Tema: Fecha: / /

⑥. Un hombre debe invertir un total de $ 15 000 en dos cuentas, Una que paga 4 % anual de interés simple y la otra de 3 %. Si quiere obtener $ 550 de interés anual ¿ Cuánto debe invertir en cada tasa ?

x = Cantidad invertida en el 4% de interés anual.

y = Cantidad invertida en el 3% de interés anual.

$$\begin{cases} x + y = 15\,000 \\ \frac{4\%}{100}x + \frac{3\%}{100}y = 550 \;/(100) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 15\,000 \\ 4x + 3y = 55\,000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 15\,000 \\ 4 & 3 & 55\,000 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 15\,000 \\ 0 & -1 & -5\,000 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10\,000 \\ 0 & 1 & 5\,000 \end{array}\right]$$

$A(-4)$ $\qquad$ $m_2(-1)\ A_{12}(-1)$

Solución : $\boxed{\begin{array}{l} x = 10\,000 \ \$ \\ y = 5\,000 \ \$ \end{array}}$ //

⑦. Un tren de carga y un expreso parten de ciudades que se encuentran a 390 km de distancia y viajan uno hacia el otro. El tren de carga viaja 30 km/h más lento que el expreso. Los trenes se encuentran 3 hrs después de haber partido. ¿ Cuáles son sus velocidades ?

x = Velocidad del tren de carga

y = Velocidad del tren Expreso.

Tema: Fecha: / /

$$\begin{cases} 3x + 3y = 390 \\ x = y - 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 390 \\ x - y = -30 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 390 \\ 1 & -1 & -30 \end{array}\right]$$

P_{12}

P_{12}

$$\cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -30 \\ 3 & 3 & 390 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -30 \\ 0 & 6 & 480 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 80 \end{array}\right]$$

$A_{21}(-3)$ $\quad$ $M_2(\frac{1}{6})\ A_{12}(1)$

Solución : $\boxed{\begin{array}{l} x = 50\ \text{Km/h} \\ y = 80\ \text{Km/h} \end{array}}$

(8). Una compañía produce tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y Aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1 500 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 Unidades
Sillones	1 unidad	2 unidades	5 Unidades

Tema: Fecha: / /

X = Cantidad de sillas que se debe fabricar

Y = Cantidad de mecedoras que se debe fabricar

Z = Cantidad de sillones que se debe fabricar

$$\begin{cases} x + y + z = 400 \\ x + y + 2z = 600 \\ 2x + 3y + 5z = 15000 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 1 & 1 & 2 & 600 \\ 2 & 3 & 5 & 1500 \end{array}\right] \underset{A_{21}(-1)\ A_{31}(-2)}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 3 & 700 \end{array}\right] \underset{P_{23}}{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 1 & 3 & 700 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right] \underset{A_{12}(-1)}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -300 \\ 0 & 1 & 3 & 700 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right] \underset{A_{13}(2)\ A_{23}(-3)}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right]$$

Solución: $\boxed{\begin{array}{l} X = 100 \text{ sillas} \\ Y = 100 \text{ mecedoras} \\ Z = 200 \text{ sillones} \end{array}}$ //

Tema: Fecha: 17/04/13

#3 Función:

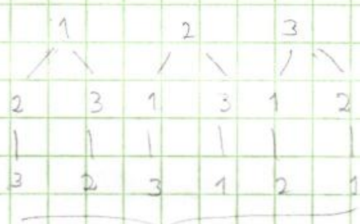
DETERMINANTE

Conceptos Previos:

$S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; $S_n = n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ej: 1) $S = \{1, 2, 3\}$ | $S_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

pa' determinar cada una de la Permutación de este conj. se realiza árbol de permutaciones.



Permutaciones

$r_1 = (1, 2, 3)$
$r_2 = (1, 3, 2)$
$r_3 = (2, 1, 3)$
$r_4 = (2, 3, 1)$
$r_5 = (3, 1, 2)$
$r_6 = (3, 2, 1)$

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$

$r = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ permutación

j_1: 1° entero en r.
j_2: 2do entero de r
j_n: enésimo entero de π

Inversión o trasposición:

Ej: Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Determinar el n° total de inversiones de las sgte. permutaciones.

Tema: se lee: σ (sigma) Fecha: / /

Nº de inversiones :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= (1,3,5,4,2,6) \rightarrow 0+1+2+1+0 = 4 \text{ inversiones}\\
\sigma_2 &= (1,2,3,6,4,5) \rightarrow 0+0+0+2+0 = 2 \text{ "}\\
\sigma_3 &= (3,1,4,6,5,2) \rightarrow 2+0+1+2+1 = 6 \text{ "}\\
\sigma_4 &= (1,2,3,4,5,6) \rightarrow 0+0+0+0+0 = 0 \text{ "}
\end{aligned}\right\}\text{Permutac. par}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_5 &= (6,5,4,3,2,1) \rightarrow 5+4+3+2+1 = 15 \text{ "}\\
\sigma_6 &= (3,1,4,6,2,5) \rightarrow 2+0+1+2+0 = 5 \text{ "}\\
\sigma_7 &= (3,1,2,6,5,4) \rightarrow 2+0+0+2+1 = 5 \text{ "}
\end{aligned}\right\}\text{Permut. impar}$$

• CLASIFICACIÓN DE LAS PERMUTACIONES
- Permutación Par : nº inv. par
- " Impar : n " impar

Ej. Clasificar las permut. de ej. anterior.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ = permutaciones par.

$\boxed{\text{Nota: Por definición el cero es par)}}$

$\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$ = permutación impar.

PRODUCTO ELEMENTAL EN UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN N : $A_{(n)}$

Ej: Determinar todos los productos elementales de la matriz cuadrada de orden 3.

$$A_{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Productos Elem

$(a_{11} a_{22} a_{33})$ $(a_{13} a_{22} a_{31})$

$(a_{12} a_{23} a_{31})$ $(a_{11} a_{23} a_{32})$

$(a_{13} a_{21} a_{32})$ $(a_{12} a_{21} a_{33})$

Tema: Fecha: __/__/__

$\Rightarrow (a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, a_{3j_3})$ producto elemental generico de $A_{(3)}$

donde (j_1, j_2, j_3) es la permutación generica de $\{1,2,3\}$ como existe $3! = 6$ permutaciones, se tendrán 6 product elem para $A_{(3)}$

$A_{(4)} \Rightarrow (a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{4j_4})$ Product. elem generico de $A_{(4)}$

$\Rightarrow A_{(4)}$ tendrá $4! = 24$ product elem

$\Rightarrow A_{(5)}$ " $5! = 120$ " "

En gral :

$A_{(n)} \Rightarrow$ tendrá $n!$ product elem

Producto Elemental con signo en $A_{(n)}$:

$$\underbrace{(a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n})}_{\text{Prod. Elem. generico}} \rightarrow \underbrace{(j_1, j_2, \ldots, j_n)}_{\text{Permutación de las columnas}}$$

Si la permut. es par $\Rightarrow (+)$

Si la permut. es impar $\Rightarrow (-)$

Ej :

	Productos Elem		Permut. columna	nº inversión	Par/Impar
+	( )	$\rightarrow$	$(1,2,3)$	$0+0=0$	Par
+	( )	$\rightarrow$	$(2,3,1)$	$1+1=2$	"
+	( )	$\rightarrow$	$(3,1,2)$	$2+0=2$	"
−	( )	$\rightarrow$	$(3,2,1)$	$2+1=3$	Imp
−	( )	$\rightarrow$	$(1,3,2)$	$0+1=1$	"
−	( )	$\rightarrow$	$(2,1,3)$	$1+0=1$	

Tema: Fecha: / /

Ej: Calcular el signo del sgte producto elemental en una matriz de orden 6.

$-(a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\, a_{45}\, a_{56}\, a_{64})$

$(3,2,1,5,6,4) \to 2+1+0+1+1 = 5$ inversiones

Definición de la función determinante: (El determinante de $A_{(n)}$)

$(|A| = \det(A))$ es la suma de los $n!$ productos elem. con signo de A.

Método de Sarrus: Pa' matrices de orden 3 $[A_{(n)}]$

Repetic de filas $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \; - \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Repetición de columnas $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$|A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13}\, a_{21}\, a_{32}) - (a_{13}\, a_{22}\, a_{31}) - (a_{11}\, a_{23} \cdot a_{32}) - (a_{12}\, a_{21}\, a_{33})$.

Ej: Hallar el det. de las sgte matrices.

Tema: Fecha: / /

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2+12+2+3 = 15$

2) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (2)(-4)-(-1)(3) = -8+3 = -5$

Propiedades de la función determinante

Pa' toda matriz A (n) se tiene:

teorema # 1: $|A^t| = |A|$

Ej:

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = -2+12+2+3 = 15$

$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = -8+3 = -5$

teorema # 2

a) Si una matriz tiene una fila o columna nula su determinante es igual a 0 $\det|A| = 0$

Ej $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$

b) si en una matriz hay filas o columnas idénticas su det $= 0$

Ej:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -3+2+3-2 = 0$

filas o columnas =

Tema: Fecha: / /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -9 + 24 + 36 - 9 - 24 - 36 = 0$$

(3° columna) = 3 (1° columna).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -3 + 6 - 4 + 1 = 0$$

(3° fila) = (1° fila) + (2° fila)

c) En una matriz triangular la det es = al producto de la diag. principal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (1)(-1)(2) = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (2)(2)(2) = 8$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -6$$

Teorema #3: si B se obtiene a partir de A:

a) $\left.\begin{array}{l} P_{ij} \to A \\ P_{ij}^{c} \to A \end{array}\right\} \Rightarrow B \Rightarrow |B| = -|A|.$

$\det(B) = -|A|$

Tema: ____________________ Fecha: __/__/__

Ej:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{|A| = 15}$$

$$P_{12} \curvearrowright A \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |B| = -3-2-12+2 = -15 \\ |B| = -|A| \end{cases}$$

$$P^{c}_{23} \curvearrowright A \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |B| = -3-2+2-12 = -15 \\ |B| = -|A| \end{cases}$$

(b)

$$\left. \begin{array}{l} M_i(k) \curvearrowright A \Rightarrow B \\ M^{c}_j(k) \curvearrowright A \Rightarrow B \end{array} \right\} \Rightarrow |B| = k|A|$$

Ej:

$$M_2(-2) \curvearrowright A \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |B| = 4-24-4-6 = -30 \\ |B| = (-2)|A| = (-2)(15) = -30 \end{cases}$$

$$M^{c}_1(3) \curvearrowright A \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |B| = -6+36+6+9 = 45 \\ |B| = (3)|A| = (3)(15) = 45 \end{cases}$$

(c).

$$\left. \begin{array}{l} A_{ij}(k) \curvearrowright A = B \\ A^{c}_{ij}(k) \curvearrowright A = B \end{array} \right\} \Rightarrow |B| = |A|$$

$$A_{21}(-2) \curvearrowright A \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |B| = -2+2+15 = 15 \\ |B| = |A| \end{cases}$$

$$A^{c}_{31}(-2) \curvearrowright A \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |B| = 15 \\ |B| = |A| \end{cases}$$

Utiliza el c) teorema #2 y el teorema #3

Tema: Fecha: / /

Observación: en el inciso b.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Ya no se multiplica por el inverso multiplicativo, ahora se factoriza por un escalar K una sola fila o columna.

Tarea: Aplicando el c) del teorema #2 y teorema #3 resolver

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{A_{31}(-2)\ A_{41}(-3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & 4 & -8 \end{vmatrix} \underset{P^{c}_{23}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$A_{32}(-2) \quad A_{42}(-4)$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -12 \end{vmatrix} = (-)(-9)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8/9 \\ 0 & 0 & -15 & -12 \end{vmatrix} \underset{A_{43}(15)}{=} (-)(-9)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8/9 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 \end{vmatrix}$$

$$= (-)(-9)(4/3) = \frac{\overset{12}{\cancel{36}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \boxed{12}$$ //

Tema: ______ Fecha: __/__/__

* Cálculo de la det. de 1 matriz de orden n.

por reducción a la forma triangular.

Utilizando el índice c) del teorema # 2 y tomando en cuenta el teorema # 3, se puede calcular el det de una matriz de orden n tal como se muestra en el sgte ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & 4 & -8 \end{vmatrix} = (-) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & 4 & -7 \end{vmatrix}$$

$A_{31}(-2)\ A_{41}(-3)$ $\qquad P^{c}_{24}$ $\qquad A_{32}(6)\ A_{42}(8)$

$$= (-) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{vmatrix} = (-) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix} = (-)(8)(-3/2) = \boxed{12}$$

$A_{43}(-12/8)$

Otra forma :

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{vmatrix} = (-)(8) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/8 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{vmatrix} = (-8) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix}$$

$A_{43}(-12)$

$$= (-8)(-3/2) = \frac{24}{2} = \boxed{12}$$

Tema: Fecha: / /

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = \underline{-546}$ //

$A^{c}_{41}(-3)$

Teorema #5 :

Ej: Para una matriz $A(n)$, determinar.

a) $|K.A| = K^n |A|$.

si $A_{(2)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$KA = \begin{vmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{vmatrix} \Rightarrow |KA| = \begin{vmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{vmatrix} = K.K \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = K^2 |A|$.

si $A(2) \Rightarrow |KA| = K^2 |A|$

si $A(3) \Rightarrow |KA| = K^3 |A|$

G)zl = $|KA| = K^n |A|$.

b) A^{-1} :

$|A A^{-1}| = |I|$

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

② Ejercicio :

Si $|2A| = -6$; si A es de orden 4.

a) $|3 A A^t| = (3)^4 |A A^t| = (3)^4 |A| |A^t| = (3)^4 |A| |A| = 3^4 |A|^2$

$(3)^4 \cdot (-\frac{3}{8})^2 =$ ______ //

Tema: ______ Fecha: __/__/__

Sabemos: $|2A| = -6 \Rightarrow 2^4\,|A| = -6$

$$|A| = \frac{-6}{(2)^4} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$|A| = -3/8$$

b) $(2)\,|4AA^{-1}| = 2\,(4)^4\,|AA^{-1}| = 2\,(4)^4\,|A|\,|A^{-1}|$

$$= 2\,(4)^4\,\cancel{|A|}\cdot\frac{1}{\cancel{|A|}}$$

$$= 2\,(4)^4 = 512$$

Menores y cofactores de a_{ij} en $A_{(n)}$:

Menor de a_{ij} : $|M|$

Cofactor de a_{ij} : $A^*_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$

Ej: Encontrar el menor y el cofactor de todos los elementos de la sgte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a_{11}: $|M_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3$; $A^*_{11} = 3$

a_{12}: $|M_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$; $A^*_{12} = -5$

a_{13}: $|M_{13}| = -2$; $A^*_{13} = -2$

a_{21}: 7 ; -7

a_{22}: 5 ; 5

a_{23}: -3 ; 3

Tema: Fecha: / /

$a_{31} <^{6}_{6}$ $a_{32} <^{5}_{-5}$ $a_{33} <^{-4}_{-4}$

Definición

$$A^* = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -7 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

→ Matriz de Cofactores de A

$$Adj(A) = \text{adjunta de } A = (A^*)^t$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 6 \\ -5 & 5 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

teorema #6 metodo la Place.

Ej:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \quad |A| = (2)A^*_{21} + \cancel{(0)A^*_{22}} + (3)A^*_{23}$$

$$= (2)(-7) + (3)(3) = -14 + 9$$

$$= -5.$$

$$|A| = (2)(-5) + (-1)(-5) = -10 + 5 = -5$$

Recomendaciones pa aplicar el metodo de cofact (La Place) pa' calcular la det. de una matriz de orden n $A_{(n)}$:

Se escoge una fila (columna) donde se tenga un elemento = a la unidad y mejor aun si hay ceros.

Se eliminan todos los elementos de la fila (columna) trabajando con el elemento unitario

Tema: ______ Fecha: __/__/__

Se aplica el método de La Place sobre la fila (columna) trabajada y se tendrá solo el elem. unitario por su cofactor.

Sobre este resultado se aplica nuevamente el proceso hasta llegar a una matriz de orden 2 cuyo determinante es el buscado.

Ej ①

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{A_{31}(-2) \\ A_{41}(-3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & 4 & -8 \end{vmatrix} = a_{11}A^*_{11} + \cancel{a_{21}A^*_{21}}$$

$$+ \cancel{a_{31}A^*_{31}} + \cancel{a_{41}A^*_{41}} = (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \\ -7 & 4 & -8 \end{vmatrix} \underset{\substack{A^c_{12}(-2) \\ A^c_{32}(-1)}}{=} (1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & 2 & -8 \\ -15 & 4 & -12 \end{vmatrix} = \cancel{a_{11}A^*_{11}} + a_{12}A^*_{12} + \cancel{a_{13}A^*_{13}}$$

$$= (1)(1)(-) \begin{vmatrix} -9 & -8 \\ -15 & -12 \end{vmatrix} = -(-12) = 12$$

②

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{A_{12}(-3) \\ A_{32}(-1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & -11 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)(-) \begin{vmatrix} 1 & 8 & -11 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{A_{12}(-1) \\ A_{32}(-2)}}{}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & 4 & -10 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(1)(-) \begin{vmatrix} 4 & -10 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{-54}$$ //

Tema: Fecha: / /

C. A:

$\rightsquigarrow \cancel{a_{13}} + a_{23} A^{*}_{23} + \cancel{a_{33}} + \cancel{a_{43}}$

$\rightsquigarrow \cancel{a_{11}} + a_{21} A^{*}_{21} + \cancel{a_{31}}$

Teorema #7:

$$\forall A_{(n)} \Rightarrow A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A| \, I_{(n)}$$

donde: $adj(A) = (A^*)^t$

└ matriz de cofactores.

a partir ...

$$A \cdot Adj(A) = |A| \, I_{(n)}$$

si $|A| \neq 0$, A tiene inversa:

$$(A^{-1} A) \, adj(A) = A^{-1} (|A| \, I_{(n)})$$

$$a \quad '' \quad = |A| \, \underbrace{A^{-1} I}$$

$$'' \quad = \quad '' \quad A^{-1}$$

$\boxed{}$

NOTA: Para matrices de orden 2 e inclusive de orden 3 esta fórmula es mucho más eficiente q' el método de Gauss, sin embargo no es aconsejable pa' matrices de orden > 3

Ej: calcular la inversa de la sgte matrices aplic la fórmula

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2$. $\qquad adj(A) = (A^*)^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$A^* = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Tema: Fecha: / /

aplic. la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$$

$$\boxed{A^{-1} = \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}$$

Verif

$$A^{-1} \cdot A = I.$$

(2).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = +6$$

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Aplicación de la función determinante en la solución de sistemas lineales

Para sistemas no homogéneos ($AX = B$) donde el $n = r$, es decir la matriz de coefic. es cuadrada y además el det $|A| \neq 0$ se puede aplicar la regla de cramer. y el det de la matriz que se obtiene al sustituir la columna i de la $[A]_{matriz}$ por B entonces:

$$AX = B \qquad |A| \neq 0$$

Regla Cramer $\left\{ \begin{array}{l} \text{llamando } \Delta = |A| \\ \Delta_i = \text{determinan de} \end{array} \right.$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \; ; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \; ; \; \dots \; ; \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Lunes 06 may 1° Exam Par

Tema: Fecha: / /

Ej: Aplicando resolver el sgte sistema.

