Examen

P1. **(a)** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(a1) Encuentre todas las soluciones de $Ax = b$.

(a2) Dé bases para $Ker(A)$, $Im(A)$ y sus respectivas dimensiones.

(b) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b1) Determine los valores propios y subespacios propios de A. ¿Es A diagonalizable? Justifique.

(b2) Calcule los coeficientes de A^n, en función de n.

P2. **(a)** Sea S el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Considere $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal t.q. $Ker(L) = S$ y $L \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dado $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$, encontrar $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y la matriz de L con respecto a la base canónica.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una transformación lineal **no nula**.

(b1) Muestre que $\dim Ker(T) = n - 1$.

(b2) Sea $\{v\}$ una base de $(Ker(T))^\perp$. Muestre que $T(v) \neq 0$.

(b3) Sea $w = \frac{T(v)}{||v||^2} v$, con v el vector de la base de la parte (b2). Muestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad T(x) = \langle w, x \rangle .$$

Indicación: Descomponga $x \in \mathbb{R}^n$ de acuerdo a la suma directa $\mathbb{R}^n = Ker(T) \oplus (Ker(T))^\perp$.

P3. Sean $1 \leq k < n$ naturales y $M \in \mathcal{M}_{nk}(\mathbb{R})$ de rango k (de lo que se desprende que sus columnas son l.i.).

(a) Verifique que para $x \in \mathbb{R}^n$, $x^t(M^tM)x = ||Mx||^2$ y deduzca que M^tM es definida positiva.

(b) Sea $P = M(M^tM)^{-1}M^t$. Muestre que

(b1) P es simétrica.

(b2) $P^2 = P$.

(b3) $PM = M$.

(b4) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ perpendicular a todas las columnas de M, $Px = 0$.

(c) Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas de M. Muestre que V y $V^\perp$ son los subespacios propios de P y deduzca que los valores propios de P son **exactamente** los números 0 y 1.

(d) Muestre que $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{r}(P) = k$, donde $\mathrm{r}(P)$ es el rango de P y $\mathrm{tr}(P)$ la traza de P.

Tiempo: 3 hrs.
01 de diciembre de 2007

Solución del Examen, Álgebra Lineal. Primavera 2007.

1. *a*) 1) La Matriz aumentada del sistema es: $\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Escalonando: $\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right)$
$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5/3 & -1 & -4/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right)$ **(1 punto, la matriz escalonada puede ser levemente distinta dependiendo de qué pasos se dieron en el escalonamiento)**. Como no quedan filas nulas en la parte escalonada correspondiente a A, el sistema tiene solución **(0.1 puntos)**, y sustituyendo en reversa: $5x_3 + 3x_4 = 4 \Leftrightarrow x_3 = 4/5 - (3/5)\,x_4$, $6x_2 - (4/5 - (3/5)\,x_4) - 3x_4 = -2 \Leftrightarrow x_2 = -1/5 + (2/5)\,x_4$, $x_1 - (-1/5 + (2/5)\,x_4) + (4/5 - (3/5)\,x_4) + x_4 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0$. La solución general del sistema es entonces: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/5 + (2/5)\,x_4 \\ 4/5 - (3/5)\,x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, con x_4 variable libre **(0.9 puntos, no se exige separar el resultado en la suma de dos vectores)**. Todas las soluciones del sistema se obtienen haciendo variar x_4 en todo $\mathbb{R}$.

2) Para calcular el $\operatorname{Ker}(A)$ hay que resolver el sistema lineal $Ax = 0$. La única diferencia con el cálculo previo es que la matriz aumentada lleva sólo ceros en su última columna, luego esa última columna se mantiene siempre en cero. Es así que las constantes (no multiplicadas por los x_i) en las ecuaciones de la sustitución en reversa son todas 0, y solo tenemos que anular dichas constantes entonces para obtener la solución general del sistema homogéneo: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ (2/5)\,x_4 \\ (3/5)\,x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{x_4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $x_4 \in \mathbb{R}$. Es así que el vector no nulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ genera el núcleo de A, y entonces una posible base para $\operatorname{Ker}(A)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ **(0.4 puntos)**. Notemos que ya tenemos $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 1$ **(0.1 puntos)** (pues su base consta de un solo vector). De allí, el TNI nos da $\dim(\operatorname{Im}(A)) = 4 - \dim(\operatorname{Ker}(A)) = 3$ **(0.1 puntos)**. Como el conjunto de llegada de la multiplicación por A es $\mathbb{R}^3$ (que como sabemos tiene dimensión 3), entonces el subespacio $\operatorname{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ es todo $\mathbb{R}^3$, luego cualquier base de $\mathbb{R}^3$ es también base de $\operatorname{Im}(A)$, por ejemplo la base canónica (o la base de $\mathbb{R}^3$ que uno prefiera) **(0.4 puntos)**.

