Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y CC

Autores: Miguel Martínez Concha
Carlos Silva Cornejo
Emilio Villalobos Marín

1 PROBLEMAS RESUELTOS

1.1 Continuidad y diferenciabilidad

1.1.1 Problema

Dada la función $f : IR^2 \to IR$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} arctg\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Verificar si f es continua en IR^2

b) Calcular si existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en IR^2

Solución.

a) Tenemos que $f(x,y)$ es continua $\forall (x,y) \neq (0,0)$ puesto que es composicion de dos funciones continuas, como son $arctg$ y $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$ tenemos que calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ lo que haremos a través de la trayectoria $y = mx$,

entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) = \lim\limits_{x\to 0} arctg\dfrac{mx^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} arctg\dfrac{m}{2+m^2}$

que depende de la pendiente m, por lo que este limite no existe.

Por lo tanto f no es continua en el punto$(0,0)$

b) Para $(x,y) \neq (0,0)$ la función admite derivadas parciales, que son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2+x^2y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2+x^2y^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$,se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{arctg0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{arctg0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Por lo tanto, existen las derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$.

1.1.2 Problema

Dada la función $f : IR^2 \to IR$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 seny^2}{x^2+y^2} & ,si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$,probar que es

diferenciable en el punto $P_0 = (0,0)$.¿Es continua la función en ese punto?

Solución.

Tenemos que utilizar la definición y ver si el siguiente límite es cero:

$L = \lim\limits_{(h,k)\to(0,,0)} \dfrac{|\Delta f - df|}{\sqrt{h^2+k^2}}$, con $\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = \dfrac{h^2 senk^2}{h^2+k^2}$, y

$df = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2\cdot 0}{h^2}-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot senk^2}{k^2}-0}{k} = 0$$

Luego, $df = 0$, entonces $L = \lim\limits_{(h,k)\to(0,,0)} \dfrac{h^2 senk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$

$g(x,y) = \dfrac{h^2 senk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \leq \dfrac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \leq \dfrac{(h^2+k^2)(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \sqrt{(h^2+k^2)} < \varepsilon$

Si $\delta = \varepsilon$. Así $L = 0$ y f es diferenciable en $P_0 = (0,0)$.

De lo anterior se deduce que f es es continua en $(0,0)$ ya que es diferenciable en dicho punto.

1.2 Regla de la cadena

1.2.1 Problema

Sea la ecuación $z_{xx} + 2z_{xy} + z_y = 0$, donde

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2},\; y(u,v) = \frac{u-v}{2},\; z(u,v) = \frac{u^2-v^2}{4} - w(u,v)$$

Muestre que al cambiar las variables independientes (x,y) por (u,v) y la función z por w la ecuación se reduce a $2 - 4w_{uu} = 0$.

Solución

En primer lugar, calculamos la aplicación inversa

$$u(x,y) = x+y,\; v(x,y) = x-y.$$

Derivando parcialmente estas últimas expresiones se tiene:

$u_x = 1, u_y = 1;\;\; v_x = 1, v_y = -1$

Usando estos resultados y la regla de la cadena, obtenemos

$z_x = z_u\, u_x + z_v\, v_x = z_u + z_v$

$z_y = z_u\, u_y + z_v\, v_y = z_u - z_v$

Reiterando la derivacion parcial usando la regla de la cadena por segunda vez

$z_{xx} = (z_x)_u\, u_x + (z_x)_v\, v_x = z_{uu} + z_{vu} + z_{uv} + z_{vv}$

$z_{xy} = (z_x)_u\, u_y + (z_x)_v\, v_y = z_{uu} + z_{vu} - (z_{uv} + z_{vv})$

$z_{yy} = (z_x)_u \ u_y + (z_v)_v \ v_y = z_{\text{uu}} - z_{vu} - (z_{uv} - z_{vv})$

Suponiendo que z es una función continua con primeras derivadas parciales continuas, entonces

$z_{xx} + 2z_{xy} + z_y = 4z_{\text{uu}} = 0$

Finalmente, $z_u = \dfrac{2u}{4} - w_u \implies z_{\text{uu}} = \dfrac{1}{2} - w_{\text{uu}}$

Por tanto: $\dfrac{1}{2} - w_{\text{uu}} = 0$

1.2.2 Problema

Una función $z = z(x, y)$ se dice que es armónica si tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y además $z_{xx} + z_{yy} = 0$.

Sean $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Pruebe que:

i) u y v son armónicas

ii) $(u_x)^2 = (v_y)^2$

iii) $(u_y)^2 = (v_x)^2$

iv) $u_x v_x = -u_y v_y$

b) Si $f(x, y)$ es una función armónica, entonces la función $w(x, y) = f\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$ es también armónica

Solución

i) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \implies u_x = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \ u_y = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

$v = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \implies v_x = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, v_y = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

Derivando parcialmente por segunda vez se tiene

$$u_{xx} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2)2(x^2 + y^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$u_{yy} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - (2xy)2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

Lo anterior implica que

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

Analogamente para $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

ii) $(u_x)^2 = \left(\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)^2 = \left(\dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)^2 = (v_y)^2$

iii)$(u_y)^2 = \left(-\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right)^2 = \left(\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right)^2 = (v_x)^2$

iv) $u_x v_x = \left(\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)\left(-\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right) = -\left(\dfrac{2xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right) = -u_y v_y$

b) Aplicando derivacion compuesta tenemos:

$w_x = \dfrac{\partial f}{\partial u} u_x + \dfrac{\partial f}{\partial v} v_x, \ w_y = \dfrac{\partial f}{\partial u} u_y + \dfrac{\partial f}{\partial v} v_y$

$$w_{xx}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}u_x+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}v_x\right]u_x+\frac{\partial f}{\partial u}u_{xx}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}u_x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}v_x\right)v_x+\frac{\partial f}{\partial v}v_{xx}$$
$$w_{yy}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}u_y+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}v_y\right]u_y+\frac{\partial f}{\partial u}u_{yy}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}u_y+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}v_y\right)v_y+\frac{\partial f}{\partial v}v_{yy}$$
$$w_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_x)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}v_xu_x+\frac{\partial f}{\partial u}u_{xx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}u_xv_x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_x)^2+\frac{\partial f}{\partial v}v_{xx}$$
$$w_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_y)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}u_yv_y+\frac{\partial f}{\partial u}u_{yy}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}u_yv_y+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_y)^2+\frac{\partial f}{\partial v}v_{yy}$$

Sumando términos y utilizando las igualdades establecidas en a) se tiene

$$w_{xx}+w_{yy}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(u_x)^2+\frac{\partial f}{\partial u}(u_{xx}+u_{yy})+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(v_x)^2+\frac{\partial f}{\partial v}(v_{xx}+v_{yy})=0$$

1.3 Derivacion Implicita

1.3.1 Problema

Sea $\mathrm{sen}(xz)=xyz$, pruebe que en una vecindad del punto $\left(1,\dfrac{2}{\pi},\dfrac{\pi}{2}\right)$ se puede despejar $z=z\left(x,y\right)$ y calcule $\frac{\partial z}{\partial x}\left(1,\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial x}\left(1,\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

Consideremos $F\left(x,y,z\right)=sen\left(xz\right)-xyz=0$, función continua que en el punto $\left(1,\dfrac{2}{\pi},\dfrac{\pi}{2}\right)$satisface $F\left(1,\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-(1)(\frac{2}{\pi})(\frac{\pi}{2})=0$

Además, las derivadas parciales

$F_x=z\cos\left(xz\right)-yz$

$F_y=-xz$

$F_z\left(x,y,z\right)=x\cos\left(xz\right)-xy$, son todas funciones continuas

Para poder despejar $z=z\left(x,y\right)$ se debe tener que el plano tangencial a la superficie en el punto no sea vertical, es decir, no sea vertical al plano xy. Esto significa que $F_z\left(1,\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$

En efecto $F_z\left(x,y,z\right)=x\cos\left(xz\right)-xy\implies F_z\left(1,\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\cdot\frac{2}{\pi}=-\frac{2}{\pi}\neq 0.$

Luego, $z=z\left(x,y\right)$ queda definido implicitamente en una vecindad del punto $V_\delta\left(1,\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)$.

