

# 1. INTEGRALES DOBLES

En este trabajo se extiende el concepto de la integral de una función real de variable real a funciones de varias variables, comenzando en este capítulo con integrales de funciones de dos variables; es decir, funciones del tipo  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La integral doble tiene diversas aplicaciones tanto mecánicas como geométricas, pero su significado intrínseco es el volumen, así como el significado de una integral de una función de variable real es el área.

## 1.1 INTRODUCCIÓN: LA INTEGRAL DEFINIDA

Como referencia para la definición de la integral doble, se debe recordar la integral definida de una función real de variable real, la cual surge como solución al problema del cálculo de área bajo una curva.

Sea  $f$  una función real definida en  $[a, b]$  y sea  $P$  una partición del intervalo cerrado  $[a, b]$ , donde  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ . Una suma de Riemann de la función  $f$  para la partición  $P$ , denotada por  $R_p$  es un número real obtenido como:

$$R_p = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \quad (\text{I.1})$$

donde:  $n$  es el número de subintervalos de la partición  $P$ ,  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$  y  $\Delta x_i$  es la longitud del subintervalo genérico (también llamado subintervalo  $i$ -ésimo).

En la figura 1 se aprecia el significado geométrico de la Suma de Riemann para el caso de una función  $f$  positiva en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

El nombre de Suma de Riemann se debe al matemático alemán:

**Georg Friedrich  
Bernhard Riemann**  
(1826-1866).



Sus contribuciones destacaron en las áreas de análisis y geometría diferencial, la fisicomatemática y la teoría de funciones de variables complejas.

Su nombre también está relacionado con la función zeta.

La longitud del subintervalo genérico se calcula de la siguiente manera:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

### Significado geométrico de la suma de Riemann

Si la función  $f$  es positiva  $\forall x \in [a, b]$ , entonces la suma de Riemann corresponde a un valor aproximado del área de la región comprendida bajo la gráfica de la función  $f$ , sobre el eje  $x$ , y entre las rectas  $x = a$  y  $x = b$ .

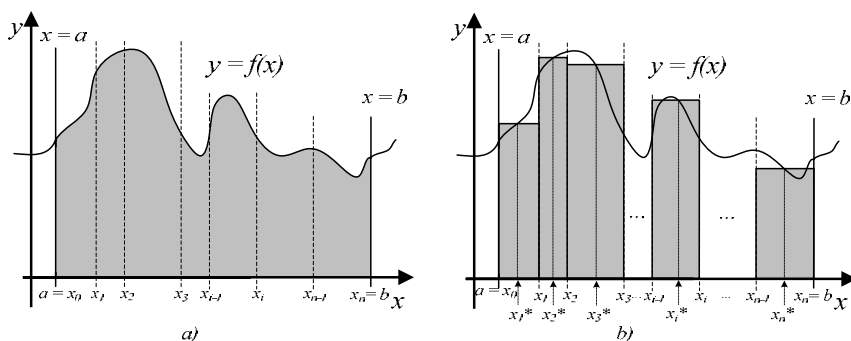


Figura 1.1

### Significado geométrico de la Suma de Riemann para una función $f$ positiva en el intervalo cerrado $[a, b]$ .

En la gráfica a) la región sombreada es la que está comprendida bajo la gráfica de la función  $f$ , sobre el eje  $x$ , y entre las rectas  $x = a$  y  $x = b$ .

En la gráfica b) la suma de las áreas de los rectángulos sombreados es el valor numérico de la Suma de Riemann para la función  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

Decir que la norma de la partición  $P$  tiende a cero,  $\|P\| \rightarrow 0$ , es equivalente a decir que el número de subintervalos de la partición  $P$  tiende a infinito,  $n \rightarrow \infty$ .

Si la norma de una partición  $P$ , denotada como  $\|P\|$ , se define como la longitud más grande de todos los subintervalos, entonces al hacer que la norma sea lo suficientemente pequeña, esto es  $\|P\| \rightarrow 0$ , la partición se hace más fina, lo cual lleva a la definición de la Integral Definida.

El símbolo  $\int$  lo introdujo el matemático alemán

**Gottfried Wilhelm**

**von Leibniz**

(1646, 1716).



### DEFINICIÓN: integral definida de $f$ en $[a, b]$

Sea  $f$  una función real definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$ .

La integral definida de  $f$  desde  $a$  hasta  $b$ , denotada por

$\int_a^b f(x) dx$ , esta dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \quad (I.2)$$

si el límite existe.

La Integral Definida  $\int_a^b f(x)dx$  es un número real que puede interpretarse como el área bajo la gráfica de la función  $f$ , sobre el eje  $x$  y entre las rectas  $x = a$  y  $x = b$ , si la función es positiva.

Donde:  $\int$  es el signo de integración,  $a$  y  $b$  son los límites de integración inferior y superior, respectivamente;  $f(x)$  es el integrando o función integrando y la diferencial de  $x$ , denotada por  $dx$ , indica que la variable de integración es  $x$ .

## 1.2 INTEGRAL DOBLE SOBRE RECTÁNGULOS

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida sobre la región rectangular cerrada  $D$ , dada por:

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\} \quad (I.3)$$

Sea  $P$  una partición de la región  $D$ , la cual se logra con el producto cartesiano de las particiones  $P_x$  y  $P_y$  de los intervalos  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , respectivamente, como se muestra a continuación:

Una partición  $P_x$  del intervalo  $[a, b]$  es un conjunto finito de elementos, donde se cumple:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$P_x = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\} \quad (I.4)$$

$$P_y = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_j, \dots, y_{m-1}, y_m\} \quad (I.5)$$

entonces

$$P = P_x \times P_y \quad (I.6)$$

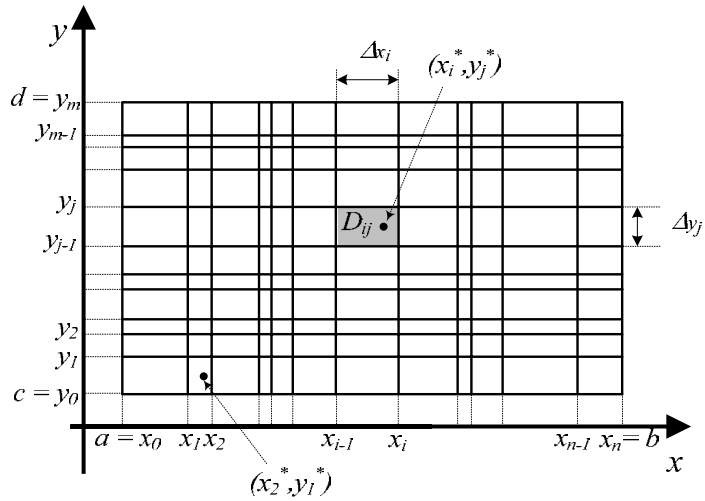
Si la partición  $P_x$  tiene  $n+1$  elementos y  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de longitud  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , y la partición  $P_y$  tiene  $m+1$  elementos y  $m$  subintervalos  $[y_{j-1}, y_j]$  de longitud  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ , entonces la región rectangular  $D$  queda dividida por la partición  $P$  en  $n \cdot m$  rectángulos denominados  $D_{ij}$ , tal como se muestra en la figura

1.2.

En la figura 1.2, se aprecia que:

$$x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$$

$$y_{j-1} \leq y_j^* \leq y_j$$



**Figura 1.2**

**Partición  $P$  de una región rectangular  $D$ .**

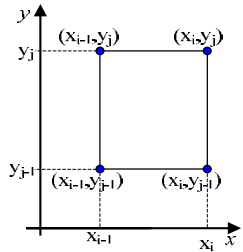
El subrectángulo denotado  $D_{ij}$ , es un elemento de la partición  $P$ , cuya área, denotada  $\Delta A_{ij}$  se calcula como:

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \quad (1.7)$$

Al tomar un punto arbitrario  $(x_i^*, y_j^*)$  en el subrectángulo  $D_{ij}$ , se puede establecer la **doble suma de Riemann** para la función  $f$  en la partición  $P$ , denotada como  $S_D$ :

$$S_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (1.8)$$

Esta doble suma de Riemann es un valor numérico que se obtiene al efectuar la suma del producto de la imagen de la función  $f$  en cada punto arbitrario  $(x_i^*, y_j^*)$  y el área de cada rectángulo  $D_{ij}$ . Al expandir la expresión (1.8) se obtiene:



**Figura 1.3**

Subrectángulo  $D_{ij}$

El punto  $(x_i^*, y_j^*) \in D_{ij}$  por lo tanto existen diferentes alternativas para su selección las más comunes son:

**Esquina inferior izquierda**

$$(x_i^*, y_j^*) = (x_{i-1}, y_{j-1})$$

**Esquina inferior derecha**

$$(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_{j-1})$$

**Esquina superior izquierda**

$$(x_i^*, y_j^*) = (x_{i-1}, y_j)$$

**Esquina superior derecha**

$$(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_j)$$

**Punto medio**

$$(x_i^*, y_j^*) = \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
S_D = & f(x_1^*, y_1^*) \Delta A_{11} + f(x_1^*, y_2^*) \Delta A_{12} + \cdots + f(x_1^*, y_m^*) \Delta A_{1m} + \\
& f(x_2^*, y_1^*) \Delta A_{21} + f(x_2^*, y_2^*) \Delta A_{22} + \cdots + f(x_2^*, y_m^*) \Delta A_{2m} + \\
& \vdots \\
& f(x_n^*, y_1^*) \Delta A_{n1} + f(x_n^*, y_2^*) \Delta A_{n2} + \cdots + f(x_n^*, y_m^*) \Delta A_{nm}
\end{aligned} \quad (I.9)$$

Si se define la norma  $\|P\|$  de la partición  $P$  como la longitud de la diagonal más grande de todos los rectángulos  $D_{ij}$  y se hace que  $\|P\| \rightarrow 0$ , entonces la partición  $P$  se hace más fina, esto es, ahora la región  $R$  queda dividida en muchos más rectángulos, y se puede plantear:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_D = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (I.10)$$

Todo esto permite establecer la definición de la integral doble.

### 1.2.1 INTEGRAL DOBLE DE $f$ SOBRE $D$

#### DEFINICIÓN: Integral doble de $f$ sobre $D$

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función real definida sobre un rectángulo  $D$  del plano. La integral doble de  $f$  sobre  $D$ , denotada por  $\iint_D f(x, y) dA$ , se define como:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (I.11)$$

si el límite existe.

Decir que el límite existe significa que:

$$\iint_D f(x, y) dA = L \quad (I.12)$$

donde  $L \in \mathbb{R}$

Así como la suma de Riemann es una aproximación de la integral definida, la **doble suma de Riemann es una aproximación de la integral doble.**

Otras notaciones para la integral doble son:

$$\begin{aligned}
& \iint_D f(x, y) dx dy \\
& \iint_D f(x, y) dy dx
\end{aligned}$$

**Definición del límite de una función:**

El límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

existe si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$

siempre que

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

Observe que la condición

$0 < \|P\|$  no se coloca ya

que la norma de la partición  $P$  es una longitud por lo tanto ya es positiva.

Si el límite de la expresión (I.11) existe se dice que  $f$  es integrable sobre  $D$ , recordando la definición del límite, esto significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$ , tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} - L \right| < \varepsilon \quad (\text{I.13})$$

Siempre que:

$$\|P\| < \delta \quad (\text{I.14})$$

Para cualquier partición  $P$  del rectángulo  $D$ , y para cualquier  $(x_i^*, y_j^*)$  en el subrectángulo  $D_{ij}$ .