Por supuesto que también se puede calcular directamente una base de $\operatorname{Im}(A)$, sabiendo que este subespacio de $\mathbb{R}^3$ es el generado por las columnas de A. Basta buscar el máximo número de vectores l.i. de entre estas columnas. Para eso hay varios métodos alternativos. Uno para el cual el trabajo está hecho es poner estos vectores como columnas de una matriz, es decir recomponer A, pivotearla (lo que ya está hecho) y seleccionar en A las columnas donde finalmente quedan los pivotes: ellas forman una base de $\operatorname{Im}(A)$. En este caso serían las 3 primeras columnas de A. Otra manera alternativa es poner los vectores como filas de una matriz (que sería A^t en este caso), pivotear la matriz y quedarse con las filas no nulas de la matriz escalonada (o también, llevar la cuenta de donde provenía cada fila, y quedarse con los vectores originales correspondientes). Todos estos métodos, y posiblemente otros más, deberían conducirnos a bases para $\operatorname{Im}(A)$. Por supuesto en cualquier caso debe llegarse a 3 vectores lo que es otra manera de verificar que la dimensión de ese subespacio es 3.

b) 1) Para los valores propios, calculamos el polinomio característico:
$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$. Su única raíz es evidentemente $\lambda = -1$, con multiplicidad 2. Luego, hay un solo valor propio: $\lambda = -1$ **(0.5 puntos)**, con multiplicidad (algebraica) 2. Habrá un solo subespacio propio entonces, y para determinarlo calculamos los vectores propios asociados a $\lambda = -1$. Hay que resolver el sistema lineal homogéneo de matriz de coeficientes $M - (-1)I$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El subespacio propio para este valor propio es entonces $\left\langle\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ **(0.5 puntos)**, que tiene dimensión 1. Así, $\mathbb{R}^2$ no tiene una base formada por vectores propios de M, y por lo tanto M no es diagonalizable **(0.5 puntos)**.

2) Como M no es diagonalizable, tendrá su forma canónica de Jordan, que no es difícil de calcular, porque la única posibilidad es que haya un solo bloque J de tamaño 2×2 (porque la existencia de dos bloque de tamaño 1×1 implicaría que M es diagonalizable). El bloque estará asociado al valor propio encontrado, y por lo tanto deberá ser $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(0.5 puntos, puntaje por el bloque de Jordan)**. Como sabemos de clases cómo son las potencias de J, para encontrar las potencias de M falta solo encontrar la base de Jordan $\{v_1, v_2\}$ de modo que $M = P \cdot J \cdot P^{-1}$, con $P = \left[\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \end{array}\right]$. Para esta base, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el vector propio hallado, y v_2 será una "cola" de v_1, es decir, una solución particular del sistema lineal $(M - (-1)I)z = v_1$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y + 1 \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. El vector $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución particular como la que buscamos, y entonces podemos tomar $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuya inversa se calcula fácilmente como $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(0.5 puntos, puntaje por la base de Jordan y las matrices P y P^{-1})**. Con todo esto calculado, y como $M = P \cdot J \cdot P^{-1}$, resulta que $M^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1}$ para n natural (incluso entero). De acuerdo a lo visto en el curso, $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n \cdot (-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, por lo tanto $M^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & n\,(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{pmatrix}$ (obviamente los coeficientes de M^n se obtienen multiplicando cada coeficiente de la última matriz por el factor exterior $(-1)^n$) **(0.5 puntos, obviamente no es necesario que la matriz tenga el $(-1)^n$ factorizado afuera, pero sí M^n, o sus coeficientes, deben calcularse explícitamente)**. Dado que no se pidió un procedimiento explícito, también es válido calcular M^n para algunos exponentes n, de modo de tratar de conjeturar la fórmula de sus coeficientes, y después demostrar por inducción que la fórmula es la propuesta.

