Métodos para resolver límites indeterminados

Para calcular límites indeterminados no existe un método fijo sino mas bien algunas sugerencias que permiten resolver de acuerdo a las características que tenga cada límite

Primer Método: Si el límite tiene la forma: $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ Donde P(x) y Q(x) son funciones polinomiales, entonces para resolver se utilizan métodos de factorización incluyendo Ruffini, hasta Convertir a la forma: $\lim\limits_{x \to a} \frac{(x-a)}{(x-a)} \frac{Pi(x)}{Qi(x)}$ Si el límite se mantiene indeterminado se debe buscar otra vez la factorización.

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{0}{0} = ?$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)}{(x+2)} = \frac{6}{5}$$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^4-3x^2-x+3}{x^3+2x^2-2x-1} = \frac{0}{0} = ?$

	1	-3	0	-1	+3
1		+1	-2	-2	-3
	1	-2	-2	-3	0

$$(x-1)(x^3-2x^2-2x-3)$$

	1	+2	-2	-1
1		+1	+3	+1
	1	+3	+1	0

$$(x-1)(x^2+3x+1)$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x^3-2x^2-2x-3)}{(x-1)(x^2+3x+1)} = \frac{-3}{5}$$

Segundo Método: Consiste en resolver limite donde las funciones son irracionales. Para resolver se simplifica las raíces mediante racionalización, en algunos casos cuando el índice de la raíz es mayor que 3 se debe hacer un cambio de variable con un exponente igual al índice de la raíz de manera que el limite se pueda transformar en una expresión polinomial.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}\right)^2}$ 2. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 3. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b} \qquad a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$\downarrow\ \downarrow \qquad \downarrow\ \downarrow$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \qquad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}$$

Ejemplos :

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2+x-6}=\dfrac{0}{0}=?$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-(3)^2}{\left(x^2+x-6\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-3)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1}{30}$$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{1-\sqrt{x-2}}=\dfrac{0}{0}=?$ $\quad = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-(2)^2\right]\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{\left[(1)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=-\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt[5]{2x-3}}{x-2}=\dfrac{0}{0}=?$ $\quad \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{t^{10}}-\sqrt[5]{t^{10}}}{\dfrac{t^{10}+3}{2}-\dfrac{2}{1}}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2\left(t^3-1\right)}{\dfrac{t^{10}-1}{2}}$

CAMBIO DE VARIABLE

$2x-3=t^{10}$

$2x=t^{10}+3$

$x=\dfrac{t^{10}+3}{2}$

$x\to 2$

$$=2\lim_{t\to 1}\frac{t^2\left(t^3-1\right)}{t^{10}-1}=2\lim\frac{t^2(t-1)\left(t^2+t-1\right)}{(t-1)\left(t^4+t^3+t^2+t+1\right)\left(t^5+1\right)}$$

$$=2\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

$$2(2)-3=t^{10}$$
$$1=t^{10}$$
$$t=\sqrt[10]{1}$$
$$t=1$$
$$t\to 1$$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-5}-\sqrt[4]{x-1}}{x-2}=\dfrac{0}{0}=?$ $\qquad \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{3(t^4+1)-5}-\sqrt[4]{t^4}}{t^4+1-2}$

CAMBIO DE VARIABLE.

$$\boxed{\begin{array}{l} x-1=t^4\\ x\to 2\\ t\to 1\\ x=t^4+1\end{array}}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{3t^4-2}-t}{t^4-1}=\frac{0}{0}=?$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{\left(\sqrt{3t^4-2}\right)^2-(t)^2}{(t^4-1)\left(\sqrt{3t^4-2}+t\right)}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{3t^4-t^2-2}{(t^4-1)\left(\sqrt{3t^4-2}+t\right)}=\frac{0}{0}=?$$

	3	0	-1	0	-2
1		3	3	2	2
	3	3	2	2	0

$$\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(3t^3+3t^2+2t+2)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)\left(\sqrt{3t^4-2}+t\right)}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

5. $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{\sqrt[4]{x}-3}{9-\sqrt{x}}=\dfrac{0}{0}=?$ $\qquad \lim\limits_{t\to 3}\dfrac{\sqrt[4]{t^4}-3}{9-\sqrt{t^4}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=t^4\\ x\to 81\\ t^4\to 81\\ t\to 3\end{array}}$$

$$\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{9-t^2}=-\lim_{t\to 3}\frac{3-t}{(3-t)(3+t)}=-\frac{1}{6}$$

6. $\lim\limits_{x\to 2^{\frac{3}{2}}} \dfrac{x^2-8}{x^{\frac{2}{3}}-2} = \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \dfrac{x^2-8}{\sqrt[3]{x^2}-2} = \lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^3-8}{t-2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 = t^3 \\ x \to 2^{\frac{3}{2}} \\ \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^2 = t^3 \\ 2^3 = t^3 \\ t \to 2 \end{array}}$$

Tercer método : limite tiene indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ para resolver basta dividir al numerador al denominador entre la variable de mayor exponente de todo limite.

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^2+3}{x^3+6x+3}=\frac{\infty}{\infty}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{5x^2}{x^4}+\frac{3}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}+\frac{6x}{x^4}+\frac{3}{x^4}}=\frac{1+\frac{5}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{6}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{1}{0}=\infty$$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x+2}{5x^2+7x^3+1}=\frac{\infty}{\infty}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{5x^2}{x^3}+\frac{7x^3}{x^3}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{\infty^2}+\frac{2}{\infty^2}}{\frac{5}{\infty}+7+\frac{1}{\infty^3}}=\frac{4}{7}$$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x+3}{2x^4+x^2-7}=\frac{\infty}{\infty}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^4}+\frac{x}{\infty^4}+\frac{3}{\infty^4}}{\frac{2x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}-\frac{7}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{\infty}+\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}-\frac{7}{\infty}}=\frac{0}{2}=0$$

Conclusión:

En los ejemplos anteriores nos muestra tres situaciones típicas que pueden presentarse en el cálculo de limites al infinito en una función racional en resumen los resultados son :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots\dots+a_o}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\dots..+b_o}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_n} & si\ ;\ \mathrm{n=m}\\ \infty & si\ ;\ n>m\\ 0 & \mathrm{si}\ ;\ \mathrm{n<m}\end{cases}$$

1. Si $m=n$ *entonces* $\frac{a_n}{b_n}$ si el numerador y denominador son de igual grado el resultado es el cociente de sus coeficientes.
2. Si el numerador es de mayor grado que el denominador el resultado es infinito $n>m$ *entonces* ∞
3. Si el denominador es de mayor grado el resultado es cero $n<m$ *entonces* 0

Si el limite tiende a infinito e y es una función irracional se debe transformar a la forma de indeterminación infinito sobre infinito y se aplica el procedimiento anterior

4. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2/3}\left[\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-}\right]=\infty-\infty=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}\left[\left(\sqrt{x^3+2}\right)^2-\left(\sqrt{x^3-2}\right)^2\right]}{\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3-2}}=\frac{\infty}{\infty}=?=4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3-2}}{\sqrt{x^3}}}=$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{\sqrt{x^3-2}}{\sqrt{x^3}}}=4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{2}{x^3}}+\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}}}=\frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{2}{\infty}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{\infty}}}=\frac{4}{2}=2$$

Limites trigonométricos

Para resolver .límites trigonométricos es necesario utilizar los siguientes límites fundamentales

1. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{Sen\,u}{u}=1 \quad \vee \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u}{Sen\,u}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Tan\,u}{u}=1 \quad \vee \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u}{Tan\,u}=1$

3. $\lim\limits_{\to 0}(sen\,u)=0$ **4.** $\lim\limits_{u\to 0}(\cos u)=1$

5. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-Cos\,u}{u}=0$ **en cada uno de los límites:** $u=f(x)$

Ejemplo :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Tan\,\pi x}{Sen5x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{Tan\,\pi x}{x}}{\dfrac{Sen5x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Tan\,\pi x}{\pi x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sen5x}{5x}}=\frac{\pi}{5}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcSen5x}{3x}=\dfrac{0}{0}=1$