① $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 3 - 8 = -9$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{4} - 3 + 6 - \cancel{4} = 3 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{9}{-9} = -1$$

#4 VECTORES :

Y GEOMETRIA VECTORIAL

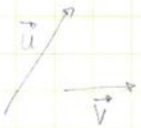
Analisis geométrico de vectores, operaciones y propiedades

Representación: $\vec{u}$; $\bar{u}$

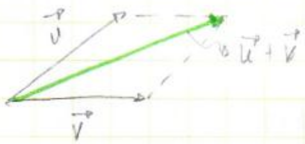
Vectores Equivalentes

$\vec{\mu}=\vec{v}=\vec{\omega}$

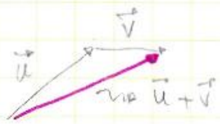
Suma de Vectores:



Regla del Paralelogramo

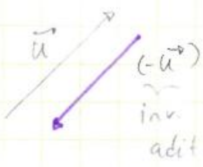


Regla del polígono



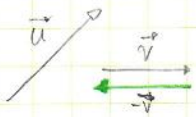
Vector cero   si se + con otro vector = al mismo vector q' se +

vector Inv. aditivo:



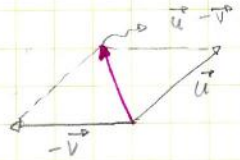
$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

- Diferencia de vectores:

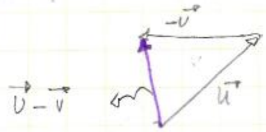


$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \underbrace{(-\vec{v})}_{\text{Inv. aditivo}}$$

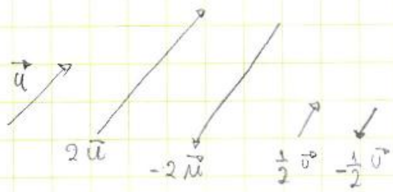
por la Reg. paralelogr.



por el polígono

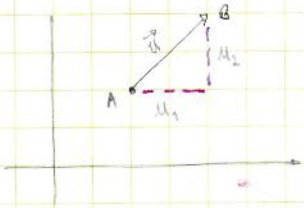


Multiplicación por un escalar



$K > 0$ ↑↓ la magn $\vec{u}$
$<$ y el sentido

- Vectores en R^2



$$\boxed{\vec{u} = (u_1, u_2) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)}$$

$u_1 =$
$u_2 =$

$$\boxed{\vec{u} = \vec{AB} = B - A}$$

- Vector cero en $\mathbb{R}^2$: $\vec{0} = (0,0)$
- Inv. aditivo de $\vec{v}$: $(-\vec{v})$

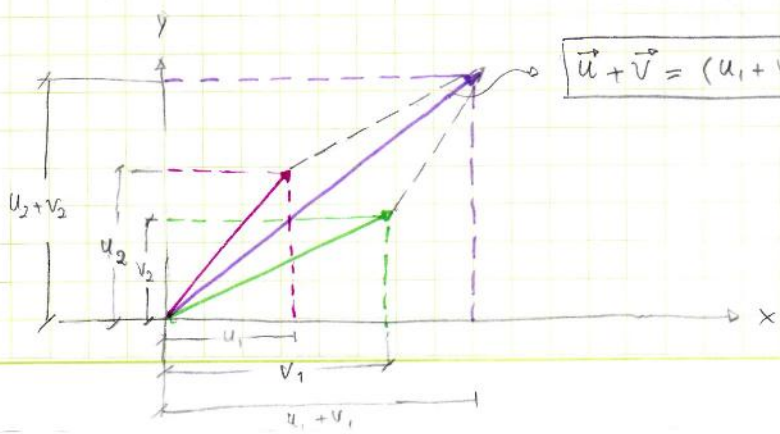
$\vec{v} = (v_1, v_2) \Rightarrow -\vec{v} = (-v_1, -v_2)$

R^3

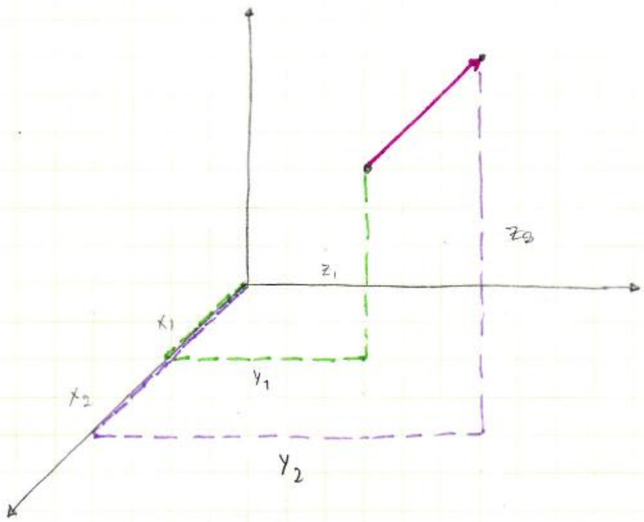
$\vec{0} = (0,0,0)$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow -\vec{v} = (-v_1, -v_2, -v_3)$

* Justificación geométrica de la suma de vectores



$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)}$$



$$\begin{cases} A = (x_1, y_1, z_1) \\ B = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$$

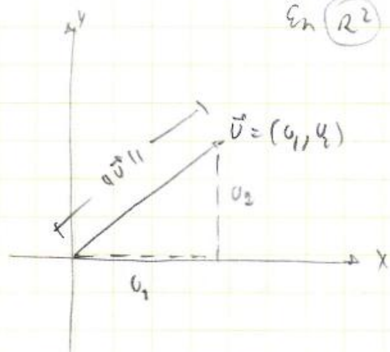
$$\boxed{\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = \vec{AB}}$$

$$\begin{cases} u_1 = x_2 - x_1 \\ u_2 = y_2 - y_1 \\ u_3 = z_2 - z_1 \end{cases}$$

Norma de un vector: Long. tamaño de un vector: $(\|\vec{u}\|)$

Ej: Podemos justificar estas definiciones geométricamente de la sgte manera.

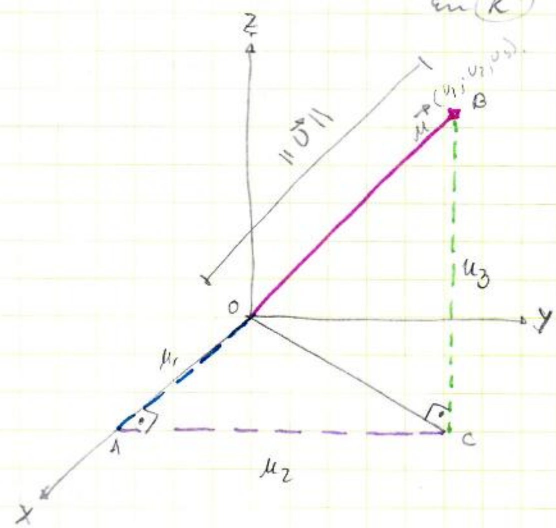
En $\mathbb{R}^2$



$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2}}$$

$hip^2 = u_1^2 + u_2^2$

En $\mathbb{R}^3$



En el triángulo rectángulo: OCB

$$(\overline{OB})^2 = (\overline{OC})^2 + (\overline{CB})^2 \quad (1)$$

en el triangulo rectangulo: OAC.

$$(\overline{OC})^2 = (\overline{OA})^2 + (\overline{AC})^2 \quad (2)$$

$hip^2 = cat_1^2 + cat_2^2$

sustituyendo (2) en (1)

$$(\overline{OB})^2 = (\overline{OA})^2 + (\overline{AC})^2 + (\overline{CB})^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1 + u_2 + u_3}}$$

Vector Unitario:

Sobre cualquier vector $\vec{u}$ se puede obtener un valor unitario aplicando la sgte expresión:

$$\boxed{\vec{e}_{\vec{u}} = \left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right)\vec{u}}$$

- $\vec{e}$ es un vector unitario cuando $\|\vec{e}\| = 1$
- $\vec{e}_{\vec{v}}$: vector Unitario sobre $\vec{v}$

Ej: Obtener sobre el vector $\vec{v}$ un vector unitario.

$\vec{v} = (2,-1,-1)$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$

$\vec{e}_{\vec{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)(2,-1,-1) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$

$\boxed{\vec{e}_{\vec{v}} = (2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})}$ vector unit sobre $\vec{v}$

Verificando: $\|\vec{e}_{\vec{v}}\| = 1$

$\|\vec{e}_{\vec{v}}\| = \sqrt{(2/\sqrt{6})^2+(-1/\sqrt{6})^2+(-1/\sqrt{6})^2}$

$= \sqrt{6/6} = 1$

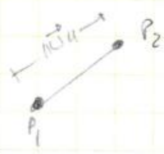
$\|\vec{e}_{\vec{v}}\| = 1$

$\boxed{\text{la } \|\ \| \text{ siempre es } \geq 0}$ xq es una long.

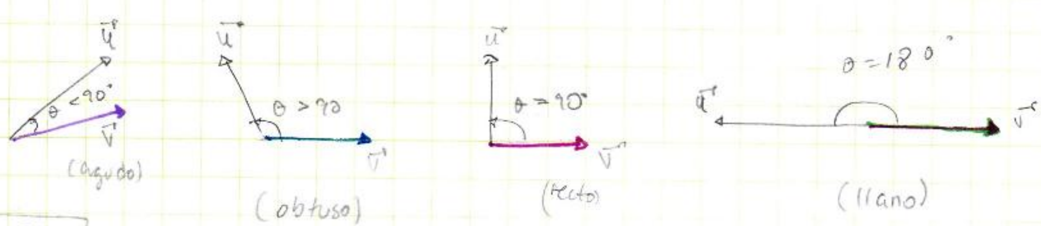
* Distancia entre dos puntos

Si P_1 y P_2 son 2 puntos ya sea en $R^2, R^3, \dots, R^n$ entonces la distancia entre esos " " es = a la norma del vector q. une a los 2 puntos

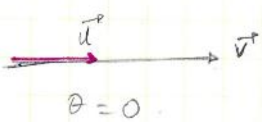
$$\boxed{d(P_1,P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|}$$



* Ángulo entre 2 vectores: Espacio comprendido entre 2 vect.



$\boxed{0 \leq \theta \leq 180}$



Nº Tema Fecha

x q sale un resultado es un escal. — Pro• — es como se repres. — Prod. int — porq trabajo con las comp. cartesian.

Multiplicación de vectores $\begin{cases} \text{Producto escalar} \\ \text{" Vectorial.} \end{cases}$

- Producto Escalar. también conocido como producto punto o interior, esta definido pa' vectores en $R^2, R^3, \ldots R^n$ por la sgte expresión : $(\vec{u} \bullet \vec{v})$ [Resultado escalar + ó −].

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta & \text{si } \vec{u} \neq 0 \text{ y } \vec{v} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \vec{u} = 0 \text{ o } \vec{v} = 0 \end{cases}}$$

trabajando con las componentes se puede facilmente deducir :

En R^2 . . .

En R^3 . . .

En R^n . . .

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$ $\quad >0 \quad <0 \quad \cos(+) \quad (-)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \Rightarrow \boxed{\theta = \text{Arc}\left(\cos \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}\right)}$$ angulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

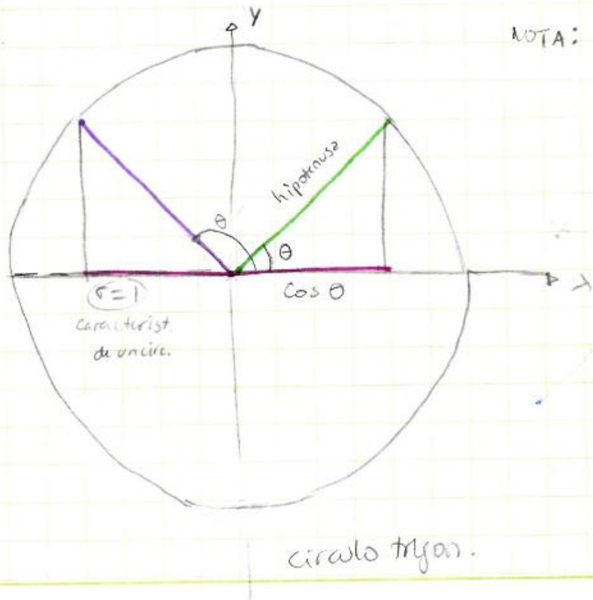
prod. interno

$\cos\theta = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}}$,

$\cos\theta = \text{cat ady}$

$\theta < 90 \Rightarrow \cos(+)$

$\theta \geq 90 \Rightarrow \cos(-)$



circulo trigon.

NOTA: el q' hace variar es el prod. int pa' signo porq puede ser un escalar + o − en cambio ‖ ‖ siempre son + ≥ 0

$c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$\cos\theta = \sqrt{hip^2 - b^2}$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores en R^2 ó R^3 entonces :

a) $\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$

b) si el producto interno ($\vec{v} \cdot \vec{v}$) es $>0 \Rightarrow \theta$ es agudo ($\theta < 90°$)

es $<0 \Rightarrow$ ($\theta > 90°$)

es $=0 \Rightarrow \theta = 90°$

Ej: a) $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1 u_1 + u_2 u_2$

$\underline{\vec{u} \cdot \vec{u}} = u_1^2 + u_2^2$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\underline{u_1^2 + u_2^2}} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

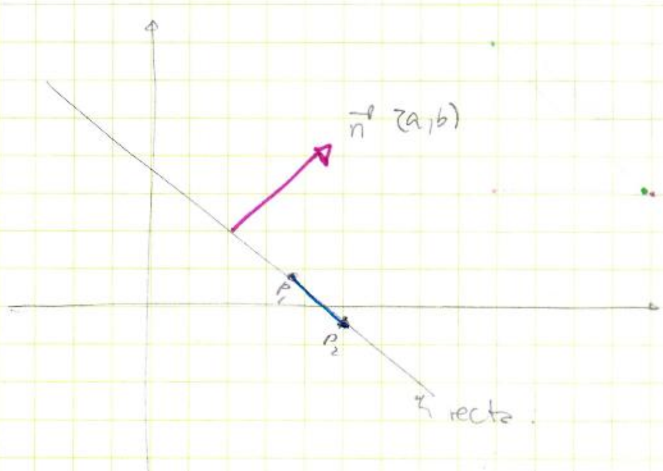
$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

VECTORES ORTOGONALES (Perpendiculares)

Tambien llamado $\perp$, forman un θ de $90°$ y su producto interno es igual a 0.

Ej: Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación en el plano. Demostra que el $\vec{n}$ de comp (a, b) es $\perp$ a la recta

$ax + by + c = 0 \Rightarrow \vec{n} = (a, b)$



Nº Tema Fecha

tomando los puntos P1 y P2 sobre la recta, basta demostrar q' n es perpendi. a $\overline{P_1P_2}$ pa' demostrar q' $n \perp$ Recta.

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = (x_1, y_1) \\ P_2 = (x, y) \end{array}\right\} \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{P_1P_2} \iff \vec{n} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2}) = 0$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\boxed{a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0}$$

Como P_1 y $P_2 \in$ recta

$$\left.\begin{array}{l} a x_1 + b y_1 + c = 0 \\ a x_2 + b y_2 + c = 0 \end{array}\right\} \; \text{q } R/m/m$$

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

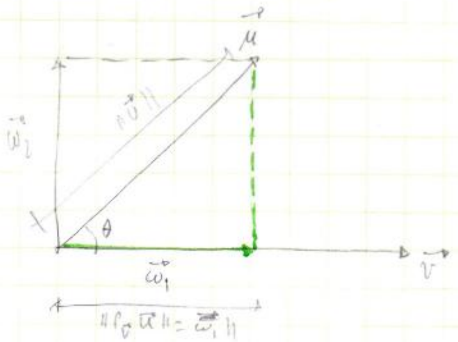
Por lo tanto $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$

es decir

$\vec{n} \perp$ a Recta.

Aplic. Propiedades

Proyección Ortogonal de un vector sobre otro.



$\vec{w}_1$ = Proyección ortog. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

$P_{\vec{v}}\vec{u}$

(1) $\boxed{\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2}$

Esta proyección tb puede interpretarse como la descomposición del $\vec{u}$ en la + de 2 vect ortog., donde:

$\vec{w}_1$: componente vect de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

$\vec{w}_2$: " " " " $\perp \vec{v}$

Sabemos que $\boxed{\vec{\omega}_1 = K\vec{V}}$ pa' algun $K \in \mathbb{R}$

Si sustituimos esta ecuac en (1) tendremos :

$\vec{u} = K\vec{V} + \vec{\omega}_2$

Si multipl. intern por $\vec{V}$ c/u de los vectore de esta igualdad tendremos :

$$\vec{u} \circ \vec{V} = (K\vec{V} + \vec{\omega}_2) \circ \vec{V} = K(\vec{V} \circ \vec{V}) + \cancel{\vec{\omega}_2 \circ \vec{V}}^{\,0} \qquad \omega_2 \perp V$$

$$\vec{u} \circ \vec{V} = K(\vec{V} \circ \vec{V})$$

$$\therefore \quad K = \left(\frac{u \circ V}{V \circ V}\right) \Rightarrow \qquad \omega_1 = P_{\vec{V}}\vec{u} = \left(\frac{u \circ V}{V V}\right)\vec{V}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_2 = \vec{u} - \vec{\omega}_2}$$

· Norma de la proyección ortogonal de u sobre V

$$\|P_{\vec{V}}\vec{u}\| = \left\| \qquad \right\| = \left(\qquad \right) \| \quad \|$$

en el gráfico

$$\cos\theta = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\|P_V u\|}{\|u\|}} \Rightarrow \boxed{\|P_V u\| = \|u\| \, |\cos\theta|}$$

Ej Sean $\vec{u} = (1,2,-1)$ y $\vec{V} = (0,1,-3)$

a) $P_{\vec{V}}\vec{u}$ b) Encontra comp. vect $\vec{u}$ de / manera q' $\vec{u}$ sea $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

c) Encontrar $\| \ \|$ de $P_{\vec{v}} \vec{u}$ utilizando el a)

d) Verificar q' la norma antes calculada es $= \|\vec{U}\| |\cos\theta|$ formado entre esos 2 vectores

Solución

a) $\boxed{P_{\vec{v}} \bar{u}} = \left(\frac{\bar{U} \cdot \bar{V}}{V \cdot V}\right) \bar{V} = \left(\frac{5}{10}\right) (0, 1, -3) = \boxed{(0, 1/2, -3/2)}$

$U \cdot V = 2 + 3 = 5$

$V \cdot V = 1 + 9 = 10$

b) $\begin{cases} \bar{w}_1 = P_{\vec{v}} \bar{u} = (0, 1/2, -3/2) \\ \bar{w}_2 = (1, 3/2, 1/2) \end{cases}$

$\bar{w}_2 = \bar{U} - \bar{w}_1$
$= (1, 2, -1) - (0, 1/2, -3/2)$
$= (1, 3/2, 1/2)$

Verificando

$\bar{u} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = (1, 2, -1)$ $\begin{cases} \bar{w}_1 = \text{comp. vect. de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} \\ \bar{w}_2 = \quad " \quad " \quad " \quad \vec{v} \end{cases}$

c) $\| P_{\vec{v}} \vec{u} \| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

d) $\| P_{\vec{v}} \vec{u} \| = \|\vec{U}\| |\cos\theta| = \sqrt{6} \left(\frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{10}}\right) = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

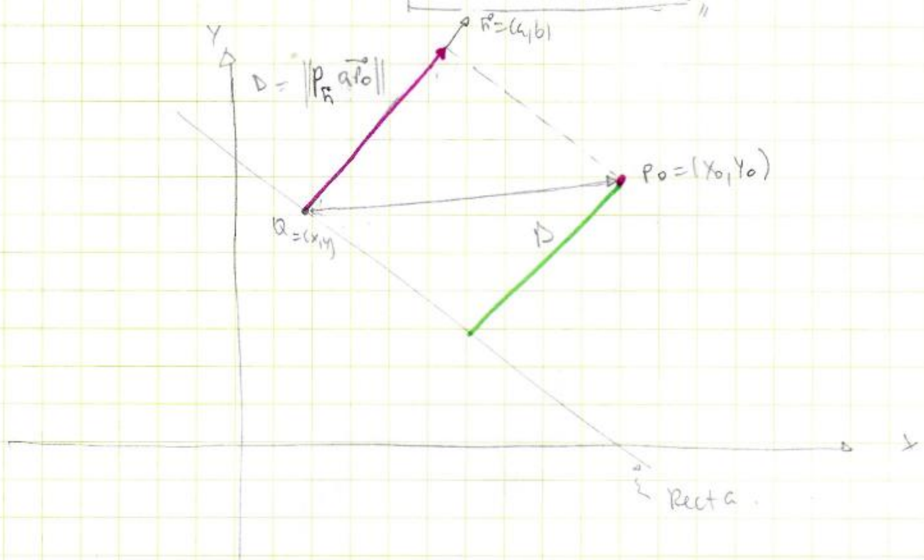
$\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$

$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{10}}$

Ejercicio de aplicación:

Si $P_0 = (x_0, y_0)$ es un punto en el espacio bidimensional y $ax + by + c = 0$ es una recta. Demostrar q' la dist. del punto a la Recta es = a:

$$\boxed{D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



Por el punto Q ∈ Recta trazar el vector $\vec n$ q' es ⊥ Recta

Uniendo Q con P_0 tenemos un $\vec v$ proyectoctando este vector $\overrightarrow{QP_0}$ ortogonalmente sobre $\vec n$ podemos observar que la norma de esta proyección es la dist buscada (D)

$$P_{\vec n}\, \overrightarrow{QP_0} = \left(\frac{(QP_0)\circ \vec n}{\vec n \circ \vec n}\right)\vec n$$

$$\| \quad \| = \left| \quad \right| \|\vec n\|$$

$$= \frac{|(\overline{QP_0} \circ \vec n|}{\|n\|^2} \|\vec n\|$$

$$= \frac{|(\overline{QP_0}) \circ \vec n|}{\|\vec n\|} = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\| P_{\vec{n}}\, \overline{QP_0} \| = \frac{|a x_0 + b y_0 + (-ax - by)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

de la ecuación de la recta

$$a x + b y + c = 0$$

$$c = -ax - by.$$

$$\boxed{\| P_{\vec{n}}\, \overline{QP_0} \| = d = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$ //

Producto Vectorial o Producto Cruz (Valido pa' vect. R^3)

Se puede llegar a esta definición aplicando el proceso nemotécnico:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ej. Determinar $(\vec{u} \times \vec{v})$, sean

$$\vec{u} = (1, 2, 3) \qquad \vec{v} = (3, -1, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) = (3, 9, -7).$$

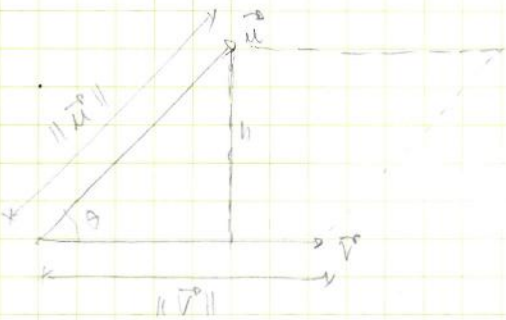
Verificando: $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ ó verif. en $\vec{v}$

$$(1, 2, 3) \cdot (3, 9, -7) = 3 + 18 - 21 = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$$

Interpretación geométrica del Producto Vectorial.

