

Control 1

- P1. (a) Sea P una matriz tal que $P^2 = P$.
 - (i) (1 pto)Demuestre que para todo $k \in \mathbb{N}, P^k = P$
 - (ii) (1 pto)Pruebe que si A = (I P), entonces $A^k = A$ para todo k.
 - (iii) (1 pto) Pruebe que si $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $||\mathbf{u}|| = 1$, entonces $P = uu^t$ cumple que $P^k = P$.
 - (b) Un conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto ortogonal si para todo par de indices $i \neq j$, se tiene que $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto ortogonal tal que para todo $i, ||x_i|| = 1$.
 - (i) (1,5 ptos.) Se define

$$x_{r+1} = y - \sum_{k=1}^{r} \langle y, x_k \rangle x_k$$

con $y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}\}$ es un conjunto ortogonal.

- (ii) (1,5 ptos.) Demuestre que si existe un conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^r \alpha_k x_k = 0$, entonces $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
- **P2.** (a) (2,0 ptos) Encuentre la descomposición *LDU* de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) (4 ptos.) Sea el sistema:

Encontrar los valores de α y β tal que:

- (i) No exista solución.
- (ii) Existan infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.
- (iii) Exista una única solución. Calcule dicha solución para el caso $\alpha = \beta = 1$.

P3. Sea
$$P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
 y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene directores $d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (i) (1,5 ptos) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1 .
- (ii) (1,5 ptos) Calcule la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación x+2y=2.
- (iii) (1,5 ptos) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L.
- (iv) (1,5 ptos) Calcule la distancia de P a la recta L.

Pauta Control 1, Álgebra Lineal, Otoño 2008. MA1B2

P1. (a) (i) Haremos la demostración por inducción. Es evidente para k=1. Para ver el paso inductivo, suponemos que se cumple para k=i, y probamos que se cumple también para k=i+1



$$P^{i+1} = P^i \cdot P = P \cdot P = P^2 = P.$$

Por lo tanto se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Otra vez hacemos la demostración por inducción. Es evidente para k=1. Suponemos que se cumple para k=i,



- $A^{i+1} = A^k \cdot A = A \cdot A = (I P) \cdot (I P) = I 2P + P^2 = I P = A.$
- (iii) Gracias a la parte (i), basta probar que $P^2 = P$ para demostrar lo pedido. Observamos que $u^t u = \langle u, u \rangle = ||u||^2 = 1$. Por lo tanto,



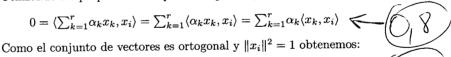
- $P^2 = uu^t uu^t = u(u^t u)u^t = uu^t = P$
- (b) (i) Para demostrar que $\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}\}$ es un conjunto ortogonal, basta probar que $\langle x_{r+1}, x_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$ (dado que ya sabemos que $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, r, i \neq j$).

$$\langle x_{r+1}, x_i \rangle = \langle y - \sum_{k=1}^r \langle y, x_k \rangle x_k, x_i \rangle = \langle y, x_i \rangle - \langle \sum_{k=1}^r \langle y, x_k \rangle x_k, x_i \rangle =$$

$$= \langle y, x_i \rangle - \sum_{k=1}^r \langle \langle y, x_k \rangle x_k, x_i \rangle = \langle y, x_i \rangle - \sum_{k=1}^r \langle y, x_k \rangle \langle x_k, x_i \rangle$$
Usando que el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ es ortonormal, concluimos que

$$\langle x_{r+1}, x_i \rangle = \langle y, x_i \rangle - \langle y, x_i \rangle \langle x_i, x_i \rangle = \langle y, x_i \rangle - \langle y, x_i \rangle \underbrace{\|x_i\|^2}_{=1} = 0$$

(ii) $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \langle \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k, x_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Utilizando las propiedades de producto punto que conocemos:



$$0 = \sum_{k=1}^r \alpha_k \langle x_k, x_i \rangle = \alpha_i \langle x_i, x_i \rangle = \alpha_i$$
 para todo $i = 1, \dots, r$.