Cambio de variable

$arcSen5x=t$

$x\to 0$

$5x=Sent$

$x=\dfrac{Sent}{5}$

$t\to 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{3\cdot Sent}{5}}=\frac{5}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t}{Sent}=\frac{5}{3}$$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Senx-Tanx}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{Senx-\dfrac{Senx}{Cosx}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Senx\left(1-\dfrac{1}{Cosx}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Senx(Cosx-1)}{Cosx\,.\,x^3}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{Senx}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{Cosx}\cdot\lim_{x\to0}\frac{Cosx-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{Cos-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(Cosx-1)(Cosx+1)}{x^2(Cosx+1)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{Cos^2x-1}{x^2(Cosx+1)}=-\lim_{x\to0}\frac{1-Cos^2x}{x^2(Cos\ \ x+1)}=-\lim_{x\to0}\frac{Senx}{x^2(Cosx+1)}=-\lim_{x\to0}\frac{Senx}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{Cosx+1}=-\frac{1}{2}$$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2Cosx}{4x-\pi}\qquad \dfrac{\sqrt{2}-2Cos\dfrac{\pi}{4}}{4\dfrac{\pi}{4}-\pi}=\dfrac{0}{0}=\dfrac{?}{?}$

$$\boxed{\begin{array}{l} C.V.\\ 4x-\pi=t\\ x\to\dfrac{\pi}{4}\\ t\to0\\ x=\dfrac{t}{4}+\dfrac{\pi}{4}\end{array}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-2Cos\left(\frac{t}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{t}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Cos(a+b)=Cosa\cos b-SenaSenb\\ Cos\left(\dfrac{t}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=Cos\dfrac{t}{4}Cos\dfrac{\pi}{4}-Sen\dfrac{t}{4}Sen\dfrac{\pi}{4}\\ Cos\dfrac{t}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{2}-Sen\dfrac{t}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(Cos\dfrac{t}{4}-Sen\dfrac{t}{4}\right)\end{array}}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\left(Cos\dfrac{t}{4}-Sen\dfrac{t}{4}\right)}{t}=\sqrt{2}\left(\lim_{t\to0}\frac{1-Cos\dfrac{t}{4}+Sen\dfrac{t}{4}}{t}\right)=$$

$$\sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{1-Cos\dfrac{t}{4}}{\dfrac{t}{4}}+\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{Sent}{4}}{\dfrac{t}{4}}\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Limites exponenciales y Logarítmicos

Para resolver .este tipo de límites es necesario utilizar los siguientes límites fundamentales

1. $\lim\limits_{u\to0}[1+u]^{\frac{1}{u}}=e$

2. $\lim\limits_{u\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{u}\right]^u=e$

3. $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$

4. $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{a^u-1}{u}=\ln a$

en cada uno de los límites: $u=f(x)$

Ejemplos :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{3x}} = \left\{\lim\limits_{x\to 0}[1+(-5x)]^{-\frac{1}{5x}}\right\}^{\frac{4}{3}(-5)} = e^{-\frac{20}{3}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)^{3x+2} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x+5}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}3x+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{x-2}{x+5}-1\right]^{3x+2} =$

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{x-2-x-5}{x+5}\right]^{3x+2} = \left\{\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-5}{-7}}\right]^{\frac{x-5}{-7}}\right\}^{\frac{-7}{x-5}(3x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-21x-14}{x-5}} = e^{-21}$$

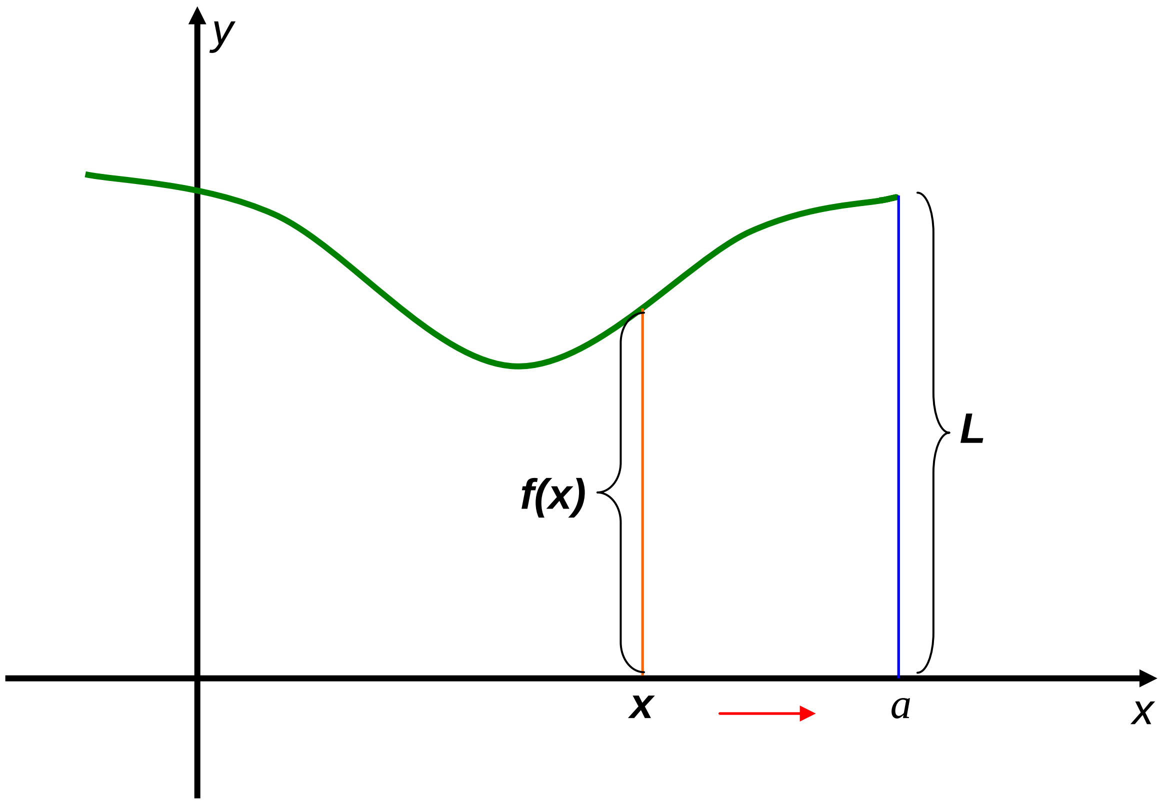
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-3^{2x}}{x} = 5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{5x} - 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{2x} = 5-2\ln 3$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+2)-\ln x] = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)^{x} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \ln\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^{2} = \ln e^{2} = 2\ln e = 2$$

Limites laterales:

Limite lateral por la izquierda

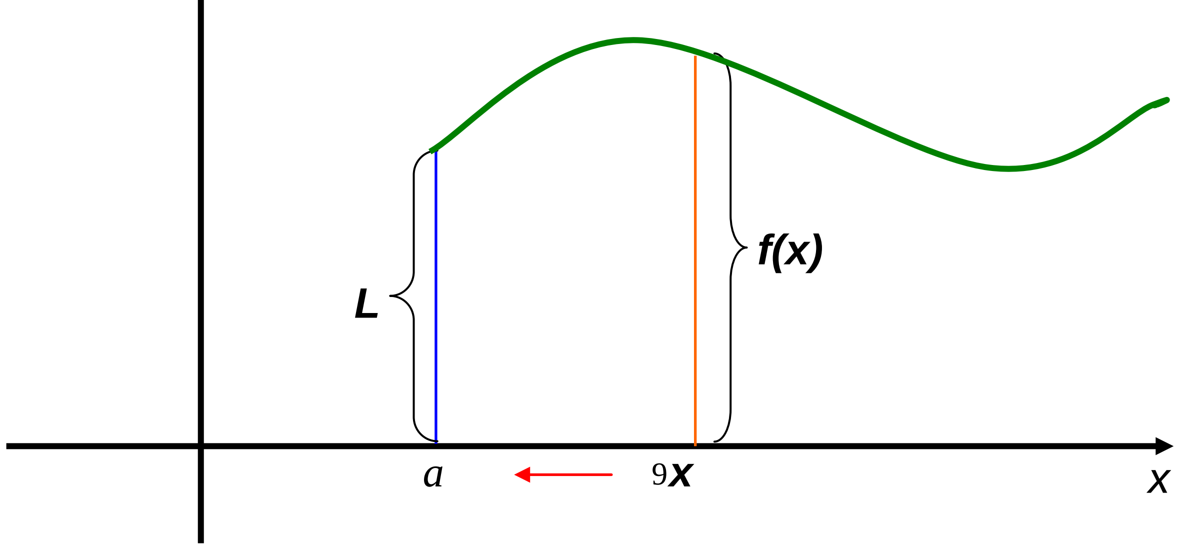


Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a un numero a por la izquierda es L y se denota por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

$$Si\ \forall; \varepsilon > 0 ; \exists; \delta > 0 / \ \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \ \text{; Cuando} \ \ a - x < \delta$$

Limite lateral por la derecha



Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a un número a por la derecha es L y se denota por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