Se desea calcular z_x y z_y. Derivemos parcialmente la función implícita $F\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)=0$ ´con respecto a x e y.

$F_x\cdot 1+F_y\cdot 0+F_z\cdot z_x=0\implies z_x=-\dfrac{F_x}{F_z}$

$F_x\cdot 0+F_y\cdot 1+F_z\cdot z_y=0\implies z_y=-\dfrac{F_y}{F_z}$

Lo que implica que:

$z_x=-\dfrac{z\cos\left(xz\right)-yz}{x\cos\left(xz\right)-xy}$, $z_y=-\dfrac{-xz}{x\cos\left(xz\right)-xy}$

Evaluando las derivadas en el punto se tiene

$$z_x\left(1,\tfrac{2}{\pi},\tfrac{\pi}{2}\right)=-\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(1\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}}{-\frac{2}{\pi}} \implies z_x\left(1,\tfrac{2}{\pi},\tfrac{\pi}{2}\right)=-\tfrac{2}{\pi}$$

$$z_y\left(1,\tfrac{2}{\pi},\tfrac{\pi}{2}\right)=-\frac{\frac{\pi}{2}}{-\frac{2}{\pi}} \implies z_y\left(1,\tfrac{2}{\pi},\tfrac{\pi}{2}\right)=-\tfrac{\pi^2}{4}$$

1.3.2 Problema

Si $u=f(x,y,z)$ define una función diferenciable, y z se define implicitamente como una función de x e y

por la ecuación $g(x,y,z)=0$ con los atributos pedido en el teorema de la función implícita. Pruebe que

u tiene primeras derivadas parciales de x e y dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial y}{\partial z}} \;\; ; \;\; \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial y}{\partial z}}$$

b) Si $u=x^2y+z^2$, y $z=g(x,y)$ se define implicitamente po la ecuación $x^2y-3z+8yz^3=0$

Calcule:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0,0) \;\text{ y }\; \frac{\partial u}{\partial y}(1,0,0)$$

Solución:

a) Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

por otra parte si $g(x,y,z)=0$ define implicitamente a $z=z(x,y)$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

reemplazando en la ecuación anterior

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

Similarmente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}(-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

b) En este caso $u = f(x,y,z) = x^2y+z^2$ y $z = z(x,y)$ se define implicitamente por

$g(x,y,z) = x^2y - 3z + 8yz^3 = 0$ y tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy \ , \ \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + 8z^3 \ , \ \frac{\partial g}{\partial z} = -3 + 24yz^2$$

derivadas que son todas continuas por lo que se afirma que g es de C^1

Ademas $g(1,0,0) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial z}(1,0,0) = -3 \neq 0$

Entonces por el teorema de la función implicita se tiene que existe $V = V_\partial(1,0)$ y una vecindad $(-a,a)$ de $z = 0$

y una función $z(x,y)$ de C^1 sobre V tal que

$$z(1,0) = 0 \ \text{ y } \ z(1,0)\epsilon(-a,a)$$

Ademas:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} 2xy & 2z \\ 2xy & -3+24yz^2 \end{vmatrix} = 2xy(-3+24yz^2) - 2xy2z$$

$$= 2xy(-3+24yz^2 - 2z)$$

$\frac{\partial g}{\partial z} = -3 + 24yz^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy(-3+24yz^2-2z)}{-3+24yz^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(1,0,0) = \frac{0}{-3} = 0$$

También:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} x^2 & 2z \\ x^2+8z^3 & -3+24yz^2 \end{vmatrix} = -3x^2 + 24x^2yz^2 - 2x^2z - 16z^3$$

$$= x^2(24yz^2 - 2z - 3) - 16z^3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2(24yz^2-2z-3)-16z^3}{-3+24yz^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(1,0,0) = \frac{-3}{-3} = 1$$

1.3.3 Problema

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función tal que $\nabla f(1,1) = (2,4)$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función tal que sus funciones coordenadas $g_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ tienen los siguientes gradientes $\nabla g_1(1,1,1) = (2,3,1)$, $\nabla g_2(1,1,1) = (-5,4,2)$. Si $g(1,1,1) = (1,1)$. Obtener $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial x}(1,1,1)$.

b) Utilizando el teorema de la función implicita determine si es posible escribir y en términos de x para la función $F(x,y) = x^4 - e^{xy^3-1} = 0$ en una vecindad del punto $(1,1)$, y además encuentre su derivada.

Solución

Sean las coordenadas cartesianas designadas en $\mathbb{R}^3$ por (x,y,z) y en $\mathbb{R}^2$ por (u,v), y tomando $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(1,1,1) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(1,1,1)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}((1,1,1)) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(1,1,1)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}((1,1,1)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}((1,1)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}((1,1,1)) + \frac{\partial f}{\partial v}((1,1)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}((1,1,1))
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(1,1), \frac{\partial f}{\partial v}(1,1)\right) = (2,4),$$

$$\nabla g_1 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_1}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (2,3,1),$$

$$\nabla g_2 = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y}, \frac{\partial 2_1}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) = (-5,4,2),$$

Así

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(1,1,1) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot -5 = -16.$$

Primeramente notar que $(1,1) \in F^{-1}(0,0)$ y además

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - y^3 e^{xy^3-1}, \ \frac{\partial F}{\partial y} = -3xy^2 e^{xy^3-1}$$

las cuales son continuas en $\mathbb{R}^2$ en particular para alguna bola $B((1,1),\delta)$ de $(1,1)$ donde $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -3 \neq 0$ por lo tanto podemos ocupar el teorema de la función implicita, y definir $f : B((1,1),\delta) \to \mathbb{R}$ con $y = f(x)$ y $1 = f(1)$ cuya derivada es

$$y' = \frac{4x^3 - y^3 e^{xy^3-1}}{3xy^2 e^{xy^3-1}}.$$

1.3.4 Problema

a) Determine las derivadas parciales $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, donde u, v son funciones definidas implicitamente por el sistema

$$F(x,y,u,v) = xe^{u+v} + uv - 1 = 0,\ G(x,y,u,v) = ye^{u-v} - 2uv - 1 = 0.$$

Al rededor del punto $p = (1,1,0,0)$.

b) Sea la función $z = f(u^2+v^2, u/v)$ obtener $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

