Pauta P1

(1) K de $n\times n$ invertible tal que $K^T=-K$ y $I-K$ invertible.
Si $B=(I+K)(I-K)^{-1}$, demuestre que $B^TB=BB^T=I_n$.

Solucion. Primero, se comprueba que $(I+K)^T \overset{①}{=} I-K$ y $(I+K)(I-K) \overset{②}{=} (I-K)(I+K)$

(0.4) • $(I+K)^T = I^T+K^T = I-K$ (hipot. de K); $(I-K)(I+K)=I-K+K-K^2 = I+K-K-K^2=(I+K)(I-K)$.

(1.4) • $B^TB = [(I+K)(I-K)^{-1}]^T(I+K)(I-K)^{-1} = [(I-K)^{-1}]^T(I+K)^T(I+K)(I-K)^{-1}$ (usando ①) y $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

$= [(I-K)^T]^{-1}(I-K)(I+K)(I-K)^{-1} = [(I-K)^T]^{-1}(I+K)(I-K)(I-K)^{-1}$ ($I+K=(I-K)^T$)

$= [(I-K)^T]^{-1}(I+K) = [(I-K)^T]^{-1}(I-K)^T = I$ //

(2) $\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}\neq \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{u}$ y $\underset{\sim}{v}$ no-paralelos en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\underset{\sim}{w}=\|\underset{\sim}{u}\|\underset{\sim}{v}+\|\underset{\sim}{v}\|\underset{\sim}{u}\neq\underset{\sim}{0}$, bisecta angulo entre $\underset{\sim}{u}$ y $\underset{\sim}{v}$.

Solucion. $\underset{\sim}{w}\neq 0$ ssi $\|\underset{\sim}{w}\|\neq 0$ ssi $\|w\|^2>0$, $\|w\|^2 = w\cdot w$ $(=\langle w,w\rangle)$

(1.3)
$$\begin{cases}\|\underset{\sim}{w}\|^2 = (\|u\|\underset{\sim}{v}+\|\underset{\sim}{v}\|\underset{\sim}{u})(\|\underset{\sim}{u}\|\underset{\sim}{v}+\|\underset{\sim}{v}\|\underset{\sim}{u}) = \|\underset{\sim}{u}\|^2\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}+\|\underset{\sim}{u}\|\|\underset{\sim}{v}\|\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{u}+\|\underset{\sim}{v}\|\|\underset{\sim}{u}\|\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}+\|\underset{\sim}{v}\|^2\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{u} \\ = \|\underset{\sim}{u}\|^2\|\underset{\sim}{v}\|^2+2\|\underset{\sim}{u}\|\|\underset{\sim}{v}\|\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}+\|\underset{\sim}{v}\|^2\|\underset{\sim}{u}\|^2 = 2\|u\|^2\|v\|^2+2\|\underset{\sim}{u}\|\|\underset{\sim}{v}\|\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v} \\ = 2\|u\|^2\|v\|^2+2\|\underset{\sim}{u}\|\|\underset{\sim}{v}\|(\|\underset{\sim}{u}\|\|\underset{\sim}{v}\|\cos\theta) \quad (\theta = \text{angulo entre } \underset{\sim}{u} \text{ y } \underset{\sim}{v}) \\ = 2\|\underset{\sim}{u}\|^2\|\underset{\sim}{v}\|^2(1+\cos\theta)\end{cases}$$

(0.3) Como $\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}\neq 0$ no son paralelos, se cumple que $\cos\theta\neq\pm1$, i.e., $1+\cos\theta>0$, implicando $\|\underset{\sim}{w}\|^2>$

(3) $\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}$ no-nulos y no-paralelos. Demuestre que $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$ y $\underset{\sim}{v}-\left(\frac{\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}}{\|\underset{\sim}{u}\|^2}\right)\underset{\sim}{u}$ son ortogonales (a pare

Solucion

(0.2) • $\underset{\sim}{u}$ y $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$ son ortogonales (por def., $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$ es ortogonal a $\underset{\sim}{u}$ y a $\underset{\sim}{v}$, i.e., $(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})\cdot\underset{\sim}{u}=(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})\cdot\underset{\sim}{v}$