## 1.2.2 INTEGRABILIDAD DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

### TEOREMA: Integrabilidad de una función continua

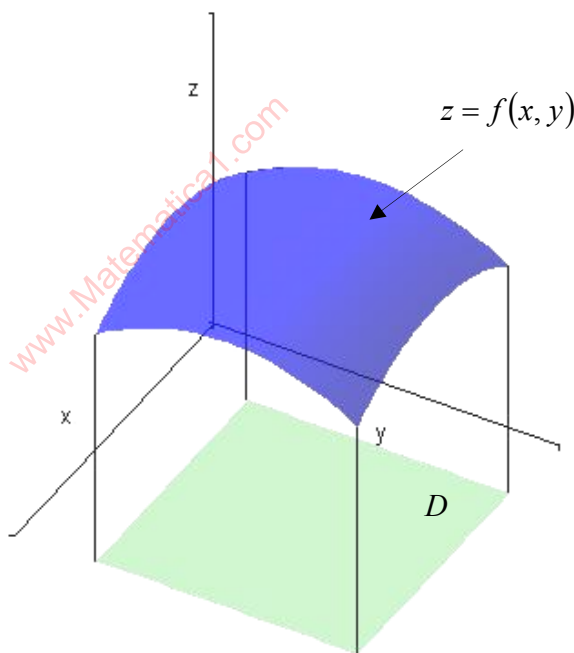
Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función real definida sobre un rectángulo  $D$  del plano acotada, y continua, excepto quizás en un número finito de curvas suaves en  $D$ , entonces la función  $f$  es integrable en  $D$ .

### 1.3 INTERPRETACIÓN DE LA INTEGRAL DOBLE COMO VOLUMEN

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función real definida sobre un rectángulo  $D = [a, b] \times [c, d]$ , la cual es continua y positiva en  $D$ . Entonces la gráfica de  $f$  es una superficie definida por la ecuación:

$$z = f(x, y) \quad (\text{I.15})$$

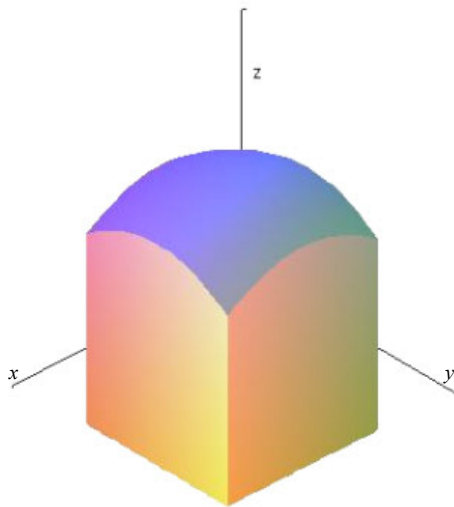
En la figura 1.4 se aprecia la gráfica de una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre un rectángulo  $D$ .



**Figura 1.4**

**Gráfica de una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre un rectángulo  $D$**

Sea  $S$  el sólido que está definido sobre la región  $D$  y bajo la superficie definida por la gráfica de  $f$ . En la figura 1.5 se aprecia el sólido  $S$ .



**Figura 1.5**

**Sólido  $S$  definido sobre la región  $D$  y bajo la gráfica de  $f$**

El volumen  $V$  del sólido  $S$  puede aproximarse como la suma del volumen de los paralelepípedos base  $D_{ij}$  y altura es  $f(x_i^*, y_j^*)$ , tal como indica la expresión (I.16).

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij} \quad (\text{I.16})$$

donde  $V_{ij}$  es el volumen del paralelepípedo de base  $D_{ij}$ , también llamado paralelepípedo aproximante, y cuya altura es  $f(x_i^*, y_j^*)$ . El punto  $(x_i^*, y_j^*)$  pertenece al subrectángulo genérico. El volumen de este paralelepípedo o caja rectangular viene dado por:

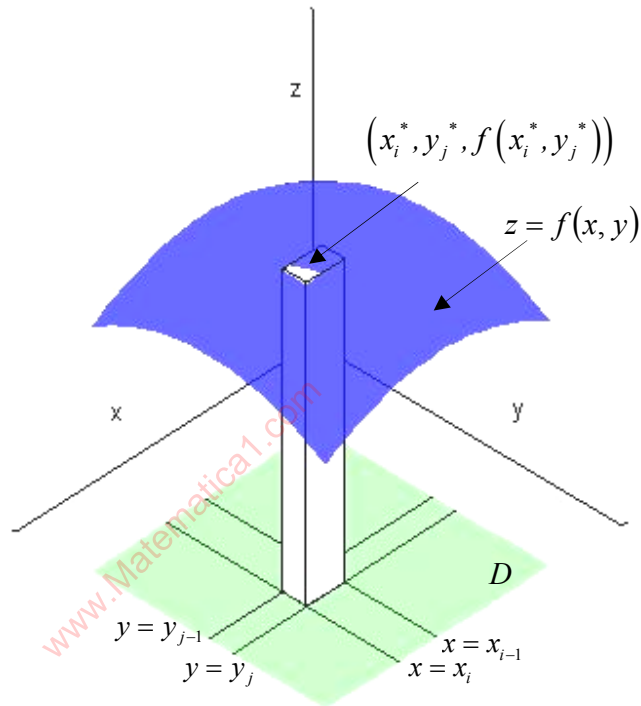
$$V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (\text{I.17})$$

Al sustituir (I.17) en (I.16) se obtiene la doble suma de Riemann planteada en (I.8) como  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$  por lo tanto esta doble suma es una aproximación del volumen del sólido  $S$ , es decir:



$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (\text{I.18})$$

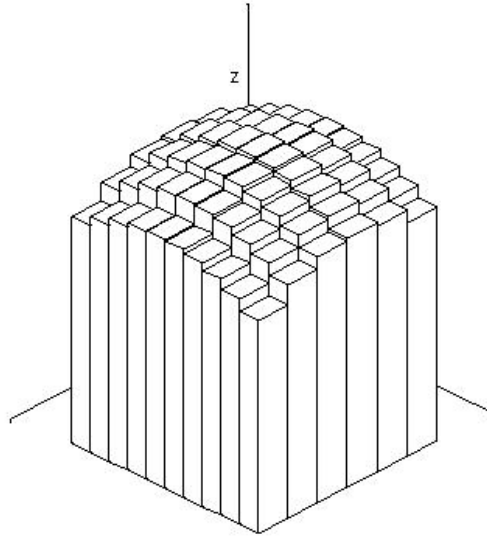
La figura 1.6 muestra la gráfica de un paralelepípedo aproximante del volumen del sólido  $S$  sobre la región  $D$ .



**Figura 1.6**

**Paralelepípedo de base  $D_{ij}$  y altura  $f(x_i^*, y_j^*)$ , empleado para aproximar el volumen del sólido  $S$  definido sobre la región  $D$**

La figura 1.7 muestra los paralelepípedos empleados en la aproximación del volumen del sólido  $S$ , el cual se encuentra limitado por la gráfica de la función  $f$  y por el rectángulo  $D$ .



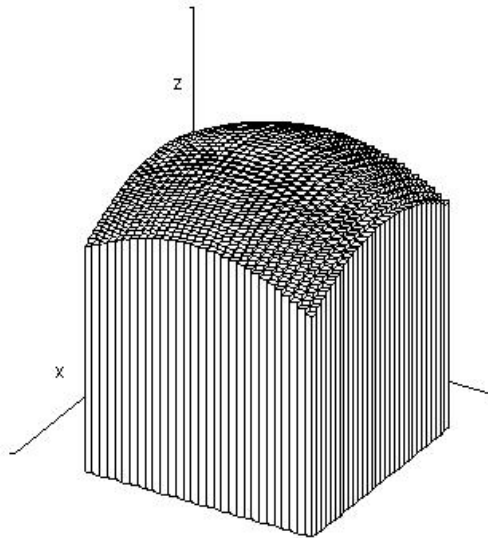
**Figura 1.7**

**Paralelepípedos empleados para aproximar el volumen del sólido  $S$  definido sobre la región  $D$**

Cuando  $\|P\| \rightarrow 0$ , la partición  $P$  se hace más fina y por lo tanto la región  $R$  queda dividida en muchos más rectángulos, por lo cual el límite  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$  representa el volumen del sólido  $S$ , es decir:

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \iint_D f(x, y) dA \quad (I.19)$$

En la figura 1.8 se observan los paralelepípedos empleados en la aproximación del volumen del sólido  $S$ , pero ahora con una partición más refinada sobre el rectángulo  $D$ .



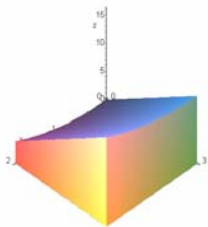
**Figura 1.8**

Paralelepípedos empleados en la aproximación del volumen del sólido  $S$  con una partición refinada sobre  $D$ .

### EJEMPLO 1.1

Estime el volumen del sólido que se encuentra debajo de la superficie  $z = x^2 + 4y$  y arriba del rectángulo  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 3\}$ . Utilice una suma de Riemann con  $n = 2$  y  $m = 3$  y considerando el punto de muestra como:

- La esquina superior derecha de cada subrectángulo.
- El punto medio de cada subrectángulo



**Figura 1.9**

Sólido del ejemplo 1.1

**Solución:**

- Sea  $V$  el volumen del sólido debajo de la superficie  $z = x^2 + 4y$  y arriba del rectángulo  $D$ . Entonces se desea estimar a  $V$  de la siguiente manera:

$$V = \iint_D (x^2 + 4y) dA \approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

donde  $(x_i^*, y_j^*)$  es el punto perteneciente a  $D_{ij}$  donde será evaluada la función. El enunciado de este ejercicio exige que el punto de muestra sea la esquina superior derecha de cada subrectángulo, por lo cual  $(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_j)$ .

La región  $D$  y su partición se muestran en la siguiente figura.

Si  $m = 3$  y  $n = 2$ ,

entonces

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{2} = 1$$

$$\Delta y = \frac{d-c}{m} = \frac{3-0}{3} = 1$$

Como  $(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_j)$ ,

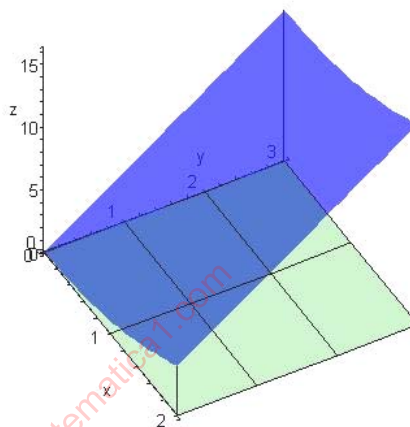
entonces se debe expresar en función de  $i$  y  $j$ :

$$x_i = x_0 + i\Delta x = 0 + i(1) = i$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y = 0 + j(1) = j$$

Y además:

$$\Delta A_{ij} = \Delta x \Delta y = (1)(1) = 1$$



**Figura 1.10**

**Partición empleada para el ejemplo 1.1**

Luego, la aproximación del volumen es:

$$V \approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f(i, j)(1)$$

Para evaluar esta doble suma de Riemman se pueden emplear las fórmulas y propiedades de la notación sigma:

$$V \approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f(i, j)(1) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (i^2 + 4j) = \sum_{i=1}^2 (3i^2 + 24) = 15 + 48 = 63$$

$$V = \iint_D (x^2 + 4y) dA \approx 63$$

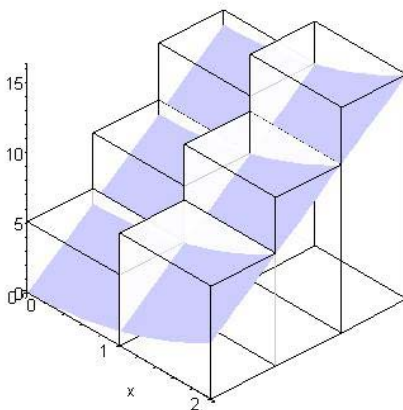
Recuerde:

$$\sum_{i=1}^n k = kn \quad \text{si } k \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Cuando se selecciona  $(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_j)$ , en el cálculo de la doble suma de Riemann del **ejemplo 1.1 parte a**, la aproximación del volumen obtenida es por exceso ya que el volumen del sólido  $S$  es inferior al volumen de las cajas rectangulares.