Solución

a) Verificando las hipótesis del Teorema de la función implicita podemos concluir que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(ye^{u-v}+2u)e^{u+v}}{2x^{u+v}ye^{u-v} + ye^{u-v}u - 2vxe^{u+v} + 2xe^{u+v}u + vye^{u-v}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e^{u+v}(ye^{u-v}-2v)}{2x^{u+v}ye^{u-v} + ye^{u-v}u - 2vxe^{u+v} + 2xe^{u+v}u + vye^{u-v}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{e^{(}u-v)(xe^{u+v}+u)}{2x^{u+v}ye^{u-v} + ye^{u-v}u - 2vxe^{u+v} + 2xe^{u+v}u + vye^{u-v}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(xe^{u+v}+v)e^{u-v}}{2x^{u+v}ye^{u-v} + ye^{u-v}u - 2vxe^{u+v} + 2xe^{u+v}u + vye^{u-v}}$$

b) Definiendo $x := x(u,v) = u^2+v^2$, $y := y(u,v) = u/v$ tenemos que $z = f(x,y)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}2u + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{v},$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2u\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{1}{v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\right) \\
&= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2u\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}2u + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{1}{v}\right) + \frac{1}{v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}2u + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{1}{v}\right)
\end{aligned}$$

Utilizando finalmente el teorema de Schwarz tenemos que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4u^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{4u}{v}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

1.4 RECTA TANGENTE Y PLANO NORMAL A UNA CURVA

1.4.1 Problema

Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la trayectoria $\overrightarrow{r}(t) = (t - \cos t, 3 + sen\,(2t)\,, 1 + \cos(3t))$ en el punto $P_0 = \left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right)$.

Solución.

El punto P_0 que corresponde a $t = t_0$ esta dado por

$\overrightarrow{r}(t_0) = (t_0 - \cos t_0, 3 + sen\,(2t_0)\,, 1 + \cos(3t_0)) = \left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right)$

$t_0 - \cos t_0 = \frac{\pi}{2} \implies t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Entonces el vector tangente a la trayectoria en el punto en que $t_0 = \frac{\pi}{2}$ es:

$\overrightarrow{r}'(t) = (1 + sen(t), 2\cos(2t)\,, -3sen\,(3t)) \implies$

$\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + sen(\frac{\pi}{2}), 2\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right), -sen\left(3\frac{\pi}{2}\right)\right) = (2, -2, 3)\,.$

Sea $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ un punto de la recta tangente luego la ecuación de la recta tangente en el punto P_0 es

$\overrightarrow{r}(\lambda) = \overrightarrow{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies (x, y, z) = \left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right) + \lambda\,(2, -2, 3)\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Por tanto, la ecuación cartesiana es:

$$\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$$

La ecuación del plano normal en el punto P_0 es

$\left[\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot \overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\,(y - 3) + 3\,(z - 1) = 0$

1.4.2 Problema

Probar que los planos tangentes a la superficie S: $xyz = a, a > 0$ constante, en cualquier punto de S forma con los planos coordenados un tetraedro de volumen constante.

Solución.

Sea la superficie S descrita por la función implícita $F(x, y, z) = xyz - a = 0$.

los vectores normales a la superficie S satisfacen $\nabla F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Si $\overrightarrow{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$,entonces $\overrightarrow{N}(P_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) = (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)$

La ecuación del plano tangente al punto $\overrightarrow{P}_0 \in S$, esta definida por

$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{P}_0) \cdot \overrightarrow{N}(P_0) = 0$,luego $y_0z_0\,(x - x_0) + x_0z_0\,(y - y_0) + x_0y_0\,(z - z_0) = 0$.

Entonces, las trazas de este plano con los ejes coordenados son

i) Si $x = \alpha, y = 0, z = 0 \implies \alpha = \dfrac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0} = 3x_0$

ii) Si $x = 0, y = \beta, z = 0 \implies \beta = \dfrac{3x_0y_0z_0}{x_0z_0} = 3y_0$

iii) Si $x = 0, y = 0, z = \gamma \implies \alpha = \dfrac{3x_0 y_0 z_0}{x_0 y_0} = 3z_0$
El volumen del tetraedro es:
$V = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{6} = \dfrac{(3x_0)(3y_0)(3z_0)}{6} = \dfrac{9}{2}a$, constante.

1.4.3 Problema

a) Probar que S_1dada por $F(x,y,z) = 0$ y S_2 dada por $G(x,y,z) = 0$ son ortogonales en sus puntos de intersección sí y solo si $F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$.
b) Probar que las superficies $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = 0$ y $S_2 : 3x^2 - y^2 + 2z^2 - 6x - 4y - 16z + 31 = 0$ son ortogonales.

Solución.

a) La normal a S_1dada por $F(x,y,z) = 0$ es $\overrightarrow{N}_1 = \nabla F(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z)$.
Del mismo modo, la normal a S_2 dada por $G(x,y,z) = 0$ es

$$\overrightarrow{N}_2 = \nabla G(x,y,z) = (G_x, G_y, G_z)$$

Por definición, ambas superficies son ortogonales si $\nabla F \cdot \nabla G = 0 \iff$

$$(F_x, F_y, F_z) \cdot (G_x, G_y, G_z) = 0 \implies F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$$

b) Sea $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = 0 \implies$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 - 21 = 0$$

y $S_2 : 3x^2 - y^2 + 2z^2 - 6x - 4y - 16z + 31 = 0 \implies$

$$3(x-1)^2 - (y+2)^2 + 2(z-4)^2 = 0$$

Entonces S_1tiene normal $\overrightarrow{N}_1 = \nabla F(x,y,z) = (2x-2, 2y+4, 2z-8)$.
Asimismo , S_2 tiene normal $\overrightarrow{N}_2 = \nabla G(x,y,z) = (6x-6, -2y-4, 4z-16)$.
$\implies \nabla F \cdot \nabla G = (2x-2, 2y+4, 2z-8) \cdot (6x-6, -2y-4, 4z-16)$
$= (2x-2)(6x-6) + (2y+4)(-2y-4) + (2z-8)(4z-16)$
$= 4\left[3(x-1)^2 - (y+2)^2 + 2(z-4)^2\right] = 4 \cdot 0 = 0$
Por lo tanto, S_1 es ortogonal a S_1.

1.5 DERIVADAS DIRECCIONALES

1.5.1 Problema :

Sea $f(x,y) : \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & , si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ .Determine, si existe, la derivada direccional de f en $P_0 = (0,0)$.

Solución.

Sea $\widehat{e} = (e_1, e_2)$ un versor e una dirección cualquiera de IR^2 tal que
$D_{\widehat{e}} f(0,0) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f((0,0) + \lambda(e_1,e_2)) - f(0,0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(\lambda e_1, \lambda e_2) - f(0,0)}{\lambda}$

$$D_{\widehat{e}}f(0,0) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\dfrac{2(\lambda e_1)(\lambda e_2)^2}{(\lambda e_1)^2+(\lambda e_2)^4}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\dfrac{2\lambda^3 e_1 e_2^2}{\lambda^2(e_1^2+\lambda^2 e_2^4)}}{\lambda}$$

Por lo tanto

$D_{\widehat{e}}f(0,0) = \lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{2e_2^2}{e_1}$,este limite existe si y solo si $e_1 \neq 0$

1.5.2 Problema :

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x+y)}{x^2+y^2} & ,si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ .Determine, si existe, la derivada direccional de f en $P_0 = (0,0)$.

Solución.

