EJERCICIOS DE INTEGRAL DOBLE PROPUESTOS EN EXÁMENES

1º) Obtener el valor de la integral doble $I = \iint_R (x+y)\cdot(x-y)^4\,dxdy$ efectuando el siguiente cambio de variable: $x = \dfrac{u+v}{2}; \quad y = \dfrac{u-v}{2}$, siendo R la región del plano limitada por las cuatro siguientes rectas: $x + y = 1$; $x + y = 3$; $x - y = 1$; $x - y = -1$ *(Septiembre 2002, ex. or)*

www.Matematica1.com

Solución.-

$x + y = u$ y $x - y = v$, luego el recinto R está limitado por $u = 1$, $u = 3$; $v = 1$, $v = -1$.

El jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow I = \dfrac{1}{2}\iint_R u\cdot v^4\,dudv = \dfrac{1}{2}\int_1^3 udu\int_{-1}^1 v^4 dv = \dfrac{4}{5}$

2º) Calcular el volumen que determina la función f (x, y) = x·y sobre el recinto
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x,y \ge 0\}$ *(Septiembre 2002, ex. res.)*

Volumen $= \iint_A xydxdy =$ *(cambiando a polares)* $= \int_1^2 \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta =$

$= -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \left[\dfrac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{15}{8}.$

3º) Dada la integral doble $A = \iint_R (x^2+y^2)^{5/2}\,dxdy$ donde *R* es la región comprendida entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$

Se pide

1º Resolver la mencionada integral doble efectuando necesariamente un cambio de variables a **coordenadas polares**

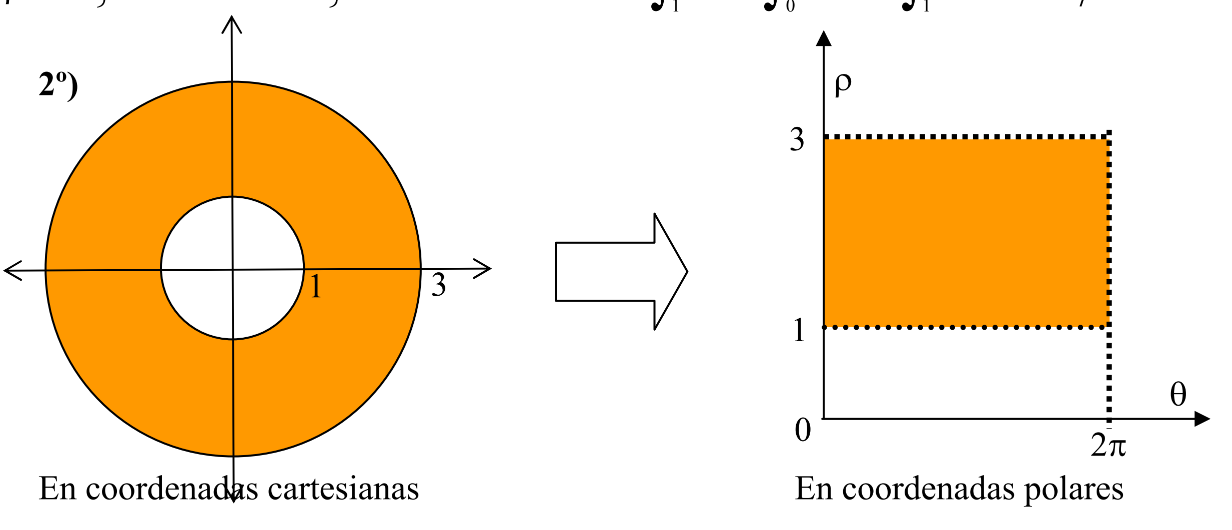
2º **Dibujar el recinto en que se transforma el recinto inicial** *R* cuando se efectúa la transformación a coordenadas polares *(Enero 2003, ex. or.)*

Solución:

1º)

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 1 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\right\} \qquad J = \rho \quad \Rightarrow \quad A = \int_1^3 \rho^6 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\int_1^3 \rho^6 d\rho = \frac{4372\pi}{7}$$

2º)



En coordenadas cartesianas

En coordenadas polares

4º) Dada la integral doble $A = \iint_R x\left(x^2+y^2\right)^{1/2} dxdy$ donde R es el primer cuadrante definido por la ecuación $x^2+y^2 \le a^2$.