(+ 1 punto base)

2. *a*) Si conocemos los valores de la función lineal L en los elementos de una base de $\mathbb{R}^3$, conoceremos los valores de aplicar L a cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, simplemente descomponiéndolo en la base y luego usando la linealidad de L. Para buscar dicha base de $\mathbb{R}^3$, notamos primero que conocemos el valor de L en todos los elementos de S, puesto que S es el núcleo de L. Partamos entonces de a poco, con una base de S. Por simple inspección, el tercero de los generadores dados para S es suma de los dos primeros, y el cuarto es su diferencia. Estos dos últimos vectores se pueden eliminar del generador, pues son combinación lineal de los anteriores, y el conjunto resultante sigue generando todo S. Finalmente, es directo que los dos primeros vectores son no paralelos (se puede ver notando que dada la primera componente 0 en el segundo, la única manera de obtenerlo como múltiplo del primero tendría que ser con escalar 0, y con ese ponderador se obtiene el vector 0 y no el segundo; otra manera de verlo es poner los dos vectores como filas de una matriz y

ver que están escalonados; una tercera manera es ponerlos como columnas, escalonar y notar que quedan dos pivotes, uno en cada columna), es decir l.i., luego $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ constituye una base de S. (Por supuesto que hay otras maneras correctas de encontrar una base de S, algunas de ellas descritas en la solución del problema 1, parte (a2).) **(0.6 puntos)** Podemos incluso, con la esperanza de que nuestros cálculos posteriores se simplifiquen, reemplazar el primar vector de esta base por la diferencia de los dos (o equivalentemente habernos quedado con el cuarto y el segundo de los generadores originales), quedándonos con $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ como nuestra base de S. Sabemos que $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. El otro dato es que $L\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Esto implica que $\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ no pertenece a $\operatorname{Ker}(L)=S$, luego no es combinación lineal de los dos vectores de su base, lo que finalmente implica que la familia de tres vectores $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ es l.i. y por lo tanto base de $\mathbb{R}^3$ **(0.6 puntos)**. Como ya tenemos los valores de L en los vectores de una base de $\mathbb{R}^3$, solo nos resta descomponer un vector cualquiera $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ como combinación lineal de esa base, es decir, resolver para las incógnitas α,β,γ, el sistema: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$. Esto es, $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+3\gamma&=&x\\\beta&=&y\\\beta+2\gamma&=&z\end{array}\right.$, sistema que se despeja fácilmente como $\beta=y$, $\gamma=(z-y)/2$, $\alpha=x-\frac{3}{2}(z-y)$. (Notar que realmente solo requeriremos conocer γ, puesto que los dos primeros vectores de la base son del núcleo de L.) **(0.6 puntos)** Con esto, $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma L\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=\frac{z-y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **(0.5 puntos)**. Para la matriz representante de L respecto de la base canónica, simplemente notemos que para un vector cualquiera $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{z-y}{2}\\\frac{z-y}{2}\\\frac{z-y}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, luego la matriz requerida es $\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ **(0.7 puntos)**.

b)

1) Antes de mirar el núcleo, pensemos en la imagen $\operatorname{Im}(T)$. Ella es un subespacio de $\mathbb{R}$, por lo que su dimensión solo puede ser 0 o 1. Luego $\operatorname{Im}(T)$ puede solo ser $\{0\}$ o $\mathbb{R}$. Pero como T no es la transformación lineal nula, $\operatorname{Im}(T)\neq\{0\}$, de lo que se deduce que $\operatorname{Im}(T)=\mathbb{R}$, luego su dimensión es 1. (Observación: Hay, por supuesto, otras maneras de probar que $\operatorname{Im}(T)=\mathbb{R}$, por ejemplo como T no es nula, existen un real $a\neq 0$ y un vector $u\in\mathbb{R}^n$ tales que $T(u)=a$. Dado ahora cualquier real $r\in\mathbb{R}$, se tiene que $T\left(\frac{r}{a}u\right)=\frac{r}{a}T(u)=\frac{r}{a}\cdot a=r$.) **(0.7 puntos, por llegar adecuadamente a que $\operatorname{Im}(T)=\mathbb{R}$, y/o a que su dimensión es 1)** Del TNI se deduce ahora que $\dim(\operatorname{Ker}(T))=n-1$ **(0.3 puntos, por concluir)**.