Sea $\widehat{e} = (e_1, e_2)$ un versor e una dirección cualquiera de IR^2 tal que

$$D_{\widehat{e}}f(0,0) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f((0,0)+\lambda(e_1,e_2)) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda e_1, \lambda e_2) - f(0,0)}{\lambda}$$

$$D_{\widehat{e}}f(0,0) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{e_1(e_1+e_2)}{\lambda(e_1^2+e_2^2)}$$

Este limite existe si y solo si $e_1(e_1+e_2) = 0 \implies e_1 = 0$ ó $(e_1+e_2) = 0$

i) Si $\widehat{e} = (0, e_2) = 0$, $D_{\widehat{e}}f(0,0) = 0$

ii) Si $\widehat{e} = (e_1, -e_1) = 0$, $D_{\widehat{e}}f(0,0) = 0$.

1.5.3 Problema 4:

Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2yz^3$ en el punto $P_0 = (1,1,-1)$ en la dirección de la tangente a la trayectoria : $\overrightarrow{r}(t) = (e^{-t}, 1+2sen(t), t-\cos(t))$.

Solución.

Como $f(x,y,z) = x^2yz^3$es una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$,entonces

$D_{\widehat{t}}f(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\widehat{t}$, donde $\nabla f(P) = \left(2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2\right)$

El punto P_0 que corresponde a $t = t_0$ es:

$\overrightarrow{r}(t_0) = (e^{-t_0}, 1+2sen(t_0), t_0-\cos(t_0)) = (1,1,-1) \implies e^{-t_0} = 1$

Así, $t_0 = \ln(1) = 0$

El vector tangente a la curva es:

$\overrightarrow{r}'(t) = (-e^{-t}, 2\cos(t), 1+sen(t))$, entonces $\overrightarrow{r}'(0) = (-1,2,1)$ y

el vector tangente unitario en esta dirección queda

$\widehat{t} = \frac{\overrightarrow{r}'(0)}{\left\|\overrightarrow{r}'(0)\right\|} = \frac{(-1,2,1)}{\sqrt{6}}$

Por tanto, la derivada direccional es

$D_{\widehat{t}}f(P_0) = (-2,-1,3)\cdot\frac{(-1,2,1)}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} > 0$

Como es positiva,significa que f aumenta en esta dirección.

1.5.4 Problema :

Calcular la derivada direccional de $f(x,y,z) = xy+xz-yz$ en el punto P_0=$\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right)$ en dirección de la tangente a la curva determinada por las superficies

$$x^2+y^2+z^2=4,\ \ x+y+z=0$$

Solución.
Como $f(x,y,z)=xy+xz-yz$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$,entonces $D_{\widehat{t}}f(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot\widehat{t}$, donde $\nabla f(P)=(y+z,x-z,x-y) \implies$

$$\nabla f(P_0)=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$$

Aún falta calcular el vector $\widehat{t}=\frac{\overrightarrow{r}'(P_0)}{\|\overrightarrow{r}'(P_0)\|}$,que es tangente a la curva determinada por las superficies dadas.
Sea C dada por $\overrightarrow{r}(x)=(x,y(x),z(x)) \implies \overrightarrow{r}'(x)=\left(1,y'(x),z'(x)\right)$,
donde $y'(x),z'(x)$ se calculan implicitamente a partir del sistema de ecuaciones por derivación con respecto a x, en el entendido que $y=y(x)$, $z=z(x)$ .En efecto:

$$\begin{array}{lcl} 2x+2yy'+2zz'=0 \quad \cdot\frac{1}{2} & \iff & yy'+zz'=-x \\ 1+y'+z'=0 & & y'+z'=-1 \end{array}$$

Resolviendo el último sistema obtenemos

$$y'(x)=\frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-x+z}{y-z},\ \ z'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{x-y}{y-z}$$

Evaluando

$$y'\left(\sqrt{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=1 \text{ y } y'\left(\sqrt{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=-2$$

Luego

$$\implies \overrightarrow{r}'\left(\sqrt{2}\right)=(1,1,-2) \implies \widehat{t}=\frac{\overrightarrow{r}'(P_0)}{\|\overrightarrow{r}'(P_0)\|}=\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$D_{\widehat{t}}f(P_0)=(-\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{2})\cdot\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}=\frac{-4}{\sqrt{6}}$$

1.6 VALORES EXTREMOS

1.6.1 Problema :

Encuentre los valores extremos de la $f(x,y)=x^2+y^2-\frac{1}{2}x^4$.
Solución.
Derivando parcialmente con respecto a x e y tenemos:
$f_x(x,y)=2x-2x^3$
$f_y(x,y)=2y$
Esta claro que f_x y f_y son continuas en $\mathbb{R}^2$
Aplicando la condición necesaria para los puntos críticos de f tenemos: $2x-2x^3=0$; $2y=0$.
Al resolver el sistema obtenemos tres puntos críticos.

$P_0 = (0,0)\,, \quad P_1 = (1,0)\,, \quad P_2 = (-1,0)$

Determinemos el Hessiano $H(x,y)$:

$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-6x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12x^2$

Evaluemos el Hessiano $H(x,y)$ en cada uno de los puntos:

i) Para $P_0 = (0,0) \implies H(0,0) = 4 \ > 0$ y $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$

Se concluye, que en P_0 hay un mínimo relativo $f(0,0) = 0$.

ii) Para $P_1 = (1,0) \implies H(1,0) = -8 \ < 0$.

Por tanto, en P_1 hay punto silla de f.

iii) Para $P_2 = (-1,0) \implies H(-1,0) = -8 \ < 0$.

Así, en P_2 tambien hay un punto silla de f.

1.6.2 Problema :

Encuentre los valores extremos de la $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ en el dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3\}$.

Solución.

En primer lugar, determinemos los valores extremos en el conjunto abierto: $D^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x < 0,\ y < 0,\ x + y > -3\}$.

Derivando parcialmente con respecto a x e y tenemos:

$f_x(x,y) = 2x - y + 1$

$f_y(x,y) = 2y - x + 1$

Observe que f_x y f_y son continuas en $\mathbb{R}^2$

Aplicando la condición necesaria para los puntos críticos de f tenemos en sistema:

$2x - y = -1; \quad -x + 2y = -1.$

Al resolver el sistema obtenemos un único punto crítico

$P_0 = (-1,-1) \in D^*$

Determinemos el Hessiano $H(x,y)$:

$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\ \forall\,(x,y) \in D^*$:

Así, $P_0 = (-1,-1) \implies H(-1,-1) = 3 \ > 0$ y $f_{xx}(-1,-1) = 3 > 0$

Se concluye, que en P_0 hay un mínimo relativo $f(-1,-1) = -1$.

En segundo lugar, estudiemos la condición que se presenta en la frontera de D.

a) Si $y = 0, \quad f(x,0) = x^2 + x$ con $x \in [-3,0]$

Determinemos los puntos críticos en este borde

$f'(x) = 2x + 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$

Luego se tiene un punto critíco en $P_1 = \left(-\frac{1}{2},0\right) \in D$.

