 - y = 0 \Rightarrow r^2 = r \sin(\theta) \Rightarrow r = \sin(\theta).$$

Por tanto:

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \frac{\sin(2\theta)}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$$

7. Sea la integral en coordenadas polares

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec(\theta)} r dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\csc(\theta)} r dr d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 r dr d\theta.$$

Dibuje la región de integración, interprete geoméricamente el valor de I y determínelo sin calcular ninguna integral.

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 14)

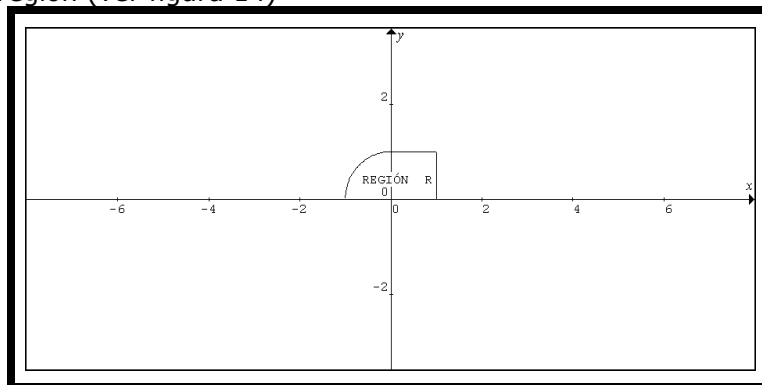


Figura 14. Gráfica de la región del ejercicio 7



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 264 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

I calcula el área de la región R. Geométricamente se puede calcular el valor como

$$I = \text{ÁREA CUADRADO} + \text{ÁREA } \frac{1}{4} \text{ CIRCULO} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

8. Sea la integral doble sobre una región R en el plano mediante coordenadas polares

$$I = 2 \int_0^{\pi/3} \int_2^{4 \cos(\theta)} r^3 dr d\theta.$$

a. Grafique la región R.

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 15)

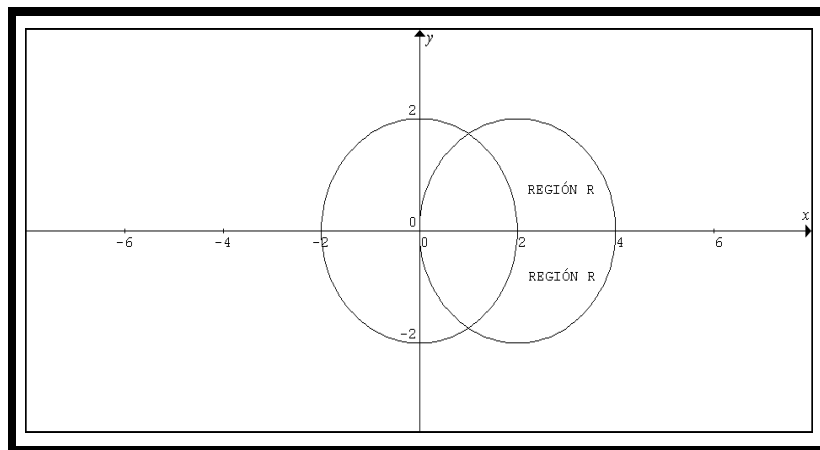


Figura 15. Gráfica de la región R del ejercicio 8

b. Expresé I en coordenadas cartesianas en el orden  $dydx$ .

**Solución.**

$$I = 2 \left[ \int_1^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} (x^2 + y^2) dy dx + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}} (x^2 + y^2) dy dx \right]$$

c. Dé dos interpretaciones físicas de lo que calcula I.

**Solución.**

Interpretación física 1.

Calcula el momento polar de inercia de una lámina homogénea cuya forma corresponde a la región R con función de densidad constante e igual a 1.

Interpretación física 2.

Calcula la masa de una lámina cuya forma corresponde a la región R con función de densidad igual a  $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ .



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 265 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

9. Calcule mediante un cambio de variables conveniente la integral

$$\iint_R (x+y)e^{x-y} dA,$$

donde la región R viene dada por el cuadrilátero de vértices (4,0); (6,2); (4,4) y (2,2).

**Solución.**

Cambio de variable:  $u = x + y$  ;  $v = x - y$ .

Nueva frontera:  $|J(u,v)| = \frac{1}{2}$

$$x - y = 0 \Rightarrow v = 0 ; \quad x - y = 4 \Rightarrow v = 4 ; \quad x + y = 4 \Rightarrow u = 4 ; \quad x + y = 8 \Rightarrow u = 8$$

Región actual R: (ver figura 16)

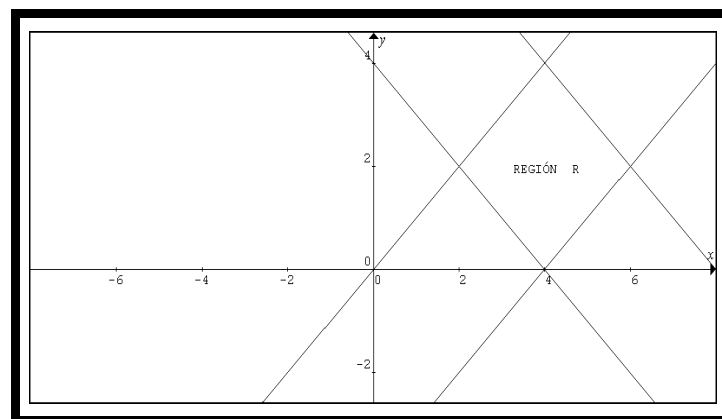


Figura 16. Gráfica de la región actual del ejercicio 9

Nueva región T: (ver figura 17)

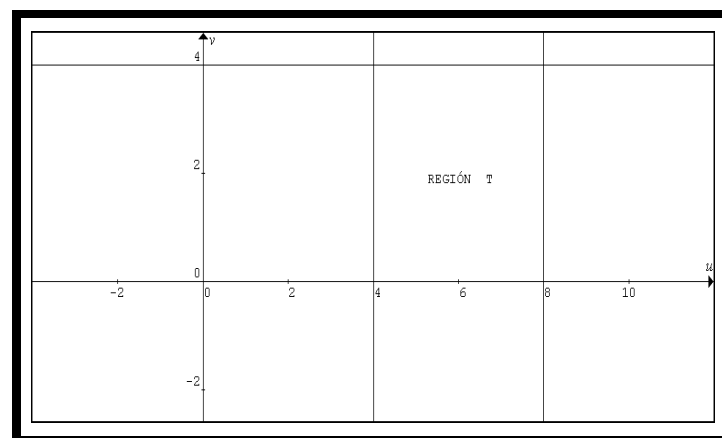


Figura 17. Gráfica de la nueva región del ejercicio 9



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 266 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

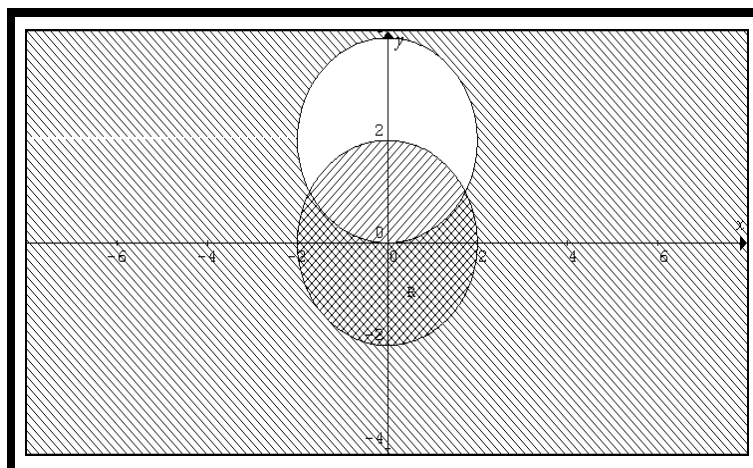
Prof.  
José Luis Quintero

$$\frac{1}{2} \int_4^8 \int_0^4 u e^v dv du = \frac{1}{2} \int_4^8 u du \int_0^4 e^v dv = \frac{(64-16)}{4} \cdot (e^4 - 1) = 12(e^4 - 1).$$

**10.** Calcule el área de la región que satisface las desigualdades dadas por  $x^2 + y^2 \geq 4y$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

**Solución.**

Gráfico de la región de integración llamada R (ver figura 18)



**Figura 18.** Gráfica de la región del ejercicio 10

Ecuaciones en coordenadas polares:

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2, \quad x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow r = 4\operatorname{sen}(\theta).$$

Intersecciones de las circunferencias:

$$2 = 4\operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[ \int_0^{\pi/6} \int_{4\operatorname{sen}(\theta)}^2 r dr d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^2 r dr d\theta \right] = 2 \left[ \int_0^{\pi/6} \frac{r^2}{2} \Big|_{4\operatorname{sen}(\theta)}^2 d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \right] \\ &= 2 \left[ \int_0^{\pi/6} (2 - 8\operatorname{sen}^2(\theta)) d\theta + \pi \right] = 2 \left[ \int_0^{\pi/6} (2 - 4(1 - \cos(2\theta))) d\theta + \pi \right] \\ &= 2 \left[ \int_0^{\pi/6} (2 - 4 + 4\cos(2\theta)) d\theta + \pi \right] = 4 \left[ \int_0^{\pi/6} (-1 + 2\cos(2\theta)) d\theta \right] + 2\pi \\ &= 4(-\theta + \operatorname{sen}(2\theta)) \Big|_0^{\pi/6} + 2\pi = 4\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi = 4\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$





## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 267 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

11. Calcule

$$\iint_R |\cos(x+y)| dA,$$

donde  $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$ .

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 19)

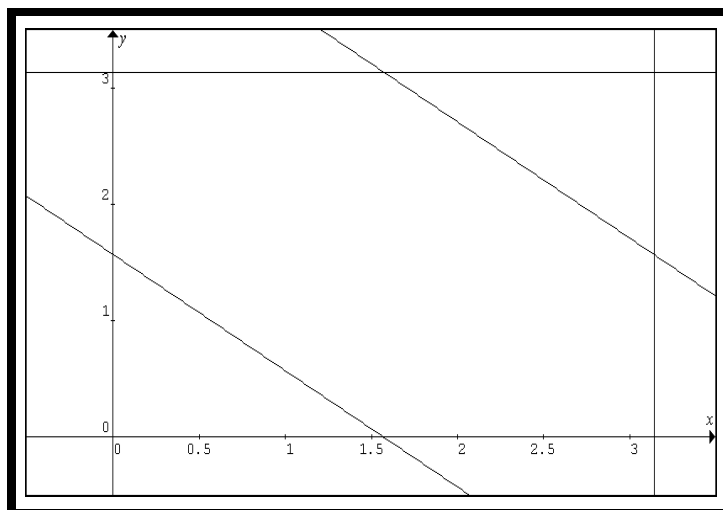


Figura 19. Gráfica de la región del ejercicio 11

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+y) dy dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{3\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) dy dx - \\ & \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) dy dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{3\pi/2-x} \cos(x+y) dy dx \\ & \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+y) dy dx = \frac{\pi}{2} - 1. \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{3\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) dy dx = \frac{\pi}{2} - 1. \\ & \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) dy dx = -\frac{\pi}{2} - 1. \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{3\pi/2-x} \cos(x+y) dy dx = -\frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Total:  $2\pi$ .



