INDICE

PLANIFICACION DE LOS ENCUENTROS........ 2
PROGRAMA ANALITICO........ 3
LAS ORIENTACIONES METODOLÓGICAS........ 8
1. Introducción........ 8
1.1. Objetivo General........ 8
2. DESARROLLO........ 8
2.1 NÚCLEOS TEMÁTICOS........ 8
2.2 BIBLIOGRAFÍA COMENTADA........ 13
3. MATERIAL EXPLICATIVO........ 14
2.3. MÉTODOS A UTILIZAR........ 14
3. CONCLUSIONES........ 15
TEXTO GUÍA........ 16
Unidad 1: Matrices........ 16
Competencias........ 16
Definición de matriz........ 16
Tipos de Matrices:........ 19
Traza de una Matriz........ 23
Suma de Matrices........ 24
Propiedades de la suma de matrices........ 25
Propiedades de la multiplicación de matrices........ 33
Propiedades de los escalares........ 36
Propiedades de la potencia de una matriz........ 36
Propiedades de la Matriz Transpuesta........ 38
PRACTICO Nº 1........ 40
Unidad Nº 2: Determinantes........ 44
Competencias........ 44
Definición........ 44
Determinante de una Matriz de orden 2x2........ 45
Determinante de una Matriz de orden 3x3........ 46
Determinante de una Matriz de orden 4x4, 5x5, nxn........ 48
Propiedades de los Determinates........ 49
Menores de una Matriz........ 54
Cofactores de una Matriz........ 55
Adjunta de una Matriz........ 58
Matriz Inversa........ 59
PRACTICO........ 61
Escalonamiento de Matrices........ 65
Matrices Escalonadas por Filas........ 66
Calculo de la Inversa de una matriz por Escalonamiento........ 69
Sistemas de Ecuaciones Lineales........ 74
Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales:........ 75
Matriz Ampliada........ 76
Métodos de Solución de Sistemas de Ecuaciones........ 77
Ejercicios........ 82
Unidad N° 3: Vectores........ 84

Competencias 84
Definición de Vector 84
Operaciones Con Vectores 85
Vectores en R^3 88
Norma de un Vector en R^2 93
Ejercicios: 96
Unidad N° 4: Espacios Vectoriales 97
Competencias 97
Definición de Espacio Vectorial 97
Ejercicios 105
Unidad nº 4: Transformaciones Lineales 106
Competencias 106
Definición 106
Ejercicios Resueltos 108
Ejercicios para Realizar por el Estudiante 110
Unidad Nº 6: Valores y Vectores Propios 112
Competencias 112
Valores Propios 112
Vectores Propios 117
Ejercicios para realizar por el estudiante 121

PLANIFICACION DE LOS ENCUENTROS

	FECHA DE ENCUENTRO			
UNIDAD-TEMAS DE AVANCE				
	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
	Temas 1.1 al 1.7	Temas 2.1 al 2.5	Temas 3.1 al 3.10	Temas 4.1 al 4.8
		Evaluación		Evaluación

UNIVERSIDAD PRIVADA DOMINGO SAVIO

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

ALGEBRA LINEAL

PROGRAMA ANALITICO

IDENTIFICACION

Área	: Ciencias exactas.
Sigla	: MAT - 221.
Materia	: Álgebra Lineal.
Carga Horaria	: 4 HT y 2 HP
Nivel	: Tercer Semestre.
Pre- Requisitos	: Fundamentos de Matemáticas (MAT-110).
En Vigencia	: Desde el año 2007.

I. JUSTIFICACION

La asignatura de Álgebra lineal es considerada importante en la formación de los estudiantes del pre-grado, porque contribuye en gran manera al desarrollo de las habilidades cognitivas de los estudiantes.

La asignatura sirve como base para resolver problemas de aplicación en diferentes áreas del conocimiento y de esta manera mejorar el rendimiento académico, mediante la aplicación de la teoría matricial en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

II. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar en el estudiante habilidades cognitivas del conocimiento para la resolución de Sistemas de Ecuaciones lineales, de “m” ecuaciones con “n” Incógnitas. También contribuye al desarrollo de las destrezas en la resolución de problemas e interpretación de resultados.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Formar hábitos en el estudiante para que adquiera y aplique gradualmente los conocimientos del álgebra matricial.
- Adquirir conocimientos en el estudio del álgebra vectorial.
- Dotar las herramientas del álgebra vectorial para aplicaciones en el uso de base de datos, hojas de cálculo, aplicaciones estadísticas (SPSS).
- Determinar y aplicar las propiedades en los Espacios Vectoriales y las Transformaciones Lineales en la resolución de problemas.

III. CONTENIDOS

Unidad 1: Matrices

Objetivos de la unidad

-Conocer los diferentes tipos de matrices y sus aplicaciones
-Aplicar las propiedades de matrices en las operaciones entre matrices.
-Resolver sistemas de ecuaciones aplicando matrices.

1.1 Definición. Nomenclatura. Tipos de matrices. Operaciones: Igualdad, Adición, Multiplicación por escalar, Resta ó Diferencia, Producto . Transposición. Traza de una matriz. Propiedades.
1.2 Tipos de matrices cuadradas. Matriz Diagonal. Matriz Escalar. Matriz Identidad. Unicidad.
1.3 Operaciones Elementales sobre filas en las matrices. Propiedades Generales.
1.4 Equivalencias por filas y/o columnas. Matrices escalonadas. Matrices escalón reducidas. Triangular superior. Triangular Inferior. Aplicaciones.
1.5 Matriz No singular: Inversa de una matriz - Algoritmo de Gauss.
1.6 Matrices por bloques Matrices aumentadas
1.7 Sistema de Ecuaciones Lineales. Sistemas homogéneos y no homogéneos. Sistemas compatibles e incompatibles.
1.8 Métodos matriciales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: Método de Gauss y Gauss/Jordan
1.9 Ejercicios de aplicación.

Unidad 2 : Determinantes

Objetivos de la unidad

-Calcular el determinante de una matriz inferior, método de Sarrus.
-Calcular el determinante de una matriz superior, algoritmos de La place
-Aplicar las propiedades de los determinantes en el cálculo de determinantes.
-Calcular la inversa de una matriz aplicando determinantes.

2.1 Determinantes de una matriz: Definición. Propiedades. Formas de cálculo: Determinantes de Orden Inferior. , método de Sarrus
2.2 Determinantes nulos: Filas Iguales, Columnas Iguales, Con filas o columnas nulas.
2.3 Determinantes de Matrices Triangulares. Determinante de la matriz Transpuesta.
2.4 Determinantes de Orden Superior. Matriz de los Cofactores. Regla de La Place.
2.5 Matriz Adjunta clásica. Cálculo de la Inversa de una matriz utilizando determinantes.
2.6 Determinantes de un operador lineal. Multilinealidad de determinantes.
2.7 Resolución de Sistemas de Ecuaciones utilizando determinantes.
2.8 Ejercicios de aplicación.

Unidad 3: Vectores reales en R^2, R^3 Y R^n

Objetivos de la unidad

-Realizar operaciones con Vectores en R^2 y R^3
-Interpretar gráficamente vectores en R^2 y R^3

-Calcular la norma y la distancia entre vectores

3.1 Vectores en R2 . Definición. Nomenclatura, Notación Matricial, Representación Gráfica en un sistema cartesiano.
3.2 Operaciones con vectores: Adición, Regla del Paralelogramo, Multiplicación por escalar, Resta o Diferencia, Producto interno o Producto Escalar.
3.3 Norma de un vector. Distancia, Angulo entre Vectores. Vector Unitario, Normalizar un vector, Proyección de un vector sobre otro, Interpretación Gráfica.
3.4 Vectores en R3. Notación Matricial y Notación **i j k.** Operaciones. Adición, Multiplicación por escalar. Resta o Diferencia Producto interno. Producto Externo. Norma de un vector y distancia. Angulo entre Vectores. Vector Unitario, Normalizar un vector, Proyección de un vector sobre otro. Área del Paralelogramo formado entre 2 vectores. Volumen del Paralelepípedo formado entre 2 vectores y el vector Producto Vectorial. Interpretación Gráfica.
3.5 Aplicaciones: Estudio de la recta en el Plano y el Espacio. Ecuaciones Vectoriales. Estudio de Plano en R3. Vector Normal, Ecuación del Plano en R3.
3.6 Ejercicios de aplicación.

Unidad 4: Espacios vectoriales y subespacios vectoriales

Objetivos de la unidad
-Determinar los espacios y subespacios vectoriales
-Aplicar las propiedades de los espacios vectoriales en la resolución de ejercicios.

4.1 Espacios Vectoriales. Definición. Propiedades. Identificación.
4.2 Subespacios. Teorema - Definición. Subespacios generales. Identificación.
4.3 Propiedades de los espacios Vectoriales. Combinaciones lineales. Espacio, fila y columna de una matriz. Sumas y sumas directas.
4.4 Base y dimensión. Conceptos y dependencias e independencia lineal. Definiciones. Dimensión y subespacios. Aplicaciones a las ecuaciones lineales.
4.5 Rango de una matriz. Vectores coordenados
4.6 Ejercicios de aplicación.

Unidad 5: Transformaciones lineales

Objetivos de la unidad
-Interpretar las transformaciones lineales
-Aplicar los teoremas sobre transformaciones lineales en la resolución de ejercicios
-Realizar operaciones de transformaciones con vectores y matrices.

5.1 Definiciones. Núcleo o imagen.
5.2 Transformaciones singulares y no singulares.
5.3 Operaciones. Suma, Producto por un escalar. Composición.
5.4 Operaciones lineales. Operaciones invertibles. Matrices y operaciones lineales.
5.5 Representación Matricial. Cambio de Bases. Similaridad.
5.6 Matrices y transformaciones lineales.

5.7 Ejercicios dirigidos en clase.

Unidad 6: Valores y vectores propios

Objetivos de la unidad

-Aplicar las matrices en el cálculo de los valores y vectores propios
-Aplicar las propiedades en la resolución de ejercicios
-Diagonalizar matrices utilizando los valores y vectores propios.

6.1 Valores y Vectores propios. Definición. Propiedades
6.2 Vectores propios de una matriz. Autovectores
6.3 Matriz diagonal.
6.4 Diagonalización de matrices
6.5 Ejercicios de aplicación.

IV. METODOLOGIA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

La metodología que se aplicará en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura, será compartida entre la explicación de los conceptos teóricos por parte del docente y la resolución de ejercicios por parte de los estudiantes. Al mismo tiempo, se asignarán trabajos de investigación de temas afines a la materia para que luego los estudiantes realicen exposiciones grupales. También se otorgarán trabajos prácticos para ser resueltos por los estudiantes en su domicilio y en los horarios de ayudantía y luego serán evaluados éstos trabajos como actividades académicas de la materia.

V. MATERIALES Y MEDIOS DIDACTICOS

- Pizarra y marcadores
- Reglas de diferentes tipos
- Equipos de multimedia
- Laboratorio de Software

VI. ACTIVIDADES ACADEMICAS

- Resolución y defensa de práctico de Matrices
- Resolución y defensa de práctico de Determinantes
- Resolución y defensa de práctico de Vectores en R2, R3 y Rn
- Resolución y defensa de práctico de Espacios Vectoriales
- Resolución y defensa de práctico de Transformaciones Lineales
- Resolución y defensa de práctico de Valores y Vectores Propios
- Asignación de trabajos de investigación y posterior defensa mediante exposiciones individuales y grupales.
- Participación en los foros mediante preguntas y respuestas propuestas por el docente o los compañeros de la asignatura.

VII. TIPOS DE EVALUACION

Para esta asignatura se tomarán en cuenta los tres tipos de evaluación: **diagnóstica, formativa y sumativa**.

VIII. FORMAS DE EVALUACION

Materia tipo C. Sistema Modular	
Examen parcial	40 puntos.
Actividad Académica	20 puntos.
Examen final	40 puntos.
TOTAL	100 puntos.

Asistencia mínima obligatoria del **80%** del total de clases.
Nota mínima de aprobación **51** puntos.

IX. BIBLIOGRAFIA

1. Stanley. L. Grossoman. **"Álgebra Lineal con sus Aplicaciones".** McGraw Hill. Bogota. 4ta Edición. 2001.
2. Seymour Lipschutz. **"Álgebra Lineal".** McGraw Hill. Serie Shaum. 2da Edición. 1998.
3. Howard Anton. **"Introducción al Álgebra Lineal".** Editorial Limusa 2da Edición. 1998.
4. Eduardo Raffo. **Algebra lineal.** Lecca / 1989.
5. Domingo Mendoza. **Algebra lineal.** S. E. / 1992.

LAS ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

1. Introducción.

La asignatura de Algebra Lineal se constituye en una de las asignaturas más importantes por su relación de coherencia temática con otras asignaturas de la malla curricular como Estadística, Producción, Investigación de Operaciones, Gestión de Calidad y con asignaturas relacionadas con la toma de decisiones en las Organizaciones. La resolución de sistemas de ecuaciones es requisito como conocimiento previo para la asignatura de Investigación de Operaciones en la resolución de problemas para la toma de decisiones.

El nivel de profundidad y complejidad que abarcará el desarrollo del módulo será desarrollar competencias básicas y complementarias; es decir, con los conocimientos y práctica realizados los estudiantes podrán profundizar sus conocimientos en problemas de aplicación.

1.1. Objetivo General.

Desarrollar habilidades cognitivas del conocimiento en la resolución de Sistemas de Ecuaciones lineales, de **m** ecuaciones con **n** incógnitas.
Realizar con destreza métodos de resolución de problemas e interpretación de resultados que apoyen al estudiante en el razonamiento lógico matemático.

El objetivo planteado está orientado a desarrollar en el estudiante las siguientes competencias:

- Realiza operaciones de suma, multiplicación y potenciación de matrices.
- Resuelve sistemas de ecuaciones lineales de orden m x n

2. DESARROLLO

2.1 NÚCLEOS TEMÁTICOS

Unidad 1: <u>Matrices</u>

Objetivos de la unidad

-Conocer los diferentes tipos de matrices y sus aplicaciones

-Aplicar las propiedades en las operaciones entre matrices.

-Resolver sistemas de ecuaciones aplicando matrices.

Definición. Nomenclatura. Tipos de matrices. Operaciones: Igualdad, Adición, Multiplicación por escalar, Resta ó Diferencia, Producto. Transposición. Traza de una matriz. Propiedades.

Tipos de matrices cuadradas. Matriz Diagonal. Matriz Escalar. Matriz Identidad.

Operaciones Elementales sobre filas en las matrices. Propiedades Generales.

Equivalencias por filas y/o columnas. Matrices escalonadas. Matrices escalón reducidas. Triangular superior. Triangular Inferior. Aplicaciones.

Matriz No singular: Inversa de una matriz - Algoritmo de Gauss.

Matrices por bloques Matrices aumentadas

Sistema de Ecuaciones Lineales. Sistemas homogéneos y no homogéneos. Sistemas compatibles e incompatibles.

Métodos matriciales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: método de Gauss y Gauss/Jordan

Ejercicios de aplicación.

SÍNTESIS

En el desarrollo de la unidad que corresponde al primer encuentro presenta:

- Definiciones y propiedades de los diferentes tipos de matrices
- Desarrollo paso a paso de operaciones de suma, multiplicación e inversa de matrices.

Unidad 2: Determinantes

Objetivos de la unidad

-Diferenciar matrices cuadradas de orden superior e inferior

-Calcular el determinante de una matriz inferior, método de Sarrus.

-Calcular el determinante de una matriz superior, algoritmos de La place

-Aplicar las propiedades en el cálculo de los determinantes de una matriz.

2.1 Determinantes de una matriz: Definición. Propiedades. Formas de cálculo: Determinantes de Orden Inferior. , método de Sarrus

2.2 Determinantes nulos: Filas Iguales, Columnas Iguales, Con filas o columnas nulas.

2.3 Determinantes de Matrices Triangulares. Determinante de la matriz Transpuesta.

2.4 Determinantes de Orden Superior. Matriz de los Cofactores. Regla de La Place.

SINTESIS

En el desarrollo de los temas que corresponde al segundo encuentro presenta:

- Definiciones de determinantes
- Propiedades de los determinantes
- Calculo de determinantes de: 2x2, 3x3, 4x4, ….., nxm
- Aplicaciones

2.5 Matriz Adjunta clásica. Cálculo de la Inversa de una matriz utilizando determinantes.

2.6 Determinantes de un operador lineal. Multilinealidad de determinantes.

SINTESIS

En el desarrollo de los temas que corresponde al tercer encuentro presenta:

- Cálculo de de la inversa de una matriz por métodos: 1) Método de la matriz adjunta, 2) Método de escalonamiento de matrices
- Aplicaciones de la inversa de una matriz.