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = A_{\square} \quad (\text{formado por } \vec{u} \text{ y } \vec{v})$$



$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cat opues}}{\text{hipoten.}}$$

$$\text{SEN } \Theta = \frac{h}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow h = \|\vec{v}\| \text{ SEN } \Theta$$

Sabemos que:

$$A_{\square} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$A_{\square} = \|\bar{v}\| \, \|\bar{u}\| \text{ sen } \theta$$

$$\boxed{A_{\square} = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\| \text{ sen } \theta}$$

De la igualdad de Lagrange

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$$

$$'' \quad = \quad '' \quad - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2\theta$$

$$'' \quad = \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$= \|u\|^2 \|v\|^2 \text{ sen}^2\theta \qquad (\checkmark)$$

sabemos

$$u \times v = \|u\| \, \|v\| \text{ sen}\theta$$

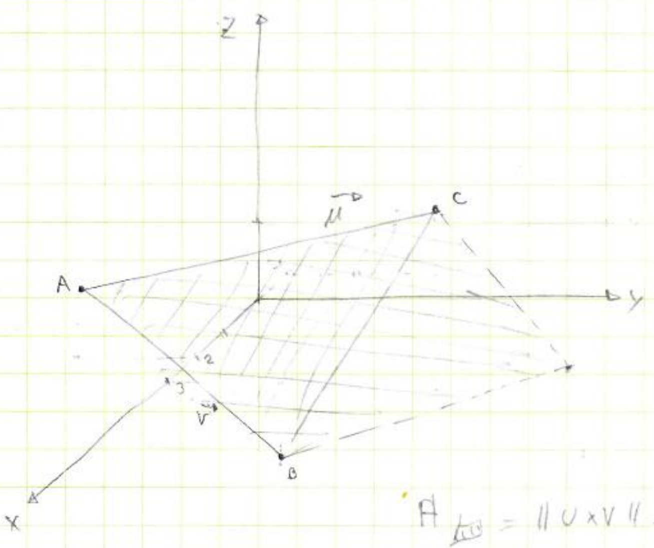
$$(u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2\theta$$

$$\boxed{\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \text{ sen } \theta}$$

$$\therefore \quad \boxed{\|u \times v\| = A_{\square}} \quad \checkmark$$

Ej. ① : Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son

$A = (2,-3,2)$; $B = (3,3,-2)$ y $C = (-1,4,2)$



$$\vec{u} = \overline{AC} = (-3,7,0)$$

$$\vec{v} = \overline{AB} = (1,6,-4)$$

$$\Rightarrow u \times v = (-28,-12,-25)$$

$$\|u \times v\| = A_{\square}$$

Obs. $A_{\Delta} = \dfrac{A_{\square}}{2}$

$$A_{\square} = \|u \times v\| = \sqrt{(-28)^2 + (-12)^2 + (-25)^2} = 39.4$$

$$A_{\Delta} = \frac{39.4}{2} = 19.7 \text{ u.d.a.}$$

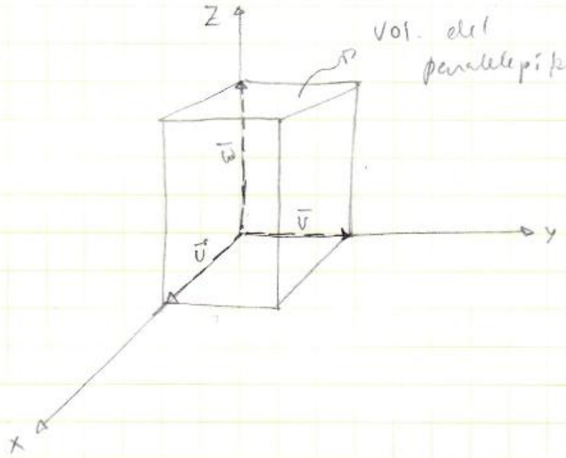
° Triple producto Escalar o producto mixto

$$\left.\begin{array}{l} u = (u_1, u_2, u_3) \\ v = (v_1, v_2, v_3) \\ w = (w_1, w_2, w_3) \end{array}\right\} \in R^3 \Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$ se denomina tripl. prod. esc.

(Prod mixto)

Propiedades

2°)



Vol. del paralelepípedo. $= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

3°)

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Nº Tema Fecha

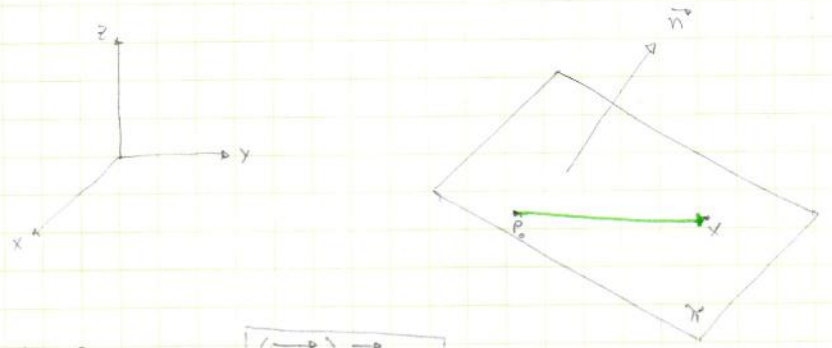
Rectas :

Utilizando la propiedades vectoriales de los vectores en $\mathbb{R}^3$ se pueden obtener todas las ecuaciones de planos y de las rectas en el espacio tridimensional euclidiano (con prod interno definido).

Este estudio recibe el nombre de geometría vectorial y nos lleva a los mismos resultados de la geometría analítica.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Para definir en $\mathbb{R}^3$ un plano se necesita un punto que $\in$ al plano y un vector que sea $\underset{(\text{normal})}{\perp}$ al dicho plano con estos 2 parámetros podemos perfectamente encontrar la ecuación del plano.



$\vec{n} = (a, b, c) \perp a\ \pi$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$

$x = (x, y, z) \in \pi$ (Punto cualquiera)

π es el plano q pasa por P_0 y es $\perp$ $\vec{n}$

$(\overrightarrow{P_0 x}) \perp n \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{P_0 x}) \cdot \vec{n} = 0}$

Ecuación punto normal ó Normal-vectorial del plano π

trabaj. con las compon. cartesianas tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 X} &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ \vec{n} &= (a, b, c) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

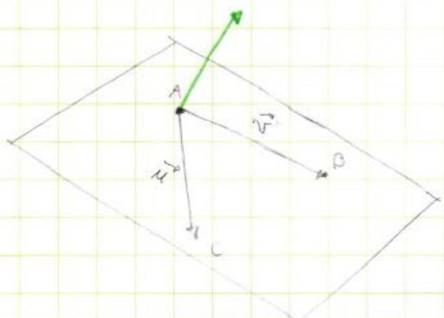
Desarrollando

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$$

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ ⇝ Ecuac. gral del plano π

Ej ① Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos

$A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 3, 1)$; $C = (3, -1, 2)$.



$\vec{u} = \vec{AC} = (2, -3, 3)$

$\vec{v} = AB = (1, 1, 2)$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-9, -1, 5)$

$P_0 = A = (1, 2, -1)$

$X = (x, y, z) \in \pi$

$\Rightarrow$ $n = (-9, -1, 5)$

$\vec{P_0X} = (x-1, y-2, z+1)$;

$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{P_0X}) = 0}$

$-9(x-1) - 1(y-2) + 5(z+1) = 0$

$-9x - y + 5z + 16 = 0 \quad / (-1)$

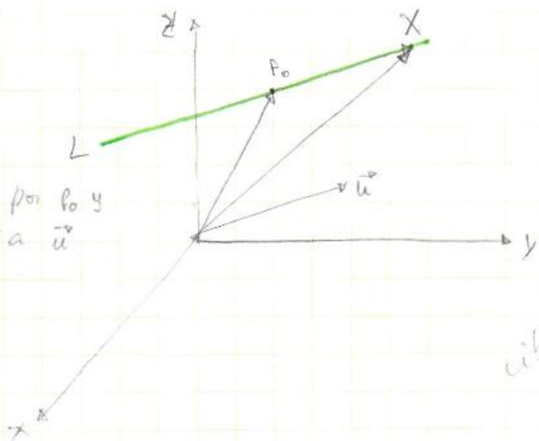
$\boxed{9x + y - 5z - 16 = 0}$ ⇝ Ec. gral del plano que pasa por A, B y C.

Teorema: si a, b, c y d son ctes y no todas las ctes a, b, c son = 0, entonces la gráfica de la ecuación: $ax + by + cz + d = 0$ es un plano cuya normal es el $\vec{n}$ de componentes a, b y c esta ecuación se denomina la ecuación gral del plano.

a, b, c y d
a, b, c
$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ Es un plano $\Rightarrow \vec{n}(a, b, c)$

* RECTAS en R^3

Pa' determinar las ecuaciones de una recta en R^3 se necesita conocer un punto (P_0) que $\exists$ a la recta y un vector ($\vec{\mu}$), denominado vector direccional de la recta, el cual es paralelo a la recta



pasa por P_0 y es // a $\vec{u}$

$\vec{P_0} = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{u} = (l, m, n)$

$\vec{X} = (x, y, z)$

libro

. Es la ecuación vectorial paramétrica de la recta "L", tomando en cuentas componentes cartesianas tendríamos

libro.

Ej Encontrar los planos en cuya intersección está la recta q' pasa por el Punto P_0 y es // $\vec{u}$

$P_0 = (1, 2, 3)$

$\vec{\mu} = (2, 3, -4)$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow \boxed{3x - 2y + 1 = 0}$$ plano π_1

$$\frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{-4} \Rightarrow \boxed{4x + 2z - 10 = 0}$$ plano π_2

La recta está en la intersecc. de los 2 planos

NOTA: $\vec{u}$ se denomina "vector direccional" de la recta. Y sus componentes l, m, n son los coeficientes direccionales de la recta.

★ INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS, RECTAS Y PLANOS-RECTAS.

Plano - Plano
- S.C. : Cuando hay 3 planos $n=r$. (hay un • de intersecc)
- ∄ S : " son //
- ∃ S : " esta uno sobre otro.

⇒ Cualquier problema de intersección entre rectas, planos y planos-recta, se resuelve analizando y resolviendo el el sistema formado por las ecuaciones de las rectas, planos ó planos-rectas y las tres posibles soluciones nos permite visualizar fisicamente lo que esta ocurriendo.

Ej: sea el plano Π_1 cuya ecuación gral es: $x-2y+z-3=0$ (I)

y la recta L cuyas ecuaciones son:

$$L \Rightarrow (\text{II}) \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = 4+5t \end{cases}$$

Determinar las intersecc entre la recta y el plano.

Una 1° manera de resolver este problema ~~es~~ sería trabajar con el parámetro t. Como el punto de intersección es común a la Recta y al plano podemos sustituir (II) en (I).

Sustituyendo (II) en (I):

$$(1+2t) - 2(3-t) + (4+5t) - 3 = 0$$

$$1+2t-6+2t+4+5t-3=0$$

$$9t = 4$$

$$\underline{t = \frac{4}{9}}.$$

Sustituir "t" en (II)

$$x = 1 + 2\left(\frac{4}{9}\right) = 1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$$

$$y = 3 - \frac{4}{9} = \frac{23}{9}$$

$$z = 4 + 5\left(\frac{4}{9}\right) = 4 + \frac{20}{9} = \frac{56}{9}$$

$\Rightarrow \boxed{P = (17/9,\ 23/9,\ 56/9)}$

Es el punto de intersección entre L y π_1

- Una 2° forma de resolver este problema es trabajar directamente con las variables x, y, z; sin embargo, debemos eliminar en las ecuaciones de la recta el parámetro t:

Eliminando t:

$$t = \frac{x-1}{2} \quad ; \quad t = \frac{y-3}{-1} \quad ; \quad t = \frac{z-4}{5}$$

$$\underbrace{\frac{x-1}{2} = \overbrace{\frac{y-3}{-1}}^{}}_{\pi_2}\overbrace{= \frac{z-4}{5}}^{\pi_3}$$

$$\pi_2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow -x+1 = 2y-6 \Rightarrow \boxed{x+2y-7=0}$$

$$\frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{5} \Rightarrow 5y - 15 = -z + 4 \Rightarrow \boxed{5y+z-19=0}$$

La recta L es la intersección de π_2 y π_3

Formaremos un sistema ....

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 2y = 7 \\ 5y + z = 19 \end{cases} \Rightarrow \text{Resolver por Gauss o Gauss Jordan}$$

determinaré $\boxed{\begin{array}{l} x = 17/9 \\ y = 23/9 \\ z = 56/9 \end{array}}$ // $P = (\ , \ , \ )$ Pto de interes. entre L y π_1

Distancia entre dos rectas

$D = \dfrac{|\quad|}{\sqrt{\quad}}$ { separar } Po (x_0, y_0, z_0)

Para resolver este problema es necesario encontrar la ecuación de un plano que contenga a una de las rectas y q' sea // a la otra. Tomando un punto cualquiera de la recta // al plano la distancia de este punto al plano será la distancia entre las 2 rectas.

Ej:

$\pi_1 \to \boxed{\vec{x} = P_0 + t\,u + s\,\vec{v}}$

Ej: Encontrar la dist entre L_1 y L_2 donde: la L_1 es la recta que pasa por $P_0 = (1, 2, -1)$ y es // a $\vec{u} = (1, -3, 2)$; la recta L_2 es el conjunto de puntos P

$L_1 \Rightarrow$ Pasa por $P_0 = (1, 2, -1)$ y es // a $\vec{u} = (1, -3, 2) \Rightarrow (x, y, z) = (1, 2, -1) + t\,(1, -3, 2)$

$L_2 \Rightarrow \{ P / P = (3, 2, -1) + s\,(3, -1, -1) ;\ s \in \mathbb{R} \} \Rightarrow (x, y, z) = (3, 2, -1) + s\,(3, -1, -1)$

Plano π_1 que contiene a L_1 y es // a L_2:

$\pi_1 \Rightarrow \vec{x} = P_0 + t\,\vec{u} + s\,\vec{v} \Rightarrow (x, y, z) = (1, 2, -1) + t\,(1, -3, 2) + s\,(3, -1, -1)$

como la ecuación del plano está en función de los param. t y s pa' encontrar su ecuac. gral debemos eliminar estos 2 parámetros.

$$\begin{cases} x = 1 + t + 3s \rightarrow t = x - 1 - 3s \\ y = 2 - 3t - s \rightarrow t = \dfrac{2 - y - s}{3} \\ z = -1 + 2t - s \rightarrow t = \dfrac{z + 1 + s}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 - 3s = \dfrac{2 - y - s}{3} \rightarrow 3x - 3 - 9s = 2 - y - s \\ x - 1 - 3s = \dfrac{z + 1 + s}{2} \rightarrow 2x - 2 - 6s = z + 1 + s \end{cases} \quad \begin{cases} 8s = 3x + y - 5 \\ 7s = 2x - z - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \dfrac{3x + y - 5}{8} \\ s = \dfrac{2x - z - 3}{7} \end{cases}$$

igualando:

$$\frac{3x + y - 5}{8} = \frac{2x - z - 3}{7}$$

$$21x + 7y - 35 = 16x - 8z - 24$$

$\boxed{5x + 7y + 8z - 11 = 0}$ → Ecuación gral del plano π,

Tomando un punto de L_2: hacemos $s = 0$

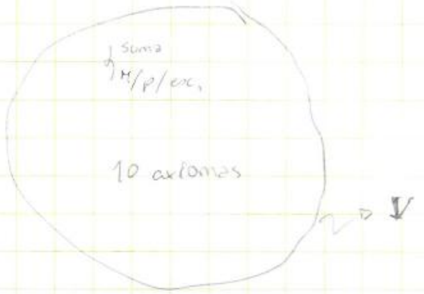
$P = (3, 2, -1)$, luego $D = \dfrac{|5(3) + 7(2) + 8(-1) - 11|}{\sqrt{5^2 + 7^2 + (-8)^2}}$ Esta es la distancia entre L_1 y L_2

$\boxed{D = 0.85}$

(2° parte)

ESPACIOS:

Y SUBESPACIOS VECTORIALES



Ej: (1) Que las reglas de suma y de m/p/escalar sean las definidas en la unidad 1. Podemos afirmar que este conjunto, con relación a estas operaciones denominadas ordinarias, es un espacio vectorial ya que los 10 axiomas se cumplen.

En gral: si V es el conj. de matrices de $m \times n$, entonces este conjunto es un espacio vectorial bajo las mismas consideraciones anteriores.

$$V = M_{(2 \times 2)}$$

$$V = M_{(m \times n)}$$

(2) V es el conj $\in R^2$ con las operaciones de suma y por m/p/escalar definidas en la 1° parte de esta unidad. Este conjunto, con relación a estas operaciones llamadas ordinarias, es un espacio vectorial ya que se verifica los 10 axiomas que lo define

$$V = R^2.$$

En gral: si V es el conj de vectores $\in$ a R^n, este

Conj. es un espacio vectorial bajo las mismas consideraciones anteriores.