**Figura 1.11**

**Paralelepípedos empleados para aproximar el volumen del sólido  $S$  descrito en el ejemplo 1.1 parte a**

En la figura 1.11, se aprecia la superficie definida por la función  $f$  y los paralelepípedos aproximantes de volumen.

**b)** Cuando se desea estimar el volumen  $V$  del sólido debajo de la superficie  $z = x^2 + 4y$  y arriba del rectángulo  $D$  en donde  $(x_i^*, y_j^*)$  es el punto medio de cada subrectángulo, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= x_0 + (i-1)\Delta x = i-1 \\ y_{j-1} &= y_0 + (j-1)\Delta y = j-1 \end{aligned}$$

$$(x_i^*, y_j^*) = \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2} \right) = \left( \frac{i-1+i}{2}, \frac{j-1+j}{2} \right) = \left( i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right)$$

Luego:

$$V \approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f\left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right) (1)$$

A continuación esta doble suma de Riemann se resolverá calculando la imagen de cada  $(x_i^*, y_j^*)$  en la función  $f$  y posteriormente se efectuará la suma.

	$(x_i^*, y_j^*) = \left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right)$		$f(x_i^*, y_j^*) = (x_i^*)^2 + 4y_j^*$	
$\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}$	1	2	1	2
1	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{17}{4}$
2	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{25}{4}$	$\frac{33}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$	$\frac{41}{4}$	$\frac{49}{4}$

**Cuadro 1.1**

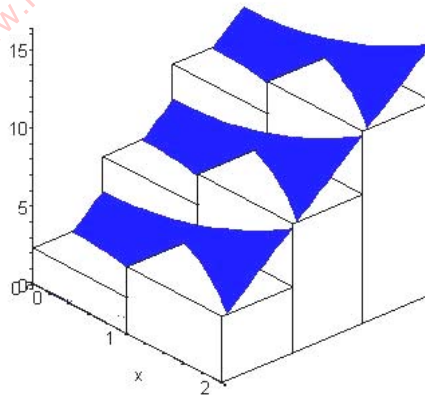
**Valores de  $f(x_i^*, y_j^*)$  empleados en el ejemplo 1.1 (b)**

En el **ejemplo 1.1 parte b**, cuando se selecciona  $(x_i^*, y_j^*)$  como el punto medio de cada subrectángulo se puede apreciar en la figura 1.12 que la gráfica de la función  $f$  atraviesa a los paralelepípedos, por lo cual no se puede asegurar si la aproximación del volumen del sólido  $S$  es por exceso o por defecto.

$$V \approx \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{41}{4} + \frac{17}{4} + \frac{33}{4} + \frac{49}{4} = 43,5$$

Por lo tanto

$$V = \iint_D (x^2 + 4y) dA \approx 43,5$$



**Figura 1.12**

**Paralelepípedos empleados para aproximar el volumen del sólido  $S$  descrito en el ejemplo 1.1 parte b**

En la figura 1.12, se observa la superficie definida por la función  $f$  y los paralelepípedos aproximantes de volumen.

## EJEMPLO 1.2



Figura 1.13

Sólido del ejemplo 1.2

Sea  $S$  el sólido que se encuentra arriba del cuadrado  $D = [0, 4] \times [0, 4]$  y abajo del paraboloide elíptico  $z = 36 - x^2 - y^2$ . Estime el volumen del sólido tomando como punto de muestra la esquina superior derecha de cada subcuadrado y dividiendo a la región  $D$  en:

- Cuatro cuadrados iguales.
- Diez mil cuadrados iguales.

**Solución:**

- Sea  $V$  el volumen del sólido debajo de la superficie  $z = 36 - x^2 - y^2$  y arriba del rectángulo  $D$ . Entonces se desea estimar a  $V$  de la siguiente manera:

$$V = \iint_D (36 - x^2 - y^2) dA \approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

donde  $(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_j)$

La región  $R$  y su partición se muestran en la siguiente figura.

Como  $D = [0, 4] \times [0, 4]$

y se divide en 4 subcuadrados, entonces

$$n = m = 2$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{2} = 2$$

$$\Delta y = \frac{d-c}{m} = \frac{4-0}{2} = 2$$

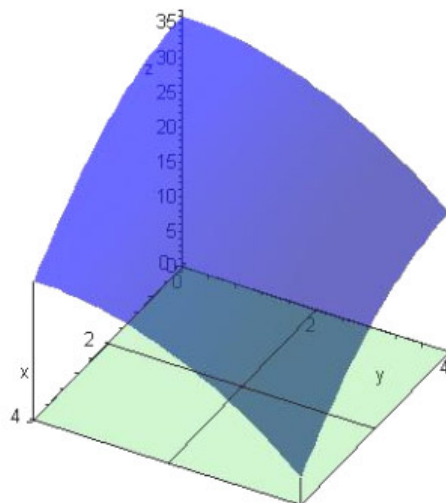


Figura 1.14

Partición empleada para el ejemplo 1.2

$$\Delta A_{ij} = \Delta x \Delta y = (2)(2) = 4$$

Como  $(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_j)$ ,

entonces

$$x_i = x_0 + i\Delta x = 0 + i(2) = 2i$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y = 0 + j(2) = 2j$$

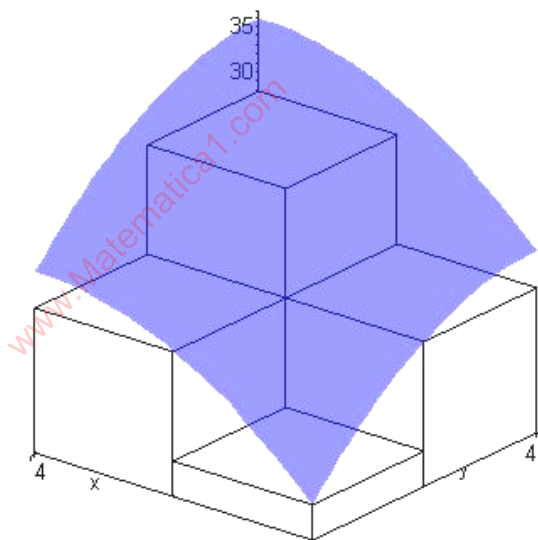
Luego, la aproximación del volumen es:

$$V \approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 f(2i, 2j)(4) = 4 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 [16 - (2i)^2 - (2j)^2]$$

Resolviendo de manera análoga al ejemplo anterior:

$$V = \iint_D (36 - x^2 - y^2) dA \approx 256$$

En el **ejemplo 1.2 parte a**, la aproximación del volumen obtenida es por defecto ya que las cajas rectangulares empleadas se encuentran dentro del sólido  $S$ .



**Figura 1.15**

**Volumen aproximado en el ejemplo 1.2 parte a**

En la figura 1.15, se observa la superficie definida por la función  $f$  y los paralelepípedos aproximantes empleados.



b) Ahora la región  $D$ , está dividida en diez mil subcuadrados iguales; es decir,  $n = m = 100$ . Por lo tanto, la estimación del volumen del sólido viene dada por:

$$V = \iint_D (36 - x^2 - y^2) dA \approx \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

Realizar este cálculo como se ha ilustrado en los ejemplos 1.1 y la parte a de éste, es muy largo pues el número de subcuadrados es elevado. Entonces para resolver la doble suma de Riemann planteada es necesario emplear un software matemático.

A continuación se presenta los resultados obtenidos, con un software matemático, para el ejemplo 1.2 parte b. También se incluye otra aproximación empleando una partición aún más refinada.

Número de subcuadrados	$n$	$m$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$
Diez mil	100	100	402,7648
Un millón	1.000	1.000	405,077248

**Cuadro 1.2**

**Aproximaciones del volumen del sólido planteado en el ejemplo 1.2**

En el **ejemplo 1.2 parte b**, se aprecia que la aproximación del volumen del sólido  $S$  aumenta a medida que se incrementa el número de subcuadrados.

Con la ayuda del software se obtuvo las siguientes aproximaciones:

$$V = \iint_D (36 - x^2 - y^2) dA \approx 402,7648$$

$$V = \iint_D (36 - x^2 - y^2) dA \approx 405,077248$$

### EJEMPLO 1.3

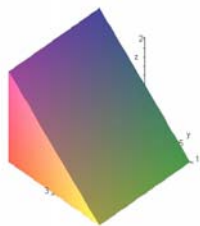


Figura 1.16

Sólido del ejemplo 1.3

Sea  $S$  el sólido que se encuentra arriba del cuadrado  $D = [0, 3] \times [-1, 1]$  y bajo el plano de ecuación  $z = 1 - y$ . Estime el volumen del sólido considerando:

- $n = 3$ ,  $m = 2$  y el punto de muestra como el punto medio de cada subrectángulo.
- $n = 6$ ,  $m = 8$  y el punto de muestra como el punto medio de cada subrectángulo.

### Solución:

- Sea  $V$  el volumen del sólido debajo de la superficie  $z = 1 - y$  y arriba del rectángulo  $D$ .

