2. LÍMITES Y CONTINUIDAD

2.1. Nota histórica

Después de la invención del cálculo, en el siglo XVII, siguió un periodo de desarrollo libre del tema durante el siglo XVIII. Algunos matemáticos, como Euler y los hermanos Bernoulli, aplicaron el poder del cálculo; infinitesimal y exploraron, con audacia, las consecuencias de esta nueva y bella teoría matemática, sin preocuparse demasiado si sus demostraciones eran correctas por completo.

En contraste, el siglo XIX fue la Edad del Rigor en matemáticas. Se produjo un movimiento de regreso a las bases del tema, para presentar definiciones cuidadosas y demostraciones rigurosas. Al frente de este movimiento estuvo **Agustín - Louis Cauchy (1789-1857**), matemático francés, quien comenzó como ingeniero militar antes de ser profesor de matemáticas en París.Cauchy tomó la idea de límite de Newton, que **Jean Le Rond D' Alembert**, otro "matemático francés, había mantenido viva durante el siglo XVIII y la hizo más precisa. Su definición de límite es:"Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable tienden indefinidamente a un valor fijo, de modo que al final difieren de él todo lo poco que uno desea, a este último se le llama límite de los demás". Pero cuando Cauchy empleó esta definición en ejemplos y demostraciones, con frecuencia echó mano de desigualdades delta (δ) – épsilon (ε). Una demostración característica de Cauchy comienza "Designemos dos números muy pequeños como δ y ε " Empleó la ε por la correspondencia entre la épsilon y la palabra francesa erreur. Después, **Karl Weierstrass (1815-1897)**,

Matemático alemán, enunció la definición de límite

2.2. Introducción

El concepto ***límite*** es una de las ideas fundamentales que distinguen el ***Cálculo*** de otras áreas de la matemática como el álgebra o la geometría. De hecho podríamos definir el cálculo como ***un estudio de los límites.***

Por su puesto, la palabra limite en el lenguaje diario como cuando se dice “Estoy acercándome al límite de mi paciencia” tal sentido tiene algo que ver con cálculo pero no mucho.

2.3. Concepto intuitivo de límite

En el cálculo y sus aplicaciones a menudo nos interesamos por los valores de la función $f(x)$ de la función f cuando **x** está muy cerca de de un numero **a,** pero no es necesariamente igual hecho,en muchos casos el numero **a** no está en el dominio de f esto es $f(a)$ no definido . Vagamente hablando, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿si **x** se acerca mas a **a** (pero x $\neq$ a)

$f(x)$ se acerca cada vez mas a algún numero **L** ? si la respuesta es si decimos que el limite de

$f(x)$, cuando **x** tiende a **a** es igual a **L** y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se quiere estudiar el comportamiento que tiene las imágenes de la función $y = f(x)$ cuando la variable **x** se encuentra cerca del valor **x = a**

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = x^2 + 2$ investiguemos lo que ocurre cuando x se aproxima a 2 en la tabla por la derecha y por la izquierda

X derecha	Y = f(x)	X izquierda	y = f(x)
1,96	5,8416	2	6,000
1,97	5,8809	2,01	6,0401
1,98	5,9204	2,02	6,0804
1,99	5,9601	2,03	6,1209
2,00	6	2,04	6,1616

x *se aproxima a* 2 $\qquad$ y *se aproxima a* 6

En conclusión podemos decir que cuando la variable **x** se aproxima a 2 entonces la variable **y** se aproxima 6 entonces se puede escribir

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 2) = 6$$

Otros ejemplos.- Para las siguientes funciones utilizando DERIVE realizar la tabla y escribir el limite

2.- $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ aproximar para $x = 1$

3.- $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ aproximar para $x = 2$

4.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ aproximar para $x = 3$

2.4. Definición precisa de Límite de una Función.

El significado preciso de la proposición “ $f(x)$ tiende a **L**, cuando x tiende a **a** “

Fue debatido vigorosamente (y a veces en forma áspera) por cientos de años, hasta finales del siglo dicienueve fue entonces el matemático **Alemán Karl Weierstrass (1815-1897)** formulo finalmente la definición rigurosa del limite aceptada en al actualidad