$V = R^n$

(3) Que sea V el conj. de polinomios en x de grado ≥ 2

$$V = P_2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{P_1} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ \vec{P_2} &= b_0 + b_2 x + b_2 + x^2 \end{aligned}\right\} \in P_2$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Suma}: (a_0+b_0) + (a_1+b_2)x + (a_2+b_2)x^2 \\ &\text{m/p/escala}: K\vec{P_1} = (Ka_0) + (Ka_1)x + (Ka_2)x^2 \end{aligned}\right\} \in P$$

Polinomio cero $\vec{0} = 0 + 0x + 0x^2 \in P_2$

Inverso :

Este conj con relación a las operaciones ordinarias es un espacio vectorial ya que cumple con los 10 axiomas que lo define

En gral podemos afirmar que si V es igual P_n (polinomios en $x \geq n$) el conjunto es un espacio vectorial con la condic. definidas anteriormente

Ejercicio :

Sea $V = \mathbb{R}^2$ con las reglas de suma y de multipl./p/escalar definidas por

Determinar si este conj. es un espacio vectorial con relación a estas reglas

$$V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{suma}: \vec{u} + \vec{v} = (u_1 v_1 , u_2 v_2) \\ \text{m/p/escalar}: K\vec{u} = (K, u_1 u_2) \end{cases}$$

$\vec{u} = (u_1, v_2)$
$\vec{v} = (v_1, v_2)$
$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$

A.1) Cumple de acuerdo a la definición dada. ✓

$u_i, v_j, \omega_k \in \mathbb{R}$ A.2)

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = (u_1 v_1 ; u_2 v_2) \\ \vec{v} + \vec{u} = (v_1 u_1 ; v_2 u_2) \end{cases} = \checkmark$$

A.3) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{\omega}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{\omega}$

$$\begin{cases} = (u_1, v_2) + (v_1 \omega_1 ; v_2 \omega_2) = (u_1 v_1 \omega_1 + u_2 v_2 \omega_2) \\ = (u_1 v_1 , u_2 v_2) + (\omega_1 , \omega_2) = (u_1 v_1 \omega_1 + u_2 v_2 \omega_2) \end{cases} = \checkmark$$

A.4) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \Rightarrow \vec{0} = ?$

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

$(u_1 ; v_2) + (1, 1) = (u_1, u_2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{0} = (1, 1)}$ ✓

$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

$(1, 1) + (u_1, u_2) = (u_1, u_2)$

A.5) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

$(u_1, u_2) + (1/u_1 ; \frac{1}{u_2}) = (1, 1)$ ✓

$\Rightarrow \boxed{-\vec{u} = \left(\frac{1}{u_1} ; \frac{1}{u_2}\right)}$

A.6) De acuerdo a la definición este axioma se cumple ✓

X A.7) $K(\vec{u} + \vec{v}) = K\vec{u} + K\vec{v}$

$$\begin{cases} K(\vec{u} + \vec{v}) = K(u_1 v_1 , u_2 v_2) = (K, u_1 v_1 u_2 v_2) \\ K\vec{u} + K\vec{v} = (K, u_1 u_2) + (K, v_1 v_2) = (K^2, u_1 v_1 u_2 v_2) \end{cases} \neq$$

entonces $V = R^2$ no es un espacio vectorial con relación a las nuevas reglas.

Propiedades de Esp. vect.

Sea V un E.V y sean $\begin{cases} \vec{V} \in V \\ K \text{ escalar} \end{cases}$, entonces:

a) $0 \cdot \vec{V} = 0$

b) $K\,0 = 0$

c) $(-1)\,\vec{u}$

d)

SUBESPACIOS:

Ej. # 1: Sea $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 /\ a = c = 0\}$ Determinar si W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Aplicando el criterio del subesp. tendremos:

I) $\left.\begin{aligned} \vec{w_1} &= (a, b, c) \\ \vec{w_2} &= (x, y, z) \end{aligned}\right\} \in W$, por lo tanto: $\begin{cases} a = c = 0 \\ x = z = 0 \end{cases}$, entonces

$\overline{w_1} + \overline{w_2} = (a+x, b+y, c+z) \in W$ ya que $(a+x) = (c+z) = 0$ ✓

$a - c = z - x$

$\boxed{0 = 0}$

$\boxed{\text{por lo tanto W es cerrado p/suma}}$

II) $\vec{w_1}\,(a, b, c) \Rightarrow k\,\overline{w_1} = (ka, kb, kc) \in W$ ya que $ka = kc$

$\boxed{a = c}$

✓

Cuando las condiciones que definen un subconjunto son sencillas como en el ej. anterior, se las puede introducir directamente en los vectores genéricos. Y demostrar, en forma más sencilla, con dichos vectores las 2 condiciones; tal como se muestra a continuación

Ej 1 $\left.\begin{array}{l}\vec{w_1} = (0, b, 0) \\ \vec{w_2} = (0, y, 0)\end{array}\right\} \in W \Rightarrow \vec{w_1} + \vec{w_2} = (0, b+y, 0) \in W$

por lo tanto <u>W es cerrado p/ suma</u>

$\vec{w_1} = (0, b, 0) \in W \Rightarrow k\,\vec{w_1} = (0, kb, 0) \in W$, por lo tanto

<u>W es cerrado p/m/escalar</u>

∴ $\boxed{W \text{ es un subespacio de } \mathbb{R}^3}$ //

Obs: Si el vector 0 de un E.V. "V" no pertenece a un subconj W, entonces se puede afirmar directa y categóricamente que W no puede ser un subespacio. Sin embargo el hecho de que el $\vec{0}$ pertenezca al subconj no implica necesariamente que el subconj deba ser un subespacio, en este caso debe aplicarse el criterio de subespacio

② Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(2\times2)} \;/\; a+b=c \right\}$ Determinar si este conj es un subespacio del E.V. de $M_{(2\times2)}$

$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad a+b=c$

$0 = 0$ ✓

Nº Tema Fecha

aplicando el criterio de subespacio:

I) $\left.\begin{array}{l} \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ \\ \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \end{array}\right\} \in W$, por lo tanto = $\begin{cases} a+b=c \\ x+y=z \end{cases}$

$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{bmatrix} \in W$, ya que $(a+x)+(b+y) = (c+z)$

$(a+b)+(x+y) = (c+z)$

$\boxed{c + z = c+z}$ ✓

∴ W es cerrado p/suma.

II) $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W \Rightarrow k\,\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \in W$ ya que.

$ka + kb = kc$

$k(a+b) = kc$

$a+b=c$ ✓

∴ W es cerrado p/m/escalar

∴ $\boxed{W \text{ es un subespacio de } M_{(2\times 2)}}$ //

③ sea $W = \{ \vec{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2 \ / \ a_0 - a_2 = 1 \}$

Determinar ...

$\vec{0} = 0 + 0x + 0x^2 \in P_2$

$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$

condic.

$0 + 0 \neq 1$

∴ $\boxed{W \text{ NO es un SUBESPACIO de } P_2}$ //

$\vec{0} \notin W$ ya que

(4) Sea W un subconjunto que contiene únicamente al $\vec{0}$ de un E.V "V", demostrar que W es un subespacio.

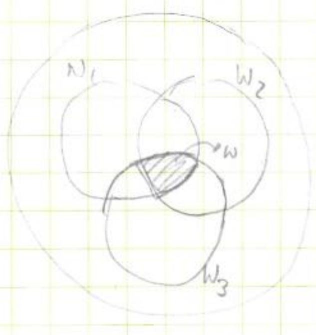
Aplicando el criterio del subespacio tendríamos:

I) $\left.\begin{array}{l}\vec{w_1} = \vec{0} \\ \vec{w_2} = \vec{0}\end{array}\right\} \in W \Rightarrow \vec{w_1} + \vec{w_2} = \vec{0} \in W$, entonces <u>W es cerrado p/suma</u>

II) $\underset{\in W}{\vec{w_1} = \vec{0}}$ y $K\vec{w_1} = \vec{0} \in W$, entonces <u>W es cerrado p/m/escalar</u>

$\therefore$ $\boxed{W \text{ es un SUBESPACIO de } V}$ //

(5) La intersección de cualquier número de subespacios de un E.V. "V" es tb un subespacio de V.



$\left.\begin{array}{l}W_1 \\ W_2 \\ W_3\end{array}\right\}$ SON SUBESPACIOS de V, demostrar que $W = W_1 \cap W_2 \cap W_3$ es tb. subespacio de V

Aplicando el criterio de subespacio, tendremos:

I) $\left.\begin{array}{l}\vec{w_1} \\ \vec{w_2}\end{array}\right\} \in W \Rightarrow (\vec{w_1} + \vec{w_2}) \in \left\{\begin{array}{l}W_1 \\ W_2 \\ W_3\end{array}\right.$, por lo tanto $(\vec{w_1} + \vec{w_2}) \in W$

$\therefore$ es decir <u>W es cerrado p/suma</u>

II) $\vec{w_1} \in W \Rightarrow K\vec{w_1} \in \left\{\begin{array}{l}W_1 \\ W_2 \\ W_3\end{array}\right.$, por lo tanto $K\vec{w_1} \in W$

$\therefore$ W es cerrado p/m/escalar

N° Tema Fecha

$\therefore$ $\boxed{W \text{ es un subespacio de } V}$ //

COMBINACIONES LINEALES .. Subespacios generados

Definición : $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, v_r\} \in$ E.V "V"

$\vec{w}$ de combinación lineal de los $\overline{v_i}$ si:

$$\boxed{\overline{w} = a_1\overline{v_1} + a_2\overline{v_2} + \ldots a_r\overline{v_r}} \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Ej: (1) Determinar si $\vec{w} = 2\overline{v_1} - 3\overline{v_2} + \overline{v_3}$

donde $S = \{\overline{v_1} = (1,1)\ ;\ \overline{v_2} = (1,0)\ ;\ \overline{v_3} = (0,-1)\}$

es una combinación lineal de los v_i

$$\overline{w} = 2(1,1) - 3(1,0) + (0,-1)$$

$\boxed{\overline{w} = (-1,1)}$ $\overline{w}$ es una C.L. de los v_i

(2) Determinar si $\overline{w} = (1,-1,1)$ es una C.L de :

$$S = \{\overline{v_1} = (1,1,1)\ ;\ \overline{v_2} = (-1,1,3)\}$$

$$\vec{w} = a_1\overline{v_1} + a_2\overline{v_2}$$

$$(1,-1,1) = a_1(1,1,1) + a_2(-1,1,3)\}$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ a_1 + a_2 = -1 \\ a_1 + 3a_2 = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{4} \end{array}\right]$$

$$A_{21}(-1),\ A_{31}(-1) \qquad M\left(\tfrac{1}{2}\right)\ A_{12}(1)\ A_{32}(-4)$$

El sistema No $\nexists$ solución,

por lo tanto $\vec{w}$ no es una C.L de los $\overline{v_i}$

Si llamamos de $W = \{$ conjunto de todas las c.L con los $\overline{V_i}\}$ o si simbólica llamemos $L(V_i)$ ó $L(S)$

$$\boxed{W = \{ \ldots\ldots \} = L(\overline{V_i}) = L(S)}$$

Teorema : si $S = \{\overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots \overline{V_r}\} \in$ E.V "V",

entonces $W = \{$ conj ..... $\}$ es un SUBESPACIO de V.

además es el más pequeño de los subespacios que contiene a los V_i

Demostración : aplicando el criterio del subesp. tendremos :

I) $\left.\begin{array}{l} \overline{\omega_1} = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_r V_r \\ \overline{\omega_2} = b_1 V_1 + b_2 V_2 + \ldots + b_r V_r \end{array}\right\} \in W$, entonces $(\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}) \in W$

$\omega_1 + \omega_2 = \underbrace{(a_1+b_1)}V_1 + \underbrace{(a_2+b_2)}V_2 + \ldots + \underbrace{(a_r+b_r)}V_r$

$\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} = \underbrace{c_1 V_1 + c_2 V_2 + \ldots + c_r V_r}_{\text{c.L de los } V_i}$

$\therefore$ W es cerrado pa suma

II $\overline{\omega_1} = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_r V_r \in W$, entonces.

$k\overline{\omega_1} = \underbrace{(ka_1)\vec{V_1} + (ka_2)\vec{V_2} + \ldots + (ka_r)\vec{V_r}}_{\text{c.L de los } V_i}$

$\therefore$ W es cerrado p/m/escalar

$$\boxed{\therefore W \text{ es un SUBESPACIO DE } V}$$

CUALQUIER CONJ. NO VACIO GENERA UN SUBESPAC. (c.L del conj no vacío).

Nº Tema Fecha

Obs Importante: Con el teorema anterior se esta demostrando q' cualquier conj. no vacío de vectores q' pertenecen a un espacio vectorial V, generan un subespacio de V denominado subespacio por los V_i:

$\boxed{W = L(S) = L(V_i)}$ es el subesp. GENERADO por los $\vec{V_i}$

Ej: Determinar si $\vec{w} = (1,-1,1)$ pertenece al subespacio generado por $S = \{\vec{V_1} = (1,1,1) ; \vec{V_2} = (-1,1,3)\}$.

En Realidad este ejercicio es el mismo que resolvimos anteriormente en el q' se preguntaba directamente determinar si W es C.L de los $\vec{V_i}$

$\Rightarrow \boxed{\therefore \vec{w} \notin L(\vec{V_i})}$

Con todo lo expuesto anteriormente surge la sgte pregunta:

¿CÓMO SE ANALIZA SI UN CONJ. DE VECTORES GENERA AL PROPIO ESPACIO VECTORIAL?

En forma genérica se debe tomar un vector genérico del Espacio en cuestión y analizar si $\in$ al subespacio generado por los vectores del conj. Esto nos lleva a analizar un sistema; si tiene soluc (1 ó ∞) los vectores generan al espacio; si no tiene ″ ó la soluc. esta condicionada los vectores no generan al espacio

Ej: ¿Determinar si $\{\vec{V_1} = (1,1,1) ; \vec{V_2} = (-1,1,3)\}$ genera a R^3?

SOLUCIÓN:

$\vec{V} = (a, b, c)$ Vector genérico de $\mathbb{R}^3$

$\vec{V} \in L(\vec{V_i})$, es decir $\vec{V} = a_1 \vec{V_1} + a_2 \vec{V_2}$

$$(a, b, c) = a_1(1, 1, 1) + a_2(-1, 1, 3)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = a \\ a_1 + a_2 = b \\ a_1 + 3a_2 = c \end{cases}$$

analizando este sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 3 & c \end{array}\right] \cong \ldots\ldots \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & a - 2b + c \end{array}\right]$$

obs. que el sist tiene solución condicionada tendrá solución solo si

$a - 2b + c = 0$, por lo tanto los V_i no generan a $\mathbb{R}^3$

$$L(\vec{V_i}) \neq \mathbb{R}^3$$

NOTA.- El subespacio generado por los $\vec{V_i}$ puede ser escrito tb de la sgte manera:

$L(\vec{V_i})$ donde $S = \{\vec{V_1} = (1, 1, 1);\ \vec{V_2} = (-1, 1, 3)\}$

$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a - 2b + c = 0\}$ $\quad \boxed{L(\vec{V_i}) = W}$

Ej: Determinar si los vectores $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ y $\vec{V_3}$ generan a $\mathbb{R}^2$, es decir, si $\boxed{\mathbb{R}^2 = L(v_i)}$

$S = \{\vec{V_1} = (1, 2),\ V_2 = (1, 0);\ V_3 = (0, 1)\}$

$V = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ (vector genérico)

$\vec{V} \in L(v_i)$, es decir, $V = a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3$

$$(a, b) = a_1(1, 2) + a_2(1, 0) + a_3(0, 1)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 0a_3 = a \\ 2a_1 + 0a_2 + a_3 = b \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 1 & -2a+b \end{array}\right]$$

$A_{21}(-2)$

el sist es solu.

V_i genera a $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^2 = L(v_i)$

N° | Tema | Fecha

Ej (1). Determinar si $S = \{\vec{P_1} = 1+x \; ; \; \vec{P_2} = x^2 \; ; \; \vec{P_3} = 2x\}$ genera a P_2

(2) " " $L(\vec{A_i}) = M_{(2\times 2)}$, donde $S = \{\vec{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \vec{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

(1) $\vec{P} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\vec{P} = a_1 \vec{P_1} + a_2 \vec{P_2} + a_3 \vec{P_3}$$

$$a + bx + cx^2 = a_1(1+x) + a_2(x^2) + a_3(2x)$$

$$a + bx + cx^2 = a_1(1 + 0x + 0x^2) + a_2(0 + 0x + x^2) + a_3(0 + 2x + 0x^2)$$

$$\begin{cases} a_1 + 0a_2 + 0a_3 = a \\ 0a_1 + 0a_2 + 2a_3 = b \\ 0a_1 + a_2 + 0a_3 = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \end{array}\right] \underset{P_{23}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 2 & b \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ r = 3 \end{array}\right\} \boxed{n = r}$$

$$\boxed{P_2 = L(\vec{P_i})}$$ //

(2) $\vec{A} = a_1 \vec{A_1} + a_2 \vec{A_2}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a \\ a_1 + 0a_2 = b \\ a_1 + a_2 = c \\ a_1 + 2a_2 = d \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{array}\right] \underset{P_{23}}{\simeq} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & d \end{array}\right] \underset{A_{21}(-1)\ A_{31}(-1)\ A_{41}(-1)}{\simeq} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a+c \\ 0 & -1 & -a+b \\ 0 & 1 & -a+d \end{array}\right] P_{24}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a+d \\ 0 & -1 & -a+b \\ 0 & 0 & -a+c \end{array}\right] \underset{A_{32}(1)}{\simeq} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a+d \\ 0 & 0 & -2a+b+d \\ 0 & 0 & -a+c \end{array}\right]$$

$\boxed{M_{(2\times2)} \neq L(\vec{A_i})}$ //

Como la solución esta condicionada : $-a+c$

solución :

∞ S. si $-a+c=0$

$\nexists$ S. si $-a+c \neq 0$

Nunca tendrá S. U

ESPACIO FILA Y COLUMNA DE UNA MATRIZ A $(m\times n)$

Si las filas de la matriz son consid$_{\text{eradas}}$ $\in R^n$, generarán un subesp. de R^n denominado espac. Fila de A . simbólicamente $L(A)$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\vec{w_n} = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn})$

$\vdots$

$\vec{w_2} = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2})$

$\vec{w_1} = (a_{11}, a_{21}, \cdots a_{m1})$

$\in \mathbb{R}^m \Rightarrow L(\vec{w_i}) = L(A^t)$

$=$ Espac. colum. de A

(Es un subesp. de $\mathbb{R}^m$)

Nº | Tema | Fecha

Propiedades

a)

b) Dos matrices A y B, tienen el mismo E_{SP} Fil, $\overset{\text{si y solo si}}{\Rightarrow}$ sus fil no nulas en la forma ER son =

Ejemplo: Determinar si las sgtes matrices tienen el mismo espacio FIL?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-1)}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{M_2\left(\frac{1}{3}\right) A_{12}(1)}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} = A_{ER}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-2)\ A_{31}(-3)}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 4 \end{bmatrix} \underset{M\left(-\frac{1}{12}\right) A_{12}(-5)\ A_{32}(12)}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_{ER}$$

Como las filas no nulas, en la forma ER de ambas, son = $\Rightarrow \boxed{L(A) = L(B)}$ //

Dependencia e independencia lineal de vectores

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ de un E.V "V"

$$\boxed{a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_r = \vec{0}}$$

→ si $\forall\, a_i = 0 \Rightarrow S$ es L.I ó los $\vec{v}_i$ son L.I.

→ Si $\exists\, a_i \neq 0 \rightarrow S$ es L.D ó los $\vec{v}_i$ son L.D.

