Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 07-2

Control 2

P1. **(a)** Considere la transformación

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \\ p(x) &\longmapsto T(p)(x) = (x^2+x+1)\cdot p(x). \end{aligned}$$

En donde $\mathcal{P}_k(\mathbb{R})$ denota el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales, de grado menor o igual a k.

(a1) (0.5 ptos.) Demuestre que T es lineal.

(a2) (1.2 ptos.) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$.

(a3) (1.3 ptos.) Determine una base de $Im(T)$ y calcule el rango de T.

(a4) (0.5 ptos.) Estudie posible inyectividad y epiyectividad de T. Estudie además si T es isomorfismo.

(b) Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Dada una transformación lineal $L : V \to W$, definimos su gráfico $G = \{(v, L(v)) \in V \times W \mid v \in V\}$.

(b1) (1 ptos.) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

(b2) (1.5 ptos.) Demuestre que V y G son isomorfos.

Observación: Las operaciones de e.v. en $V \times W$ son: $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ y $\lambda(v_1, w_1) = (\lambda v_1, \lambda w_1)$.

P2. **(a)** (3 ptos.) Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule los valores propios de A, y determine una base para cada subespacio propio.

(b) Considere $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y la transformación lineal $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en cada $z \in \mathbb{C}$, por $T(z) = (1+\sqrt{3}i)\cdot z$ (**no** se le pide probar que T es lineal).

(b1) (1 pto.) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base canónica $\beta_C = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$. Es decir, $M_{\beta_C\beta_C}(T)$.

(b2) (2 ptos.) Usando matrices de cambio de base, determine la matriz representante de T con respecto a la base $\beta = \{1+i, 1-i\}$. Es decir, $M_{\beta\beta}(T)$. Explicite todas las matrices usadas.

P3. Sea V e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Suponga que $V = U \oplus W$, con U y W s.e.v. de V tales que $U \neq \{0\} \neq W$. Se define la transformación lineal $T\colon V \to V$ por:

$$T(u+w) = u, \quad \text{donde } u \in U,\ w \in W.$$

(a) (2 ptos.) Determine $Ker(T)$ e $Im(T)$. Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T.

(b) (2 ptos.) Muestre que 0 y 1 son los únicos valores propios de T.

(c) (2 ptos.) Encuentre los subespacios propios asociados a los dos valores propios mencionados en (b).

Tiempo: 3 hrs.
20 de octubre de 2007

Solución del Control 2, Álgebra Lineal. Primavera 2007.

1. *a*)
   1) Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in RR$, y $p_1(X), p_2(X) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Entonces directamente de la definición de T y las propiedades de los polinomios: $T(\lambda_1 p_1(X) + \lambda_2 p_2(X)) = \left(X^2 + X + 1\right) \cdot (\lambda_1 p_1(X) + \lambda_2 p_2(X))$ $\lambda_1 \left(X^2 + X + 1\right) \cdot p_1(X) + \lambda_2 \left(X^2 + X + 1\right) \cdot p_2(X) = \lambda_1 T(p_1(X)) + \lambda_2 T(p_2(X))$, luego T es lineal. **(0.5 puntos)**
   2) $p(X) \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow T(p(X)) = 0 \Leftrightarrow \left(X^2 + X + 1\right) \cdot p(X) = 0 \Leftrightarrow p(X) = 0$, puesto que el anillo de polinomios no tiene divisores de 0. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. De allí que una base (la única, de hecho) de $\mathrm{Ker}(T)$ es $\emptyset$, y $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$. **(1.2 puntos)**
   3) Si se desea, el rango $\mathrm{r}(T)$ puede obtenerse ahora mismo a partir del TNI: $\mathrm{r}(T) = \dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 3 - 0 = 3$. Por supuesto, también podemos determinarlo contando los elementos de la base que determinaremos para $\mathrm{Im}(T)$. Para encontrar esta última base, podemos por ejemplo tomar una base del espacio de partida $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, digamos la canónica $B_c = \left\{1, X, X^2\right\}$, y calcularle T a cada uno de sus vectores. Sabemos que el conjunto resultante $T(B_c)$ generará $\mathrm{Im}(T)$, pero como además $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, T es inyectiva y por lo tanto transforma familias l.i. en familias l.i., y $T(B_c)$ será realmente una base de $\mathrm{Im}(T)$. Entonces, por ejemplo $\left\{T(1), T(X), T\left(X^2\right)\right\} = \left\{X^2 + X + 1, X^3 + X^2 + X, X^4 + X^3 + X^2\right\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$ (y, como ya se dijo, el rango de T es 3). **(1.3 puntos)**
   4) Ya se indicó previamente que como $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, T es inyectiva. Además como $\mathrm{r}(T) = 3 < 4 = \dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$, T no es sobreyectiva (de hecho no hay ninguna lineal sobreyectiva entre estos espacios, por la relación entre sus dimensiones). Como T no es sobreyectiva, no es tampoco biyectiva y por lo tanto no corresponde a un isomorfismo. **(0.5 puntos)**