Como $f''(x) = 2 > 0, \forall x \in [-3,0]$,entonces en $P_1 = \left(-\frac{1}{2},0\right)$hay un mínimo $f\left(-\frac{1}{2},0\right) = -\frac{1}{4}$.

b) Si $x = 0, \quad f(0,y) = y^2 + y$ con $y \in [-3,0]$

Determinemos los puntos críticos en este borde

$f'(y) = 2y + 1 = 0 \implies y = -\frac{1}{2}$

Luego, se tiene un punto critíco en $P_2 = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \in D$.
Como $f^{''}(y) = 2 > 0, \forall y \in [-3, 0]$,entonces en $P_2 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$hay un mínimo $f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.
c) Si $x + y = -3$, $f(x, -x-3) = 3x^2 + 9x + 6$ con $x \in [-3, 0]$
Determinemos los puntos críticos en este borde
$f^{'}(x) = 6x + 9 = 0 \implies x = -\frac{3}{2} \implies y = -\frac{3}{2}$
Luego se tiene un punto critíco en $P_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \in D$.
Como $f^{''}(x, -x-3) = 6 > 0, \forall x \in [-3, 0]$,entonces $P_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ en hay un mínimo $f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

1.7 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA EXTREMOS RESTRINGIDOS

1.7.1 Problema :

En que puntos de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, la tangente a este lugar geométrico forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

Solución.

Sea la ecuación de la tangente a la elipse en el punto (x_0, y_0).

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Sea $f(x, y) = \dfrac{1}{2} x_T\ y_T$, el área que forma la recta tangente con los ejes coordenados, donde $x_T\ y_T$ se determinan a partir de la ecuación de la tangente.

Si $y_T = 0 \implies x_T = \dfrac{a^2}{x_0}$ $\quad x_T = 0 \implies y_T = \dfrac{b^2}{y_0}$

Así $f(x, y) = \dfrac{1}{2} \dfrac{a^2 b^2}{x_0 y_0}$ es la función a estudiar.

que verifica la condición: $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$.

Consideremos la función :

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{x_0 y_0} + \lambda \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
L_x(x, y, \lambda) &= -\frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{x_0^2 y_0} + 2\lambda \frac{x_0}{a^2} = 0 \quad \cdot 1/y_0 \\
L_y(x, y, \lambda) &= -\frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{x_0 y_0^2} + 2\lambda \frac{y_0}{b^2} = 0 \quad \cdot / x_0 \\
L_\lambda(x, y, \lambda) &= \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0
\end{aligned}$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores por los coeficientes que se indican, tenemos

$$
\begin{array}{lll}
1.0) & -\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2b^2}{x_0^2y_0^2}+ \quad \dfrac{2\lambda}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0} = 0 & \cdot 1/y_0 \\
2.0) & -\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2b^2}{x_0^2y_0^2}+ \quad \dfrac{2\lambda}{b^2}\dfrac{y_0}{x_0} = 0 & \cdot 1/x_0 \\
3.0) & \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}-1 \quad = 0 &
\end{array}
$$

Restando $2.0 - 1.0$ se tiene

$$\frac{2\lambda}{a^2}\frac{x_0}{y_0} = \frac{2\lambda}{b^2}\frac{y_0}{x_0} \implies x_0^2 = \frac{a^2}{b^2}y_0^2$$

Sustituyendo este resultado en 3.0) se tiene un único punto crítico de f en $P_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

Mediante el criterio de la segunda derivada podemos determinar la naturaleza del punto crítico

$$f\left(x, y(x)\right) = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{x_0y_0} \implies f^{'}\left(x\right) = \frac{a^2b^2}{2}\left(\frac{-y_0 - x_0y_0^{'}(x)}{(x_0y_0)^2}\right)$$

donde a partir de la condición obtenemos

$$\frac{2x_0}{a^2}+\frac{2y_0}{b^2}y_0^{'}(x) = 0 \implies y_0^{'}(x) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \implies y_0^{'}(x) = -\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{y_0 - x_0y_0^{''}}{y_0^2}\right]$$

Así

$$f^{''}\left(x\right) = -\frac{a^2b^2}{2}\left(\frac{(x_0y_0)^2(2y_0^{'}+x_0y_0^{''}(x)) - 2(x_0y_0)(y_0+x_0y_0^{'}(x))^2}{(x_0y_0)^4}\right)$$

Produce

$$f^{''}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right) > 0$$

Por lo tanto, en el punto $P_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ un mínimo de f

1.7.2 Problema :

Se desea construir una tolva para un silo, que tenga una capacidad de 100 m^3 y forma de cono circular recto de $2m$ de radio coronado por un cilindro por un cilindro circular recto, empleando un mínimo de material para la superficie. Calcular las alturas x del cilindro e y del cono para tal objeto.

Solución:

Sea la función superficie definida por $f\left(x, y\right) = 2\pi\sqrt{4+y^2} + 4\pi x$

Con la condición que el volumen sea $g\left(x, y\right) = \frac{4}{3}\pi y + 4\pi x - 100 = 0$

Entonces formemos la función:

$L\left(x, y, \lambda\right) = f\left(x, y\right) = 2\pi\sqrt{4+y^2} + 4\pi x + \lambda\left(\frac{4}{3}\pi y + 4\pi x - 100\right)$

$$
\begin{array}{lll}
L_x\left(x, y, \lambda\right) = & 4\pi + 4\pi\lambda = 0 & \implies \lambda = -1 \\
L_y\left(x, y, \lambda\right) = & \dfrac{4\pi y}{2\sqrt{4+y^2}} + \dfrac{4}{3}\pi\lambda = 0 & \implies \dfrac{y}{2\sqrt{4+y^2}} = \dfrac{1}{3} \\
L_\lambda\left(x, y, \lambda\right) = & \frac{4}{3}\pi y + 4\pi x - 100 = 0 &
\end{array}
$$

$9y^2 = 4\left(4+y^2\right) \quad \Longrightarrow 5y^2 = 16 \quad \Longrightarrow y = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Sustituyendo en la restricción se tiene

$4\pi x = 100 - \frac{16}{3\sqrt{5}}\pi \Longrightarrow x = \dfrac{100}{4\pi} - \frac{4}{3\sqrt{5}}$

En consecuencia, se tiene un único punto crítico en

$P_0 = \left(\dfrac{100}{4\pi} - \dfrac{4}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$

La condición de mínimo de f se estable mediante la segunda derivada

$$\begin{array}{ll} f\left(x, y(x)\right) = 2\pi\sqrt{4+y^2} + 4\pi x & \Longrightarrow f^{'}\left(x\right) = \dfrac{4\pi y y'}{2\sqrt{4+y^2}} + 4\pi \\ \quad \frac{4}{3}\pi y + 4\pi x - 100 = 0 & \Longrightarrow y'\left(x\right) = -3 \end{array}$$

Por lo tanto, sustituyendo $y'\left(x\right)$, y derivando por segunda vez

$$\begin{array}{lll} f^{'}\left(x\right) = -\dfrac{6\pi y}{\sqrt{4+y^2}} + 4\pi & \Longrightarrow & f^{''}\left(x\right) = -6\pi\left(\dfrac{\left(-3(4+y^2\right) - y^2}{\left(4+y^2\right)^{3/2}}\right) \\ \quad f^{''}\left(P_0\right) > 0 & \Longrightarrow & \text{Valor minimo} \end{array}$$

Así el valor mínimo de la función es:

$f\left(\dfrac{100}{4\pi} - \dfrac{4}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right) = 2\pi\sqrt{4+\frac{16}{5}} + 4\pi\left(\dfrac{100}{4\pi} - \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right) = 100 - \dfrac{20\pi}{3\sqrt{5}}$

1.7.3 Problema :

Determine la distancia mínima y máxima del origen a la curva de intersección del paraboloide $z = \dfrac{7}{4} - x^2 - y^2$ y el plano $x + y + z = 2$.