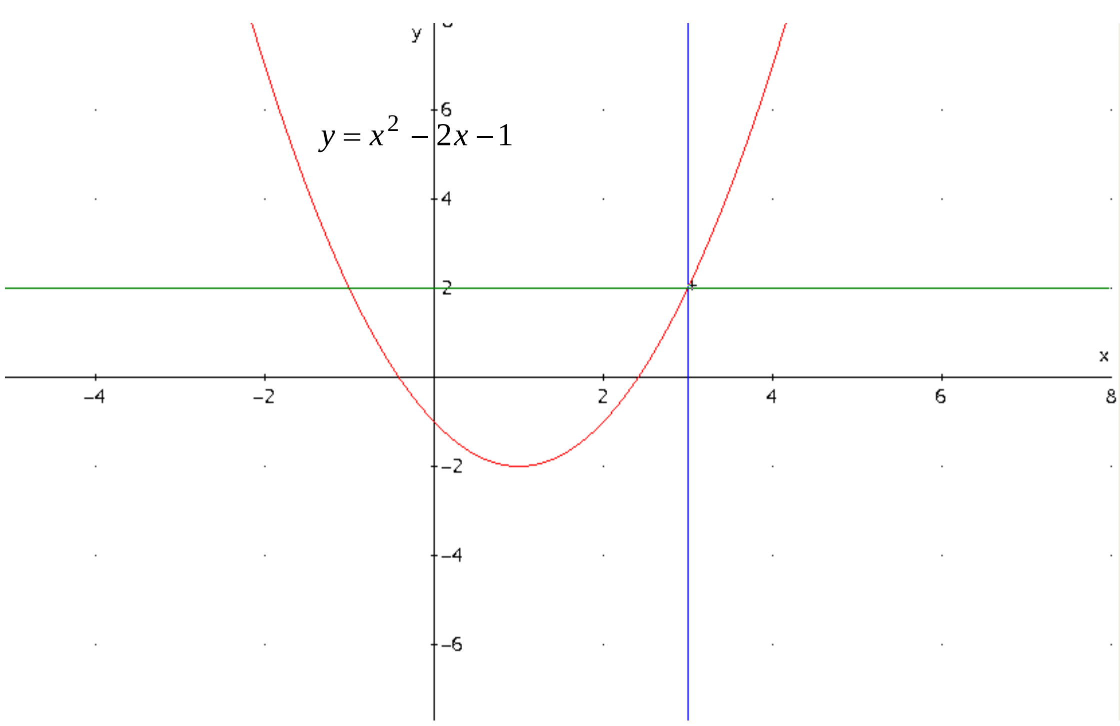
$$Si\ \forall; \varepsilon > 0\,; \exists; \delta > 0 / \ |f(x) - L| < \varepsilon \ \text{; Cuando} \quad x - a < \delta$$

Al comprar las dos definiciones anteriores con la definición de limite de una función se puede decir que : si los limites laterales existen y son iguales entonces el limite de la función existe y es igual al valor de sus limites laterales

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad (existe)$$

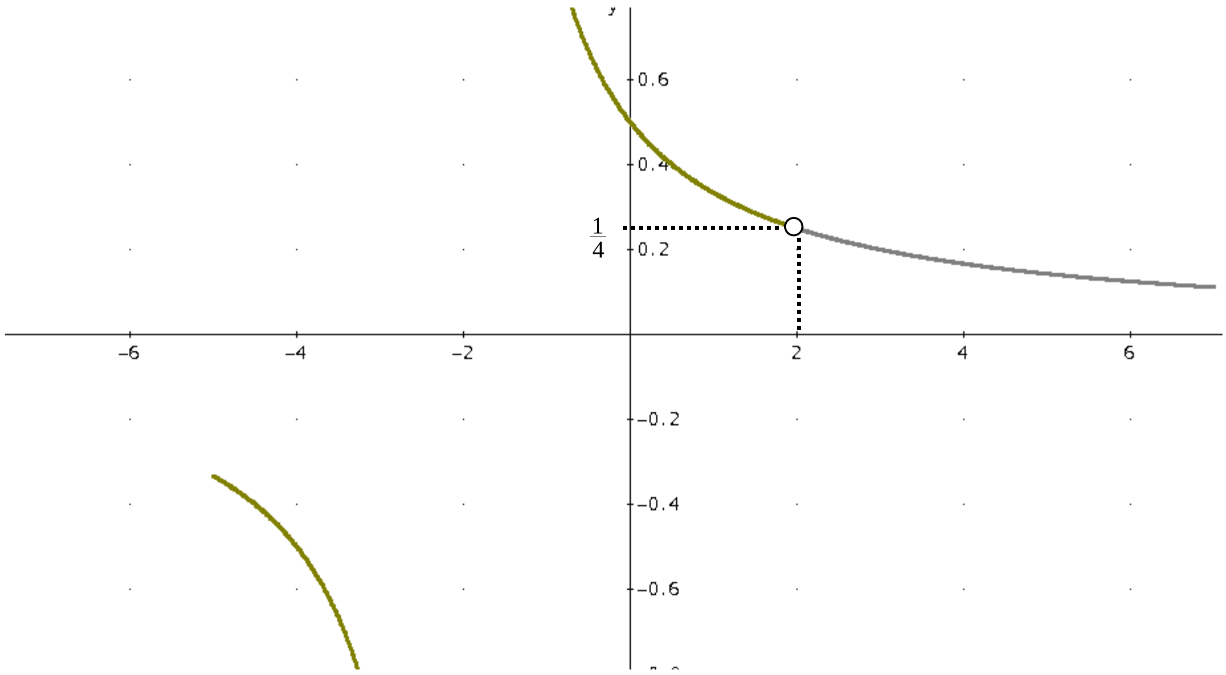
Ejemplos :

1.- $f(x) = x^2 - 2x - 1$ para $x = 3$



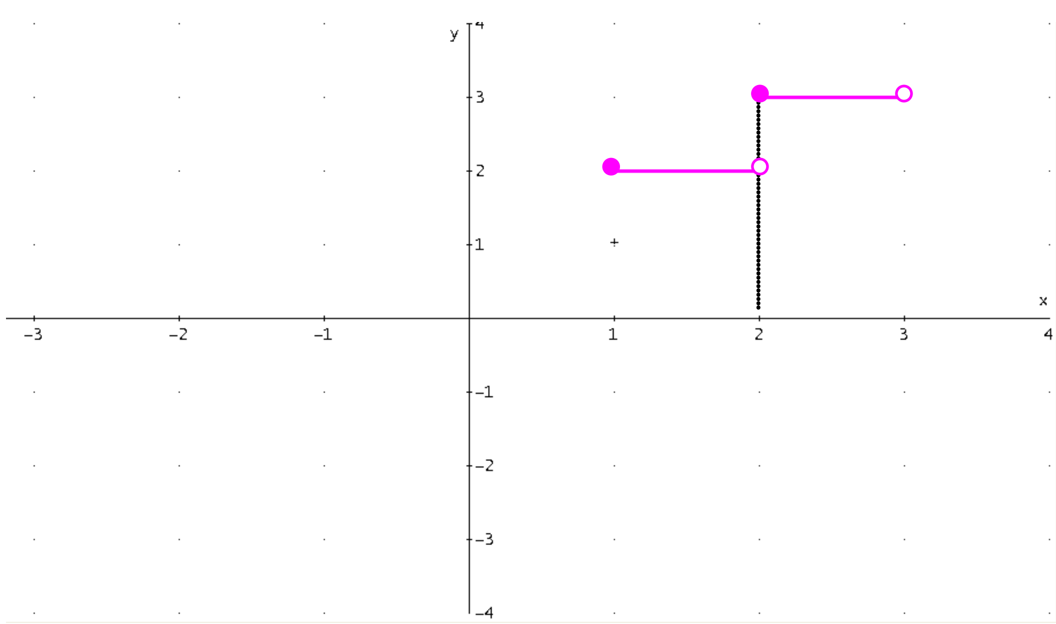
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to 3} f(x)=2 \quad (existe)$$

2.- $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ para $x=2$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{4} \quad (existe)$$

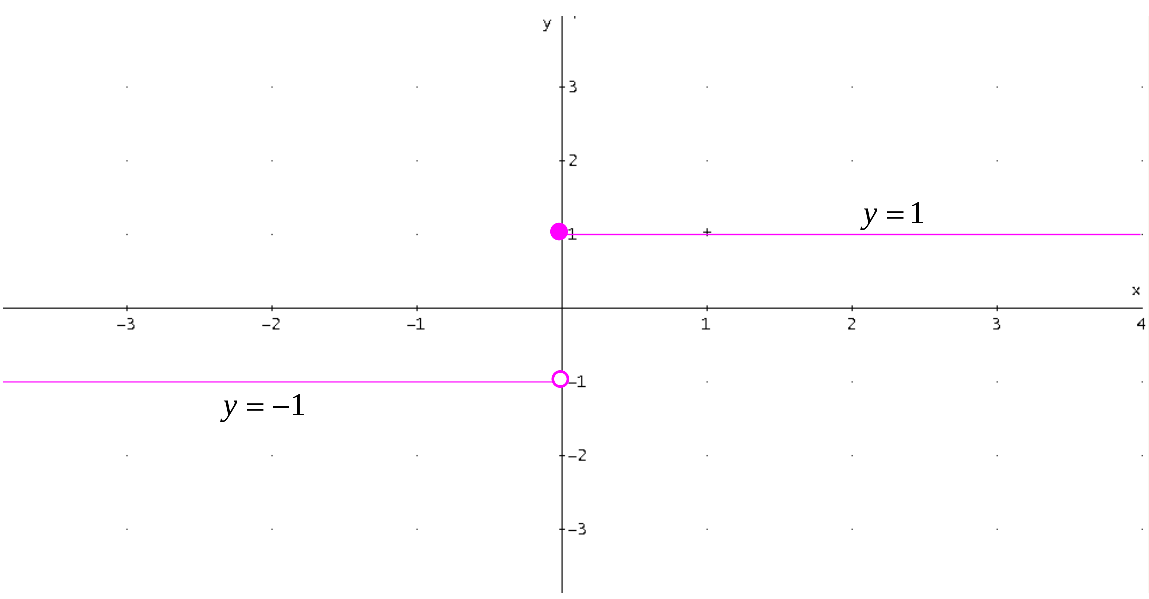
3.- $f(x)=[\![x+1]\!]$ para $x=2$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} [\![x+1]\!] = \\ \lim\limits_{x\to 2^-} [\![x+1]\!] = \end{cases} \qquad \begin{cases} y = [\![3+1]\!] = 3 \\ y = [\![1+1]\!] = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = No \quad (existe)$$