La región  $D$  y su partición se muestran en la siguiente figura

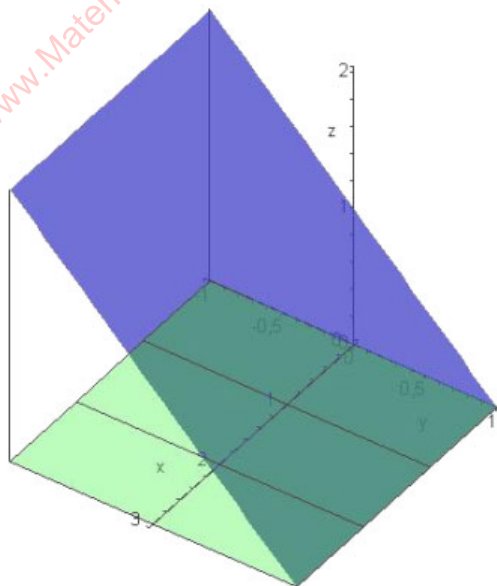


Figura 1.17

Partición empleada para el ejemplo 1.3 parte a

Si  $m=2$  y  $n=3$ ,

entonces

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\Delta y = \frac{d-c}{m} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

$$\Delta A_{ij} = (\Delta x)(\Delta y) = 1$$

$$y_{j-1} = y_0 + (j-1)\Delta y = j-2$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y = -1+j$$

Entonces se desea estimar a  $V$  de la siguiente manera:

$$V = \iint_D (1-y) dA \approx \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}, \text{ donde } (x_i^*, y_j^*) \text{ es el punto}$$

medio de cada subrectángulo, entonces se tiene:

$$f(x_i^*, y_j^*) = 1 - y_j^* = 1 - \left(\frac{2j-3}{2}\right) = \frac{5}{2} - j$$

Luego, la aproximación del volumen es:

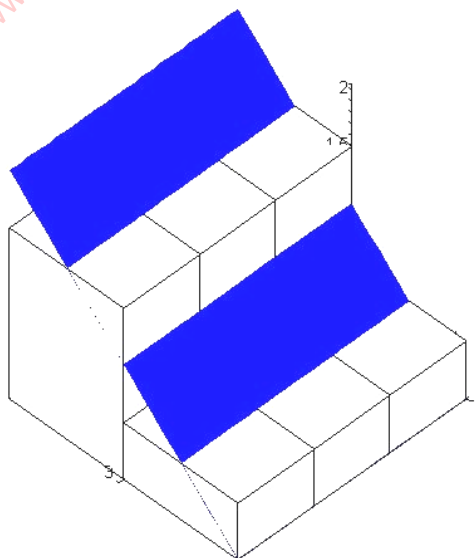
$$V \approx \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{5}{2} - j\right)(1) = \sum_{i=1}^3 2 = 6$$

$$V = \iint_D (1-y) dA \approx 6$$

En la figura 1.18, se observa la superficie definida por la función  $f$  y la aproximación del volumen.

En el **ejemplo 1.3 parte**

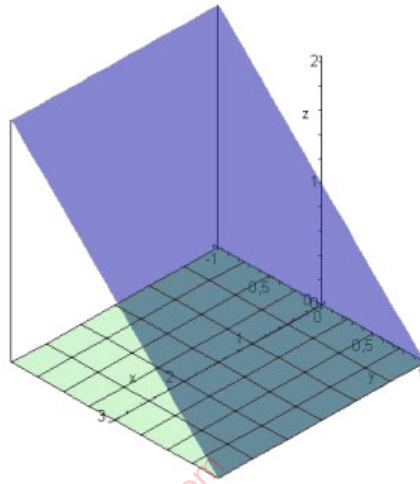
**a**, en la aproximación del volumen, se observa que la gráfica de la función  $f$  atraviesa a los paralelepípedos, por lo cual no se puede asegurar si la aproximación es por exceso o por defecto.



**Figura 1.18**

**Aproximación del volumen para el ejemplo 1.3 parte a**

- b) Se desea estimar el volumen  $V$  pero ahora con una partición refinada, donde  $n = 6$  y  $m = 8$ . En la figura 1.19 se aprecia esta partición.



**Figura 1.19**

**Partición empleada para el ejemplo 1.3 parte b**

Si  $n = 6$  y  $m = 8$   
entonces

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta y = \frac{d-c}{m} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{8}$$

$V = \iint_D (1-y) dA \approx \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$ , donde  $(x_i^*, y_j^*)$  sigue siendo el punto medio de cada subrectángulo, pero como la partición es más fina, entonces:

$$f(x_i^*, y_j^*) = 1 - y_j^* = 1 - \left( \frac{2j-9}{8} \right) = \frac{17}{8} - \frac{j}{4}$$

Entonces el volumen aproximado es:

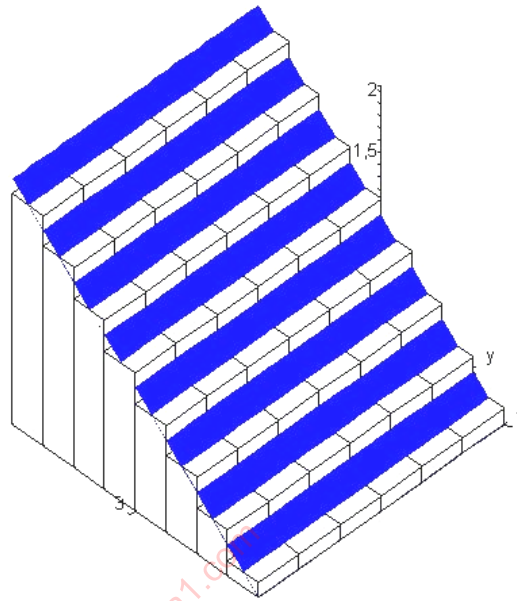
$$V \approx \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^8 \left( \frac{17}{8} - \frac{j}{4} \right) \left( \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^6 8 = 6$$

$$V = \iint_D (1-y) dA \approx 6$$

$$y_{j-1} = y_0 + (j-1)\Delta y = \frac{j-5}{4}$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y = \frac{j-4}{4}$$

En la figura 1.20 se aprecia la aproximación del volumen del sólido  $S$  empleando la partición más refinada.



**Figura 1.20**  
**Aproximación del volumen para el ejemplo 1.3 parte b**

## 1.4 INTEGRALES ITERADAS

### Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Si  $f$  es una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y si  $F$  es una antiderivada de  $f$ , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Para evaluar una integral definida en un intervalo cerrado se tienen dos alternativas: la definición, donde se emplean fórmulas y propiedades de la notación sigma y además, la resolución de un límite; la otra opción para resolver una integral definida de una función real de variable real, es el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el cual consiste en encontrar una antiderivada y evaluarla en los extremos del intervalo de integración. El primer método, la definición como el límite de una suma suele ser un procedimiento más riguroso en comparación con el segundo.

Análogamente, la resolución de una integral doble por definición es un cálculo muy complejo, ya que es el resultado del límite de una doble suma de Riemann.

A continuación se expone un método que consiste en expresar una integral doble como una integral iterada, lo cual implica la evaluación sucesiva de dos integrales simples.

### DEFINICIÓN: La Integral Iterada

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función real y continua de dos variables, definida en la región rectangular  $D = [a, b] \times [c, d]$ . La integral iterada de la función  $f$  sobre  $D$ , denotada por

$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$  ó  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ , se define como:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (\text{I.20})$$

O también

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (\text{I.21})$$

Recuerde que en la integral  $\int_a^b f(x,y)dx$ , la

$dx$  indica que la variable de integración es  $x$ , por lo tanto la variable  $y$  se considera constante en esta integral. Esto se conoce como integración parcial con respecto a  $x$

Entonces para resolver  $\int_c^d f(x,y)dy$  se integra parcialmente respecto a la variable  $y$ ; es decir  $x$  es considerada constante.

Entonces, la integral iterada es la evaluación sucesiva de dos integrales simples. En la ecuación (I.20), la integral que debe resolverse primero es la que se encuentra dentro del corchete; es decir,  $\int_a^b f(x,y)dx$ . El resultado de esta integral es una función de  $y$ , ya que  $y$  se considera constante. Tal como se ilustra:

$$\int_a^b f(x,y)dx = A(y) \quad (I.22)$$

Finalmente:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x,y)dx \right] dy = \int_c^d A(y)dy \quad (I.23)$$

En forma análoga, en la expresión (I.21), la integral  $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy dx$  se resuelve primero  $\int_c^d f(x,y)dy$ , resultando una función de  $x$ , como sigue:

$$\int_c^d f(x,y)dy = A(x) \quad (I.24)$$

para luego integrar respecto a  $y$ :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b A(x)dx \quad (I.25)$$

#### EJEMPLO 1.4

Evalúe las siguientes integrales iteradas:

a)  $\int_0^3 \int_0^2 (x^2 + 4y) dx dy$

b)  $\int_0^2 \int_0^3 (x^2 + 4y) dy dx$

c)  $\int_0^4 \int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dx dy$

d)  $\int_0^4 \int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dy dx$

e)  $\int_{-1}^1 \int_0^3 (1-y) dx dy$

f)  $\int_0^3 \int_{-1}^1 (1-y) dy dx$

### Solución:

Recuerde que en el **ejemplo 1.1** se aproximó la integral doble de dos maneras diferentes:

$$V = \iint_D (x^2 + 4y) dA \approx 63$$

$$V = \iint_D (x^2 + 4y) dA \approx 43,5$$

Al comparar estas aproximaciones con el valor de la integral, en efecto se puede comprobar que la primera estimación es por exceso, mientras que la segunda es una mejor aproximación.

a) Para resolver la integral  $\int_0^3 \int_0^2 (x^2 + 4y) dx dy$ , primero se integra parcialmente respecto a  $x$ ,

$$\int_0^2 (x^2 + 4y) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 4xy \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 8y$$

Luego se evalúa la segunda integral

$$\int_0^3 \left( \frac{8}{3} + 8y \right) dy = \left[ \frac{8}{3}y + 4y^2 \right]_0^3 = 8 + 36 = 44$$

Por lo tanto:

$$\int_0^3 \int_0^2 (x^2 + 4y) dx dy = 44$$

b) Se desea resolver  $\int_0^2 \int_0^3 (x^2 + 4y) dy dx$ :

$$\int_0^3 (x^2 + 4y) dy = \left[ x^2 y + 2y^2 \right]_0^3 = 3x^2 + 18$$

$$\int_0^2 (3x^2 + 18) dx = \left[ x^3 + 18x \right]_0^2 = 8 + 36 = 44$$

$$\int_0^2 \int_0^3 (x^2 + 4y) dy dx = 44$$

c) Para resolver la integral  $\int_0^4 \int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dx dy$ , primero se integra parcialmente respecto a  $x$ :

$$\int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dx = \left[ 36x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_0^4 = 144 - \frac{64}{3} - 4y^2 = \frac{368}{3} - 4y^2$$



Recuerde que en el **ejemplo 1.2 parte a** se obtuvo una aproximación por defecto de:

$$V = \iint_D (36 - x^2 - y^2) dA \approx 256$$

Mientras que en la **parte b**, se obtuvo:

$$V \approx 402,7648 \text{ y}$$

$$V \approx 405,077248$$

Al observar el valor real de la integral doble,  $\int_0^4 \int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dx dy = 405, \hat{3}$  se puede concluir que las aproximaciones de la parte b son mejores que la estimación de la parte a.

En el **ejemplo 1.3**, se aproximó la integral doble mediante una doble suma de Riemann con dos particiones diferentes, donde en ambos casos se obtuvo:

$$V = \iint_D (1 - y) dA \approx 6$$

Luego se resuelve la segunda integral, cuya variable es  $y$

$$\int_0^4 \left( \frac{368}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[ \frac{368}{3} y - \frac{4}{3} y^3 \right]_0^4 = \frac{1472}{3} - \frac{256}{3} = \frac{1216}{3} \approx 405, \hat{3}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^4 \int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dx dy = 405, \hat{3}$$

**d) Resolviendo**  $\int_0^4 \int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dy dx$

$$\int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dy = \left[ 36y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^4 = 144 - 4x^2 - \frac{64}{3} = \frac{368}{3} - 4x^2$$

$$\int_0^4 \left( \frac{368}{3} - 4x^2 \right) dx = \left[ \frac{368}{3} x - \frac{4}{3} x^3 \right]_0^4 = \frac{1472}{3} - \frac{256}{3} = 405, \hat{3}$$

$$\int_0^4 \int_0^4 (36 - x^2 - y^2) dy dx = 405, \hat{3}$$

**e) Para resolver la integral**  $\int_{-1}^1 \int_0^3 (1 - y) dx dy$ , primero se integra respecto a  $x$  como sigue:

$$\int_0^3 (1 - y) dx = \left[ (1 - y)x \right]_0^3 = 3(1 - y)$$

Seguidamente se resuelve la integral:

$$\int_{-1}^1 [3(1 - y)] dy = -\frac{3}{2} [1 - y]^2 \Big|_{-1}^1 = 6$$

Es decir:

$$\int_{-1}^1 \int_0^3 (1-y) dx dy = 6$$

f) Ahora se resuelve  $\int_0^3 \int_{-1}^1 (1-y) dy dx$  en el orden de integración inverso, primero respecto a la variable  $x$ :

$$\int_{-1}^1 (1-y) dx = \left[ y - \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left[ \frac{1}{2} - \left( -\frac{3}{2} \right) \right] = 2$$

Ahora respecto a la variable  $y$ :

$$\int_0^3 2 dx = 6$$

$$\int_0^3 \int_{-1}^1 (1-y) dy dx = 6$$

## 1.5 TEOREMA DE FUBINI

El nombre de Teorema de Fubini se debe al matemático italiano:

**Guido Fubini**

(1879, 1943).