Solución:

En este caso es conveniente los valores extremos del cuadrado de la distancia con respecto al origen en vez de la distancia misma. Por lo tanto, se deben hallar los valores extremos de la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeta a las restriciones

$$\begin{aligned} g\left(x, y, z\right) &= z - \frac{7}{4} + x^2 + y^2 = 0 \\ h\left(x, y, z\right) &= x + y + z - 2 = 0 \end{aligned}$$

Para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange se define

$F\left(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2\right) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(z - \dfrac{7}{4} + x^2 + y^2\right) + \lambda_2\left(x + y + z - 2\right)$

$$
\begin{array}{ll}
F_x = 2(1+\lambda_1)x + \lambda_2 = 0 & (1.0) \\
F_y = 2(1+\lambda_1)y + 2\lambda_2 = 0 & (2.0) \\
F_z = 2z + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3.0) \\
F_{\lambda_1} = z - \dfrac{7}{4} + x^2 + y^2 = 0 & (4.0) \\
F_{\lambda_2} = x + y + z - 2 = 0 & (5.0)
\end{array}
$$

$1.0) - 2.0) : 2(1+\lambda_1)(x-y) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1 \quad o \quad y = x$

Si $\lambda_1 = -1$,entonces de 1) $\lambda_2 = 0$ y de 3) $z = \dfrac{1}{2}$

Si $z = \dfrac{1}{2}$, entonces de 4) y 5) se obtiene: $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Resolviendo la ecuación anterior, sus soluciones son: $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = 1 \implies y_1 = \dfrac{1}{2} \implies \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$es punto crítico.

$x_2 = \dfrac{1}{2} \implies y_2 = 1 \implies \left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)$es punto crítico.

Por otra parte:4) $-$ 5) $\implies x^2 + y^2 - x - y + \dfrac{1}{4} = 0$

Si $y = x \implies 2x^2 - 2x + \dfrac{1}{4} = 0$, resolviendo la ecuación $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$

$$y = x = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \implies z = \frac{4-2\sqrt{2}}{4} \implies \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{4-2\sqrt{2}}{4}\right)$$

es punto crítico de f.

$$y = x = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \implies z = \frac{4+2\sqrt{2}}{4} \implies \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{4+2\sqrt{2}}{4}\right)$$

es punto crítico de f.

Así

$$f_{\max}\left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}, \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}, \frac{4 \mp 2\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(9 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$f_{\min}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Como la curva intersección del paraboloide y el plano es una curva cerrada, la distancia mínima y la distancia máxima al origen son respectivamente$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$y $\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(9+2\sqrt{2}\right)}$.No necesitamos más pruebas por las caracteristicas geométricas del problema.

1.7.4 Problema :

Demuestre que las distancias máxima y mínima desde el origen a la curva de intersección definida por $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{25} = 1, \quad z = x + y.$

Solución:

Debenos encontrar los valores extremos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeta a las restriciones

$$\begin{aligned} g\,(x,y,z) &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \\ h\,(x,y,z) &= x + y - z = 0 \end{aligned}$$

Para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange se define
$F\,(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1\right) + \lambda_2\,(x + y - z)$
Aplicando la condición necesaria de punto crítico

$$F_x = 2\left(1 + \frac{\lambda_1}{4}\right)x + \lambda_2 = 0 \qquad (1.0)$$

$$F_y = 2\left(1 + \frac{\lambda_1}{5}\right)y + \lambda_2 = 0 \qquad (2.0)$$

$$F_z = 2(1 + \frac{\lambda_1}{5} + \lambda_2 = 0 \qquad (3.0)$$

$$F_{\lambda_1} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \qquad (4.0)$$

$$F_{\lambda_2} = x + y - z = 0 \qquad (5.0)$$

Despejando de estas ecuaciones x, y, z se tiene
$x = -\frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + 4}$; $y = -\frac{5\lambda_2}{2\lambda_1 + 10}$; $z = -\frac{25\lambda_2}{2\lambda_1 + 50}$; 6.0)
Al dividir 5.0 por $\lambda_2 \neq 0$ (lo cual está justificado porque de otro modo de $1.0, 2.0$ y 3.0, se tendría $x = y = z = 0$).
$\frac{2}{\lambda_1 + 4} + \frac{5}{2\lambda_1 + 10} + \frac{25}{2\lambda_1 + 50} = 0.$ Multiplicando por $2\,(\lambda_1 + 4)\,(2\lambda_1 + 10)\,(2\lambda_1 + 50)$
y simplificando da
$17\lambda_1^2 + 245\lambda_1 + 750 = 0 \implies (\lambda_1 + 10)(17\lambda_1 + 75) = 0$
de donde: $\lambda_1 = -10$, $\lambda_1 = -\frac{75}{17}$
Caso i) Si $\lambda_1 = -10$, entonces de $6.0: x = \frac{\lambda_2}{3}$; $y = \frac{\lambda_2}{2}; z = \frac{5\lambda_2}{6}$.
Sutituyendo en 4.0 da: $\frac{\lambda_2^2}{36} + \frac{\lambda_2^2}{20} + \frac{5\lambda_2^2}{66} - 1 = 0 \implies \lambda_2^2 = \frac{180}{19} \implies$
$\lambda_2 = \pm 6\sqrt{\frac{5}{19}}$
Por lo tanto, se tienen dos puntos críticos.
$P_1 = \left(2\sqrt{\frac{5}{19}}, 3\sqrt{\frac{5}{19}}, 5\sqrt{\frac{5}{19}}\right)$ y $P_2 = \left(-2\sqrt{\frac{5}{19}}. - 3\sqrt{\frac{5}{19}}, -5\sqrt{\frac{5}{19}}\right)$
Evaluando en la función se tiene $f\left(\pm 2\sqrt{\frac{5}{19}}, \pm 3\sqrt{\frac{5}{19}}, \pm 5\sqrt{\frac{5}{19}}\right) = 10$
Caso ii) Si $\lambda_1 = -\frac{75}{17}$, entonces de $6.0: x = \frac{34\lambda_2}{7}$; $y = -\frac{17\lambda_2}{4}; z = \frac{17\lambda_2}{28}$.

Sutituyendo en 4.0 da: $\dfrac{\lambda_2^2}{36}+\dfrac{\lambda_2^2}{20}+\dfrac{5\lambda_2^2}{66}-1=0 \implies \lambda_2^2=\dfrac{(140)^2}{(17)^2(646)} \implies$

$\lambda_2=\pm\left[\dfrac{140}{17\sqrt{646}}\right]$

Por lo tanto, se tienen otros dos puntos críticos más.

$P_1=\left(\dfrac{40}{\sqrt{646}},-\dfrac{35}{\sqrt{646}}\dfrac{5}{\sqrt{646}}\right)$ y $P_2=\left(-\dfrac{40}{\sqrt{646}},\dfrac{35}{\sqrt{646}},-\dfrac{5}{\sqrt{646}}\right)$

Evaluando en la función se tiene $f\left(\pm\dfrac{40}{\sqrt{646}},\mp\dfrac{35}{\sqrt{646}},\pm\dfrac{5}{\sqrt{646}}\right)=\dfrac{75}{17}$

Asi el valor máximo buscado es 10 y el valor mínimo es $\dfrac{75}{17}$

1.7.5 Problema :

Se desea construir un silo, que tenga una capacidad de V_0 con forma de cilindro circular recto de altura h y radio basal r . Calcular la altura h del cilindro y radio basal r de manera que la superficie total sea mínima.

