Planos Tangentes y Recta Normal

Sea la función $z = f(x, y$ continua en el punto $p(a,b)$ determinar la derivada parciales en el punto es posible determinar los números directores de la recta normal y los números de inclinación del plano tangente $Z = F(x, y)$ **Función punto** $p(a,b)$ **;** $C = F(a,b)$

Ecuación del Plano Tangente

$$\boxed{\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) - (z-c) = 0}$$

Ecuación de la Recta Normal.

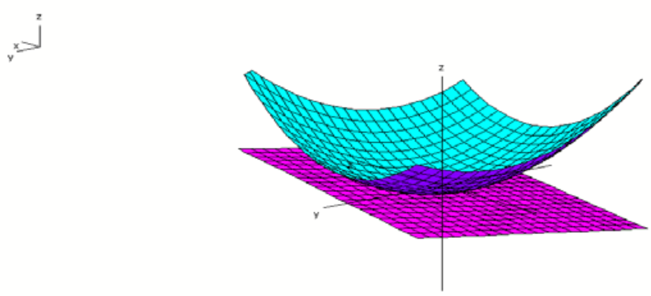
$$\boxed{\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{(z-c)}{-1}}$$

Ejemplo

Dada la función superficie $z = x^2 + xy + 3y^2$, **determinar la ecuación del plano tangente en el punto (1,1)**

Primer Paso: Determinar "z_0"

$z = 5$



Segundo paso: Determinar las derivadas parciales en el punto (1,1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 6y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 2(1) + 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 1 + 6(1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x(1,1)} = 3 \qquad \frac{\partial Z}{\partial Y}(1,1) = 7$$

Tercer paso : Hallar las ecuaciones.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(a,b)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Punto P (1, 1,5)

$$3(x-1) + 7(y-1) - (z-5) = 0$$

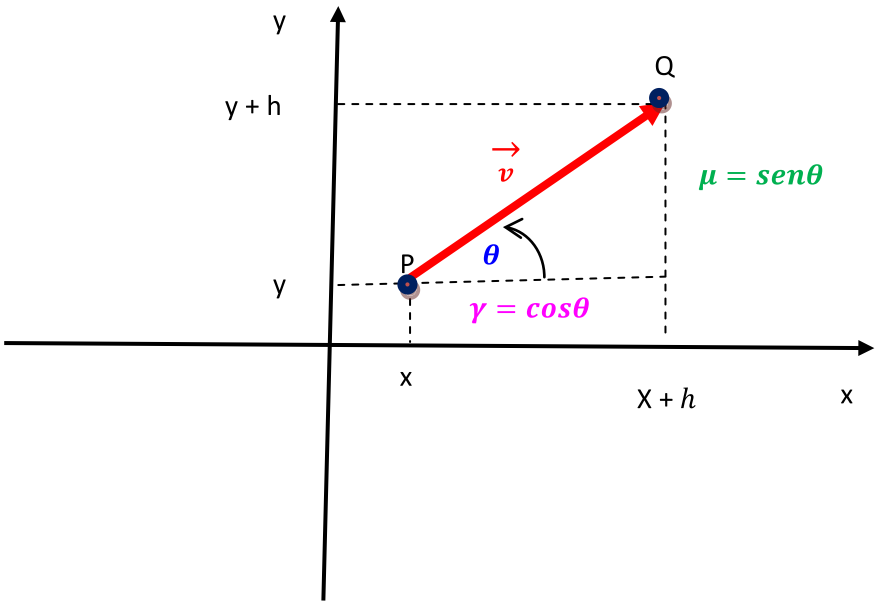
$$3x - 3 + 7y - 7 - z + 5 = 0$$

$$3x + 7y - z - 5 = 0$$

$$z = 3x + 7y - 5$$

Derivadas Direccionales y Gradientes

La derivada direccional de una función z = f(x, y) se puede determinar en función de la dirección de un vector $\overrightarrow{v}$ multiplicando sus derivadas parciales por los componentes del vector en los diferentes ejes coordenados



Sea el vector $\overrightarrow{v}$ un vector unitario que se encuentra en Plano xy donde se encuentra el dominio de la función z = f(x, y) ; sea **θ** la dirección del vector unitario $\overrightarrow{v}$

La derivada direccional de una función z = f(x, y) se define como el limite de la función incrementad menos la función sin incrementar dividido entre el incremento cuando este tiene a cero en dirección del vector unitario.