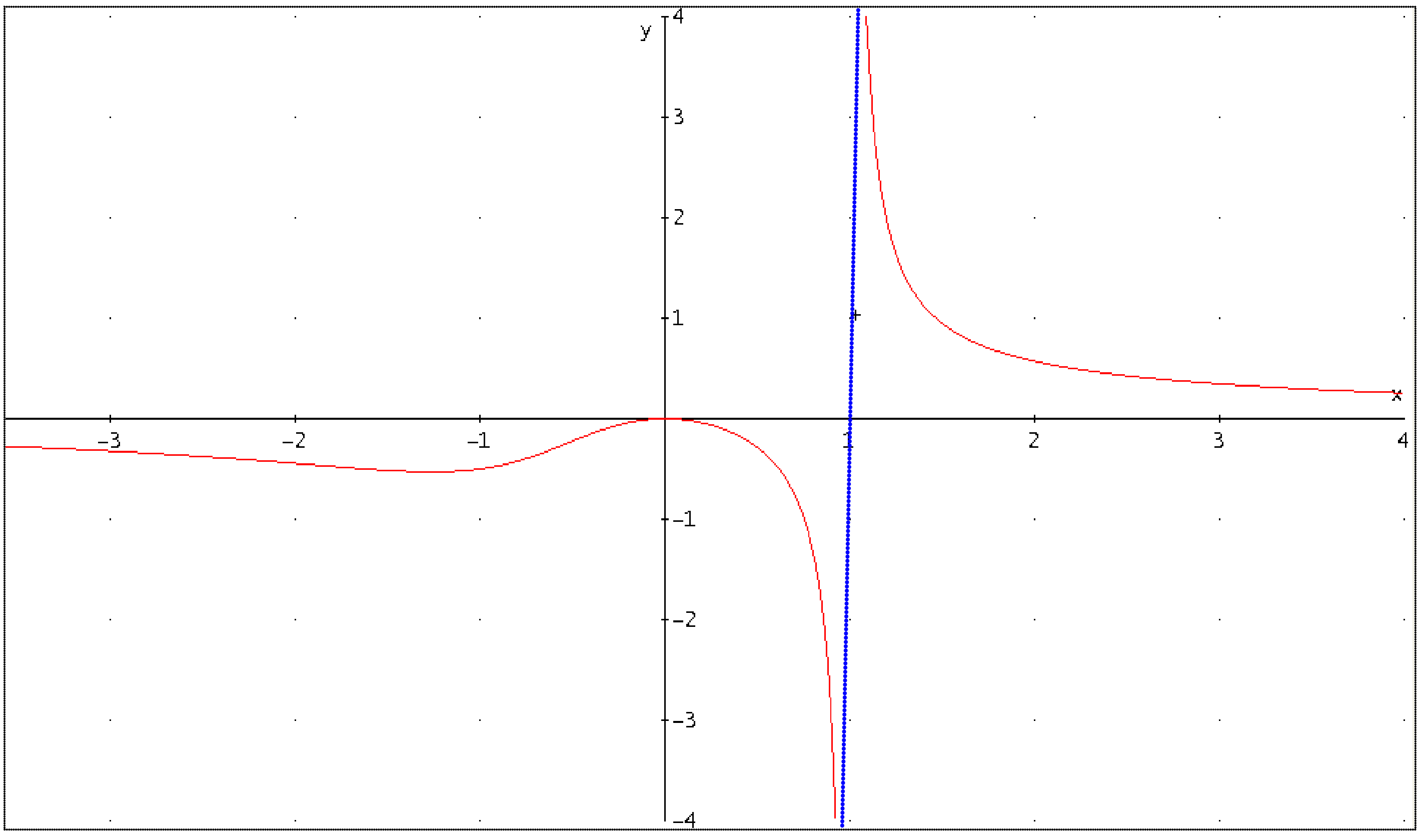
4.- $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ para $x = 0$



$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} & si\ ;\ x \ge 0 \\ \dfrac{-x}{x} & si\ ;\ x < 0 \end{cases} \qquad f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & si\ ;\ x \ge 0 \\ -1 & si\ ;\ x < 0 \end{cases}$$

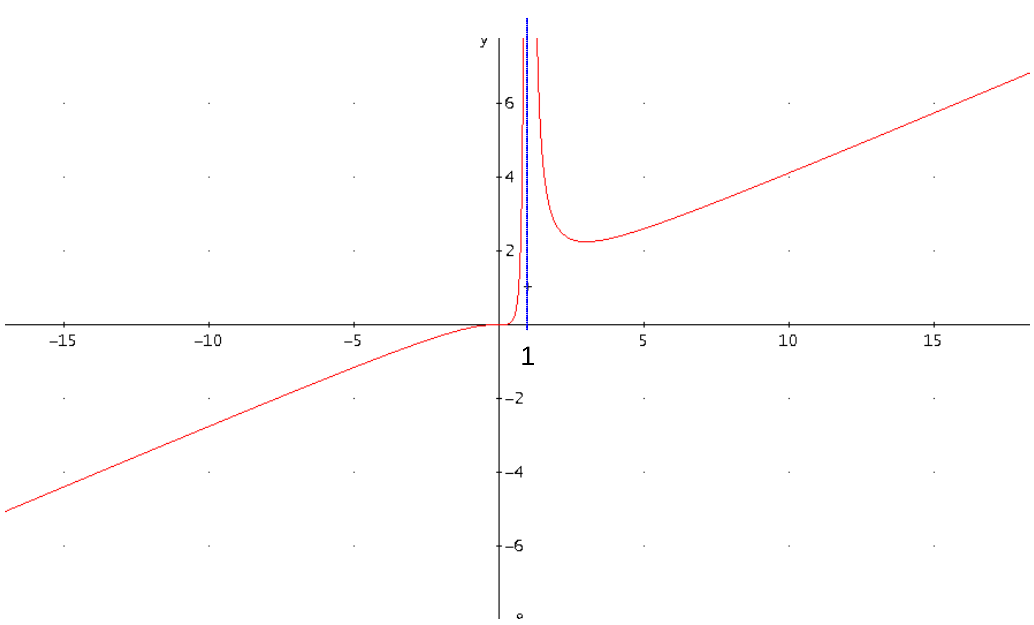
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = No \quad (existe)$$

5.- $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-1}$ para $x=1$



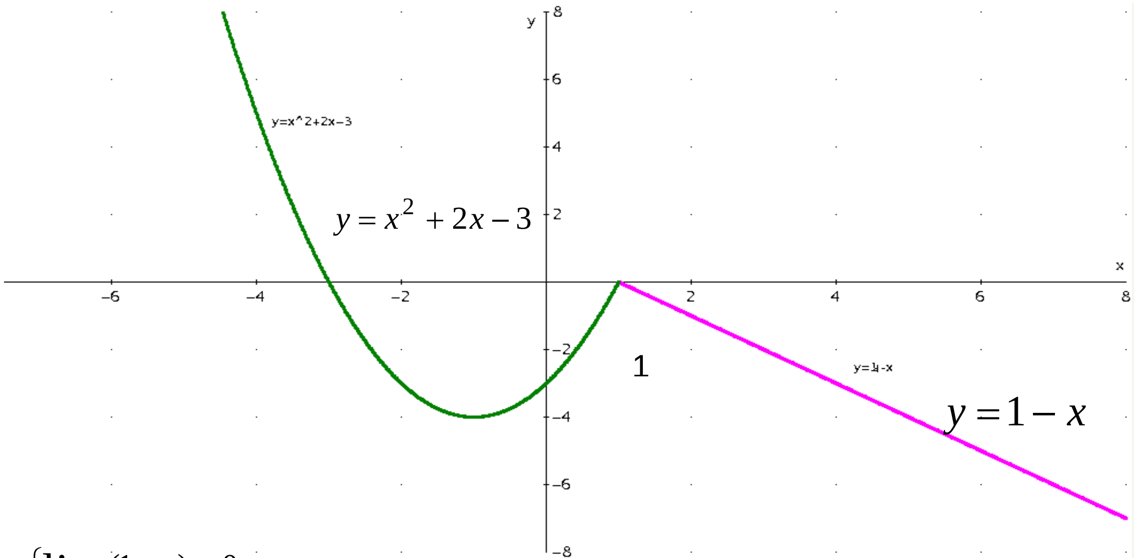
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=No \quad (existe)$$

