Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 08-1

Control 1

P1. **(a)** Sea P una matriz tal que $P^2 = P$.

(i) (1 pto)Demuestre que para todo $k \in \mathbb{N}, P^k = P$

(ii) (1 pto)Pruebe que si $A = (I - P)$, entonces $A^k = A$ para todo k.

(iii) (1 pto) Pruebe que si $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $||u||=1$, entonces $P = uu^t$ cumple que $P^k = P$.

(b) Un conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto ortogonal si para todo par de indices $i \neq j$, se tiene que $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto ortogonal tal que para todo i, $||x_i|| = 1$.

(i) (1,5 ptos.) Se define

$$x_{r+1} = y - \sum_{k=1}^{r} \langle y, x_k \rangle x_k$$

con $y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}\}$ es un conjunto ortogonal.

(ii) (1,5 ptos.) Demuestre que si existe un conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k = 0$, entonces $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2 \ldots, r\}$.

P2. **(a)** (2,0 ptos) Encuentre la descomposición LDU de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) (4 ptos.) Sea el sistema:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & & + & x_3 & + & (\alpha+5)x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2\alpha+4 \end{array}$$

Encontrar los valores de α y β tal que:

(i) No exista solución.

(ii) Existan infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

(iii) Exista una única solución. Calcule dicha solución para el caso $\alpha = \beta = 1$.

P3. Sea $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene directores $d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) (1,5 ptos) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1.

(ii) (1,5 ptos) Calcule la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$.

(iii) (1,5 ptos) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L.

(iv) (1,5 ptos) Calcule la distancia de P a la recta L.

19 de abril de 2008
Sin consultas
Tiempo: 3:00

Pauta Control 1, Álgebra Lineal, Otoño 2008. MA1B2

P1. (a) **(i)** Haremos la demostración por inducción. Es evidente para $k=1$. Para ver el paso inductivo, suponemos que se cumple para $k=i$, y probamos que se cumple también para $k=i+1$

$$P^{i+1} = P^i \cdot P = P \cdot P = P^2 = P.$$

1,0

Por lo tanto se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Otra vez hacemos la demostración por inducción. Es evidente para $k=1$. Suponemos que se cumple para $k=i$,

$$A^{i+1} = A^k \cdot A = A \cdot A = (I-P)\cdot(I-P) = I - 2P + P^2 = I - P = A.$$

1,0

(iii) Gracias a la parte (i), basta probar que $P^2 = P$ para demostrar lo pedido. Observamos que $u^t u = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 = 1$. Por lo tanto,

$$P^2 = uu^t uu^t = u(u^t u)u^t = uu^t = P$$

1,0

(b) **(i)** Para demostrar que $\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}\}$ es un conjunto ortogonal, basta probar que $\langle x_{r+1}, x_i\rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$ (dado que ya sabemos que $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, r,\ i \neq j$).

$$\langle x_{r+1}, x_i\rangle = \langle y - \textstyle\sum_{k=1}^r \langle y, x_k\rangle x_k, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle - \langle \sum_{k=1}^r \langle y, x_k\rangle x_k, x_i\rangle =$$

$$= \langle y, x_i\rangle - \textstyle\sum_{k=1}^r \langle\, \langle y, x_k\rangle x_k, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle - \sum_{k=1}^r \langle y, x_k\rangle \langle x_k, x_i\rangle$$ ← 0,7

Usando que el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ es ortonormal, concluimos que

$$\langle x_{r+1}, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle - \langle y, x_i\rangle\langle x_i, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle - \langle y, x_i\rangle \underbrace{\|x_i\|^2}_{=1} = 0$$ ← 0,8

(ii) $\sum_{k=1}^r \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \langle \sum_{k=1}^r \alpha_k x_k, x_i\rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Utilizando las propiedades de producto punto que conocemos:

$$0 = \langle \textstyle\sum_{k=1}^r \alpha_k x_k, x_i\rangle = \sum_{k=1}^r \langle \alpha_k x_k, x_i\rangle = \sum_{k=1}^r \alpha_k \langle x_k, x_i\rangle$$ ← 0,8

Como el conjunto de vectores es ortogonal y $\|x_i\|^2 = 1$ obtenemos:

$$0 = \textstyle\sum_{k=1}^r \alpha_k \langle x_k, x_i\rangle = \alpha_i \langle x_i, x_i\rangle = \alpha_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, r.$$ ← 0,7