(0.6) • $\underset{\sim}{u}\cdot\left[\underset{\sim}{v}-\left(\frac{\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}}{\|u\|^2}\right)\underset{\sim}{u}\right] = \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}-\left(\frac{\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}}{\|\underset{\sim}{u}\|^2}\right)\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}-\frac{\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}}{\|\underset{\sim}{u}\|^2}\|\underset{\sim}{u}\|^2 = \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}-\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}=0$

(0.6) • $(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})\cdot\left[\underset{\sim}{v}-\left(\frac{\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}}{\|\underset{\sim}{u}\|^2}\right)\underset{\sim}{u}\right] = (\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})\cdot\underset{\sim}{v}-\left(\frac{\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}}{\|\underset{\sim}{u}\|^2}\right)(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})\cdot\underset{\sim}{u}=0$

(4) $A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$ SEL y $(C\,|\,\underset{\sim}{d})$ su forma escalonada. Discutir las afirmaciones:
(a) Sistema no tiene solucion ssi $(C\,|\,d)$ tiene una fila nula.
(b) Sistema tiene mas de una solucion ssi A tiene una fila nula.

Solucion

(a) ($\Rightarrow$) Falso; $(C\,|\,\underset{\sim}{d}) = \left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&0&1\end{array}\right]$ sistema no tiene solucion (0.3)

($\Leftarrow$) Falso: $(C\,|\,\underset{\sim}{d}) = \left[\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right]$ sistema tiene solucion (0.3)

(b) ($\Rightarrow$) Falso: $(C\,|\,\underset{\sim}{d}) = \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&1&1\end{array}\right]$ sistema tiene soluciones (infinitas) (0.3)

($\Leftarrow$) Falso: $(C\,|\,\underset{\sim}{d}) = \left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right]$ sistema tiene una unica solucion (0.3)

(1) Sistema dado: $\begin{aligned} x + ay - z &= 1 \\ -x + (a-2)y + z &= b \\ 2x + 2y + (a-2)z &= a \end{aligned}$

Solucion

Para analizar conjunto de las soluciones, se determina su forma escalonada:

(1,2) $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & a & -1 & 1 \\ -1 & a-2 & 1 & b \\ 2 & 2 & a-2 & a \end{array}\right) \xrightarrow{\text{pivote en }(1,1)}$ $\begin{aligned}(f1)' &= f1 \\ (f2)' &= f2+f1 \\ (f3)' &= f3-2f1\end{aligned}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & (2a-2) & 0 & b+1 \\ 0 & 2-2a & a & a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{pivote }(2,2)}$ $\begin{aligned}(f1)' &= f1 \\ (f2)' &= f2 \\ (f3)' &= f3+f2\end{aligned}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2a-2 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & a & a+b-1 \end{array}\right)$

(0.6) (i) Sistema no tiene solucion ssi $(2a-2=0$ y $b+1\neq 0)$ o $(a=0$ y $a+b-1\neq 0)$
ssi $(a=1$ y $b\neq -1)$ o $(a=0$ y $b\neq 1)$

(0.6) (ii) Sistema tiene una unica solucion ssi $2a-2\neq 0$ y $a\neq 0$ ssi $a\neq 1$ y $a\neq 0$

(0.6) (iii) Sistema tiene infinitas soluciones ssi $(2a-2=0$ y $b+1=0)$ o $(a=0$ y $a+b-1=0)$
ssi $(a=1$ y $b=-1)$ o $(a=0$ y $b=1)$

(2) Resolver el sistema: $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ 5x_1+4x_2+3x_3-x_4+4x_5 &= 3 \\ -2x_1-2x_2-x_3+2x_4-3x_5 &= -3 \\ 11x_1+6x_2-4x_3+x_4+11x_5 &= -2 \end{aligned}$

(1,8) Se calcula forma escalonada:

$\left(\begin{array}{ccccc|c} (1) & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Pivote en }(1,1)}$ $\begin{aligned}(f1)' &= f1 \\ (f2)' &= f2-5f1 \\ (f3)' &= f3+2f1 \\ (f4)' &= f4-11f1\end{aligned}$ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (-1) & -2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 1 & 11 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Pivote }(2,2)}$ $\begin{aligned}(f1)' &= f1+f2 \\ (f2)' &= -f2 \\ (f3)' &= f3 \\ (f4)' &= f4+5f2\end{aligned}$ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & (1) & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -9 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Pivote }(3,3)}$

$\begin{aligned}(f1)' &= f1 \\ (f2)' &= f2 \\ (f3)' &= f3 \\ (f4)' &= f4-3f3\end{aligned}$ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ La fila 4 del cuadro resultante se elimina (la ecuacion 4 del SEL inicial es redundante)