2.7 Resolución de Sistemas de Ecuaciones utilizando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

2.8 Ejercicios de aplicación.

SINTESIS

En el desarrollo de los temas que corresponde al cuarto encuentro presenta:

- Definición de sistemas de ecuaciones
- Análisis de los tipos de soluciones: solución única, infinitas soluciones y sistemas de ecuaciones que no tienen solución.
- Diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones: Gauss y Gauss Jordan.

- Definición de vectores en plano y el espacio
- Aplicaciones de vectores.

Unidad 3: Vectores reales en R^2, R^3 Y R^N

Objetivos de la unidad

-Realizar operaciones con Vectores en R^2 y R^3

-Interpretar gráficamente vectores en R^2 y R^3

3.1 Vectores en R^2 . Definición. Nomenclatura, Notación Matricial, Representación Gráfica en un sistema cartesiano.

3.1.1 Operaciones con vectores: Adición, Regla del Paralelogramo, Multiplicación por escalar, Resta o Diferencia, Producto interno o Producto Escalar.

3.1.2 Norma de un vector. Distancia, Angulo entre Vectores. Vector Unitario, Normalizar un vector, Proyección de un vector sobre otro, Interpretación Gráfica.

3.1.3 Vectores en R3. Notación Matricial y Notación **i j k.** Operaciones. Adición, Multiplicación por escalar. Resta o Diferencia Producto interno. Producto Externo. Norma de un vector y distancia. Angulo entre Vectores. Vector Unitario, Normalizar un vector, Proyección de un vector sobre otro. Área del Paralelogramo formado entre dos vectores. Volumen del Paralelepípedo formado entre dos vectores y el vector Producto Vectorial. Interpretación Gráfica.

3.1.4 Aplicaciones: Estudio de la recta en el Plano y el Espacio. Ecuaciones Vectoriales. Estudio de Plano en R^3. Vector Normal, Ecuación del Plano en R^3.

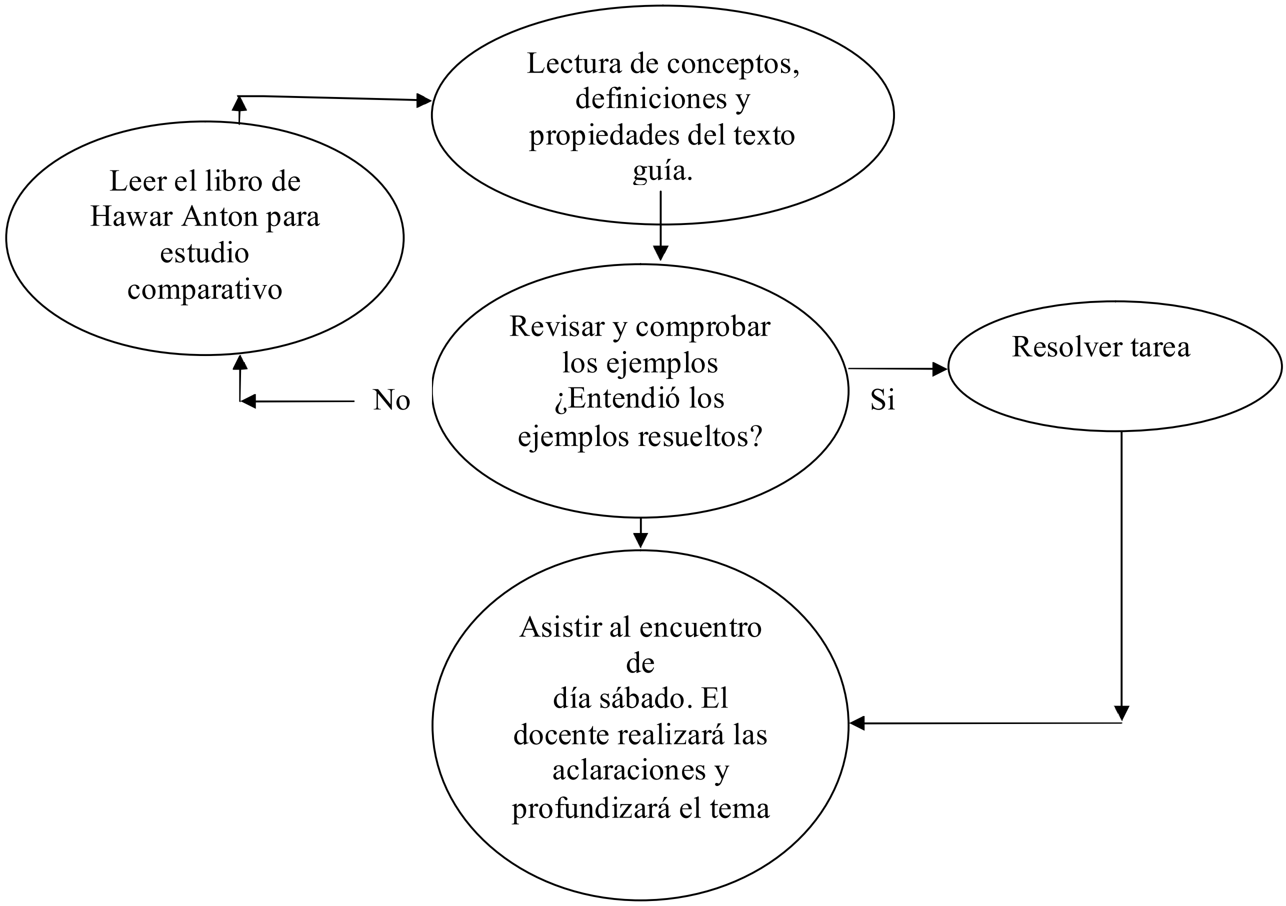
3.1.5 Ejercicios de aplicación.

METODLOGIA DE ESTUDIO PARA EL ESTUDIANTE

La sugerencia de metodología de estudio que puede conducir a una interesante experiencia en esta asignatura, por ende, conducente a logros exitosos es la siguiente:

1) Lectura de conceptos, definiciones y propiedades del texto guía.

2) Revisar y comprobar los ejemplos resueltos en el texto guía.



NUCLEO TEMATICO PARA ESTUDIO INDEPEDIENTE

A través de interacción por plataforma (chat, foro y tareas) y clases practicas a acordar, se proporcionará orientación y pautas de estudio de los temas que contempla este núcleo temático.

Unidad 4: Espacios vectoriales y sub espacios

Objetivos de la unidad

-Determinar los espacios y sub-espacios vectoriales

-Aplicar las propiedades de los espacios vectoriales en la resolución de ejercicios.

4.1 Espacios Vectoriales. Definición. Propiedades. Identificación.

4.2 Subespacios. Teorema - Definición. Sub-espacios generales. Identificación.

4.3 Propiedades de los espacios Vectoriales. Combinaciones lineales. Espacio, fila y columna de una matriz. Sumas y sumas directas.

4.4 Base y dimensión. Conceptos y dependencias e independencia lineal. Definiciones. Dimensión y sub-espacios. Aplicaciones a las ecuaciones lineales.
4.5 Rango de una matriz. Vectores coordenados
4.6 Ejercicios de aplicación.

Unidad 5: Transformaciones lineales

Objetivos de la unidad

-Interpretar las transformaciones lineales
-Aplicar los teoremas sobre transformaciones lineales en la resolución de ejercicios
-Realizar operaciones sobre transformaciones con vectores y matrices.

5.1 Definiciones. Núcleo o imagen.
5.2 Transformaciones singulares y no singulares.
5.3 Operaciones. Suma, Producto por un escalar. Composición.
5.4 Operaciones lineales. Álgebra. Operaciones invertibles. Matrices y operaciones lineales.
5.5 Representación Matricial. Cambio de Bases. Similaridad.
5.6 Matrices y transformaciones lineales.
5.7 Ejercicios dirigidos en clase.

Unidad 6: Valores y vectores propios

Objetivos de la unidad

-Aplicar las matrices en el cálculo de los valores y vectores propios
-Aplicar las propiedades en la resolución de ejercicios
-Diagonalizar matrices utilizando los valores y vectores propios.

6.1 Valores y Vectores propios. Definición. Propiedades
6.2 Vectores propios de una matriz. Autovectores
6.3 Matriz diagonal.
6.4 Diagonalización de matrices
6.5 Ejercicios de aplicación.

2.2 BIBLIOGRAFÍA COMENTADA

1. El Libro de texto de Algebra Lineal, cuyo autor Ing. Miguel Cuellar M., es el resultado de más de siete años de interacción y experiencia continúa en la enseñanza de matemáticas. El material se adecua a las características heterogéneas de conocimientos previos de los estudiantes que buscan su profesionalización en aulas de nuestra Universidad.
Presenta ejemplos de fácil comprensión y aplicaciones proporcionando bases sólidas para el logro de la comprensión profunda de los temas.

2. Howard Anton. **"Introducción al Álgebra Lineal".** Editorial Limusa 2da Edición. 1998

El libro de Haward Anton es de gran utilidad, porque, este libro se basa en la presentación de las definiciones y teoremas que permiten una mejor comprensión de los ejercicios prácticos, sus ejemplos expresados en forma secuencial ayudan a la comprensión de cada uno de los temas de manera gradual.

3. Stanley. L. Grossoman. **"Álgebra Lineal con sus Aplicaciones".** McGraw Hill. Bogota. 4ta Edición. 2001.

Este libro se recomienda, por los conceptos teóricos claros y las diferentes aplicaciones que presenta en cada uno de las unidades temáticas.

4. Seymour Lipschutz. **"Álgebra Lineal".** Mc Graw Hill. Serie Shaum. 2da Edición. 1998.

Este material se caracteriza por presentar ejercicios resueltos variados para que el estudiante entienda la resolución paso a paso y luego la presentación de ejercicios propuestos para ser resueltos por el estudiante.

5. Eduardo Raffo. **Algebra lineal**. Lecca / 1989.

   Este libro presenta ejemplos y ejercicios de fácil comprensión para el estudiante en cada uno de los temas.

6. Domingo Mendoza. **Álgebra lineal**. S. E. / 1992.

   El libro de Domingo Mendoza se utilizó por los conceptos teóricos y los ejercicios variados de cada uno de los temas.

2.3. MATERIAL EXPLICATIVO

El texto guía incluye conceptos, definiciones y ejemplos de aplicación en problemas reales.

2.4. MÉTODOS A UTILIZAR

Encuentro físico

El docente realizará una evaluación diagnóstica del núcleo temático correspondiente al encuentro.

A través de exposición magistral consolidará los conceptos y definiciones, así mismo, profundizará las extensiones de los temas tratados.

Planteará ejemplos representativos que contribuyan a la comprensión profunda del tema. La resolución de dichos ejemplos se realizará en forma grupal cooperativo o individual.

Encuentro virtual

El estudiante y el docente dispondrán de dos sesiones semanales, cada sesión con tiempo de duración de dos horas para interactuar por medio de la plataforma virtual (chat, foro y tareas).

El docente planteará ejemplos representativos para realizar seguimiento del estudio independiente del estudiante; así mismo, responderá a las consultas de los estudiantes atendiendo dudas referentes al texto guía en las tareas y prácticos planteados.

3. CONCLUSIONES

Preguntas y ejercicios para realizar en forma individual o colectiva con solucionario.

Cada unidad del texto Guía presenta menú de ejercicios, los cuales deberán ser resueltos en los plazos y términos señalados en plataforma del sistema.

TEXTO GUÍA

Unidad 1: Matrices

Competencias

Al finalizar esta unidad el estudiante desarrollará las siguientes competencias:

1º) Define y reconoce los diferentes tipos de matrices.

2º) Realiza operaciones de suma y producto con matrices.

3º) Aplica las propiedades de las matrices en la realización de operaciones con las mismas.

Definición de matriz

Se dice que una matriz es un arreglo cuadrado o rectangular de números y/o letras, dispuestas en líneas horizontales y verticales denominadas estas como filas y columnas.

A las matrices se las puede representar con las primeras letras mayúsculas del abecedario y a los elementos de una matriz; con letras minúsculas, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots\dots\dots & a_{2n} \\ \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots\dots\dots\dots & a_{3n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots\dots\dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

En resumen (forma genérica) una matriz también se la puede representar de la siguiente manera:

$$A = [aij]_{m \times n} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,3 \dots\dots m(\ filas) \\ j = 1,2,3 \dots\dots n(columnas) \end{matrix}$$

Donde:

m = Número de filas.

n = Número de columnas.

Ejemplos:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$a_{13} = 3$ Elemento que pertenece a la fila uno y columna tres.

$a_{22} = 5$ Elemento que pertenece a la fila dos y columna dos.

$a_{33} = 0$ Elemento que pertenece a la fila tres y columna tres.

$a_{31} = 8$ Elemento que pertenece a la fila tres y columna uno.

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ a & k & -8 \\ 0 & 9 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$a_{13} = 3$ Elemento que pertenece a la fila uno y columna tres.

$a_{31} = 0$ Elemento que pertenece a la fila tres y columna uno.

$a_{23} = -8$ Elemento que pertenece a la fila dos y columna tres.

<u>Orden de una matriz</u>

Una matriz que tiene **m** filas y **n** columnas, se dice que es de orden **mxn**.

Ejemplos:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ La matriz tiene dos filas y dos columnas

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ La matriz tiene dos filas y cuatro columnas

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 6}$ La matriz tiene una fila y seis columnas

4) $D = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}_{1\times 1}$ La matriz tiene una fila y una columna

5) Construya una matriz de orden 4x4 cuyo elemento genérico $[a_{ij}]_{4\times 4}$ este dado por:

a) $a_{ij} = i + j$

b) $a_{ij} = (i - j)^2$

c) $a_{ij} = \sqrt{\frac{i}{j} + 2}$

d) $\frac{i}{j} + \frac{j}{2}$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Primeramente construimos la matriz genérica, luego aplicamos la condición

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{7}{3}} & \frac{3}{2} \\ 2 & \sqrt{3} & \sqrt{\frac{8}{3}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \\ \sqrt{5} & \sqrt{\frac{7}{2}} & \sqrt{3} & \sqrt{\frac{11}{4}} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{\frac{10}{3}} & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Tipos de Matrices:

Matriz cuadrada

Una matriz es cuadrada si el número de filas es igual al número de columnas es decir: **m = n**. A este tipo de matrices se las llama matriz de orden "**n**".

Ejemplos

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}$

Matriz de orden dos

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3x3}$

Matriz de orden tres

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{4x4}$

Matriz de orden cuatro

Matriz triangular superior

Es una matriz cuadrada tal que el elemento: $a_{ij} = 0$ sí: $i > j$

Es decir, que el número de orden de las filas es más grande que el número de orden de las columnas. Por lo tanto la matriz triangular superior tiene sus elementos nulos después de la diagonal principal hacia abajo.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Es una matriz triangular superior.

Matriz triangular inferior

Es una matriz cuadrada tal que el elemento: $a_{ij} = 0$ si: $i < j$

Es decir, el número de orden de las filas es más pequeño que el número de orden de las columnas. Por lo tanto en una matriz triangular inferior los elementos arriba de la diagonal principal son nulos.

Ejemplo

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$ Es una matriz triangular inferior.

Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada tal que el elemento $a_{ij} = 0$ Si: $i \neq j$.

Esto quiere decir, que en una matriz diagonal solo existen los elementos de la diagonal principal y los otros elementos de la matriz son nulos, es decir:

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Matriz Identidad

Es una matriz cuadrada donde se cumple que:

$a_{ij} = 1$ Si: $i = j$

$a_{ij} = 0$ Si: $i \neq j$

Es decir, en una matriz identidad todos los elementos de la diagonal principal son la unidad y los demás elementos son nulos.

Ejemplos

1) $\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ 2) $\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ 3) $\mathrm{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\text{x}4}$

Matriz nula

Es aquella matriz donde todos sus elementos son nulos, es decir:

Ejemplos

1) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ 2)

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz Fila

Es aquella matriz que tiene una sola fila, por lo tanto su orden es **1x n,** es decir:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-2&5\end{bmatrix}_{1\times 4}$$

Matriz columna

Es aquella matriz que tiene una sola columna, por lo tanto su orden es **m** x **1**, es decir:

$$A=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Matriz Simétrica

Es aquella matriz cuadrada que es igual a su transpuesta, es decir: $A=A^t$ Por lo tanto:

$a_{ij}=a_{ji}$

Matriz Antisimétrica o hemisimétrica

Es aquella matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su transpuesta, es decir:

$A=-A^t$ Por lo tanto $a_{ij}=-a_{ji}$.