$\boxed{\vec{V} = Cos\theta\ \vec{i} + Sen\theta\ \vec{j}}$ Si el límite existe entonces existe la derivada direccional y se denota

$$\boxed{D\vec{v}f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\lambda y+h\mu)-f(x,y)}{h}}$$

$$\lambda = Cos\theta$$
$$\mu = Sen\theta$$

Utilizando la definición de la derivada parcial resolviendo el limite entonces se obtiene las derivadas parciales de la función z = f(x, y) en dirección del vector $\vec{V}$ "unitario" y se denota:

Derivada Direccional

$$\boxed{D\vec{v}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}Cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}Sen\theta}$$

Nota. En síntesis la derivada direccional de la función z = f(x, y) se puede decir que es el producto escolar del vector unitario $\vec{V}$ por la derivada de la función en el punto p(x, y)

Ejemplo 1 determinar la derivada direccional de la función

$f(x,y) = Sen(2x - y)$ **para** $\theta = \frac{\pi}{3}$ **en dirección del vector**

$$\vec{V} = Cos\theta\ \vec{i} + Sen\theta\ \vec{j}$$

Primer paso: determinar las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Cos(2x - y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -Cos(2x - y)$$

Segundo paso: determinar la derivada direccional

$$D_{\vec{\partial v}}\ f(x,y) = [2Cos(2x - y)]Cos\theta + [-Cos(2x - y)]Sen\theta$$

$$D\vec{v}f(x,y) = 2Cos(2x - y)Cos\theta - Cos(2x - y)Sen\theta$$

Para $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$D\vec{v}f(x,y) = 2Cos(2x-y)Cos\frac{\pi}{3} - Cos(2x-y)Sen\frac{\pi}{3}$$

$$D\vec{v}f(x,y) = 2Cos(2x-y)\frac{1}{2} - Cos(2x-y)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{D\vec{v}f(x,y) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}Cos(2x-y)}$$

Ejemplo:

Ejemplo 2. hallar la derivada direccional de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **en el punto P(3, 4) en dirección de vector** $\vec{V}$ **= 3i – 4j**

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **en P (3, 4)** $\vec{V} = 3i - 4\vec{j}$

Primer paso: determinar las derivadas parciales en el punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4}{5}$$

Segundo paso: determinar el vector unitario de $\vec{V}$ **.**

$$\vec{V}\mu = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \qquad |\vec{V}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$$

$$\vec{V}\mu = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

Tercer paso: Derivada direccional de f(x, y) en dirección de $\vec{V}$.

$$D\vec{v}f(3,4) = \frac{\partial f(3,4)}{\partial x} Cos\theta + \frac{\partial f(3,4)}{\partial y} Sen\theta$$

$$D\vec{v}f(3,4) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\boxed{D\vec{v}f(3,4) = -\frac{7}{25}}$$

Ejemplo 3. Dada la función $f(x, y) = e^x Seny$

a) Determinar la derivada direccional en el punto $P\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ en dirección del vector $\vec{V}$

b) determinar el valor de θ para que la derivada direccional sea máxima para ese ángulo

a) $P\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad \vec{V} = Cos\theta\ \vec{i} + Sen\theta\ \vec{j}$

Primer paso: determinar las derivadas parciales en el punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x Seny = e^0 Sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x Cosy = e^0 Cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Segundo Paso: derivada direccional en el punto.

a) $D\vec{v}f\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\partial f\left(0,\pi/6\right)}{\partial x}Cos\theta+\dfrac{\partial f\left(0,\pi/6\right)}{\partial y}Sen\theta$

$$\boxed{D\vec{v}f\left(0,\pi/6\right)=\frac{1}{2}Cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}Sen\theta}$$

b) Determinar el valor máximo $D\vec{v}$ en θ = ?

$$h(\theta)=\frac{1}{2}Cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}Sen\theta$$
$$h'(\theta)=-\frac{1}{2}Sen\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}Cos\theta$$
$$h'(\theta)=0$$
$$-\frac{1}{2}Sen\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}Cos\theta=0$$
$$\tan g\theta=\sqrt{3}$$
$$\theta=\arctan\left(\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}}$$

La derivada direccional máxima sea:

$$D\vec{v}f\left(0,\pi/6\right)=\frac{1}{2}Cos\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}Sen\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{D\vec{v}f\left(0,\pi/6\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1}$$

Derivada Direccional Para Funciones de 3 Variables.

Sea la función W = f(x, y, z) una función continua se puede determinar las derivadas parciales en dirección del vector unitario v = ai + bj + ck se define como un limite de la función incrementada menos la función sin incrementar cuando el incremento tiene a cero en dirección del vector v.