Solución:

Sea la función superficie definida por $f(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh$

Con la condición que el volumen sea $g(x,y)=\pi r^2 h-V_0=0$

Entonces formemos la función:

$L(r,h,\lambda)=2\pi r^2+2\pi rh+\lambda\left(\pi r^2 h-V_0\right)$

$$\begin{array}{lll} L_r(r,h,\lambda)= & 4\pi r+2\pi h+2\lambda\pi rh=0 & 1.0) \\ L_h(r,h,\lambda)= & 2\pi h+\lambda\pi r^2=0 & 2.0) \\ L_\lambda(r,h,\lambda)= & \pi r^2 h-V_0=0 & 3.0) \end{array}$$

De 2.0)se tiene: $\lambda=-\dfrac{2}{r}$ y sustituyendo este valor en 1.0) obtenemos $h=2r$

Si $h=2r$, entonces de 3.0)$r=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}$; $h=2\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}$

En consecuencia, se tiene un único punto crítico en

$P_0=\left(\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}},2\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}\right)$

La condición de mínimo de f se establece mediante la segunda derivada

$$\begin{array}{ll} f(r,h(r))=6\pi r^2 & \implies f'(r)=12\pi r \\ & \implies f''(r)=12\pi>0 \end{array}$$

Por lo tanto, se tiene un valor mínimo de f si $h=2r$

Así el valor mínimo de la superficie es:

$f\left(\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}},2\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}\right)=6\pi\left(\dfrac{V_0}{2\pi}\right)^{2/3}$

1.7.6 Problema :

Determinar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8$ en el conjunto $D = \{(x,y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución.

En primer lugar estudiemos los puntos del interior de D, para ver si existen máximos o mínimos locales.

La condicion necesaria, de los puntos interiores candidatos a extremos, es

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longrightarrow \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(y+2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x^2 + 4y - 4 = 0 \end{array}$$

i) La primera ecuación implica que $x = 0$ ó $y = -2$. Si $y = -2$, la segunda ecuación implica que $x = 0$, luego se tiene un punto crítico en $P_0 = (0,-2)$, sin embargo , $P_0 \notin D$.

ii) Si $x = 0$, la segunda ecuación es $3y^2 + 4y - 4 = 0 \Longrightarrow y = -2$, $y = \dfrac{2}{3}$.

Las coordenadas del punto $P_1 = \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$verifican $\dfrac{4}{9} < 1$,entonces $P_1 \in D$. Además $f(P_1) = \dfrac{8}{27} + \dfrac{8}{9} - \dfrac{8}{3} - 8 = \dfrac{256}{27} = -9,48$.

En segundo lugar, estudiemos los puntos de la frontera de D usando la función $f(x,y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8$ bajo la restrición $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Usemos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Sea $L(x,y,\lambda) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$,

y obtenemos:

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial L}{\partial x} & = & 2x(y+2) + \lambda 2x = 0 & (1.0) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} & = & 3y^2 + x^2 + 4y - 4 + \lambda 2y = 0 & (2.0) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} & = & x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3.0) \end{array}$$

De la ecuación 1.0 se tiene que $x = 0$ ó $(y+2) + \lambda = 0$

a) Si $x = 0$,en 3.0 se tiene $y^2 - 1 = 0 \Longrightarrow y = \pm 1$.Luego se tienen otros dos puntos críticos

$P_2 = (0,1)$ y $P_2 = (0,-1)$ que satisfacen las ecuaciones 1.0 y 3.0.

Para comprobar que también satisfacen la ecuación 2.0 , sustituyamos el ella

$P_1 = (0,1) \Longrightarrow \lambda = \dfrac{3}{2} \in IR$

$P_2 = (0,-1) \Longrightarrow \lambda = \dfrac{5}{2} \in IR.$

Si evaluamos las función en los puntos encontrados obtenemos:

$f(P_2) = 1 + 2 - 4 - 8 = -9$

$f(P_3) = -1 + 2 + 4 - 8 = -3$

b) Si $(y+2) + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -(y+2)$, en 2.0 se tiene $3y^2 + x^2 + 4y - 4 + 2y(y+2) = 0$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 4$, resultado que contradice la ecuación 3.0, $x^2 + y^2 = 1$.

Luego, esta condición no produce un punto crítico.

Por lo tanto, comparando los valores de la función en los tres puntos encontrados, podemos inferir que el máximo absoluto se alcanza en P_3 y que el mínimo absoluto se alcanza en P_1

1.7.7 Problema :

Determine las dimensiones de una caja rectangular, sin tapa superior,que ha de tener un volumen dado V_0,de manera que su superficie sea mínima.

Solución:

Sea la función superficie definida por $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$
Con la condicion que el volumen sea $g(x,y,z) = xyz - V_0 = 0$
Entonces formemos la función:
$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V_0)$

$$\begin{array}{rcl} L_x(x,y,z,\lambda) = & y + 2z + \lambda yz = 0 & (1.0) \\ L_y(x,y,z,\lambda) = & x + 2z + \lambda xz = 0 & (2.0) \\ L_z(x,y,z,\lambda) = & 2x + 2y + \lambda xy = 0 & (3.0) \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda) = & xyz - V_0 = 0 & (4.0) \end{array}$$

Despejando y y x de 1.0 y 2.0 se tiene
5.0) $y = x = -\frac{2z}{1+\lambda z}$, sutituyendo en 3.0) produce:
$-\frac{8z}{1+\lambda z} + \frac{4\lambda z^2}{(1+\lambda z)^2} = 0 \implies z = \frac{1}{\lambda}$ 6.0)
Reemplazando en 6.0) en 5.0) se tiene
$y = x = -\frac{4}{\lambda}$. Sustituyendo en 4.0
$\left(-\frac{4}{\lambda}\right)\left(-\frac{4}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right) = V_0 \implies \lambda = \left(\frac{16}{V_0}\right)^{1/3}$
Por lo tanto, se tiene un único punto crítico de f en
$P_0 = \left(4\left(\frac{V_0}{16}\right)^{1/3}, 4\left(\frac{V_0}{16}\right)^{1/3}, \left(\frac{V_0}{16}\right)^{1/3}\right)$.
Examinemos la naturaleza del punto crítico usando el Hessiano limitado:

$$H(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & 1+\lambda z & 2+\lambda y \\ xz & 1+\lambda z & 0 & 2+\lambda x \\ xy & 2+\lambda y & 2+\lambda x & 0 \end{vmatrix}$$

$$H\left(4\left(\tfrac{V_0}{16}\right)^{1/3}, 4\left(\tfrac{V_0}{16}\right)^{1/3}, \left(\tfrac{V_0}{16}\right)^{1/3}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 4\left(\frac{V_0}{16}\right)^{2/3} & 4\left(\frac{V_0}{16}\right)^{2/3} & 16\left(\frac{V_0}{16}\right)^{2/3} \\ 4\left(\frac{V_0}{16}\right)^{2/3} & 0 & 2 & 6 \\ 4\left(\frac{V_0}{16}\right)^{2/3} & 2 & 0 & 6 \\ 16\left(\frac{V_0}{16}\right)^{2/3} & 6 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Usando propiedades de determinantes, obtenemos que el valor de Hessiano es:

$$H = 16\left(\tfrac{V_0}{16}\right)^{4/3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -2048.0 \times (0.062\,5V_0)^{\frac{4}{3}} < 0$$

