

Algebra lineal

STEPHEN H. FRIEDBERG

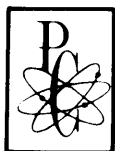
ARNOLD J. INSEL

LAWRENCE E. SPENCE

Illinois State University

PRIMERA EDICION

MEXICO, 1982



PUBLICACIONES CULTURAL, S.A.

Contenido

PROLOGO

1 ESPACIOS VECTORIALES 1

- 1.1 Introducción 1
- 1.2 Espacios vectoriales 6
- 1.3 Subespacios 16
- 1.4 Combinaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales 24
- 1.5 Dependencia e independencia lineal 36
- 1.6 Bases y dimensión 41
- 1.7* Subconjuntos máximos linealmente independientes 57
- Indice de las definiciones para el capítulo 1 60

2 TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES 63

- 2.1 Transformaciones lineales, espacios nulos y rangos 63
- 2.2 Representación matricial de una transformación lineal 75
- 2.3 Composición de transformaciones lineales y multiplicación de matrices 82
- 2.4 Invertibilidad e isomorfismos 95
- 2.5 La matriz de cambio de coordenadas 104
- 2.6* Espacios duales 103
- 2.7* Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes 119
- Indice de las definiciones para el capítulo 2 137

3 OPERACIONES ELEMENTALES EN MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 139

- 3.1 Operaciones elementales en matrices y matrices elementales 140
- 3.2 El rango de una matriz y la inversa de una matriz 146

VIII Contenido

- 3.3** Sistemas de ecuaciones lineales: aspectos teóricos 161
- 3.4** Sistemas de ecuaciones lineales: aspectos de cálculo 173
- Índice de las definiciones para el capítulo 3 182

4 DETERMINANTES 185

- 4.1** Determinantes de orden 2 186
- 4.2** Determinantes de orden n 196
- 4.3** Propiedades de los determinantes 205
- 4.4** La adjunta clásica y la regla de Cramer 218
- 4.5** Resumen—Conceptos importantes sobre determinantes 223
- Índice de las definiciones para el capítulo 4 230

5 DIAGONALIZACION 231

- 5.1** Eigenvalores y eigenvectores 231
- 5.2** Diagonalizabilidad 248
- 5.3*** Límites de matrices y cadenas de Markov 268
- 5.4** Subespacios invariantes 297
- 5.5** El teorema de Cayley-Hamilton 305
- 5.6** El polinomio mínimo 311
- Índice de las definiciones para el capítulo 5 319

6 FORMAS CANONICAS 321

- 6.1** Eigenvectores generalizados 321
- 6.2** Forma canónica de Jordan 339
- 6.3*** Forma canónica racional 359
- Índice de las definiciones para el capítulo 6 378

7 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR 379

- 7.1** Productos interiores y normas 379
- 7.2** El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt y complementos ortogonales 389
- 7.3** El adjunto de un operador lineal 398
- 7.4*** La teoría especial y relatividad de Einstein 403
- 7.5** Operadores normales y autoadjuntos 417
- 7.6*** El condicionamiento y el cociente de Rayleigh 424
- 7.7** Operadores unitarios y ortogonales y sus matrices 432
- 7.8*** La geometría de los operadores ortogonales 445
- 7.9** Proyecciones ortogonales y el teorema espectral 455

7.10*	Aproximación por mínimos cuadrados	462
7.11*	Formas bilineales y cuadráticas	468
	Índice de las definiciones para el capítulo 7	495

APENDICES 497

A	Conjuntos	497
B	Funciones	499
C	Campos	501
D	Números complejos	504
E	Polinomios	508

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS 519

LISTA DE SIMBOLOS USADOS FRECUENTEMENTE 535

INDICE ALFABETICO 537

Prólogo

El lenguaje y los conceptos de la teoría de matrices y, más generalmente del Álgebra Lineal han llegado también a aplicarse en las ciencias naturales y en las ciencias sociales. Pero eso no priva que el Álgebra Lineal continúe teniendo su importancia extraordinaria en el tratamiento moderno de la geometría y el análisis.