Aplicando la definición de la derivada parcial se obtiene las derivadas parciales y se realiza el producto escalar por el vector v entonces se expresa de la siguiente manera:

$$W = f(x, y, z)$$
$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\boxed{D\vec{v}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b + \frac{\partial f}{\partial z}c}$$

Gradiente de la Función.- $f(x, y, z)$ $\vec{\nabla}f$ **(llamada nadla)**

Se define como la suma de las derivadas parciales de la función en un punto P(x, y, z) dado esto se expresa como un vector de 3 variables

$$\boxed{\vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\vec{k}}$$

Propiedades del Gradiente

1º la derivada direccional $(D\vec{v}f)$ del vector $\vec{V}$ es igual al producto escalar del vector gradiente por el vector unitario $\vec{V}$.

$$\boxed{D\vec{v}f(x, y, z) = \vec{\nabla}f(x, y, z) * \vec{V}}$$

2º si el vector gradiente es cero entonces la derivada direccional de vector f en dirección del vector v.

$$\boxed{\text{Si} \;:\; \vec{\nabla}f(x, y, z) = 0 \Rightarrow D\vec{v}f(x, y, z) = 0} \quad \forall \vec{V} \text{ unitario}$$

3º la dirección de máximo crecimiento de la funcion f esta dada por el gradiente entonces el máximo valor de las derivadas direccionales de f en dirección del vector $\vec{V}$ se expresa de la siguiente manera.

$\left\|\vec{\nabla}_{f(x,y,z)}\right\|$; **es valor máximo de** $D\vec{v}f(x,y,z)$

4º la dirección de mínimo crecimiento de la función f esta dado por el gradiente negativo de la función entonces el mínimo valor de la derivada direccional de la función f en función del vector $\vec{V}$ esta dado por

$-\left\|\vec{\nabla}_{f(x,y,z)}\right\|$; **es valor mínimo de** $D\vec{v}f(x,y,z)$

Ejemplo4. Dada la función $f(x,y,z)=xe^{yz}$ **determinar**

- **a) el vector gradiente en el punto P(2, 0, -4)**
- **b) la derivada direccional en dirección del vector** $\vec{V}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$

$f(x,y,z)=xe^{yz} \qquad P(2,0,-4)$

Primer paso: determinar las derivadas parciales en el punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{yz}=1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=xze^{yz}=-8$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=xye^{yz}=0$$

a) gradiente de f(x, y, z)

$$\vec{\nabla}f(2,0,-4)=\frac{\partial f}{\partial x}(2,0,-4)\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(2,0,-4)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}f(2,0,-4)=1\vec{i}-8\vec{j}+0\vec{k}}$$

b) derivada direccional de f en dirección de $\vec{V}$

$$\vec{V} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{V}\mu = \frac{1}{\sqrt{14}}i - \frac{2}{\sqrt{14}\,j} + \frac{3}{\sqrt{14}}k$$

$$D\vec{v}f(2,0,-4) = (1)\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + (-8)\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + (0)\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\boxed{D\vec{v}f(2,0,-4) = \frac{17}{\sqrt{14}}}$$

Aplicación

Ejemplo1

La temperatura T en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen, la temperatura en el punto (1,2,2) es 120º

a) Determine la razón de cambio de 7º en (1,2,2) en la dirección hacia el punto

b) Determine q en cualquier punto de la bola la dirección de incremento más grande de temperatura está definido por un vector que señala hacia el origen.

1.- Datos **T = 120º**

$$T(1{,}2{,}2) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$T(1{,}2{,}2) = \frac{k}{3} \qquad k = 360$$

2. Función

$$T(x,y,z) = \frac{360}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$

3.- Derivadas Parciales.

- $\frac{\partial T}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{360}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} * \frac{2x}{2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{40}{3}$$

- $\frac{\partial T}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{360y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{80}{3}$$

- $\frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{360z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{80}{3}$$

4.- Gradiente

$$\vec{\nabla} = -\frac{40}{3}\vec{i} - \frac{80}{3}\vec{j} - \frac{80}{3}\vec{k}$$

5.- Vector Unitario

$$\vec{\mathrm{U}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

6.- Derivada Direccional

$$D_{\vec{\nabla}}T(1,2,2) = \vec{\nabla}T(1,2,2) * \vec{U}$$

$$D_{\vec{\nabla}}T(1,2,2) = -\frac{40}{3\sqrt{3}}$$

Conclusión: La temperatura disminuye en $\frac{40}{3\sqrt{3}}$ °C en dirección al punto (1, 2, 2)