⇓

Sistema Homogéneo → si $\boxed{n = r}$; $\forall a_i = 0 \Rightarrow S$ es L.I

→ si $\boxed{n > r}$; $\exists a_i \neq 0 \Rightarrow S$ es L.D

Ejemplo: Determinar si los sgtes conjuntos son L.I ó L.D

a) $S = \{\vec{v}_1 = (1,1,-1)\ ;\ \vec{v}_2 = (1,-2,3)\ ;\ \vec{v}_3 = (2,-1,2)\}$

b) $S = \{\vec{v}_1 = (1,2)\ ;\ \vec{v}_2 = (1,1)\}$

c) $S = \{ \vec{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) : $S = \{ \vec{P_1} = 1 + x ; \vec{P_2} = 1 - x^2 ; \vec{P_3} = 2 + x - x^2 \}$

<u>SOLUCIÓN</u>

a) $a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + a_3 \vec{v_3} = \vec{0}$

$a_1 (1,1,-1) + a_2 (1,-2,3) + a_3 (2,-1,2) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 - 2a_2 - a_3 = 0 \\ -a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E$$

$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ r = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{n > r} \Rightarrow \boxed{S \text{ es L.D}}$ //

b) $a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} = \vec{0}$

$a_1 (1,2) + a_2 (1,1) = (0,0)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A_E$$

$\left.\begin{array}{l} n = 2 \\ r = 2 \end{array}\right\}$ como $n = r \Rightarrow \boxed{S \text{ es L.I}}$ //

c) $a_1 \vec{A_1} + a_2 \vec{A_2} + a_3 \vec{A_3} = \vec{Z}$

$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 \\ a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \simeq \quad \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E$$

$\left.\begin{matrix} n=3 \\ r=3 \end{matrix}\right\}$ $n=r \Rightarrow$ $\boxed{S \text{ es } L.I}$ o los $\vec{A_i}$ son L.I.

1° térm ind (a_i)
2° coef x
x^2

d) $a_1 \vec{P_1} + a_2 \vec{P_2} + a_3 \vec{P_3} = \vec{0}$

$$a_1(1+x) + a_2(1-x^2) + a_3(2+x-x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + 0a_2 + a_3 = 0 \\ 0a_1 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & \ldots & \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E$$

$\left.\begin{matrix} n=3 \\ r=2 \end{matrix}\right\}$ $n>r \Rightarrow$ $\boxed{S \text{ es } L.D}$ o los $\vec{P_i}$ son L.D.

NOTA:

El concepto de L.D sugiere que entre los vectores existe cierta dependencia que nos permite hacer las sgtes obs:

Obs 1) Si uno de los vectores de un conjunto es C.L. de los demás, entonces el conjunto es L.D.

Ej anterior $\vec{V_3} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

2°) Si dentro de un conj. está $\vec{0}$, entonces es conjunto es L.D

3°) Las filas no nulas de las matriz en la forma escalonada son L.I(s)

BASE Y DIMENSIÓN DE UN E.V "V":

$S = \{ \vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots, \vec{V_n} \} \subseteq$ E.V "V" es una BASE de V $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I) S es L.I.} \\ \text{II) S genera a V} \end{cases}$

dim V = "número de vectores que tiene una base"

Teorema: Toda base de V tiene el mismo número de vectores.

Ej: Determinar cuales de los sgtes conjuntos forman una base del espacio correspondiente a c/u de los vectores o del espacio correspond. a c/u de los conj.

a) $S = \{ \vec{V_1} = (1,1,-1); \vec{V_2} = (1,-2,3), \vec{V_3} = (2,-1,2) \}$ Es L.D

b) $S = \{ \vec{V_1} = (1,2); \vec{V_2} = (1,1) \}$ Es L I

c) $S = \left\{ \vec{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \vec{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \vec{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ Es LI

d) $S = \{ \vec{P_1} = 1 + x; \vec{P_2} = 1 - x^2; \vec{P_3} = 2 + x - x^2 \}$ Es L D.

SOLUCIÓN:

b) II) $\vec{V} = (a,b)$ $\quad \vec{V} = a_1 V_1 + a_2 V_2$ $\quad$ I) Cumpl $\Rightarrow$ S es L.I

$$(a,b) = a_1 (1,2) + a_2 (1,1)$$

$$\begin{cases} a = a_1 + a_2 \\ b = 2a_1 + a_2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \end{array}\right] \underset{A_{21}(-2)}{\cong} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2a+b \end{array}\right]$$

n = r $\Rightarrow$ tiene solución

$\mathbb{R}^2 = L(\vec{V_i})$

$\therefore$ $\boxed{\text{S es una base de } \mathbb{R}^2}$ //

$\boxed{\dim \mathbb{R}^2 = 2}$ //

c) II) $\vec{A} = a_1 \vec{A_1} + a_2 \vec{A_2} + a_3 \vec{A_3}$ $\quad$ I) S es L.I

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nº Tema Fecha

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 0a_3 = a \\ a_1 + 0a_2 + 0a_3 = b \\ a_1 - a_2 + a_3 = c \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = d \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 2 & 1 & 1 & d \end{array}\right] \underset{P_{12}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 2 & 1 & 1 & d \end{array}\right] \underset{A_{21}(-1)\,A_{31}(-1)\,A_{41}(-2)}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & -1 & 1 & c-b \\ 0 & 1 & 1 & d-2b \end{array}\right] \underset{A_{32}(1)\ A_{42}(-1)}{}$$

Como el sistema tiene solución condicionada.

$A \notin L(A_i)$ es decir: S no genera al E.V de $M_{(2\times2)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & a-2b+c \\ 0 & 0 & 1 & a-3b+d \end{array}\right] \underset{A_{43}(-1)}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & a-2b+c \\ 0 & 0 & 0 & -b-c+d \end{array}\right]$$

solución:

si $-b-c+d=0 \Rightarrow \infty$ Soluc.

si $-b-c+d\neq0 \Rightarrow \nexists$ Soluc.

$\therefore$ $\boxed{\text{S no es una base e.V. de } M_{(2\times2)}}$

a) Como S es LD no puede ser base de $\mathbb{R}^3$

d) Como S es LD no " " " " P_2

* BASE USUAL, CANÓNICA Ó ESTÁNDAR de un E.V.

Base usual de $\mathbb{R}^3$

$\vec{V}(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ base usual de $\mathbb{R}^3 = B = \{\vec{e_1}=(1,0,0), \vec{e_2}=(0,1,0); \vec{e_3}=(0,0,1)$

$\boxed{\dim \mathbb{R}^3 = 3}$

base usual de $M_{(2\times2)}$

$\therefore$ libro.

base usual de P_2

$\vec{p} = a + bx + cx^2 \in P_2 \Rightarrow$ Base usual de $P_2 = B = \{\vec{e_1} = 1 ; \vec{e_2} = x ; \vec{e_3} = x^2\}$

$\boxed{\dim P_2 = 3}$

Teorema 5: si dim $V = n$, entonces:

a) un conjunto S con menos de n vectores no puede ser base de V ya que no generaran al espacio

b) si un conjunto S tiene $n+1$ ó más vectores el conjunto no puede ser base, ya que sera L.D

c) Un conjunto con n vectores L.I es una base de V

d Un conjunto con n vectores que generan a V es una base de V.

Obs: Si la dim $V = n$, el máximo nº de vectores L.I. que puede tener un conjunto es n.

COORDENADAS - VECTOR DE COORDENADAS:

si "V" es un E.V y $S = \{\vec{V_1}, \vec{V_2}, \dots \vec{V_n}\}$ es una base de V, entonces todo vector $\vec{V}$ de V puede ser expresado de una única manera como c.L de los $\vec{V_i}$, es decir:

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots a_n\vec{v_n} \quad \text{donde} \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right.$$

son las coordenadas de V con relación a la base S

Ejercicio: Determinar el vector de coordenadas de $\vec{P} = 2-3x+x^2$ con relación a las sgtes bases.

a) $B_1 = \{\vec{q_1} = 1-x \; ; \; \vec{q_2} = 1+2x^2 \; ; \; \vec{q_3} = -x + x^2\}$ base cualquiera

b) $B = \{\vec{e_1} = 1 \; ; \; \vec{e_2} = x \; ; \; \vec{e_3} = x^2\}$ base usual.

Nº Tema Fecha

SOLUCIÓN :

a) $\vec{p} = a_1 \vec{q_1} + a_2 \vec{q_2} + a_3 \vec{q_3}$

$2-3x+x^2 = a_1(1-x) + a_2(1+2x^2) + a_3(-x+x^2)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 0a_3 = 2 \\ -a_1 + 0a_2 - a_3 = -3 \\ 0a_1 + 2a_2 + a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{A_{21}(1)}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{A_{12}(-1)\ A_{32}(-2)}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \underset{M_3(\frac{1}{3})\ A_{13}(-1)\ A_{23}(1)}{\cong}$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \boxed{\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 1 \end{array}} \qquad [\vec{p}]_{Q_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} //$$

b) $\vec{p} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$

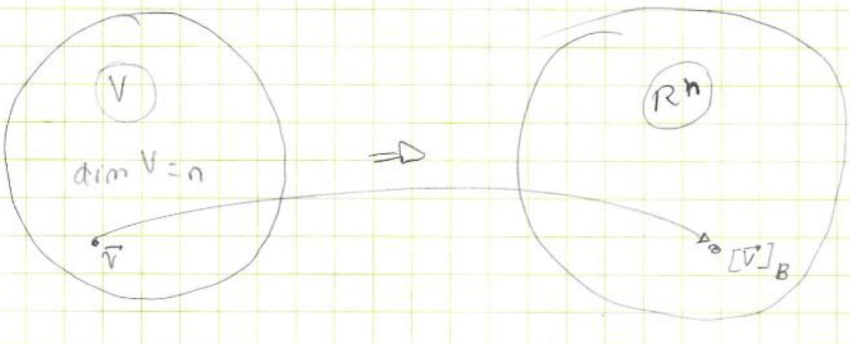
$2-3x+x^2 = 2(1) - 3(x) + 1(x^2)$

Ya no es necesario hacer un sistema porque los coefic. de $\vec{p}$ son las coord. de $\vec{p}$ con relación a B.

$a_1 = 2$
$a_2 = -3$
$a_3 = 1$

$$[\vec{p}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} //$$

ESPACIOS ISOMORFOS



"B" = base

La ventaja de trabajar con el E. Isomorfo en lugar del propio espacio es que en el espacio " tenemos vectores en $\mathbb{R}^n$ que nos permite una serie de simplificaciones tal como se muestra en los sgtes ej:

Ej: Determinar si el sgte conj. es L.I. ó L.D.

Este problema podemos resolverlo utilizando la definición

(1) $S = \{ \vec{P_1} = 1 + x - x^2 \; ; \; \vec{P_2} = 2 + x - 3x^2 \; ; \; \vec{P_3} = -1 + 2x^2 \}$

B = Base usual de P_2

$$\left.\begin{array}{l} [\vec{P_1}]_B = (1, 1, -1) \\ [\vec{P_2}]_B = (2, 1, -3) \\ [\vec{P_3}]_B = (-1, 0, 2) \end{array}\right\} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \simeq \dots \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E$$

Como se anula 1 fila $\Rightarrow$ $\boxed{\text{los } \vec{P_i} \text{ son L.D}}$

(2) $S = \{ \vec{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \; \vec{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \; \vec{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \}$

B = Base usual de $M_{2\times 2}$

$[A_1]_B$

$\in \mathbb{R}^4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$

L.I.

Base y Dimensión de subespacios

La base y dimensión de subespacios pueden ser analizadas tomando en cuenta los sgtes teoremas.

Nº | Tema | Fecha

Teorema # 6 : si la $\dim V = n$ y W es un subespacio de V, entonces $\boxed{\dim W \leq n}$ y si $\dim V = n \Rightarrow \boxed{W = V}$

un subespacio puede ser definido de 2 maneras diferentes :

a) Puede ser generado por un conj no vacio de vectores.

b) " estar definido bajo condiciones.

En el 1º caso utilizaremos el sgte teorema :

teorema # 7 . . . .

Ej : Determinar una base y la dimensión del subespacio W generado por los sgtes vectores.

① $S = \{ \overline{V_1} = (1,2,-1) ; \overline{V_2} (0,1,1) ; \overline{V_3} = (1,1,-2) \}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cong \quad . \; . \; . \; . \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E \qquad W = L(\overline{V_i}) = L(S)$$

dim = 2 (nº filas no nulas)

Base = $\{ \overline{w}_1 = (1,2,-1) ; \overline{w}_2 = (0,1,1) \}$ (coef. de A_E)

el valor de dim = nº vectores de la base.

② $S = \{ \overline{P_1} = 1 + x - x^2 , \overline{P_2} = 2 + x - 3x^2 ; \overline{P_3} = -1 + 2x^2 \}$

B : Base usual de P_2

Resuelto en anterior ejerc

mismo procedimiento $\begin{bmatrix} & \end{bmatrix} = A_E$.

$\boxed{\begin{array}{l} \dim W = 2 \\ \text{Base de } W = \{ \vec{\omega}_1 = 1 + x - x^2 \ ; \ \vec{\omega}_2 = -x - x^2 \} \end{array}}$ → cuidado: hay que volver al E original y anotar con los coef. de A_E (de filas no nulas)

(3) $S = \left\{ \vec{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \vec{A}_2 = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} ; \vec{A}_3 = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \right\}$ generado por S ($L(S) = W$)

mismo procedimiento

$\boxed{\begin{array}{l} \dim W = 3 \\ \text{Base } W = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \end{array}}$ //

ESPACIO SOLUCIÓN DE UN SISTEMA HOMOGÉNEO.

Es fácil demostrar que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo forma un subespacio denominado Espacio Solución del sistema homogéneo.

Teorema #8: Si $AX = 0$ es un sist. homog.

W = Espacio Solución del " "

$\dim W = n - r = n^o$ variables libres

Una base de W se puede determinar aplicando el criterio de Base usual sobre las $n-r$ variables libres.

Nº Tema Fecha

tal como se muestra en el sgte ejemplo:

Ej: Encontrar una base y dimensión del E. solución del sgte sist homogéneo

W = Espacio solución de ①

Sist. equivalente

$$① \begin{cases} a+b \quad -2d = 0 \\ a+b+2c+3d = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-1)}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b \quad -2d = 0 \\ 2c+5d = 0 \end{matrix}$$

dim W = n − r = 4 − 2 = 2 var. libres (b, d)

aplicando el criterio de B usual sobre las 2 variables libres:

$$\begin{matrix} a=-1 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=0 \end{matrix} \Bigg\} \ \vec{w}_1 = (-1,1,0,0) \qquad \begin{matrix} a=4 \\ b=0 \\ c=-5 \\ d=2 \end{matrix} \Bigg\} \ \vec{w}_2 = (4,0,-5,2)$$

$$\boxed{\begin{matrix} \dim W = 2 \\ \text{Base } W = \{\vec{w}_1 ; \vec{w}_2\} \end{matrix}}$$

Ej ⑤: sea $W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / a+b-2d=0 \wedge a+b+2c+3d=0\}$ ← subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido bajo condiciones

Determinar una base y 1 dim de W

Las condiciones pa' que un vector ∈ a W forman un sistema homogéneo:

$$① \begin{cases} a+b \quad -2d = 0 \\ a+b+2c+3d = 0 \end{cases}$$; por lo tanto el Espacio solución del sistema homogéneo ① = W

y una base y dimensión de este espacio solución serán la base y dimensión de W.

Ej: 1) Sea $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / a+b-c=0 \wedge a+b+2d=0\}$

Determinar una base y dimensión de W

sistema Equiv.

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ a+b+2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-1)}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} a+b-c=0 \\ c+2d=0 \end{cases}$$

$\dim W = n - r = 4 - 2 = 2$ var. libres (b, d)

$$\begin{rcases} a=-1 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=0 \end{rcases} \vec{w}_1 = (-1, 1, 0, 0) \qquad \begin{rcases} a=-2 \\ b=0 \\ c=-2 \\ d=1 \end{rcases} \vec{w}_2 = (-2, 0, -2, 1).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim W = 2 \\ \text{base } W = \{\vec{w}_1 ; \vec{w}_2\} \end{array}}$$

//

2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(2\times 2)} / a+b-c=0 \wedge a+b+2d=0 \right\}$

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ a+b+2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-1)}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} a+b-c=0 \\ c+2d=0 \end{cases}$$

$\dim W = n - r = 2$ var. lib (b, d)

$$\begin{rcases} a=-1 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=0 \end{rcases} \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{rcases} a=-2 \\ b=0 \\ c=-2 \\ d=1 \end{rcases} \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim W = 2 \\ \text{base } W = \{\vec{w}_1 ; \vec{w}_2\} \end{array}}$$

//

Nº | Tema | Fecha

* Suma y suma directa:

<u>Definición de suma</u>: si U y W son dos subespacios de V entonces ese conjunto de $U+W = \{\vec{u}+\vec{w} / \vec{u} \in U \wedge \vec{w} \in W\}$ es tb un subespacio de V y la dimensión de este subespacio esta dada por la sgte expresión: $\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}$

<u>Suma Directa</u>: V es la suma directa de sus subespacios de U y W $(V = U \oplus W)$ si y solo si $V = U+W$ y la $\cap$ de U, W es el $\vec{0}$

$$V = U \oplus W \iff \begin{cases} \text{I)} & V = U+W \quad (\dim(U+W) = \dim V) \\ \text{II)} & U \cap W = \{\vec{0}\} \quad (\dim(U \cap W) = 0) \end{cases}$$

NOTA: si V es la suma directa U y W entonces todo vector $\vec{v} \in V$ puede ser escrito de una sola manera como la suma de un vector de U y de un vector de W

forma única

$$V = U \oplus W, \text{ entonces } \forall \vec{v} \in V \quad \boxed{\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}}$$

Ej: ① Sean sean U y W subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que

$U = \{(a,0,0), a \in \mathbb{R}\}$ Determinar si $\mathbb{R}^3$ es la suma directa de U y de W

$W = \{(0,b,c), b,c \in \mathbb{R}\}$ ¿ $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Base y dimensión de U:

$\{$ Base usual de $U = \{\vec{u}_1 = (1,0,0)\}$

$\dim U = 1$

Base y dimensión de W:

$\{$ Base usual de $W = \{\vec{w}_1 = (0,1,0)\ ;\ \vec{w}_2 = (0,0,1)\}$

$\dim W = 2$

Obs:

$\boxed{\mathcal{U} + W \text{ es el subespacio generado por } S = \{ \text{base } \mathcal{U} \wedge \text{base } W \}}$

$\mathcal{U} + W$ es generado por $S = \{ \vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{w}_1 = (0,1,0) ; \vec{w}_2 = (0,0,1) \}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_E \Rightarrow \begin{array}{l} \dim(\mathcal{U} + W) = 3 \\ \text{Base}(\mathcal{U}+W) = \{ \vec{V}_1 = (1,0,0) ; \vec{V}_2 = (0,1,0) ; \vec{V}_3 = (0,0,1) \} \end{array}$$

Base y dim de $\mathcal{U} \cap W$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{U} \cap W = \{ (0,0,0) \} \\ \dim(\mathcal{U} \cap W) = 0 \end{array}}$$

$\therefore \boxed{\mathbb{R}^3 = \mathcal{U} \oplus W}$ ya que $\begin{cases} \text{I) } \dim(\mathcal{U}+W) = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathcal{U} + W \\ \text{II) } \dim(\mathcal{U} \cap W) = \mathcal{U} \cap W = \{ \vec{0} \} \end{cases}$

(2) Sean $\mathcal{U}$ y W subespacios de P_2:

$\mathcal{U} = \{ a + bx + cx^2 \in P_2 / a - c = 0 \}$

W es generado por $S = \{ \vec{w}_1 = 1 - x ; \vec{w}_2 = x^2 ; \vec{w}_3 = 1 - x + x^2 \}$

a) Determinar una base y la dimensión de $\mathcal{U}$

b) " " " " " " de W

c) " " " " " " " $\mathcal{U} + W$

d) " " " " " " " $\mathcal{U} \cap W$

e) ¿ $P_2 = \mathcal{U} \oplus W$?

a) Base y dimensión de $\mathcal{U}$:

$\{ a - c = 0 \Rightarrow \{ a + 0b - c = 0$

N° Tema Fecha

$\left.\begin{matrix} n=3 \\ r=1 \end{matrix}\right\}$ $n-r = 2$ (var. lib: b y c)