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 268 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**12.** Considere

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \operatorname{tg}(y) \\ 1 & \text{si } x < \operatorname{tg}(y) \end{cases}.$$

Sea  $D = [-1, \sqrt{3}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Plantee la integral

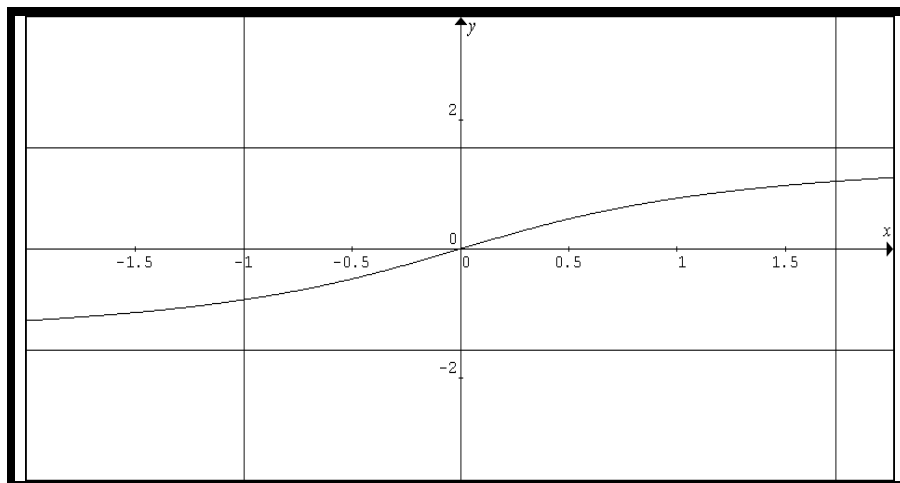
$$\iint_D f(x, y) dA$$

en el orden

**a.**  $dx dy$ .

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 20)



**Figura 20.** Representación gráfica de la región del ejercicio 12

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{\text{REGIÓN 1}} 1 dA + \iint_{\text{REGIÓN 2}} 0 dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \int_{-1}^{\operatorname{tg}(y)} dx dy + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_{-1}^{\sqrt{3}} dx dy$$

**b.**  $dy dx$ .

**Solución.**

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{\text{REGIÓN 1}} 1 dA + \iint_{\text{REGIÓN 2}} 0 dA = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \int_{\arctg(x)}^{\pi/2} dy dx$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 269 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

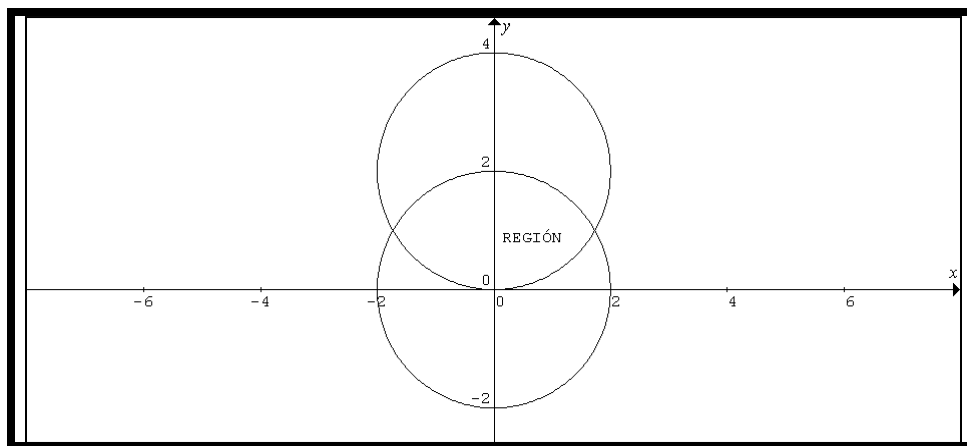
CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

- 13.** Calcule el área de la región del plano xy en el primer cuadrante, interior a las curvas  
 $x^2 + y^2 = 4$  ;  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ .

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 21)



**Figura 21. Representación gráfica de la región del ejercicio 13**

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2 ; \quad x^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r\sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 4\sin(\theta) \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi/6} \int_0^{4\sin(\theta)} r dr d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^2 r dr d\theta = \int_0^{\pi/6} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{4\sin(\theta)} d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} 8\sin^2(\theta) d\theta + 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta = \int_0^{\pi/6} 8\sin^2(\theta) d\theta + \pi - \frac{\pi}{3} = \int_0^{\pi/6} 4(1 - \cos(2\theta)) d\theta + \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$= 4 \left( \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) \Big|_0^{\pi/6} + \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

- 14.** Calcule

$$\iint_R e^{1+xy} (x+y) |x-y| dA ,$$

donde R es la región del plano xy limitada por las curvas

$$xy = \frac{1}{2} , \quad xy = 2 , \quad x + y = 2 , \quad x + y = 4 .$$

**Solución.**

Región actual D (ver figura 22)



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 270 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

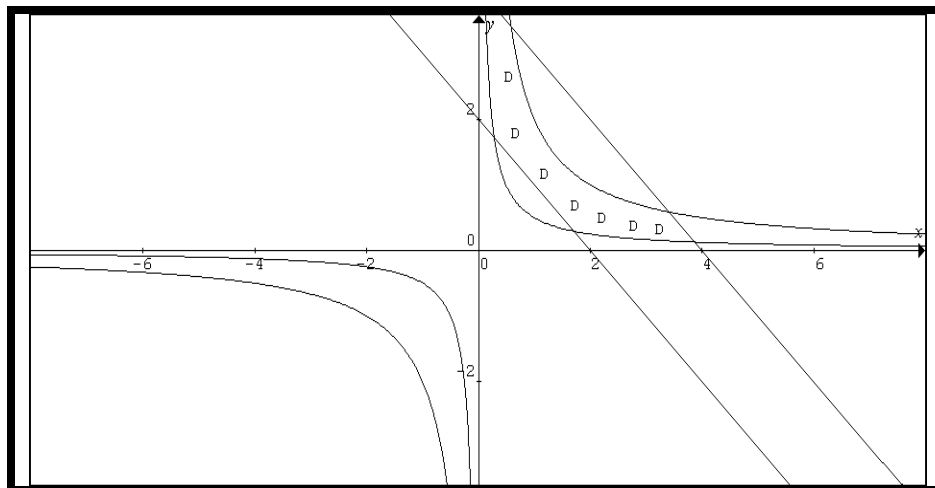


Figura 22. Región actual D de la pregunta 14

Cambios de variable:  $u = xy$  ,  $v = x + y$  .  $|d(J(x, y))| = |y - x|^{-1}$  .

$$xy = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \quad , \quad xy = 2 \Rightarrow u = 2 \quad , \quad x + y = 2 \Rightarrow v = 2 \quad , \quad x + y = 4 \Rightarrow v = 4$$

Región nueva T (ver figura 23)

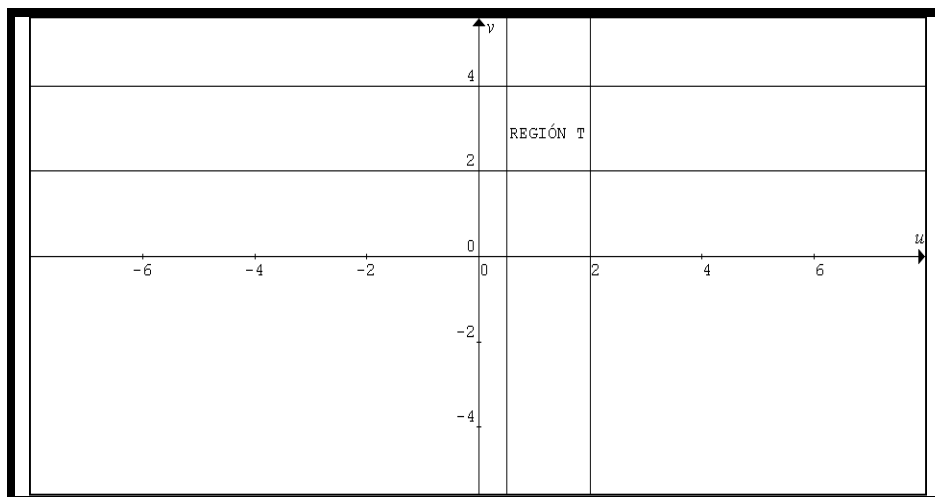


Figura 23. Región nueva T de la pregunta 15

$$\int_2^4 \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{u+1} v du dv = \frac{v^2}{2} \Big|_2^4 e^{1+u} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = 6(e^3 - e^{3/2}).$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 271 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**15.** Una lámina homogénea tiene la forma de la región del primer cuadrante limitada por las curvas  $xy = 1$ ,  $xy = 4$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 4x$ . Halle el momento de inercia polar.

**Solución.**

Cambios:  $u = xy$ ,  $v = y/x$

$$J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v \Rightarrow J(u, v) = \frac{1}{2v}.$$

Curvas:  $u = 1$ ,  $u = 4$ ,  $v = 2$ ,  $v = 4$

$$\begin{aligned} k \int_2^4 \int_1^4 \left( \frac{u}{v} + u \cdot v \right) \frac{1}{2v} du dv &= \frac{k}{2} \int_2^4 \int_1^4 \left( \frac{u}{v^2} + u \right) du dv = \frac{k}{2} \int_2^4 \left( \frac{u^2(1+v^2)}{2v^2} \right) \bigg|_1^4 dv \\ &= \frac{15k}{4} \int_2^4 \frac{1+v^2}{v^2} dv = \frac{15k}{4} \left( -\frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{15}{4} \cdot \frac{9}{4} k = \frac{135}{16} k \end{aligned}$$

**16.** Cálculo de  $\Gamma(\frac{1}{2})$ .

**Solución.**

Por definición

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = (u = t^{1/2} \Rightarrow u^2 = t \Rightarrow 2u du = dt) \int_0^{\infty} e^{-u^2} \frac{2u}{u} du = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma(\frac{1}{2}) \right]^2 &= 4 \left[ \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right]^2 = 4 \left[ \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right] \left[ \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right] = 4 \left[ \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right] \left[ \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right] \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv \end{aligned}$$

Si se hace el cambio a polares  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  se tiene

$$\left[ \Gamma(\frac{1}{2}) \right]^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-(r^2)} r dr d\theta = -2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-(r^2)} (-2r) dr d\theta = \pi.$$

Por tanto  $\left[ \Gamma(\frac{1}{2}) \right] = \sqrt{\pi}$ .

