Pauta Control 1 MA1102
Algebra Lineal (2010-2)
Problema 1

a) Escalonando la matriz aumentada asociada al sistema se tiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\beta(1)-(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & -\beta & -\alpha\beta-\alpha & -\beta^2 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

0.5

$$\rightarrow \xrightarrow{\beta(2)+(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha\beta-\beta \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \beta^2 & \alpha\beta \end{array}\right) \xrightarrow{\beta(3)+(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha\beta-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 & \alpha\beta^2-\beta^2+\alpha\beta \end{array}\right)$$

1.0

a1) Si $\alpha=\beta=0$ existen infinitas soluciones pues en la tercera y cuarta filas se producen solo ceros (2 variables libres)
Si $\alpha\neq 0$ y $\beta=0$ también existen existen infinitas soluciones pues en la cuarta fila se producen solo ceros (1 variable libre)

1.0

a2) Si $\alpha=0$ y $\beta\neq 0$ no existe solución pues en la fila 3 se produce una igualdad imposible $(0=-\beta\neq 0)$

1.0

a3) Si $\alpha\neq 0 \wedge \beta\neq 0$ el escalonamiento es perfecto y existe solución única.

1.0

b) Si $\alpha=-1$ y $\beta=-1$, es decir $\alpha\neq 0 \wedge \beta\neq 0$ el sistema $Ax=b$ tiene solución única y A es invertible.

Para determinar la inversa formamos $(A|I)$ y escalonamos

$$(A|I) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)+(3)]{\text{Pivoteando sobre la diagonal}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

0.5

$$\xrightarrow{(1)+(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)-(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Premultiplicando por la matriz invertible $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

obtenemos $(I|A^{-1})$ de donde $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.0

Pauta Problema 2

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ se define $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$

a) Probar que A es antisimétrica

En efecto $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} = -A$

1.0 → Es decir $A = -A^T$ con lo que A es antisimétrica.

b) Probar que A no es invertible.

Recordar que A es invertible si y solo si $\forall r \in \mathbb{R}^3$ el sistema $Ax = r$ tiene solución única.

0.5 →

Escalonando la matriz A se obtiene.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)c+(2)b} \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -ab & ac & 0 \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(3)a} \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -ab & ac & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.0 →

Como la tercera fila son solo ceros cualquier sistema $Ax = r$ tiene infinitas soluciones o no existen, pero en ningún caso es única. Sigue que A nunca es invertible.

0.5 →

c) Mostrar que $M = A^2 + I_3$ es simétrica.

M es simétrica si $M = M^T$.

$M^T = (A^2 + I_3)^T = (A^2)^T + I_3^T = A^T A^T + I_3^T$

0.5 →

pero $A^T = -A \wedge I_3^T = I$

Sigue que $M^T = (-A)(-A) + I_3 = A^2 + I_3 = M$

Así, M es simétrica.

0.5 →

d) Si $a^2+b^2+c^2=1$, entonces $M^2=M$ (M es idempotente)

donde $M = A^2 + I_3$

Entonces $M = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -a^2-b^2 & bc & ac \\ bc & -a^2-c^2 & ab \\ ac & ab & -b^2-c^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a^2-b^2 & bc & ac \\ bc & 1-a^2-c^2 & ab \\ ac & ab & 1-b^2-c^2 \end{pmatrix}$$

y usando $a^2+b^2+c^2=1$ se tiene que $M = \begin{pmatrix} c^2 & bc & ac \\ bc & b^2 & ab \\ ac & ab & a^2 \end{pmatrix}$

