Control 1 - Álgebra Lineal - 2010

Profesor: Iván Rapaport

Pregunta 1. Sea el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2+\alpha \\ 2\beta + \alpha - 2 \end{bmatrix}$$

Analizar existencia y número de soluciones en función de los parámetros α y β.

Pregunta 2.

a.- Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matrices triangular-superiores. Demuestre que

1. (2 puntos) AB es triangular superior.
2. (2 puntos) $(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$

b.- (2 puntos) ¿Es la siguiente matriz invertible? Justifique.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi & 0 & 8 \\ 2 & \pi & 1 & \pi & 0 & \pi & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & \pi & \pi & 0 & \pi & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & \pi & 0 & 5 \\ 5 & \pi & 1 & 0 & \pi & \pi & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & \pi & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 1 & \pi & 0 & \pi & 0 & 2 \\ 8 & \pi & 1 & \pi & \pi & \pi & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pregunta 3. Una matriz $U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^tU = I$, donde U^t es la traspuesta de U.

a.- (2 puntos) Sean $U, U_1, U_2 \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y que su inversa es unitaria. Pruebe también que U_1U_2 es unitaria.

b.- (2 puntos) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^tu = 1$. Pruebe que $H = I - 2uu^t$ es unitaria.

c.- (2 puntos) Sea $U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matriz triangular superior unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores que pueden tomar las componentes de la diagonal de U (IND: puede usar que la inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior)

Tiempo: 2 horas y 30 minutos.

Pauta P1 – Control 1 MA1102
Otoño 2010

Sea el sistema:

$$A \cdot x = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + 1/2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2+\alpha \\ 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

Analizar en función de los parámetros α y β los tipos de soluciones del sistema.

<u>Solución:</u>

Sea la matriz aumentada.

$$A \mid b = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha & \vdots & 2+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + 1/2 & \vdots & 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

Escalonando la matriz:

$$A \mid b = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha & \vdots & 2+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} & \vdots & 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_{1,2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha & \vdots & 2+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} & \vdots & 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,3}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha & \vdots & 2+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} & \vdots & 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,4}(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 4 & 2\alpha+2 & \vdots & 4+\alpha\\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha+\dfrac{1}{2} & \vdots & 2\beta+\alpha-2\end{array}\right)\xrightarrow{E_{2,5}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 4 & 2\alpha+2 & \vdots & 4+\alpha\\ 0 & 0 & 1 & 2\alpha+\dfrac{1}{2} & \vdots & 2\beta+\alpha\end{array}\right)\xrightarrow{E_{3,4}(-2)}\left(\begin{array}{cccccc}1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \vdots & \alpha\\ 0 & 0 & 1 & 2\alpha+\dfrac{1}{2} & \vdots & 2\beta+\alpha\end{array}\right)\xrightarrow{E_{3,5}(-1/2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \vdots & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \vdots & 2\beta+\alpha-1\end{array}\right)\xrightarrow{E_{4,5}(-1)}\left(\begin{array}{cccccc}1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \vdots & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2\beta-1\end{array}\right)$$

En base a esto, si $2\beta - 1 \neq 0$ o $\beta \neq {}^{1}/_{2}$ no existe solución ya que el sistema estaría sobre dimensionado. Si $\beta = {}^{1}/_{2}$ y $\alpha = 0$ existirán infinitas soluciones. Finalmente si $\beta = {}^{1}/_{2}$ y $\alpha \neq 0$ la solución será única.

Distribución de puntaje

Escalonamiento de la matriz (3 puntos). 0,4 por cada etapa, más 0,2 por el escalonamiento final completo. Si hay errores en los escalonamientos, se descuenta el puntaje de cada etapa errónea, más el correspondiente al escalonamiento final. No se consideran errores de arrastre.

Conclusiones (3 puntos). 1 punto por cada condición.

Pauta Control 1

P3) (a) Sea $U \in M_{nn}(\mathbb{R})$ unitaria.

- Pdq: $\exists U^{-1} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tq $U^{-1}U = UU^{-1} = \mathbb{I}$.

  Asumiremos cierto el Teorema que si $\exists B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tq $BA = \mathbb{I}$, entonces $AB = \mathbb{I}$ y $B = A^{-1}$.

  En efecto: Sea $U^{-1} = U^T$

  (i) $U^{-1}U = U^TU = \mathbb{I}$ / def. matriz unitaria

  (ii) $UU^{-1} = UU^T = \mathbb{I}$ / Teorema.