6.- $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x\ \ -1)^2}$ para $x=1$



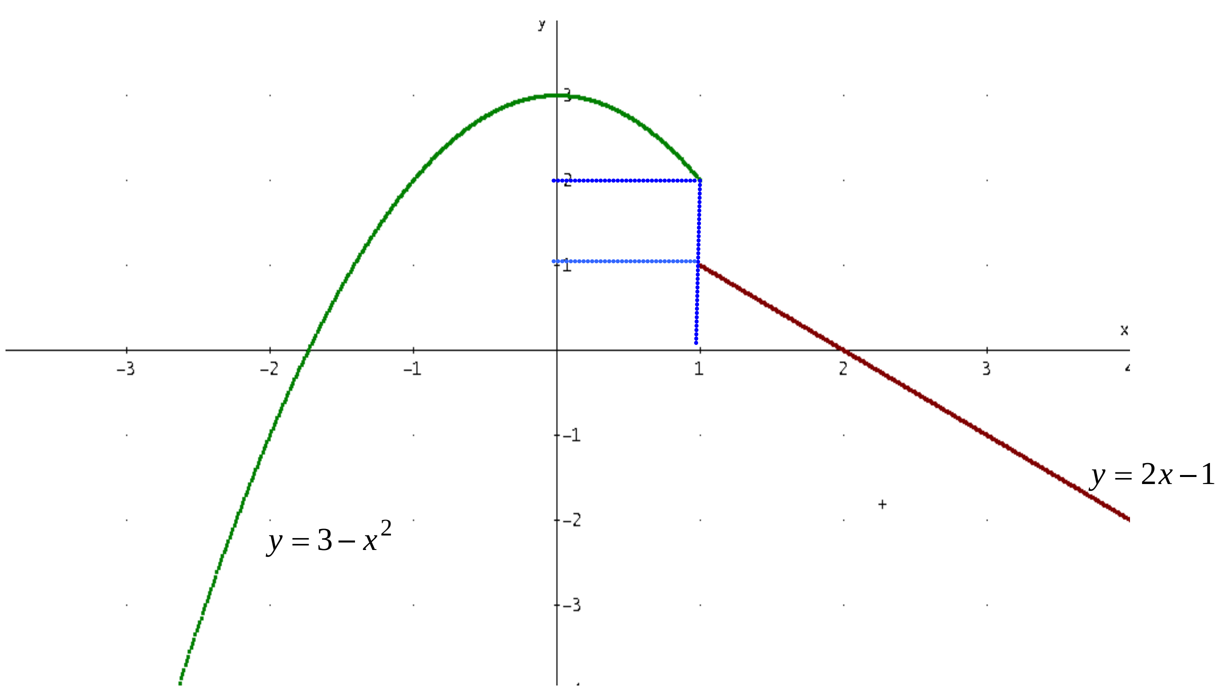
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = No \quad (existe)$$

7.- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & si \ ; \ x \le 1 \\ 1 - x & si \ ; \ x > 1 \end{cases}$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} (1 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + 2x - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0 \quad (existe)$$

8.- $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & si \ ; \ x \le 1 \\ 2x - 1 & si \ ; \ x > 1 \end{cases}$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \quad (existe)$$

Continuidad y Discontinuidad

Introducción.-

Punto de Estudio.

1. $f_{(x)} = \dfrac{x}{x^2 - x - 6}$

$$x^2 - x - 6 \neq 0$$
$$(x-3)(x+2) \neq 0$$
$$x = 3 \quad (x = 2)$$

P_E P_E

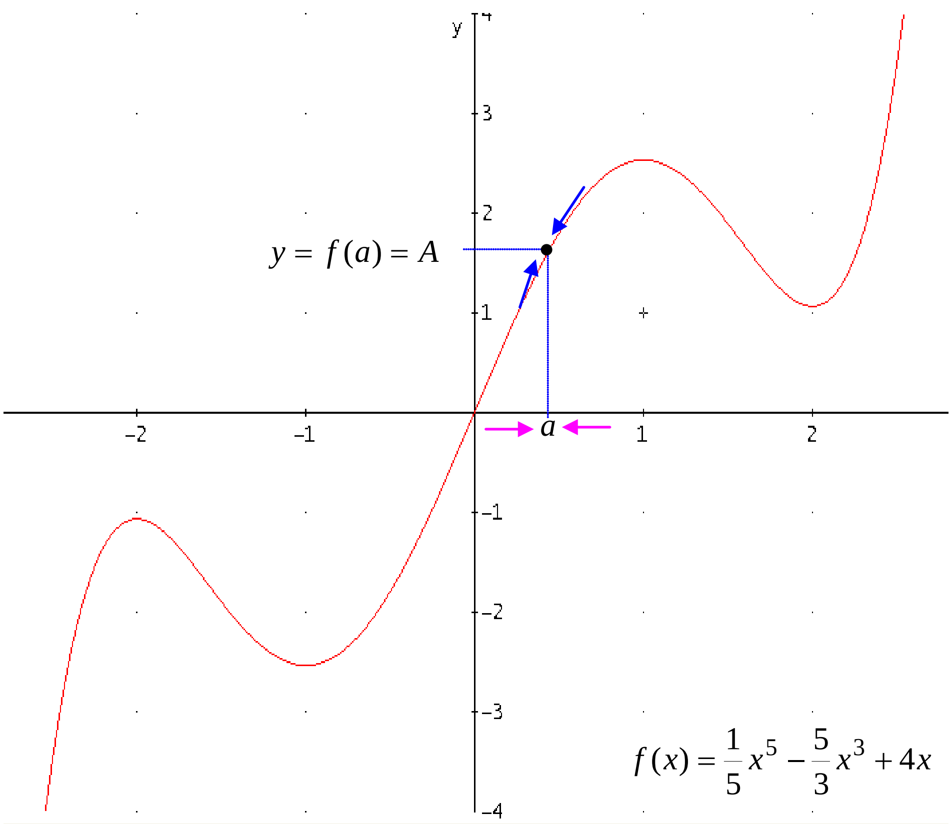
2. $f_{(x)} = \begin{cases} x+1 & Si \;\; x \leq -2 \\ x^2 - 4 & Si \;\; x > 2 \end{cases}$

$x = 2$ P E

$x = -2$ P E

Función continua

$\boxed{x = a}$ Punto de estudio



Definición de continuidad en un punto:

Se una función $f(x)$ definida en la vecindad del punto a.Se dice que la función $f(x)$ es continua en a si el limite de la función cuando x tiende al punto a existe y además el valor de ese limite es igual al valor de la función en el punto a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Después de realizar el análisis de la definición de de continuidad nos muestra que: Una función para ser continua en el punto a debe satisfacer tres condiciones:

I.- La función $f(x)$ debe estar definida en el punto a de manera que $f(a)$ exista

$$f(a) = A$$

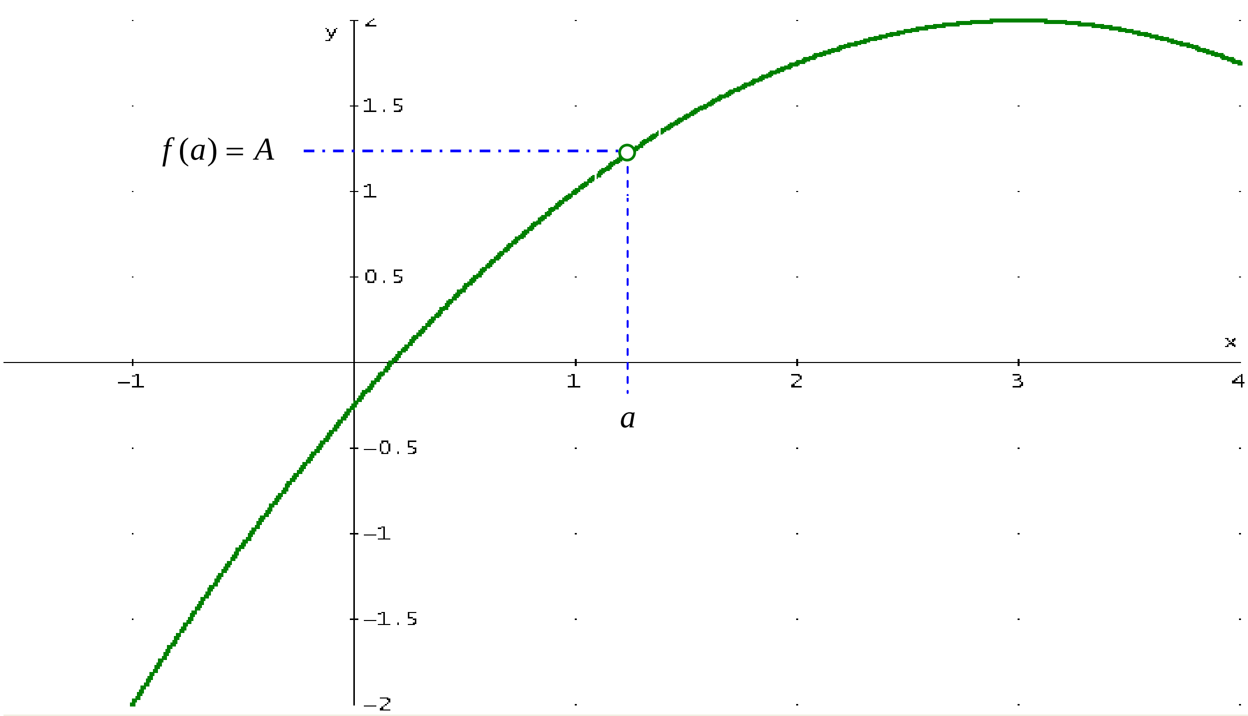
II.- Debe existir el limite de $f(x)$ cuando x tiende a a