Para este caso se debe tomar en cuenta que los elementos de la diagonal principal deben ser nulos, es decir: $a_{ii}=0$. Por ejemplo: $A=\begin{bmatrix}0&3&-2\\9&0&1\\-3&2&0\end{bmatrix}_{3x3}$ Es una matriz antisimétrica

Matriz Escalar

Es aquella matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal es decir:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz Ortogonal

Una matriz ortogonal es aquella matriz cuadrada donde se cumple que: $\boxed{A.A^t = A^t.A = I}$

Matriz Normal

La matriz normal es aquella que conmuta con su transpuesta. Esto quiere decir que las matrices simétricas, las matrices antisimétricas y las matrices ortogonales son necesariamente matrices normales, es decir: $\boxed{AA^t = A^t.A}$

Matriz Rectangular

Una matriz es rectangular cuando el número de filas es diferente al número de columnas; entonces es de orden mxn.

Por ejemplo: $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$ Es una matriz rectangular.

Matriz Idenpotente

Una matriz es idenpotente si se cumple que: $A^2 = A$

Matriz Involutiva.- Una matriz es Involutiva siempre y cuando cumpla que: $A^2 = I$

Igualdad de Matrices

Se dice que dos o más matrices son iguales cuando estas tienen el mismo orden y los mismos elementos, es decir $a_{ij}=b_{ij}$ deben tener el mismo número de filas y el mismo número de columnas entonces se cumple que:

$$A=[a_{ij}]$$
$$B=[a_{ij}]$$
$$a_{ij}=b_{ij}$$

Ejemplos

1)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

A=B

2)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}_{2*3}$$

$\Rightarrow$ **A=B**

Matriz Opuesta

Si se tiene la matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ la cual tiene un orden **mxn**, entonces la matriz opuesta (- A) es otra matriz del mismo orden donde se cumple que:

$$\boxed{-A=-[a_{ij}]=[-a_{ij}]_{m\times n}}$$

Es decir, en una matriz opuesta se le cambia el signo a todos los elementos de la matriz A.

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow -A=\begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -8 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz Conforme

Una matriz "A" se dice que es conforme a otra matriz "B", si el número de columnas de la matriz "A" coincide con el número de filas de la matriz "B".

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Entonces "A" es conforme a "B".

Traza de una Matriz

La traza de una matriz cuadrada "A" se halla sumando todos los elementos de la diagonal principal.

Ejemplos

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Traza $(A) = 1 + 5 - 1 = 5$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Traza $(B) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{4}}$

3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{4\times 4}$

Traza $(C) = 5 + \frac{7}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{53}{6}}$

Suma de Matrices

Si se tienen las siguientes matrices: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

Entonces la suma de ambas matrices estará definida de la siguiente manera:

$$\boxed{A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}}$$

Esto implica que cuando se quiere sumar dos o mas matrices entre si; estas deben tener el mismo orden, porque la suma se realiza elemento a elemento.

Ejemplos

1) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 6 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Calcular:

a) $A + B = ?$

b) $B + (-A) = ?$

c) $Traza(A - B) = ?$

<u>Solución</u>

a)

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{13}{2} & 3 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$ Sumando elemento a elemento

b)

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$ Entonces: $$B + (-A) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -7 \\ \frac{11}{2} & 3 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

c) No tiene solución por que para poder calcular la traza de una matriz esta debe ser cuadrada.

<u>Propiedades de la suma de matrices</u>

Si se tienen las matrices "A","B" y "C"; matrices de un mismo orden entonces podemos verificar las siguientes propiedades.

$$\left.\begin{array}{lll} 1º) & (A + B) + C = A + (B + C) & \text{Asociativa} \\ 2º) & A + 0 = A & \text{Neutro} \\ 3º) & A + (-A) = 0 & \text{Inverso} \\ 4º) & A + B = B + A & \text{Conmutativa} \end{array}\right\} \textbf{Grupo Abeliano}$$

Demostración

1º)

$$(A+B)+C=\left([a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}\right)+[c_{ij}]_{m\times n}$$
$$(A+B)+C=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n}$$
$$(A+B)+C=[a_{ij}]_{m\times n}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)_{m\times n}$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

La demostración de las otras propiedades es similar; por lo que queda para realizar por el estudiante.

Producto de matrices

Si se tiene la matriz de orden $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ y la matriz de orden $B=[b_{ij}]_{p\times n}$

Entonces se dice que el producto de las matrices A y B darán como resultado otra matriz C de orden **m**x**n,** es decir: $C=[c_{ij}]_{m\times n}$

Por lo tanto el producto de dos matrices podemos definirlo de la siguiente manera:

$$\boxed{C=A\cdot B=[a_{ij}]_{m\times p}\cdot[b_{ij}]_{p\times n}=[c_{ij}]_{m\times n}}$$

Esto implica que para poder realizar la multiplicación A·B, la matriz “A” debe ser conforme a la matriz “B”. Es decir que, el número de columnas de “A” debe ser igual al número de filas de la matriz “B”.

Ejemplos

1) Si se tiene las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 8\\ 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}_{3\times 3}\qquad B=\begin{bmatrix}-1 & 8 & 3\\ -1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

“A” es conforme a “B”.

Calcular:

a) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = ?$

b) $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = ?$

c) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = ?$

Solución.- Multiplicamos cada fila de la matriz "A" con cada columna de la matriz "B".

a)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 7 \\ -7 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 + 5 - 8 = -4$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 8 - 10 + 0 = -2$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 - 20 + 24 = 7$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 - 2 - 3 = -3$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 16 - 4 + 0 = 12$$

$$C_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 6 - 8 + 9 = 7$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 - 1 + 3 = 2$$

$$C_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 + 2 + 0 = 2$$

$$C_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 + 4 - 9 = -5$$

b) Solución.- Multiplicamos cada fila de la matriz "B" con cada columna de la matriz "A".

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 15 & -8 & 7 \\ 3 & 5 & -14 \\ -1 & 8 & -17 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 16 + 0 = 15$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 - 16 + 3 = -8$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -8 + 24 - 9 = 7$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 4 + 0 = 3$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 - 4 + 4 = 5$$

$$C_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -8 + 6 - 12 = -14$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 + 0 = -1$$

$$C_{32} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 + 0 + 3 = 8$$

$$C_{33} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -8 + 0 - 9 = -17$$

c) Solución.- Multiplicamos cada fila de la matriz "A" con cada columna de la matriz "A".

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A \cdot A = \begin{bmatrix} -9 & 13 & -31 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - 10 + 0 = -9$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -5 + 10 + 8 = 13$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 8 - 15 - 24 = -31$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 - 4 + 0 = -2$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -10 + 4 + 3 = -3$$

$$C_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 16 - 6 - 9 = 1$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 + 2 + 0 = 2$$

$$C_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - 2 - 3 = -5$$

$$C_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 + 3 + 9 = 12$$

2) Si se tiene las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

"A" es conforme a "B".

Calcular:

a) $A \cdot B = ?$

b) $B \cdot A = ?$

c) $A \cdot A = ?$

Solución.- Multiplicamos cada fila de la matriz "A" con cada columna de la matriz "B".

a)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 3 & 17 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2+6+4 = 8$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -4+9+8 = 13$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2-2+3 = 3$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 4-3+6 = 7$$

b) **Solución.-** Multiplicamos cada fila de la matriz " B " con cada columna " A ".

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 17 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 + 4 = 2$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 + 6 = 10$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 6 = 2$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 6 - 3 = 3$$

$$C_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 8 + 9 = 17$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 + 4 = 2$$

$$C_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$C_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 + 6 = 10$$

c) No se puede realizar la operación porque "A" no es conforme a "A".

3) Si se tiene las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

"A" es conforme a "B".

Calcular:

a) $A \cdot B = ?$

b) $B \cdot A = ?$

Solución.- Multiplicamos cada fila de la matriz "A" con cada columna de la matriz "B".

a)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 + 6 = 9$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 10 \\ 6 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 3 = 2$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 + 6 = 10$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 6 = 6$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + 3 = 3$$

$$C_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 6 = 6$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 + 8 = 5$$

$$C_{32} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 4 = 5$$

$$C_{33} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 8 = 4$$

b) Solución.- Multiplicamos cada fila de la matriz “B” con cada columna de la matriz “A”.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 22 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 + 0 - 4 = -1$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 9 - 3 + 16 = 22$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 6 + 3 + 8 = 17$$

Propiedades de la multiplicación de matrices

Si "A", "B" y "C" son matrices del mismo orden respecto a la suma y conformes respecto a la multiplicación, entonces podemos presentar las siguientes propiedades:

1) $(AB).C = A(B.C)$ **Asociativa**
2) $A(B + C) = AB + AC$ **Distributiva a la izquierda**
3) $(A + B).C = AC + B.C$ **Distributiva a la derecha**

Cuando las matrices cumplen estas tres propiedades conformes a la suma y la multiplicación entonces se dice que ellos forman un anillo.

Multiplicación por escalar

Si " k " es un número real diferente de cero y se tiene la matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ entonces podemos definir la multiplicación de un escalar por una matriz de la siguiente manera:

$$\boxed{k \cdot A = k[a_{ij}]_{m\times n} = [k \cdot a_{ij}]_{m\times n}}$$

Es decir que para multiplicar un escalar por una matriz; la multiplicación del escalar se realiza elemento a elemento.

Ejemplos

1) Si: $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ k = - 2

Calcular:

$\mathrm{k}\cdot\mathrm{A}=?$

Solución

$k\cdot A=(-2)\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ Es escalar multiplica a cada uno de los elementos.

2) Si: $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ \frac{3}{2} & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ y $\alpha=\frac{1}{3}$; $\beta=-1$

Calcular:

a) $\alpha\cdot B+\beta\cdot B=?$

b) $(\alpha+\beta)\cdot B=?$

Solución

a)

$$\alpha \cdot B + \beta \cdot B = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ \frac{3}{2} & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ \frac{3}{2} & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\alpha \cdot B + \beta \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\alpha \cdot B + \beta \cdot B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

b)

$$(\alpha + \beta) \cdot B = \left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ \frac{3}{2} & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot B = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ \frac{3}{2} & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Conclusión:

$$\alpha \cdot B + \beta \cdot B = (\alpha + \beta) \cdot B$$

Propiedades de los escalares

Si: " k " y " r " son números reales y las matrices "A" y " B " son conformes para la suma algebraica y el producto entonces podemos verificar las siguientes propiedades:

1º) $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$

2º) $(k+r)\cdot A=k\cdot A+r\cdot A$

3º) $k\cdot(r\cdot A)=(k\cdot r)\cdot A$

4º) $A\cdot(k\cdot B)=k\cdot(A\cdot B)$

Potencia de una matriz

Si se sabe que la matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ es una matriz cuadrada y "p" y "q" son números enteros positivos, entonces podemos definir la potencia de una matriz de la siguiente manera:

$A^P=A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A$ **"p" veces**

Propiedades de la potencia de una matriz

1º) $A^p\cdot A^q=A^{p+q}$ Los exponentes Se suman

2º) $(A^p)^q=A^{p\times q}$ Se multiplican los exponentes

3º) $A^0=1$ Es igual a la unidad

4º) $I^p=I$ Es igual a la Identidad

Ejemplos

1) Dada la siguiente matriz: $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&1\\2&1&-1\end{bmatrix}_{3\times3}$

Calcular:

a) A^3

b) A^2+2A+I

c) $(A+I)^2$

Solución.- Multiplicamos tres veces la matriz "A" por ella misma para hallar A^3.

$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A$ Esto aplicando la definición de Potencia de una matriz.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 14 \\ -12 & -6 & 18 \\ 14 & 4 & -10 \end{bmatrix}_{3*3}$$

b) Solución.- Reemplazamos los valores de cada matriz y realizamos la operación.

$$A^2 + 2\cdot A + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} + (2)\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^2 + 2\cdot A + I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^2 + 2\cdot A + I = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

c) Solución.- Primeramente sumamos las dos matrices y luego multiplicamos las matrices.

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2. Si se tiente la siguiente matriz: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}_{2x2}$ Calcular: B^3.

3. Si se tiene la siguiente matriz: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 8 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3x3}$ Calcular: C^3

Matriz transpuesta

Si se tiene la matriz de orden **mxn** $A=[a_{ij}]_{m\times n}$. Entonces a la matriz transpuesta podemos definirla de la siguiente manera.

$$\boxed{A^t = [a_{ij}]^t_{m\times n} = [a_{ji}]_{n\times m}}$$

Es decir, que una matriz transpuesta es aquella cuando las filas se convierten en columnas.

Propiedades de la Matriz Transpuesta

La matriz transpuesta cumple las siguientes propiedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$
4. $(A.B)^t = B^t.A^t$

Ejemplos

1) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Calcular:

a) $(A \cdot B)^t = ?$

b) $B^t \cdot A^t = ?$

c) $(A^t)^t = ?$

a) Solución.- Primeramente multiplicamos las matrices y luego se realiza la transpuesta.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 5 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$(A \cdot B)^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

b) Solución.- Primeramente hallamos las transpuestas de cada matriz y luego realizamos el producto.

$$B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \\ -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

c) Solución.- Hallamos la transpuesta luego volvemos a hallar la transpuesta.

$$\left(A^t\right)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Conclusión:

$$\left(A^t\right)^t = A$$

2. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1/4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}_{5x2}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x4}$

Demostrar que: $(A.B)^t = B^t.A^t$

PRACTICO Nº 1

1) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}_{3\times 2} ;\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2} ;\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3} ;$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}_{3\times 3} ;\quad E=\begin{bmatrix}6 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Calcular:

a) $A\cdot B=?$

b) $D-E=?$

c) $D\cdot E=?$

d) $E\cdot B=?$

e) $3\cdot C-D=?$

f) $(A\cdot B)\cdot C=?$

g) $(A\cdot B)\cdot C+2\cdot B=?$

h) $D+E^2=?$

Respuestas:

a) $A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 7\\ 2 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$

b) $D-E=\begin{bmatrix}-5 & 4 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$

c) $D\cdot E=\begin{bmatrix}9 & 8 & 19\\ -2 & 0 & 0\\ 32 & 9 & 25\end{bmatrix}_{3\times 3}$

d) No se puede realizar la operación.

e) No se puede realizar la operación

f) $(A\cdot B)\cdot C=\begin{bmatrix}0 & 3 & 2\\ 12 & 3 & 22\\ 6 & 6 & 14\end{bmatrix}_{3\times 3}$

g) Se puede realizar la operación.

h) $D+E^2=\begin{bmatrix}48 & 15 & 31\\ 0 & 2 & 6\\ 38 & 10 & 27\end{bmatrix}_{3\times 3}$

2) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4} \; ;$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \; ; \; E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Calcular:

a) $A^t \cdot E = ?$

b) $3 \cdot A - 4 \cdot B = ?$

c) $B \cdot D = ?$

Respuestas:

a) $A^t \cdot E = \begin{bmatrix} 13 & 24 \\ 0 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

b) $3 \cdot A - 4 \cdot B = \begin{bmatrix} -11 & -18 & 7 \\ 23 & 21 & -13 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

c) $B \cdot D = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

3) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \; ; C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{1\times 3} \; ; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Calcular:

a) $D \cdot B = ?$

b) $A^t \cdot D = ?$

Respuestas:

a) $D \cdot B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

b) $A^t \cdot D = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 13 & 15 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

c) $D^t \cdot D = ?$ c) $D^t \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

d) $2 \cdot D - (B \cdot C)^t = ?$ d) $\begin{bmatrix} -13 & -8 & -20 \\ -10 & -2 & -8 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

4) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} ; B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4} ; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Calcular: **Respuestas:**

a) $A \cdot B = ?$ a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 15 & 0 & 1 \\ -3 & 15 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

b) $A \cdot (B + C) = ?$ b) $A \cdot (B + C) = \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & -2 \\ 2 & 30 & 0 & -4 \\ -6 & 30 & 0 & -8 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

c) $A \cdot B + A \cdot C = ?$ c) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & -2 \\ 2 & 30 & 0 & -4 \\ -6 & 30 & 0 & -8 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

5) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 7 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \; ; \; B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 8 \\ \frac{5}{7} & -3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Calcular: **Respuestas:**

a) $A \cdot B = ?$

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{25}{2} & 22 \\ \frac{61}{4} & 46 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

b) $B \cdot A = ?$

b) $B \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -17 & 0 \\ 5 & 54 & 28 \\ \frac{9}{14} & -\frac{157}{7} & 43 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

c) $A \cdot A = ?$

c) No se puede realizar la operación.

d) $B \cdot C = ?$

d) No se puede realizar la operación.