Las variables x_1, x_2 y x_3 son dependientes. Para obtener la solucion general del SEL se realiza el proceso de sustitucion (se puede operar con las correspondientes ecuaciones ó efectuar los calculos con el cuadro resultante) [(0,9) para la resolucion usada]

Usando las ecuaciones

ec.(f3): $x_3+2x_4-3x_5=-1 \longrightarrow x_3=-1-2x_4+3x_5$, reemplazando en ec.(f2), resulta:
$x_2+2(-1-2x_4+3x_5)+x_4-4x_5=2 \longrightarrow x_2=4+3x_4-2x_5$ (reemplazando x_2 y x_3 en ec(f1)):
$x_1+(4+3x_4-2x_5)+(-1-2x_4+3x_5)=1 \longrightarrow x_1=-2-x_4-x_5$

Usando el ultimo cuadro

Pivote (3,3) $\begin{aligned}(f1)' &= f1-f3 \\ (f2)' &= f2-2f3 \\ (f3)' &= f3\end{aligned}$ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & (1) & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Pivote }(2,2)}$ $\begin{aligned}(f1)' &= f1-f2 \\ (f2)' &= f2 \\ (f3)' &= f3\end{aligned}$ $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$ $\begin{aligned} x_1 &= -2-x_4-x_5 \\ x_2 &= 4+3x_4-2x_5 \\ x_3 &= -1-2x_4+3x_5;\ x_4=x_4 \\ x_5 &= x_5\end{aligned}$

(0.3) Solucion general: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pauta P3

Sean $\underset{\sim}{P}_0 = \begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{P}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{d}' = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{d}'' = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\Pi_1 : (\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{d}', \underset{\sim}{d}'')$; $\Pi_2 : x-y+2z=0$

(i) Determine $L = \Pi_1 \cap \Pi_2$ (1.5)

Solución. Π_1 está definido por la ec. vectorial: $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_1 + s\underset{\sim}{d}' + t\underset{\sim}{d}''$, $s,t\in\mathbb{R}$, y el vector $\underset{\sim}{n}_1 = \underset{\sim}{d}' \times \underset{\sim}{d}''$ define una normal a Π_1, y con $\underset{\sim}{P}_1$ y $\underset{\sim}{n}_1$ se determina la ecuación cartesiana de Π_1: $ax+by+cz=\alpha$, donde $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \underset{\sim}{n}_1$ y $\alpha = \underset{\sim}{n}_1 \cdot \underset{\sim}{P}_1$. Calculando, $\underset{\sim}{n}_1 = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ y $\alpha = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = -1$

Por lo tanto, la ec. cartesiana de Π_1 es: $x+y-z=-1$

La recta $L = \Pi_1 \cap \Pi_2$ se determina como el conjunto solución del sistema: $\begin{matrix} x-y+2z=0 & (1)\\ x+y-z=-1 & (2)\end{matrix}$

(2)-(1) implica: $2y-3z=-1$, i.e., $y = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z$, reemplazando en (1): $x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z=0$,

y por lo tanto, L queda definida por: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1/2\\3/2\\1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

(ii) Obtenga ecuación (vectorial) del plano Π_0 que pasa por $\underset{\sim}{P}_1$ y es ortogonal a L. (1.5)

Solución. La ec. vectorial de Π_0 es de la forma: $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_1 + s\underset{\sim}{d}_0' + t\underset{\sim}{d}_0''$, $\underset{\sim}{d}_0', \underset{\sim}{d}_0'' \neq \underset{\sim}{0}$ y no-paralelos. Como $L \perp \Pi_0$, el vector director de L, $\underset{\sim}{d}_L = \begin{pmatrix}-1/2\\3/2\\1\end{pmatrix}$ es un vector normal a Π_0, y por lo tanto, basta considerar dos vectores no-nulos y no-paralelos que sean ortogonales a $\underset{\sim}{d}_L$, por ej. $\underset{\sim}{d}_0' = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ y $\underset{\sim}{d}_0'' = \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ (ya que son no-nulos, no-paralelos y $\underset{\sim}{d}_0' \times \underset{\sim}{d}_0'' = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\underset{\sim}{d}_L$)

Lo anterior implica que: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$, $s,t\in\mathbb{R}$ es una ecuación vectorial de Π_0.