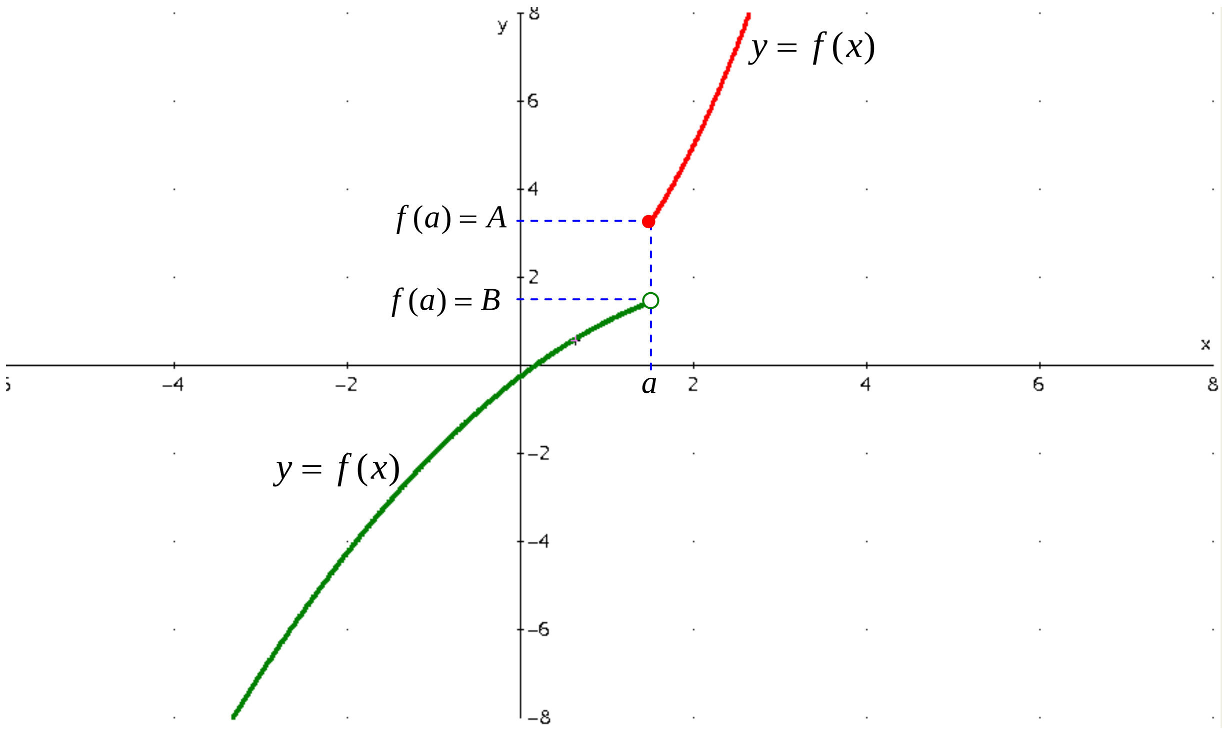
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A$$

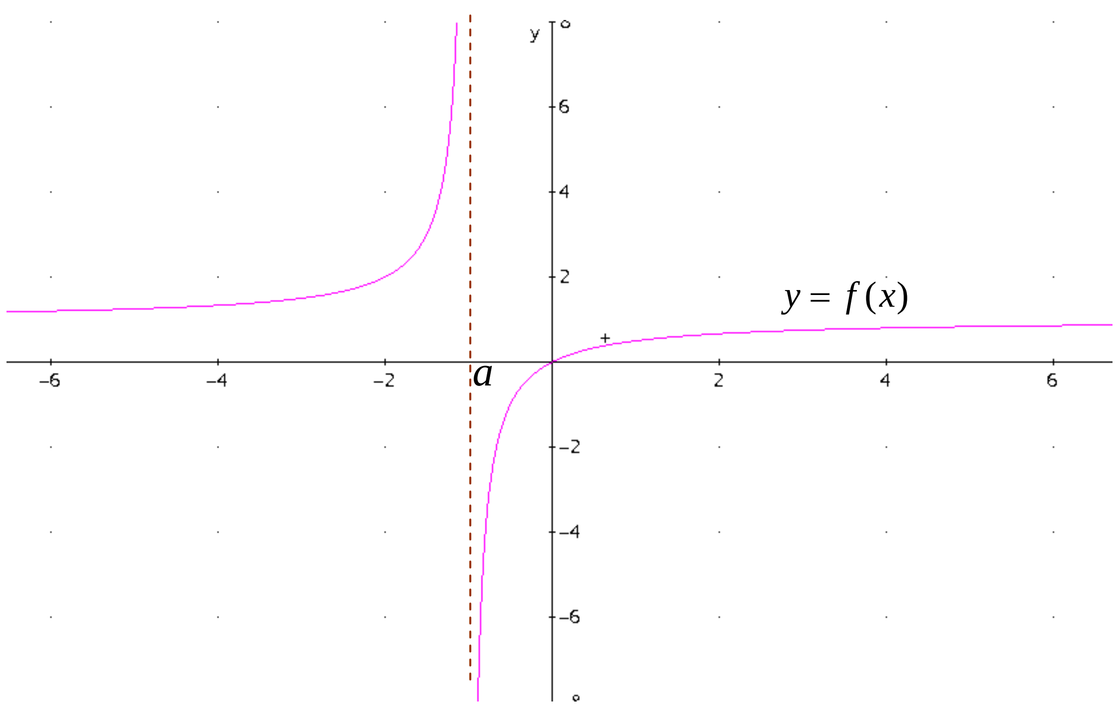
III.- Los números de las condiciones **I** y **II** deben ser iguales