$\boxed{\begin{matrix} \dim U = 2 \\ \text{Base } U = \{\vec{u}_1 ; \vec{u}_2\} \end{matrix}}$

$\left.\begin{matrix} a=0 \\ b=1 \\ c=0 \end{matrix}\right\} \vec{u}_1 = x$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{matrix}\right\} \vec{u}_2 = 1+x^2$

b) B = Base usual de P_2

$$\left.\begin{matrix} [\vec{w}_1]_B = (1,-1,0) \\ [\vec{w}_2]_B = (0,0,1) \\ [\vec{w}_3]_B = (1,-1,1) \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \circ \circ \circ \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E$$

$$\boxed{\begin{matrix} \dim W = 2 \\ \text{base } W = \{\vec{w}_1 = 1-x ; \vec{w}_2 = x^2\} \end{matrix}}$$

c) Base y dimensión de $U+W$

$U+W$ es generado por S = {base de U y base de W}

$$S = \{\vec{u}_1 = x ; \vec{u}_2 = 1+x^2 ; \vec{w}_1 = 1-x ; \vec{w}_2 = x^2\}$$

$$\left.\begin{matrix} [\vec{u}_1]_B = (0,1,0) \\ [\vec{u}_2]_B = (1,0,1) \\ [\vec{w}_1]_B = (1,-1,0) \\ [\vec{w}_2]_B = (0,0,1) \end{matrix}\right. \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong \circ \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E$$

$$\boxed{\begin{matrix} \dim(U+W) = 3 \\ \text{Base}(U+W) = \{\vec{p}_1 = 1 ; \vec{p}_2 = x ; \vec{p}_3 = x^2\} \end{matrix}}$$

d) Un vector genérico de P_2 pertenece a la $\cap$ de los 2 subespacios si cumple las condiciones de ambos. En este ejemplo W no esta definido bajo condiciones por lo tanto debemos redefinirlo, esto lo hacemos de la sgte manera.

$$\vec{p} = a+bx+cx^2 \in P_2 \Rightarrow \vec{p} \in L(\underbrace{\vec{w}_i}_{\text{base de } W})$$

$$\vec{p} = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2$$

$$(a+bx+cx^2) = a_1(1-x) + a_2(x^2)$$

$$\left\{\begin{matrix} a_1 + 0a_2 = a \\ -a_1 + 0a_2 = b \\ 0a_1 + a_2 = c \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right] \quad \cdots \quad \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} a \\ c \\ a+b \end{matrix}\right] \Rightarrow \circ\circ\circ$$

$\ldots \Rightarrow W = \{a+bx+cx^2 \in P_2 \,/\, a+b=0\}$

$U \cap W = \{a+bx+cx^2 \in P_2 \,/\, a-c=0 \wedge a+b=0\}$

sist. Equivalente

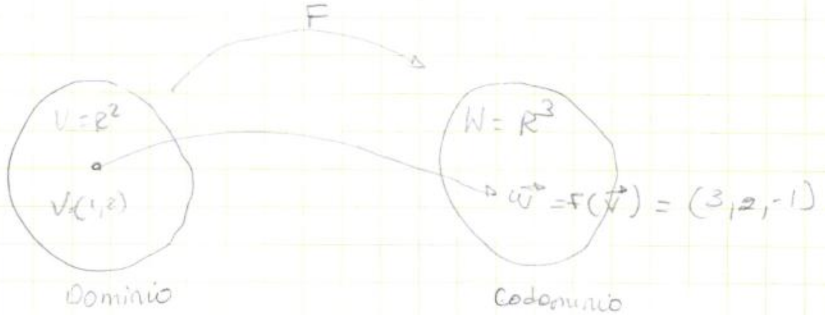
$\begin{cases} a-c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+0b-c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$

$\dim(U \cap W) = n-r = 3-2 = 1$ (var. libre ; c)

$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ \rightarrow c=1 \end{array}\right\} \vec{q}_1 = 1-x+x^2$

$\boxed{\begin{array}{l} \dim(U\cap W) = 1 \\ Base(U \cap W) = \{\vec{q}_1\} \end{array}}$ //

#5 TRANSFORMACIONES LINEALES:



$$F(a,b) = (a+b,\ b,\ -a)$$

T.L :

Definición: si V y W son dos espacios vectoriales entonces la transformación f(V) sobre W es una transformación lineal si y solo si :

$$F : V \to W \text{ es una T.L} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I)}\ F(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = F(\vec{v}_1) + F(\vec{v}_2) \\ \text{II)}\ F(k\vec{v}_1) = k\,F(\vec{v}_1) \end{cases}$$

$\therefore$ pá $\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

Es importante observar que cuando una transformación es lineal el $\vec{0}$ del Dominio sera llevado al $\vec{0}$ del codominio através de la transformación si esto no ocurre se puede afirmar categóricamente q' la transformación no es lineal.

En forma simplificada :

$$F : V \to W \text{ es una T.L.} \Leftrightarrow F(k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2) = k_1 F(\vec{v}_1) + k_2 F(\vec{v}_2)$$

Ej (1) : sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ /\ F(a,b) = (a+b,\ b,\ -a)$

Determinar si esta transformación es lineal.

$\vec{v_1} = (a, b)$, $\vec{v_2} = (x, y)$ $\in \mathbb{R}^2$; $\begin{cases} \vec{v_1} + \vec{v_2} = (a+x, b+y) \\ K\vec{v_1} = (Ka, Kb) \end{cases}$

Verificando la condic. de linealidad :

I) $F(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = F(\vec{v_1}) + F(\vec{v_2})$ ✓ se cumple ya que:

$F(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = (a+x+b+y, b+y, -a-x)$

$F(\vec{v_1}) = (a+b, b, -a)$

$F(\vec{v_2}) = (x+y, y, -x)$ +

$F(\vec{v_1}) + F(\vec{v_2}) = (a+b+x+y, b+y, -a-x)$ =

II) $F(K\vec{v_1}) = K\, F(\vec{v_1})$ se cumple ya que

$F(K\vec{v_1}) = (Ka+Kb, Kb, -Ka) = K\underbrace{(a+b, b, -a)}\ = K F(\vec{v_1})$ ✓

∴ $\boxed{F \text{ es una T.L}}$ //

② Sea $F: \mathbb{R}^3 \to M_{(2\times 2)}$ / $F(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b \\ b-c & 1 \end{bmatrix}$

Determ. si es T.L.

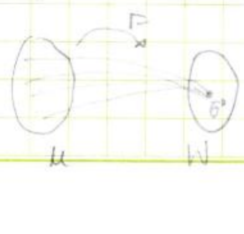
$\vec{0} = (0,0,0) \Rightarrow F(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{por lo tanto la } F \text{. NO ES LINEAL}}$ //

③ Sea U y W dos E.V cualesquiera y que sea la transformación de U sobre W

transformac. nula

$\forall \vec{u}$ $\boxed{F: U \to W \; / \; F(\vec{u}) = \vec{0}}$; $\forall \vec{u} \in U$. Demostrar que esta Transformación es lineal.



Nº Tema Fecha

I) $F(u_1, u_2) = F(\vec{u}_1) + F(\vec{u}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ ✓

si $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U \Rightarrow \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in U$

II) $F(k_1 \vec{u}_1) = k_1 F(\vec{u}_1) = k_1 \vec{0} = \vec{0}$ ✓

$\boxed{\text{por lo tanto la transformación nula es una T.L}}$ //

(4) Una matriz A de orden $(m \times n)$ puede ser considerada como una Transformación de R^n sobre R^m tal que

$$T: R^n \rightarrow R^m \,/\, T(\vec{v}) = A\vec{v}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

donde todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ deben ser considerados como vectores columna. Demostrar que esta transformación es lineal.

I) $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$ se cumple, ya que:

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$$

II) $T(k_1 \vec{v}_1) = A(k\vec{v}_1) = k(A\vec{v}_1) = k\,T(\vec{v}_1)$.

(5) Considerando a la matriz A como un T.L obtener la imagen de este vector

$$\underset{(2\times 3)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \,/\, T(\vec{v}) = A\vec{v}, \ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$T(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$ //

* Determinación de una T.L a través de las imágenes de 1 base del dominio

Teorema #1 :

Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de V y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son vectores cualesquiera de U entonces existe una única T.L $T: V \to U$ tal que:

$$\begin{cases} T(\vec{v}_1) = \vec{u}_1 \\ T(\vec{v}_2) = \vec{u}_2 \\ \vdots \\ T(\vec{v}_n) = \vec{u}_n \end{cases}$$

Ej: Sea $S = \{\vec{v}_1 = (1,0,1),\ \vec{v}_2 = (1,1,0),\ \vec{v}_3 = (1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ de tal manera que

$$\left.\begin{aligned} T(\vec{v}_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ T(\vec{v}_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T(\vec{v}_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \to$$

Determinar una fórmula pa' la T.L. $T: \mathbb{R}^3 \to M_{(2\times2)}$

$$\vec{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 \quad (I)$$

$$(a,b,c) = a_1(1,0,1) + a_2(1,1,0) + a_3(1,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = a \\ \quad\ \ a_2 = b \\ a_1 = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & -c+a \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a-b-c \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= c \\ a_2 &= b \\ a_3 &= a-b-c \end{aligned}}$$

Nº Tema Fecha

Si aplicamos T a ambos miembros de la ecuac. (I)

la transformación

$$T(\vec{v}) = T(a_1\vec{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3)$$

$$T(\bar{v}) = a_1 T(\bar{v}_1) + a_2 T(\bar{v}_2) + a_3 T(\vec{v}_3)$$

$$T(a,b,c) = c\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + (a-b-c)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{T(a,b,c) = \begin{bmatrix}c+b & c\\ a-b-c & a+c\end{bmatrix}} //$$

Verificación:

$$\vec{v}_1 = (1,0,1)$$

$$T(\vec{v}_1) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Núcleo e Imagen de una T.L.

Núcleo de F ∴ (Ker F) :

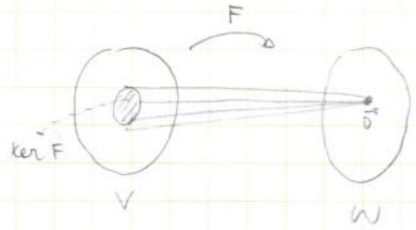


Imagen de F

teorema #2 : Sea $F: V \to W$ una T.L

Entonces : $\begin{cases} a) \text{ Ker } F \text{ es un subesp. de } V \text{ (dominio)} \\ b) \text{ Im } F \text{ es " " " } W \text{ (codominio)} \end{cases}$

Demostración :

Para demostrar ambos incisos basta aplicar el criterio de subespacios en c/u de ellos

Núcleo de F:

I) $\left.\begin{matrix} \vec{V_1} \\ V_2 \end{matrix}\right\} \in \text{Ker} F \therefore$ $\begin{matrix} F(\vec{V_1}) = \vec{0} \\ F(\vec{V_2}) = \vec{0} \end{matrix}$ entonces $F(\vec{V_1}+\vec{V_2}) \in \text{Ker} F$ ya que:

$$F(\vec{V_1}+\vec{V_2}) = F(\vec{V_1}) + F(\vec{V_2}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

por lo tanto el Ker F es cerrado pa' suma de vectores;

II) $\vec{V_1} \in \text{Ker} F \Rightarrow (k\vec{V_1}) \in \text{Ker} F$ ya que $F(k\vec{V_1}) = kF(\vec{V_1}) = k\vec{0} = \vec{0}$

∴ el Ker F es cerrado p/m/p/escalar.

Ker F es un SUBESPACIO de V.

Ker F = Núcleo

BASE Y DIMENSIÓN DEL NÚCLEO Y DE LA IMÁGEN DE UNA T.L :

Se utilizan los mismos criterios de la unidad anterior y el procedimiento en c/u de estos casos mostraremos a través del sgte ejemplo:

EJ: Sea $F: \mathbb{R}^3 \to M_{(2\times2)}$ una T.L / $F(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a-c \end{bmatrix}$

Determinar una base y la dim de la Imágen y del núcleo de la T.L F

- Imágen de F: Pa' encontrar la base y la dimens. de este subespacio se toma una base del Dominio, gralmente la base usual, se determinan sus imágenes al aplicarle F y el conj. de imágenes generarán a este subespacio.

$$B = \text{base usual de } \mathbb{R}^3 = \{\vec{e_1} = (1,0,0),\ \vec{e_2} = (0,1,0),\ \vec{e_3} = (0,0,1)$$

$S = \text{ " " " } M_{(2\times2)}$

$$\left.\begin{aligned} F(\vec{e_1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ F(\vec{e_2}) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ F(\vec{e_3}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \text{generan a } \operatorname{Im} F \Rightarrow \left.\begin{aligned} [F(\vec{e_1})]_S &= (1,0,0,1) \\ [F(\vec{e_2})]_S &= (1,1,1,0) \\ [F(\vec{e_3})]_S &= (0,0,0,-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dots$$

$$\dots\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-1)}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A_E$$

$\dim(\operatorname{Im} F) = 3$

$\text{base}(\operatorname{Im} F) = \left\{ \vec{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \vec{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \vec{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

Nº Tema Fecha

- Núcleo de F. Pa' encontrar una base y la dim de este subespacio se toma un vector genérico del Dominio q' suponemos $\in$ al Núcleo, se determina su imágen y del sist. homogéneo q' surge, el espacio soluc. de este sist homog es igual al núcleo de la Transformación y una base y dim de este Espac. solución serán las del núcleo.

$$\vec{v} = (a,b,c) \in \ker F \Rightarrow F(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ \quad b = 0 \\ \quad b = 0 \\ a \quad -c = 0 \end{cases} \quad \text{Espacio soluc} = \ker F$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E \qquad \begin{matrix} n = 3 \\ r = 3 \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \dim(\ker F) = n - r = 3 - 3 = 0 \\ \text{Base}(\ker F) = \{\vec{v} = (0,0,0)\} \end{matrix}}$$

teorema # 3: sea $F: V \to W$ una T.L. y que $\dim V = n$, entonces:

$$\boxed{\dim V = \dim(\ker F) + \dim(\operatorname{Im} F)}.$$

OPERADORES LINEALES:

Una Transformación que relaciona a un espacio vectorial consigo mismo se denomina operador y será lineal si cumple las condic. de linealidad definidas anteriormente. Todas definiciones y teoremas definidos pa' T.L. se aplican pa'

los operadores lineales.

$T: V \to V$

Tarea

Ej: Sea $T: R^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, T(a,b,c) = (a+b, 0, a-c)$

a) Demostrar que el operador T es lineal.

b) Determinar una base y una dimensión del núcleo y de la Imágen del operador T.

a) $\left.\begin{array}{l} v_1 = (a,b,c) \\ v_2 = (x,y,z) \end{array}\right\} \in \mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{array}{l} v_1 + v_2 = (a+x, b+y, c+z) \\ k\,v_1 = (ka, kb, kc) \end{array}\right.$

$\vec{0} = (0,0,0) \Rightarrow T(0,0,0) = (0,0,0) = \vec{0}$ ✓

I) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

$T(v_1 + v_2) = (a+x+b+y, 0, a+x-c-z)$

$T(v_1) = (a+b, 0, a-c)$

$T(v_2) = (x+y, 0, x-z)$

$T(v_1) + T(v_2) = (a+b+x+y, 0, a-c+x-z)$

$=$ ✓

II) $T(k\,v_1) = k\,T(v_1)$

$T(kv_1) = (ka+kb, 0, ka-kc) = k\underbrace{(a+b, 0, a-c)} = k\,T(v_1)$ ✓

$\boxed{\therefore T \text{ es T.L}}$

//

Nº Tema $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Fecha

b) $\mathrm{Im}\, T$:

B = Base usual de $\mathbb{R}^3 = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0) ; \vec{e_3} = (0,0,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} T(\vec{e_1}) = (1,0,1) \\ T(\vec{e_2}) = (1,0,0) \\ T(\vec{e_3}) = (0,0,-1) \end{array}\right\} \text{ generan a } \mathrm{Im}\, T \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{P_{12}}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-1)}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{A_{32}(1)}{}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_E$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim(\mathrm{Im}\, T) = 2 \\ \text{Base}(\mathrm{Im}\, T) = \{\vec{w_1} = (1,0,0), \vec{w_2} = (0,0,1)\} \end{array}}$$ //

$\mathrm{Ker}\, T$:

$\vec{v} = (a,b,c) \in \mathrm{Ker}\, T \Rightarrow T(a,b,c) = (a+b, 0, a-c) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ 0 = 0 \\ a-c = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-1)}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = A_E \qquad \begin{array}{l} a+b=0 \\ -b-c=0 \end{array}$$

$\dim(\mathrm{Ker}\, T) = n - r = 1$ var. lib (c)
$(3-2)$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array}\right| \quad \vec{v} = (1,-1,1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, T) = 1 \\ \text{base}(\mathrm{Ker}\, T) = \{\vec{v_1}\} \end{array}}$$ //

* TRANSFORMACIONES SINGULARES Y NO SINGULARES -

Una T.L. (Operador lineal) se denomina singular cuando la dimensión del núcleo es diferente de 0 (cero) y se dice que es NO-singular cuando la $\dim \underset{(\text{núcleo})}{\text{Ker} F} = 0$.

Cuando una Transformación es no singular existe un isomorfismo entre los espacios vectoriales que participan en dicha transformación, es decir, la aplicación será uno a uno y sobreyectiva.

* Operaciones con transformaciones lineales:

Sean $F: V \to U$ y $G: V \to U$ (T.L)

$K \in \mathbb{R}$.

$(F+G): V \to U /$

Suma: La suma $F+G$ es tb. una T.L. que V sobre U, tal que:

$$(F+G)(\vec{v}) = F(\vec{v}) + G(\vec{v}), \ \forall \vec{v} \in V.$$

Multiplicación: La multipl. de una T.L. por un escalar es tb una T.L. de V sobre U, tal que:

$(KF): V \to U$, tal que

$$(KF)(\vec{v}) = KF(\vec{v}_1); \ \forall \vec{v} \in V$$

Estas dos operaciones tiene como propiedades los 10 axiomas que define a un E.V., por lo tanto:

Teorema #4: El conjunto de todas las transformaciones lineales de $V \to U$ es un E.V. Simbólicamente este E.V. se representa por: Hom (V, U) y si $\dim V = m$ y $\dim U = n$ entonces $\dim(\text{Hom}(V,U)) = m * n$

Nº Tema Fecha

Producto o Composición de Trasformaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{l} F: V \to U \\ G: U \to W \end{array}\right\}$$ T.L Entonces el producto de F con G representado simbolicamente $(G \circ F)$ sera una T.L de $V \to W$

$$(G \circ F): V \to W \quad \text{tal que;}$$

$$(G \circ F)(\vec{v}) = G(F(\vec{v})) \; ; \; \forall \vec{v} \in V$$

Propiedades:

a) $G \circ (F + F') = (G \circ F) + (G \circ F')$

b) $(G + G') \circ F = (G \circ F) + (G' \circ F)$

c) $K(G \circ F) = (KG) \circ F = G \circ (KF)$

donde:

$$\left.\begin{array}{l} F: V \to U \\ F: V \to U \\ G: U \to W \\ G: U \to W \end{array}\right\} \text{T.L.}$$

Todas estas operaciones y sus propiedades constituyen el algebra de las Transformaciones lineales.

