Métodos de Integración.

I Método: De Sustitución.

Ejemplo:

1. $\int x^3 \sqrt[5]{x^4-7}\,dx$

1. Realizando el cambio de variable y derivada

$$t = x^4 - 7$$
$$dt = 4x^3 dx$$
$$\frac{dt}{4} = x^3 dx$$

2. Comparar con la integral y reemplazar la nueva variable

$$\int \sqrt[5]{x^4-7}\,x^3 dx = \int \sqrt[5]{t}\cdot\frac{dt}{4}$$

$$\frac{dt}{4} = x^3 dx = \frac{1}{4}\int t^{1/5} dt = \frac{1}{4}\frac{t^{6/5}}{6/5} = \frac{5}{24}(t)^{6/5} + c$$

3. Volver a la variable inicial

$$\int x^3 \sqrt[5]{x^4-7}\,dx = \frac{5}{24}\left(x^4-7\right)^{6/5} + c$$

2. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+1}dx$

$$\begin{aligned}&C.V.\\&x^2+4x+1=t\\&(2x+4)dx=dt\\&2(x+2)dx=dt\\&(x+2)dx=\frac{dt}{2}\end{aligned}$$

$$\int\frac{dt/2}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c=$$
$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right|+c$$

3. $\int\frac{x}{4+x^4}dx=\int\frac{xdx}{4+x^4}$

$$\begin{aligned}&C.V.\\&x^2=t\\&2xdx=dt\\&xdx=\frac{dt}{2}\end{aligned}$$

$$\int\frac{\frac{dt}{2}}{4+(t)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{2^2+t^2}=\frac{1}{4}arcTan\left(\frac{t}{2}\right)+c=$$
$$\frac{1}{4}arcTan\left(\frac{x^2}{2}\right)+c$$

4. $\int\frac{Cosx}{\sqrt{Cos2x}}dx=\int\frac{Cosxdx}{\sqrt{Cos^2x-Sen^2x}}=\int\frac{Cosxdx}{\sqrt{1-Sen^2x-Sen^2x}}=\int\frac{Cosxdx}{\sqrt{1-2Sen^2x}}$

$$\begin{aligned}&C.V.\\&Senx=t\\&Cosxdx=dt\end{aligned}$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2-t^2}}=\frac{1}{2}arcSen\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)+c$$

Sustituciones Especiales

5. $\int x(x+2)^9\,dx =$

$$\begin{aligned}&C.V.\\&x+2=t\\&x=t-2\\&dx=dt\end{aligned}$$

$$\int (t-2)t^9\,dt = \int \left(t^{10}-2t^9\right)dt =$$

$$\frac{t^{11}}{11}-\frac{2t^{10}}{10}+c=\frac{(x+2)^{11}}{11}-\frac{(x+2)^{10}}{10}+c$$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} =$

$$\begin{aligned}&C.V.\\&e^x+1=t^2\\&x=\ln\left(t^2-1\right)\\&dx=\frac{2tdt}{t^2-1}\end{aligned}$$

$$\int \frac{\frac{2tdt}{t^2-1}}{\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{tdt}{t\left(t^2-1\right)} = \int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c$$

II Método: Integrales que tienen Trinomio.

$$\left.\begin{array}{ll} Tipo\ \ I & \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \\ Tipo\ \ II & \displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \\ Tipo\ \ III & \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} Tipo\ \ IV & \displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx \\ Tipo\ V & \displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \end{array}\right\}$$

$$Tipo\ VI\ \ \left.\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}\right\}\ \text{Sustitución}\ \boxed{mx+n=\frac{1}{t}}$$

$$Tipo\ VII\ \ \int (mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

Ejemplo:

$$\int \frac{3x+5}{2x^2-8x+1}dx =$$

$$\int \frac{\frac{3}{2(2)}(4x-8)+\left(5-\frac{3(-8)}{2(2)}\right)}{2x^2-8x+1}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x-8x}{2x^2-8x+1}dx + 11\int \frac{dx}{2x^2+8x+1}$$

Sustitución Completar Cuadrado

Sustitución Completar Cuadrados

$$2x^2-8x+1=t$$
$$(4x-8)dx = dt$$

$$2\left[x^2-4x+\tfrac{1}{2}\right]$$
$$2\left[x^2-4x+4-4+\tfrac{1}{2}\right]$$

$$2\left[\left(x^2-2\right)^2-\tfrac{7}{2}\right]$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t} + \frac{11}{2}\int \frac{dt}{(x-2)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{3}{4}\ln|t| + \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}\ln\left|\frac{(x-2)-\sqrt{3/2}}{(x-2)+\sqrt{3/2}}\right| + c$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2-8x+1\right| + \frac{11\sqrt{2}}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{(x-2)-\sqrt{7/2}}{(x-2)-\sqrt{7/2}}\right| + c$$

III Método: Integración por Partes.

$$d(u\cdot v)=udv+vdu$$
$$\int d(u\cdot v)=\int udv+\int vdu$$
$$uv=\int udv+\int vdu$$

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

Al aplicar este método una parte del integrado se deriva y otra parte se integral de manera que se transforma en una integral mas sencilla y se puede clasificar de acuerdo al tipo de funciones que tenga en el integrado.

Tipo I De la Forma $\boxed{\int x^n \ln xdx; \int x^n arcSendx; \int x^n arcTanxdx}$

Ejemplo:

1. $\int x^3 \ln x = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x^3 dx}_{dv}$

$$u=\ln x$$
$$du=\frac{dx}{x}$$
$$dv=x^3dx$$
$$\int dv=\int x^3dx$$
$$v=\frac{x^4}{4}$$

$$=\ln x\cdot\frac{x^4}{4}-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{x}$$
$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx$$
$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+c$$

2. $\int arcTanxdx =$

$$u = arcTanx$$
$$du = \frac{dx}{1+x^2}$$
$$v = \int xdx$$
$$v = \frac{x^2}{2}$$

$$= arcTan\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}arcTan - \frac{1}{2} - \int \frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}arcTan - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}arcTanx - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}arcTanx - \frac{1}{2}\left\{\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}\right\}$$

$$= \frac{x^2}{2}arcTanx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}arcTanx + c$$

Tipo II $\boxed{\int P_{(x)}e^{ax}dx; \int P_{(x)}Senaxdx; \int P_{(x)}Cosaxdx; \int P_{(x)}a^{bx}dx}$

Ejemplo:

1. $\int \left(x^3+3x-5\right)e^{2x}dx =$

Signo	Derivada	Integral
+	x^3+3x-5	e^{2x}
-	$3x^2+3$	$\dfrac{e^{2x}}{2}$
+	$6x$	$\dfrac{e^{2x}}{4}$
-	6	$\dfrac{e^{2x}}{8}$
+	0	$\dfrac{e^{2x}}{16}$

$$\int \left(x^3+3x-5\right)e^{2x}dx = \left(x^3+3x-5\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\left(3x^2+3\right)\cdot\frac{e^{2x}}{4}+6x\cdot\frac{e^{2x}}{8}-6\frac{e^{2x}}{16}+c$$