Además: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0$

Entonces la función f tendrá un máximo condicionado en el punto $P_0 = \left(4\left(\tfrac{V_0}{16}\right)^{1/3}, 4\left(\tfrac{V_0}{16}\right)^{1/3}, \left(\tfrac{V_0}{16}\right)^{1/3}\right)$

1.8 Aplicación al cálculo de errores

1.8.1 Problema :

El periodo T de un péndulo simple depende de la longitud l y de la aceleración de gravedad g del lugar y está dado por:

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Hallar a a) el error absoluto y b) el error relativo , al calcular T con $l = 0,6\ m$ y $g = 10m/s^2$ si los valores verdaderos eran $l = 58,5cm$ y $g = 9,8m/s^2$.

Solución

a) Sea $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. el período de un péndulo simple.

El error absoluto de T es ΔT, que en este caso es aproximadamente dT. así se tiene:

El error absoluto de $T = dT = \dfrac{\partial T}{\partial l}dl + \dfrac{\partial T}{\partial g}dg = \dfrac{\pi}{\sqrt{\lg}}dl - \pi\sqrt{\dfrac{l}{g^3}}dg$

$Error\ \ de\ l = \Delta l = dl = (0,6\ - 0,585)\,m = 0,015m$

$Error\ \ de\ g = \Delta g = dg = (10 - 9,8)\,m/s^2 = 0,2m/s^2$

El error absoluto de $T = dT = \dfrac{\pi}{\sqrt{0,6x10}}(0,015) - \pi\sqrt{\dfrac{0,6}{1000}}(0,2)$

b) El error relativo de $T = \dfrac{dT}{T} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\lg}}dl - \pi\sqrt{\dfrac{l}{g^3}}dg\right)$

El error relativo de $T = \left(\dfrac{1}{2l}dl - \dfrac{1}{2g}dg\right)$.

El error relativo de $T = \dfrac{dT}{T} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\lg}}dl - \pi\sqrt{\dfrac{l}{g^3}}dg\right)$

1.8.2 Problema

Si $u = f(x, y, z)$ define una función diferenciable, y z se define implicitamente como una función de x e y

por la ecuación $g(x, y, z) = 0$ con los atributos pedido en el teorema de la función implícita. Pruebe que

u tiene primeras derivadas parciales de x e y dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial y}{\partial z}} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial y}{\partial z}}$$

b) Si $u = x^2y + z^2$, y $z = g(x, y)$ se define implicitamente po la ecuación $x^2y - 3z + 8yz^3 = 0$

Calcule:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0, 0) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0, 0)$$

1.9 Solución:

a) Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

por otra parte si $g(x, y, z) = 0$ define implicitamente a $z = z(x, y)$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

reemplazando en la ecuación anterior

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

Similarmente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

b) En este caso $u = f(x, y, z) = x^2y + z^2$ y $z = z(x, y)$ se define implicitamente por

$g(x, y, z) = x^2y - 3z + 8yz^3 = 0$ y tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy \ , \ \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + 8z^3 \ , \ \frac{\partial g}{\partial z} = -3 + 24yz^2$$

derivadas que son todas continuas por lo que se afirma que g es de C^1

Ademas $g(1, 0, 0) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 0) = -3 \neq 0$

Entonces por el teorema de la función implicita se tiene que existe $V = V_\partial(1, 0)$ y una vecindad $(-a, a)$ de $z = 0$

y una función $z(x, y)$ de C^1 sobre V tal que

$$z(1, 0) = 0 \ \text{ y } \ z(1, 0)\epsilon(-a, a)$$

Ademas:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} 2xy & 2z \\ 2xy & -3 + 24yz^2 \end{vmatrix} = 2xy(-3 + 24yz^2) - 2xy2z$$

$$= 2xy(-3 + 24yz^2 - 2z)$$

$\frac{\partial g}{\partial z} = -3 + 24yz^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy(-3 + 24yz^2 - 2z)}{-3 + 24yz^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0, 0) = \frac{0}{-3} = 0$$

También:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} x^2 & 2z \\ x^2 + 8z^3 & -3 + 24yz^2 \end{vmatrix} = -3x^2 + 24x^2yz^2 - 2x^2z - 16z^3$$

$$= x^2(24yz^2 - 2z - 3) - 16z^3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2(24yz^2 - 2z - 3) - 16z^3}{-3 + 24yz^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0, 0) = \frac{-3}{-3} = 1$$

Problema

Si $u = f(x, y, z)$ define una función diferenciable, y z se define implicitamente como una función de x e y

por la ecuación $g(x,y,z)=0$ con los atributos pedido en el teorema de la función implícita. Pruebe que

u tiene primeras derivadas parciales de x e y dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial y}{\partial z}} \;\; ; \;\; \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial y}{\partial z}}$$

b) Si $u=x^2y+z^2$, y $z=g(x,y)$ se define implicitamente po la ecuación $x^2y-3z+8yz^3=0$

Calcule:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0,0) \;\text{ y }\; \frac{\partial u}{\partial y}(1,0,0)$$

1.10 Solución:

a) Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

por otra parte si $g(x,y,z)=0$ define implicitamente a $z=z(x,y)$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

reemplazando en la ecuación anterior

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

Similarmente

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

b) En este caso $u = f(x,y,z) = x^2y + z^2$ y $z = z(x,y)$ se define implicitamente por

$g(x,y,z) = x^2y - 3z + 8yz^3 = 0$ y tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy \ , \ \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + 8z^3 \ , \ \frac{\partial g}{\partial z} = -3 + 24yz^2$$

derivadas que son todas continuas por lo que se afirma que g es de C^1

Ademas $g(1,0,0) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial z}(1,0,0) = -3 \neq 0$

Entonces por el teorema de la función implicita se tiene que existe $V = V_\partial(1,0)$ y una vecindad $(-a,a)$ de $z = 0$

y una función $z(x,y)$ de C^1 sobre V tal que

$$z(1,0) = 0 \ \text{ y } \ z(1,0)\epsilon(-a,a)$$

Ademas:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} 2xy & 2z \\ 2xy & -3 + 24yz^2 \end{vmatrix} = 2xy(-3 + 24yz^2) - 2xy2z$$
$$= 2xy(-3 + 24yz^2 - 2z)$$

$\frac{\partial g}{\partial z} = -3 + 24yz^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy(-3 + 24yz^2 - 2z)}{-3 + 24yz^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(1,0,0) = \frac{0}{-3} = 0$$

También:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} x^2 & 2z \\ x^2 + 8z^3 & -3 + 24yz^2 \end{vmatrix} = -3x^2 + 24x^2yz^2 - 2x^2z - 16z^3$$
$$= x^2(24yz^2 - 2z - 3) - 16z^3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2(24yz^2 - 2z - 3) - 16z^3}{-3 + 24yz^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(1,0,0) = \frac{-3}{-3} = 1$$