Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 09-2

$x^3 \,' \Rightarrow 3x^2 \,' \Rightarrow 6x$
$2x-1\,' \Rightarrow 2$
x^3-3x^2+2x
$(\,)' \Rightarrow 3x^2-6x$
$(\,)' \Rightarrow 6x-6$

Examen

P1. Sea $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ la transformación lineal del espacio de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3 definida por,

$$T(p(x)) = (x^2-3)\frac{d^2}{dx^2}p(x)$$ $B_2 \to B_1 = P_3 \quad B_1 \to B_1 B_1$

Sean $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B_2 = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ bases de $P_3(\mathbb{R})$.

a) (2 ptos.) Determinar N, matriz representante de T con respecto a B_1 en la partida y B_1 en la llegada.

b) (2 ptos.) Si anotamos M a la matriz representante de T con respecto a B_2 en la partida y B_1 en la llegada, encuentre matrices P y Q tales que

$$M = PNQ$$ $T_{B_1B_2} = T_{B_1B_1}\, Q_{B_1B_2}$

$M_{B_1B_2}(T) = M_{B_1B_1}(T) \cdot M_{B_1B_2}(T)$

c) (2 ptos.) Calcular bases de $\mathrm{Ker}(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$.

P2. a) (2 ptos.) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función lineal. Pruebe que existe un único $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad T(x) = \langle a, x\rangle$$ $= \sum_i^n a_i x_i = a^t \cdot x$

b) (2 ptos.) Sea $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función lineal tal que $P \circ P = P$. Pruebe que $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$$

c) (2 ptos.) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Pruebe que AA^T es definida positiva.

P3. a) (1,5 pto.) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simétrica. Probar que si A tiene un único valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces A es diagonal. Concluya que si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ es simétrica y de coeficientes estrictamente positivos, entonces A tiene al menos 2 valores propios distintos.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c > 0$ y valores propios distintos λ y μ. Sean $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ base ortonormal de vectores propios de A asociados a λ y μ respectivamente.

(i) (1 pto.) Probar que $a + c = \lambda + \mu$.

(i) (1 pto.) Asuma que $|\lambda| > |\mu|$. Pruebe que $\lambda > 0$ y que $|\mu| < \lambda$.

(i) (1 pto.) Probar que $u_1 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$.

(i) (1,5 ptos.) Descomponga $x \in \mathbb{R}^2$ como $x = \alpha u + \beta v$. Probar que $\alpha u = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} A^n x$ y que si x tiene coordenas positivas entonces αu también. Asuma que $|\lambda| > |\mu|$

si $\lambda > 0$
probamos

05 de diciembre de 2009
Sin consultas
Tiempo: 3:00

$6x^3 - 18x$

P1)

a) Evaluamos T en cada coordenada de B_1:

$$T(1) = (x^2-3)\frac{d^2}{dx^2}(1) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

$$T(x) = (x^2-3)\frac{d^2}{dx^2}(x) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

$$T(x^2) = (x^2-3)\frac{d^2}{dx^2}(x^2) = 2(x^2-3) = -6 + 0\cdot x + 2\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

$$T(x^3) = (x^2-3)\frac{d^2}{dx^2}(x^3) = 6x(x^2-3) = 0 - 18x + 0\cdot x^2 + 6\cdot x^2$$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow (2 \text{ ptos.})$$

xD!

b) Primero encontramos M evaluando T en B_2 y dejando el polinomio en términos de B_1.

$$B_2 = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\} = \{1, x, x^2-x, x^3-3x^2+2x\}$$

$$\Rightarrow T(1) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

$$T(x) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

$$T(x^2-x) = 2(x^2-3) = -6 + 0\cdot x + 2x^2 + 0x^3$$

$$T(x^3-3x^2+2x) = (x^2-3)(6x-6) = 18 - 18x - 6x^2 + 6x^3$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

* fijarse bien en que el orden en que escribimos cada polinomio debe ser el mismo en que está la la base B_1 y B_2 (de menor grado a mayor grado). Si el orden se cambia $\Rightarrow$ la mátriz cambia y queda la embarrá.

Como M va de B_2 en B_1 y N de B_1 en B_1 necesitamos Q matriz de cambio de base de B_2 a B_1. Para esto escribimos B_2 en términos de B_1.

$$\Rightarrow \quad 1 = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$
$$x = 0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$
$$x^2 - x = 0 - 1\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$
$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 + 2\cdot x - 3\cdot x^2 + 1\cdot x^3$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si consideramos a P como la identidad

$$\Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P = Id} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q}$$

En efecto

$$N \cdot Q = M$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = M$$

c) $Ker(T)$:

notamos que si $gr(p(x)) < 2 \Rightarrow T(p(x)) = 0$

$$\Rightarrow Ker(T) = \{ t \in P_3(\mathbb{R}) \ / \ gr(t(x)) < 2 \}$$
$$= \{ ax + b \}$$

$\Rightarrow$ una base de $Ker(T)$ es $\{1, x\}$
y $\dim(Ker(T)) = 2$.

Para $Im(T)$ tomemos un polinomio "generico"
$r(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ y lo evaluamos en T.

$$\Rightarrow T(r(x)) = (x^2 - 3)(2c + 6dx) = -6c - 18dx + 2cx^2 + 6dx^3$$

$$= \begin{pmatrix} -6c \\ -18d \\ 2c \\ 6d \end{pmatrix} = c \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{u_2}$$

$\Rightarrow$ u_1 y u_2 son los vectores generadores del e.v. $Im(T)$
y como son l.i. son una base: $\{-6 + 2x^2, -18x + 6x^3\}$

* otra forma de encontrar una base de $Im(T)$ es fijarse en las columnas l.i. de N.