2. $\int x^2 Sen3xdx =$

Signo	Derivada	Integral

+	x^2	$Sen3x$
-	2x	$-\dfrac{Cos(3x)}{3}$
+	2	$-\dfrac{Sen(3x)}{9}$
-	0	$+\dfrac{Cos(3x)}{27}$

$$\int x^2 Sen3xdx = x^2\frac{(Cos3x)}{3}+\frac{2x(Sen(3))}{9}+\frac{2Cos(3x)}{27}+c$$

3. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^3}dx = \int \frac{\ln^2 x}{x^2}\cdot\frac{dx}{x}$

$$\ln x = t$$
$$\frac{dx}{x} = dt$$
$$x = e^t$$

$$\int \frac{t^2}{\left(e^t\right)^2} = \int t^2 e^{-2t} dt$$

Signo	Derivada	Integral
+	t^2	e^{-2t}
-	2t	$\frac{e^{-2t}}{-2}$
+	2	$\frac{e^{-2t}}{4}$
-	0	$-\frac{e^{-2t}}{-8}$

Tipo III De la forma

$$\int e^{ax}Senbxdx; \int e^{ax}Cosbxdx; \int a^{bx}Senmxdx; \int a^{bx}Coxmxdx; \int Sec^{mx}dx$$
$$m = impar$$

Ejemplo:

$$\int e^{3x}Sen2dx =$$

1ra Integración

$$u = e^{3x}$$
$$du = e^{3x}dx$$
$$v = \int Sen2xdx$$
$$v = -\frac{Cos2x}{2}$$

$$= -e^{3x}\frac{Cos2x}{2} - \int -\frac{Cos2x}{2}\cdot e^{3x}dx = -e^{3x}\frac{Cos2x}{2} + \frac{3}{2}\int e^{3x}Cos2xdx =$$

2da Integración

$$u = e^{3x}$$
$$du = e^{3x}dx$$
$$v = \int Cos2xdx$$
$$v = \frac{Sen2x}{2}$$

$$\int e^{3x}Sen2xdx = -e^{3x}\frac{Cos2x}{2} + \frac{3}{2}\left[e^{3x}\frac{Sen2x}{2} - \int \frac{Sen2x}{2}e^{3x}3dx\right] =$$
$$-e^{3x}\frac{Cos2x}{2} + \frac{3}{4}e^{3x}Sen2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}Sen2xdx$$

$$\int e^{3x}Sen2xdx + \frac{9}{4}\int e^{3x}Sen2xdx = -\frac{e^{3x}}{2}Cos2x + \frac{3}{4}e^{3x}Sen2x$$
$$\frac{13}{4}\int e^{3x}Sen2xdx = -\frac{e^{3x}}{2}Cos2x + \frac{3}{4}e^{3x}Sen2x$$
$$\int e^{3x}Sen2xdx = \frac{4}{13}\left[-\frac{e^{3x}}{2}Cos2x + \frac{3}{4}e^{3x}Sen2x\right] + c$$

IV Método: Integrales Trigonométricas.

Tipo I $\boxed{\int Sen^{m} x Cos^{m} x dx}$

- Si m es impar, entero y positivo se deja un factor $Senx$ y lo demás se transforma a la forma $Sen^2x = 1 - Cos^2x$

$$\int Sen^3xCos^4xdx = \int Senx \cdot Sen^2xCos^4xdx = \int Senx\left(1 - Cos^2x\right)Cos^4xdx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C.V. \\ Cosx = t \\ -Senxdx = dt \\ Senxdx = -dt \end{array}}$$

$$= \int \left(1 - t^2\right)t^4\left(-dt\right) = -\int t^4 - t^6dt$$

$$= \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c$$

$$= \frac{Cos^5x}{5} - \frac{Cos^7x}{7} + c$$

- Si m y n son par entonces siempre se transforma la integral con las siguientes identidades

$$Cos^2 = \frac{1 + Cos2x}{2} \qquad Sen^2x = \frac{1 - Cos2x}{2}$$

Tipo II $\boxed{\int Sec^mx + Tan^nxdx}$

- Si **m** es entero y positivo se deja un factor secante cuadrado y lo demás se transforma en Tan^2 con la identidad.

$$Sec^2x = 1 + Tan^2x$$

$$\int Sec^4xTan^2xdx = \int Sec^2xSen^2xTan^2xdx = \int Sec^2x\left(Tan^2x+1\right)Tan^2xdx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C.V. \\ u = Tanx \\ du = Sec^2xdx \end{array}}$$

$$= \int \left(u^2+1\right)u^2du = \int \left(u^4+u^2\right)$$
$$= \frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}+c = \frac{Tan^5x}{5}+\frac{Tan^3x}{3}+c$$

- Si **n e**s impar entero y positivo se deja un factor secante de x por $Tanx$ y lo demás se transforma a Sec^2x con la identidad.

$$Tan^2x = Sec^2x-1$$

$$\int Sec^5xTan^3xdx = \int Sec^4xTan^2SecxTanxdx = \int Sec^4x\left(Sec^2x-1\right)SecxTanxdx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C.V. \\ z = Secx \\ dz = SecTanxdx \end{array}}$$

$$= \int z^4\left(z^2-1\right)dz = \int z^6-z^4dz$$
$$= \frac{z^7}{7}-\frac{z^5}{5}+c$$

$$= \frac{Sec^7x}{7}-\frac{Sec^5x}{5}+c$$

- Si m es par entero y positivo la forma $\int Tan^mxdx$ y no existe la función secante entonces se deja un factor Tan^2x y se transforma a Sec^2x con la identidad. $Tan^2x = Sec^2x-1$

$$\int Tan^4xdx = \int Tan^2xTan^2xdx = \int Tan^2x\left(Sec^2x-1\right)dx = \int Tan^2xSec^2xdx - \int Tan^2xdx$$
$$= \int Tan^2xSec^2xdx - \int \left(Sec^2x-1\right)dx$$

$$\begin{array}{|l|}\hline C.V. \\ Tanx = u \\ Sec^2 xdx = du \\ \hline\end{array}$$

$$\int u^2 du \cdot \int Sec^2 xdx - \int dx = \frac{Tan^2 x}{3} - \tan x + x + c$$

- Si m es impar y la integral tiene la forma $Sec^m xdx$ y no tiene la función Tan se resuelve por el método de integración por pares:

$$\int Sec^3 xdx = \int \sec xSec^2 xdx$$

$$\begin{array}{|l|}\hline C.V. \\ u = Secx \\ du = SecxTanxdx \\ dv = -\sec^2 xdx \\ v = Tanx \\ \hline\end{array}$$

$$= SecxTanx - \int TanxSecxTanxdx = SecxTanx - \int Tan^2 xSecxdx$$

$$= SecxTanx - \int \left(Sec^2 x - 1\right) Senxdx = SecxTanx - \int Sec^3 xdx + \int Secxdx$$

$$= \frac{1}{2}\left[SecxTanx + \ln\left(Secx + Tanx\right)\right] + c$$

- Si la integral tiene la función Secx y Tanx o Cscx y Ctgx y no se parece a ninguno de los 4 puntos anteriores para resolver se transforma a las funciones conocidas Senx y Cosx

$$\int \frac{Sec^3x}{Tanx}dx = \int \frac{\frac{1}{Cos^2x}}{\frac{Senx}{Cosx}}dx = \int \frac{1}{Cos^2xSenx}dx$$

$$= \int \frac{Cos^2x + Sen^2x}{Cos^2xSenx}dx = \int \frac{Cos^2x}{Cos^2xSenx}dx + \int \frac{Sen^2x}{Cos^2xSenx}dx$$

$$= \int Cscxdx + \int \frac{Senx}{Cos^2x}dx = \ln\left(Cscx - Ctgx\right) + Secx + c$$

Tipo III. Integrales Seno, Coseno, con diferentes ángulos.