**17.** Cálculo de

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

**Solución.**



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 272 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$I^2 = \left[ \int_0^\infty e^{-u^2} du \right]^2 = \left[ \int_0^\infty e^{-u^2} du \right] \left[ \int_0^\infty e^{-v^2} dv \right] = \left[ \int_0^\infty e^{-u^2} du \right] \left[ \int_0^\infty e^{-v^2} dv \right]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du dv$$

Si se hace el cambio a polares  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  se tiene

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-(r^2)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-(r^2)} (2r) dr d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Por tanto  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**18.** Sea  $f(x)$  la distribución normal con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$  dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} \quad -\infty < x < \infty.$$

Se quiere calcular el valor de

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} dx.$$

Si se hace el cambio

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sigma}$$

se obtiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Sea

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right]^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} du dv \right].$$

Si se hace el cambio a polares  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  se tiene

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} du dv \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(r^2)} r dr d\theta \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1.$$

Por lo tanto  $I = 1$ .



# LA INTEGRAL TRIPLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 273 de 305

U.C.V.

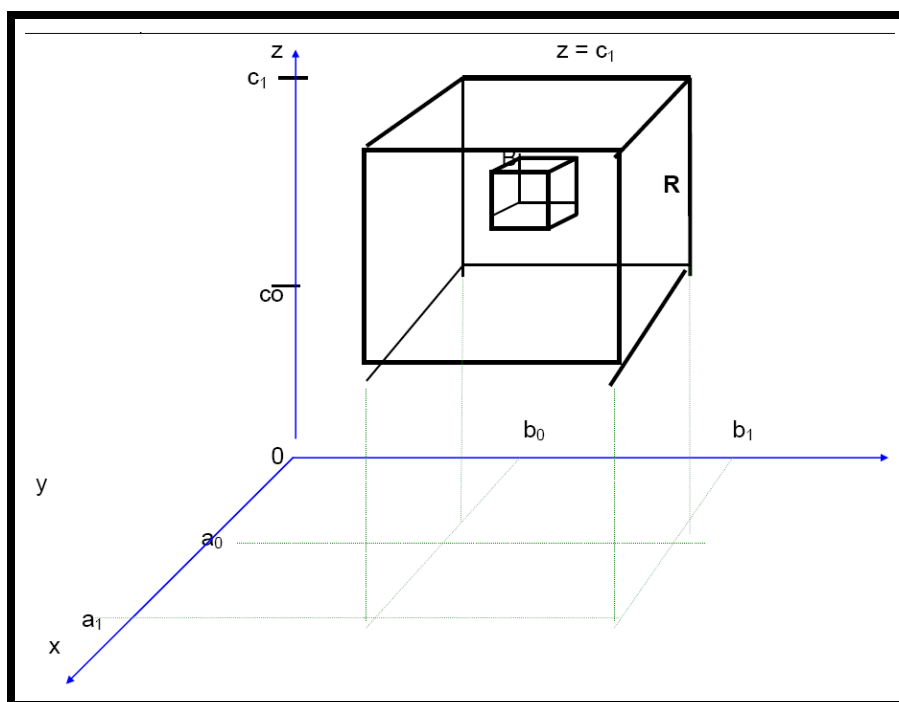
F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

## 3.8. LA INTEGRAL TRIPLE

La definición de integral triple es análoga a la de integral doble. En el caso más simple consideremos una caja rectangular  $R$  acotada por 6 planos  $x = a_0$ ,  $x = a_1$ ,  $y = b_0$ ,  $y = b_1$ ,  $z = c_0$ ,  $z = c_1$ ; y sea  $u = f(x, y, z)$  una función de tres variables definida en todo  $(x, y, z)$  de  $R$ . Se subdivide el espacio en cajas rectangulares mediante planos paralelos a los planos coordenados. Sean  $B_1, B_2, \dots, B_n$  aquellas cajas de la subdivisión que contienen puntos de  $R$ . (ver figura 24)



**Figura 24. Intuición geométrica de la integral triple**

Se designa con  $V(B_i)$  el volumen de la  $i$ -ésima caja  $B_i$ . Se elige un punto de coordenadas  $P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)$  en  $B_i$ , esta elección se puede hacer en forma arbitraria. La suma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \gamma_i) \cdot V(B_i)$$

es una aproximación de la integral triple. La norma de subdivisión es la longitud de la mayor diagonal de las cajas  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Si las sumas anteriores tienden a un límite cuando la norma de la subdivisión tiende a cero y para elecciones arbitrarias de los puntos  $P_i$ , a este límite lo llamaremos la **integral triple de  $f$  sobre  $R$** . La expresión



# LA INTEGRAL TRIPLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 274 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$\iiint_R f(x, y, z) \cdot dV$$

se utiliza para representar el límite.

Así como la integral doble es igual a dos integrales iteradas, también la integral triple es igual a tres integrales iteradas. Para el caso de la caja rectangular  $R$  se obtiene

$$\iiint_R f(x, y, z) \cdot dV = \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{c_0}^{c_1} f(x, y, z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx .$$

**Observación 1.** Las integrales iteradas se efectúan considerando todas las variables constantes, excepto aquella respecto a la cual se integra. Este concepto se puede extender a  $n$  variables.

**Ejemplo 12.** Evalúe la integral triple

$$\iiint_B xyz^2 dV ,$$

donde  $B$  es la caja rectangular dada por  $B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$ .

**Solución.**

$$\iiint_B xyz^2 dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dy dz = \frac{27}{4} .$$

**Ejemplo 13.** Sea

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 f(x, y, z) dz dy dx .$$

Plantee en el orden  $dx dz dy$ .

**Solución.**

$$\int_{-2}^0 \int_{-y}^2 \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx dz dy + \int_0^2 \int_y^2 \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx dz dy .$$





## CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL TRIPLE

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 275 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

### 3.9. CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL TRIPLE

Sea  $T$  una transformación que delimita una región  $S$  en un espacio  $uvw$  sobre una región  $R$  en el espacio  $xyz$  por medio de las ecuaciones

$$x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w).$$

El jacobiano de  $T$  es el siguiente determinante de  $3 \times 3$ :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Bajo las mismas hipótesis vistas en integrales dobles, se tiene la siguiente fórmula para integrales triples:

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

### 3.10. COORDENADAS CILÍNDRICAS

En el sistema de coordenadas cilíndricas, un punto  $P$  del espacio tridimensional está representado por la terna ordenada  $(r, \theta, z)$ , donde  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares de la proyección de  $P$  en el plano  $xy$  y  $z$  es la distancia dirigida del plano  $xy$  a  $P$  (ver figura 25). Para convertir de coordenadas cilíndricas a rectangulares se usan las ecuaciones dadas por

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z,$$

mientras que, para convertir de coordenadas rectangulares a cilíndricas se usan

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan(\theta) = y / x, \quad z = z.$$

Estas coordenadas son preferidas cuando hay simetría alrededor de un eje.

**Ejemplo 14.** Determine el punto con coordenadas cilíndricas  $(2, 2\pi/3, 1)$  y encuentre sus coordenadas rectangulares.

**Solución.**

$$x = 2 \cos(2\pi/3) = -1, \quad y = 2 \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}, \quad z = 1.$$



# COORDENADAS CILÍNDRICAS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 276 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

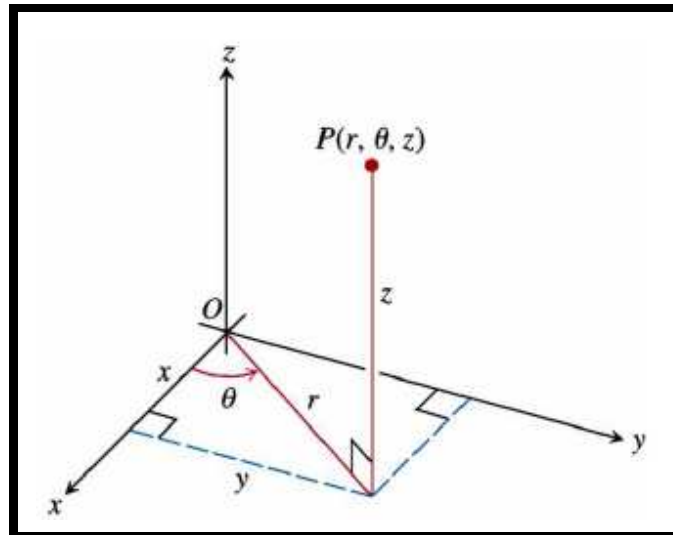


Figura 25. Sistema de coordenadas cilíndricas

**Ejemplo 15.** Determine las coordenadas cilíndricas del punto con coordenadas rectangulares  $(3, -3, -7)$ .

**Solución.**

$$r = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \quad , \quad \theta = \arctg(-1) = \frac{7\pi}{4} \quad , \quad z = -7.$$

**Ejemplo 16.** Describa las siguientes superficies en coordenadas cilíndricas.

- $z = r$ . Un cono
- $r = c$ . Un cilindro circular recto
- $\theta = c$ . Una recta que pasa por el origen
- $z = c$ . Un plano horizontal.

**Ejemplo 17.** Encuentre la ecuación en coordenadas cilíndricas del elipsoide de ecuación

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1.$$

**Solución.**

$$4(x^2 + y^2) + z^2 = 1 \Rightarrow 4r^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = 1 - 4r^2.$$

Si se quiere realizar un cambio de variables en las integrales triples usando las coordenadas cilíndricas se tiene que  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ ,  $z = z$ , entonces:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$



## COORDENADAS CILÍNDRICAS

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 277 de 305

Prof.  
José Luis Quintero

Por tanto

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}^{u_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dz dr d\theta.$$

**Ejemplo 18.** Un sólido E está dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , debajo del plano  $z = 4$  y arriba del paraboloide  $z = 1 - x^2 - y^2$ . Calcule su volumen.

**Solución.**

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{1-x^2-y^2}^4 dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 r dz dr d\theta = \frac{7}{2} \pi.$$

### 3.11. COORDENADAS ESFÉRICAS

Las coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  de un punto P en el espacio se ilustra en la figura, donde  $\rho = |OP|$  es la distancia del origen a P,  $\theta$  es el mismo ángulo que en las coordenadas cilíndricas y  $\phi$  es el ángulo entre el semieje positivo z y el segmento de recta OP. Note que  $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  (ver figura 260).