(Nota: en esta parte las respuestas serán distintas debido a la elección de $\underset{\sim}{d}_0'$ y $\underset{\sim}{d}_0''$, pero la argumentación es la misma).

(iii) Determine cuál de los planos Π_0, Π_1, Π_2 está más cerca de $\underset{\sim}{P}_0$.

(0.5) Para Π_0 (usando ecuación cartesiana de Π_0).

La ec. cartesiana de Π_0 es del tipo: $ax+by+cz=\alpha$, y la distancia de $\underset{\sim}{P}_0$ a Π_0 es:

$$d(\underset{\sim}{P}_0, \Pi_0) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-\alpha|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \text{ donde } \underset{\sim}{P}_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}.$$

Por (ii), $\underset{\sim}{d}_L = \begin{pmatrix}-1/2\\3/2\\1\end{pmatrix}$ es normal a Π_0 y como $\underset{\sim}{P}_1 \in \Pi_0$, la ec. cartesiana es: $-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+z=\alpha$, $\alpha = \underset{\sim}{d}_L \cdot \underset{\sim}{P}_1$ resultando la ecuación: $-x+3y+2z=13$, y por lo tanto, $d(\underset{\sim}{P}_0, \Pi_0) = \frac{|-29|}{\sqrt{14}} = \frac{29}{14}\sqrt{14}$ //

(1.0) Para Π_1. En este caso, $d(\underset{\sim}{P}_0, \Pi_1) = d(\underset{\sim}{P}_0, \underset{\sim}{r})$, donde $\underset{\sim}{r} = L_1 \cap \Pi_1$, y L_1 recta tal que $L_1 \perp \Pi_1$ y $\underset{\sim}{P}_0 \in L_1$

Por (i), $\underset{\sim}{n}_1$ es normal a Π_1, por lo tanto, $\underset{\sim}{P} \in L_1$ ssi $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_1 + s\underset{\sim}{n}_1$, i.e., $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; implicando $x=1+s$; $y=-5+s$; $z=-s$. Además, como $\underset{\sim}{r} \in \Pi_1$, el punto $\underset{\sim}{r}$ es la solución de: $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_1 + s\underset{\sim}{n}_1$, $\underset{\sim}{n}_1 \cdot \underset{\sim}{P} = -1$

Reemplazando x, y y z en $x+y-z=-1$, resulta: $(1+s)+(-5+s)+s=-1$, implicando, $s=1$, con lo cual, $\underset{\sim}{r} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$ y $d(\underset{\sim}{P}_0, \underset{\sim}{r}) = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ //

(1.5) Para Π_2. La ec. vectorial de Π_2 es del tipo: $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_2 + s\underset{\sim}{d}_2' + t\underset{\sim}{d}_2''$, $s,t\in\mathbb{R}$, $\underset{\sim}{P}_2 \in \Pi_2$ y $\underset{\sim}{d}_2' \times \underset{\sim}{d}_2''$ es normal a Π_2. Como la ec.: $x-y+2z=0$, define a Π_2, $\underset{\sim}{n}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ es normal a Π_2, y $\underset{\sim}{d}_2', \underset{\sim}{d}_2''$ se obtienen como en (ii), por ej.: $\underset{\sim}{d}_2' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\underset{\sim}{d}_2'' = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. Si $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{P}_2 + s\underset{\sim}{d}_2' + t\underset{\sim}{d}_2''$ es la proyección de $\underset{\sim}{P}_0$ sobre Π_2, entonces, s y t se obtienen resolviendo el sistema:

$\begin{bmatrix} d_2'\cdot d_2' & d_2'\cdot d_2'' \\ d_2''\cdot d_2' & d_2''\cdot d_2''\end{bmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d_2'\cdot(\underset{\sim}{P}_0-\underset{\sim}{P}_2)\\ d_2''\cdot(\underset{\sim}{P}_0-\underset{\sim}{P}_2)\end{pmatrix}$, y si $\underset{\sim}{P}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, el sistema es: $\begin{matrix}2s+2t=-6\\2s+5t=-9\end{matrix}$, con solución $\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

lo que implica que $\underset{\sim}{r} = \begin{pmatrix}0\\-4\\-2\end{pmatrix}$, con lo cual se concluye $d(\underset{\sim}{P}_0, \underset{\sim}{r}) = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Π_1 es el más cercano