Se pide

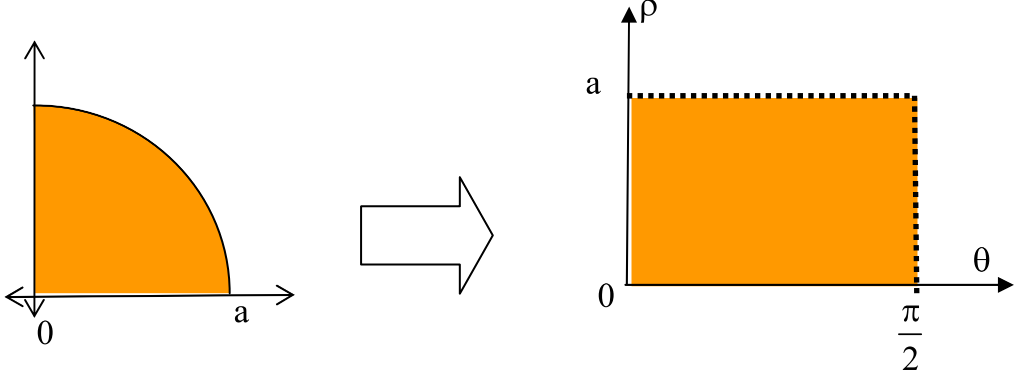
1º Resolver la mencionada integral doble efectuando necesariamente un cambio de variables a **coordenadas polares**

2º **Dibujar el recinto en que se transforma el recinto inicial** R cuando se efectúa la transformación a coordenadas polares *(Enero 2003, ex. res)*

Solución:

1º) $\left.\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\text{sen}\theta \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 0\le\rho\le a \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$ $J=\rho \quad \Rightarrow \quad A=\int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{a^4}{4}$

2º)

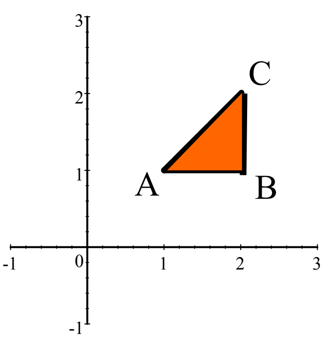


En coordenadas cartesianas En coordenadas polares

5º) Obtener el valor de la integral doble $I = \iint_R xy^2 dxdy$

Siendo R la región del plano definida por los tres vértices: A(1,1) ; B(2,1) ; C(2,2) *(Septiembre 2003, ex. res)*

Solución.-



$$I = \int_1^2 x dx \int_1^x y^2 dy = \int_1^2 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^x dx =$$

$$= \int_1^2 x\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\right]dx = \int_1^2 \left(\frac{x^4}{3}-\frac{x}{3}\right)dx = \left[\frac{x^5}{15}-\frac{x^2}{6}\right]_1^2 =$$

$$= \boxed{\mathbf{\frac{47}{30}}}$$

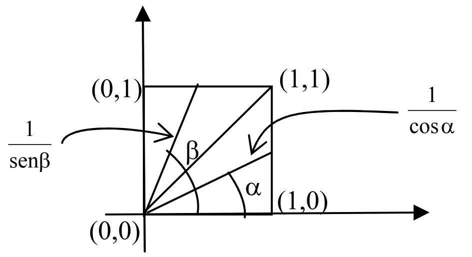
6º) Utilizando necesariamente **coordenadas polares**, en todo el desarrollo, calcular cuales serán tanto los límites de integración, como la expresión de la función subintegral, en la siguiente integral que inicialmente aparece en coordenadas cartesianas:

$I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy$ *(Septiembre 2004, ex. res)*

Solución.-

El recinto de integración es el cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1).

Consideremos los dos triángulos en que es dividido por la diagonal que une (0,0) y (1,1):



En el primer triángulo, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ y $0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}$; en el segundo triángulo, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ y $0 \le \rho \le \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$. Luego la integral quedaría:

www.Matematica1.com

$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{1/\cos\theta} \rho f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/\operatorname{sen}\theta} \rho f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) d\rho$$

7º) Utilizando necesariamente coordenadas cilíndricas, en todo el desarrollo, y siendo R el cilindro de base el circulo de radio 1 (centrado en el origen de coordenadas) y de altura 3, calcular el valor de la siguiente integral que inicialmente aparece en coordenadas cartesianas:

$$\iiint_R dxdydz$$

Nota: Las coordenadas cilíndricas de un punto (x,y,z) son (r,α,z). Siendo (r,α) las coordenadas polares de (x,y) *(Enero 2005)*