El propósito esencial de este libro es presentar cuidadosamente los principales temas del álgebra lineal e ilustrar la utilidad de la materia a través de una amplia variedad de aplicaciones. Aunque para el uso formal de este libro se supone que los alumnos han debido llevar un curso previo de cálculo, el contenido de los capítulos 6 y 7 no requieren más aparato matemático que el contenido en los estudios de enseñanza media superior en los cuales puede haber habido o no una iniciación al álgebra lineal.

El libro está concebido de manera tal que permite ser utilizado en cursos de diferente duración. El material esencial del álgebra lineal (espacios vectoriales, transformaciones lineales y matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes y diagonalización), se encuentra en los capítulos 1 al 5; los otros capítulos, que tratan las formas canónicas y espacios con producto interior, son completamente independientes y que se pueden estudiar en cualquier orden. Además, a lo largo del libro se encuentran diversas aplicaciones para áreas tales como ecuaciones diferenciales, economía, geometría y física. Estas aplicaciones, claro está, no son imprescindibles para el desarrollo matemático y pueden muy bien eliminarse a criterio del profesor.

Hemos procurado que resultara posible abarcar la mayoría de los temas importantes de álgebra lineal en un curso semestral. Esta meta nos permitió desarrollar los temas más importantes con menos preliminares innecesarias, que en los textos tradicionales. Nuestro tratamiento de la forma canónica de Jordan, por ejemplo, no requiere de la teoría de polinomios. La economía lograda en extensión permite desarrollar la mayor parte del libro (si se omiten muchas de las partes optativas y el análisis detallados de los determinantes), en un curso semestral de

4 horas semanales para aquellos estudiantes que hayan tenido conocimientos previos de álgebra lineal.

El capítulo 1 del libro presenta la teoría básica de espacios vectoriales de dimensiones finitas, subespacios, combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal, bases y dimensión. El capítulo termina con una sección optativa en la cual se prueba la existencia de una base en los espacios vectoriales de dimensiones infinitas.

En el capítulo 2 se desarrollan las transformaciones lineales y sus relaciones con las matrices; ahí se discute el espacio vacío y el límite de una transformación lineal, representaciones matriciales de una transformación, isomorfismos y cambios de coordenadas. El capítulo se termina con las secciones opcionales sobre espacios duales y ecuaciones lineales diferenciales homogéneas.

En el capítulo 3 se encuentran las aplicaciones de la teoría de espacios vectoriales y transformaciones lineales a los sistemas de ecuaciones lineales. Este importante tema lo hemos pospuesto intencionadamente para que se pueda presentar como consecuencia del material anterior. Este enfoque da pie al tema familiar de los sistemas lineales para aclarar la teoría abstracta, y permite evitar confusos cálculos de matrices en los capítulos 1 y 2. En esos capítulos habrá ejemplos ocasionales donde tendremos la oportunidad de solucionar sistemas de ecuaciones lineales (naturalmente estos ejemplos no forman parte del desarrollo teórico). En la sección 1.4 se hallan las bases necesarias para ello.

Los determinantes, tema del capítulo 4, tienen ahora mucho menos importancia que hace algún tiempo, para un curso abreviado es preferible tratarlos ligeramente, puesto que consideramos necesario dedicar más tiempo a los temas que se desarrollan del capítulo 5 al 7. De ahí que hayamos presentado dos alternativas en el capítulo 4: un desarrollo completo de la teoría (secciones 4.1 a 4.4) y un resumen de los puntos importantes, indispensables para el resto de los capítulos (sección 4.5).

En el capítulo 5 se desarrollan eigenvalores, eigenvectores y diagonalización. Una de sus aplicaciones más importantes se encuentra en el cálculo de límite de matrices. Se ha incluido, sin embargo, una sección opcional sobre límite de matrices y cadenas de Markov, aunque la general mayoría de algunos de sus resultados requiera un conocimiento de las formas canónicas de Jordan. Las secciones 5.4, 5.5 y 5.6 contienen información sobre subespacios invariantes, el teorema de Cayley-Hamilton y del polinomio mínimo, respectivamente.