Para resolver este tipo de integrales se aplica las identidades trigonométricas de transformación de un producto de funciones a una suma de función y se utiliza las integrales inmediatas.

$$Sen\ mxCosnx = \frac{1}{2}\left[Cos(m-n)x - Sen(m+n)x\right]$$

$$Cos\ mxCosnx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(n+m)x\right]$$

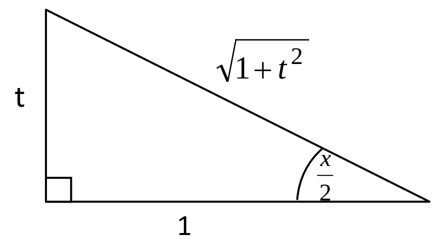
$$Sen\ mxSennx = \frac{1}{2}\left[Sen(m-n)x + Sen(m+n)x\right]$$

Tipo IV. Integrales de la forma: $\int R(cosx\ , senx)dx$

Donde R es una función trigonométrica racional (fraccionaria).
Para resolver este tipo de integrales se debe hacer sustitución trigonométrica utilizando las identidades básicas de trigonometría de manera de que la función Senx Cosx se transforma en una función racional y finalmente se debe volver a la variable x.

$$\boxed{Senx = \frac{2t}{1+t^2}} \quad \boxed{Cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \boxed{\tan\frac{x}{2} = t} \quad \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

Demostracion :



$Senx = ?$

$$Sen2\alpha = 2Sen\alpha Cos\alpha$$

$$Si \ \ \alpha = \frac{x}{2}$$

$$Sen2\left(\frac{x}{2}\right) = 2Sen\frac{x}{2}Cos\frac{x}{2}$$

$$= Senx2 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\boxed{Senx = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$Cosx = ?$

$$Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha$$

$$Cos2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(Cos\frac{x}{2}\right)^2 - \left(Sen\frac{x}{2}\right)^2$$

$$Cosx = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) - \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2$$

$$\boxed{Cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{3-2Senx+Cosx}=$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3-2\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2-4t+1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{2t^2-4t+4}=$$

$$\int \frac{dt}{t^2-2t+1-1}=\int \frac{dt}{(t-1)^2+1}=\frac{1}{2}arcTan\left(\frac{t-1}{1}\right)+c$$

$$\frac{1}{2}arcTan\left(\frac{Tan\frac{x}{2}-1}{1}\right)+c$$

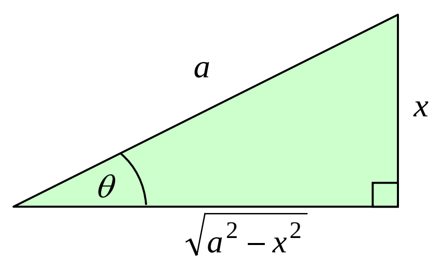
V Método: Sustitución Trigonométrica.

Este método consiste en realizar un cambio de variable a una función trigonométrica de manera que se simplifique las raíces, entonces se transforma en una integral trigonométrica y al final utilizando las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras en un triangulo rectángulo se vuelve a la variable inicial

Tipo I. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ se hace la siguiente sustitución

$$x = asen\theta$$

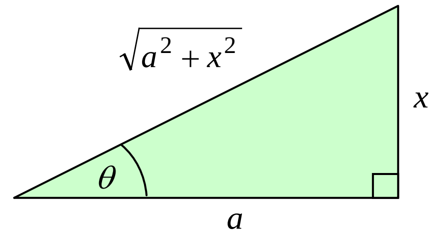
$$\frac{x}{a} = sen\theta$$



Tipo II. Si la integral tiene la forma $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ la sustitución será:

$$x = a\tan\theta$$

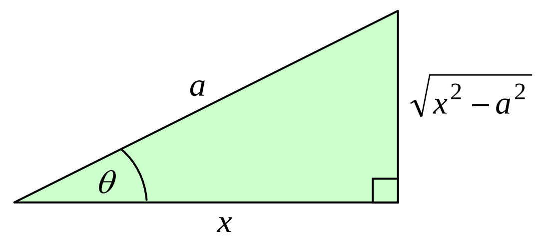
$$\frac{x}{a} = \tan\theta$$



Tipo III. Si la integral tiene la forma: $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx =$

$$x = a\sec\theta$$

$$\frac{x}{a} = \sec\theta$$



Ejemplo:

$$\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x}dx = \quad \begin{matrix} x = 3Tan\theta \\ dx = 3Sec^2\theta d\theta \end{matrix} \quad = \int \frac{\sqrt{9+(3Tan\theta)^2}}{Tan\theta} = \int \frac{\sqrt{9+9Tan^2\theta}}{Tan\theta}Sec^2\theta d\theta =$$

$$3\int \frac{\sqrt{1+Tan^2\theta}Sec^2\theta\, d\theta}{Tan\theta} = 3\int \frac{\sqrt{Sec^2\theta}Sec^2\theta\, d\theta}{Tan\theta} =$$

$$3\int \frac{Sec^3\theta\, d\theta}{Tan\theta} = 3\int \frac{\frac{1}{Cos^3\theta}}{\frac{Sen\theta}{Cos\theta}}d\theta = 3\int \frac{1}{Sen\theta Cos^2\theta} = 3\int \frac{\cos^2\theta + Sen^2\theta}{Sen\theta Cos^2\theta}d\theta =$$

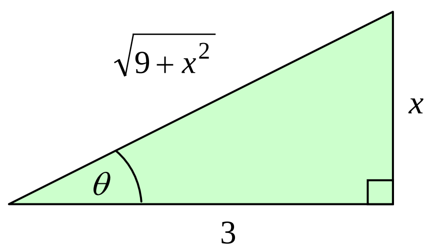
$$3\int \frac{Cos^2\theta}{SenCos^2\theta} + 3\int \frac{Sen^2\theta}{SenCos^2\varpi} = 3\int Cscd\theta + 3\int \frac{Sen\theta\, d\theta}{Cos^2\theta} =$$

$$= 3\ln(Csc\theta - ctg\theta) + \frac{3}{Cos\theta} + c$$

$$= 3\ln(Csc\theta - Ctg\theta) + 3Sec\theta + c$$

$$3Tan\theta = x$$

$$Tan\theta = \frac{x}{3}$$



$$= 3\ln\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{x} - \frac{3}{x}\right) + \frac{3\sqrt{9+x^2}}{3} + c$$

VI Método: Fracciones Parciales.

Este método consiste en resolver integrales de la forma $\int \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}dx$ donde $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son funciones polinomiales para resolver se utiliza la factorización o la transformación en fracciones propias y en forma general se descomponen en fracciones simple.