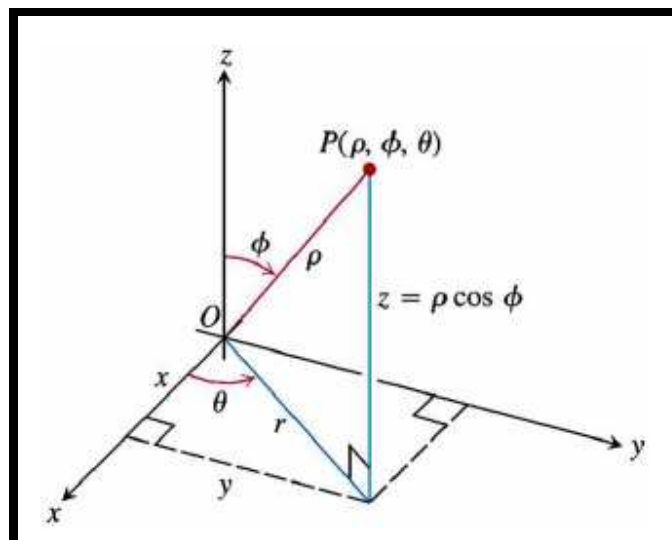


Figura 26. Sistema de coordenadas esféricas



# COORDENADAS ESFÉRICAS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 278 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

Las siguientes equivalencias permiten las transformaciones de coordenadas esféricas a rectangulares:

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \quad z = \rho \cos(\phi).$$

Por otro lado se tiene que

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

**Ejemplo 19.** El punto  $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$  está dado en coordenadas esféricas. Halle el punto y encuentre sus coordenadas rectangulares.

**Solución.**

$$x = 2 \sin(\frac{\pi}{3}) \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad y = 2 \sin(\frac{\pi}{3}) \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad z = 2 \cos(\frac{\pi}{3}) = 1.$$

**Ejemplo 20.** Describa cada una de las siguientes ecuaciones dadas en coordenadas esféricas.

- a.  $5\rho = c$ . Esfera
- b.  $\theta = c$ . Plano
- c.  $\phi = c$ . Semicono superior

**Ejemplo 21.** Encuentre la ecuación en coordenadas esféricas, para el hiperboloide de dos hojas  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ .

**Solución.**

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 [\sin^2(\phi) \cos(2\theta) - \cos^2(\phi)] = 1.$$

**Ejemplo 22.** Encuentre una ecuación rectangular para la superficie cuya ecuación esférica es  $\rho = \sin(\theta) \sin(\phi)$ .

**Solución.**

$$\rho^2 = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = y \Rightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4} \text{ Esfera.}$$

**Ejemplo 23.** Evalúe

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

donde B es el sólido encerrado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución.**

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^4 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{5} \pi.$$



# COORDENADAS ESFÉRICAS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 279 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**Ejemplo 24.** Evalúe

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV,$$

donde E está limitado abajo por el cono  $\phi = \frac{\pi}{6}$  y arriba por la esfera  $\rho = 2$ .

**Solución.**

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^3 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta = 4\pi(2 - \sqrt{3}).$$

**Ejemplo 25.** El punto  $(0, 2\sqrt{3}, -2)$  está dado en coordenadas rectangulares. Encuentre sus coordenadas esféricas.

**Solución.**

$$\rho^2 = 0 + 12 + 4 = 16 \Rightarrow \rho = 4, \quad \phi = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \text{ Punto } (4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$$

## 3.12. APLICACIONES DE LAS INTEGRALES TRIPLES

Todas las aplicaciones de integrales dobles se pueden extender de inmediato a integrales triples. Por ejemplo, si la función de densidad de un objeto sólido que ocupa la región E es  $\rho(x, y, z)$ , en unidades de masa por unidad de volumen, en cualquier punto  $(x, y, z)$  dado, entonces su **masa** es

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV$$

y sus **momentos** alrededor de los tres planos de coordenadas son

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x, y, z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_E y\rho(x, y, z) dV, \quad M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z) dV.$$

El **centro de masa** está ubicado en el punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$



## APLICACIONES DE LAS INTEGRALES TRIPLES

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 280 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

Si la densidad es constante, el centro de masa del sólido se denomina **centroide** de E.

Los **momentos de inercia** alrededor de los tres ejes de coordenadas son

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV ,$$

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV ,$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

La carga eléctrica total de un objeto sólido que ocupa una región E y que tiene densidad de carga  $\sigma(x, y, z)$  viene dada como

$$\iiint_E \sigma(x, y, z) dV .$$

Si se tienen tres variables aleatorias continuas X, Y y Z, la **función de densidad conjunta** de ellas es una función de tres variables tales que la probabilidad de que (X,Y,Z) se encuentre en E es

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z) dV ,$$

en particular, se tiene que

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d, r \leq Z \leq s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx .$$

La función de densidad conjunta satisface que  $f(x, y, z) \geq 0$  y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz dy dx = 1 .$$



## APLICACIONES DE LAS INTEGRALES TRIPLES

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 281 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**Ejemplo 26.** Encuentre el centro de masa de un baul de madera de densidad constante igual a 1 cuya forma está limitada por el cilindro parabólico  $x = y^2$  y los planos  $x = z$ ,  $z = 0$  y  $x = 1$ .

**Solución.**

El sólido E se proyecta sobre el plano xy. Las superficies inferior y superior de E son los planos  $z = 0$  y  $z = x$ . La masa viene dada por

$$m = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x dz dx dy = \frac{4}{5}.$$

Debido a la simetría de E y la función densidad alrededor del plano xz, se puede decir de inmediato que  $M_{xz} = 0$  y, por lo tanto,  $\bar{y} = 0$ . Los otros momentos son

$$M_{yz} = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x dz dx dy = \frac{4}{7}, \quad M_{xy} = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z dz dx dy = \frac{2}{7}.$$

En consecuencia, el centro de masa es

$$\left( \frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left( \frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14} \right).$$

**Ejemplo 27.** Utilice coordenadas cilíndricas para calcular la masa del sólido ubicado en el primer octante, que se encuentra dentro del cilindro de ecuación  $x^2 + y^2 = 4x$  y limitado superiormente por la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ . La densidad volumétrica de masa en cada punto es igual al producto de las coordenadas del punto.

**Solución.**

Cilíndro:  $(x - 2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \Rightarrow r = 4 \cos(\theta)$

Esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$ . Jacobiano: r

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos(\theta)} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) z dz dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos(\theta)} (16 - r^2) r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) \left( \frac{16 \cdot 4^4 \cos^4(\theta)}{4} - \frac{4^6 \cos^6(\theta)}{6} \right) d\theta = \frac{1}{2} \left( -\frac{4^5}{6} \cos^6(\theta) + \frac{4^6}{6 \cdot 8} \cos^8(\theta) \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{4^5}{6} - \frac{4^6}{6 \cdot 8} \right) = \frac{4^5}{2} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \frac{4^5}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{128}{3} \end{aligned}$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 282 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

### 3.13. EJERCICIOS RESUELTOS

19. Sea T el sólido definido por

$$x^2 + z^2 \leq y \leq 2 + \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Plantee las integrales que permitan calcular el volumen del sólido en coordenadas cartesianas con:

a.  $dV = dydx dz$ .

**Solución.**

$$V = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \int_{x^2+z^2}^{2+\sqrt{x^2+z^2}} dy dx dz.$$

b.  $dV = dx dy dz$ .

**Solución.**

$$V = 4 \int_0^2 \int_{z^2}^{z+2} \int_0^{\sqrt{y-z^2}} dx dy dz + 4 \int_0^2 \int_{z+2}^4 \int_{\sqrt{(y-2)^2 - z^2}}^{\sqrt{y-z^2}} dx dy dz$$

20. Un sólido, en el primer octante, está limitado por las superficies

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 6 - x^2 - y^2.$$

Exprese las integrales iteradas que calculan el volumen del sólido en coordenadas cilíndricas.

**Solución.**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} \int_0^{6-r^2} r dz dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\csc(\theta)} \int_0^{6-r^2} r dz dr d\theta$$

21. Calcule el volumen del sólido que está sobre el cono  $\phi = \frac{\pi}{3}$  y debajo de la esfera  $\rho = 4 \cos(\phi)$ .

**Solución.**

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{4 \cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta = 10\pi.$$

22. Sea la integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^r r^4 z \cos^2(\theta) \sin(\theta) dz dr d\theta$$





## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 283 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

dada en coordenadas cilíndricas. Expresé la integral en coordenadas esféricas.

**Solución.**

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} x^2 y z dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2/\sin(\phi)} \rho^6 \sin^4(\phi) \cos(\phi) \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\rho d\phi d\theta$$

**23.** Una integral triple sobre una región Q en el espacio, viene expresada mediante integrales iteradas en coordenadas cilíndricas por

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^4 r^3 dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{5-r} r^3 dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_2^3 \int_2^{5-r} r^3 dz dr d\theta.$$

Expresé la integral I en coordenadas esféricas.

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 27)

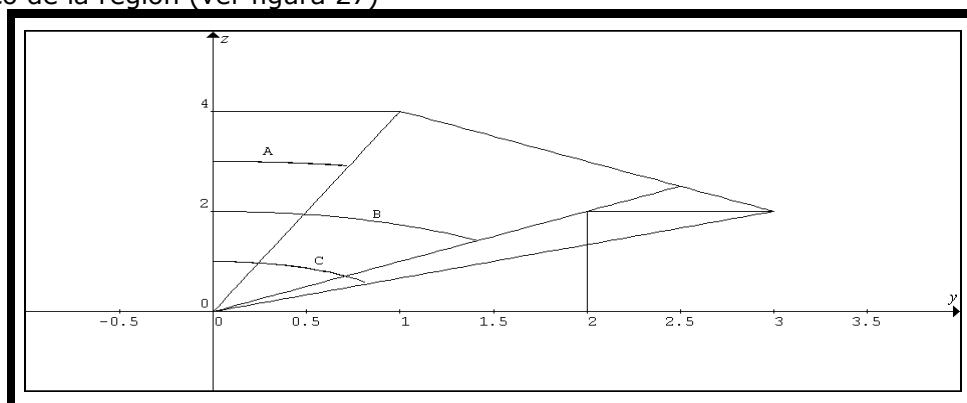


Figura 27. Gráfica del ejercicio 5

$$A = \arctg\left(\frac{1}{4}\right) ; B = \arctg\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4} ; C = \arctg\left(\frac{3}{2}\right) ; r^2 = \rho^2 \sin^2(\phi)$$

$$z = 4 \Rightarrow \rho \cos(\phi) = 4 \Rightarrow \rho = 4 \sec(\phi) ; z = 5 - r \Rightarrow \rho \cos(\phi) = 5 - \rho \sin(\phi)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{5}{\cos(\phi) + \sin(\phi)}$$

$$z = 2 \Rightarrow \rho \cos(\phi) = 2 \Rightarrow \rho = 2 \sec(\phi) ; x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 \sin^2(\phi) = 4 \Rightarrow \rho \sin(\phi) = 2$$

$$\Rightarrow \rho = 2 \csc(\phi)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctg(\frac{1}{4})} \int_0^{4 \sec(\phi)} \rho^4 \sin^3(\phi) d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\arctg(\frac{1}{4})}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{5}{\cos(\phi) + \sin(\phi)}} \rho^4 \sin^3(\phi) d\rho d\phi d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \csc(\phi)} \rho^4 \sin^3(\phi) d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg(\frac{3}{2})} \int_{2 \sec(\phi)}^{\frac{5}{\cos(\phi) + \sin(\phi)}} \rho^4 \sin^3(\phi) d\rho d\phi d\theta$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 284 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

24. Calcule la integral

$$\iiint_T e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dV,$$

sabiendo que T es el sólido comprendido entre las esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  en el primer octante, utilizando coordenadas esféricas.