Solución.-

La transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas viene dada por las ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\alpha \\ y = r\operatorname{sen}\alpha \\ z = z \end{array}\right\}$ cuyo jacobiano vale r. El cilindro R viene determinado por $0 \le r \le 1$; $0 \le \alpha \le 2\pi$; $0 \le z \le 3$. Luego la integral sería:

$$\int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^3 dz = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$$

8º) Calcular el **área de la región del plano** limitada por las desigualdades:

$$\begin{cases} 2x + 3y \ge 6 \qquad 2x + 3y \le 18 \\ 2x - 3y \ge -6 \qquad 2x - 3y \le 6 \end{cases}$$

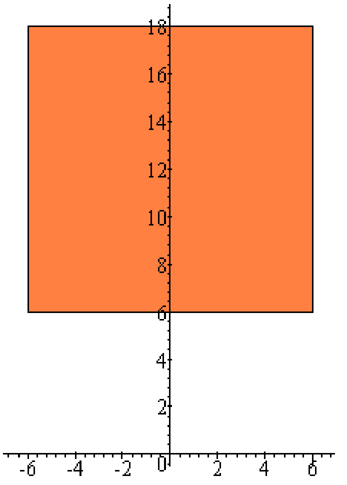
Para ello ha de efectuar, necesariamente, el cambio de variables: $\begin{array}{l} u = 2x - 3y \\ v = 2x + 3y \end{array}$

Así mismo, dibuje cual será el **nuevo recinto** R' en las nuevas variables (u ,v) *(En 2005-2ª)*

Solución.-

El recito R se transforma en $u \ge -6$; $u \le 6$; $v \ge 6$; $v \le 18$. Despejando x e y de las ecuaciones del cambio de variable: $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v \\ y = -\frac{1}{6}u + \frac{1}{6}v \end{array}\right\}$ cuyo jacobiano $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}$. Luego el área pedida es: $\frac{1}{12}\int_{-6}^{6}du\int_{6}^{18}dv = \frac{1}{12}\cdot 12\cdot 12 = 12.$

El recinto R' es un rectángulo:



9º) *(Sep 2005- or)*

Dada la integral $I = \iint_R sen\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, y siendo R el recinto definido por:

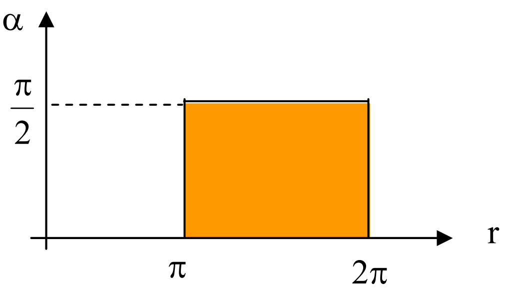
$\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$. Se pide :

1) Efectuando necesariamente el cambio a coordenadas polares, **dibujar el nuevo recinto** R' en las nuevas coordenadas.
2) Calcular el valor de la integral dada I

Solución.-

1) El recinto en coordenadas polares sería $\begin{cases} \pi^2 \le r^2 \le 4\pi^2 \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ o equivalentemente

$\begin{cases} \pi \le r \le 2\pi \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ que se trata de un rectángulo en unos ejes (r, α):

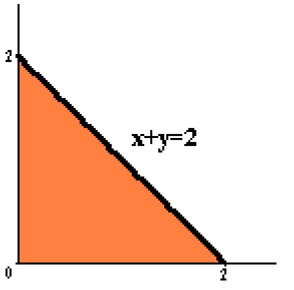


2) La integral queda: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\alpha\int_{\pi}^{2\pi}r\cdot sen r\cdot dr =$ *(por partes)* $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left[-r\cos r\right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\cos r\cdot dr\right]d\alpha =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-3\pi)d\alpha = \frac{-3\pi^2}{2}$

10º) Resolver la integral doble $A = \iint_R e^{\frac{x^2-y^2}{x-y}}\,dxdy$ efectuando el siguiente cambio de variable:

$$u = y - x$$
$$v = x + y$$



Asimismo R es la región del primer cuadrante limitada por la recta $x + y = 2$. *(Sep 05. Res)*

Solución.-

El dominio R cuya representación gráfica podemos ver a la derecha, puede expresarse:

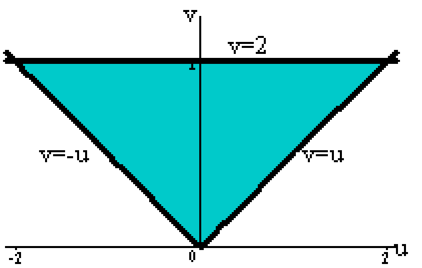
$$0 \le y \le 2-x \le 2$$

Despejando x e y del cambio propuesto: $\begin{cases} x = \dfrac{v-u}{2} \\ y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$ con lo que el recinto R se convierte en:

www.Matematica1.com

$$0 \le \frac{u+v}{2} \le 2 - \frac{v-u}{2} \le 2 \leftrightarrow 0 \le u+v \le 4-v+u \le 4 \;\leftrightarrow\; -u \le v \le 4-v \le 4-u$$

cuya representación es:



El valor absoluto del jacobiano es : $\text{abs}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, de donde la integral queda:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^2 dv \int_{-v}^{v} e^v du = \int_0^2 ve^v dv = \textit{(por partes)} = \left[ve^v\right]_0^2 - \int_0^2 e^v dv = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

11º) *(Feb 06 – 2ª)*

Calcular la integral doble de la función:

$z = x^2 + y^2$ **sobre el recinto A definido por las desigualdades :**

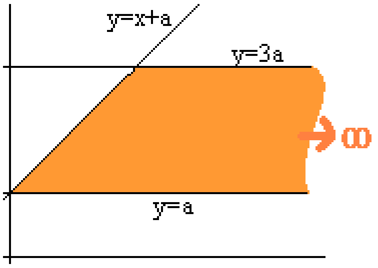
$y \le x + a$, $y \ge a$, $y \le 3a$, **con** $a > 0$; **mediante el cambio de variable:**

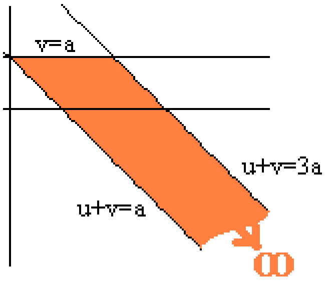
$u = x$ **y** $v = y - x$.

Dibujar necesariamente los recintos en las variables x e y , y asimismo en las variables u y v

Solución.-

El recinto, representado en las coordenadas (x, y) y en las coordenadas (u, v)

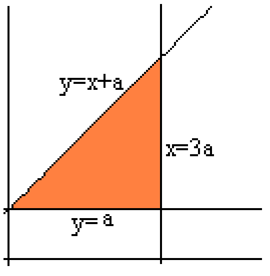


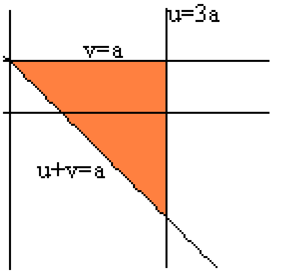


En coordenadas (x, y) En coordenadas (u, v)

es un recinto ilimitado, comprendido entre dos paralelas. La integral es infinito.

Puede ser que haya un error en el enunciado y que donde pone $y \leq 3a$, deba poner $x \leq 3a$. En ese caso los recintos respectivamente son:





En coordenadas (x, y) En coordenadas (u, v)

Del cambio propuesto se deduce :

$\left.\begin{array}{l} x = u \\ y = u + v \end{array}\right\}$ y el jacobiano: $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; además $x^2 + y^2 = 2u^2 + 2uv + v^2$, de donde la integral:

$$\int_0^{3a} du \int_{a-u}^{a} \left(2u^2 + 2uv + v^2\right) dv = \int_0^{3a} \left[2u^2 v + uv^2 + \frac{v^3}{3}\right]_{a-u}^{a} du = \int_0^{3a} \left(\frac{4}{3}u^3 + au^2 + a^2 u\right) du =$$

$$= \left[\frac{u^4}{3} + \frac{au^3}{3} + \frac{a^2u^2}{2}\right]_0^{3a} = \frac{81}{2}a^4$$

12º) *(Sep 06. Or)*

Calcular el área del dominio acotado A que limitan las curvas :

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x$$

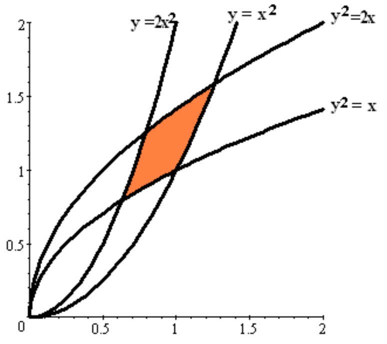
mediante el siguiente cambio de variables:

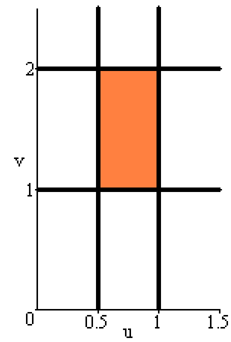
$$x^2 = uy, \quad y^2 = vx$$

Nota: Dibujar necesariamente los recintos A y A´ correspondientes a las variables (x, y) e (u, v)

Solución.-

Efectuado el cambio de variables, las curvas se convierten respectivamente en: $u = 1$, $u = \frac{1}{2}$, $v = 1$, $v = 2$, con lo que los recintos A y A’ son:





Recinto A Recinto A'

El área pedida puede calcularse mediante la integral doble de la función f(x, y) = 1 en el recinto A. Efectuando el cambio de variable, será:

$$\text{Área} = \iint_A 1\cdot dxdy = \iint_{A'} 1\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_{\frac{1}{2}}^{1} du \int_{1}^{2} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv$$

Para calcular el jacobiano, despejamos x e y del cambio de variables, quedando $\left.\begin{array}{l} x = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \end{array}\right\}$, de donde $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3}$. Luego el área es $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} du \int_{1}^{2} dv = \dfrac{1}{6}$

13º) *(Sep 06 Res)*

Calcular el área del dominio acotado A que limitan las curvas :

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad xy^3 = 1, \quad xy^3 = 2$$

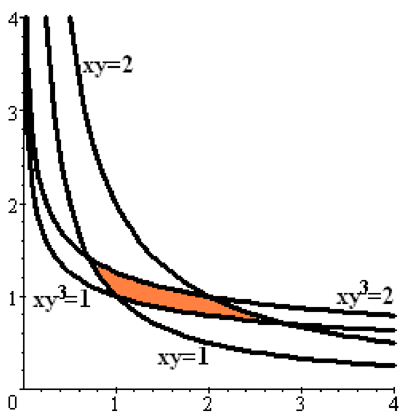
mediante el siguiente cambio de variables:

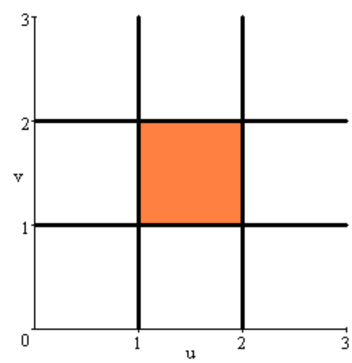
$$xy = u, \quad xy^3 = v$$

Nota: Dibujar necesariamente el recinto A´ correspondientes a las variables (u, v)

Solución.-

Efectuado el cambio de variables, las curvas se convierten respectivamente en: u = 1, u = 2, v = 1, v = 2, con lo que los recintos A y A' son:





Recinto A Recinto A'

El área pedida puede calcularse mediante la integral doble de la función f(x, y) = 1 en el recinto A. Efectuando el cambio de variable, será:

$$\text{Área} = \iint_A 1\cdot dxdy = \iint_{A'} 1\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv = \int_1^2 du\int_1^2\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dv$$

Para calcular el jacobiano, despejamos x e y del cambio de variables, quedando $\left.\begin{array}{l} x = u^{\frac{3}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \\ y = u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\}$, de donde $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$. Luego el área es $\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_1^2 \frac{1}{v}dv = \frac{\ln 2}{2}$

14º) Las coordenadas esféricas de un punto (x, y, z) son (ρ, α, ψ). se pide:

1) Expresar las relaciones de las coordenadas cartesianas (x, y, z) en función de las esféricas

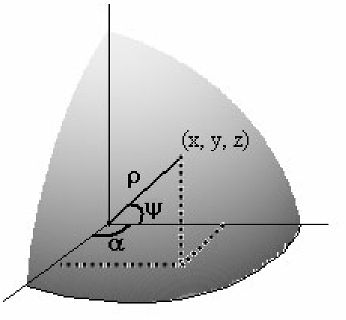
2) Calcular el Jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas en función de las esféricas

3) Calcular el volumen de una esfera de radio r, mediante el cambio de variables a coordenadas esféricas. *(En 07 or)*

Solución.-

1)

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\psi\cos\alpha \\ y = \rho\cos\psi\,\text{sen}\alpha \\ z = \rho\,\text{sen}\psi \end{array}\right\}$$



2)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\alpha,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\psi & -\rho\,\text{sen}\alpha\cos\psi & -\rho\cos\alpha\,\text{sen}\psi \\ \text{sen}\alpha\cos\psi & \rho\cos\alpha\cos\psi & -\rho\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\psi \\ \text{sen}\psi & 0 & \rho\cos\psi \end{vmatrix} = \rho^2\cos\psi$$

3) $V = 8\iiint_R dxdydz$, donde R es el recinto $\{(x, y, z) / x^2+y^2+z^2 \le r, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$.