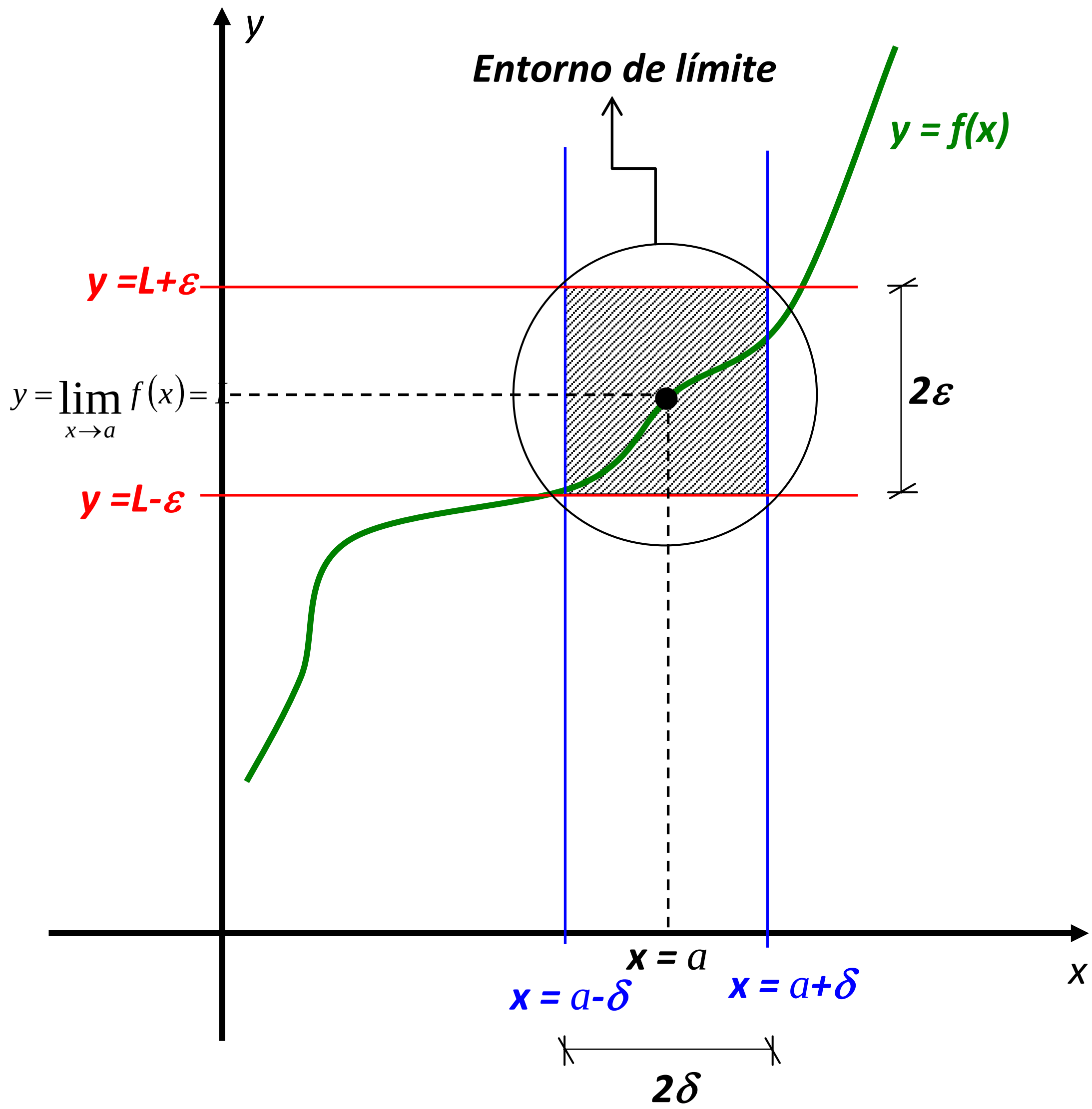
Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto **I** que contiene un numero real **a**, excepto cuando **a** se definine a sí misma. Entonces se dice que el límite de $f(x)$ cuando **“x”** tiende a un número real **a** y da como resultado un número **L** y se denota:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para todo epsilon (ε) mayor que cero existe un delta (δ) mayor que cero tal que el valor absoluto de la función menos el limite es menor que epsilon, cuando el valor absoluto de x - a sea menor que δ

