Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 11-1

Profesores: Felipe Célèry, Alexander Frank

EXAMEN

P1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 pto.) Demuestre que el polinomio característico de A es $p(\lambda) = (\lambda^2 - 36)(\lambda - 4)$.

b) (3,5 ptos.) Calcule los valores y vectores propios de A. ¿Es A diagonalizable? Justifique brevemente.

c) (2,0 pto.) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz unitaria P de modo que $A = PDP^t$. Justifique su respuesta.

d) (1,0 pto.) ¿Es A invertible? ¿Es A definida positiva? Justifique su respuesta.

P2. a) Sean $B, C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Suponga que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es base de $\mathbb{R}^n$ y que además β es una conjunto de vectores propios tanto de B como de C.

i) (1,0 pto.) ¿Son B y C diagonalizables? Justifique.

ii) (1,0 pto.) Demuestre que B y C conmutan.

b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma 1. Considere las matrices $A = uu^t$ y $B = I - 2A$.

i) (1,0 ptos.) Demuestre que A es semidefinida positiva. ¿Puede ser A definida positiva? Justifique.

ii) (1,5 ptos.) Calcule $\ker(A)$ e $\operatorname{Im}(A)$ entregando sus dimensiones.

iii) (1,5 ptos.) Calcule $\ker(B)$ e $\operatorname{Im}(B)$ entregando sus dimensiones.

P3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x) = Ax$, para $x \in \mathbb{R}^2$.

a) (1,0 pto.) Verifique que $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$ es un plano y calcule su ecuación cartesiana.

b) (2,5 ptos.) Sea L la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con dirección $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Verifique que L es paralela a $\operatorname{Im}(T)$, y entregue la ecuación cartesiana del plano Π que contiene a L y es paralelo a $\operatorname{Im}(T)$.

c) (2,5 ptos.) Considere la base $\beta = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Considere además la transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ representada por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases canónica de $\mathbb{R}^3$ y β de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Encuentre la matriz que representa a $S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Tiempo: 3:00 hrs.