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = A$$

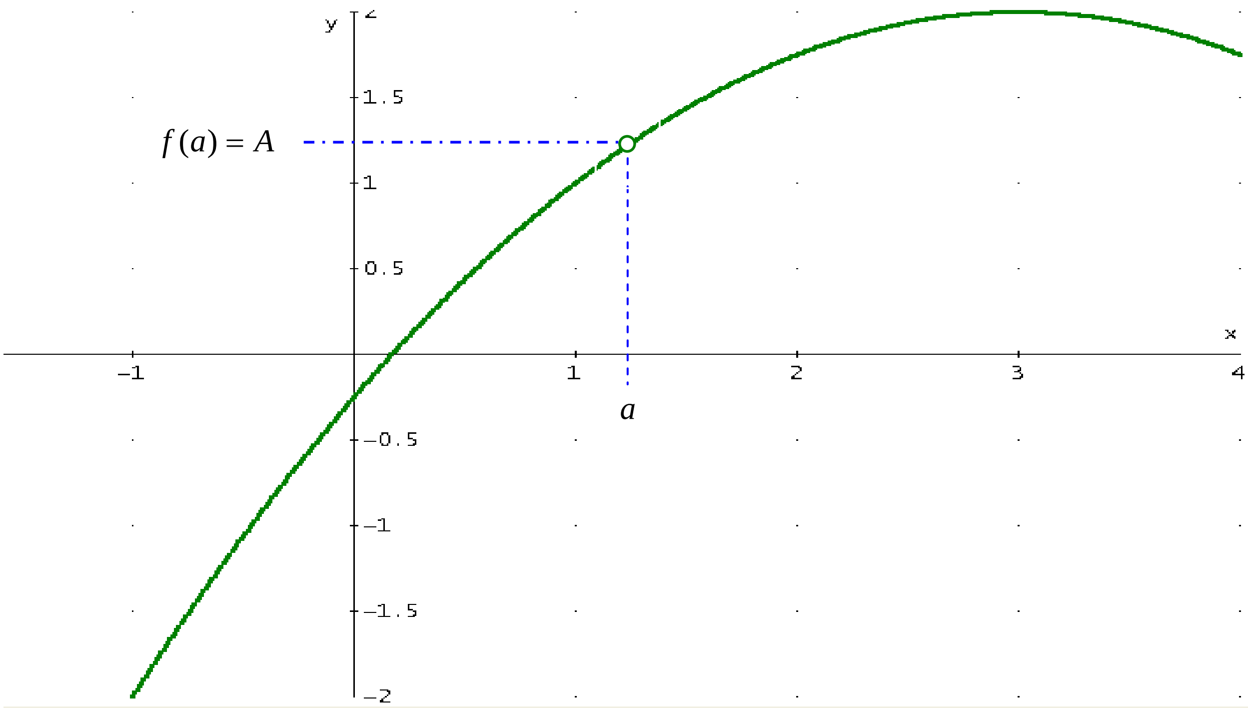
Función Discontinua




y
x
$y = f(x)$
$f(a) = A$
$f(a) = B$
a
$y = f(x)$


y
$y = f(x)$
a

Discontinua evitable



II.-

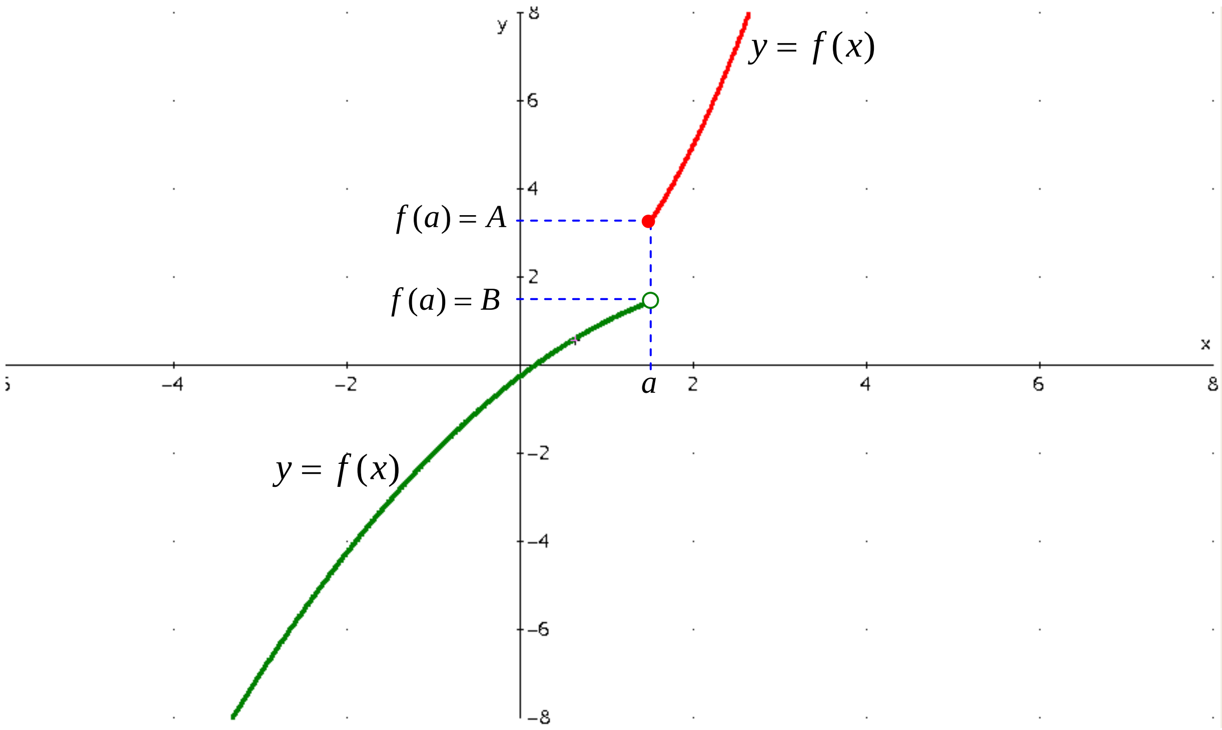
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$$

III.-

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

Nota: Esta función es posible salvar la discontinuidad formando otra función con condiciones.

Discontinua no evitable de primera especie.



I.-

$$f(a) = Exista\ o\ no$$

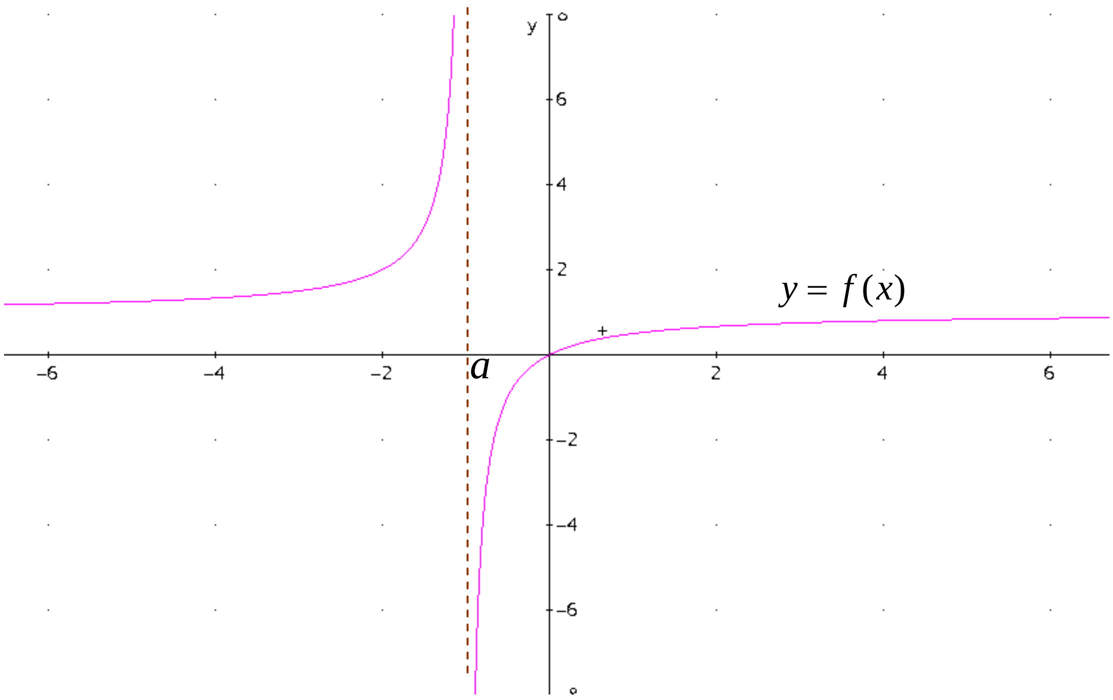
II.-

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a^+} f(x) = A \\ \lim_{x\to a^-} f(x) = B\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = No\ \ existe$$

III.-

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

Discontinua no evitable de segunda especie.



$f(a) = Exista \ o \ no$

II.-

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = No \ \ existe$$

III.-

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

Resumen:

Función Continua

$$I: f_{(a)} = A$$

$$\left.\begin{array}{l} II: \lim\limits_{x\to a^+} f_{(x)} = A \\ \lim\limits_{x\to a^-} f_{(x)} = A \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = A$$

$$III: \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = f_{(a)} = A$$

Función Discontinua

Función discontinua Evitable

$$I: f_{(a)} = Exista \ \ o \ \ no$$

$$\left.\begin{array}{l} II: \lim\limits_{x\to a^+} f_{(x)} = A \\ \lim\limits_{x\to a^-} f_{(x)} = A \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = A$$

$$III: \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} \neq f_{(a)}$$

Función discontinua No evitable

Función discontinua No evitable de 1era especie

$$I: f_{(a)} = Exista \ \ o \ \ no$$

$$\left.\begin{array}{l} II: \lim\limits_{x\to a^+} f_{(x)} = A \\ \lim\limits_{x\to a^-} f_{(x)} = B \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = No \ existe$$

$$III: \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} \neq f_{(a)}$$

Función discontinua No evitable de 2da especie

$$I: f_{(a)} = Exista \ \ o \ \ no$$

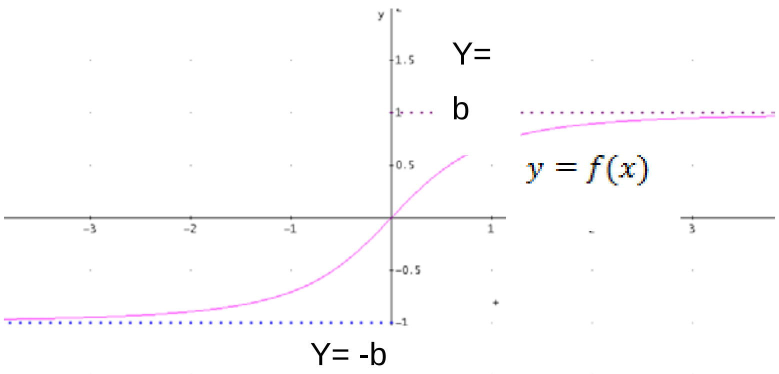
$$\left.\begin{array}{l} II: \lim\limits_{x\to a^+} f_{(x)} = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f_{(x)} = \pm\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = No \ existe$$

