EXAMEN

P1. Sea $S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

Si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es una aplicación lineal que cumple con:

$$\text{(i) } \mathrm{Ker}(f) = S, \qquad \text{(ii) } f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{(iii) } f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) (1,0 pto.) Encontrar una base de S, reduciendo el conjunto generador dado.

b) (1,0 pto.) Usando el Teorema Núcleo-Imagen, determine la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$.

c) (1,5 ptos.) Encontrar una base de $\mathrm{Im}(f)$.

d) (2,5 ptos.) Determinar explícitamente la aplicación f.

P2. a) (4,0 ptos.) Identifique y bosqueje la cónica de ecuación

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4\sqrt{2}\, x + 4\sqrt{2}\, y = 0$$

encontrando los cambios de variable que permitan centrarla con respecto a ejes adecuados. Explicite los cambios de variable requeridos y reconozca la cónica.

b) b1) (0,5 ptos.) Sea $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal, es decir, $P^t = P^{-1}$. Pruebe que si $v, z \in \mathbb{R}^n$ son tales que $v = P^t z$ entonces $\|v\| = \|z\|$.

b2) (1,5 ptos.) Dada $H \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, demuestre que

$$\alpha \|z\|^2 \leq z^t H z \leq \beta \|z\|^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

donde α es el mínimo valor propio de H y β es el máximo valor propio de H

Indicación: Si D es una matriz diagonal y $v \in \mathbb{R}^n$, recuerde que

$$v^t D v = d_{11} v_1^2 + d_{22} v_2^2 \ldots + d_{nn} v_n^2.$$

P3. Sea $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \neq 0$. Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, definida por $A = I + z_0 z_0^t$

1) (1,0 pto.) Pruebe que z_0 es vector propio de A y calcule el valor propio correspondiente.

2) (1,0 pto.) Pruebe que si $\mu \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a z_0, es decir $z_0^t \mu = 0$, entonces μ es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 1$.

3) (1,4 ptos.) Muestre que el Ortogonal a z_0, es decir $\{\mu \in \mathbb{R}^n | z_0^t \mu = 0\}$ es un Subespacio de $\mathbb{R}^n$ (debe demostrarlo) y su dimensión es $n-1$.

4) (1,2 ptos.) ¿Cuáles son los valores propios de A y sus multiplicidades? ¿Es A definida positiva? ¿Cuánto vale el determinante de A? Justifique sus respuestas.

5) (1,4 ptos.) Encuentre $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $A^{-1} = I + \beta z_0 z_0^t$.