**Solución.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 e^{\rho^3} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} e^{\rho^3} \Big|_1^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = \frac{e^8 - e}{3} \int_0^{\pi/2} -\cos(\phi) \Big|_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{(e^8 - e)\pi}{6} \end{aligned}$$

25. Dadas las integrales que calculan el volumen de cierto sólido usando las coordenadas cilíndricas dadas por

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_1^4 \int_r^4 r dz dr d\theta,$$

plantee la(s) integrals que calculan su volumen en coordenadas:

a. cartesianas proyectando en el plano xz.

**Solución.**

Proyección en xz: (usando simetría solo mostrando ¼ del sólido) (ver figura 28)

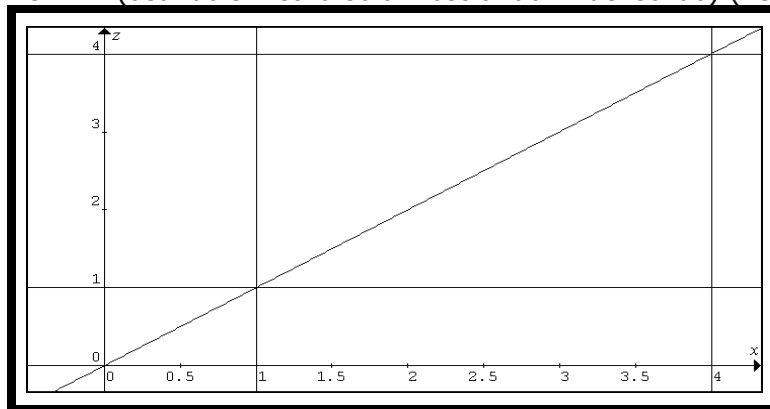


Figura 28. Región del ejercicio 7

$$I = 4 \left[ \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} dy dz dx + \int_1^4 \int_x^4 \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} dy dz dx + \int_0^1 \int_1^4 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} dy dz dx \right]$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 285 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

b. esféricas

**Solución.**

$$I = 4 \left[ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_{\arctg(1/4)}^{\pi/4} \int_{\csc(\phi)}^{4 \sec(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \right]$$

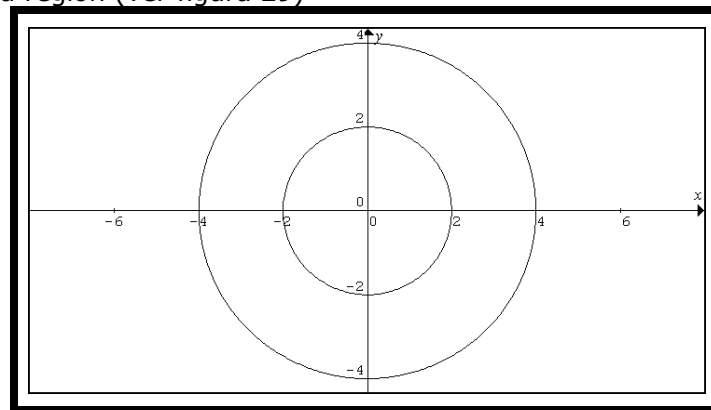
**26.** Plantee la integral triple que calcula el volumen del sólido definido por

$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16 :$$

a. Proyectando en el plano xy.

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 29)



**Figura 29. Región del ejercicio 8**

$$4 \left[ \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx \right]$$

b. En coordenadas esféricas.

**Solución.**

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\phi) \sin^2(\theta) = \rho^2 \sin^2(\phi) = 4 \Rightarrow \rho = 2 \csc(\phi)$$

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \rho^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\phi) \sin^2(\theta) = \rho^2 \sin^2(\phi) = 16 \Rightarrow \rho = 4 \csc(\phi)$$

$$4 \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{2 \csc(\phi)}^{4 \csc(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 286 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**27.** Sea  $S_1$  el sólido limitado por las superficies

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Sea  $S_2$  el sólido definido mediante las desigualdades dadas por

$$z \geq 0, \quad z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Sea  $S$  el sólido definido como  $S = S_2 - S_1$ . Plantee, mediante integrales triples, el volumen de  $S$  usando coordenadas:

**a.** Cilíndricas.

**Solución.**

Volumen de  $S_1$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Volumen de  $S_2$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{3-r} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Volumen de  $S$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{3-r} r \, dz \, dr \, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

**b.** Esféricas.

**Solución.**

Volumen de  $S_1$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\cos(\varphi)} \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

Volumen de  $S_2$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\arctg(2)} \int_0^{3/(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))} \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\arctg(2)}^{\pi/2} \int_0^{2/\sin(\varphi)} \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

Volumen de  $S$ : Volumen de  $S_2$  - Volumen de  $S_1$ .

**28.** Sea  $S$  el sólido definido por

$$z \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \quad ; \quad x^2 + y^2 \leq 9 \quad ; \quad x^2 + y^2 + (z - 5)^2 \leq 25.$$

Plantee las integrales que permitan calcular el volumen del sólido  $S$  utilizando coordenadas:



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 287 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

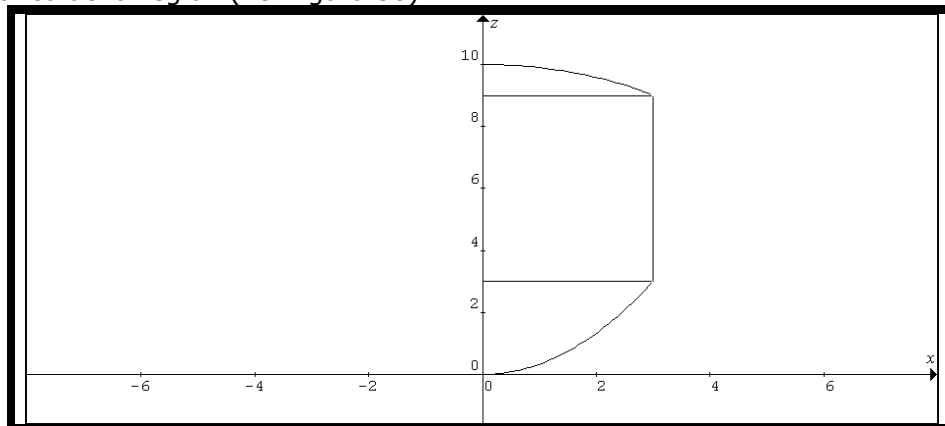
CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

- a. Cartesianas en el orden  $dydx dz$ .

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 30)



**Figura 30. Proyección del sólido en el plano  $xz$**

$$V = 4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{3z}} \int_0^{\sqrt{3z-x^2}} dy dx dz + 4 \int_3^9 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy dx dz +$$

$$4 \int_9^{10} \int_0^{\sqrt{25-(z-5)^2}} \int_0^{\sqrt{25-(z-5)^2-x^2}} dy dx dz$$

- b. Cilíndricas con proyección en el plano  $xy$ .

**Solución.**

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{\frac{1}{3}r^2}^{5+\sqrt{25-r^2}} r dz dr d\theta$$

**29.** Sea  $T$  el sólido definido por

$$z \geq x^2 + y^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 \leq 9 \quad ; \quad z \leq 9 + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Plantee las integrales que permitan calcular el volumen del sólido  $S$  utilizando coordenadas:

- a. Esféricas.

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 31)



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 288 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

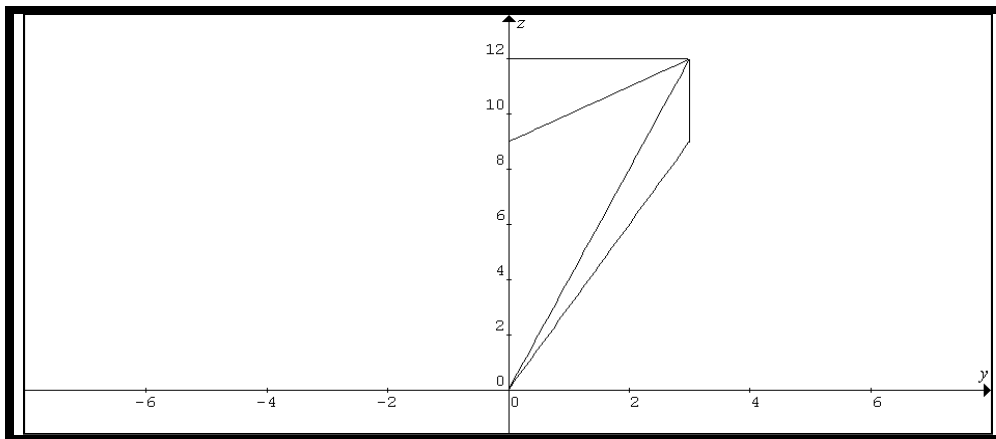


Figura 31. Identificación del ángulo respecto al eje z positivo

Ecuaciones esféricas:

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho \cos(\phi) = \rho^2 \sin^2(\phi) \Rightarrow \rho [\rho \sin^2(\phi) - \cos(\phi)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = \operatorname{ctg}(\phi) \csc(\phi) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow \rho = 3 \csc(\phi)$$

$$z = 9 + \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho \cos(\phi) = 9 + r \Rightarrow \rho \cos(\phi) = 9 + \rho \sin(\phi) \Rightarrow \rho = \frac{9}{\cos(\phi) - \sin(\phi)}$$

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} \int_{\arctg(1/3)}^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{ctg}(\phi) \csc(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta + 4 \int_0^{\pi/2} \int_{\arctg(1/4)}^{\arctg(1/3)} \int_0^{3 \csc(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ + 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\arctg(1/4)} \int_0^{9/(\cos(\phi) - \sin(\phi))} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

b. Cartesianas en el orden  $dzdydx$ .

**Solución.**

$$V = 4 \left[ \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{9+\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx \right]$$

30. Sea T el sólido definido por

$$x^2 + y^2 \leq 6x \quad ; \quad \sqrt{x^2 + y^2} \geq z \quad ; \quad z \geq 0.$$

Use coordenadas cilíndricas para calcular su volumen.