También resaltó por sus contribuciones en los campos de geometría diferencial, ecuaciones diferenciales, funciones analíticas y funciones de varias variables.

El principio de Cavalieri se debe al matemático italiano

**Bonaventura  
Francesco Cavalieri**

(1598, 1647).



Célebre por introducir en Italia el cálculo logarítmico y por su teoría de *indivisibles*, la cual es el principio del cálculo de una integral definida pero sin la rigurosidad moderna del límite.

El siguiente teorema proporciona un método práctico para evaluar una integral doble expresándola como una integral iterada

### TEOREMA de Fubini para Integrales Dobles

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función real y continua en el rectángulo  $D = [a, b] \times [c, d]$ , entonces:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad (\text{I.25})$$

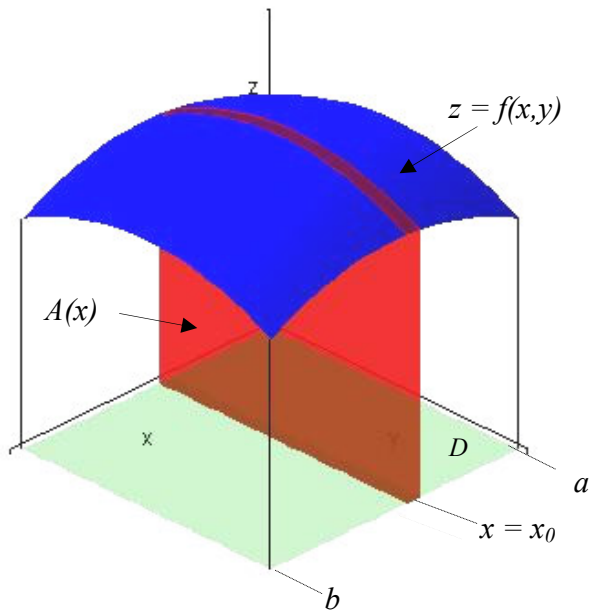
### Demostración intuitiva:

Considere que la función  $f$  es positiva, es decir,  $f(x, y) \geq 0$ , por lo cual la integral doble  $\iint_D f(x, y) dA$  representa el volumen del sólido  $S$  que se encuentra arriba del rectángulo  $D$  y por debajo de la superficie definida por  $z = f(x, y)$ .

El volumen del sólido  $S$  también puede ser calculado empleando el principio de Cavalieri, donde el volumen de secciones transversales conocidas se calcula mediante una integral simple.

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad (\text{I.26})$$

En la figura 1.21 se ilustra una sección transversal del sólido  $S$ .



**Figura 1.21**  
**Interpretación geométrica del Teorema de Fubini**

donde  $A(x)$  es el área de la sección transversal del sólido  $S$  que es perpendicular al eje  $x$  y al plano  $xy$ , entonces  $A(x)$  se puede obtener como:

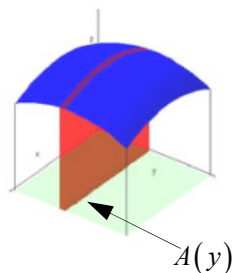
$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (I.27)$$

Sustituyendo la ecuación (I.27) en (I.26), se obtiene:

$$V = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad (I.28)$$

En forma análoga, el volumen del sólido  $S$  se puede obtener como:

$$V = \int_c^d A(y) dy \quad (I.29)$$



**Figura 1.22**

Interpretación  
geométrica del  
teorema de Fubini

$A(y)$  es el área de la  
sección transversal del  
sólido  $S$  que es  
perpendicular al eje  $y$  y al  
plano  $xy$ .

donde  $A(y)$  es el área de la sección transversal del sólido  $S$  que es perpendicular al eje  $y$  y al plano  $xy$ , como se ilustra en la figura 1.22; es decir:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (I.30)$$

Al sustituir la expresión de  $A(y)$  en la ecuación (I.29) se tiene:

$$V = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad (I.31)$$

Finalmente, se concluye que la integral doble de  $f$  sobre  $D$  es igual a la integral iterada de la función  $f$ ; es decir:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad (I.32)$$

## 1.6 INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES MÁS GENERALES

En esta sección se amplía la definición de la integral doble de una función  $f$ , sobre regiones más generales que rectángulos, para posteriormente explicar cómo se resuelven este tipo de integrales.

En la figura 1.23 se presenta una región  $D$  de una forma más general.

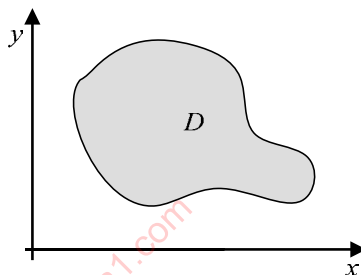


Figura 1.23

Región  $D$  con una forma más general

Entre las regiones más generales se tienen las de tipo 1 y las de tipo 2.

### DEFINICIÓN: Regiones de Tipo 1

Sean  $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dos funciones reales de variable real, continuas en  $[a, b]$ , de modo que  $g(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b]$ .

Una región de tipo 1, es una región definida como:

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x) \} \quad (\text{I.33})$$

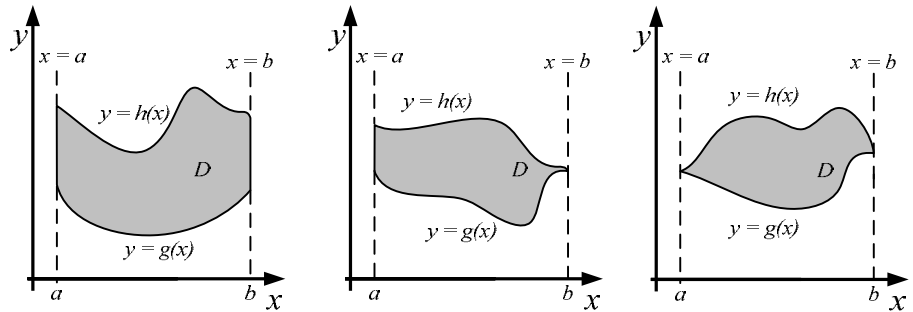
Como las funciones  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$ , entonces son acotadas, por lo cual la región  $D$  del tipo 1 es una región acotada del plano.

En otras palabras, la región  $D$  está limitada por la izquierda por la recta  $x = a$ , por la derecha por la recta  $x = b$ , inferiormente por la

gráfica de la función  $g$  y superiormente por la gráfica de la función  $h$ .

En la figura 1.24 se observan algunas regiones de tipo 1.

En una región de tipo 1 ó de tipo 2, las curvas y segmentos de rectas que limitan a la región  $D$ , constituyen la frontera de  $D$  y se denota como  $\partial D$ .



**Figura 1.24**

**Regiones de tipo 1**

### DEFINICIÓN: Regiones de Tipo 2

Sean  $g, h: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , dos funciones reales de variable real, continuas en  $[c, d]$ , de modo que  $g(y) \leq h(y), \forall y \in [c, d]$ .

Una región de tipo 2, es una región definida como:

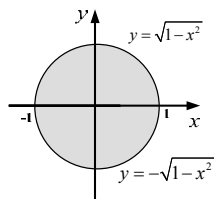
$$D = \{ (x, y) \mid g(y) \leq x \leq h(y) \wedge c \leq y \leq d \} \quad (I.34)$$

Entonces toda región  $D$  está limitada por la izquierda por la gráfica de la función  $g$ , por la derecha por la gráfica de la función  $h$ , y superior e inferiormente por las rectas  $y=d$  y  $y=c$ , respectivamente.

En la figura 1.25 se aprecian algunas regiones de tipo 2.

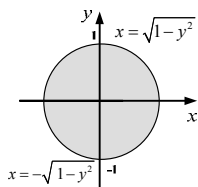
Algunas regiones pueden ser del tipo 1 del tipo 2 simultáneamente, a estas regiones se les clasifica como de tipo 3.

Ejemplo:



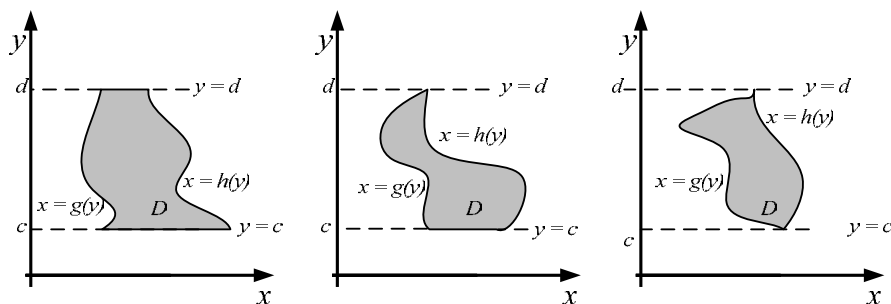
**Figura 1.26**

El círculo unitario como una región tipo 1



**Figura 1.27**

El círculo unitario como una región tipo 2



**Figura 1.25**

**Regiones de tipo 2**

Una vez explicadas las regiones de tipo 1 y de tipo 2, se presenta la siguiente definición:

### DEFINICIÓN: Integrales dobles sobre regiones generales

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función real y continua de dos variables, definida en una región general  $D$ .

Sea  $R$  un rectángulo que contiene a la región  $D$ .

Sea  $F$  una función definida en el rectángulo  $R$  como:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \wedge (x, y) \in R \end{cases} \quad (I.35)$$

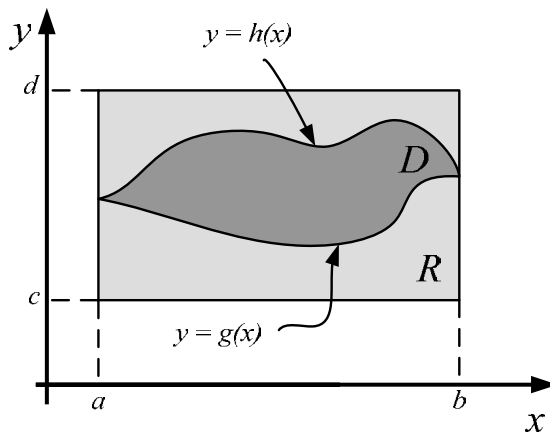
La integral doble de  $f$  sobre  $D$ , denotada  $\iint_D f(x, y) dA$ , está dada por:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA \quad (I.36)$$

Ahora bien, para resolver la integral  $\iint_D f(x, y) dA$ , se debe identificar si la región  $D$  es de tipo 1 o de tipo 2.