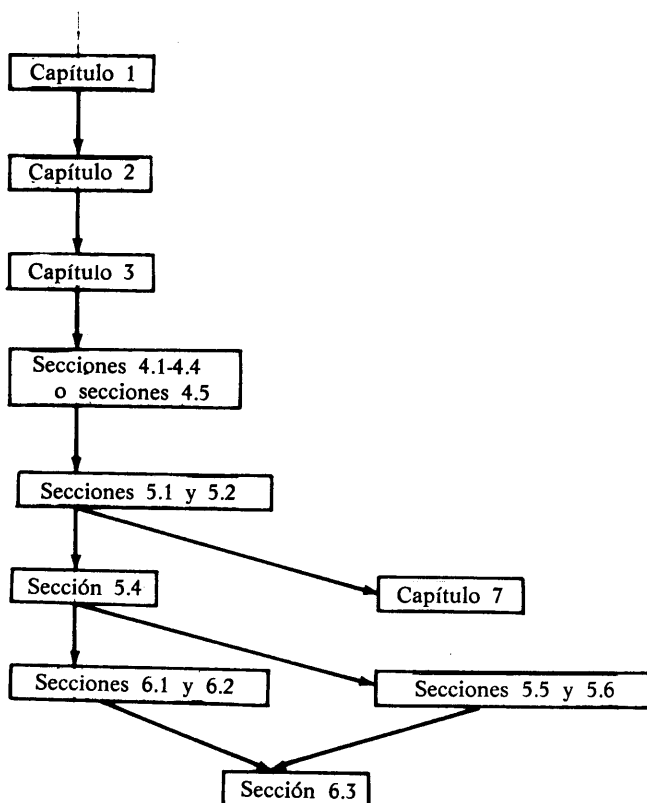
Las formas canónicas se tratan en el capítulo 6, secciones 6.1 y 6.2 desarrollan la forma Jordan y la sección 6.3 presenta la forma racional.

Los espacios con producto interior son el tema del capítulo 7. La teoría matemática básica (productos interiores y el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt; las transformaciones del adjunto: normal, auto-adjunto, ortogonal y operadores unitarios; proyecciones ortogonales y el

teorema espectral) se desarrollan en las secciones 7.1, 7.2, 7.3, 7.5, 7.7 y en la 7.9. En las secciones 7.4, 7.6, 7.8 y 7.10 se encuentran varias aplicaciones de la estructura del producto de interior. El capítulo termina con un análisis de las formas cuadráticas y bilineales (sección 7.11).

En el texto se encuentran también cinco apéndices. En los primeros cuatro se analizan respectivamente, conjuntos, funciones, campos y números complejos con el fin de repasar las ideas básicas que se desarrollan a través del libro. En apéndice E sobre polinomios se utiliza primordialmente en los capítulos 5 y 6, en especial en la sección 6.3. Se ha preferido que esos apéndices no se analicen en forma independiente sino hacer referencia a ellos según se requiera.

El siguiente diagrama muestra la dependencia entre los capítulos del libro.



Ahora unas palabras finales, que creemos necesarias respecto a nuestra notación. Las secciones indicadas con un asterisco (*) son opcionales y pueden omitirse si así lo considera el profesor. Todo ejercicio indicado

por el símbolo (†) no es opcional; lo usamos para identificar un ejercicio que será citado posteriormente en el texto.

Agradecemos a Douglas E. Cameron (*University of Akron*), Edward C. Ingraham de (*Michigan State University*), David E. Kullman (*Miami University*), Carl D. Meyer, Jr. (*North Carolina State University*) y Jean E. Rubin (*Purdue University*) por haber revisado el manuscrito completo del texto, así como también a nuestros colegas y estudiantes por las sugerencias y estímulos recibidos durante el periodo en el que se estaba desarrollando el manuscrito de esta obra. También hacemos mención especial a Miss Jana Gehrke y a Marilyn Parmantie por su ayuda en el trabajo de mecanografía, así como a Harry Gaines, Ian List y al equipo de Prentice-Hall por su colaboración durante los procesos de producción.

Normal, Illinois

STEPHEN H. FRIEDBERG
ARNOLD J. INSEL
LAWRENCE E. SPENCE