Efectuando el cambio a coordenadas esféricas, sería:

$$V = 8\int_0^r \rho^2 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi = 8\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r [\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}}[\text{sen}\psi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

15º)

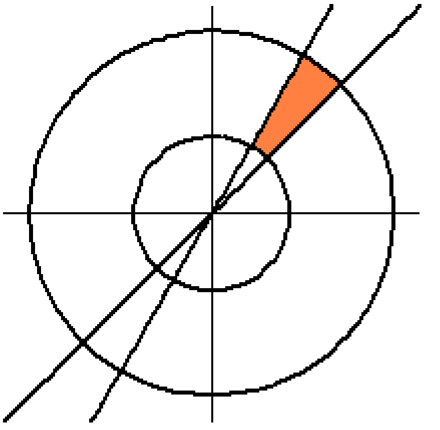
Siendo $I = \iint_R xydxdy$, donde R es el recinto de integración limitado por :

$x^2+y^2 \le 49$, $x^2+y^2 \ge 9$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Se pide:

1) Calcular el valor de la integral I, operando necesariamente en coordenadas polares
2) Dibujar la gráfica del recinto R *(En. 08.-or)*

Solución.-

En coordenadas polares, x = ρcosα, y = ρsenα, y sabemos que el valor del jacobiano es ρ. Para determinar el recinto de integración en coordenadas polares, observemos que $x^2 + y^2 = 49$ y $x^2 + y^2 = 9$ son las circunferencias de radios 7 y 3 respectivamente, mientras que las rectas y = x e y = $\sqrt{3}$x tienen por pendientes 1 y $\sqrt{3}$, con lo que sus inclinaciones son arc tg 1 = $\frac{\pi}{4}$ y arc tg $\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, respectivamente. Así pues, el recinto de integración es:



$$3 \le \rho \le 7 \ ; \ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

La integral quedará:

$$\int_3^7 \rho^3 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \operatorname{sen} x dx = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_3^7 \cdot \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}^2 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{145}{2}$$

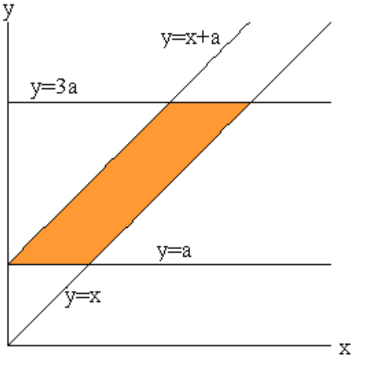
16º)

Calcúlese la integral doble de la función $z = x^2 + y^2$, sobre el recinto R definido por $y \ge x$, $y \le x + a$, $y \ge a$, $y \le 3a$, con $a > 0$. Utilícese el siguiente cambio de variables: $u = x$, $v = y - x$.

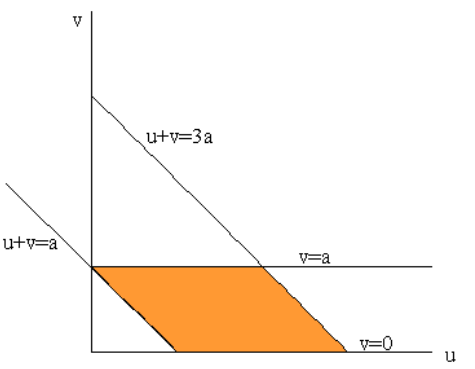
Nota: Necesariamente deberá dibujarse el recinto R en las variables (x, y) , y el recinto S en la variables (u, v) *(Feb. 08-2ª)*

Solución.-

Efectuado el cambio de variables, siendo $\begin{cases} x = u \\ y = u + v \end{cases}$ el recinto estaría determinado por las desigualdades $v \ge 0$; $v \le a$; $u + v \ge a$; $u + v \le 3a$