  $\therefore$ U posee inversa $U^{-1} = U^T$

  0,7 ptos

- Pdq: $U^{-1} = U^T$ es unitaria.

  en efecto:

  $$(U^{-1})^T U^{-1} = (U^T)^T U^T$$
  $$= UU^T$$
  $$= \mathbb{I} \quad \text{/ por parte anterior}$$

  0,7 ptos

- Pdq: U_1U_2 es unitaria

  $$(U_1U_2)^T(U_1U_2) = (U_2^TU_1^T)(U_1U_2) \quad \text{/ propiedad}$$
  $$= U_2^T(U_1^T(U_1U_2)) \quad \text{/ asociando}$$
  $$= U_2^T((U_1^TU_1)U_2) \quad \text{/ asociando}$$
  $$= U_2^T(\mathbb{I}U_2) \quad \text{/ } U_1 \text{ unitaria}$$
  $$= U_2^TU_2$$
  $$= \mathbb{I} \quad \text{/ } U_2 \text{ unitaria}$$

  0,6 ptos.

P2) (b) $H^TH = (I - 2uu^T)^T(I - 2uu^T)$, $uu^T \in M_{nn}(\mathbb{R})$

$$= (I^T - (2uu^T)^T)(I - 2uu^T)$$

$$= (I - (2uu^T)^T)(I - 2uu^T)$$

0,5ptos

Ahora multiplicamos los paréntesis:

$$H^TH = I^2 - I(2uu^T) - (2uu^T)^T I + (2uu^T)^T(2uu^T)$$

$$= I - 2uu^T - (2uu^T)^T + 4(uu^T)^T(uu^T)$$ 0,5ptos

$$= I - 2uu^T - 2(u^T)^T u^T + 4((u^T)^T u^T (uu^T))$$ 0,5ptos

$$= I - 2uu^T - 2uu^T + 4(u\underbrace{(u^Tu)}_{1}u^T)$$

$$= I - 4uu^T + 4uu^T$$

$$= I$$

∴ H es unitaria.

0,5ptos

P.S: se usó la propiedad $(AB)^T = B^TA^T$

$\cancel{(AB)C = A(BC)}$

$\cancel{A_{mn} \; B_{no} \; C_{op} \; D_{pq}}$

$\cancel{u u^T \quad u u^T}$

$\cancel{m1 \; 1m \quad m1 \; 1m}$

$\cancel{A_{mn} \; B_{ns}}$

$\cancel{AB_{ms}}$

$\cancel{(AB)^T_{sm}}$

$\cancel{B^T_{sn} \; A^T_{nm}}$

$\cancel{B^TA^T_{sm}}$

P3) (c) Sea $U \in M_{nn}(\mathbb{R})$ unitaria y triangular superior.

Por la parte (a), se sabe que $U^{-1} = U^T$

(i) Demostremos que

U triang. superior $\Longrightarrow$ U^T triang. inferior.

en efecto: U triang. superior $\Leftrightarrow u_{ij} = 0 \quad , \forall i > j$

por definición, $(u^T)_{ij} = u_{ji} = 0 \quad , \forall j > i$

$\therefore \quad (u^T)_{ij} = 0 \quad , \forall i < j$

$\Leftrightarrow U^T$ es triangular inferior.

0,5 ptos

(ii) Usando la indicación, tenemos que

$U^{-1} = U^T$ es triangular superior.

$\therefore$ U^T es triangular superior e inferior simultáneamente.

0,3 ptos

(iii) Demostremos que

A triang. sup. $\wedge$ A triang inf. $\Longrightarrow$ A diagonal.

en efecto: Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, triangular sup. e inf.

- Triangular superior: $a_{ij} = 0 \quad , \quad \forall i > j$
- Triangular inferior: $a_{ij} = 0 \quad , \quad \forall i < j$

$\therefore \quad \forall i > j \vee i < j \quad , \quad a_{ij} = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \neq j \quad , \quad a_{ij} = 0$

$\Leftrightarrow$ A es diagonal.

0,5 ptos

∘ U^T es matriz diagonal.

$\Rightarrow U^T = U$ es diagonal.

0,2 ptos

(iv) Determinemos los valores de u_{ii}

$$U^T U = \mathbb{I}$$

$$\Leftrightarrow U \cdot U = \mathbb{I}$$

$$U^2 = \mathbb{I}$$

$\Leftrightarrow u_{ii}^2 = 1$, ya que $(u^2)_{ii} = u_{ii}^2$, si U es diagonal

0,3 ptos

$$u_{ii}^2 = 1 \Leftrightarrow u_{ii} = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

∘ Los elementos u_{ii} de la diagonal de U sólo pueden tomar los valores del conjunto $\{-1, 1\}$

0,2 ptos

$$\cancel{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \cancel{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}^T} \qquad \cancel{a+2c \quad 2a+4c}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} a+3b & c+3d \\ 2a+4b & 2c+4d \end{pmatrix}} \qquad \cancel{\begin{matrix} a+3b & c+3d \\ 2a+4b & 2c+4d \end{matrix}}$$