$Si\ \forall; \varepsilon > 0; \exists; \delta > 0 / \ |f(x) - L| < \varepsilon$; Cuando $|x - a| < \delta$

2.5 Interpretación geométrica de límite



2.6. Teorema Sobre Límite.

Sean las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$, cuyo dominio pertenece a un intervalo I de los números reales con los siguientes limites

Sean la funciones f (x) y g(x) con lintes :

$\underset{x \to a}{Lim}\ f(x) = L$	$\underset{x \to a}{Lim}\ g(x) = M$

1. $\underset{x \to a}{Lim}\ K = K$ $\quad K$ = constante $\in \Re$

2. $\underset{x \to a}{Lim}\ K\ f(x) = K \underset{x \to a}{Lim}\ f(x) = K, L$

3. $\underset{x \to a}{Lim}\ [f(x) \pm g(x)] = \underset{x \to a}{Lim}\ f(x) \pm \underset{x \to a}{Lim}\ g(x) = L \pm M$

4. $\underset{x \to a}{Lim}\ f(x) \cdot g(x) = \underset{x \to a}{Lim}\ f(x) \cdot \underset{x \to a}{Lim}\ g(x) = L \cdot M$

5. $\underset{x \to a}{Lim}\ \dfrac{f(x)}{g(x)} = \underset{x \to a}{Lim}\ \dfrac{\underset{x \to a}{Lim}\ f(x)}{\underset{x \to a}{Lim}\ g(x)} = \dfrac{L}{M}$

6. $\underset{x \to a}{Lim}\ [f(x)]^{g(x)} = \left[\underset{x \to a}{Lim}\ f(x)\right]^{\underset{x \to a}{Lim}\ g(x)} = L^M$

7. $\underset{x \to a}{Lim}\ \log_b f(x) = \log_a \left[\underset{x \to a}{Lim}\ f(x)\right] = \log_b L \quad ; L > 0$

8. $\underset{x \to a}{Lim}\ \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\underset{x \to a}{Lim}\ f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad ;$

$L \geq 0$ y n cualquier entero positivo ó $L < 0$ y n cualquier entero positivo impar

2.6. Calculo de Límites.

El valor del limite aplicando propiedades o teoremas de limites de manera que al evaluar o reemplazar el valor de la variable por la tendencia ya no se escribe limite.

1. $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3x-2} = \left(\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to 2} 3x-2} =$$

$$\left(\frac{\lim\limits_{x\to 2} x-1}{\lim\limits_{x\to 2} x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to 2} 3x-2} = \left(\frac{2-1}{2+1}\right)^{3(2)-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4} = \frac{1}{81}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3x-2} = \frac{1}{81}$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x+3} = \frac{1-1}{1+2+3} = \frac{0}{6} = 0$$

3. $$\lim_{x\to 3}\frac{4x+1}{x-3} = \frac{13}{0} = \infty$$

4. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{0}{0} = ?$$

2.7. Tipos de Indeterminación.

1. $\frac{0}{0} = ?$ **2.** $\frac{\infty}{\infty} = ?$ **3.** $\frac{0}{0} = ?$ **4.** $\infty \cdot \infty = ?$

5. $\infty^0 = ?$ **6.** $0^0 = ?$ **7.** $0 \cdot \infty = ?$

2.8. Formas Determinados.

1. $\frac{0}{a} = 0$ **2.** $\frac{\infty}{a} = \infty$ **3.** $\frac{a}{\infty} = 0$ **4.** $\frac{a}{0} = \infty$

5. $\frac{0}{\infty} = 0$ **6.** $\frac{\infty}{0} = \infty$ **7.** $\infty \cdot \infty = \infty$ **8.** $\infty^{\infty} = \infty$

9. $0^{\infty} = 0$ **10.** $a^{\infty} = \infty; \quad a \neq 1$ **11.** $a^{-\infty} = 0; \quad a \neq 1$

12. $\ln(0) = -\infty$ **13.** $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$

2.9. Calculo de límites indeterminados

Para calcular límites indeterminados no existe un método fijo sino mas bien algunas sugerencias que permiten resolver de acuerdo a las características que tenga cada límite