Recinto R



Recinto S

El jacobiano de la transformación: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. La expresión z =$u^2$ +$(u+v)^2$ = = $2u^2 + 2uv + v^2$. La integral sería:

$$\int_0^a \int_{a-v}^{3a-v} \left(2u^2 + 2uv + v^2\right) du dv = \int_0^a \left[\frac{2u^3}{3} + u^2 v + uv^2\right]_{a-v}^{3a-v} dv =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{2(3a-v)^3}{3} + (3a-v)^2 v + (3a-v)v^2 - \frac{2(a-v)^3}{3} - (a-v)^2 v - (a-v)v^2\right) dv = \textit{(simplificando)} =$$

$$= \int_0^a \left(2av^2 - 8a^2v + \frac{52}{3}a^3\right)dv = \left[\frac{2av^3}{3} - 4a^2v^2 + \frac{52}{3}a^3v\right]_0^a = \frac{2}{3}a^4 - 4a^4 + \frac{52}{3}a^4 = 14a^4$$

17º)

Calcúlese el valor de la integral $I = \iint_R e^{\frac{2x^2+xy-y^2}{x+y}}\,dxdy$,

siendo R el recinto limitado por las rectas:

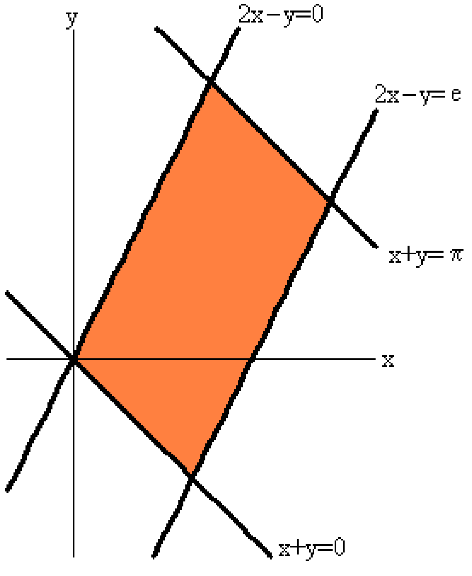
$2x - y = 0,\quad 2x - y = e,\quad x + y = 0,\quad x + y = \pi$,

y utilizando necesariamente el cambio de variables dado por: $\begin{matrix} u = 2x - y \\ v = x + y \end{matrix}$

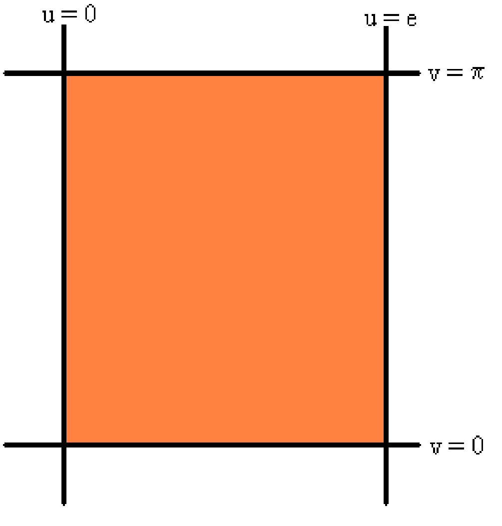
Nota: Es obligatorio dibujar los recintos R y R' referidos a las variables (x,y) y (u,v), respectivamente *(08 - Sep)*

Solución.-

Efectuado el cambio de variables, las rectas se convierten respectivamente en: u = 0, u = e, v = 0, v = π, con lo que los recintos R y R' son:



Recinto R



Recinto R'

Despejamos x e y del cambio de variables, quedando $\left.\begin{matrix} x = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v \\ y = -\frac{1}{3}u + \frac{2}{3v} \end{matrix}\right\}$, de donde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.\ \text{Luego } I = \frac{1}{3}\iint_{R'} e^{\frac{uv}{v}}dudv = \frac{1}{3}\iint_{R'} e^u dudv = \frac{1}{3}\int_0^e e^u du \int_0^\pi dv = \frac{1}{3}\left(e^e - 1\right)\pi$$

18º) *(08 Sep Res)*

Calcular el valor de la siguiente integral doble:

$$\iint_R (x + y + 1)dxdy$$

Siendo el recinto R de integración el siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

Nota:
Para su resolución, se sugiere efectuar un cambio a coordenadas polares.