**Solución.**

Ecuaciones cilíndricas:

$$x^2 + y^2 = 6x \Rightarrow r^2 = 6r \cos(\theta) \Rightarrow r[r - 6 \cos(\theta)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 6 \cos(\theta) \end{cases}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = r$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 289 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{6\cos(\theta)} \int_0^r r dz dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{6\cos(\theta)} r z \Big|_0^r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{6\cos(\theta)} r^2 dr d\theta \\
 &= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \Big|_0^{6\cos(\theta)} d\theta = \frac{216}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = 144 \int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta \\
 &= 144 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(\theta)) \cos(\theta) d\theta = 144 \left[ \sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= 144 \left[ \sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_0^{\pi/2} = 144 \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{144 \cdot 2}{3} = \frac{288}{3} = 96
 \end{aligned}$$

**31.** Sea T el sólido definido por

$$\begin{cases} z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} & \text{si } 2 \leq z \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 4 & \text{si } 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

**a.** Plantee la(s) integral(es) que permite(n) calcular el volumen de T en coordenadas:

**a.1.** cartesianas en el orden  $dx dy dz$ .

**Solución.**

$$4 \left[ \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx dy dz + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4-(z-2)^2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2-(z-2)^2}} dx dy dz \right]$$

**a.2.** esféricas.

**Solución.**

$$4 \left[ \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2/\sin(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4\cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \right]$$

**a.3.** cilíndricas con proyección en  $xy$ .

**Solución.**

$$4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{2+\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta$$

**b.** Calcule el volumen de T.

**Solución.**

$$V = 8\pi + \frac{2}{3}\pi \cdot 8 = \left( 8 + \frac{16}{3} \right) \pi = \frac{40}{3} \pi$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 290 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**32.** Utilice coordenadas cilíndricas para calcular la masa del sólido ubicado en el primer octante que se encuentra dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 4x$  y limitado superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ . La densidad volumétrica de masa en cada punto es igual al producto de las coordenadas del punto.

**Solución.**

Cilindro:

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 4 \cos(\theta) \end{cases}.$$

Semiesfera superior :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow z = \sqrt{16 - r^2}.$$

Densidad:

$$\rho(x, y, z) = xyz \Rightarrow r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) z.$$

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos(\theta)} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) z dz dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos(\theta)} r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) (16 - r^2) dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos(\theta)} \cos(\theta) \sin(\theta) (16r^3 - r^5) dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta) \left( 4r^4 - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^{4 \cos(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta) \left( 4^5 \cdot \cos^4(\theta) - \frac{4^6}{6} \cos^6(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left( 4^5 \cos^5(\theta) - \frac{4^6}{6} \cos^7(\theta) \right) \sin(\theta) d\theta = \int_0^1 \left( 2^9 u^5 - \frac{4^5}{3} u^7 \right) du = \left( \frac{2^9}{6} u^6 - \frac{4^5}{3.8} u^8 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2^9}{6} - \frac{4^5}{3.8} = \frac{2^8}{3} - \frac{4^4}{3.2} = \frac{2^8}{3} - \frac{2^8}{3.2} = \frac{2^8}{3} - \frac{2^7}{3} = \frac{256 - 128}{3} = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

**33.** Sea T el sólido homogéneo definido por

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \quad ; \quad x^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9.$$

Usando coordenadas esféricas calcule su masa.

**Solución.**

Intersecciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0 \Rightarrow 9 - 6z = 0 \Rightarrow z = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Curva Intersección: } x^2 + y^2 = \frac{27}{4} \quad ; \quad z = \frac{3}{2}$$





## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 291 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

Ecuaciones esféricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow \rho = 3 \quad ; \quad x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9 \Rightarrow \rho^2 - 6\rho \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 6 \cos(\phi) \end{cases}$$

Gráfico de la región (ver figura 32)

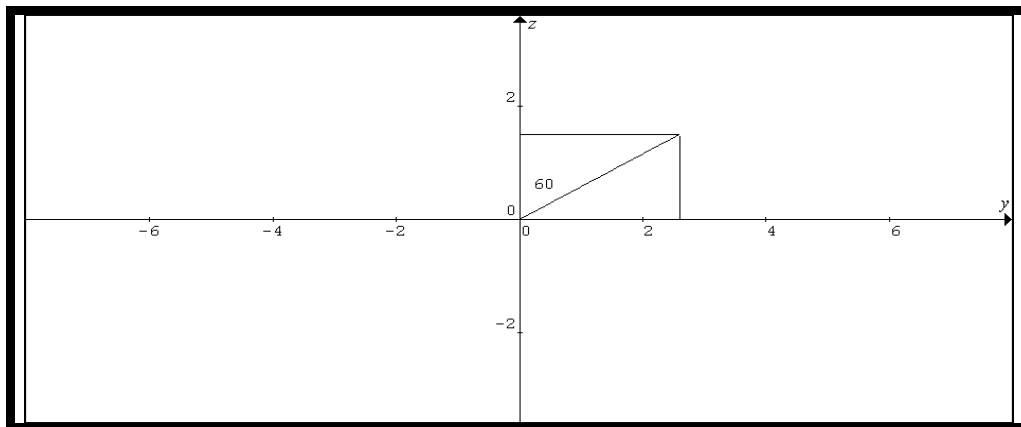


Figura 32. Identificación del ángulo respecto al eje z positivo

$$\begin{aligned} m &= k \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^3 \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{6 \cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \right] \\ &= k \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} \sin(\phi) d\phi \int_0^3 \rho^2 d\rho + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(\phi) [\rho^3]_0^{6 \cos(\phi)} d\phi d\theta \right] \\ &= k \left[ 2\pi [-\cos(\phi)]_0^{\pi/3} \cdot \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 + \frac{216}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^3(\phi) \sin(\phi) d\phi d\theta \right] = k \left[ 9\pi + \frac{72}{4} \int_0^{2\pi} [-\cos^4(\phi)]_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \right] \\ &= k \left[ 9\pi + 18 \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} d\theta \right] = k \left[ 9\pi + \frac{9\pi}{4} \right] = \frac{45\pi k}{4} \end{aligned}$$

34. Sea T el sólido homogéneo definido por

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \quad ; \quad x^2 + y^2 + (z-2)^2 \geq 4.$$

Use coordenadas esféricas para calcular el momento alrededor del plano xy ( $M_{xy}$ ).

**Solución.**

Intersecciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \Rightarrow 16 - 4z = 0 \Rightarrow z = 4$$

Curva Intersección:  $x^2 + y^2 = 12$  ;  $z = 4$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 292 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

Ecuaciones esféricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow \rho = 4 \quad ; \quad x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 - 4\rho \cos(\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 4 \cos(\phi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{4 \cos(\phi)}^4 \rho^3 \sin(\phi) \cos(\phi) d\rho d\phi d\theta + k \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^4 \rho^3 \sin(\phi) \cos(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(\phi) \cos(\phi) \left[ \rho^4 \right]_{4 \cos(\phi)}^4 d\phi d\theta + \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\phi) \cos(\phi) \left[ \rho^4 \right]_0^4 d\phi d\theta \\ &= \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(\phi) \cos(\phi) \left[ 4^4 - 4^4 \cos^4(\phi) \right] d\phi d\theta + \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\phi) \cos(\phi) \left[ 4^4 \right] d\phi d\theta \\ &= \frac{4^4 k}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi d\theta - \frac{4^4 k}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(\phi) \cos^5(\phi) d\phi d\theta \\ &\quad + \frac{4^4 k}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi d\theta \\ &= \frac{4^4 k}{8} \int_0^{2\pi} \left[ \sin^2(\phi) \right]_0^{\pi/2} d\theta + \frac{4^4 k}{24} \int_0^{2\pi} \left[ \cos^6(\phi) \right]_0^{\pi/2} d\theta + \frac{4^4 k}{8} \int_0^{2\pi} \left[ \sin^2(\phi) \right]_{\pi/2}^{\pi} d\theta \\ &= \frac{2\pi \cdot 4^4 k}{8} - \frac{2\pi \cdot 4^4 k}{24} - \frac{2\pi \cdot 4^4 k}{8} = -\frac{2\pi \cdot 4^4 k}{24} = -\frac{\pi \cdot 4^4 k}{12} = -\frac{\pi \cdot 4^3 k}{3} = -\frac{64\pi k}{3} \end{aligned}$$

**35.** Utilice un cambio de variable adecuado para calcular la masa de la región de densidad  $\rho(x, y, z) = xyz$  que se encuentra limitada por las superficies

$$xy = 1, \quad xy = 9, \quad xz = 4, \quad xz = 9, \quad yz = 9, \quad yz = 16.$$

**Solución.**

Cambios de variables:  $u = xy$ ,  $v = xz$ ,  $w = yz$ .

Cálculo del jacobiano  $J(x, y, z)$ :

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = -2xyz.$$

Superficies:  $u = 1$ ,  $u = 9$ ,  $v = 4$ ,  $v = 9$ ,  $w = 9$ ,  $w = 16$ .

$$m = \frac{1}{2} \int_1^9 \int_4^9 \int_9^{16} dw dv du = 140.$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 293 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**36.** Sea Q el sólido definido por

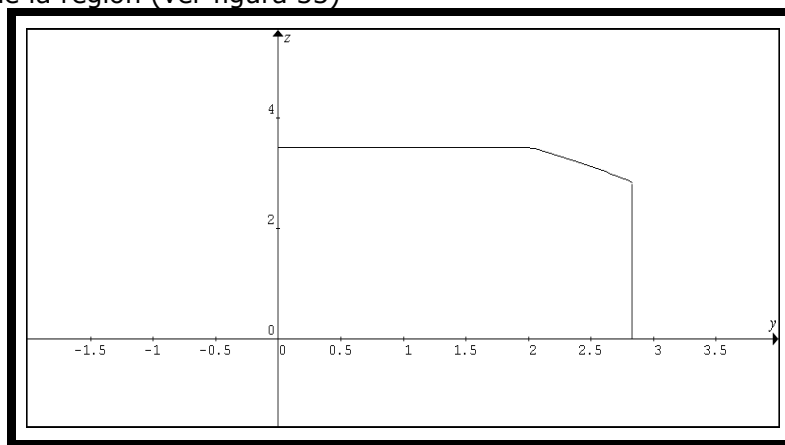
$$z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad z \geq 0, \quad x^2 + y^2 \geq 4, \quad x^2 + y^2 \leq 8.$$

Considerado el sólido Q homogéneo:

**a.** Exprese su masa en coordenadas cartesianas en el orden  $dx dy dz$ .

**Solución.**

Gráfico de la región (ver figura 33)



**Figura 33. Región del ejercicio 18**

$$\begin{aligned} V = & 4 \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} dx dy dz + 4 \int_0^{2\sqrt{2}} \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-y^2}} dx dy dz + \\ & 4 \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \int_0^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2-z^2}} dx dy dz + 4 \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} dx dy dz \end{aligned}$$