Tipo I. Integrales de la forma $\int \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}dx$ donde $P_{(x)} \geq$ grado que $Q_{(x)}$.

Para resolver se utiliza la división común de manera que se transforma en una fracción y finalmente se puede utilizar el método de completar cuadrados.

$$\int \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}dx = \quad \begin{array}{l|l} P_{(x)} & Q_{(x)} \\ \hline R_{(x)} & C_{(x)} \end{array}$$

$$\boxed{\int \left(C_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{Q_{(x)}} \right) dx}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 5}{x^2 - 2x + 3}dx =$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +3x^2 & +0 & -5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{5-5}
\cancel{-x^3} & +2x^2 & -3x & & x + 5 \\ \hline
 & +5x^2 & -3x & -5 & \\
 & \cancel{-5x^2} & +10x & -15 & \\ \hline
 & & 7x & -20 &
\end{array}$$

$$=\int\left[(x+5)+\frac{7x-20}{x^2-2x+3}\right]dx$$
$$=\int x+5dx+\int\frac{7x-20}{x^2+2x+3}dx$$
$$=\int(x+5)dx+\int\frac{\frac{7}{2(1)}(2x-2)+\left(-20-\frac{(7)(-2)}{2(1)}\right)}{x^2-2x+3}dx$$
$$=\int(x+5)dx+\frac{7}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+3}dx-13\int\frac{dx}{(x-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+5x\right)+\frac{7}{2}\ln\left|x^2-2x+3\right|-\frac{13}{\sqrt{2}}arcTan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

Tipo II. De la forma $\int\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}dx$ donde $P_{(x)}<Q_{(x)}$ se descompone en fracciones simples

$$\int\frac{P_{(x)}}{(x+a)(x+b)(x+c)}=\int\left[\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{x+c}\right]dx$$

Ejemplo: $\int\frac{3x^2-5}{x^3-x^2-6x}dx=$

$$=\int\frac{3x^2-5}{x(x^2-x-6)}dx$$
$$=\int\frac{(3x^2-5)}{x(x-3)(x+2)}dx$$
$$=\int\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2}dx$$
$$\frac{3x^2-5}{x(x-3)(x+2)}=\frac{A(x-3)(x+2)+B(x)(x+2)+C(x)(x-3)}{x(x-3)(x+2)}$$
$$3x^2-5=A(x+2)(x-3)+B(0+2)(0)+C(0)(0-3)$$

$$x=0$$
$$3(0)^2-5=A(0+2)(0-3)+B(0+2)(0)+C(0)(0-3)$$
$$-5=A(-6)$$
$$A=\frac{5}{6}$$

$$x-3=0$$
$$x=3$$
$$3(3)^2-5=A(3+2)(3-3)+B(3+2)(3)+C(3)(3-3)$$
$$22=15B\Rightarrow B=\frac{22}{15}$$

$$x=-2$$
$$3(-2)^2-5=A(-2+2)(-2+3)+B(-2+2)(-2)+C(-2)(-2-3)$$
$$7=10C\Rightarrow C=\frac{7}{10}$$

$$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2}\right)dx=\int\frac{\frac{5}{6}}{x}dx+\int\frac{\frac{22}{15}}{x-3}dx+\int\frac{\frac{7}{10}}{x+2}dx$$

$$=-\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{22}{15}\ln|x-3|+\frac{7}{10}\ln|x+2|+c$$

Tipo III. Son integrales de la forma $\int\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}dx$ tiene factores lineales repetidos entonces se descompone en fracciones simples de la siguiente manera:

$$\int\frac{P_{(x)}}{(x+a)^3(x+b)}dx=\int\left[\frac{A}{(x+a)^3}+\frac{B}{(x+a)^2}+\frac{C}{(x+a)}+\frac{D}{(x+b)}\right]dx$$

Tipo IV. Integrales de la forma $\int \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}dx$ donde $Q(x)$ es una función polinomial que tiene factores cuadráticos también se denomina raíces imaginarias y se descompone en fracciones simples de la siguiente manera:

$$\int \frac{P_{(x)}}{\left(ax^2+bx+c\right)\left(x^2+d\right)} = \int \left[\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{x^2+d}\right]dx$$

Los valores de constantes A, B, C y D se determinan formando un sistema de ecuaciones.

$$\int \frac{3x^2-1}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+1}dx$$

$$\frac{3x^2-1}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)} = \frac{(Ax+B)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)}$$

$$3x^2-1 = (Ax+B)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+4\right)$$

$$3x^2-1 = Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+4Cx+Dx^2+4D$$

$$0x^3+3x^2+0x-1 = (A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+(B+4D)$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=3 \\ A+4C=0 \\ B+4D=-1 \end{cases}$$

$$A=0 \qquad B=\frac{13}{3} \qquad C=0 \qquad D=-\frac{4}{3}$$

$$\int \frac{3x^2-1}{(x^2+4)(x^2+1)}dx=\int \frac{0x+\frac{13}{3}}{x^2+4}dx+\int \frac{0x-\frac{4}{3}}{x^2+1}dx=\frac{13}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}-\frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{2}arcTan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{4}arcTan\left(\frac{x}{1}\right)+c$$

Integral definida

Introducción

Calculo de Ayer *Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826-1866*

Bernhard Riemann recibió de su padre, un ministro protestante alemán, su primera educación. Cuando fue al colegio, en 1846, iba a estudiar filosofía y teología.

Por fortuna para las matemáticas, escogió la universidad de Gottinga, que entonces era el centro del mundo de los matemáticos y que lo seguiría siendo por más de

100 años. Bajo influencia de W. E. Weber, un físico de primer orden, y de Karl Gauss, el más grande matemático de esa

Época. No pudo haber deseado mejores maestros. En 1851, recibió su doctorado en filosofía de manos de Gauss, después de lo cual se dedicó a la enseñanza en Gotinga.

Murió de tuberculosis 15 años más tarde.

La vida de Riemann fue corta, sólo de 39 años. No tuvo tiempo de producir el volumen de matemáticas de un Cauchy o de un Euler. Pero su trabajo es impresionante por su calidad y profundidad. Sus manuscritos de matemáticas abren nuevas direcciones en la teoría de las funciones complejas, inician el estudio profundo de lo que hoy se llama topología y emprende en geometría un desarrollo que iba a culminar 50 años más tarde con la teoría de la relatividad de Einstein.