2) Como $\dim(\operatorname{Ker}(T))=n-1$, entonces $\operatorname{Ker}(T)^{\perp}$ tendrá dimensión 1, por lo tanto sus bases serán de la forma del enunciado, es decir $\{v\}$, con $v\neq 0$ (esta justificación no se pide en la prueba, se escribe acá solo por completitud).

   Para probar lo que se solicita en esta parte, razonemos por contradicción. Si fuese $T(v)=0$, entonces T resultaría ser la transformación nula, puesto que para cualquier $x\in\mathbb{R}^n$, si lo descomponemos de la única manera dictada por la descomposición en suma directa $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Ker}\,(T)^{\perp}$, esto es, como $x = y + z$, con $y \in \mathrm{Ker}\,(T)$ y $z = \lambda v \in \mathrm{Ker}\,(T)^{\perp}$, entonces $T(x) = T(y) + \lambda T(v) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$. Por lo tanto debe tenerse que $T(v) \neq 0$. **(1 punto)**

3) Dado $x \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, descompongámoslo como lo hicimos en la parte anterior: $x = y + \lambda v$, con $y \in \mathrm{Ker}\,(T)$ y $\lambda v \in \mathrm{Ker}\,(T)^{\perp}$. Calculemos ahora $T(x)$ y $\langle w, x \rangle$, y veamos que dan el mismo resultado.
Con un cálculo muy similar al de la parte anterior, como $y \in \mathrm{Ker}\,(T)$, entonces $T(x) = \lambda T(v)$ **(0.4 puntos)**. Por otra parte como w es un ponderado de v, entonces también $w \in \mathrm{Ker}\,(T)^{\perp}$, de donde $\langle w, y \rangle = 0$. Luego $\langle w, x \rangle = \langle w, y \rangle + \lambda \langle w, v \rangle = \lambda \left\langle \frac{T(v)}{\|v\|^2} v, v \right\rangle = \lambda \frac{T(v)}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle = \lambda \frac{T(v)}{\|v\|^2} \|v\|^2 = \lambda T(v)$ **(0.6 puntos)**.

(+ 1 punto base)

3. a) Para $x \in \mathbb{R}^k$, $x^t \left(M^t M\right) x = \left(x^t M^t\right)(Mx) = (Mx)^t (Mx) = \langle Mx, Mx \rangle = \|Mx\|^2$ **(0.2 puntos, por la verificación pedida)**. Luego, dado que una norma al cuadrado es siempre mayor o igual que cero **(0.2 puntos, no es necesario hablar de semi definida positiva, solo notar que estamos mayor o igual a 0 hasta acá)**, $M^t M$ es al menos semi definida positiva. Para ver que es realmente definida positiva, hay que asegurarse que la expresión anterior solo se anula para $x = 0$ (es decir, si $x \neq 0$, la expresión es mayor que 0) **(0.1 puntos, por darse cuenta de algún modo que esto es lo que falta)**. Pero de las propiedades de la norma, $x^t \left(M^t M\right) x = \|Mx\|^2 = 0 \Leftrightarrow Mx = 0$ **(0.2 puntos, por darse cuenta que hay que analizar los x tales que $Mx = 0$)**. Para ver bajo qué circunstancias puede ser que $Mx = 0$, escribamos $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, y anotemos por $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ las columnas de M, es decir, $M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{array}\right]$. Entonces $Mx = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k$, y en vista de que los v_j son l.i., se concluye que $Mx = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **(0.3 puntos, por el uso de la independencia lineal para ver $x = 0$)**.

b) 1) $P^t = \left(M\left(M^t M\right)^{-1} M^t\right)^t = \left(M^t\right)^t \left(\left(M^t M\right)^{-1}\right)^t M^t = M \left(\left(M^t M\right)^t\right)^{-1} M^t = M \left(M^t M\right)^{-1} M^t = P$, luego P es simétrica. **(0.5 puntos)**

2) $P^2 = \left(M\left(M^t M\right)^{-1} M^t\right) \cdot \left(M\left(M^t M\right)^{-1} M^t\right) = M \cdot \left(\left(M^t M\right)^{-1} \left(M^t M\right)\right) \cdot \left(M^t M\right)^{-1} \cdot M^t = M \cdot I_k \cdot \left(M^t M\right)^{-1} \cdot M^t = M\left(M^t M\right)^{-1} M^t = P$. **(0.5 puntos)**