Unidad Nº 2: Determinantes

Competencias

Al finalizar la unidad el estudiante desarrollará las siguientes competencias:

1°) Calcula el determinante de matrices 2x2, 3x3, 4x4, nxn.

2°) Aplica las propiedades de los determinantes para calcular su valor.

3°) Aplica los determinantes en el cálculo de la inversa de una matriz

4°) Calcula la inversa de una matriz por diferentes métodos

5°) Resuelve Sistemas de ecuaciones lipor diferentes métodos.

Definición

El determinante de una matriz cuadrada “A” es un número escalar que se obtiene de los elementos de una matriz realizando operaciones sobre ellos; de donde se halla el determinante y se lo simboliza de la siguiente manera: det(A) ó |A|.

Signo de una Matriz

Cada elemento que conforma a una matriz tiene su signo, cuando ésta presenta diferentes elementos dentro de ella; entonces se toma el signo de cada elemento como $(-1)^{i+j}$

Es decir: $\boxed{\text{Sig } [a_{ij}] = (-1)^{i+j}}$

Por ejemplo si queremos determinar el signo de los elementos de una matriz de orden 3x3 se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix}_{3\times3} \quad \text{Entonces se tiene:} \quad A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Lo mismo ocurrirá para matrices 4x4; 5x5; 6x6; nxn.

Determinante de una Matriz de orden 2x2

Para calcular el determinante de una matriz de **orden dos** se realiza el producto de los elementos de la diagonal principal, **menos** el producto de los elementos de la diagonal secundaria, es decir:

Si: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Entonces: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Ejemplos:

1) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - [(-1)\cdot(2)]$$
$$\det(A) = 4 + 2$$
$$\boxed{\det(A) = 6}$$

2) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\det(B) = \left[\frac{1}{2}\cdot(-4)\right] - [(-2)\cdot(-1)]$$
$$\det(B) = -2 - 2$$
$$\boxed{\det(B) = -4}$$

3) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\det\,(C) = \left[1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right] - \left[(3)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)\right]$$

$$\det\,(C) = -\frac{1}{4} - 5$$

$$\boxed{\det\,(C) = -\frac{21}{4}}$$

4) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -3 & \dfrac{4}{3} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Para realizar por el estudiante.

5) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & \dfrac{5}{2} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Para realizar por el estudiante

<u>Determinante de una Matriz de orden 3x3</u>

Para calcular el determinante de una matriz 3x3, se puede emplear una fila o columna cualquiera como <u>referencia</u> respetando los signos de cada uno de los elementos de dicha fila o columna y anulando al mismo tiempo la fila y la columna de los elementos considerados; de esta manera el determinante de una matriz será único.

Ejemplos:

1) Calcular el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\det(A) = 1\cdot\begin{vmatrix}9 & 6\\4 & 8\end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix}2 & 6\\3 & 8\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 9\\3 & 4\end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1\cdot(72 - 24) - 5\cdot(16 - 18) + 2\cdot(8 - 27)$$

$$\det(A) = 1\cdot(48) - 5\cdot(-2) + 2\cdot(-19)$$

$$\det(A) = 48 + 10 - 38$$

$$\boxed{\det(A) = 20}$$

2) Calcular el determinante de: $B = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\2 & 1 & 6\\3 & 2 & 8\end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$\det(B) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\2 & 8\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}2 & 6\\3 & 8\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 1\cdot(8 - 12) - 3\cdot(16 - 18) + 2\cdot(4 - 3)$$

$$\det(B) = -4 + 6 + 2$$

$$\boxed{\det(B) = 4}$$

3) Calcular el determinante de: $C = \begin{bmatrix}0 & 7 & 6\\2 & 0 & 3\\3 & 1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$\det(C) = 0\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\1 & 0\end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 0\end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 1\end{vmatrix}$$

$$\det(C) = 0 - 7\cdot(0 - 9) + 6\cdot(2 + 0)$$

$$\det(C) = 0 + 63 + 12$$

$$\boxed{\det(C) = 75}$$

4) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$D = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 4 & 8\\3 & 2 & -1\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Para realizar por el estudiante

5) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & y+x \end{bmatrix}_{3\times 3}$$ Para realizar por el estudiante

Determinante de una Matriz de orden 4x4, 5x5, nxn

Para calcular el determinante de una matriz 4x4, 5x5, nxn; se debe ir reduciendo la matriz hasta llegar a una matriz 2x2 siempre tomando en cuenta los signos de los elementos de la fila o columna elegida.

Ejemplos:

1) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$ Aquí hallamos los determinantes 3 x 3 y reemplazamos.

$$\det(A) = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1\cdot(-92) - 3\cdot(-70) + 5\cdot(2) - 2\cdot(-16)$$

$$\det(A) = -92 + 210 + 10 + 32$$

$$\boxed{\det(A) = 160}$$

2) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$ Para realizar por el estudiante (-131)

3) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$ Para realizar por el estudiante (- 55)

Propiedades de los Determinates

Los determinantes tienen propiedades que ayudan a resolver problemas cuando estas son aplicadas en las matrices y algunas de estas propiedades son las siguientes:

Propiedad 1.- Si todos los elementos de una fila o una columna de la matriz son nulos; entonces el determinante de dicha matiz es **cero**.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \det(A) = 0$$

Propiedad 2.- Si dos filas o columnas de una matriz cuadrada son iguales o múltiplos entre si entonces el determinante de dicha matriz es **cero**.

Por ejemplo: En este caso la fila 1 es múltiplo de la fila 3.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Entonces: $\det(B) = 0$

Propiedad 3.- Si la matriz "A_1" es el resultado de un intercambio de dos filas o columnas adyacentes de la matriz "A" entonces se cumple que: $\boxed{\det(A_1) = -\det(A)}$

Por ejemplo:

En este caso se intercambiaron las filas dos y tres

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\det(A) = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$\det(A) = 1\cdot(2+6) - 3\cdot(1-6) + 0\cdot(-2-4)$$
$$\det(A) = 8 + 15$$
$$\det(A) = 23$$

$$\det(A_1) = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\det(A_1) = 1\cdot(-6-2) - 3\cdot(6-1) + 0\cdot(4+2)$$
$$\det(A_1) = -8 - 15$$
$$\det(A_1) = -23$$

Propiedad 4.- Si “A_1” es el resultado de multiplicar una fila de la matriz “A” o una columna de la misma matriz “A” por una constante “k” diferente de cero, entonces se cumple que:

$$\det(A_1) = k \cdot \det(A)$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (6 - 10) - 2 \cdot (12 - 6) + 3 \cdot (10 - 3)$$

$$\det(A) = -4 - 12 + 21$$

$$\boxed{\det(A) = 5}$$

Multiplicando la fila 2 por 4 se tiene:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\det(A_1) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_1) = 1 \cdot (24 - 40) - 2 \cdot (48 - 24) + 3 \cdot (40 - 12)$$

$$\det(A_1) = -16 - 48 + 84$$

$$\boxed{\det(A_1) = 20}$$

Entonces se cumple que:

$$\det(A_1) = k \cdot \det(A)$$

$$20 = 4 \cdot 5$$

$$\boxed{20 = 20}$$

Propiedad 5.- Si se multiplica una fila o una columna cualquiera de la matriz “A” por un número Real diferente de cero y si luego este resultado se suma a otra fila o columna cualquiera; entonces el valor del determinante no cambia.

Cuando se realiza este tipo de operaciones sobre las matrices, lo que se quiere lograr es:

a) Convertir la matriz en triangular superior para calcular luego el determinante de dicha matriz solamente multiplicando los elementos de la diagonal principal.

b) Lograr que una fila o una columna de la matriz tenga elementos nulos entonces el determinante de dicha matriz será cero.

Ejemplos:

1) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Solución:

$$\det(A) = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 13 + 15 - 12$$

$$\boxed{\det(A) = 16}$$

Ahora convertimos a la matriz en triangular superior y calculamos el determinante.

$$A_{12}(-3)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A_{23}\left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Fila 2 **Columna 3**

$$\det(A) = 1\cdot 4\cdot 4$$

$$\boxed{\det(A) = 16}$$

Entonces el determinante resulta de multiplicar los elementos de la diagonal principal.

2) Calcular el determinante de la siguiente matriz aplicando la propiedad:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Solución:

$$A_{13}(-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A_{23}(1)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Ahora multiplico solo los elementos de la diagonal principal de la matriz.

$$\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\boxed{\det(B) = 2}$$

3) Calcular el determinante de la siguiente matriz aplicando la propiedad:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Solución:

$$A_{12}(-3)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A_{23}\left(\frac{1}{4}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Multiplicando los elementos de la diagonal principal se tiene:

$$\det(C) = 1 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2}$$

$$\boxed{\det(C) = 18}$$

4) Calcular el determinante de la siguiente matriz aplicando la propiedad:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Solución:

$$A_{12}(-2)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A_{13}(-1)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A_{23}\left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$\det(D)=1\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\det(D)=-1}$$

5) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}$$

Solución:

$$A_{12}(-4)\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}_{3\times3} \qquad A_{23}(-2)\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$A_{13}(-7)\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -12\end{bmatrix}_{3*3}$$

$$\det(E)=1\cdot(-3)\cdot 0$$

$$\boxed{\det(E)=0}$$

6) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$F=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 6\\ 0 & -1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 9 & 6\\ 3 & 2 & 4 & 8\end{bmatrix}_{4\times4}$$

Solución:

$$\begin{matrix} \\ A_{13}(-2) \\ A_{14}(-3) \\ \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & -7 & -11 & -10 \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad A_{34}(-2)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\begin{matrix} \\ A_{23}(-2) \\ A_{24}(-3) \\ \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -26 \\ 0 & 0 & -32 & -38 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\det(F)=1\cdot(-1)\cdot(-16)\cdot 14$$

$$\boxed{\det(F)=224}$$

Entonces multiplicando los elementos de la diagonal principal.

Menores de una Matriz

Si se sabe que la matriz "A" es cuadrada es decir de orden **n**x**n** y la matriz Mij, es de orden $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene al eliminar de la matriz "A" su i-ésima fila y su j-ésima columna; entonces a la matriz Mij se denomina ij-ésima menor de "A".

Es decir que para calcular los menores de una matriz se debe eliminar la fila y la columna indicada por el menor.

Ejemplos:

1) Dada la siguiente matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 6 & 8 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Calcular:

a) $M_{12}=?$

b) $M_{22}=?$

Respuestas:

a) $M_{12}=\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

b) $M_{22}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

c) $M_{31} = ?$

c) $M_{31} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

2) Dada la siguiente matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 8 \\ 9 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{4*4}$$

Calcular:

a) $M_{44} = ?$

b) $M_{13} = ?$

c) $M_{33} = ?$

Respuestas:

a) $M_{44} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

b) $M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

c) $M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

<u>Cofactores de una Matriz</u>

Sea "A" una matriz cuadrada de orden **n×n** entonces el ij-ésimo cofactor de la matriz "A" está representado por Cij y está definido de la siguiente manera: $\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|}$

Ósea que para calcular los cofactores de una matriz se debe determinar el signo de cada elemento y multiplicarlo por el determinante del menor.

<u>Ejemplos:</u>

1) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 8 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Calcular:

a) $C_{13} = ?$

b) $C_{32} = ?$

c) $C_{12} = ?$

d) $C_{23} = ?$

Respuestas:

a)

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = +(2-18)$$

$$C_{13} = -16$$

b)

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$C_{32} = -(8+3)$$

$$C_{32} = -11$$

c)

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = -(0-24)$$

$$C_{12} = 24$$

d)

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$C_{23} = -(-2-6)$$

$$C_{23} = 8$$

2) Dada la siguiente matriz:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Calcular:

a) $C_{14} = ?$

b) $C_{41} = ?$

c) $C_{32} = ?$

d) $C_{23} = ?$

Solución:

a)

$$C_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$C_{14} = -\left[-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$C_{14} = -[-2\cdot(-4-0) - 0\cdot(-6+1) + 6\cdot(0+2)]$$

$$C_{14} = -(8+12)$$

$$\boxed{C_{14} = -20}$$

b)

$$C_{41} = (-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_{41} = -\left[2\cdot\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$C_{41} = -[-2\cdot(0+2) - 3\cdot(0+4) + 4\cdot(0-12)]$$

$$C_{41} = -(4-12-48)$$

$$\boxed{C_{41} = 56}$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ -2 & 6 & -2\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

$$C_{32}=-\left[1\cdot\begin{vmatrix}6 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 6\\ -1 & -2\end{vmatrix}\right]$$

$$C_{32}=-[1\cdot(0-4)-3\cdot(0-2)+4\cdot(4+6)]$$

$$C_{32}=-[-4+6+40]$$

$$\boxed{C_{32}=-42}$$

d)

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$C_{23}=-\left[1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\right]$$

$$C_{23}=-[1\cdot(0-0)-2\cdot(0-0)+4\cdot(0+2)]$$

$$C_{23}=-[0-0+8]$$

$$\boxed{C_{23}=-8}$$

Adjunta de una Matriz

Sea "A" una matriz cuadrada de orden **nxn** entonces la adjunta de la matriz "A" que se representa como $adj(A)$ ó A^*, es la totalidad de todos los cofactores de la matriz "A" respetando los signos de cada elemento de dicha matriz.

Ejemplos:

1. Calcular la adjunta de la matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^*=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^*=\begin{bmatrix}+(12-6) & -(8-6) & +(6-9)\\ -(8-9) & +(4-9) & -(3-6)\\ +(4-9) & -(2-6) & +(3-4)\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^*=\begin{bmatrix}6 & -2 & -3\\ 1 & -5 & 3\\ -5 & 4 & -1\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2. Calcular la adjunta de las matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 7 & -4 & -2 \\ 12 & -10 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz Inversa

Se dice que una matriz "A" es **regular** si su determinante es diferente de cero. En caso de que la determinante fuera **cero**, entonces la matriz es **singular.**

Por lo tanto si la matriz "A" es cuadrada es decir de orden **n×n;** entonces esta matriz tiene inversa siempre y cuando exista otra matriz que conmute con "A", para la operación del producto de matrices y el resultado de este producto será igual a la matriz identidad es decir: $\boxed{A \cdot B = B \cdot A = I}$

Entonces para calcular la inversa de una matriz cuadrada "A" ésta debe ser regular por lo tanto para el cálculo de la inversa de una matriz se utilizara la siguiente igualdad:

$$(\text{I}) \qquad \boxed{\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \cdot (\mathrm{A}^*)^{\mathrm{t}}}$$

Ejemplos:

1) Calcular la inversa de la siguiente matriz aplicando la matriz adjunta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Solución.- Primeramente se calculará el determinante, luego la adjunta y por último se saca la transpuesta de la matriz adjunta, para reemplazar en la fórmula (I).

$$A^{*}=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 13 & \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 9\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}3 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^{*}=\begin{bmatrix}-7 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\left(A^{*}\right)^{t}=\begin{bmatrix}-7 & 3 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Calculamos el determinante:

$$\det(A)=1\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}$$

$$\det(A)=1\cdot(9-16)-3\cdot(3-4)+3\cdot(4-3)$$

$$\det(A)=-7+3+3$$

$$\boxed{\det(A)=-1}$$

Aplicando la formula:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{bmatrix}-7 & 3 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}}$$

Prueba: Para realizar la prueba se aplica;

$$\boxed{A^{-1}\cdot A=I}$$

$$\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2) Dada la siguiente matriz. Calcular $\det\left(A^{-1}\right)$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

Respuesta: 1/6

3) Dadas las siguientes matrices: $A=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

Demostrar que: $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

4) Dada la siguiente matriz: $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$

Calcular:

a) $\det(C^{*})$ **b)** $\det(C.C^{*})$ **c)** $\det(C^{-1})$ **d)** $\det(C^{2})$

PRACTICO

1) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}_{3*3} ;\ B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}_{3*3}$$

Calcular:

a) $\det(AB)=?$

b) $\det A \det B = ?$

c) $\det(A+B)=?$

Respuestas:

a) $\det(\mathrm{A.B})=0$

b) $\det A \det B = 0$

c) $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B})=-42$

2) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}_{3\times 3} ;\ B=\begin{bmatrix}-3 & \frac{1}{2} & 3\\ 4 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Calcular:

a) $\det\left(A-2AB-B^t\right)=?$

b) $A+B^t.\det A-\dfrac{AB}{\det(AB)}=?$

Solución:

a) $\det\left(A-2AB-B^t\right)=32893$

b) $$A+B^t.\det A-\frac{AB}{\det(AB)}=\begin{bmatrix} \frac{37}{1367} & -\frac{437}{10936} & -\frac{449}{5468} \\ -\frac{84}{1367} & -\frac{76}{1367} & \frac{49}{2734} \\ -\frac{61}{2734} & -\frac{783}{10936} & -\frac{519}{5468} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

3) Hallar la adjunta de las siguientes matrices.