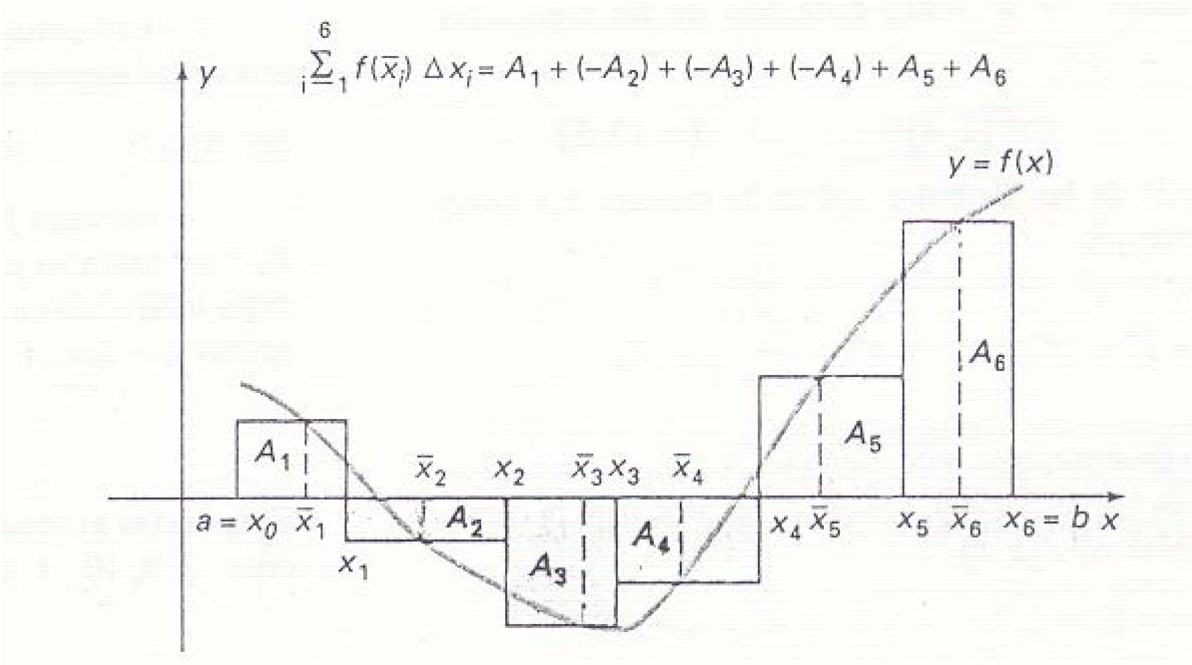
Asociamos a Riemann con este tema debido a que, aunque tanto Newton como Leibniz dieron una versión de la integral y conocieron el teorema fundamental del cálculo integral, fue él quien nos proporcionó la definición moderna de integral definida. En su honor se le llama integral de Riemann.

Calculo de ahora

Los matemáticos calculan la velocidad exacta que se debe alcanzarse para colocar un satélite en una orbita alrededor de la tierra

Definición de la Integral definida

- Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a;b]$, para explicar la definición de la integral definida se sigue los siguientes pasos:

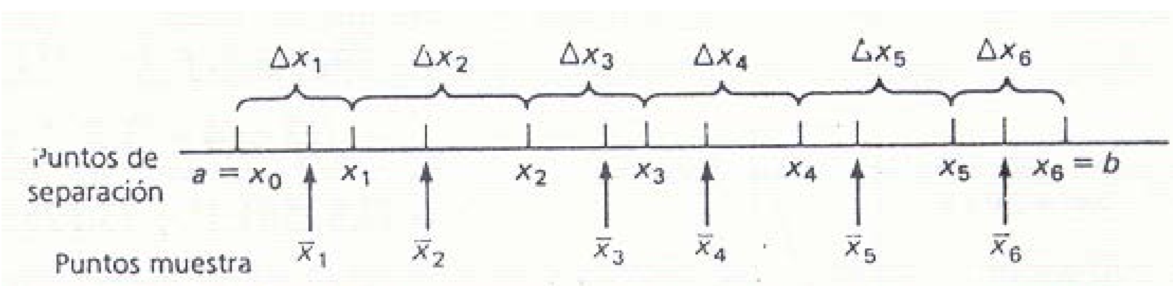


1. Si se subdivide el intervalo cerrado $[a,b]$ en varias partes.

$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_n$

2. Dentro de cada intervalo subdividido elegimos puntos arbitrarios.

$\bar{x}_1\ ,\bar{x}_2\ ,\bar{x}_3\ ,\bar{x}_4,......\bar{x}_i$



3. Determinamos la altura de cada rectángulo reemplazando los puntos arbitrarios en la función.

$$f_{(\bar{x}_1)},\quad f_{(\bar{x}_2)},\quad f_{(\bar{x}_3)},\quad \ldots\ldots\ldots f_{(\bar{x}_i)}$$

Determinamos el ancho de cada uno de los rectángulos

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 , \Delta x_2 = x_2 - x_1 , \Delta x_i = x_n - x_{n-1}$$

4. Determinamos el área de cada uno de los rectángulos por geometría y realizamos la suma de área de los rectángulos subdivididos que será suma de Riemen:

$$f\left(\overline{x_1}\right)\Delta x_1 + f\left(\overline{x_2}\right)\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + \left(f_{(\bar{x}_i)}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f_{(\bar{x}_i)}\Delta x_i$$

5. Aplicando el limite a la suma de Rieman cuando la norma de Partición tiende a cero. Si el límite existe, existe la integral definida de la función. $f_{(x)}\ de\ "a"\ \ hasta\ \ "b"$

Definición de la Integral Definida.

Se define integral definida de la función $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$ como el límite de la suma de Riemann cuando la norma de subdivisión tiende a cero se denota así:

$$\boxed{\underset{\|\Delta\|\to 0}{Lim} \sum^{n} f_{(\bar{x}_i)}\Delta x_i = \int_a^b f_{(x)}dx}$$

Se lee integral definida de la función $f_{(x)}$ desde “a” hasta “b” donde

a: Limite inferior (valor menor)

b: Limite superior (valor mayor)

1. En la integral definida el valor de “a” siempre es menor que “b,” cuando “a” es igual a “b” el valor de la integral es cero.

$a < b$

$$\int_a^a f_{(x)}dx = 0$$

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \int_b^a f_{(x)}dx$$

2. En la integral definida la variable x se considera variable muda esto quiere decir que la variable puede ser cualquier letra dependiente de los limites de integración.

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \int_a^b f_{(t)}dt = \int_a^b f_{(u)}du$$

Teoremas de la integral definida

1. Teorema de Integrabilidad. Es la integral $\int_a^b f_{(x)}dx$ si $f_{(x)}$ es continua e integrable existe al menos una función $F_{(x)}$ que es una de sus funciones primitivas que también es continua y derivable en $[a,b]$.

2. Teorema de Linealidad. Sean las funciones $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ sea k una constante que pertenece a los números reales y se demuestra la siguiente propiedad:

$$\int_a^b kf_{(x)}dx = k\int_a^b f_{(x)}dx$$
$$\int_a^b \left[f_{(x)} + g_{(x)}\right]dx = \int_a^b f_{(x)}dx + \int_a^b g_{(x)}dx$$
$$\int_a^b \left[f_{(x)} - g_{(x)}\right]dx = \int_a^b f_{(x)}dx - \int_a^b g_{(x)}dx$$

3. Teorema Fundamental del Cálculo. Sea la función $f(x)$ continua e integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$ existe al menos una función $F(x)$ que es una de sus primitivas también continua en $[a,b]$ si se cumple que $f(x) = F'(x)$ entonces este teorema demuestra que

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \left[f_{(x)}\right]_a^b = F_{(b)} - F_{(a)}$$

Este teorema fundamental del calculo es importante ya que nos provee de una herramienta poderosa para evaluar integrales definidas .Pero su mas profundo significado es que sirve como eslabón entre la derivación y la integración entre derivadas e integrales , este eslabón aparece cuando escribimos la conclusión del teorema con F'(x) reemplazando a f(x)