P2. (a) (Primera forma) Veamos el pivoteo de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow E_{23}(3,1)E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \widetilde{A}$$



En dos pasos llegamos a la matriz escalonada \widetilde{A} , que puede ser escrita como el producto de una matriz diagonal y una matriz triangular superior con diagonal de 1's:

$$\widetilde{A} = D \cdot U = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



Y así,

$$A = [E_{23}(3,1)E_{13}(-1,1)]^{-1} \cdot D \cdot U = [E_{13}(1,1) \cdot E_{23}(-3,1)] \cdot D \cdot U.$$

La descomposición LDU de A es

$$L = E_{13}(1,1) \cdot E_{23}(-3,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad U = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$



(Segunda Forma) Se pivotea la matrix dejando 1's en la diagonal y se conservan las columnas para obtener la matriz L:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow D(1,1/3,1)E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow E_{23}(9,1)D(1,1/3,1)E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ \end{pmatrix}$$

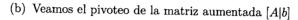
$$\rightarrow D(1,1,1/2)E_{23}(9,1)D(1,1/3,1)E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así podemos obtener directamente la descomposición LU:

$$A = L \cdot U = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -9 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$



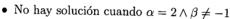
$$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

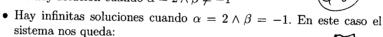


$$[A|b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 - \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & \alpha + 5 & \beta \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2\alpha + 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha - 1 \\ 0 & -2 & 0 & \alpha + 2 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\alpha + 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha + 2 & 2\alpha + \beta - 3 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha + 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha + 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha + 2 & 2\alpha + \beta - 3 \end{pmatrix}$$

Estudiamos de inmediato la cantidad de soluciones. Si $\alpha \neq 2$, la forma escalonada de A tiene toda la diagonal distinta de 0, por lo que A es invertible y el sistema tiene solución única. En el caso en que $\alpha = 2$, la última fila de la matriz aumentada escalonada es $(0\ 0\ 0\ 0\ \beta + 1)$, por lo que el sistema es incompatible si $\beta \neq -1$ y es compatible determinado si $\beta = -1$. En resumen,

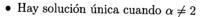




$$\left(\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 6
\end{array}\right)$$

De donde se obtiene que el conjunto solución es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Cuando $\alpha = \beta = 1$ el sistema escalonado queda

$$\left(\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$



La solución es única y es

$$x_1 = -4$$
, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$

P3. 1. Empezamos determinando la ecuación normal del plano Π_1 . Sea n el vector normal:

$$n=d_1\times d_2=\left|\begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right|=\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right)$$
 Dado que el origen pertenece a Π_1 , la ecuación normal es

$$\Pi_1:\langle V,n\rangle=0$$

La proyección de P sobre el plano Π_1 se calcula como

$$P_0 = P + \frac{\langle O - P, n \rangle}{\|n\|^2} \ n$$

$$P_{0} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle -\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. La ecuación cartesiana de la recta:

$$\begin{cases} x+y-z=0\\ x+2y=2 \end{cases}$$

Para encontrar las ecuaciones paramétricas, hacemos $y=t,\,t\in\mathbb{R}$ y despejamos x y z en función de t usando las ecuaciones cartesianas

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2-2t\\ y=t\\ z=(2-2t)+t=2-t \end{array} \right. \quad t\in\mathbb{R}$$

La ecuación vectorial es

$$L: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$



3. Para calcular la proyección de P_0 sobre L, tomamos el vector \hat{x} (vector director de L),

$$\hat{x} = \frac{(2, -1, 1)^t}{\|(2, -1, 1)^t\|} = \frac{(2, -1, 1)^t}{\sqrt{6}}$$



La proyección de P_0 sobre L es

$$R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-12}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. El punto R es en realidad la proyección el punto P sobre la recta L. Por lo tanto, para calcular la distancia entre P y L basta calcular dist(P,R).

$$\operatorname{dist}(P,R) = \|P - R\| = \|(-1,0,2)^t\| = \sqrt{5}$$

(15)

Observación, si la resolución del problema se hace volviendo a proyectar P sobre la recta L, también se considera correcto.