ALGEBRA DE LOS OPERADORES LINEALES: Toda el álgebra de las transformaciones se aplica pa' los operadores lineales y algunas simbolizaciones se simplifican.

$$\text{Hom}(V, V) = A(V)$$

Además, los operadores lineales tienen las sgte operaciones propias para operadores

I) Potencias de un operador :

$T : V \to V$ es un O.L, entonces :

$T^0 = I$ (donde I es el operador idéntico tal que $I(\vec{v}) = \vec{v}$; $\forall \vec{v} \in V$)

$T^1 = T$

$T^2 = T . T$

$\vdots$

$T^n = \underbrace{T . T . . . . T}_{n \text{ veces}}$

Todas las reglas de potencia se cumplen y en particular :

a) $T^m . T^n = T^{m+n}$

b) $(T^m)^n = T^{m \times n}$

donde m y n son enteros positivos $m \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

II) Polinomio en T :

sea $T : V \to V$ un O. L y sea

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \in P_n$$

si sustituimos x por T obtenemos el polinomio que estará definido por la sgte forma :

$$p(T) = a_0 T^0 + a_1 T^1 + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n$$

$$p(T) = a_0 I + a_1 T^1 + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n$$

aplicando el $\underbrace{p(T) \text{ a un } \vec{v} \in \text{al dominio}}_{p(T) \text{ en } \vec{v} \in V}$:

$$P(T)(\vec{v}) = (a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n)(\vec{v})$$

Como I y T son operadores lineales tendremos:

$$p(T)(\vec{v}) = a_0 I(\bar{v}) + a_1 T(\bar{v}) + a_2 T^2(v) + \dots + a_n T^n(\bar{v})$$

$$\underbrace{p(T)(\bar{v})} = a_0 \vec{V} + a_1 T(\bar{v}) + a_2 T^2(\bar{v}) + \dots + a_n T^n(\bar{v})$$

Es la imagen de $\vec{v} \in V$, al aplicarle el polinomio en T.

III) Operador Inverso: un operador $T: V \to V$ es inversible si y solo si existe el operador inverso $T^{-1}: V \to V$, tal que: la composición de $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Un operador lineal es inversible si y solo si es NO singular, es decir, si la dim de su núcleo es igual a cero

$$T: V \to V \text{ es inversible} \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} F) = 0$$

El procedimiento pa' determinar el operador inverso. mostraremos en el sgte ejemplo.

Ejemplo:

① Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x,y) = (2x+y, x-3y)$

Analizar si T es inversible y si lo fuera encontrar el operador inverso.

SOLUCIÓN

Analizando ela dim del núcleo tendremos:

$\vec{v} = (x,y) \in \operatorname{Ker} T$

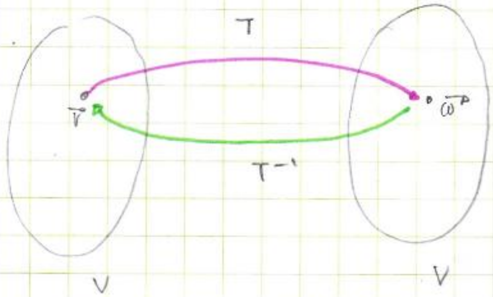
$T(x,y) = (2x+y, x-3y) = (0,0)$

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$ espacio solución $= \operatorname{Ker} T$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \approx \; \cdots \; \approx \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} n = 2 \\ r = 2 \end{matrix}$$

$$\dim(\operatorname{Ker} T) = n - r = 0$$

Como la $\dim(\operatorname{Ker} T) = 0$, entonces T es invertible.



$$\begin{cases} \vec{\omega} = T(\vec{v}) \\ T(\vec{\omega}) = \vec{v} \end{cases}$$

Suponiendo que $\vec{v} = (x, y)$ y $T(\vec{v}) = \vec{\omega} = (s, t)$

$$T(x,y) = (2x + y,\; x - 3y) = (s, t) \;\; / \;\; T^{-1}(s,t) = (x, y) \quad (I)$$

$$\begin{cases} 2x + y = s \\ x - 3y = t \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & s \\ 1 & -3 & t \end{array}\right] \approx \; \cdots \; \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}t + \frac{3}{7}s \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7}t + \frac{1}{7}s \end{array}\right] = A_{ER}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = \frac{1}{7}t + \frac{3}{7}s \\ y = -\frac{2}{7}t + \frac{1}{7}s \end{matrix}}$$

Sustituyendo los valores de x y y en (I)

$$\boxed{T^{-1}(s,t) = \left(\frac{3}{7}s + \frac{1}{7}t \,;\, \frac{1}{7}s - \frac{2}{7}t\right)}$$

Fórmula del operador inverso de T.

Verificando la fórmula:

$\vec{v} = (1, 2)$

$\boxed{T(1,2) = (4,-5)}$

entonces: $T^{-1}(4,-5) = \left(\frac{1}{7}(-5) + \frac{3}{7}(4),\; -\frac{2}{7}(-5) + \frac{1}{7}(4)\right)$

$\boxed{T^{-1}(4,-5) = (1,2)}$

Tarea: Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;/\; T(x,y,z) = (2x + y,\; 2z,\; x - z)$ Determinar siempre que sea posible, el operador inverso de T.

Nº Tema Fecha

SOLUCIÓN:

$\vec{V} = (x, y, z) \in \ker T$

$T(x, y, z) = (2x+y,\ 2z,\ x-z) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{P_{13}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{P_{23}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-2)}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A_E$$

$\dim(\ker T) = n - r = 3 - 3 = 0$

como $\dim(\ker T) = 0$, entonces T es invertible.

* Hallando T^{-1}:

sea $\vec{V} = (x, y, z)$ y $T(\vec{V}) = \vec{w} = (r, s, t)$ / $T^{-1}(r, s, t) = (x, y, z)$ (I)

$T(x, y, z) = (2x+y,\ 2z,\ x-z) = (s, t, r)$

$$\begin{cases} 2x + y = r \\ 2z = s \\ x - z = t \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 2 & s \\ 1 & 0 & -1 & t \end{array}\right] \underset{P_{13}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & 2 & s \\ 2 & 1 & 0 & r \end{array}\right] \underset{P_{23}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & t \\ 2 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 2 & s \end{array}\right] \underset{A_{21}(-2)}{\cong}$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & t \\ 0 & 1 & 2 & r-2t \\ 0 & 0 & 2 & s \end{array}\right] \underset{\substack{M_3(\frac{1}{2})\ A_{23}(-2) \\ A_{13}(1)}}{\cong} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & s/2 + t \\ 0 & 1 & 0 & r-s-2t \\ 0 & 0 & 1 & s/2 \end{array}\right] = A_{ER} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{s}{2} + t \\ y &= r - s - 2t \\ z &= \frac{s}{2} \end{aligned}}$$

sustituyendo x, y, z en (I)

$$\boxed{T^{-1}(r, s, t) = \left(\frac{s}{2} + t,\ r - s - 2t,\ \frac{s}{2}\right)}$$

//

MODULO

Verificando:

$\vec{v} = (1,2,1)$

$\boxed{T(\vec{v}) = (4,2,0)}$ $\Longrightarrow$ $T^{-1}(4,2,0) = \left[\left(\frac{2}{2}+0\right), \left(4-2-2(0)\right), \frac{2}{2}\right]$

$\boxed{T^{-1}(4,2,0) = (1,2,1)}$

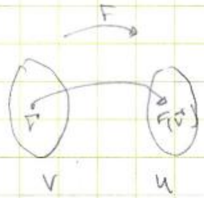
r o t =

MATRIZ DE UNA TRANSF. LINEAL

$F: V \to U$

$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V

$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ base de U



$$\left.\begin{aligned} F(\vec{v_1}) &= a_{11}\vec{u_1} + a_{12}\vec{u_2} + \ldots + a_{1m}\vec{u_m} \\ F(\vec{v_2}) &= a_{21}\vec{u_1} + a_{22}\vec{u_2} + \ldots + a_{2m}\vec{u_m} \\ &\vdots \\ F(\vec{v_n}) &= a_{n1}\vec{u_1} + a_{n2}\vec{u_2} + \ldots + a_{nm}\vec{u_m} \end{aligned}\right\} \circ\circ\circ$$

Definición:

$$\circ\circ\circ \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} = [F]_B^S$$

→ Es la matriz de F con relación a las bases B y S ó simplemente la matriz de F

EJERCICIO:

① Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz de $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con relación a las bases

$B = \{\vec{e_1} = (1,2,3);\ \vec{e_2} = (-1,0,-1)\}$ y $S = \{f_1 = (1,-1), f_2 = (-1,3)\}$

Determinar una Fórm. para F.

Ⓐ $\begin{cases} F(\vec{e_1}) = 1\vec{f_1} + 3\vec{f_2} = 1(1,-1) + 3(-1,3) = (-2,8) \\ F(\vec{e_2}) = -1f_1 - 1f_2 = -1(1,-1) - 1(-1,3) = (0,-2) \\ F(\vec{e_3}) = 2f_1 + 0f_2 = 2(1,-1) + 0(-1,3) = (2,-2) \end{cases}$

conociendo las imágenes de todos los vectores de la base del dominio podemos determinar la T.L.

$$\vec{v}=(a,b,c)\in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{v} = a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3} \quad \text{(I)}$$

$$F(\vec{v}) = a_1 F(\vec{e_1}) + a_2 F(\vec{e_2}) + a_3 F(\vec{e_3}) \quad \text{(II)}$$

Para determinar a_1 y a_2 y a_3 de (I) tendremos:

$$(a,b,c) = a_1(1,2,3) + a_2(1,1,-1) + a_3(-1,0,-1)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = a \\ 2a_1 + a_2 = b \\ 3a_1 - a_2 - a_3 = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 3 & -1 & -1 & c \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & -2a+b \\ 0 & -1 & 2 & -3a+c \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & -2a+b \\ 0 & 0 & -6 & 5a+4b+c \end{array}\right]$$

sist. equiv.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = a \\ -a_2 + 2a_3 = -2a+b \\ -6a_3 = 5a+4b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = ✓ \\ a_2 = ✓ \\ a_3 = ✓ \end{array}$$

↓

(B) luego rempl. en (II).

sostituyendo en (II) los valores de (A) y (B) se obtiene la Fórmula de T

$$F(a,b,c) = a_1 F(\vec{e_1}) + a_2 F(\vec{e_2}) + a_3 (\vec{e_3}).$$

(2) si $[u]_e = (2,-1)$ y $[v]_f = (0,-3)$ donde $\{\vec{e_1} = (1,-2), \vec{e_2} = (0,-1)\}$ y $\{f_1 = (1,-1), f_2 = (-1,3)\}$. Determinar $\vec{u} + \vec{v}$.

$[\vec{u}]_e = (2,-1)$

$[\vec{v}]_f = (0,-3)$

Sabemos:

- $\vec{u} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} \Rightarrow [\vec{u}]_e = (a_1, a_2)$

  $\vec{u} = 2(1,-2) + (-1)(0,-1) = \underline{(2,-3)}$

- $\vec{v} = b_1 \vec{f_1} + b_2 \vec{f_2} \Rightarrow [\vec{v}]_f = (b_1, b_2)$

  $\vec{v} = 0(1,-1) - 3(-1,3) = (3,-9)$

- $u + v = (2,-3) + (3,-9)$

  $\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (5,-12)}$ //

MATRICES:

① Responda con claridad:

a) ¿Qué es una matriz? ¿Qué es el orden de una matriz?

Es un arreglo rectangular de números.
El orden de una matriz es el número de filas y columnas de la misma.

b) ¿Cuál es la condición pa' sumar matrices?

La condición es que las matrices a sumarse tienen que ser del mismo orden.

c) ¿Cuál es la condición pa' multiplicar matrices?

La condición es que el nº de columna de la 1º matriz sea igual al nº de filas de la 2º matriz.

Ejemplo:

Análisis de forma:

$$\underbrace{(2\times 3)\ (3\times 4)}_{=}$$

$$\begin{matrix} A \cdot B \\ (m\times \underbrace{n)(n}_{=} \times p) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} A \cdot B \\ (m \times p). \end{matrix}$$

$$\boxed{A \cdot B \quad (2\times 4)}$$

d) ¿La multiplicación de matrices es conmutativa?

No, porque $A \cdot B \neq B \cdot A$ (no cumple)

Ej: análisis de forma:

$$\begin{matrix} A & B \\ (2\times \underbrace{4) & (4}_{=} \times 8) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} B & \cdot & A \\ (4\times \underbrace{8) & & (2}_{\neq} \times 4) \end{matrix}$$

e) ¿ Qué es una operación elemental ? ¿ Cuáles son ?

Es una aplicación que se realiza sobre los elementos de una matriz que nos permiten cambiar la forma pero no el tamaño de dicha matriz. Se aplica sobre "filas" en cualquier operación matricial (excepto la función determinante).

Y son de 3 tipos: Adición (A), Multiplicación (M) y Permutación (P).

2. Dadas la matrices:

$$\underset{(2\times4)}{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{(4\times2)}{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \underset{(4\times2)}{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 4 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2\times4)}{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcular, si es posible:

a) $D \cdot C =$ No se puede realizar.

Análisis de forma:

$$D \cdot C$$
$$\underbrace{(2\times4)\ (2\times4)}_{\neq}$$

b) $(2D - A)\,B$

Resolver por bloque:

$$(2D - A)\ B = (2\times2)$$
$$(2\times4) - (2\times4)$$
$$\underbrace{(2\times4) \cdot (4\times2)}_{=}$$

Reemplazando :

$$\left(2\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 4 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & -4 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -1 & 0\end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix}-1 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 10 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 10 & 10\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}38 & 14\\ -10 & -30\end{bmatrix} //$$

c) $A \cdot B - C.D$

No se puede realizar.

Análisis de forma :

$$A \cdot B - C.D$$

$$\underbrace{(2\times 4)(4\times 2)}_{=} - \underbrace{(4\times 2)(2\times 4)}_{=}$$

$$\underbrace{(2\times 2)} - \underbrace{(4\times 4)}$$

$$\neq$$

d) $(C^t + 3A)^t$

Análisis de Forma :

$$(C^t + 3A)^t$$

$$[(2\times 4) + (2\times 4)]^t$$

$$(2\times 4)^t$$

$$(4\times 2) //$$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 4 & -6\\ 1 & 0\end{bmatrix}^t + 3\begin{bmatrix}3 & -4 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)^t$$

$$= \left(\begin{bmatrix}3 & -1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -6 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}9 & -12 & 3 & 6\\ 0 & -6 & -3 & 0\end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix}12 & -13 & 7 & 7\\ 2 & -5 & -9 & 0\end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix}12 & 2\\ -13 & -5\\ 7 & -9\\ 7 & 0\end{bmatrix} //$$

③. Con las matrices del ejemplo anterior y utilizando definiciones, calcular si es posible:

a) $[B^t - 4A^t]_{21}$

Análisis de forma:

$$\underbrace{\underset{(2\times4)}{B^t} - \underset{(4\times2)}{4A^t}}_{\neq}$$

No se puede realizar.

b) $[(3C - 4B)^t]_{31}$

$$(3C - 4B)^t$$

$$\underbrace{(4\times2)} - \underbrace{(4\times2)}$$

$$(4\times2)^t = (2\times4)$$

= No está definido.

c) $[(3B + D^t)^t]_{21}$

$$(3B + D^t)^t$$

$$[\underbrace{(4\times2) + (4\times2)}]^t$$

$$(4\times2)^t \rightarrow (2\times4)$$

Por definición:

$$[[3B]^t + [D^t]^t]_{21}$$

$$= [3B]^t_{21} + [D^t]^t_{21}$$

$$= 3[B]_{12} + [D^t]_{12} = 3[B]_{12} + [D]_{21} = 3(3) + (0)$$

$$= 9 + 0 = \boxed{9}$$

d) $[(A + 2B^t)^t]_{12}$

$$(A + 2B^t)^t$$

$$[\underbrace{(2\times4) + (2\times4)}]^t$$

$$(2\times4)^t$$

$$(4\times2)$$

$$[[A]^t + [2B^t]^t]_{12}$$

$$= [A]^t_{12} + [2B^t]^t_{12}$$

$$= [A]_{21} + [2B^t]_{21} = [A]_{21} + 2[B]_{12}$$

$$= (0) + 2(3) = \boxed{6}$$

e) $[AB + (DC)^t]_{21}$

Análisis de forma:

$$AB + (DC)^t$$

$$\underbrace{(2\times4)(4\times2)}_{=} + [\underbrace{(2\times4)(4\times2)}_{=}]^t$$

$$(2\times2) + (2\times2)^t$$

$$\underbrace{\downarrow + (2\times2)}$$

$$(2\times2)$$

Por definición:

$$[AB]_{21} + [(DC)^t]_{21}$$

$$= [AB]_{21} + [DC]_{12}$$

$$= \sum_{k=1}^{4} [A]_{2k}[B]_{k1} + \sum_{t=1}^{4} [D]_{1t}[C]_{t2} = [A]_{21}[B]_{11} +$$

$$[A]_{22}[B]_{21} + [A]_{23}[B]_{31} + [A]_{24}[B]_{41} + [D]_{11}[C]_{12}$$

$$+ [D]_{12}[C]_{22} + [D]_{13}[C]_{32} + [D]_{14}[C]_{42} = (0)(2)$$

$$+ (-2)(4) + (-1)(0) + (0)(-1) + (2)(2) +$$

$$+ (1)(1) + (3)(-6) + (1)(0) = -8 + 4 + 1 - 18 = \boxed{-21}$$

f) $[AB + 3D]_{13}$

Análisis de forma:

$$AB + 3D$$

$$\underbrace{(2\times4)(4\times2)}_{=} + (2\times4)$$

$$(2\times2) + (2\times4)$$

$$\neq$$

No se puede realizar.

4. Revisando conceptos.

a) ¿Qué es una matriz elemental?

Es aquella que resulta de aplicar una única operación elemental sobre una matriz identidad, o bien, es aquella que se transforma en la identidad a través de una única operación elemental.

b) ¿Cuándo una matriz es equivalente por filas a otra?

Una matriz A es equivalente por filas a una matriz B, cuando la matriz B puede obtenerse mediante una sucesión finita de operaciones elementales de fila a partir de A.

$$\boxed{B = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_2 \cdot A}$$

c) ¿Qué es una matriz escalonada?

Es aquella que cumple con dos condiciones:

1. El 1° elemento distinguido $\neq 0$ de la 2° fila se encuentra a la derecha del 1° elemento distinguido $\neq 0$ de la 1° fila.
2. Las filas nulas estarán agrupadas en la parte inferior de la matriz.

d) ¿Qué es una matriz escalón reducida?

Es aquella que además de ser una matriz escalonada, tiene elementos distinguidos $= 1$ y el resto de los elementos de la columna distinguida son $= 0$.

e) Si una matriz es no singular, entonces ¿cuál será su escalón reducida equivalente?

La matriz Identidad: $[A \mid I] \simeq [\underbrace{I}_{A_{ER}} \mid A^{-1}]$

5. Determinar, justificando la respuesta, cuales de las siguientes matrices son elementales:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ No es elemental porque:

$P_{12} \to I_{(2)}$; $M_2(-2) \to I_{(2)}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Es elemental porque:

$M_2(-2) \to I_{(3)}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Es elemental porque:

$A_{21}(2) \to I_{(3)}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Es elemental porque:

$M_2(-\frac{1}{3}) \to I_{(3)}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ No es elemental, porque:

$M_3(-2) \to I_{(4)}$; $A_{34}(1) \to I_{(4)}$.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Es elemental, porque:

$A_{34}(3) \to I_{(4)}$

g) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ No es elemental, porque:

$M_1(\frac{1}{2}) \to I_{(4)}$; $M_2(-3) \to I_{(4)}$.

(6). Del ejemplo anterior, Determinar las inversas de las matrices elementales en forma directa.

b) $E_1^{-1} = M_2(-\frac{1}{2}) \rightarrow I_{(3)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} //$$

c) $E^{-1} = A_{21}(2) \rightarrow I_{(3)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $E^{-1} = M_2(-3) \rightarrow I_{(3)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f) $E^{-1} = A_{34}(3) \rightarrow I_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(7). Sea $\underset{2\times4}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

a) Llevarla a la forma ESCALÓN REDUCIDA.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-2)}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{bmatrix} \underset{M_2(-1)}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \underset{A_{12}(-3)}{\cong} \underset{A_{ER}.}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}}$$

b) Hallar las matrices elementales E_1, E_2 y E_3 tales que $A_{ER} = E_3 E_2 E_1 A$.