3) $PM = M\left(M^t M\right)^{-1} M^t M = M \cdot I_k = M$. **(0.5 puntos)**

4) $Pv = M\left(M^t M\right)^{-1} M^t v = \left(M\left(M^t M\right)^{-1}\right) \cdot \left(M^t v\right)$. Veamos que si v es ortogonal a las columnas de M, entonces $M^t v = 0$. En efecto, con la notación de la parte (a) para las columnas de M, resulta $M^t v = \begin{bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ \vdots \\ v_k^t \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} v_1^t v \\ v_2^t v \\ \vdots \\ v_k^t v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \langle v_2, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_k, v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. **(0.5 puntos)**

c) Con la notación de las partes anteriores, $V = \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \rangle$ y $M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{array}\right]$. El resultado de (b3) se escribe $P \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{array}\right]$, y equivale a $Pv_1 = 1 \cdot v_1$, $Pv_2 = 1 \cdot v_2$, ..., $Pv_k = 1 \cdot v_k$, es decir, todos los vectores de la base de V formada por las columnas de M son vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$. De allí se desprende que V está incluido en el subespacio propio asociado a este valor propio **(0.5 puntos, por reconocer a V como parte del subespacio propio de 1)**. Por otra parte, de (b4) se concluye que para todo $v \in V^\perp$, $Pv = 0 = 0 \cdot v$. Luego $V^\perp$ es subconjunto del subespacio propio asociado a $\lambda_0 = 0$ **(0.5 puntos, por reconocer a $V^\perp$como parte del subespacio propio de 0)**. Notemos que $\dim(V) = k > 0$ y $\dim\left(V^\perp\right) = n - k > 0$, luego 1 y 0 son efectivamente valores propios de P (tienen vectores propios asociados) **(0.3 puntos, por asegurarse que SON valores propios)**. Por otro lado como $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$, V debe coincidir con todo el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$ y $V^\perp$ debe coincidir con todo el subespacio propio asociado a $\lambda_0 = 0$ (de otro modo las dimensiones de dichos subespacios sumarían más que n) **(0.3 puntos por mostrar que los subespacios son los s.e. propios completos)**, y además no hay lugar para otros valores propios (es decir, 0 y 1 son los únicos). Notar que el hecho de que los valores propios son a lo más 0 y 1 se puede también deducir de (b2): $P^2 = P$, puesto que si λ es un valor propio de P y $v \neq 0$ un vector propio asociado, de $Pv = \lambda v$ sale $P^2 v = P \cdot (Pv) = P \cdot (\lambda v) = \lambda P v = \lambda^2 v$, y $P^2 = P \Rightarrow \lambda^2 v = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 = \lambda$, luego $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$ **(0.4 puntos por ver de algún modo válido que no hay más valores propios)**. Notar también que como no hay más valores propios, tampoco hay más subespacios propios, es decir V y $V^\perp$ son los subespacios propios de P.

d) Si $\langle\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}\rangle$ es una base de $V^\perp$, entonces la diagonalización de P que hemos logrado en la parte anterior se puede escribir como $P = QDQ^{-1}$, con $Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array}\right]$ matriz invertible cuyas columnas son la base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de P, y $D = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ la matriz diagonal de valores propios asociados **(0.2 puntos, por reconocer los elementos de la diagonalización que son necesarios para los cálculos posteriores, aunque no se explicite la diagonalización en el detalle que está acá)**. Como sabemos que $\mathrm{r}(P) = \mathrm{r}(D)$ **(0.1 puntos, por reconocer explícita o implícitamente este hecho... el reconocimiento implícito puede estar en que después de calcular el rango de D se de la misma respuesta para el de P, por ejemplo)**, y claramente el rango de D es k, el número de veces que se repite el 1 en su diagonal **(0.3 puntos, por el rango de D)**, entonces $\mathrm{r}(P) = k$. También sabemos que las trazas de P y D coinciden **(0.1 puntos, por reconocer explícita o implícitamente este hecho)**, y a la suma en $\mathrm{Tr}(D)$ solo contribuyen los k unos **(0.3 puntos, por la traza de D)**. Luego también $\mathrm{Tr}(P) = k$.

(+ 1 punto base)