Si la región  $D$  es de tipo 1, se debe seleccionar un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  que contenga a  $D$ , tal como se ilustra en la siguiente figura.



**Figura 1.28**

**Rectángulo  $R$  que contiene a la región  $D$  de tipo 1**

Luego, como  $\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA$ , por el teorema de Fubini resulta:

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx \quad (I.37)$$

Y según la definición de la función  $F$ , se tiene que  $F(x, y) = 0$  si  $y < g(x) \vee y > h(x)$ , entonces:

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g(x)}^{h(x)} F(x, y) dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \quad (I.38)$$

Por lo que se puede definir la integral doble sobre una región de tipo 1 de la siguiente manera:

**DEFINICIÓN: Integrales dobles sobre regiones de tipo 1**

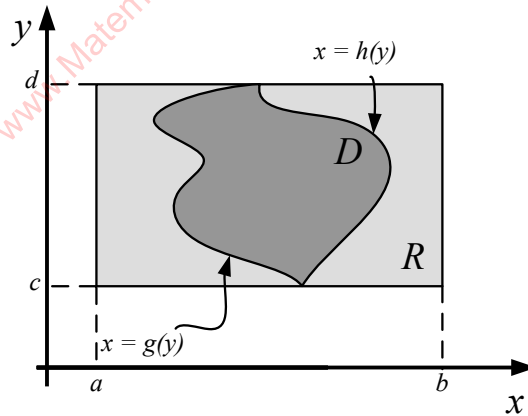
Sea  $f$  una función real y continua de dos variables, definida en una región  $D$  del tipo 1, tal que

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x) \} \quad (\text{I.39})$$

La integral doble de  $f$  sobre una región  $D$  de tipo 1, denotada  $\iint_D f(x, y) dA$ , está dada por:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx \quad (\text{I.40})$$

Si por el contrario, la región  $D$  es de tipo 2, se debe seleccionar un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  que contenga a  $D$ , tal como se muestra en la figura 1.29.



**Figura 1.29**

**Rectángulo  $R$  que contiene a la región  $D$  de tipo 2**

Como  $\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA$ , por el teorema de Fubini se tiene:

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b F(x, y) dx dy \quad (\text{I.41})$$

donde  $F(x, y) = 0$  si  $x < g(y) \vee x > h(y)$ , entonces:

$$\int_a^b F(x, y) dx = \int_{g(y)}^{h(y)} F(x, y) dx = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \quad (I.42)$$

La integral doble sobre una región del tipo 2 se puede definir como:

**DEFINICIÓN: Integrales dobles sobre regiones de tipo 2**

Sea  $f$  una función real y continua de dos variables, definida en una región  $D$  del tipo 2, tal que

$$D = \{ (x, y) \mid g(y) \leq x \leq h(y) \wedge c \leq y \leq d \} \quad (I.43)$$

La integral doble de  $f$  sobre una región  $D$  de tipo 2, denotada

$\iint_D f(x, y) dA$ , está dada por:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy \quad (I.44)$$

**COMENTARIO**

De ahora en adelante, para indicar el orden de integración y para una mejor visualización de los límites de integración, se emplearán unas flechas, sobre la gráfica de la región  $D$ , que indicarán el valor inicial y final de la variable de acuerdo a la entrada y salida de la flecha, respectivamente.

En una región de tipo 1, la integral doble de la función  $f$  se

obtiene como  $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$ , de acuerdo a la ecuación (I.40),

esta integral indica que la primera integración se realiza respecto a la variable  $y$ , por lo cual se indicará sobre la región  $D$  como se ilustra en la siguiente figura:

↑ : Indica cual es el valor de la variable  $y$  a la salida de la región  $D$  (límite superior).

↓ : Indica cual es el valor de la variable  $y$  a la entrada de la región  $D$  (límite inferior).

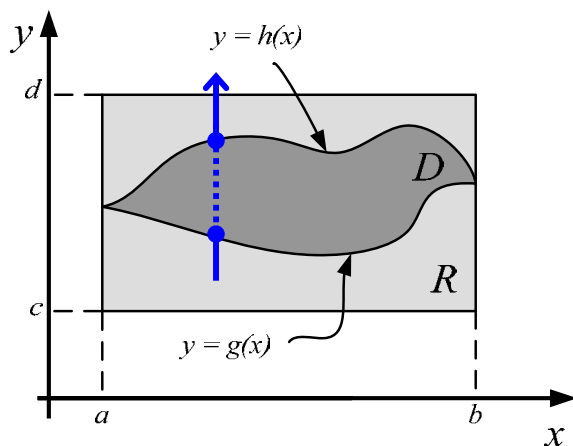


Figura 1.30

Orden de integración para la integral doble de  $f$  sobre una región tipo 1

Por otra parte, la ecuación (1.44) señala que en una región de tipo 2, la integral doble de la función  $f$  se obtiene como

$$\int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy, \text{ lo que indica que la primera integración se}$$

realiza respecto a la variable  $x$ , por lo cual se señalará sobre la región  $D$  como se muestra a continuación:

→ : Indica cual es el valor de la variable  $x$  a la salida de la región  $D$  (límite superior).

← : Indica cual es el valor de la variable  $x$  a la entrada de la región  $D$  (límite inferior).

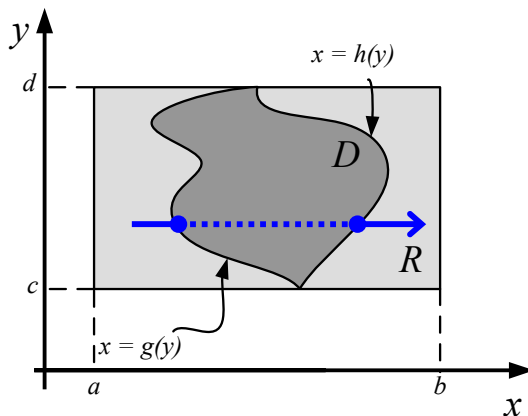


Figura 1.31

Orden de integración para la integral doble de  $f$  sobre una región tipo 2

**EJEMPLO 1.5**

Evalúe las siguientes integrales iteradas, dibuje la región  $D$  determinada por los límites de integración e indique cuales regiones son del tipo 1, del tipo 2 o de ambos.

$$\text{a) } \int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx$$

$$\text{b) } \int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx$$

$$\text{c) } \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy$$

$$\text{d) } \int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} dx dy$$

**Solución:**

a) Para resolver la integral  $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx$ , se evalúa primero la integral interna, pero a diferencia del ejemplo 1.4 de aquí en adelante se mantendrá la integral externa, como sigue:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx = \int_0^1 \left[ \int_0^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ y \Big|_0^{x^2} \right] dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

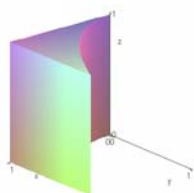
$$\boxed{\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx = \frac{1}{3}}$$

La región  $D$  de este ejercicio es de tipo 1 y de tipo 2, ya que se puede definir como:

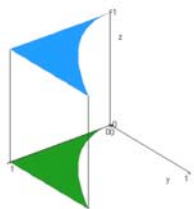
$$\text{Región tipo 1: } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$\text{Región tipo 2: } D = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

La gráfica de la región  $D$ , junto con el orden de integración se muestra en la siguiente figura:

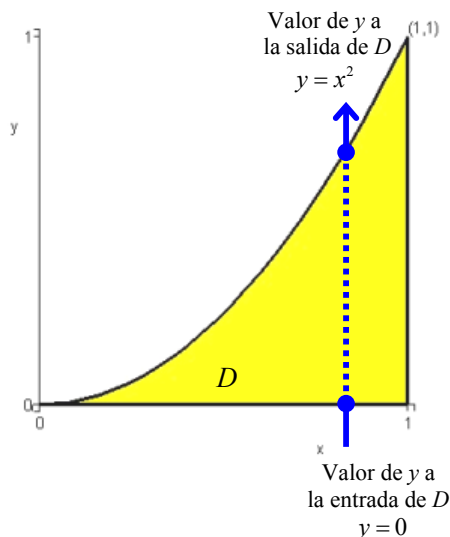


**Figura 1.32**  
Sólido del ejemplo 1.5  
parte a



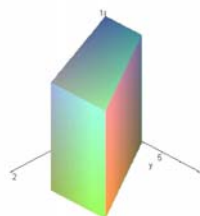
**Figura 1.33**  
Función  $f$  definida en  
la región  $D$  del  
ejemplo 1.5 parte a

En el **ejemplo 1.5 a** la integral  $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx = \frac{1}{3}$ , lo cual quiere decir que el sólido definido sobre  $D$  bajo la gráfica de  $f$ , tiene como volumen  $\frac{1}{3}$  (UL)<sup>3</sup>, donde UL son  $\frac{1}{3}$  unidades de longitud.

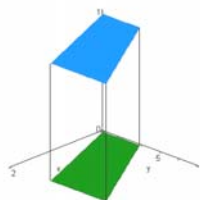


**Figura 1.34**

**Región  $D$  del ejemplo 1.5 a**



**Figura 1.35**  
Sólido del ejemplo 1.5 parte b



**Figura 1.36**  
Función  $f$  definida en la región  $D$  del ejemplo 1.5 parte b

b) Se desea resolver la integral  $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx$

$$\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx = \int_1^2 \left[ \int_{2x}^{3x+1} dy \right] dx = \int_1^2 \left[ y \right]_{2x}^{3x+1} dx = \int_1^2 (x+1) dx$$

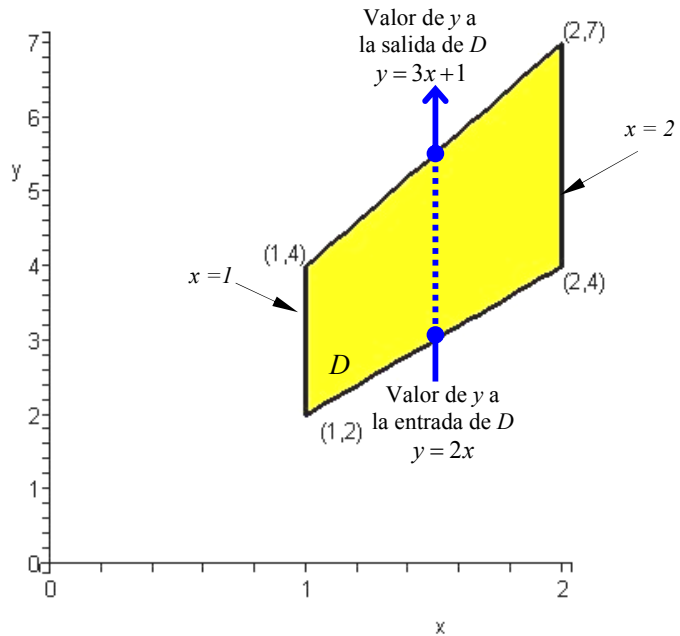
$$\int_1^2 (x+1) dx = \frac{(x+1)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx = \frac{5}{2}}$$

La región  $D$  es una región de tipo 1, definida como:

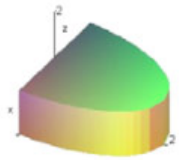
$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge 2x \leq y \leq 3x+1\}$$