**b.** Calcule el momento de inercia respecto al eje  $z$ .

**Solución.**

$$\begin{aligned} I_z = & \iiint_Q (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV = k \int_0^{2\pi} \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^3 dz dr d\theta \\ = & k \int_0^{2\pi} \int_2^{2\sqrt{2}} r^3 \sqrt{16-r^2} dr d\theta \\ = & k \int_0^{2\pi} \int_2^{2\sqrt{2}} r^3 \sqrt{16-r^2} dr d\theta = 2\pi k \left[ \frac{(16-r^2)^{5/2}}{5} - \frac{16(16-r^2)^{3/2}}{3} \right]_2^{2\sqrt{2}} \\ = & 2\pi k \left[ \frac{8^{5/2}}{5} - \frac{16(8)^{3/2}}{3} - \frac{12^{5/2}}{5} + \frac{16(12)^{3/2}}{3} \right] \end{aligned}$$



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 294 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**37.** Sea  $W$  un sólido limitado por las superficies

$$z = -\sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

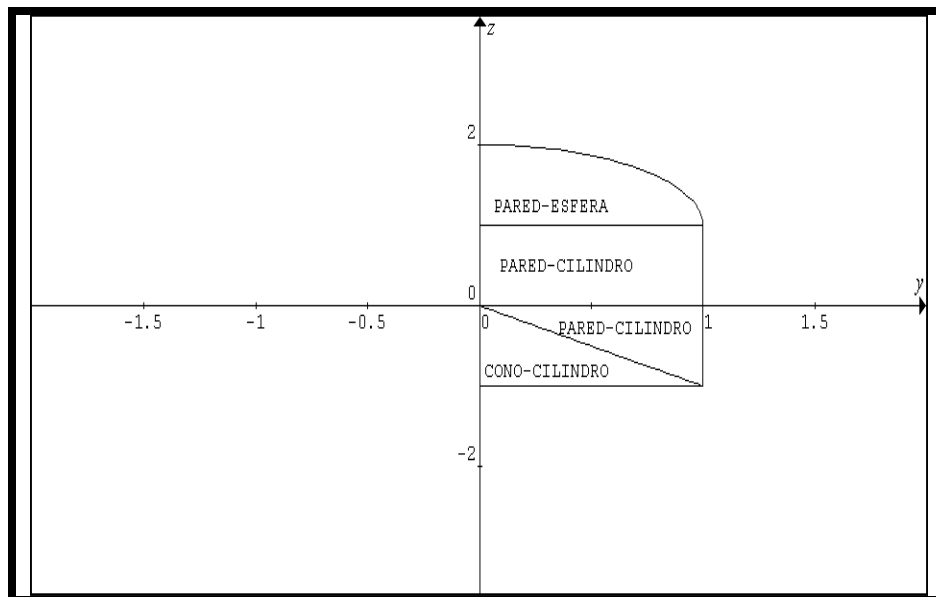
**a.** Plantee la(s) integral(es) que permite(n) calcular el volumen del sólido  $W$  en coordenadas:

**a.1.** cartesianas en el orden

$dx dy dz$ .

**Solución.**

Proyección en el plano  $yz$  usando simetría (ver figura 34)



**Figura 34. Proyección plano  $yz$  usando simetría del ejercicio 19**

$$V = 4 \int_1^2 \int_0^{\sqrt{1-(z-1)^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}} dx dy dz + 4 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx dy dz +$$

$$4 \int_{-1}^0 \int_{-z}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx dy dz + 4 \int_{-1}^0 \int_0^{-z} \int_{\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy dz$$

$dz dy dx$ .

**Solución.**

Proyección en el plano  $xy$  usando simetría (ver figura 35)



## EJERCICIOS RESUELTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 295 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

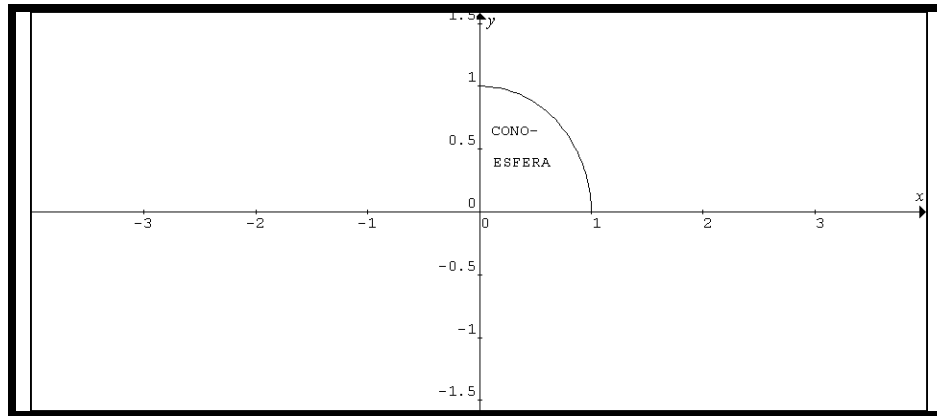


Figura 35. Proyección plano  $xy$  usando simetría del ejercicio 19

$$V = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx$$

a.2. esféricas.

**Solución.**

Ecuaciones esféricas:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \Rightarrow \rho(\rho - 2 \cos(\phi)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 2 \cos(\phi) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho = \csc(\phi)$$

$$V = 4 \left[ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{\csc(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \right]$$

b. Calcule el volumen de W.

**Solución.**

Usando geometría elemental:  $V = \frac{2\pi}{3} + 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$ .

38. Pruebe que

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV = \frac{4\pi}{3}.$$

**Solución.**

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV = \lim_{m \rightarrow +\infty} 2\pi \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \int_0^m e^{-\rho^3} \rho^2 d\rho = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{4\pi}{3} (e^0 - e^{-m^3}) = \frac{4\pi}{3}.$$



## EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 296 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

### 3.14. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dibuje la región de integración y calcule las integrales dobles siguientes:

a.  $\iint_S xy \, dx \, dy$ , donde S es la región limitada por las gráficas de las ecuaciones  $y = 3x$ ,  $x = 1$  y el eje  $x$ . Rta.  $\frac{9}{8}$

b.  $\iint_S |y - x| \, dx \, dy$ , donde S es la región limitada por las rectas de ecuaciones  $x = y$ ,  $x = 2y$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$ . Rta.  $\frac{7}{6}$

c.  $\iint_S \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ , donde S es la región  $S = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{x^2}{2}\}$ .  
Rta.  $-1 + \frac{5}{4} \ln(5)$

2. Las integrales iteradas que se dan a continuación, son en cada caso las integrales dobles de ciertas funciones en regiones del plano  $xy$ , para cada una de ellas, dibuje la región de integración y exprese la integral doble mediante integrales iteradas cambiando el orden de integración:

a.  $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$  Rta.  $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$

b.  $\int_{-1}^4 \int_{x^2-2x}^{x+4} f(x, y) \, dy \, dx$  Rta.  $\int_{-1}^3 \int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) \, dx \, dy + \int_3^8 \int_{y-4}^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) \, dx \, dy$

3. Calcule las siguientes integrales, bien sea directamente, mediante algún cambio de variables conveniente, o invirtiendo el orden de integración:

a.  $\int_0^1 \int_0^1 4|y - x^3| \, dx \, dy$  Rta.  $\frac{11}{7}$

b.  $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx \, dy$  Rta.  $\frac{5}{6}$

c.  $\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{y}{e^{y+x}} \, dy \, dx$  Rta.  $\frac{1}{2}(e - 1)$



## EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 297 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

d.  $\iint_S e^{xy} dx dy$ , donde S es la región del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones  $xy = 2$ ,  $xy = 4$ ,  $x = y$ ,  $y = 8x$ . Rta.  $\frac{3}{2}(e^4 - e^2)\ln(2)$

e.  $\iint_S dx dy$ , donde S es la región encerrada por la curva de ecuación igual a  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Rta.  $8\pi$

f.  $\iint_S (x - y)^2 \cos^2(x + y) dx dy$ , donde S es el paralelogramo de vértices dados por  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ ,  $(0, \pi)$ . Rta.  $\frac{\pi^4}{3}$

g.  $\int_0^4 \int_0^{4-x} e^{\frac{y-x}{y+x}} dy dx$ . Rta.  $4(e - \frac{1}{e})$

h.  $\int_0^1 \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{2}} e^{y/x} dx dy$ . Rta.  $2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}/2} - 4e^{\sqrt{2}/2} + 3$

i.  $\iint_S e^{(y-x)/(y+x)} dA$ , donde S es el interior del triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  y  $(1,0)$ . Rta.  $\frac{1}{4}(e - \frac{1}{e})$

4. Calcule la integral

$$\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{tg}(x^2) dx dy.$$

Rta.  $\frac{1}{2}\ln(\sec(1))$

5. Utilice coordenadas polares para calcular

$$\iint_S |x^2 + y^2 - 4| dA,$$

donde la región S está definida por  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

6. Usando integrales dobles halle el volumen del sólido acotado por las gráficas de las siguientes funciones sobre la región del plano xy cuyos linderos se indican:

a.  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$



## EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 298 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

b.  $f(x, y) = 1 - x - y$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$

7. Calcule

$$\iint_S e^{\arctg\left(\frac{y}{x}\right)} dx dy,$$

donde  $S$  es la región en el primer cuadrante limitada por las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  y las rectas  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$ .

8. Calcule

$$\iint_S e^{(x+y)^2} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 dA,$$

donde la región  $S$  está limitada por las curvas de ecuaciones

$$y = x; \quad y = 2x; \quad x + y = 1; \quad x + y = 2.$$

9. Halle el volumen de la región que está limitada por el plano  $xy$ , el plano  $x + y + z = 2$  y el cilindro parabólico  $y = x^2$ . Rta.  $\frac{81}{20}$

10. Halle el volumen del sólido  $S$ , si  $S$  está limitado por el cono  $z^2 = x^2 + y^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ . Rta.  $\frac{64}{9}$

11. Halle el volumen de  $S$ , si  $S$  está limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y el hiperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Rta.  $4\sqrt{3}\pi$

12. Halle el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie esférica de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , inferiormente por el plano  $xy$  y lateralmente por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Rta.  $\frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})\pi$

13. Encuentre el área de la región en el primer cuadrante del plano  $xy$  limitado por las curvas  $x^2 + 2y^2 = 1$ ,  $x^2 + 2y^2 = 4$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 5x$ . Rta.  $\frac{3}{2\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)$

14. Sea  $R$  el triángulo acotado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ . Haga la sustitución dada por  $x + y = u$ ,  $y = uv$  y demuestre que





## EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 299 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$\iint_R e^{-x-y} x^{a-1} y^{b-1} dx dy$$

puede reducirse al producto de integrales sencillas.