   b)
   1) El conjunto $G = \{(v, L(v)) \in V \times W \mid v \in V\}$ es un subespacio, puesto que es no vacío (por ejemplo, tiene como uno de sus elementos al 0 de $V \times W$: $(0,0) \in G$) **(0.2 puntos)**, y si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ y $(v_1, L(v_1)), (v_2, L(v_2)) \in G$, entonces $\lambda_1 \cdot (v_1, L(v_1)) + \lambda_2 \cdot (v_2, L(v_2)) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2)) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = (v, L(v)) \in G$, para $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V$. **(0.8 puntos)**
   2) Para ver que V y G son isomorfos, basta exhibir un isomorfismo entre ellos **(0.2 puntos)**. La función $T: V \to G$ definida por $T(v) = (v, L(v))$ es lineal: $T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \ldots = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$ (notar que son los mismos cálculos de b1) **(0.8 puntos: indicar un candidato a isomorfismo, revisando que es lineal)**. Además podemos exhibir explícitamente su inversa, por lo que será biyectiva y por lo tanto un isomorfismo. Esta inversa es la proyección sobre la primera componente, $P: G \to V$ definida por $P(v, L(v)) = v$ (es inmediato que $P \circ T = \mathrm{id}_V$, $T \circ P = \mathrm{id}_G$). **(0.5 puntos: mostrar de alguna manera válida que el candidato propuesto es biyectivo)**

   (+ 1 punto base)

2. *a*) Para determinar los valores propios de A, calculemos primero su polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$. Para aprovechar el 0 de la posición $(2,3)$ de la matriz, desarrollaremos el determinante por la segunda fila (también podría haber convenido desarrollar por la tercera columna). $\mathrm{p}(\lambda) = -2 \cdot (2 \cdot (3-\lambda) - 3 \cdot 1) + (1-\lambda) \cdot ((1-\lambda) \cdot (3-\lambda) - 3 \cdot (-1)) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)$**(1 punto: polinomio característico, no necesariamente factorizado)**. Los valores propios de A son las raíces de $p(\lambda)$, es decir, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. **(0.5 puntos)**

Calculemos ahora las bases de los tres subespacios propios asociados a los valores propios de A. Para $\lambda_1 = 0$: $W_0 = \mathrm{Ker}\,(A - 0 \cdot I) = \mathrm{Ker}\,(A)$. Hay que resolver el sistema $Ax = 0$. Hacemos el respectivo pivoteo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

y, sustituyendo en reversa, $x_2 = -2x_3$, $x_1 + 2(-2x_3) + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_3$, por lo que la solución general del sistema es $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Con esto, una base para W_0 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. **(0.5 puntos)**

Para $\lambda_2 = 2$: $W_2 = \mathrm{Ker}\,(A - 2 \cdot I)$. Hay que resolver el sistema $(A - 2 \cdot I)\,x = 0$. Hacemos el respectivo pivoteo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

y, sustituyendo en reversa, $x_2 = -2x_3$, $-x_1 + 2(-2x_3) + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_3$, por lo que la solución general del sistema es $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Con esto, una base para W_2 es $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. **(0.5 puntos)**