Solución.-

Efectuamos el cambio $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}=r\cos\alpha\\ \dfrac{y}{b}=r\operatorname{sen}\alpha\end{array}\right\}$ con lo que el recinto de integración se convierte en el círculo $r\le 1$. El jacobiano de la transformación: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\alpha)}=\begin{vmatrix}a\cos\alpha & -ar\operatorname{sen}\alpha\\ b\operatorname{sen}\alpha & br\cos\alpha\end{vmatrix}=abr$. Luego la integral queda:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1(ar\cos\alpha+br\operatorname{sen}\alpha+1)abr\,dr\,d\alpha=ab\int_0^{2\pi}\left[a\frac{r^3}{3}\cos\alpha+b\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\alpha+\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\alpha\ =$$

$$=\frac{ab}{6}\int_0^{2\pi}(2a\cos\alpha+2b\operatorname{sen}\alpha+3)d\alpha=\frac{ab}{6}\left[2a\operatorname{sen}\alpha-2b\cos\alpha+3\alpha\right]_0^{2\pi}=\pi ab$$

19º) *(09 En.- or)*

Siendo $I=\iint_R xy\,dx\,dy$, donde *R* es el recinto limitado por:

$x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. Efectuando el cambio de variables: $u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$.

Se pide:

1) Dibujar los recintos *R* en las variables (*x* , *y)* , y *S* en las variables (*u, v)*
2) Resolver la integral I , haciendo uso de las nuevas variables (*u,v*)

Solución.-

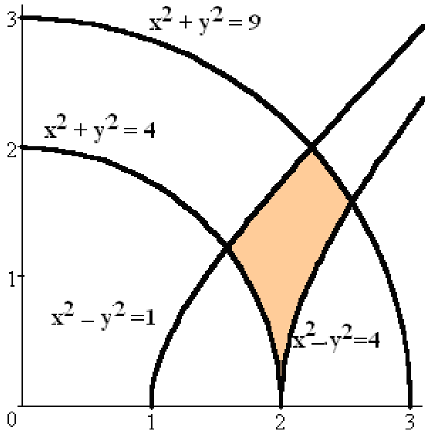
1) Las ecuaciones $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=9$ son de las circunferencias de centro (0, 0) y radios 2 y 3 respectivamente.

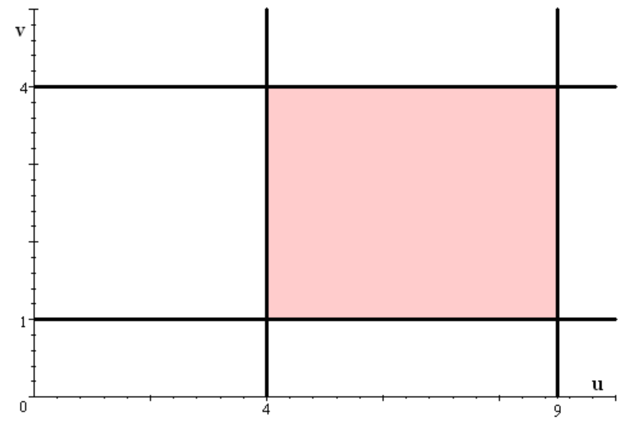
Las ecuaciones $x^2-y^2=1$ y $x^2-y^2=4$ son de las hipérbolas equiláteras de centro (0, 0) , asíntotas $y=\pm x$ y vértices respectivos (1, 0) y (2, 0) (para $x>0$).

Efectuado el cambio de variables, el recinto está limitado por las ecuaciones:

$$u=4,\ u=9,\ v=1,\ v=4$$

Gráficamente:





2) De las ecuaciones del cambio

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=u \\ x^2-y^2=v \end{array}\right\} \quad \text{despejamos x e y:} \quad \left.\begin{array}{l} x=\sqrt{\dfrac{u+v}{2}} \\ y=\sqrt{\dfrac{u-v}{2}} \end{array}\right\}$$

de donde el valor absoluto del jacobiano de la transformación:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \text{v.abs.}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{u+v}} & \dfrac{1}{2\sqrt{u+v}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{u-v}} & \dfrac{-1}{2\sqrt{u-v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}$$

Así pues, la integral sería:

$$I=\int_4^9\int_1^4 \sqrt{\frac{u+v}{2}}\sqrt{\frac{u-v}{2}}\,\frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}\,dvdu=\frac{1}{8}\int_4^9\int_1^4 dvdu=\frac{1}{8}(9-4)(4-1)=\frac{15}{8}$$