P2. (a) (Primera forma) Veamos el pivoteo de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to E_{23}(3,1)E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \widetilde{A}$$ (0,7)

En dos pasos llegamos a la matriz escalonada $\widetilde{A}$, que puede ser escrita como el producto de una matriz diagonal y una matriz triangular superior con diagonal de 1's:

$$\widetilde{A} = D \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (0,3)

Y así,

$$A = [E_{23}(3,1)E_{13}(-1,1)]^{-1} \cdot D \cdot U = [E_{13}(1,1) \cdot E_{23}(-3,1)] \cdot D \cdot U.$$

La descomposición LDU de A es

$$L = E_{13}(1,1) \cdot E_{23}(-3,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (1,0)

(Segunda Forma) Se pivotea la matrix dejando 1's en la diagonal y se conservan las columnas para obtener la matriz L:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ \boxed{0} & 3 & 2 \\ \boxed{1} & -9 & -1 \end{pmatrix} \to E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 2 \\ 0 & \boxed{-9} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to D(1,1/3,1)E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to E_{23}(9,1)D(1,1/3,1)E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$\to D(1,1,1/2)E_{23}(9,1)D(1,1/3,1)E_{13}(-1,1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así podemos obtener directamente la descomposición LU:

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (1,0)

De donde se obtiene la descomposición LDU:

$$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1,0

(b) Veamos el pivoteo de la matriz aumentada $[A|b]$

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3-\alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & \alpha+5 & \beta \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2\alpha+4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & -2 & 0 & \alpha+2 & \beta-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\alpha+3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+2 & 2\alpha+\beta-3 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+2 & 2\alpha+\beta-3 \end{array}\right)$$

2,0

Estudiamos de inmediato la cantidad de soluciones. Si $\alpha \neq 2$, la forma escalonada de A tiene toda la diagonal distinta de 0, por lo que A es invertible y el sistema tiene solución única. En el caso en que $\alpha = 2$, la última fila de la matriz aumentada escalonada es $(0\ 0\ 0\ 0\ \beta+1)$, por lo que el sistema es incompatible si $\beta \neq -1$ y es compatible determinado si $\beta = -1$. En resumen,

- No hay solución cuando $\alpha = 2 \wedge \beta \neq -1$ 0,5
- Hay infinitas soluciones cuando $\alpha = 2 \wedge \beta = -1$. En este caso el sistema nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene que el conjunto solución es: 0,8

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Hay solución única cuando $\alpha \neq 2$

Cuando $\alpha = \beta = 1$ el sistema escalonado queda 0,7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución es única y es

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 0$$

P3. 1. Empezamos determinando la ecuación normal del plano Π_1. Sea n el vector normal:

$$n = d_1 \times d_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

0,5

Dado que el origen pertenece a Π_1, la ecuación normal es

$$\Pi_1 : \langle V, n \rangle = 0$$

La proyección de P sobre el plano Π_1 se calcula como

$$P_0 = P + \frac{\langle O - P, n \rangle}{\|n\|^2} n$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle -\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1,0

2. La ecuación cartesiana de la recta:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Para encontrar las ecuaciones paramétricas, hacemos $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ y despejamos x y z en función de t usando las ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = (2 - 2t) + t = 2 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

La ecuación vectorial es

$$L : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

1,5

3. Para calcular la proyección de P_0 sobre L, tomamos el vector $\hat{x}$ (vector director de L),

$$\hat{x} = \frac{(2, -1, 1)^t}{\|(2, -1, 1)^t\|} = \frac{(2, -1, 1)^t}{\sqrt{6}}$$

0,5

La proyección de P_0 sobre L es

$$
\begin{aligned}
R &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-12}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1,0

4. El punto R es en realidad la proyección el punto P sobre la recta L. Por lo tanto, para calcular la distancia entre P y L basta calcular $\text{dist}(P, R)$.

$$\text{dist}(P, R) = \|P - R\| = \|(-1, 0, 2)^t\| = \sqrt{5}$$

1,5

Observación, si la resolución del problema se hace volviendo a proyectar P sobre la recta L, también se considera correcto.