**15.** Evalúe la integral

$$I = \iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

donde la región R es la región limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rta.  $\frac{2}{3} \pi ab$

**16.** Grafique la región S que está acotada por las curvas

$$x = -y^2, \quad x = 2y - y^2, \quad x = 2 - y^2 - 2y$$

y utilice el cambio de variables

$$x = u - \frac{(u+v)^2}{4}, \quad y = \frac{u+v}{2}$$

para calcular

$$\iint_S (x + y^2) dx dy. \quad \text{Rta. } \frac{1}{6}.$$

**17.** Encuentre el área de la región encerrada por la curva de ecuación polar  $r = 2 \cos(2\theta)$  que es exterior a  $r = \sqrt{3}$ .

**18.** Calcule

$$\iint_S \frac{xy}{1+x^2y^2} dA,$$

donde la región S está limitada por las curvas de ecuaciones

$$x = \frac{1}{y}; \quad y = \frac{5}{x}; \quad x - 1 = 0; \quad x = 5.$$

**19.** En los problemas siguientes halle el centro de masa de las láminas acotadas por las gráficas dadas y densidad que se indica:

**a.**  $y = \ln(x)$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $\rho(x, y) = 1/x$ ,  $y = 0$



## EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 300 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

b.  $y = 2/x$  ,  $x = 1$  ,  $x = 2$  ,  $\rho(x, y) = x^2$

c.  $y = \sqrt{1-x^2}$  ,  $y = 0$  ,  $y = x$  ,  $\rho = 1$

**20.** Calcule el momento de inercia de la superficie limitada por la hipérbola  $xy = 4$  y la recta  $x + y = 5$  con respecto a la recta  $y = x$ . Rta.  $16\ln(2) - 9\frac{3}{8}$

**21.** Para las láminas limitadas por las curvas que se indican halle el momento polar de inercia  $I_0$ .

a.  $y = \sqrt{1-x^2}$  ,  $y = 0$  ,  $\rho(x, y) = y$

b.  $y = \sqrt{x}$  ,  $y = x^2$  ,  $\rho(x, y) = x$

**22.** Grafique la región limitada por las curvas

$$4y - x^2 = 8 \quad , \quad y + 2x^2 = -1 \quad , \quad y = 6|x| - 9$$

Plantee las integrales que permiten calcular:

a. El área de la región

b. El centro de masa

c. El momento polar de inercia

**23.** Calcule las siguientes integrales dobles impropias:

a.  $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  , donde S es la región limitada por la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \quad . \quad \text{Rta. } 4\pi$$

b.  $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$  . Rta.  $\pi$

c.  $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{xy}}$  , donde  $S = [0, 2] \times [0, 2]$  Rta. 8

**24.** Calcule la integral impropia

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy ,$$

extendida a todo el plano  $\mathbb{R}^2$  y luego utilice el resultado encontrado para calcular la integral impropia



## EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 301 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx .$$

(Esta última integral es importante en Estadística y se trata de la distribución normal).

Rta.  $\pi$ ,  $\sqrt{\pi}$

- 25.** Sea T el sólido formado por la región interior de  $x^2 + y^2 = 9$ , exterior a  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , por abajo de  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$  y sobre el plano xy. Halle el volumen de T.

- 26.** Calcule

$$\iiint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv ,$$

donde Q es el sólido limitado por las superficies  $z = 1$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$ , siendo  $z \geq 0$ .

- 27.** Sea T el sólido formado por la región interior del cilindro  $x^2 + y^2 = 9$ , bajo el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y sobre el paraboloide  $z = \frac{1}{6}(x^2 + y^2)$ . Calcule el volumen de T.

- 28.** Expresar en coordenadas cilíndricas

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_3^{3+\sqrt{9-x^2-y^2}} x dz dy dx .$$

- 29.** Expresar en coordenadas esféricas

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx .$$

- 30.** Expresar en coordenadas cartesianas

$$4 \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^4 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta .$$

- 31.** Expresar el volumen del sólido  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $z \geq x^2 + y^2$ ,  $z \leq 9 + \sqrt{x^2 + y^2}$  utilizando integrales triples en coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas.

- 32.** Plantear la integral que permite calcular el volumen del sólido limitado por las superficies  $4 - z = x^2 + y^2$ ,  $z - 2 = x^2 + y^2$  en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.



## EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 302 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**33.** Sea Q el sólido formado por

$$x^2 + y^2 \leq 1 ; 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Plantee las integrales que permiten calcular el volumen del sólido en:

- a.** cartesianas  $dx dz dy$       **b.** cilíndricas

**34.** Sea S el sólido formado por

$$z \geq x^2 + y^2 ; x^2 + y^2 \leq 2 ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 11$$

Plantee las integrales que permiten calcular el volumen del sólido en:

- a.** cartesianas  $dz dy dx$       **b.** cartesianas  $dy dx dz$       **c.** cilíndricas

**35.** Sea Q el sólido homogéneo definido por

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 6z - 5 ; z \leq 5 - \sqrt{x^2 + y^2} ; z \geq 0$$

Plantee las integrales que permiten calcular el volumen del sólido Q:

- a.** Proyectando en el plano  $xy$       **b.** proyectando en el plano  $yz$

**36.** Sea Q el sólido definido por

$$0 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2} ; x^2 + y^2 \geq 4$$

Plantee las integrales que permiten calcular el volumen del sólido Q:

- a.** En el orden  $dx dz dy$       **b.** en coordenadas cilíndricas

**37.** Sea la integral triple

$$I = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

Plantee la integral I en coordenadas cilíndricas.

**38.** Plantee la integral que permite calcular el volumen del sólido limitado por las superficies

$$4 - z = x^2 + y^2 , z - 2 = x^2 + y^2 \text{ en coordenadas cartesianas y cilíndricas.}$$

**39.** Usando coordenadas cilíndricas calcule el volumen del cuerpo limitado por la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ y la superficie del paraboloide } x^2 + y^2 = 3z .$$

**40.** Dadas las siguientes superficies que definen el sólido T

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} ; x^2 + y^2 \leq 9 ; z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 6 :$$

- a.** Plantee la integral que permite calcular el volumen del sólido en coordenadas cartesianas.



## EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 303 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**b.** Plantee las integrales para el cálculo del centro de masa del sólido T.

**41.** Usando coordenadas esféricas halle el volumen del sólido sobre el cono  $z^2 = x^2 + y^2$  e interior a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ . Rta.  $\pi a^3$

**42.** Calcule

$$\iiint_R \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2} dx dy dz,$$

donde R es la región encerrada por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{ Rta. } \frac{1}{3} \pi^2 abc$$

**43.** Un sólido ocupa la región T del espacio definida por

$$z \leq 6 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \geq 3 - \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \geq 1.$$

**a.** Expresé utilizando integrales triples el volumen de T.

**b.** Expresé utilizando integrales triples las coordenadas del centro de masa.

**44.** Halle el centroide de un objeto limitado por los planos coordenados, el plano  $x + y = 1$  y el paraboloides  $z = 4 - x^2 - 4y^2$ . Rta.  $(\frac{33}{95}, \frac{27}{95}, \frac{5}{3})$

**45.** Halle el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo dentro del cilindro  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , bajo el cono  $x^2 + y^2 = z^2$  y sobre el plano xy. Rta.  $\frac{512}{75} k$

**46.** Calcule las siguientes integrales triples impropias:

**a.**  $\iiint_T \frac{dV}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , donde T es la esfera sólida limitada por la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \text{ Rta. } 2\pi$$

**b.**  $\iiint_T \frac{dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ , donde T es la reunión de la frontera y del exterior de la esfera

$$\text{sólida del ejercicio a, esto es } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}. \text{ Rta. } \frac{4\pi}{3}$$

		<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>Integrales Dobles y Triples Pág.: 304 de 305</b>
<b>U.C.V.</b>	<b>F.I.U.C.V.</b>		<b>Prof. José Luis Quintero</b>
		<b>CÁLCULO III (0253) - TEMA 3</b>	

- [1] APOSTOL, Tom. **Calculus. Volumen 2.** 2da edición. Reverté (2006).
- [2] EDWARDS, Henry y PENNEY, David. **Cálculo con Trascendentes Tempranas.** 7ma edición. PEARSON PRENTICE HALL (2008).
- [3] GONZÁLEZ, Jesús y BEYER, Walter. **Matemática III. Ingeniería. (733).** UNA (1993).
- [4] GONZÁLEZ, Jesús. **Cálculo III. Matemática. (706).** UNA (1994).
- [5] GUERREIRO, Carlos. **Introducción al Maple. Aplicaciones Docentes.** Facultad de Ingeniería. UCV (2002).
- [6] GUERREIRO, Carlos. **Cálculo III.** Facultad de Ingeniería. UCV (2004).
- [7] LARSON, Roland; HOSTETLER, Robert y EDWARDS, Bruce. **Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 2.** 6ta edición. MC GRAW HILL (1999).
- [8] LEITHOLD, Louis. **El Cálculo.** 7ma edición. OXFORD UNIVERSITY PRESS (1998).
- [9] MARSDEN, Jerrold y TROMBA, Anthony. **Cálculo Vectorial.** 4ta edición. PEARSON
- [10] MITACC, Maximo; PECHE, Carlos y QUIROZ, Isidro. **Cálculo III.** PRAXIS (1985).
- [11] ORELLANA, Mauricio. **Cálculo Vectorial. Guía de Práctica.** Facultad de Ingeniería. UCV (1985).
- [12] PALACIO, Ángel. **Ejercicios de Análisis Matemático.** EDICIONES DE LA BIBLIOTECA.
- [13] PEREIRA, Luz. **Problemario de Cálculo de Varias Variables.** COLECCIÓN MINERVA ULA (2005).
- [14] PISKUNOV, N. **Calculo Diferencial e Integral. Tomo II.** Editorial MIR (1980).
- [15] PITA, Claudio. **Cálculo Vectorial.** PEARSON PRENTICE HALL (1995).
- [16] PURCELL, Edwin; VARGERG, Dale y RIGDON, Steven. **Cálculo.** 9na edición. PEARSON PRENTICE HALL (2007).
- [17] RÍOS, Alejandro. **Cálculo III.** Facultad de Ingeniería. UCV (2002).
- [18] RODRÍGUEZ, Eugenio; AROMI, Luis; MENÉNDEZ, Margarita y GALÁN, Rolando. **Integrales Múltiples.** Pueblo y Educación (1986).



## BIBLIOGRAFÍA

Integrales  
Dobles y Triples  
Pág.: 305 de 305

U.C.V.

F.I.U.C.V.

CÁLCULO III (0253) - TEMA 3

Prof.  
José Luis Quintero

**[19]** SALAS, HILLE y ETGEN. **Calculus. Una y Varias Variables. Volumen II.** 4ta edición. REVERTÉ (2007).

**[20]** STEWART, James. **Cálculo. Conceptos y Contextos.** 3era edición. THOMSON (2006).

**[21]** THOMAS, George. **Cálculo. Varias Variables.** 11ma edición. PEARSON ADDISON WESLEY (2006).