Matrices:	Respuestas:
a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$	a) $\mathrm{A}^*=\begin{bmatrix} 39 & -18 & 2 \\ -32 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & -19 \end{bmatrix}_{3\times3}$
b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3\times3}$	b) $B^*=\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ -7 & 14 & 0 \\ -11 & -8 & 10 \end{bmatrix}_{3\times3}$
c) $C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$	c) $\mathrm{C}^*=\begin{bmatrix} -4 & 48 & -53 \\ 1 & -17 & 23 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$
d) $D=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$	d) $D^*=\begin{bmatrix} -3 & 8 & -10 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$

4) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 4\\ 4 & -6 & 4\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix}7 & 4 & 1\\ 4 & 3 & -7\\ 5 & -3 & 7\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Calcular:

a) $(A\cdot B)^{*}=?$

b) $A^{*}\cdot B^{*}=?$

c) Conclusión

Respuestas:

a) $(A\cdot B)^{*}=\begin{bmatrix}806 & -5014 & -1210\\ -1116 & 5508 & 1404\\ -527 & 2755 & 481\end{bmatrix}_{3\times 3}$

b) $A^{*}\cdot B^{*}=\begin{bmatrix}806 & -5014 & -1210\\ -1116 & 5508 & 1404\\ -527 & 2755 & 481\end{bmatrix}_{3\times 3}$

c) $(A\cdot B)^{*}=A^{*}\cdot B^{*}$

5) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 8\\ 0 & 3 & -3\\ -2 & 3 & -3\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Demostrar que:

$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

Solución:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & -\frac{59}{48} & -\frac{1}{16}\\ \frac{1}{6} & -\frac{173}{144} & -\frac{17}{48}\\ \frac{1}{24} & -\frac{19}{36} & -1\end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & -\frac{59}{48} & -\frac{1}{16}\\ \frac{1}{6} & -\frac{173}{144} & -\frac{17}{48}\\ \frac{1}{24} & -\frac{19}{36} & -1\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

6) Calcular la inversa de las siguientes matrices utilizando la matriz adjunta.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 9 & 9 & 7\\ 5 & 5 & 4\end{bmatrix}_{3\times3}$

b) $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}_{3\times3}$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}_{3\times3}$

d) $D=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 6\end{bmatrix}_{3\times3}$

Respuestas:

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -22 & 40\\ -1 & 26 & -47\\ 0 & -5 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}$

b) $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}_{3\times3}$

c) $C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & \frac{7}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}_{3\times3}$

d) No tiene inversa.

7) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 1\\ 8 & -3 & 2\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

Calcular:

a) $\det\left(A^{-1}\right)=?$

Respuestas:

$\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{25}{18}$

b) $A^* \cdot B^* = ?$

b) $A^* \cdot B^* = \begin{bmatrix} 806 & -5014 & -1210 \\ -1116 & 5508 & 1404 \\ -527 & 2755 & 481 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

c) Conclusión

c) $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$

Escalonamiento de Matrices

En el escalonamiento de las matrices podemos definir **tres** operaciones elementales realizadas sobre las filas o columnas de la matriz. Estas operaciones son las siguientes:

1º) Se puede multiplicar cualquier fila de la matriz por un número Real diferente de cero. A esta operación la representamos por la letra "M".

2º) Se puede sumar o restar el múltiplo de una fila a otra fila; a esta operación se la denomina adición de filas y se la representa con la letra "A".

3º) Se puede permutar dos filas cualesquiera de la matriz; a esta operación se la representa con la letra "P".

Matriz Equivalente

Si se tiene una matriz $A_{m\times n}$ sobre la cual se realizan operaciones elementales y se obtiene la matriz $B_{m\times n}$, entonces cuando se cumple estas operaciones en la matriz A; se dice que "A" es equivalente a "B" y se la representa como: $A \ \varepsilon \ B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$M_2(-1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A_{12}(-1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$P_{23}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \text{Entonces:} \quad A \; \varepsilon \; B$$

Matrices Escalonadas por Filas

Las matrices escalonadas por filas tienen dos formas; matriz escalonada y matriz escalonada reducida:

a) Matriz escalonada

Para que una matriz este en su forma escalonada debe cumplir las siguientes condiciones:

1º) Si una matriz tiene filas donde todos sus elementos son nulos, entonces estas filas deben ubicarse a lo último de la matriz, es decir:

$$A=\begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{\text{---------------}} \\ \multicolumn{4}{c}{\text{---------------}} \\ \multicolumn{4}{c}{\text{---------------}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2º) Si una fila no consta de elementos exclusivamente nulos, entonces el primer elemento diferente de cero que aparezca en dicha fila debe ser el uno es decir:

$$A=\begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{\text{---------------}} \\ 0 & 1\text{--------} & & \\ \multicolumn{4}{c}{\text{---------------}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3º) Si en dos filas sucesivas no nulas el primer uno de la fila inferior debe estar más hacia la derecha que el primer uno de la fila superior es decir:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \text{------------} & & \\ 0 & 1 & \text{--------} & \\ 0 & 0 & 1\text{-----} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplos:</u>

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$ No es escalonada

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$ Es escalonada

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$ No es escalonada

$$D=\begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$ Es escalonada

$$E=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$ No es escalonada

b) <u>Matriz Escalonada Reducida o Matriz Canónica</u>

Es aquella matriz que además de cumplir las **tres** condiciones anteriores debe cumplir también la siguiente condición:

4°) Cualquier columna que contenga el primer uno en una fila; todos los demás elementos de dicha columna deben ser nulos, es decir:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{--------} & \\ 0 & 1 & \text{--------} & \\ 0 & 0 & 0 & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}_{3\times3}$$ No es escalonada reducida

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}_{2\times4}$$ Es escalonada reducida

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$$ No es escalonada reducida

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 3\\0 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}_{2\times4}$$ Es escalonada reducida

$$E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$$ No es escalonada reducida

Ejercicios:

Dadas las siguientes matrices, transformarlas en matrices escalonadas reducidas.

1) $$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\2 & 1 & 2 & 2\\3 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

1) $$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{47}{63}\\0 & 1 & 0 & \frac{52}{63}\\0 & 0 & 1 & -\frac{2}{63}\end{bmatrix}$$

2) $$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\2 & 1 & -3 & -6\\3 & -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$ **Para realizar por el estudiante**

3) $$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2 & 1\\2 & 4 & 1 & -2 & 3\\3 & 6 & 2 & -6 & 5\end{bmatrix}$$ **Para realizar por el estudiante**

Calculo de la Inversa de una matriz por Escalonamiento

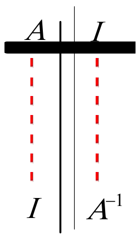
Este método consiste en transformar una matriz "A" por medio de la reducción por filas en una matriz identidad.

El procedimiento que se debe seguir para este cálculo es el siguiente:

1º) Se escribe la matriz aumentada, es decir la matriz "A" junto a la matriz identidad $\left[A \mid I\right]$

2º) Se transforma la matriz "A" a su forma escalonada reducida por medio de operaciones elementales; afectando estas también a la matriz identidad.

3º) La matriz "A" se debe reducir a la matriz identidad; entonces A^{-1} será la matriz que aparezca lado derecho de la matriz "A", es decir:



Una matriz cuadrada tiene inversa si sólo si; su forma escalonada reducida es la matriz identidad. En caso de que en la reducción por filas de la matriz "A" se llegara a tener una fila o una columna cuyos elementos son nulos, entonces la matriz "A" no tiene inversa.

Ejemplos:

Calcular la inversa por escalonamiento de la siguientes matrices.

1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$ Escribiendo la matriz aumentada.

$$\begin{matrix} A_{12}(-1) \\ A_{13}(-1) \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

$$A_{21}(-3)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

Realizando operaciones elementales.

$$A_{31}(-3)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Escribiendo la matriz aumentada.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

$$\begin{matrix} A_{12}(-2) \\ A_{13}(-4) \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

$$P_{23}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

$$A_{23}(1)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

$$M_3(-1)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

$$A_{31}(-2)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]_{3\times 6}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Es la inversa.

3)

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$C=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$M_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$\begin{matrix} A_{12}(-3) \\ A_{13}(-3) \\ A_{14}(-3) \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$P_{23}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$\begin{matrix} A_{21}(-2) \\ A_{24}(3) \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 11 & \frac{5}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$M_3(2)\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 11 & \frac{5}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$\begin{array}{r} A_{31}\left(-\frac{7}{2}\right) \\ A_{32}(1) \\ A_{34}(-5) \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 3 & 1 \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$M_4\left(\frac{1}{5}\right)\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$\begin{array}{r} A_{41}(-18) \\ A_{42}(7) \\ A_{43}(2) \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 & -\frac{64}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & -12 & \frac{21}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]_{4\times 8}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -\frac{64}{5} & -\frac{18}{5} \\ 10 & -12 & \frac{26}{5} & \frac{7}{5} \\ 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 2 & -2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Es la inversa.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ecuación Lineal

Una ecuación lineal en su forma general es aquella que contempla "n" variables es decir: $x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots x_n$, con sus respectivos coeficientes; entonces podemos representarla de la siguiente manera:

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \ldots\ldots + a_nx_n = b}$$

Donde: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \quad y \quad b$ Son constantes conocidas.

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ Son variables que debemos calcular.

Conjunto Solución

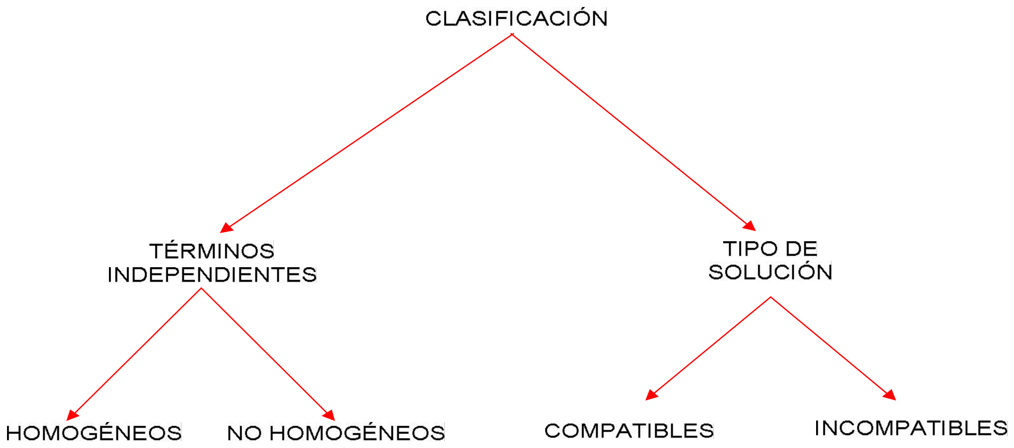
Es el conjunto que está conformado por todas las soluciones de la ecuación lineal.

Sistema de Ecuaciones Lineales

A un sistema de "m" ecuaciones con "n" incógnitas se la puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales:



Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en dos grupos a saber:

De acuerdo a sus términos independientes y de acuerdo al tipo de solución que presentan.

a) De acuerdo a los términos independientes

Los Sistemas de Ecuaciones pueden ser Homogéneos y no Homogéneos.

a_1) Sistemas Homogéneos

Se dice que un sistema de ecuaciones es homogéneo cuando todos los términos independientes del sistema son ceros, es decir:

$$b_1 = b_2 = b_3 ... b_n = 0$$

a_2) Sistemas No Homogéneos

Son aquellos sistemas donde por lo menos uno de los términos independientes es distinto de cero.

b) De acuerdo al tipo de solución

Los sistemas de ecuaciones de acuerdo al tipo de solución que presentan se clasifican en:

b_1) Sistemas compatibles

Son aquellos que también se denominan sistemas consistentes y es por que tienen solución, es decir un sistema compatible puede tener solución única o infinitas soluciones.

b_2) Sistemas incompatibles

Un sistema de ecuación es incompatible o inconsistente si el sistema no tiene solución.

Solución de los sistemas de ecuaciones lineales mediante notación matricial:

Un sistema de m ecuaciones con “n” incógnitas que se lo representa de la siguiente manera:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots a_{3n}x_n = b_3 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

Matricialmente el Sistema se lo representa de la siguiente manera:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_m \end{bmatrix}
$$

En forma Resumida el Sistema se lo puede representar:

$$\boxed{[A|\ X] = [B]}$$

Donde:

$A =$ Es la matriz de orden m x n que está conformada por los coeficientes de las variables.

$x =$ Es la matriz de orden n x1 que está conformado por las incógnitas del sistema de ecuaciones.

$B =$ Es la matriz de orden m x 1 que está conformada por los términos independientes.

Matriz Ampliada

Si sabemos que “A” es una matriz a la cual le agregamos la matriz “B” de los términos independientes, entonces tenemos la matriz ampliada que esta representada de la siguiente manera: $[A|\ B]$ y se la define:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]_{m*n}$$

Métodos de Solución de Sistemas de Ecuaciones

Método de Reducción o Eliminación

Existen dos métodos de eliminación o de reducción para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

1º) Método de Gauss

Este método consiste en transformar la matriz aumentada o ampliada en una matriz escalonada realizando sobre ella operaciones elementales.

2º) Método de Gauss – Jordan

Este método consiste en transformar la matriz aumentada o ampliada en una matriz escalonada reducida realizando sobre ella operaciones elementales.

Análisis de la Existencia de Soluciones:

1º) Si en la matriz escalonada reducida se tiene en la última fila una expresión de la forma $x_n = c$, entonces se dice que el sistema tiene *SOLUCIÓN UNICA,* es decir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$x_3 = 4$ *Esto quiere decir que el sistema tiene* ***solución única.***

2º) Si una matriz en su forma escalonada reducida tiene en su última fila una expresión de la siguiente forma: $ax_{n-1} + bx_n = c$ es decir un sistema de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas se dice que tiene *INFINITAS SOLUCIONES*:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_3 + 2x_4 = 3$$
$$x_3 = 3 - 2x_4$$

Infinitas soluciones.

3º) Si una matriz aumentada en su formar escalonada reducida tiene en su última fila una expresión de la forma $0 = c$ entonces se dice que el sistema *NO TIENE SOLUCIÓN* es decir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$0x_3 = 3$$
$$0 = 3$$

Esto quiere decir que el sistema no tiene solución.

4º) Si una matriz aumentada en su forma escalonada reducida en su última fila tiene una expresión como $0 = 0$, entonces no se tiene ninguna información en esta fila; por lo tanto el análisis se realiza en la fila anterior; es decir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$0 = 0$$

Ejemplos

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss y explica que tipo de solución presenta.