La gráfica de la región  $D$  se muestra en la siguiente figura

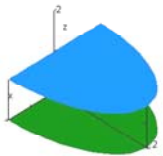


**Figura 1.37**

**Región  $D$  del ejemplo 1.5 b**



**Figura 1.38**  
Sólido del ejemplo 1.5 parte c



**Figura 1.39**  
Función  $f$  definida en  
la región  $D$  del  
ejemplo 1.5 parte c

c) Resolviendo la integral doble  $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy$ , se tiene:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy = \int_0^2 \left[ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \right] dy = \int_0^2 \left[ x \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy = 2 \int_0^2 \sqrt{4-y^2} dy$$

Esta integral se resuelve empleando una sustitución trigonométrica:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy = 2 \int_0^2 \sqrt{4-y^2} dy = 4 \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} dy$$

Al sustituir el cambio de variable se tiene:

**CV: Cambio de Variable**

$$\frac{y}{2} = \operatorname{sen} \theta$$

$$dy = 2 \cos \theta d\theta$$

**CLI:** Cambio de los límites de integración

**LI:**

$$y = 0 \rightarrow \theta = \operatorname{arcsen} 0 = 0$$

**LS:**

$$y = 2 \rightarrow \theta = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\operatorname{sen} \theta)^2} 2 \cos \theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = 4 \left[ \theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy = 2\pi$$

La región  $D$  del ejemplo 1.5 c es de tipo 1 y de tipo 2, ya que se puede definir como:

De radio = 2 y altura = 1 por lo tanto se puede calcular su volumen como:

$$V = \frac{\pi(2)^2(1)}{2} = 2\pi$$

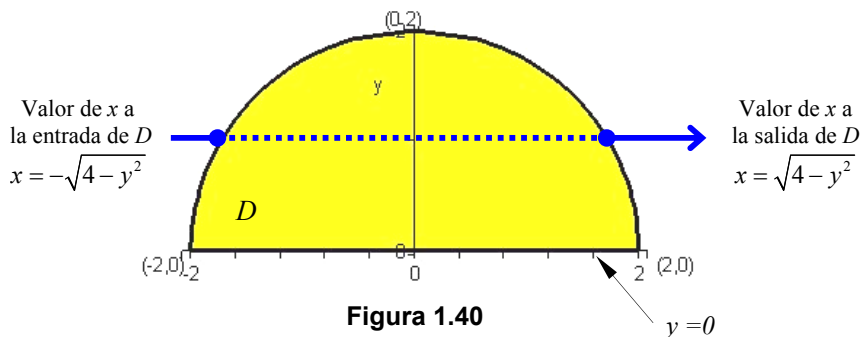
lo que coincide con la integral:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy = 2\pi$$

$$\text{Región tipo 1: } D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$$\text{Región tipo 2: } D = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 2\}$$

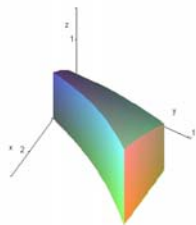
La gráfica de la región  $D$  se muestra en la siguiente figura:



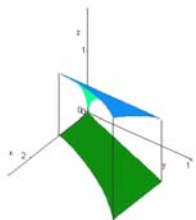
**Figura 1.40**

**Región  $D$  del ejemplo 1.5 c**





**Figura 1.41**  
Sólido del ejemplo 1.5  
parte d



**Figura 1.42**  
Función  $f$  definida en  
la región  $D$  del  
ejemplo 1.5 parte d

d) La integral  $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} dx dy$  es diferente a las tres partes anteriores, ya que la función integrando es diferente a la unidad.

$$\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} dx dy = \int_0^1 \left[ \int_y^{e^y} \sqrt{x} dx \right] dy = \int_0^1 \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_y^{e^y} dy = \int_0^1 \frac{2}{3} \left[ e^{3y/2} - y^{3/2} \right] dy$$

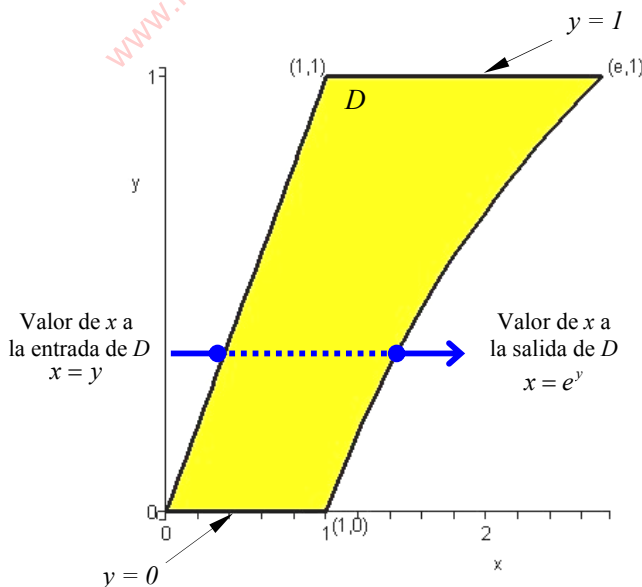
$$\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} dx dy = \frac{2}{3} \left[ \frac{2}{3} e^{3y/2} - \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{2}{3} e^{3/2} - \frac{2}{5} \right) - \frac{2}{3} \right] = \frac{4}{9} e^{3/2} - \frac{32}{45}$$

$$\boxed{\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} dx dy = \frac{4}{9} e^{3/2} - \frac{32}{45}}$$

La región  $D$  es una región de tipo 2, definida como:

$$D = \{(x, y) \mid y \leq x \leq e^y \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

La gráfica de la región  $D$  se muestra en la siguiente figura:



**Figura 1.43**

Región  $D$  del ejemplo 1.5 d

## 1.7 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE

A continuación se presentan las propiedades de la integral doble de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  real de dos variables sobre una región general  $D$ .

### 1.7.1 Propiedad de linealidad

Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones reales y continuas definidas en una región  $D$ , y sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos números reales cualesquiera, entonces:

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dA = \iint_D [\alpha f(x, y)] dA + \iint_D [\beta g(x, y)] dA \quad (\text{I.45})$$

### 1.7.2 Propiedad de orden

Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones reales y continuas definidas en una región  $D$ , tales que  $f(x, y) \geq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$ , entonces:

$$\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA \quad (\text{I.46})$$

### 1.7.3 Propiedad aditiva respecto a la región de integración

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función real y continua definida en una región general  $D$ . Si la región  $D$  está dividida en dos subregiones  $D_1$  y  $D_2$  (es decir  $D = D_1 \cup D_2$ ), entonces:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA \quad (\text{I.47})$$

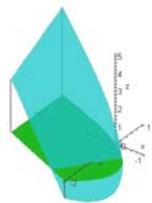
**EJEMPLO 1.6**

Evalúe la siguiente integral doble y dibuje la región  $D$ .

$$\iint_D (x+y+1) dA, \quad D = \left\{ (x,y) \mid y \geq x^2 + 2x \quad \wedge \quad y \leq 3 \quad \wedge \quad y \leq 3x+6 \right\}$$

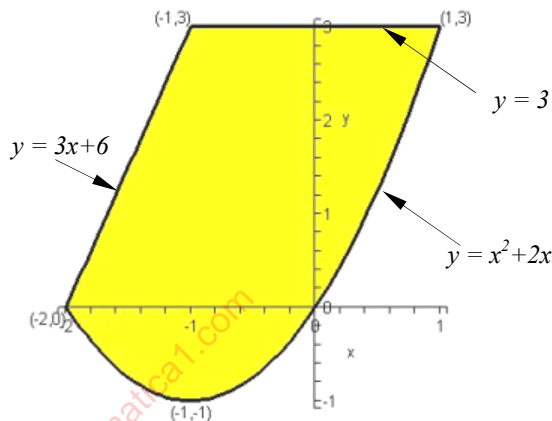
**Solución:**

El primer paso para resolver este ejercicio es identificar si la región  $D$  es tipo 1 o tipo 2. En la siguiente figura se muestra la región  $D$ .

**Figura 1.44**

Función  $f$  definida en la región  $D$  del ejemplo 1.6

Nótese como en este ejemplo la función  $f$  no es estrictamente positiva.

**Figura 1.45**

Región  $D$  del ejemplo 1.6

La región  $D$  de este ejemplo no es de tipo 1, ni de tipo 2, por lo tanto, para evaluar la integral doble pedida, se empleará la propiedad señalada en la ecuación (I.47).

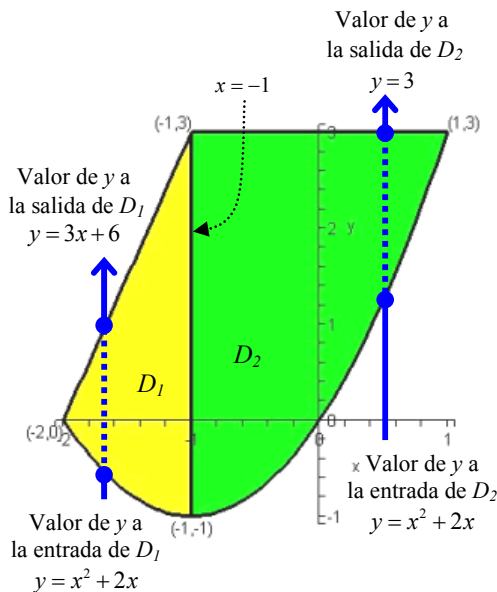
Para este ejemplo, se tienen dos alternativas: dividir a la región  $D$  en dos subregiones tipo 1 o dividirla en dos subregiones tipo 2. A continuación se analizan ambas situaciones.

i) Cuando la región  $D$  es dividida por la recta  $x = -1$ , se obtienen dos subregiones de tipo 1; es decir,  $D = D_1 \cup D_2$ , donde:

$$D_1 = \left\{ (x,y) \mid -2 \leq x \leq -1 \quad \wedge \quad x^2 + 2x \leq y \leq 3x+6 \right\} \text{ y}$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) \mid -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad x^2 + 2x \leq y \leq 3 \right\}$$

En la figura 1.46 se aprecia la región  $D$  dividida en dos regiones tipo 1.



**Figura 1.46**

**Región  $D$  del ejemplo 1.6 dividida en dos regiones tipo 1**

Por lo tanto:

$$I = \iint_D (x + y + 1) dA = \int_{-2}^{-1} \int_{x^2+2x}^{3x+6} (x + y + 1) dy dx + \int_{-1}^1 \int_{x^2+2x}^3 (x + y + 1) dy dx$$

$$I = \int_{-2}^{-1} \left( -24 - \frac{x^4}{2} - 3x^3 + \frac{5x^2}{2} + 25x \right) dx + \int_{-1}^1 \left( \frac{15}{2} - \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 5x^2 + x \right) dx$$

$$I = \frac{29}{60} + \frac{172}{15}$$

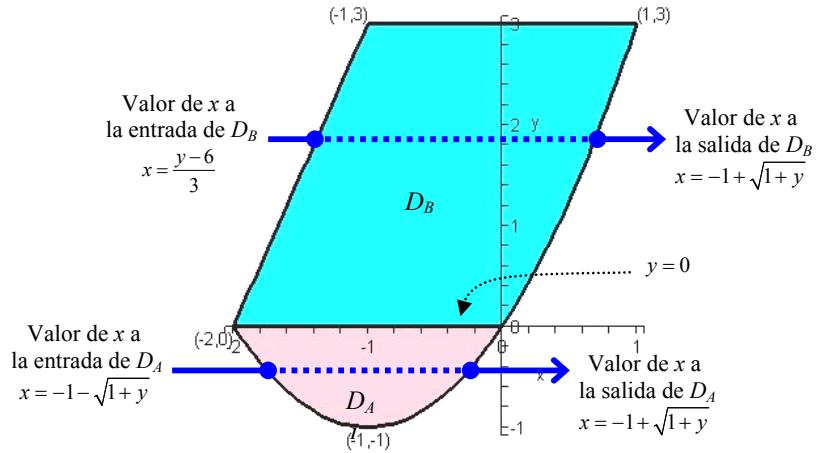
$$I = \iint_D (x + y + 1) dA = \frac{239}{20}$$

ii) Cuando se traza la recta  $y = 0$ , la región  $D$  se divide en dos subregiones de tipo 2; es decir,  $D = D_A \cup D_B$ , donde:

$$D_A = \left\{ (x, y) \mid -1 - \sqrt{1+y} \leq x \leq -1 + \sqrt{1+y} \wedge -1 \leq y \leq 0 \right\} \text{ y}$$

$$D_B = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-6}{3} \leq x \leq -1 + \sqrt{1+y} \wedge 0 \leq y \leq 3 \right\}$$

La figura 1.47 muestra la región  $D$  dividida en dos regiones tipo 2.