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \left[f_{(x)}\right]_a^b = F_{(b)} - F_{(a)}$$

4. Teorema de Adición. Sea la función $y = f_{(x)}$ continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $x = c$ un punto que pertenece este intervalo forma dos regiones A_1 y A_2 entonces es igual a la suma de integrales.

$$\int_a^b F_{(x)}dx = \int_a^c f_{(x)}dx + \int_0^b F_{(x)}dx$$

5. Teorema de Comparación.

Sean las funciones $y = f_{(x)}; y = g_{(x)}$ continuas en $[a,b]$ donde $R_1 > R_2$ y $f_{(x)} < g_{(x)}$, entonces la integral definida será:

$$\int_a^b f_{(x)}dx < \int_a^b g_{(x)}dx$$

6. Teorema de la Derivada.

Sea la función $g = f_{(t)}$ en el intervalo $[a,b]$ donde x es una variable que toma valores reales, este teorema demuestra que la derivada de la integral es igual a la función con variable "x"

$$\boxed{Dx\left[\int_z^x f_{(t)}dt\right] = f_{(x)}}$$

Se denomina también 2do teorema fundamental del cálculo

Ejemplo:

$\int_2^x t^2 dt$ **Hallar la derivada** $\dfrac{d\left[\int_2^x t^2 dt\right]}{dx} = x^2$

Demostración $\int_2^x t^2 dt = \left[\dfrac{t^3}{3}\right]^x$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}\right]$$

$$\frac{d\left[\frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}\right]}{dx} = x^2$$

Calculo de la Integral Definida:

Para calcular la integral definida de una función $f_{(x)}$ continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ se sigue el siguiente procedimiento:

1. Resolver la integral usando cualquiera de los métodos de integración hasta obtener la función $F_{(x)}$.
2. Aplicar el teorema fundamental del calculo

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \left[F_{(x)}\right]_a^b = F_{(b)} - F_{(a)}$$

3. El resultado de integral debe ser un número ese número se puede interpretar depende del problema (área, volumen, longitud, etc.)

Ejemplo:

$$\int_{-1}^{2}\left(x^3 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(x^3 - 3x^{-1/3}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^{2/3}}{2/3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{9}{2}(2)^{2/3}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{9}{2}(-1)^{2/3}\right]$$

$$= \left[4 - \frac{4}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{4} + \frac{9}{2}\right]$$

$$= \frac{33 - 18\sqrt[3]{4}}{4}$$

Cambio de Variable en la Integral Definida.

En la integral definida cuando la sustitución o cambio de variable en el integrando también se debe hacer el cambio en los limites de integración.

$$\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx =$$

$C.V.$

$x^3+3x=t$

$3x^2+3xdx=dt$

$(x^2+1)dx=\frac{dt}{3}$

Limite Superior

$x=3;t=36$

Limite Inferior

$x=+1;t=11$

$$\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+3x}}\,dx = \int_4^{36} \frac{dt/3}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int_4^{36} t^{-1/2}dt = 3\left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_4^{36} =$$

$$\frac{2}{3}\left[\sqrt{t}\right]_4^{36} = \frac{8}{3}$$

Integral por Partes.

$$\int_1^e x^3 \ln x dx =$$

$u=\ln x$

$dv=\frac{dx}{x}$

$\int dv=\int x^3$

$v=\frac{x^4}{4}$

$$= \left[\ln - \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{x}\cdot\frac{dx}{x}\right]_1^e$$

$$= \left[\ln - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{e^4}{4}\ln e - \frac{e^4}{16}\right] - \left[\frac{1^4}{1}\ln 1 - \frac{1}{16}1^4\right]$$

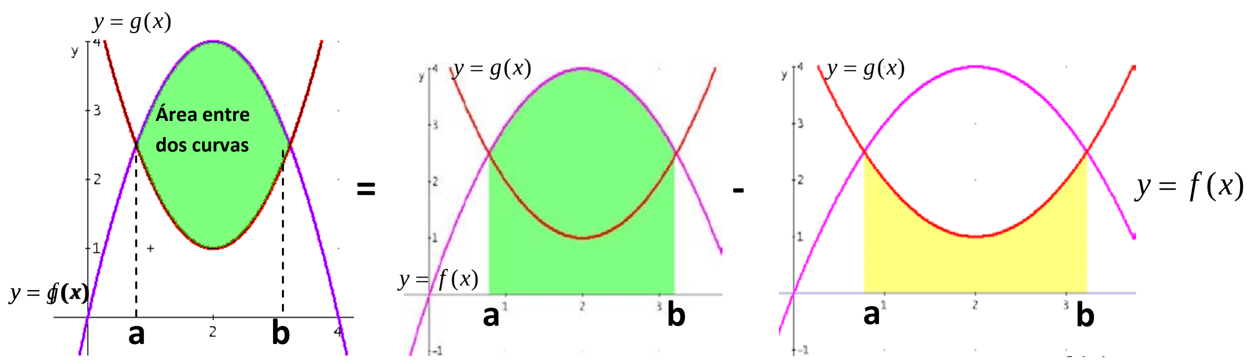
$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^4+1}{16}$$

Aplicación:

Calculo de Áreas Entre Curvas

El calculo de área debajo una una curva y entre dos curvas se determina con integrales definidas .Sean f(x) y g(x) funciones continuas en un intervalo$[a;b]$ se interpreta como el área debajo de g(x) menos el área que forma f(x)



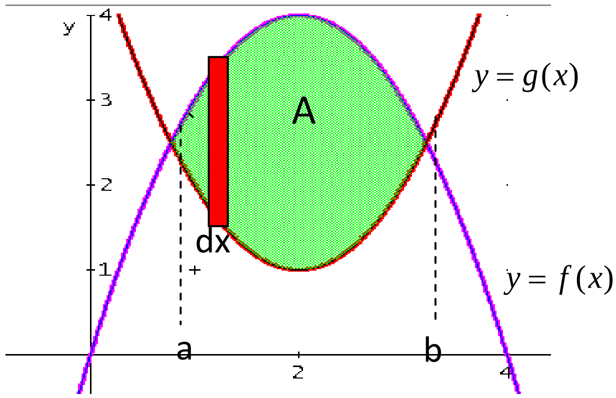
Área de la región entre f(x) y g(x) = Área de la región bajo f(x) - Área de la región bajo g(x)

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)dx$$

El área formada por la grafica de las curvas f(x) y g(x) en el intervalo $[a;b]$ se calcula como una integral definida de la forma:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

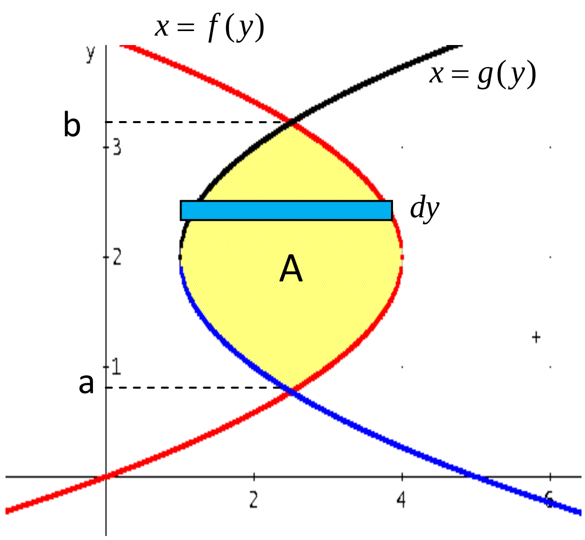
Diferencial de área



Diferencial en x

$$dx:\begin{cases} y = f(x)\,;\, y = g(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$