1)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]_{3\times 4}$$

$$M_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]_{3\times 4}$$

$$\begin{array}{c} A_{12}(-4) \\ A_{13}(-3) \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right]_{3\times 4}$$

$$M_2\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right]_{3\times 4}$$

$$A_{23}(5)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]_{3\times 4}$$

$$M_3(-1)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]_{3\times 4}$$

3era. Fila

$$x_3 = 3$$

2da. Fila

$$x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_2 = 4 - 2x_3$$
$$x_2 = 4 - 2\cdot(3)$$
$$x_2 = 4 - 6$$
$$x_2 = -2$$

1era. Fila

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_1 = 9 - 2x_2 - 3x_3$$
$$x_1 = 9 - 2\cdot(-2) - 3\cdot(3)$$
$$x_1 = 9 + 4 - 9$$
$$x_1 = 4$$

<u>Prueba</u>:

Ecuación 1

$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2+6x_3&=18\\ 2\cdot(4)+4\cdot(-2)+6\cdot(3)&=18\\ 8-8+18&=18\\ 18&=18 \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de las variables

Ecuación 2

$$\begin{aligned} 4x_1+5x_2-6x_3&=24\\ 4\cdot(4)+5\cdot(-2)-6\cdot(3)&=24\\ 16-10+18&=24\\ 24&=24 \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de las variables

Ecuación 3

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2-2x_3&=4\\ 3\cdot(4)+(-2)-2\cdot(3)&=4\\ 12-2-6&=4\\ 4&=4 \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de las variables

$$\boxed{C_s=\{(-2,3,4)\}.}$$

Conjunto solución. El sistema tiene **solución única.**

2) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss - Jordan y explicar que tipo de solución presenta.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2\\ 3x_1+x_2-2x_3=1\\ 4x_1-3x_2-x_3=3\\ 2x_1+4x_2+2x_3=4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 4 & -3 & -1\\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 3} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 3\\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & -2 & | & 1 \\ 4 & -3 & -1 & | & 3 \\ 2 & 4 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\begin{array}{c} A_{12}(-3) \\ A_{13}(-4) \\ A_{14}(-2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & -5 & -5 & | & 5 \\ 0 & -11 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$M_2\left(-\frac{1}{5}\right) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -11 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\begin{array}{c} A_{21}(-2) \\ A_{23}(11) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 6 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$M_3\left(\frac{1}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\begin{array}{c} A_{31}(1) \\ A_{32}(-1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

3era. Fila

$x_3 = 1$

2da. Fila

$x_2 = 0$

Prueba:

1era. Fila

$x_1 = 1$

Ecuación 1

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 1 + 2\cdot(0) + 1 &= 2 \\ 1 + 0 + 1 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Ecuación 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3\cdot(1) + 0 - 2\cdot(1) &= 1 \\ 3 + 0 - 2 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Ecuación 3

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 - x_3 &= 3 \\ 4\cdot(1) - 0 - 1 &= 3 \\ 4 - 0 - 1 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Ecuación 4

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2\cdot(1) + 4\cdot(0) + 2\cdot(1) &= 4 \\ 2 + 0 + 2 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{C_s = \{(1,0,1)\}}$$

*El sistema tiene **solución única.***

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss - Jordan y explicar que tipo de solución presentan en cada caso.

Sistema	Solución
1) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$	1) $C_S = \{(2; -1; 3)\}$ Solución única
2) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases}$	2) No tiene solución
3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	3) No tiene solución
4) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 = 37 \\ 10x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$	4) $C_S = \{(5; -4; -3)\}$ Solución única
5) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -17 \end{cases}$	5) $C_S = \{(5; -6; -8)\}$ Solución única

6) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -8 \\ + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 - 3x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$	6) $C_S = \left\{ \left(-\frac{17}{7}; -\frac{38}{7}; -\frac{19}{14}; -\frac{71}{14} \right) \right\}$ Solución única
7) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$	7) $C_S = \left\{ \left(-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}u; -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}u;\ t\ ; u \right) t, u \in \Re \right\}$ Infinitas soluciones
8) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 11x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -9 \end{cases}$	8) $C_S = \{(5 - t; 2 - 2t; t)\}$ Infinitas soluciones
9) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$	9) $C_S = \{(-2 - 19\mu - 7t; 2 + 8\mu + 2t; \mu; t)\}$ Infinitas soluciones
10) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 30 \end{cases}$	10) $C_s = \{(1 + t; 4 - 2t; t), t \in \Re\}$ Infinitas soluciones

Unidad N° 3: Vectores

Competencias

En la presente unidad el estudiante desarrollará las siguientes competencias:

1°) Reconoce y grafica vectores en el plano

2°) Realiza operaciones con vectores en R^2 y R^3

3°) Calcula la distancia entre puntos

4°) Calcula la norma de un vector en R^2 y R^3.

Definición de Vector

Vector es aquel que tiene una dirección, un sentido, una magnitud y una intensidad. Por ejemplo la aceleración de un cuerpo en movimiento, la velocidad y la fuerza que ejercen los cuerpos sobre una superficie; son magnitudes vectoriales.

Magnitud Escalar

Es aquella que sólo tiene una magnitud, es decir un valor.

Vectores en R^2

Todo vector en R^2 se puede representar en el plano **bidimensional,** por tanto estos vectores se lo puede representar como un par ordenado de dos componentes (x ; y).

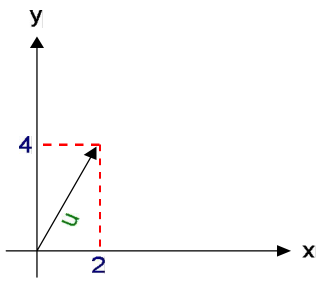
Gráficamente estos vectores se representan tomando en cuenta como punto de partida el punto (0,0).

Cuando se quiere representar un vector en el plano cartesiano se toma en cuenta primeramente la primera componente y luego la segunda componente, partiendo del origen (0 ; 0).

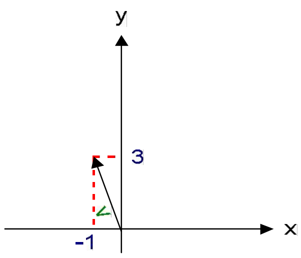
Ejemplos:

1) Graficar los siguientes vectores

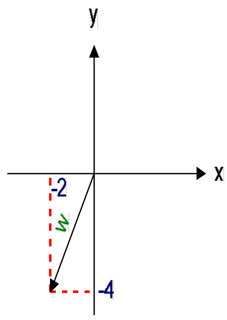
a) $u = (2,4)$



b) $v(-1,3)$



c) $w(-2,-4)$



Operaciones Con Vectores

a) Suma de vectores en R^2

Si se tiene los vectores:
$$u=(a,b)\in R^2$$
$$v=(c,d)\in R^2$$

Entonces la suma de ambos vectores se define de la siguiente manera:

$$\boxed{u+v=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)}$$

Es decir que la suma de vectores se realiza componente a componente.

Ejemplos:

1) Dados los siguientes vectores hallar la suma entre ellos analítica y gráficamente.

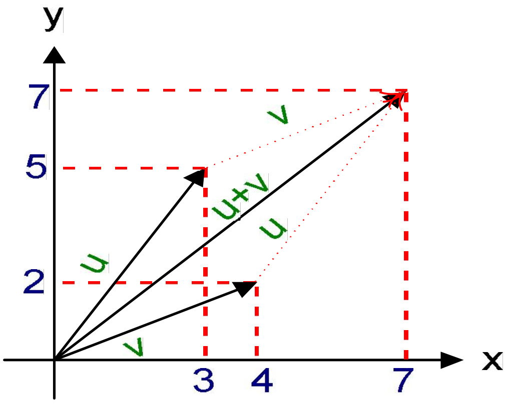
$u(3,5)$
$v(4,2)$

Solución

$u+v=(3,5)+(4,2)$

$u+v=(3+4,5+2)$ Sumando componente a componente.

$u+v=(7,7)$



Multiplicación de Vectores en R^2 por un Escalar

Si se tiene el vector $u=(a,b)\in R^2$ y el escalar $\alpha\in R$entonces la multiplicación de un vector por un escalar se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\alpha\cdot u=\alpha\cdot(a,b)=(\alpha\cdot a,\alpha\cdot b)}$$

Es decir que la multiplicación se realiza componente a componente.

Ejemplos:

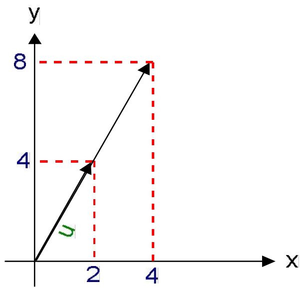
1) Si se tiene el vector $u=(2,4)$ y el escalar $\alpha=2$ calcular gráfica y analíticamente:

$\alpha\cdot u=?$

Solución:

$\alpha\cdot u=2\cdot(2,4)$

$\alpha\cdot u=(4,8)$



Cuando un vector se multiplica por un escalar mayor que **uno** éste se dilata.

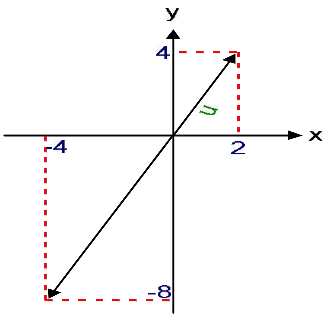
2) Si se tiene el vector $u=(2,4)$ y el escalar $\alpha=-2$ calcular gráfica y analíticamente:

$\alpha \cdot u = ?$

Solución:

$$\alpha \cdot u = -2 \cdot (2,4)$$
$$\alpha \cdot u = (-4,-8)$$

Multiplicando el escalar por el vector.



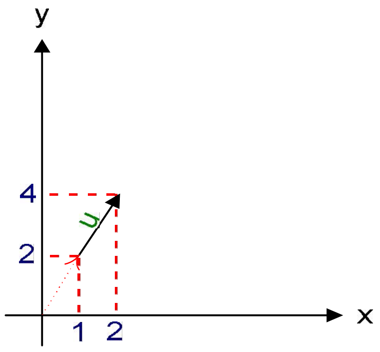
Cuando un vector se multiplica por un escalar menor que **uno**, éste se invierte.

3) Si se tiene el vector $u=(2,4)$ y el escalar $\alpha=1/2$ calcular gráfica y analíticamente:

$\alpha \cdot u = ?$

Solución:

$$\alpha \cdot u = \frac{1}{2} \cdot (2,4)$$
$$\alpha \cdot u = (1,2)$$



Cuando un vector se multiplica por un escalar que esté entre $0 < \alpha < 1$ el vector se reduce.

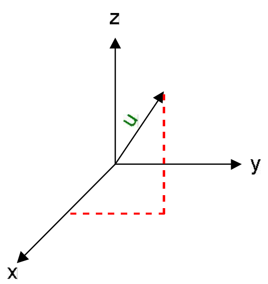
Vectores en R³

Son aquellos que tienen **tres** componentes es decir: $u = (x, y, z)$ por lo tanto estos vectores se grafican en el espacio **tridimensional**.

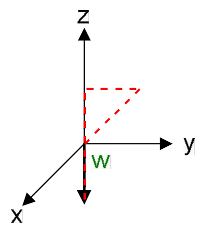
Ejemplos:

Graficar los siguientes vectores:

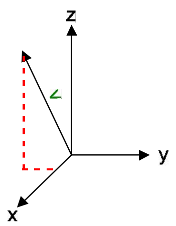
a) $u = (3,4,5)$



c) $w = (-3,-2,-4)$



b) $v = (1,-2,6)$



b) **Suma de Vectores en R³**

Si se tiene los vectores: $u=(a,b,c)\in R^3$
$v=(d,e,f)\in R^3$

Entonces la suma de ambos vectores se define de la siguiente manera:

$$\boxed{u+v=(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)}$$

Multiplicación de Vectores en R^3 por un Escalar

Si se tiene el vector: $u=(a,b,c)\in R^3$ y el escalar $\alpha\in R$ entonces la multiplicación de un vector por un escalar se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\alpha\cdot u=\alpha\cdot(a,b,c)=(\alpha\cdot a,\alpha\cdot b,\alpha\cdot c)}$$

Es decir que la multiplicación del escalar por el vector se realiza componente a componente.

Ejemplos:

1) Si: $u=(1,2,3)$
$v=(2,-3,1)$
$w=(3,2,-1)$

Calcular:

a) $u+w=?$

b) $7u+3u=?$

c) $3\cdot(u-7v)=?$

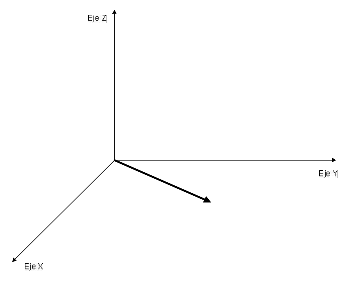
d) $-3v-8u=?$

e) $2v-(u+w)=?$

Solución

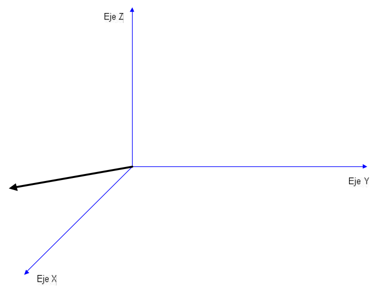
a)

$u+w=(1,2,3)+(3,2,-1)$
$u+w=(4,4,2)$



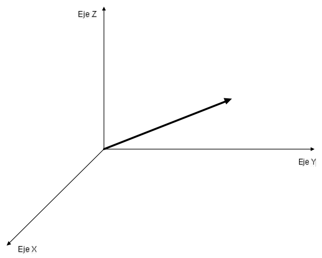
b)

$$7v+3u=7\cdot(2,-3,1)+3\cdot(3,2,-1)$$
$$7v+3u=(14,-21,7)+(9,6,-3)$$
$$7v+3u=(23,-15,4)$$



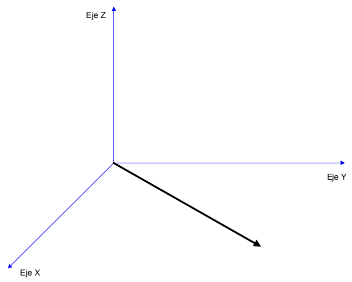
c)

$$3\cdot(u-7v)=3\cdot((1,2,3)-7\cdot(2,-3,1))$$
$$3\cdot(u-7v)=3\cdot((1,2,3)+(-14,21,-7))$$
$$3\cdot(u-7v)=3\cdot(-13,23,-4)$$
$$3\cdot(u-7v)=(-39,69,-12)$$



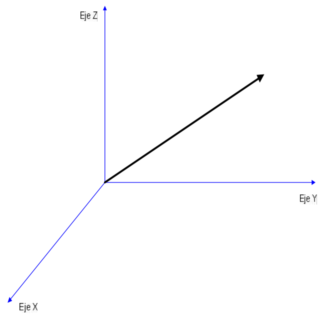
d)

$$-3v-8u=-3\cdot(2,-3,1)-8\cdot(1,2,3)$$
$$-3v-8u=(-6,9,-3)+(-8,-16,-24)$$
$$-3v-8u=(-14,-5,-27)$$



e)

$$2v-(u+w)=2\cdot(2,-3,1)-((1,2,3)+(3,2,-1))$$
$$2v-(u+w)=(4,-6,2)-(4,4,2)$$
$$2v-(u+w)=(4,-6,2)+(-4,-4,-2)$$
$$2v-(u+w)=(0,-10,0)$$



2) Dados los siguientes vectores:

$u = (1,2,3)$
$v = (2,-3,1)$
$w = (3,2,-1)$

Calcular el valor del vector "x" para que cumpla la siguiente igualdad:

$2u - v + x = 7x + w$

Solución

$$2u - v + x = 7x + w$$
$$2u - v - w = 6x$$
$$6x = 2u - v - w$$
$$x = \frac{2u - v - w}{6}$$
$$x = \frac{2 \cdot (1,2,3) + (-) \cdot (2,-3,1) + (-) \cdot (3,2,-1)}{6}$$
$$x = \frac{(2,4,6) + (-2,3,-1) + (-3,-2,1)}{6}$$
$$x = \frac{(-3,5,6)}{6}$$
$$x = \left(-\frac{3}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}\right)$$
$$\boxed{x = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\right)}$$

Prueba: Reemplazando el vector "x" en la ecuación se tiene:

$$2\cdot(1,2,3)+(-)\cdot(2,-3,1)+\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{6},1\right)=7\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{6},1\right)+(3,2,-1)$$

$$(2,4,6)+(-2,3,-1)+\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{6},1\right)=\left(-\frac{7}{2},\frac{35}{6},7\right)+(3,2,-1)$$

$$se\quad cumple:$$

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{47}{6},6\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{47}{6},6\right)$$

3) Dados los siguientes vectores:

$$u=\left(-\frac{1}{2},8,\frac{3}{2}\right)$$

$$v=\left(-3,\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$$

Calcular el valor de x:Si $2x=-3u+\frac{2}{3}v$

Solución:

$$2x=-3u+\frac{2}{3}v$$

$$x=\frac{-3u+\frac{2}{3}v}{2}$$

$$x=\frac{-3\cdot\left(-\frac{1}{2},8,\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(-3,\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)}{2}$$

$$x=\frac{\left(\frac{3}{2},-24,-\frac{9}{2}\right)+\left(-2,\frac{4}{9},\frac{2}{15}\right)}{2}$$

$$x=\frac{\left(-\frac{1}{2},-\frac{212}{9},-\frac{131}{30}\right)}{2}$$

$$\boxed{x=\left(-\frac{1}{4},-\frac{106}{9},-\frac{131}{60}\right)}$$

Norma de un Vector en R^2

La norma de un vector es la longitud de dicho vector y se lo representa de la siguiente manera $\|v\|$.