Para $\lambda_3 = 3$: $W_3 = \mathrm{Ker}\,(A - 3 \cdot I)$. Hay que resolver el sistema $(A - 3 \cdot I)\,x = 0$. Hacemos el respectivo pivoteo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

y, sustituyendo en reversa, $x_3 = 0$, $-2x_1 + 2x_2 + 3 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, por lo que la solución general del sistema es $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Con esto, una base para W_3 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. **(0.5 puntos)**

b) 1) Calculemos las columnas de $M = M_{\beta_C,\beta_C}(T)$. $T(1) = \left(1 + \sqrt{3}i\right) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot i \Rightarrow$ Primera columna$= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. $T(i) = \left(1 + \sqrt{3}i\right) \cdot i = -\sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot i \Rightarrow$ Segunda columna$= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego $M = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

2) Del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ \beta_C & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \beta_C \\ P & \uparrow & & \uparrow & P \\ \beta & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \beta \\ & & E & & \end{array}$$

deducimos que si $P = M_{\beta,\beta_C}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ es una matriz de cambio de base, y $E = M_{\beta,\beta_C}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ es la matriz pedida, entonces $E = P^{-1} \cdot M \cdot P$ **(0.7 puntos)**. Ya tenemos la matriz M. P es muy fácil de calcular como representante de la función lineal identidad de las basas β a β_C: Columna 1 $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Columna 2 $= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es decir, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(0.5 puntos)**, cuya inversa es: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. **(0.4 puntos)**

Entonces $E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. **(0.4 puntos)**

(+ 1 punto base)

3. *a*) $v = u + w \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow T(v) = u = 0 \Leftrightarrow v = w \in W$, luego $\mathrm{Ker}(T) = W$. **(0.7 puntos)**
Por otra parte, $(\forall v = u + w \in V)\ T(v) = u \in U$, luego $\mathrm{Im}(T) \subseteq U$. Pero además para $u \in U$, su escritura única como elemento de la suma directa $U \oplus W$ es $u = u + 0$, con lo que $u = T(u)$, y entonces también $U \subseteq \mathrm{Im}(T)$. Así, $\mathrm{Im}(T) = U$. **(0.7 puntos)**
Entonces, como $\mathrm{Ker}(T) = W \neq \{0\}$, la función lineal T no es inyectiva, y como $\mathrm{Im}(T) = U \subsetneq V$ (puesto que su suplemento W no es $\{0\}$), entonces T tampoco es sobreyectiva. De lo anterior, T tampoco es biyectiva. **(0.6 puntos)**

b) Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de T ssi existe $v \in V \setminus \{0\}$, tal que $T(v) = \lambda v$. Recordando que los elementos de V se representan (de manera única) de la forma $v = u + w$ (con $u \in U$ y $w \in W$), y que $T(v) = u$, la expresión anterior se convierte en $u = \lambda(u + w)$. **(1 punto)**
Esto es, $(1 - \lambda)u = \lambda w$. Como $U \cap W = \{0\}$, se obtiene $(1 - \lambda)u = 0 = \lambda w$. Como $v \neq 0$, o bien $u \neq 0$, lo que implica $\lambda = 1$, o $w \neq 0$, de donde se deduce $\lambda = 0$. Es decir, 0 y 1 son los únicos valores propios posibles de T. **(1 punto)**
(Notar que de la forma como está redactada la pregunta, la respuesta está terminada acá. Sin embargo es fácil mostrar que estos dos números son efectivamente valores propios de T. En efecto, para todo $u \in U \setminus \{0\}$, $T(u) = 1 \cdot u$, y para todo $w \in W \setminus \{0\}$, $T(w) = 0 \cdot w$.)

c) Recordemos que ya calculamos el núcleo de T: $\mathrm{Ker}(T) = W$. Como el subespacio propio asociado al valor propio nulo $\lambda = 0$ es justamente $W_0 = \mathrm{Ker}(T)$, ya tenemos que $W_0 = W$. **(1 punto)**
Para el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$: $v = u + w \in W_1 \Leftrightarrow T(v) = v \Leftrightarrow u = u + w \Leftrightarrow w = 0 \Leftrightarrow v = u \in U$, de donde $W_1 = U$. **(1 punto)**

(+ 1 punto base)