$$III: \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} \neq f_{(a)}$$

ASINTOTAS

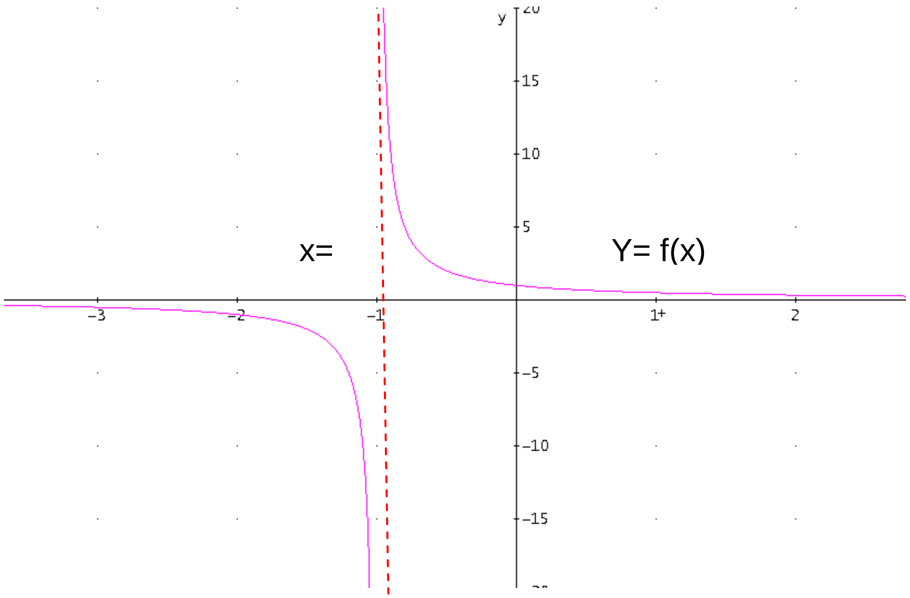
Definición. Se define como una recta tangente a la curva en el infinito se puede clasificar en asíntotas vertical, horizontal y oblicua.

Asíntota horizontal



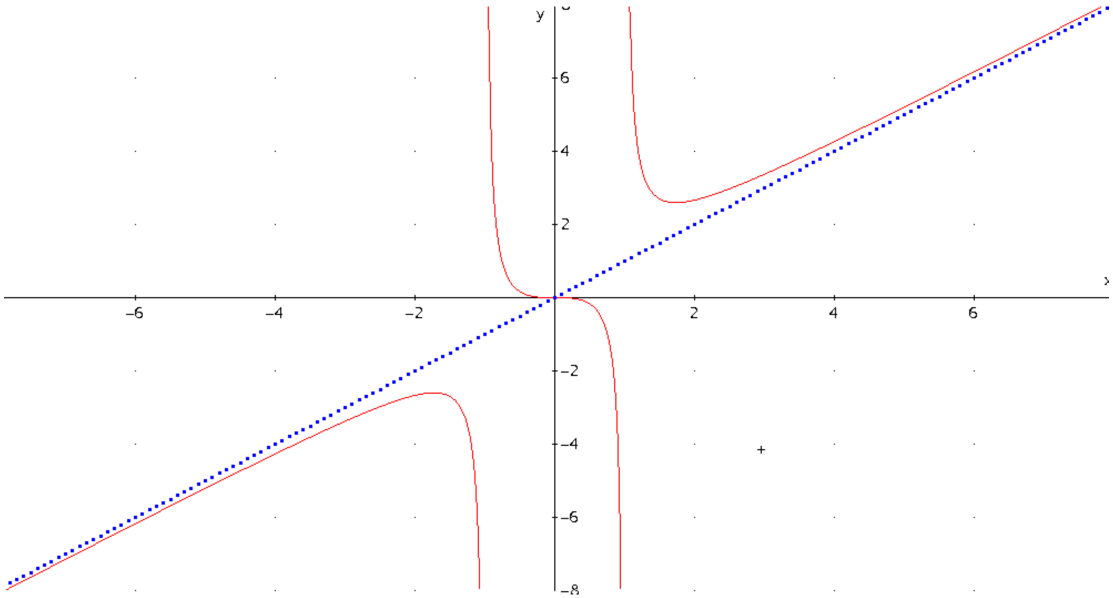
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b\end{array}\right\} \Rightarrow y=b \quad A.H.$$

Asíntota vertical



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=a \quad A.V.$$

Asíntota oblicua



$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right] \\ b = \lim\limits_{x\to a}\left[f(x) - mx\right] \end{array}\right\} \Rightarrow y = mx + b \quad A.O.$$

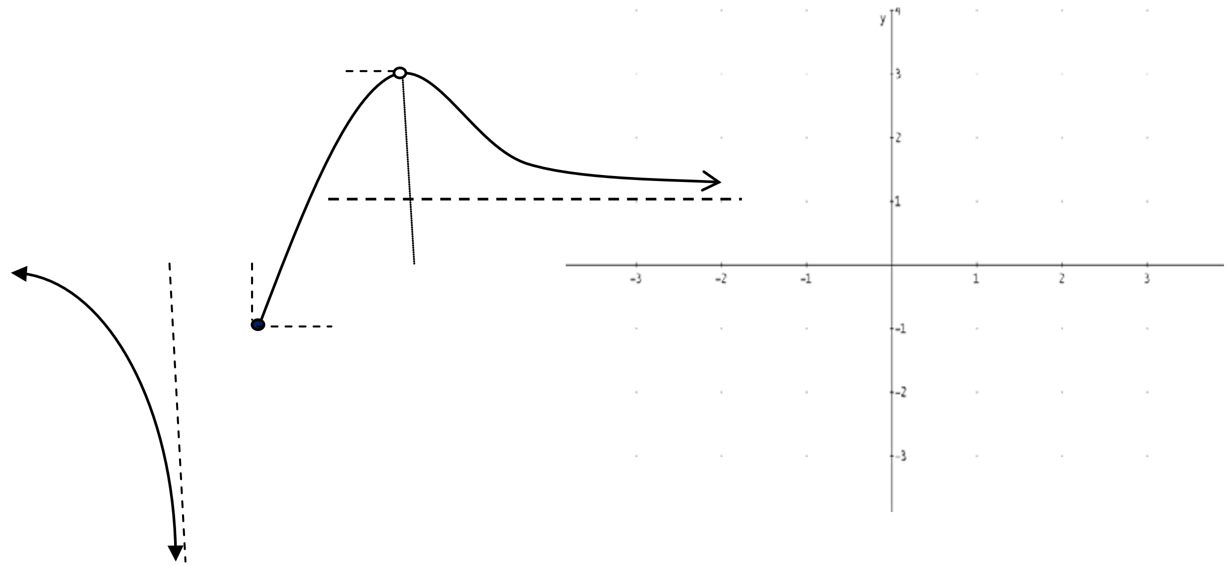
1. Para la grafica de la función f(x) determinar:

a) Imagen

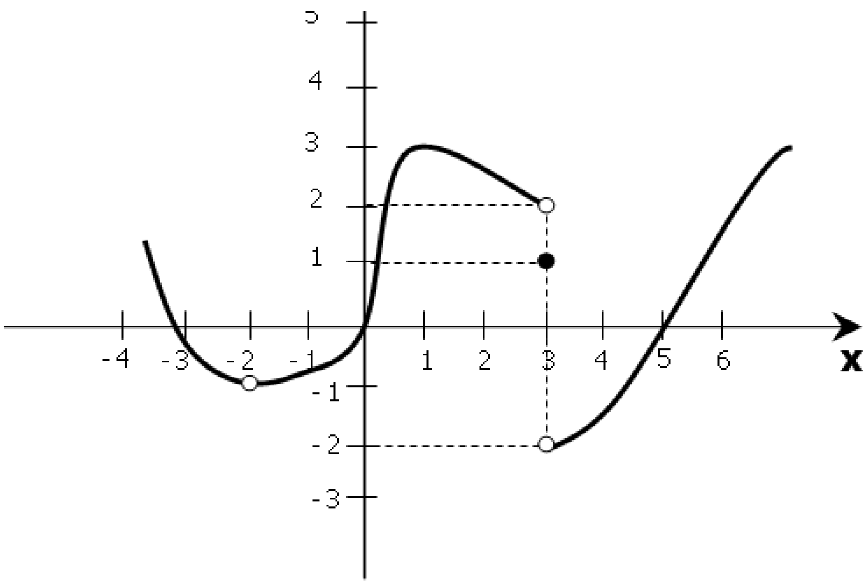
b) $f(1)$; $f(-1)$; $f(0)$

c) El limite cuando la función tiende al mas y menos infinito

d) En forma analítica el estudio de



2.- Para la función f cuya gráfica se da, proporcione el valor de la cantidad dada, si existe. Si no la hay, explique por qué.



(a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x$

$x \to -2^-$

(g) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ **(h)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **(i)** $f(-2)$

3.- Calcular el límite, si existe, a partir de la gráfica de la función f dada. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **(e)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$