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que la norma del vector $v = (v_1, v_2)$ es:

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}}$$

Distancia de un Vector en R^2

Si se tiene los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces la distancia entre ellos está dada por la siguiente igualdad:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Norma de un Vector en R^3

Si aplicamos el teorema de Pitágoras dos veces para el vector: $v = (v_1, v_2, v_3) \in R^3$ entonces se tiene que:

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}}$$

Distancia de un Vector en R^3

Si se tiene los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ entonces la distancia entre ellos estará dada por:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Ejemplos:

1) Dados el siguiente vector hallar su norma

$$v=(-3,2,1)$$
$$\|v\|=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}$$

$$\boxed{\|v\|=\sqrt{14}}$$

2) Dados los siguientes puntos:

$P_1(2.-1,-5)$
$P_2(4,-3,1)$

Calcular su distancia entre ellos y graficar el vector

a) $d=?$

b) Gráfica

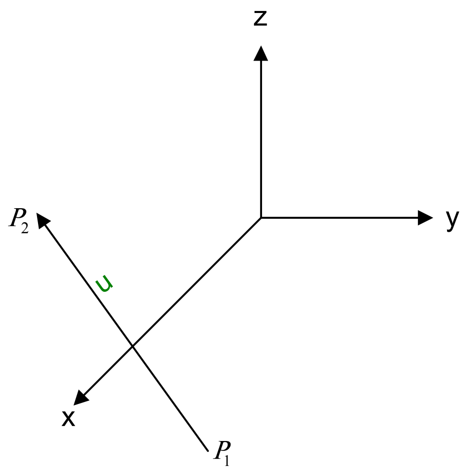
Solución:

a)

$$\mathrm{d}=\sqrt{(4-2)^2+(-3+1)^2+(1+5)^2}$$
$$\mathrm{d}=\sqrt{4+4+36}$$

$$\boxed{\mathrm{d}=2\sqrt{11}}$$

b)


z
y
x
P_2
P_1
u

Ejercicios:

1) Dados los siguientes vectores calcular la distancia entre ellos y graficar.

a) $P_1(2,3), P_2(4,6)$

b) $P_1(-2,7), P_2(0,-3)$

c) $P_1(8,-4,2), P_2(-6,-1,0)$

d) $P_1(1,1,1), P_2(-6,-7,3)$

Respuesta:

a) $d = \sqrt{13}$

b) $d = \sqrt{104}$

c) $d = \sqrt{93}$ $d = \sqrt{209}$

d)

2) Dados los siguientes vectores:

$$u = (1,-3,2)$$
$$v = (1,1,0)$$
$$w = (2,2,-4)$$

Calcular:

a) $\|u + v\| = ?$

b) $\|u\| + \|v\| = ?$

c) $\|-2u\| + 2\|u\| = ?$

d) $\|3u - 5v + w\| = ?$

e) $\frac{1}{\|w\|} * w = ?$

f) $\left\| \frac{1}{\|w\|} * w \right\| = ?$

Respuestas:

a) $\|u + v\| = 2\sqrt{3}$

b) $\|u\| + \|v\| = 4$

c) $\|-2u\| + 2\|u\| = 8\sqrt{7}$

d) $\|3u - 5v + w\| = 2\sqrt{37}$

e) $\frac{1}{\|w\|} * w = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$

f) $\left\| \frac{1}{\|w\|} * w \right\| = \frac{2}{\sqrt{6}}$

Unidad N° 4: Espacios Vectoriales

Competencias

Al finalizar la unidad el estudiante desarrollará las siguientes competencias:

1°) Aplica las propiedades de los espacios vectoriales en las demostraciones

2°) Demuestra si un vector forma o no un espacio vectorial

3°) Demuestra si una matriz forma o no un espacio vectorial

4°) Demuestra si un polinomio forma o no un espacio vectorial.

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial real es un conjunto de elementos denominados vectores, junto con dos operaciones de adición y multiplicación por escalar.

Por **adición** se entiende que dados dos vectores “u” y “v” en V, existe una regla para determinar un objeto (u + v) el cual es llamado la suma del vector u y el vector v.

Por **multiplicación** por un escalar se entenderá que dado un vector u y un número Real “α”, hay una regla para determinar un objeto ($\alpha \cdot u$) llamado multiplicación por escalar de un vector “u” por el número Real “α” diferente de cero.

Las propiedades que se deben cumplir en las demostraciones de los espacios vectoriales son las siguientes:

1º) $(u+v)+w = u+(v+w)$	Asociativa	**Grupo Abeliano**	$(V,+,\cdot)$ **Espacio Vectorial**
2º) $u+e=u$	Neutro		
3º) $u+X=e$	Inverso		
4º) $u+v=v+u$	Conmutativa		
5º) $\alpha \cdot (u+v) = (\alpha \cdot u + \alpha \cdot v)$	Distributiva del Escalar		
6º) $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$	Distributiva del Vector		
7º) $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$	Asociativa del Escalar		

Ejemplos:

1) Sea V el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de números Reales. Donde:
La suma de vectores esta definida de la siguiente manera: $(x, y)+(a, b)=(x+a, y+b)$ y la multiplicación por escalar esta definida de la siguiente manera $\alpha \cdot (x, y)=(0,0)$, verificar si "V" forma o no un espacio vectorial.

Solución:

1º) Asociativa

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

$$u=(a,b)$$
$$v=(c,d)$$
$$w=(e,f)$$

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$
$$(a+c,b+d)+(e,f)=(a,b)+(c+e,d+f)$$
$$(a+c+e,b+d+f)=(a+c+e,b+d+f)$$

Cumple!

2º) Neutro

$$u+e=u$$
$$e=(x,y)$$
$$(a,b)+(x,y)=(a,b)$$
$$(a+x,b+y)=(a,b)$$

$a+x=a$	$b+y=b$
$x=a-a$	$y=b-b$
$x=0$	$y=0$

$$e=(0,0)$$

Cumple!

3º) Inverso

$$X=(x,y)$$
$$u+X=e$$

$$a + x = 0 \qquad b + y = 0$$
$$x = -a \qquad y = -b$$

$$X = (-a, -b)$$

Cumple!

4º) Conmutativa

$$u + v = v + u$$
$$(a, b) + (c, d) = (c, d)(a, b)$$
$$(a + c, b + d) = (c + a, d + b)$$
$$(a + c, b + d) = (a + c, b + d)$$

Cumple!

5º) Distributiva del Escalar

$$\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u + \alpha \cdot v)$$
$$\alpha[(a, b) + (c, d)] = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$$
$$\alpha[a + c, b + d] = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$$
$$(0,0) = (0,0) + (0,0)$$
$$(0,0) = (0,0)$$

Cumple!

6º) Distributiva del Vector

$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$$
$$(\alpha + \beta) \cdot (a, b) = \alpha \cdot (a, b) + \beta \cdot (a, b)$$
$$\varphi \cdot (a, b) = \alpha \cdot (a, b) + \beta \cdot (a, b)$$
$$(0,0) = (0,0) + (0,0)$$
$$(0,0) = (0,0)$$

Cumple!

7º) Asociativa del Escalar

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot (a, b) = \alpha \cdot [\beta \cdot (a, b)]$$
$$\varphi \cdot (a, b) = \alpha \cdot [\beta \cdot (a, b)]$$
$$(0,0) = \alpha \cdot (0,0)$$
$$(0,0) = (0,0)$$

Cumple!

$(V,+,\cdot)$ Al cumplir las propiedades, V es un espacio vectorial.

2) Si se tiene el espacio V donde la suma de los vectores en R^2, se define de la siguiente manera: $(x,y)+(a,b)=(x+a,y+b)$ y la multiplicación por escalar esta definida de la siguiente manera $\alpha(x,y)=(\alpha y,\alpha x)$, verificar si "V" forma o no un espacio vectorial.

<u>Solución</u>

1º) Asociativa

$$(u+v)+w=u+(v+w)$$

$$u=(a,b)$$
$$v=(c,d)$$
$$w=(e,f)$$

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$
$$(a+c,b+d)+(e,f)=(a,b)+(c+e,d+f)$$
$$(a+c+e,b+d+f)=(a+c+e,b+d+f)$$

Cumple!

2º) Neutro

$$u+e=u \qquad e=(x,y)$$

$$(a,b)+(x,y)=(a,b)$$
$$(a+x,b+y)=(a,b)$$

$a+x=a$	$b+y=b$
$x=a-a$	$y=b-b$
$x=0$	$y=0$

$e=(0,0)$ *Cumple!*

3º) Inverso

$$u+X=e \qquad X=(x,y)$$

$$(a,b)+(x,y)=(0,0)$$
$$(a+x,b+y)=(0,0)$$

$a+x=0$	$b+y=0$
$x=-a$	$y=-b$

$X=(-a,-b)$ *Cumple*

5º) Distributiva del Escalar

$$\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u + \alpha \cdot v)$$

$$\alpha [(a, b) + (c, d)] = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$$

$$\alpha [a + c, b + d] = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b) + (\alpha \cdot c, \alpha \cdot d)$$

$$(\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d)$$

Cumple!

6º) Distributiva del vector

$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$$

$$(\alpha + \beta) \cdot (a, b) = \alpha \cdot (a, b) + \beta \cdot (a, b)$$

$$(\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b)$$

$$(\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$$

Cumple!

7º) Asociativa del Escalar

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot (a, b) = \alpha \cdot [\beta \cdot (a, b)]$$

$$\varphi \cdot (a, b) = \alpha \cdot [\beta \cdot (a, b)]$$

$$(\varphi b, \varphi a) = \alpha \cdot [\beta b, \beta a]$$

$$(\varphi b, \varphi a) = (\alpha \beta a, \alpha \beta b)$$

$$(\varphi b, \varphi a) = (\varphi a, \varphi b)$$

No Cumple!

$(V, +, \cdot)$ Por lo tanto V, no forma un espacio vectorial.

3) Sea el espacio $V = M_{2x2}$, el conjunto de todas las matrices de orden 2x2 donde la suma de matrices es habitual y la multiplicación de un escalar por una matriz esta definido de la siguiente manera:

$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$. Verificar si V forma un espacio vectorial.

<u>Solución</u>:

1º) Asociativa

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}; B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2}; C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2}\right\} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2} + \left\{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}_{2*2}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}_{2*2} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2} + \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{bmatrix}_{2*2}$$

Cumple!

2º) Neutro

$$A + e = A$$

$$e = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}_{2*2} \quad \Big| \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{aligned} a+x &= a \\ x &= a-a \\ x &= 0 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} b+y &= b \\ y &= b-b \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$c+z=c \qquad\qquad d+w=d$$
$$z=c-c \qquad\qquad w=d-d$$
$$z=0 \qquad\qquad w=0$$

Cumple!

3º) Inverso

$$\mathrm{A}+\mathrm{X}=\mathrm{e}$$

$$X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}_{2*2} \qquad X=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}+\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$
$$\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$a+x=0 \qquad\qquad b+y=0$$
$$x=-a \qquad\qquad y=-b$$
$$c+z=0 \qquad\qquad d+w=0$$
$$z=-c \qquad\qquad w=-d$$

Cumple!

4º) Conmutativa

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}$$
$$\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix}_{2*2}$$
$$\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}_{2*2}$$

Cumple!

5º) Distributiva del Escalar

$$\alpha\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})=(\alpha\cdot\mathrm{A}+\alpha\cdot\mathrm{B})$$

$$\alpha\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2}\right\}=\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}+\alpha\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

Cumple!

6º) Distributiva de la matriz

$$(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{A}=\alpha\cdot \mathrm{A}+\beta\cdot \mathrm{A}$$

$$\varphi*\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}=\alpha*\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}+\beta*\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

Cumple!

7º) Asociativa del Escalar

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot \mathrm{A}=\alpha\cdot(\beta\cdot \mathrm{A})$$

$$\varphi*\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}=\alpha*\left\{\beta*\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}=\alpha*\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

Cumple!

Por lo tanto $(V=M_{2*2},+,*)$ es un espacio vectorial.

Ejercicios

1) Sea “V” el conjunto de todas las matrices de orden 2 x 2 que tengan componentes Reales, donde la suma y la multiplicación por escalar están definidas de la siguiente manera:

Suma: $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} a+e & 0 \\ 0 & d+h \end{bmatrix}_{2*2}$$

Multiplicación: $$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha b \\ \alpha c & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

Verificar si V es o no un espacio vectorial.

2) Sea el espacio $V = M_{2x2}$ donde las operaciones de suma y multiplicación están definidas de la siguiente manera:

Suma: $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} a+e & 0 \\ 0 & d+h \end{bmatrix}_{2*2}$$

Multiplicación: $$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2*2} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}_{2*2}$$

Verificar si V es o no un espacio vectorial.

3) Dado el conjunto de matrices de orden 2 x 2, donde las operaciones de suma y multiplicación por escalar son las operaciones habituales y la matriz de orden 2 x 2 tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}_{2*2}$$

Verificar si V es o no un espacio vectorial.

Unidad nº 4: Transformaciones Lineales

Competencias

Al finalizar la unidad el estudiante desarrollará las siguientes competencias:

1°) Aplica la definición de transformaciones lineales en la resolución de problemas

2°) Aplica los teoremas de transformaciones lineales en las demostraciones

3°) Realiza demostraciones con vectores, matrices y polinomios.

Definición

Sean los espacios $(V,+,*,R)$ y $(W,+,*,R)$, dos espacios vectoriales donde “A” es una función de “A” definida como $f: v \to w$; se dice que esta es una transformación lineal siempre y cuando cumpla las siguientes propiedades:

1º) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ Para todo vector “u” y “v” en V.

2º) $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u)$ Para todo vector u en V y todo escalar alpha “α” en R.

$\alpha \in R$ y es diferente de cero.

Ejemplos:

1) Si: $v = R^2$ y $w = R^2$. Los cuales son dos espacios vectoriales y la relación $f: R^2 \to R^2$ esta definida de la siguiente manera: $f(a,b) = (a+b, a)$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

Solución:

1º) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$u = (a,b)$$
$$v = (c,d)$$

$$f[(a,b)+(c,d)] = f(a,b) + f(c,d)$$
$$f[a+c, b+d] = f(a,b) + f(c,d)$$
$$[a+c+b+d, a+c] = (a+b, a) + (c+d, c)$$
$$[a+c+b+d, a+c] = [a+c+b+d, a+c]$$

Cumple!

2º) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

$$f[\alpha \cdot (a,b)] = \alpha \cdot f(a,b)$$
$$f[\alpha a, \alpha b] = \alpha \cdot f(a,b)$$
$$(\alpha a + \alpha b, \alpha a) = \alpha(a+b, a)$$
$$(\alpha a + \alpha b, \alpha a) = (\alpha a + \alpha b, \alpha a)$$

Cumple!

Entonces " f" Es una transformación lineal.

2) Si: $v = R^2$ y $w = R^2$. Los cuales son dos espacios vectoriales y la relación $f : R^2 \rightarrow R^2$ esta definida de la siguiente manera: $f(x, y) = (2x, y)$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

1º) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$u = (a, b)$$
$$v = (c, d)$$
$$f[(a,b)+(c,d)] = f(a,b) + f(c,d)$$
$$f[a+c, b+d] = f(a,b) + f(c,d)$$
$$[2(a+c), b+d] = (2a, b) + (2c, d)$$
$$[2a+2c, b+d] = [2a+2c, b+d]$$

Cumple!

2º) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

$$f[\alpha \cdot (a,b)] = \alpha \cdot f(a,b)$$
$$f[\alpha a, \alpha b] = \alpha \cdot f(a,b)$$
$$[2\alpha a, \alpha b] = \alpha \cdot (2a, b)$$
$$[2\alpha a, \alpha b] = [2\alpha a, \alpha b]$$

Cumple!

Entonces " f" Es una transformación lineal

3) Si; $v = R^2$ y $w = R^2$. Los cuales son dos espacios vectoriales y la relación $f : R^2 \rightarrow R^2$ esta definida de la siguiente manera: $f(x, y) = (x+1, y+2)$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

1º) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$u = (a, b)$$
$$v = (c, d)$$
$$f[(a,b)+(c,d)] = f(a,b) + f(c,d)$$
$$f[a+c, b+d] = f(a,b) + f(c,d)$$
$$[a+c+1, b+d+2] = (a+1, b+2) + (c+1, d+2)$$
$$[a+c+1, b+d+2] \neq [a+c+2, b+d+4]$$

No Cumple!

Entonces " f" No es una transformación lineal.