Diferencial en y

$$dy:\begin{cases} x = f(y)\,;\, y = g(y) \\ a \le y \le b \end{cases}$$

$$A = \int_a^b \left[f(y) - g(y) \right] dy$$

Para calcular el área limitada entre dos o más funciones se sigue el siguiente procedimiento:

1. Graficar las curvas en el plano.

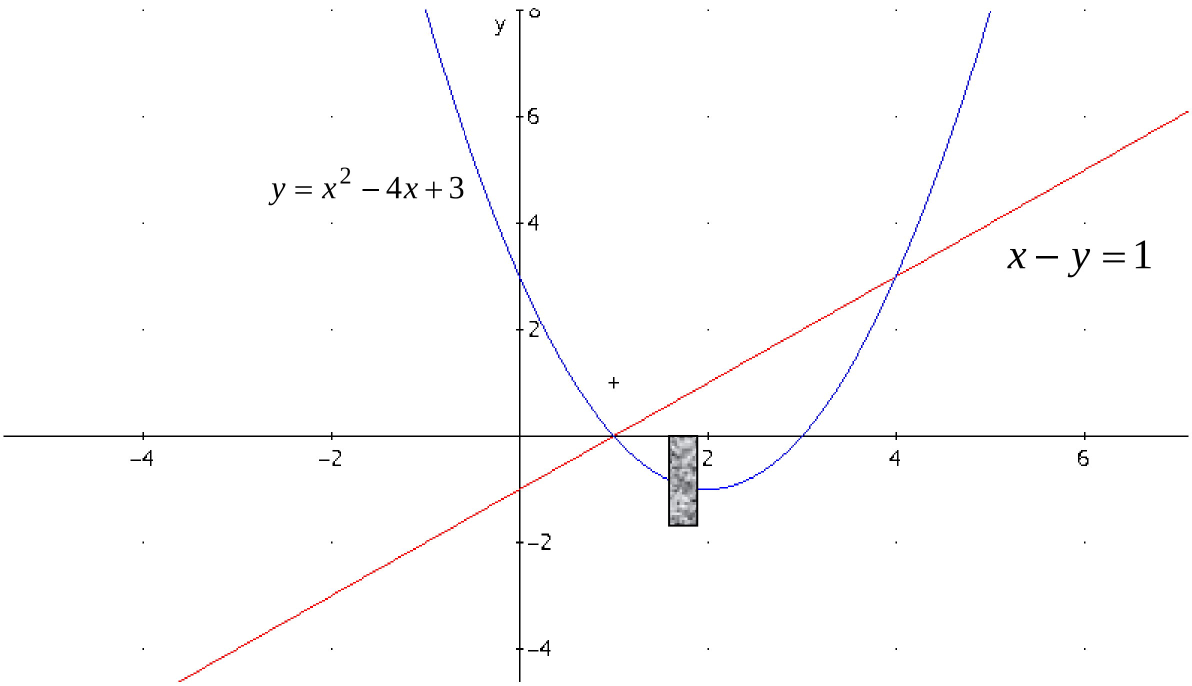
2. Definir el diferencial de áreas que se denomina también el sentido de integración.

3. Determinar los puntos de intersección.

4. Plantear la integral y resolver la integral cuyo resultado será el área limitada por la curvas.

Hallar el área limitado por las curvas $y = x^2 - 4x + 3$ **y** $x - y = 1$

1. Graficar las curvas en el plano.



2. Definición el diferencial de área y el orden de integración.

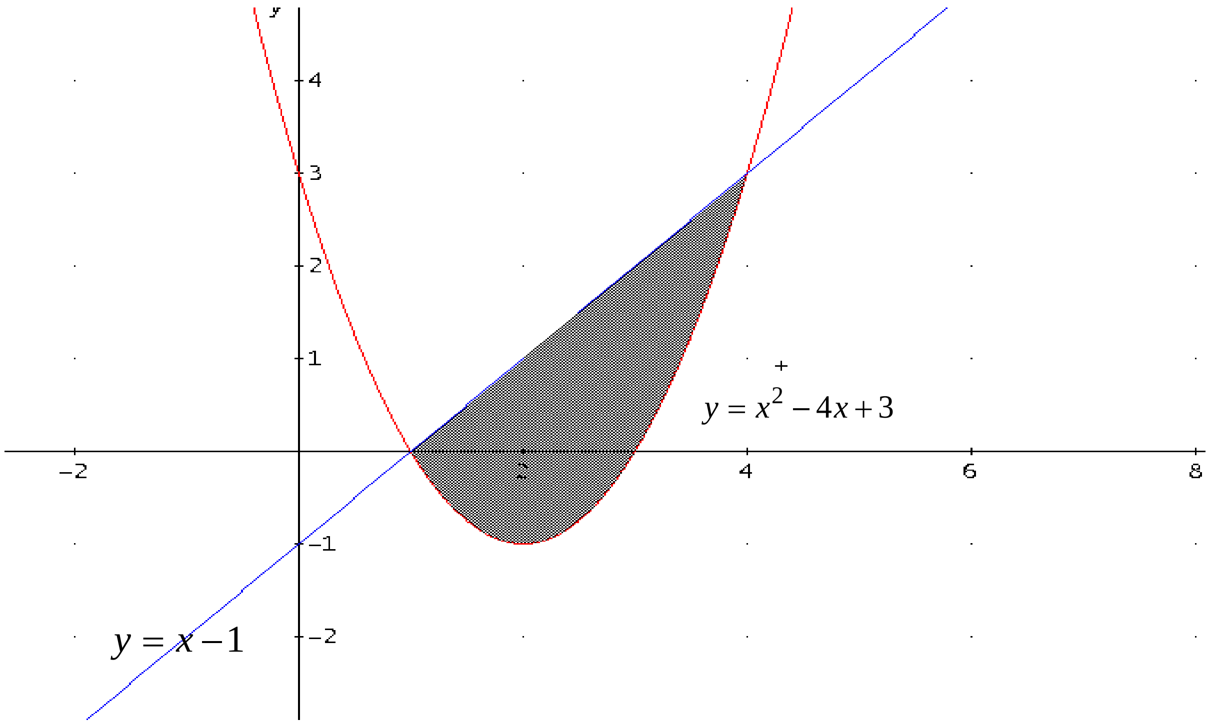
$$dx \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

2. Determinar los puntos de intersección entre curvas

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1 \qquad (x-4)(x-1) = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad x = 4 \qquad x = 1$$