**Figura 1.47**

**Región  $D$  del ejemplo 1.6 dividida en dos regiones tipo 2**

Entonces, siendo  $I = \iint_D (x + y + 1) dA$ , se tiene que:

$$I = \int_{-1}^0 \int_{-1-\sqrt{1+y}}^{-1+\sqrt{1+y}} (x + y + 1) dx dy + \int_0^3 \int_{\frac{y-6}{3}}^{-1+\sqrt{1+y}} (x + y + 1) dx dy$$

Resolviendo se obtiene  $I = -\frac{8}{15} + \frac{749}{60}$ , luego:

$$I = \iint_D (x + y + 1) dA = \frac{239}{20}$$

### EJEMPLO 1.7

Evalúe la siguiente integral doble y dibuje la región  $D$ .

$$\iint_D (10 + 4x^2 - y) dA, \quad D = \{ (x, y) \mid |y - x| \leq 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

#### Solución:

Tal como se explicó en los ejemplos anteriores, el primer paso para resolver la integral doble planteada consiste en clasificar a la región  $D$  en una región de tipo 1 o tipo 2. Para ello se deben estudiar las inecuaciones que definen a la región  $D$ .

La solución de la inecuación  $|y - x| \leq 2$  es la intersección de las inecuaciones:

i)  $y - x \leq 2$  (si  $y \geq x$ )

ii)  $x - y \leq 2$  (si  $y < x$ )

La solución de la inecuación  $x^2 + y^2 \leq 4$  es el conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  que se encuentran dentro y sobre la circunferencia de radio 2 y con centro en el origen del sistema de coordenadas.

La región  $D$  del ejemplo 1.7 se muestra en la figura 1.49

Según la definición del valor absoluto:

$$|y - x| = \begin{cases} y - x & \text{si } y \geq x \\ x - y & \text{si } y < x \end{cases}$$

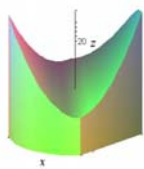


Figura 1.48

Función  $f$  definida en la región  $D$  del ejemplo 1.7

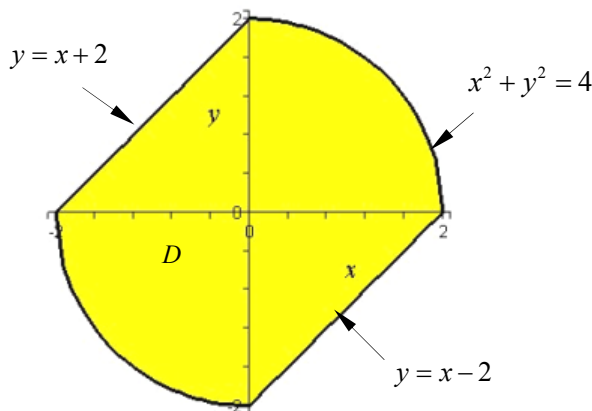
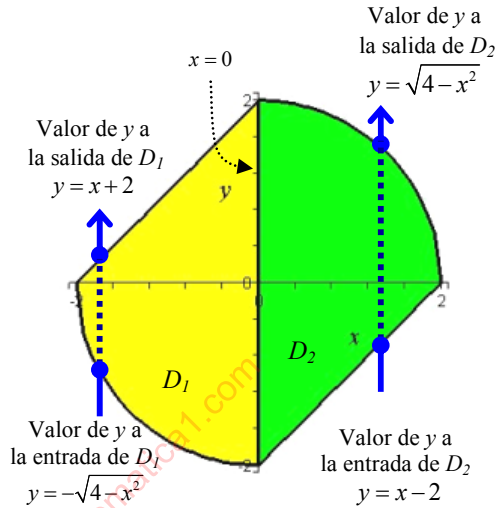


Figura 1.49

Región  $D$  del ejemplo 1.7

En la figura anterior se apreciaba que la región  $D$  no es de tipo 1, ni de tipo 2, por lo tanto, para evaluar la integral doble pedida, se emplea la propiedad aditiva respecto a la región de integración, señalada en 1.7.3. Por lo que la región  $D$  se divide en dos regiones tipo 1, esto es:  $D = D_1 \cup D_2$ , las cuales se detallan en la figura 1.50.



**Figura 1.50**

**Región  $D$  del ejemplo 1.7 dividida en dos regiones tipo 1**

Donde:  $D_1 = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 0 \wedge -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq x+2\}$  y

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge x-2 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

Por lo tanto:

$$I = \iint_D (10 + 4x^2 - y) dA = \iint_{D_1} (10 + 4x^2 - y) dA + \iint_{D_2} (10 + 4x^2 - y) dA$$

$$I = \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x+2} (10 + 4x^2 - y) dy dx + \int_0^2 \int_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} (10 + 4x^2 - y) dy dx$$

$$I = \int_{-2}^0 \left( 8x + 20 + 10\sqrt{4-x^2} + 4x^3 + 7x^2 + 4x^2\sqrt{4-x^2} \right) dx + \\ + \int_0^2 \left( -12x + 20 + 10\sqrt{4-x^2} - 4x^3 + 9x^2 + 4x^2\sqrt{4-x^2} \right) dx$$

$$I = \left(14\pi + \frac{80}{3}\right) + (14\pi + 24)$$

$$\iint_D (10 + 4x^2 - y) dA = 28\pi + \frac{152}{3}$$

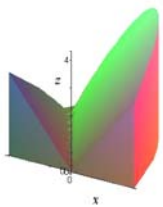
### EJEMPLO 1.8

Evalúe la siguiente integral doble y dibuje la región  $D$ .

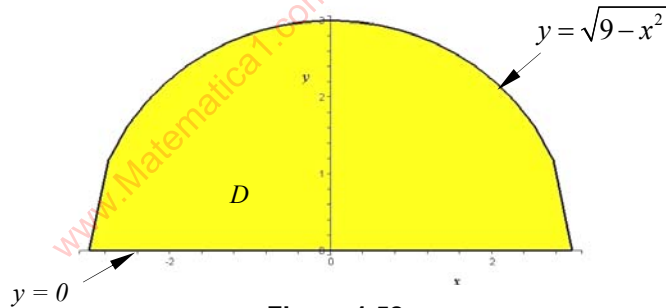
$$\iint_D |x+y| dA, \quad D = \{(x,y) \mid y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$$

**Solución:**

La región  $D$  es una región tipo 1 tal como se muestra en la siguiente figura.



**Figura 1.51**  
Función  $f$  definida en  
la región  $D$  del  
ejemplo 1.8



**Figura 1.52**

**Región  $D$  del ejemplo 1.8**

Sin embargo, como la función integrando es un valor absoluto, también llamado módulo, se tiene que:

$$f(x,y) = |x+y| = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y \geq 0 \\ -(x+y) & \text{si } x+y < 0 \end{cases}$$

A continuación se debe verificar si existe intersección entre la región y las inequaciones  $x+y \geq 0$  y  $x+y < 0$ . Este resultado se muestra en la figura siguiente.





**Intersección de la región  $D$  con las inecuaciones  $x+y \geq 0$  y  $x+y < 0$**

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{si } (x,y)\in D_1 \\ -(x+y) & \text{si } (x,y)\in D_2 \end{cases}$$
$$D_2 = \{ (x, y) \mid y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x + y < 0 \}$$
$$I = \iint_D |x + y| dA = \iint_{D_1} (x + y) dA + \iint_{D_2} [-(x + y)] dA$$

Diagrama de un dominio  $D$  en el plano  $xy$ , dividido en  $D_{1,A}$  (verde) y  $D_{1,B}$  (azul). El dominio está limitado por la curva  $y = \sqrt{9-x^2}$  y la línea  $x=0$ .

Para  $D_{1,A}$  (verde):

- Valor de  $y$  a la salida de  $D_{1,A}$ :  $y = \sqrt{9-x^2}$
- Valor de  $y$  a la entrada de  $D_{1,A}$ :  $y = -x$

Para  $D_{1,B}$  (azul):

- Valor de  $y$  a la salida de  $D_{1,B}$ :  $y = \sqrt{9-x^2}$
- Valor de  $y$  a la entrada de  $D_{1,B}$ :  $y = 0$

**Figura 1.54**

### Región $D_1$ del ejemplo 1.8

En la figura 1.54, se tiene que:

$$D_1 = D_{1,A} \cup D_{1,B}$$

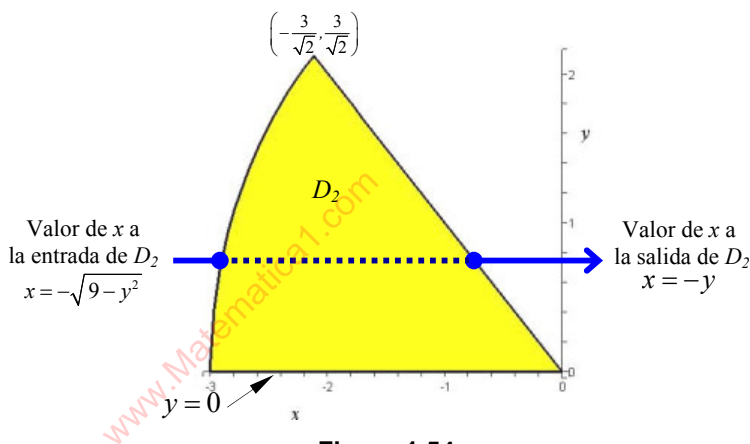
Entonces:

$$\iint_{D_1} (x+y) dA = \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^0 \int_{-x}^{\sqrt{9-x^2}} (x+y) dy dx + \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x+y) dy dx$$

$$\iint_{D_1} (x+y) dA = \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^0 \left( x\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \right) dx + \int_0^3 \left( x\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$\iint_{D_1} (x+y) dA = (9\sqrt{2} - 9) + 18$$

Ahora para la región  $D_2$ :



**Figura 1.54**

**Región  $D_2$  del ejemplo 1.8**

Así:

$$\iint_{D_2} [-(x+y)] dA = -\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-y} (x+y) dx dy = -\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left( \frac{9}{2} - y\sqrt{9-y^2} \right) dy$$

$$\iint_{D_2} [-(x+y)] dA = 9\sqrt{2} - 9$$

Por lo tanto

$$I = \iint_D |x+y| dA = 18\sqrt{2}$$