Ejercicios Resueltos

1) Si se tiene: $f : M_{2*1} \rightarrow M_{3*1}$ la cual está definida como:

$$f\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \\ 3b \end{bmatrix}_{3\times 1}$$ .Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

Solución

1º) $f(A+B) = f(A) + f(B)$

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2*1} \quad B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}_{3*1}$$

$$f\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2*1} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}_{2*1}\right\} = f\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2*1} + f\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}_{2*1}$$

$$f\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}_{2*1} = f\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2*1} + f\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}_{2*1}$$

$$\begin{bmatrix} a+c+b+d \\ a+c-b-d \\ 3b+3d \end{bmatrix}_{3*1} = \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \\ 3b \end{bmatrix}_{3*1} + \begin{bmatrix} c+d \\ c-d \\ 3d \end{bmatrix}_{3*1}$$

$$\begin{bmatrix} a+c+b+d \\ a+c-b-d \\ 3b+3d \end{bmatrix}_{3*1} = \begin{bmatrix} a+c+b+d \\ a+c-b-d \\ 3b+3d \end{bmatrix}_{3*1}$$

Cumple!

2º) $f(\alpha A) = \alpha\, f(A)$

$$f\left\{\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2*1}\right\} = \alpha * f\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2*1}$$

$$f\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}_{2*1} = \alpha * f\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2*1}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b \\ 3\alpha b \end{bmatrix}_{3*1} = \alpha * \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \\ 3b \end{bmatrix}_{3*1}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b \\ 3\alpha b \end{bmatrix}_{3*1} = \begin{bmatrix} \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b \\ 3\alpha b \end{bmatrix}_{3*1}$$

Cumple!

Entonces " f" Es una transformación lineal

2) Si se tiene " f" la cual está relacionada de la siguiente manera: $f : R^3 \rightarrow R$ donde " f " se define de la siguiente forma: $f(a,b,c) = 2a - 3b + 4c$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

1º) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$x = (a,b,c)$$
$$y = (d,e,f)$$
$$f[(a,b,c) + (d,e,f)] = f(a,b,c) + f(d,e,f)$$
$$f[a+d, b+e, c+f] = f(a,b,c) + f(d,e,f)$$
$$2\cdot(a+d) - 3\cdot(b+e) + 4\cdot(c+f) = (2a - 3b + 4c) + (2d - 3e + 4f)$$
$$2a + 2d - 3b - 3e + 4c + 4f = 2a + 2d - 3b - 3e + 4c + 4f$$

Cumple!

2º) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

$$f[\alpha\cdot(a,b,c)] = \alpha\cdot f(a,b,c)$$
$$f(\alpha a, \alpha b, \alpha c) = \alpha\cdot f(a,b,c)$$
$$2\alpha a - 3\alpha b + 4\alpha c = \alpha(2a - 3b + 4c)$$
$$2\alpha a - 3\alpha b + 4\alpha c = 2\alpha a - 3\alpha b + 4\alpha c$$

Cumple!

Entonces " f" Es una transformación lineal.

3) Si se tiene " f" la cual se define como $f : R^2 \rightarrow R^2$ donde esta definida de la siguiente manera:

$$f(x,y) = (x, y+1)$$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

1º) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$x = (m,n)$$
$$y = (o,p)$$

$$f[(m,n)+(o,p)] = f(m,n)+f(o,p)$$
$$f(m+o,n+p) = f(m,n)+f(o,p)$$
$$(m+o,n+p+1) = (m,n+1)+(o,p+1)$$
$$(m+o,n+p+1) = (m+o,n+p+2)$$

No Cumple!

Entonces “ f” No es una transformación lineal.

Ejercicios para Realizar por el Estudiante

1) Sea f una relación como: $f: R^2 \rightarrow R^2$ la cual esta definida de la siguiente manera:

$$f(x,y) = (2x+y, x-y)$$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

2) Sea f una relación como: $f: R^3 \rightarrow R^2$ la cual está definida de la siguiente manera:

$$f(x,y,z) = (zx+y, 3y-4z)$$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

3) Sea f una relación como: $f: R^3 \rightarrow R^2$ la cual está definida de la siguiente manera:

$$f(x,y,z) = (x, x+y+z)$$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

4) Sea f una relación como: $f: R^3 \rightarrow R^2$ la cual está definida de la siguiente manera:

$$f(x,y,z) = (1,1)$$

Verificar si esta relación forma o no una transformación lineal.

5) Sea: $f: M_{2x2} \rightarrow R$. La cual está definida de la siguiente manera: $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a+d$

Verificar si “f” es una transformación lineal.

6) Sea: $f: M_{2x2} \to R$. La cual está de finida de la siguiente manera:

$f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 2a + 3b + c - d$. Verificar si “f” es una transformación lineal.

7) Sea: $f: M_{2x2} \to R$. La cual está de finida de la siguiente manera: $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a^2 + b^2$.

Verificar si “f” es una transformación lineal.

Respuestas

1) f Es una transformación lineal
2) f Es una transformación lineal
3) f Es una transformación lineal
4) f No es una transformación lineal
5) La respuesta queda para responder por el estudiante
6) La respuesta queda para responder por el estudiante
7) La respuesta queda para responder por el estudiante

Unidad Nº 6: Valores y Vectores Propios

Competencias

Al finalizar la unidad el estudiante desarrolla las siguientes competencias:

1°) Aplica la ecuación característica para calcular los valores propios de una matriz
2°) Utiliza las propiedades de los valores propios para resolver problemas
3°) Resuelve sistemas de ecuaciones utilizando matrices para calcular los vectores propios de una matriz.
4°) Aplica los vectores propios en la diagonalización de matrices.

Valores Propios

Si se tiene una matriz cuadrada de orden "n" y un escalar Lamdha "λ". Entonces el valor propio de una matriz "A" sera aquel que cumpla la siguiente igualdad

$$\boxed{\det\left(A - \lambda I_n\right) = 0}$$

Por lo tanto la expresion $\det\left(A - \lambda I_n\right) = 0$ se denominara "Ecuacion Caracteristica" siempre y cuando se cumpla que "A" sea una matriz caudarada, de orden n x n , y λ € R.

Ejemplos:

1) Calcular el valor propio de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Primeramente multiplicamos el escalar por la matriz Identidad de orden 2x2

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$ Luego realizamos la suma correspondiente

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$ Igualando a cero

det = $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ Ecuacion Caracteristica

$\det = (3-\lambda)\ (-\lambda) - (-1)(2) = 0$ Hallamos el determinante.

$= -3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ Resolviendo la ecaución de segundo grado

$= (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ Factorizando.

$\boxed{\lambda = 2}$ $\boxed{\lambda = 1}$ Valores Propios de "A"

2) Calcular el valor propio de la siguiente matriz

B = $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

D - λI_2 = $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$

$= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$

D - λI_2 = $\begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

det = $\begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

det = $(-2-\lambda)\ (2-\lambda) - (5)(-1) = 0$

$-4 + 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 5 = 0$

$\lambda^2 - 4 + 5 = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\boxed{\lambda = \pm\sqrt{-1}}$ Por ser un número imaginario, se dice que no existen valores propios de B.

3) Calcular los valores propios de la siguiente matriz

$$c = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$ Multiplicando por la matriz Identidad.

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$ Sumando matrices

$$C- \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$ Calculando el determinante

$$(4 - \lambda) \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det = (4-\lambda) \left[(2-\lambda)(2-\lambda) - 3 \right] = 0$$

$$(4-\lambda) \left[4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 3 \right] = 0$$

$$(4-\lambda) \left[\lambda^2 - 4\lambda + 1 \right] = 0$$

$$\left[\lambda^2 - 4\lambda + 1\right] = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - 4\,(1)\,(1)}}{2\,(1)}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\cancel{2}\,\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{\cancel{2}}$$

$$\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

$$-\lambda = -4 \qquad (-1)$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\boxed{\lambda_1 = 4} \qquad \boxed{\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}} \qquad \boxed{\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}}$$

Valores Propios de “C”

4) Calcular los valores propios de la siguiente matriz.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Multiplicando por el escalar

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$ Sumando matrices

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$ Hallando el determinante

$$-2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} - (1-\lambda) \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$- \quad 2(0) - (1-\lambda)\left[(4-\lambda) \quad (1-\lambda) + 2 \right]$$

$$0 - (1-\lambda)\left[(4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 \right]$$

$$(-\ 1 + \lambda)(\ \lambda^2 - 5\lambda + 6\ ) = 0$$ Igualando a cero y resolviendo

$$\lambda = 1 \qquad (\lambda - 3 \quad) \quad (\lambda - 2) = 0$$

$$\boxed{\lambda = 1} \qquad \boxed{\lambda = 3} \qquad \boxed{\lambda = 2}$$ Valores Propios de "D"

Vectores Propios

Si se sabe que λ es un valor propio de la matriz "A", entonces el conjunto solución del sistema de ecuaciones $(A-\lambda.I)X=0$ se denomina espacio característico de la matriz "A" que corresponde a λ, y los vectores diferentes de cero; en el espacio característico se denominan vectores propios de la matriz "A" correspondientes a λ.

Ejemplos:

1. Calcular los valores y los vectores propios de la siguiente matriz.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Calculamos primeramente los valores propios de la matriz.

$$A-\lambda.I=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A-\lambda.I=\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$(5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(5-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda)-4]=0$$
$$(5-\lambda)[9-3\lambda-3\lambda+\lambda^2-4]=0$$

$$(5-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)=0$$

$$(5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1)=0$$

Entonces los valores propios de la matriz son los siguientes:

$\boxed{\lambda_1 = 5}$ $\boxed{\lambda_2 = 5}$ $\boxed{\lambda_3 = 1}$

<u>Ahora calculamos los vectores propios</u>.

$(A-\lambda.I)X=0$. Reemplazando el valor de λ en esta ecuación se tiene:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primeramente hacemos el cálculo para $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Planteando el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Ahora debemos escalonar la matriz resultante del sistema de ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] A_{12}(1) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] M_1\left(\frac{1}{2}\right) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] P_{23} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_2\left(\frac{1}{4}\right) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Matriz en su forma escalonada reducida.

Ahora se tiene:

$x_1 - x_2 = 0$
$x_3 = 0$ Entonces: $x_1 = x_2$ y $x_3 = 0$

Se asume que $x_2 = t$ Entonces se tiene: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Por lo tanto: $E(\lambda = 1) = \{(t, t, 0) / t \in \Re\}$

Ahora los vectores propios para $\lambda = 1$ son los siguientes:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Es el vector propio de "A" asociado a $\lambda = 1$.

Luego realizamos el mismo cálculo para $\lambda = 5$. Seguimos el mismo procedimiento.

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Planteando el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Escalonando el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] A_{12}(-1) \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_1\left(-\frac{1}{2}\right) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Matriz escalonada reducida

Entonces: $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

Si asumimos que $x_2 = t \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = k \end{cases}$

Por lo tanto: $E(\lambda = 5) = \{(-t, t, k) t, k \in \Re\}$

Es así que los vectores propios para $\lambda = 5$ son los siguientes:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces: $P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Estos son los vectores propios.

Aquí se puede observar que la raíz múltiple $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ genera dos vectores propios.

Finalmente los vectores propios de la matriz "A" son los siguientes:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios para realizar por el estudiante

Dadas las siguientes matrices: calcular los vectores propios.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 9 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Practico N° 1

Dadas las siguientes matrices:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$Calcular:$

$a)\ AB$ $b)\ A(B+C)$ $c)\ AB+AC$

$\text{Re}\ spuestas:$

$$a)\quad AB = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 15 & 0 & 1 \\ -3 & 15 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$b)\quad A(B+C) = \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & -2 \\ 2 & 30 & 0 & -4 \\ -6 & 30 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad AB+AC = \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & -2 \\ 2 & 30 & 0 & -4 \\ -6 & 30 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

2) Dadas las siguientes matrices

$$Calcular \quad las \quad Potencias \quad Indicadas \quad A^2 \quad ,B^3 \quad ,C^4.$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Re}\ spuestas$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^4. = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Dadas las siguientes matrices.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 4 & 2\\ 8 & 6\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$Calcular:$

$$a)\quad D.B \qquad b)\quad A^t D \qquad C)\quad D^t.D \qquad d)\quad 2D-(B.C)^t$$

$\text{Re}\,spuestas.$

$$a)\quad D.B \quad = \quad \begin{bmatrix}5\\ 2\\ 6\end{bmatrix}_{3*1}$$

$$b)\quad A^t D \quad = \quad \begin{bmatrix}10 & 14 & 8\\ 13 & 15 & 6\end{bmatrix}_{2*3}$$

$$C)\quad D^t.D \quad = \quad \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}_{3*3}$$

$$d)\quad 2D-(B.C)^t \quad = \begin{bmatrix}-14 & -9 & -5\\ -5 & -3 & -2\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}_{3*3}$$

4) Calcular las determinantes de las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 9\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix} \qquad\qquad \det(A)=-1$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} \qquad \det(B)=0$$

$$C=\begin{bmatrix}5 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix} \qquad \det(C)=21$$

$$D=\begin{bmatrix}0 & a & 0\\ a & a & a\\ 0 & a & 0\end{bmatrix} \qquad \det(D)=0$$

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 8\\ 7 & 1 & 4 & 2\\ 6 & 2 & 2 & 9\\ 3 & 1 & 1 & 5\end{bmatrix} \qquad \det(E)=1$$

$$F=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix} \qquad \det(F)=0$$

5) *Dadas las Siguientes Matrices.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular:

$a)\ \det(A - 2AB - B^t) \qquad b)\ A + B^t.\det A - \dfrac{AB}{\det(AB)}$

Re*spuestas*:

$a)\ \det(A - 2AB - B^t)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -\frac{17}{2} & 4 & -39 \\ -64 & 26 & -23 \end{bmatrix}$$

$b)\ A + B^t.\det A - \dfrac{AB}{\det(AB)}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{603819}{2660} & \frac{16979}{560} & \frac{251561}{760} \\ \frac{111723}{2660} & \frac{420279}{5320} & -\frac{601149}{2660} \\ \frac{120761}{532} & \frac{329835}{2128} & \frac{835253}{5320} \end{bmatrix}$$

PRACTICO Nº 2

1) Hallar la matriz adjunta de las siguientes matrices

$a)$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 2\\4 & 9 & 3\\2 & 5 & 6\end{bmatrix} \qquad \rightarrow A^{*}=\begin{bmatrix}39 & -18 & 2\\-32 & 2 & 9\\3 & 5 & -19\end{bmatrix}$$

$b)$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 5 & 4\\0 & 0 & 7\end{bmatrix} \qquad \rightarrow B^{*}=\begin{bmatrix}35 & 0 & 0\\-7 & 14 & 0\\-11 & -8 & 10\end{bmatrix}$$

$c)$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\2 & 9 & 8\\7 & 5 & 4\end{bmatrix} \qquad \rightarrow C^{*}=\begin{bmatrix}-4 & 48 & -53\\-1 & -17 & 23\\5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$d)$

$$D^{*}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\2 & 7 & 5\\4 & 9 & 6\end{bmatrix} \qquad \rightarrow D^{*}=\begin{bmatrix}-3 & 8 & -10\\0 & -2 & 3\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

2) *Dada la Siguiente Matriz*:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 1\\ 8 & -3 & 2\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix} \qquad \rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3}\\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{23}{6}\end{bmatrix} \qquad \det(A^{-1})=\frac{1}{6}$$

3) *Dadas las Siguientes Matrices*:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 4\\ 4 & -6 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}7 & 4 & 1\\ 4 & 3 & -7\\ 5 & -3 & 7\end{bmatrix}$$

Calcular:

$a)\ (AB)^*$ $\qquad b)\ A^*.B^*$ $\qquad c)$ *Conclusion*

Re*spuestas*:

$$a)\quad (AB)^*=\begin{bmatrix}806 & -5014 & -1210\\ -1116 & 5508 & 1404\\ -527 & 2755 & 481\end{bmatrix}$$

$$b)\quad A^*.B^*=\begin{bmatrix}806 & -5014 & -1210\\ -1116 & 5508 & 1404\\ -527 & 2755 & 481\end{bmatrix}$$

$c)$ *Conclusion*

4) *Dadas las Siguientes Matrices.*

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 8\\ 0 & 3 & -3\\ -2 & 3 & -3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Demostrar Que:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

5) Calcular la inversa de las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 9 & 9 & 7\\ 5 & 5 & 4\end{bmatrix} \rightarrow \quad A^{-1}=\begin{bmatrix}199 & 198 & 40\\ -234 & -234 & -47\\ 45 & 45 & 9\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \rightarrow \quad C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & \frac{7}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 6\end{bmatrix} \rightarrow \quad \text{No se puede sacar inversa porque su determinante es "0"}$$

$$E=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 2\\ 3 & 4 & 7 & 3\\ 2 & 3 & 5 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \quad \text{Es para resolver por el estudiante}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow L^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$