0.5 $\longrightarrow$

Entonces $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} c^2 & bc & ac \\ bc & b^2 & ab \\ ac & ab & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^2 & bc & ac \\ bc & b^2 & ab \\ ac & ab & a^2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} c^2(c^2+b^2+a^2) & bc(c^2+b^2+a^2) & ac(c^2+b^2+a^2) \\ bc(c^2+b^2+a^2) & b^2(c^2+b^2+a^2) & ab(c^2+b^2+a^2) \\ ac(c^2+b^2+a^2) & ab(c^2+b^2+a^2) & a^2(c^2+b^2+c^2) \end{pmatrix}$$

y como $a^2+b^2+c^2=1$

1.5 $\longrightarrow$ $M^2 = \begin{pmatrix} c^2 & bc & ac \\ bc & b^2 & ab \\ ac & ab & a^2 \end{pmatrix} = M$

Pauta Problema 3

a) $\tilde{\pi}: x+y+z=4$ $\quad L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

a1) Probar que $L_1 \subseteq \pi$, es decir que la recta L_1 esta contenida en el plano π

Esto es inmediato pues todo punto de L_1 es de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ y satisface el plano π

(1.0) $\longrightarrow$ $x+y+z = (4+t)+(-t)+0 = 4.$

a2) Encontrar $Q = L_2 \cap \tilde{\pi}$

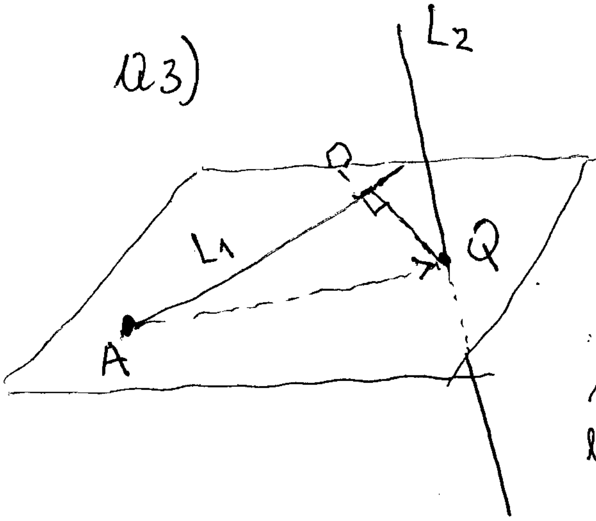
Cualquier punto de L_2 es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 2s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

El punto estará en $\tilde{\pi}$ si $x+y+z = s+s+2s = 4$

es decir $4s = 4$ de donde $s = 1$

(1.0) $\longrightarrow$ Sigue que $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es el punto común a L_2 y $\tilde{\pi}$

a3)



Considerando $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ punto posición de L_1 y $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = L_2 \cap \overline{\pi}$ y

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vector director de L_1

Se sabe que r_p, vector asociado al punto P (Proyección de Q sobre L_1) está dado por:

$$r_p = \langle q-a, \hat{x} \rangle \hat{x} + a$$

donde $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Así, $r_p = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

1.0 $\rightarrow$

$$= \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-4)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Entonces $r_p = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

La distancia de Q a L_1 es $\|P-Q\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6}$

1.0 $\rightarrow$ La distancia de Q a L_1 es $\sqrt{6}$

b) $W_a = \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(A) = a \}$

($\Rightarrow$) Sean $A, B \in W_a$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Por demostrar que $(\lambda_1 A + \lambda_2 B) \in W_a \Rightarrow a = 0$

Previo veamos que $Tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda\, Tr(A)$

Sigue que $(\lambda_1 A + \lambda_2 B) \in W_a \Leftrightarrow Tr(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = a$

$\Leftrightarrow \lambda_1 Tr(A) + \lambda_2 Tr(B) = a \Leftrightarrow \lambda_1 a + \lambda_2 a = a$

1.5 $\rightarrow$ $\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)\, a = a \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Pero esto último solo es cierto $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ si $a = 0$

($\Leftarrow$) Recíprocamente, si $a = 0$, $Tr(A) = T(B) = 0$

Así, $T(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = \lambda_1 Tr(A) + \lambda_2 Tr(B) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

0.5 $\rightarrow$ Sigue que $(\lambda_1 A + \lambda_2 B) \in W_a = W_0$ y W_a es s.e.v de $M_{nn}(\mathbb{R})$