$E_1 = A_{21}(-2) \rightarrow I_{(2)}$ $\quad E_2 = M_2(-1) \rightarrow I_{(2)}$ $\quad E_3 = A_{12}(-3) \rightarrow I_{(2)}$

$$\underset{E_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{E_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \quad \underset{E_3}{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Verificación :

$$E_3 \cdot E_2 \, E_1 \cdot A = A_{ER}.$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}}^{A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = A_{ER}.$$

c) Encontrar una matriz no singular, B, tal que $B \cdot A = A_{ER}$.

$$\underset{A_{21}(-2)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cong \underset{M_2(-1)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \cong \underset{A_{12}(-3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} \cong \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{B}$$

Verificar: $B \cdot A = A_{ER}.$

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = A_{ER}$$

d) De la ecuación matricial del inciso (b) despejar la matriz A.

$$E_3 E_2 E_1 \cdot A = A_{ER}$$

$$\underbrace{(E_3 E_2 E_1)^{-1} (E_3 E_2 E_1)}_{I} A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} \cdot A_{ER}.$$

$$\boxed{A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} \cdot A_{ER}}$$

i) Encontrar una matriz no singular, C, tal que $C \cdot A_{ER} = A$

de la ecuac. anterior:

$B \cdot A = A_{ER}$

$\underbrace{B^{-1} \cdot B}\ A = A_{ER}$

$\underline{A = B^{-1} \cdot A_{ER}}$

$A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} \cdot A_{ER}$.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

hallando: C^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{M_1\left(-\frac{1}{5}\right)}{\cong} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/5 & -1/5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{A_{21}(-2)}{\cong} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right]$$
$$\underset{M_2(5)}{\cong} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 10/5 & 5 \end{array}\right] \underset{A_{12}(3/5)}{\cong} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$\underbrace{}_{I}$ $\underbrace{}_{C}$

Verificando: $C \cdot A_{ER} = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} //$$

8. Expresar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ como la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)}$$

Fórmula

$$A = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1/2)\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -12 \end{bmatrix} + (1/2)\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3/2 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} = A$$ //

9. Demostrar que:

a) El producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

Ej: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ //

b) La suma de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

10. Llevar las matrices a la forma escalón reducida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{ER}.$$

$A_{21}(-1)$
$A_{31}(-2)$

$M_2\left(-\frac{1}{4}\right)$
$A_{12}(-3)$
$A_{32}(4)$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

P_{13} $\quad$ $A_{21}(-3)\ A_{31}(-2)\ A_{41}(-2)$ $\quad$ $M_2\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -16/5 \\ 0 & 0 & 1 & -9/5 \\ 0 & 0 & 0 & -22/5 \end{bmatrix}$$

$A_{12}(-1)\ A_{32}(3)\ A_{42}(1)$ $\quad$ $M_3\left(\frac{2}{5}\right)\ A_{23}\left(-\frac{3}{2}\right)\ A_{13}\left(\frac{1}{2}\right)\ A_{43}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $M_4\left(-\frac{5}{22}\right)\ A_{14}\left(-\frac{3}{5}\right)\ A_{24}\left(\frac{16}{5}\right)\ A_{34}\left(\frac{9}{5}\right)$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{ER}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -19 \\ 0 & -10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C_{ER}.$$

$A_{21}(-6)\ A_{31}(-4)\ A_{41}(-1)$ $\quad$ $M_2\left(-\frac{1}{19}\right)$ $\quad$ $A_{12}(-3)\ A_{32}(10)\ A_{42}(3)$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 8 & -11 \\ 0 & -5 & 8 & -11 \\ 0 & -10 & 16 & -22 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & -8/5 & 11/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D_{ER}.$$

$A_{21}(-2)\ A_{31}(-3)\ A_{41}(-5)$ $\quad$ $M_2\left(-\frac{1}{5}\right)\ A_{12}(-2)\ A_{32}(5)\ A_{42}(10)$

(12). En cada inciso, usar la información dada para encontrar A.

a) $A^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{D}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 13/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right]$$

$M_1(1/2)\ A_{21}(-3)$ $M_2(2/13)\ A_{12}(1/2)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/13 & 1/13 \\ 0 & 1 & -3/13 & 2/13 \end{array}\right] \quad D^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix} //$$

b) $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

P_{12} $A_{21}(3)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$A_{12}(2)$

$$((7A)^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$7A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left(\frac{1}{7}\right) \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 & 1 \\ 1/7 & 3/7 \end{bmatrix} //$$

c) $(5A^t)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5/3 & 1 \end{array}\right]$$

$M_1\left(-\frac{1}{3}\right)$ $A_{21}(-5)$ $M_2(3)\ A_{12}\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[(5A^t)^{-1}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$5\,(A^t)^t = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^t$$

$$5A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 & 1 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

d) $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$M_1(-1)\ A_{21}(-4)$ $\quad M_2\left(\frac{1}{13}\right)$ $A_{12}(2)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/13 & 2/13 \\ 0 & 1 & 4/13 & 1/13 \end{array}\right]$$

$$\left[(I + 2A)^{-1}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$I + 2A = \begin{bmatrix} -5/13 & 2/13 \\ 4/13 & 1/13 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} -5/13 & 2/13 \\ 4/13 & 1/13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18/13 & 2/13 \\ 4/13 & -12/13 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -18/13 & 2/13 \\ 4/13 & -12/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/13 & 1/13 \\ 2/13 & -6/13 \end{bmatrix}$$

13. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Encontrar la matriz X de las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $C^t + 2X = 3B$

$2X = 3B - C^t$

$$\boxed{X = \frac{1}{2}\left(3B - C^t\right)}$$

$$X = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 5/2 \\ 6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b) $3AX - 2C = B^t$

$$3AX = B^t + 2C$$

$$\underbrace{(3A)^{-1}(3A)}_{I} X = (3A)^{-1}(B^t + 2C)$$

$$\boxed{X = (3A)^{-1}(B^t + 2C)}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$M_1\left(\frac{1}{3}\right) A_{21}(9) \quad M_2\left(\frac{1}{21}\right) A_{12}(-2)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/21 & -2/21 \\ 0 & 1 & 3/21 & 1/21 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1/21 & -2/21 \\ 3/21 & 1/21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/21 & -13/21 \\ 7/21 & -4/21 \end{bmatrix}$$

c) $AX + CX = -2B$

$$(A+C)X = -2B$$

$$\underbrace{(A+C)^{-1}(A+C)}_{I} X = (A+C)^{-1}(-2B)$$

$$\boxed{X = (A+C)^{-1}(-2B)}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$M_1\left(\frac{1}{2}\right) A_{21}(2)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$A_{12}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$$

d) $(-2B + CX^t)^t = A^t$

$$\left[(-2B + CX^t)^t\right]^t = (A^t)^t$$

$$-2B + CX^t = A$$

$$CX^t = A + 2B$$

$$\overbrace{C^{-1}C}^{I} X^t = C^{-1}(A + 2B)$$

$$(X^t)^t = \left[C^{-1}(A + 2B)\right]^t$$

$$\boxed{X = \left[C^{-1}(A + 2B)\right]^t}$$

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \right) \right)^{t}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right)^{t}$$

$$X = \begin{bmatrix} 7/5 & 21/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} 7/5 & 4/5 \\ 21/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$A_{21}(-1)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$M_2\left(\frac{1}{5}\right)$ $A_{12}(3)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

(14). ¿Qué condición debe establecerse, sobre las matrices A y B?, para que sea válida la igualdad: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

$$[A+B][A+B] = [A][A] + \underbrace{[A][B]} + \underbrace{[B][A]} + [B][B].$$

→ Tener el mismo orden y $B = A^{-1} / A.B = BA = I$.

Es decir: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I$ (son conmutativos).

(15). Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ Encontrar una matriz B

para que la igualdad del ejercicio anterior se cumpla.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$A_{21}(1)$ $M_2(1/5)$ $A_{12}(-2)$

$$\cong \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}}_{B}$$

Verificando la igualdad :

$$(A+B)^2 = A^2 + \underbrace{2AB}_{AB+BA} + B^2$$

$$\begin{bmatrix} 8/5 & 8/5 \\ -4/5 & 16/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8/5 & 8/5 \\ -4/5 & 16/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/25 & -8/25 \\ 4/25 & -1/25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32/25 & 192/25 \\ -96/25 & 224/25 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 7/25 & -8/25 \\ 4/25 & -1/25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/25 & -8/25 \\ 4/25 & -1/25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32/25 & 192/25 \\ -96/25 & 224/25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32/25 & 192/25 \\ -96/25 & 224/25 \end{bmatrix} \checkmark$$

(16) Determinar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & -1/5 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 \end{array}\right] //$$

$$M_2\left(\tfrac{1}{3}\right),\ M_4\left(-\tfrac{1}{5}\right)$$

Mecanismo : como es una matriz diagonal sobre esta se va a reemplazar c/elem. distinguido por su valor inverso (sin cambiar el signo).

17. Una empresa cuenta con dos fábricas de autos y produce tres modelos diferentes A, B y C. Las siguientes tablas indican la producción correspondientes a los meses de Agosto y Septiembre del año 1998.

	F1	F2.
A	1500	1 430
B	1 078	1 203
C	945	847

Mes de Agosto.

	F1	F2.
A	1 640	1 215
B	1 142	1 097
C	1 000	847

Mes de Septiembre.

a) ¿A cuánto ascendió la producción de agosto y septiembre juntos?

$$\underset{(3\times2)}{A} = \begin{bmatrix} 1\,500 & 1\,430 \\ 1\,078 & 1\,203 \\ 945 & 847 \end{bmatrix} \qquad \underset{(3\times2)}{S} = \begin{bmatrix} 1\,640 & 1\,215 \\ 1\,142 & 1\,097 \\ 1\,000 & 847 \end{bmatrix}$$

$$A + S = \begin{bmatrix} 3\,140 & 2\,645 \\ 2\,220 & 2\,300 \\ 1\,947 & 1\,694 \end{bmatrix} //$$

b) ¿Qué diferencia encuentra entre las producciones de agosto y septiembre? Interprete el signo de los elementos obtenidos.

$$A - S = \begin{bmatrix} -140 & 215 \\ -64 & 106 \\ -55 & 0 \end{bmatrix} //$$

El signo (–) indica que la producción: sep > Agost. en la Fabrica 1.

El signo (+) indica que la producción
Agost ⇒ sept (en la Fabrica 2).

Y el "0" que se mantiene el nivel de producción.

c) Si en septiembre se hubiera producido exactamente lo mismo que en agosto, ¿a cuánto habría ascendido la producción total?

Si $S = A \Rightarrow 2A$

$$2\begin{bmatrix} 1\,500 & 1\,430 \\ 1\,078 & 1\,203 \\ 945 & 847 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,000 & 2\,860 \\ 2\,156 & 2\,406 \\ 1\,890 & 1\,694 \end{bmatrix}_{//}$$

d) Sabiendo que el precio de venta de un auto modelo A es $ 15 000, de un modelo B es $ 18 000 y de un auto modelo C es $ 22 000, y suponiendo que se vendió toda la producción:

Calcule cuánto se ingresó por concepto de venta de la producción de la F1 y F2.

$\underset{(1\times3)}{P} = \begin{bmatrix} 15\,000 & 18\,000 & 22\,000 \end{bmatrix}$ ⇝ matriz Precio

$$P \cdot \underbrace{(A+S)}_{D} = \begin{bmatrix} 15\,000 & 18\,000 & 22\,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\,140 & 2\,645 \\ 2\,220 & 2\,300 \\ 1\,947 & 1\,694 \end{bmatrix}$$

Analisis de forma

$P \cdot (A+S)$

$(3\times2) + (3\times2)$

$(1\times3) \cdot \underbrace{(3\times2)}_{=}$

$$P \cdot D = \begin{bmatrix} 129\,894\,000 & 118\,343\,000 \end{bmatrix}_{//}$$

(18). Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda esta dada por el vector de demanda $d = (30 \ 20 \ 40 \ 10)$. El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el vector de precios $p = (20 \ 15 \ 18 \ 40)$ expresado en dólares.

Calcule el dinero que recibira el fabricante si se cumple la demanda.

$$\underset{(1\times4)}{p} \cdot \underset{(1\times4)}{d} \quad \neq$$

$$d = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$d^t = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Analisis de forma

$$\underset{(1\times4)}{p} \cdot \underset{(4\times1)}{d^t} \quad =$$

$$D = p \cdot d^t$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 18 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2\,020 \end{bmatrix} //$$

(19). La Empresa Image Development Company fabrica en su planta de S.C. tres tipos de televisores de 14, 21 y 25 pulgadas.

Los almacenes principales están en Cbba, Sucre, L.P., Tarija. Las ventas durante 1999 de Cbba se cifraron en 400, 100 y 500 televisores de 14, 21, 25 pulgadas respectivamente ; las de Sucre en 300, 150 y 400 televisores ; las de L.P. en 100, 100 y 200 ; y la de Tarija en 200, 150 y 300. Los precios de venta fueron de 250 \$, 500 \$ y 800 \$ para los televisores de 14, 21 y 25 pulgadas respectivamente.

a) Expresar los precios de venta mediante de una matriz.

$$P = \begin{bmatrix} 250 & 500 & 800 \end{bmatrix}$$

b) Expresar la cantidad de venta por ciudad y tipo de televisor mediante una matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 500 \\ 400 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Cbba} \\ \text{Sucre} \\ \text{LP} \\ \text{Tarija} \end{array}$$

c) Determine qué ciudad tuvo mayores beneficios por concepto de ventas.

$$M = A + B + C = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 500 \\ 400 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1000 \\ 850 \\ 400 \\ 650 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cbba} \\ \rightarrow \text{Sucre} \\ \rightarrow \text{LP} \\ \rightarrow \text{Tarija} \end{array}$$

$\boxed{\text{Cbba obtuvo mayores benefic. por concep. ventas}}$

//

(20) La Empresa Juguete Instructivo produce tres tipos de aeromodelos. Los principales materiales necesarios son metal (m), plástico (p) y madera (w). La matriz R muestra cuánto material necesita para los modelos expresados en unidades adecuadas.

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m & p & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}$$

donde cada fila representa las cantidades en unidades correspondientes al modelo a, b y c respectivamente.

La empresa vende directamente a una cadena de tiendas de departamentos que le ha hecho un pedido de 700 piezas del modelo a, 800 del modelo b, y 500 del c. El pedido esta en la matriz P:

Nº de modelos

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ (700 \quad 800 \quad 500) \end{array}$$

a) Forme una matriz que exprese la cantidad total necesaria de cada material para satisfacer el pedido.

$$T = \underbrace{P \cdot R}_{=}$$

$$(1\times3)\ (3\times3)$$

$$T = \begin{bmatrix} 700 & 800 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5\,300 & 9\,800 & 7\,900 \end{bmatrix} \\ \quad (m) \qquad (p) \qquad (w) \end{array} \quad //$$

b) La Empresa Juguetera compra todos los materiales con dos proveedores. Los precios unitarios del proveedor S_1 son: \$us. 1,5 el metal, \$us 0,85 el plástico y \$us. 1.15 la madera. El proveedor S_2 cobra \$us 1.65 el metal, \$us 0.8 el plástico y \$us 1,10 la madera.

Forme la matriz de costo C, cuyas columnas muestren los precios unitarios de cada proveedor y Determine la matriz que muestre el costo de los materiales para cada modelo basado en los dos conjuntos de precios de proveedor.

Analisis de Forma:

$$\underbrace{R \cdot C}_{=}$$

$$(3\times3)\ (3\times2)$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & 1.65 \\ 0.85 & 0.8 \\ 1.15 & 1.10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (m) \\ (p) \\ (w) \end{array}$$

$T = R \cdot C$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m & p & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S1 & S2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & 1.65 \\ 0.85 & 0.8 \\ 1.15 & 1.10 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S1 & S2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12.15 & 12 \\ 12.2 & 12.25 \\ 14.2 & 14.15 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (m) \\ (p) \\ (w) \end{array}$$

//

EXAMEN PRÁCTICO :

(1) a) De la ecuación matricial $(2X - AB)^t = B$, despejar la matriz X.

$$(2X - AB)^t = B$$
$$(2X)^t - (AB)^t = B$$
$$2X^t - B^tA^t = B$$
$$(2X^t)^t = (B + B^tA^t)^t \quad /()^t$$
$$2X = B^t + (B^tA^t)^t$$
$$X = 2\,(B^t + (A^t)^t\,(B^t)^t$$
$$\boxed{X = 2\,(B^t + AB)}$$

b) calcular la matriz X, tomando en cuenta que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Reemplazando A y B :

$$X = 2\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 10 & 19 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 20 & 24 \\ 20 & 38 \end{bmatrix}$$

(2). sean :

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{2\times2}{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{2\times2}{C} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar por definición de las operaciones entre matrices el valor de los siguientes elementos:

a) $\left[(AB)^t + 4C\right]_{21}$

Análisis de forma.

$(AB)^t + 4C$

$(3\times2)\underbrace{\ }_{=}(2\times2)$

$(3\times2)^t$

$(2\times3) + (2\times3)$

(2×3) ✓

$= \left[(AB)^t\right]_{21} + \left[4C\right]_{21}$

$= \left[B^t A^t\right]_{21} + 4\left[C\right]_{21}$

$= \sum_{i=1}^{2} \left[B^t\right]_{2k} \left[A^t\right]_{k1} + 4\left[C\right]_{21}$

$= \left[B^t\right]_{21}\left[A^t\right]_{11} + \left[B^t\right]_{22}\left[A^t\right]_{21} + 4\left[C\right]_{21}$

$= \left[B\right]_{12}\left[A\right]_{11} + \left[B\right]_{22}\left[A\right]_{12} + 4\left[C\right]_{21} = (-1)(1)$

$+ (0)(-2) + 4(1) = -1 + 4 = \boxed{3}$ //.

b) $\left[B^t C - 3A\right]_{12}$

Análisis de forma.

$B^t C - 3A$

$(2\times2)\underbrace{\ }_{=}(2\times3)$

$\underbrace{(2\times3)} - \underbrace{(3\times2)}$

$\neq$

= No esta definido

c) $\left[A^t + BC\right]_{31}$

Análisis de forma

$A^t + B.C$

$(2\times3) \quad (2\times2)\underbrace{\ }_{=}(2\times3)$

$(2\times3) + (2\times3)$

(2×3) //

$= \nexists$.

(3). con las matrices del ejemplo anterior determinar con métodos nemotécnicos encuentre en forma total la matriz $(A \cdot B)^t + 4C$ y verificar si el resultado encontrado en el inciso (a) esta correcto.

$$(A \cdot B)^t + 4C$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^t + 4 \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 20 & -12 & 8 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -12 & 8 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -6 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} //$$

(4). sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$:

a) llevarla a la forma escalón reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \underset{A_{21}(-2)}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{bmatrix} \underset{\substack{M_2(-1) \\ A_{12}(-3)}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \approx \underset{E_1}{\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}} \quad \underset{E_2}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}} \quad \underset{E_3}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/5&0\\0&0&1\end{bmatrix}} \quad \underset{E_4}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}} \quad \underset{E_5}{\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

Ej: 1.

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&4&3&1\\3&6&2&2\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&0&5&-1\\0&0&5&-1\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&0&1&-\frac{1}{5}\\0&0&0&0\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1&2&0&\frac{4}{5}\\0&0&1&-\frac{1}{5}\\0&0&0&0\end{bmatrix} = A_{ER}$$

$A_{21}(-2)$, $A_{31}(-3)$ $\quad$ $M_2\left(\frac{1}{5}\right)$, $A_{32}(-5)$ $\quad$ $A_{12}(1)$

$$E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 \cdot A = A_{ER}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1/5&0\\0&1/5&0\\0&-\frac{5}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underset{(3\times 3)}{B} \quad \underset{(3\times 4)}{A} \qquad BA\,(3\times 4).$$

$$\begin{bmatrix}1&1/5&0\\0&1/5&0\\-3&-5/5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix}3/5&1/5&0\\-2/5&1/5&0\\-5/5&-5/5&1\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&4&3&1\\3&6&2&2\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}5/5&10/5&0&4/5\\0&0&5/5&-1/5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_{ER} = \begin{bmatrix}1&2&0&4/5\\0&0&1&-1/5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$