4.- Graficar el área



4. Plantear la integral definida y calcular el área

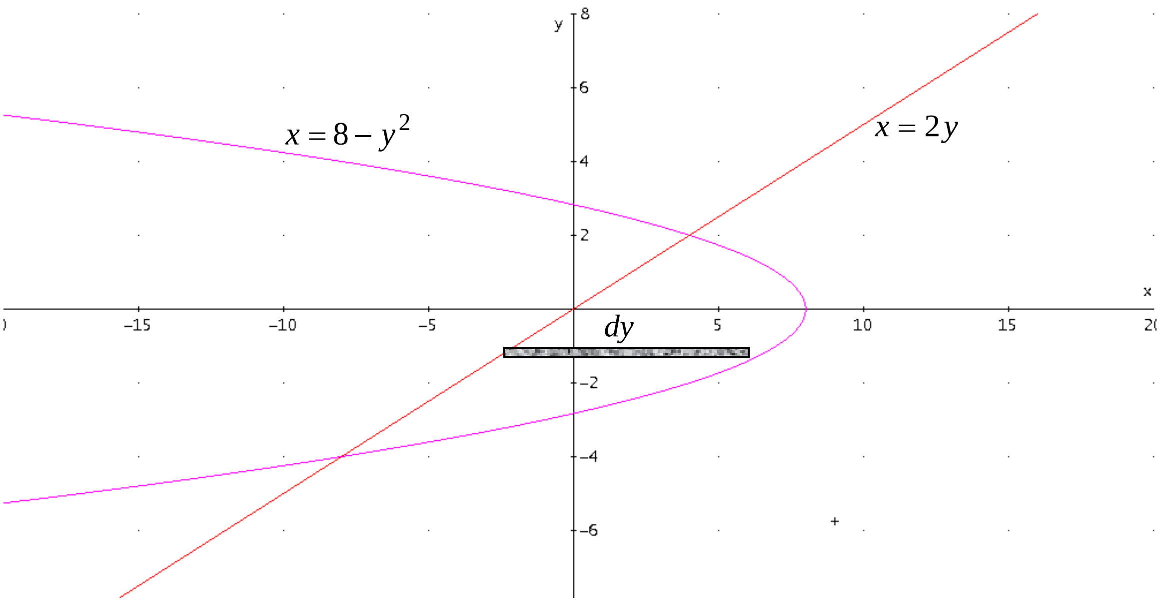
$$A = \int_{-1}^{4} \left[g_{(x)} - f_{(x)} \right] dx = \int_{-1}^{4} \left[(x-1) - \left(x^2 - 4x + 3\right) \right] dx = \int_{-1}^{4} \left(5x - x^2 - 4\right) dx$$

$$A = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x \right] = \left[40 - \frac{64}{3} - 16 \right] - \left[\frac{5}{2} - \frac{1}{3} - 4 \right]$$

$$A = 28 - \frac{64}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{9}{2} \; unidades \;\; de \;\; \sup erficie$$

1. Graficar:



2. Elegir el diferencial

$$dy \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - y^2 \\ x = 2y \end{cases}$$

3. Puntos de intersección:

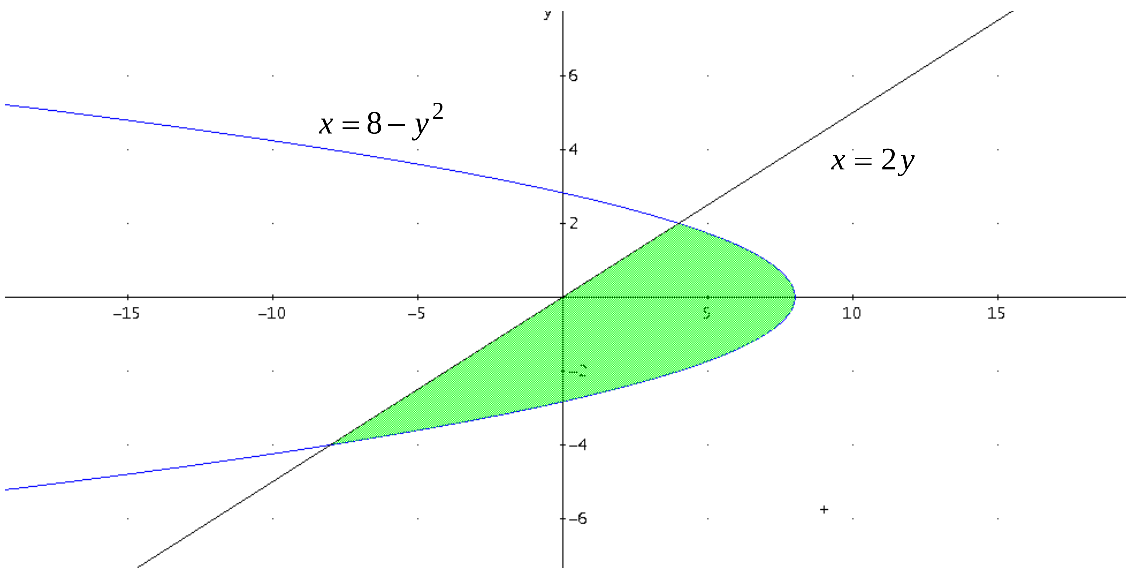
$$8 - y^2 = 2y$$
$$y = -4 \quad ; \quad y = 2$$

4. Graficar :

#2: $x = 8 - y^2$

#3: $x = 2 \cdot y$

#4: AreaBetweenCurves(8 − y^2, 2·y, y, −4, 2, x)



5.

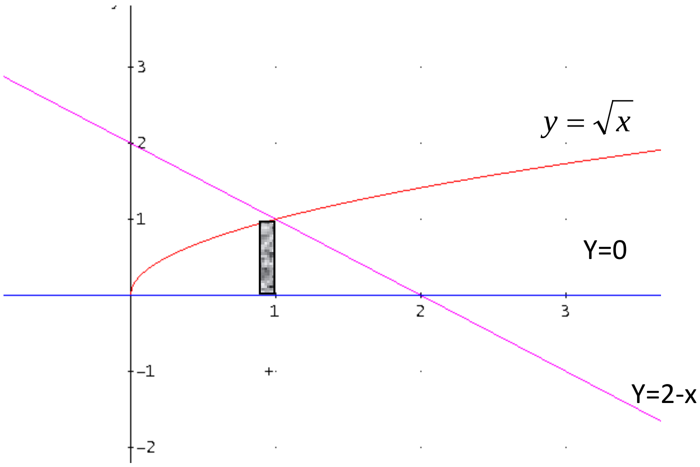
$$A = \int_{-4}^{2} \left[\left(8 - y^2\right) - (2y)\right] dy = 36$$

$\boldsymbol{f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x \quad : \quad g(x) = 2x - x^2}$

4.- $y = x - 2 \quad ; \quad y = 4 \quad ; \quad 2x - y = 2 \quad ; \quad 2y = x^3$

5.- $y = 2\ln x \quad ; \quad y = \ln(x+2) \quad ; \quad y = 0$

Grafica de las funciones



$$A_1=\int_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)-(0)\right]\,dx=\frac{2}{3}\qquad A_2=\int_1^2\left[(2-x)-(0)\right]\,dx=\frac{1}{2}$$

$$A=A_1+A=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

Calcular el área limitada por las curvas aplicando

4.- $y=x-2 \quad ; \quad y=4 \quad ; \quad 2x-y=2 \quad ; \quad 2y=x^3$

5.- $y=2\ln x \quad ; \quad y=\ln(x+2) \quad ; \quad y=0$

FIN