Unidad Nº 2

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Generalidades:

Para el estudio de las ED homogéneas es necesario conocer la definición de función homogénea y las características y propiedades principales.

Definición Función Homogénea:

Se dice que la función f(x,y) es homogénea de grado n para todo $\lambda > 0$ si cumple con la siguiente igualdad.

$$f\ (\lambda x, \lambda y) = \lambda^n\ f(x,y) \qquad \forall : \lambda > 0\, n\, \varepsilon\ R$$

Ejemplo:

Para las siguientes funciones determinar si son homogéneas y cual es el grado de la función homogénea.

1.

$$f\ (x,y) = x^2 - 3xy + y^2$$

$$f\ (\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2\ - 3\ (\lambda x)\ (\lambda y)\ + (\lambda\ y)^2$$

$$f\ (\lambda x, \lambda y) = \lambda^2\ x^2 - 3\lambda^2\ xy\ +\ \lambda^2 y$$

$$\boxed{f\ (\lambda x, \lambda y) = \lambda^2\ \underbrace{(\lambda^2 - 3xy\ +\ y^2)}_{f\ (x,y)}}$$

La función es: Homogénea **de grado 2**

2.

$$f\ (x,\ y) = 2\lambda^2\ x^2 \lambda y - 3\lambda\ \ x\ \lambda^2 y^2\ - 5\frac{\lambda^2 x^6}{y^2}$$

$$f\ (\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^2\ x^2 - 3\lambda\ \ x\ \lambda^2 y^2\ - 5\frac{\lambda^2 x^6}{y^2}$$

$$\boxed{f\ (\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 \left(2x^2 - 3x\,y^2 - 5\lambda\frac{x^6}{y^2} \right)}$$

La función es: **No es homogénea**

3. $f\left(x,y\right)=sen\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=sen\left(\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}\right)$$

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=sen\left(\frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}\right)$$

$$\boxed{f\left(\lambda x,\lambda y\right)=sen\left(\frac{x+y}{x-y}\right)}$$

La función es: **Homogénea de grado cero**

Definición de la ecuación diferencia homogénea

Se define ecuación diferencial Homogénea de primer orden a la ecuación

$$y'=f(x,y)$$

si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero.

Entonces es equivalente a escribir esta ecuación en forma de ecuación diferencial

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0}$$

Donde:

- M y N son de variable x , y
- Las funciones M y N son homogéneas del mismo grado.

Si no son del miso grado es difícil sacar la solución.

Solución de las ecuaciones diferencial homogénea de primer orden

Para resolver una ED. Homogénea necesariamente se utiliza una sustitución (cambio de variable) de tal manera que la ecuación diferencial homogénea se transforme en una ED. De variable separables.

Primer método:

Si y' = f (x,y) EDH (ED. Homogénea)

Si es de grado cero: $[x]^n = 1$

$$f\ (x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Realizar la sustitución $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = tx \Rightarrow t = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dt}{dx} + t \end{array}}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$x\ \frac{dt}{dx} + t = g(t)$$
$$x\ \frac{dt}{dx} = g(t) - t$$
$$xdt = (g(t) - t)\ dx$$
$$\frac{dt}{g(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\int \frac{dt}{g(t) - t} - \int \frac{dx}{x} = c}$$

Una vez resulta la integral se debe volver a las variable x,y

Segundo método :

Si la función f (x,y) es también de grado cero pero tiene la formula entonces se debe realizar la sustitución.

$$y' = g\left(\frac{x}{y}\right)$$

Sustitución:

$$x = ty \Rightarrow t = \frac{x}{y}$$
$$\frac{dx}{dy} = y\frac{dy}{dt} + t$$

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{dy}{g\left(\frac{x}{y}\right)} = dx$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Reemplazar la sustitución

$$y\,\frac{dt}{dy} + t = \frac{1}{g\ (t)}$$
$$y\,\frac{dt}{dy} = \frac{1}{g\ (t)} - t$$
$$y\,dt = \left(\frac{1}{g\ (t)} - t\right) dy$$
$$\frac{dt}{\frac{1}{g\ (t)} - t} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{g(t)dt}{1 - t\,g(t)} - \int \frac{dy}{y} = c$$

Ejemplo.

Hallar la solución de la siguiente ecuación diferencial

1. $$y' = \frac{y}{x} + sen\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. $$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

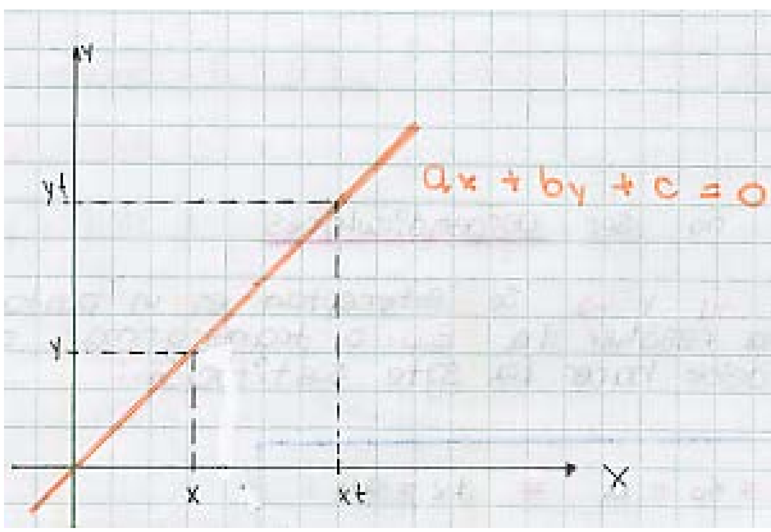
3. $$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$ para : $y(1) = 1$

Ecuaciones Diferenciales Reducibles A Homogéneas

La ecuación homogénea de la forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_ay + c_2}\right) \qquad (I)$$

Es posible reducir a la forma homogénea de grado



Significa que las funciones en forma diferencial su representación es una línea que no pasa por el origen.

Geométricamente resulta que la función lineal **g(x,y)= a x+b y+c** será homogénea de grado 1 si y solo si esta función es igual a cero esto quiere decir que pasa por el origen.

Desde el punto de vista de su estructura algebraica la funciona g(x,y) si c = 0 será homogénea.

En la ecuación diferencial la solución de esta ED es considerar el comportamiento de las 2 rectas.

$L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $\qquad$ $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

TIPO I

Si la recta L_1 y L_2 no se interceptan y son paralelas esto quiere decir que sus pendiente son iguales entonces se realiza una sustitución en la ecuación parecida a una ecuación de variables separables.

Ejemplo:

Hallar la solución de la siguiente ecuación diferencial $(x \ \ 2y - 1)dx + (3x- 6y + 2)\, dy = 0$

TIPO II

Si la recta L_1 y L_2 se interceptan en un punto $p(x_0, y_0)$ entonces para resolver la ecuación diferencial o transformar a homogénea se debe hacer la siguiente sustitución:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_o + u \Rightarrow dx = du \\ y = y_o + v \Rightarrow dy = dv \end{array}}$$

EJEMPLO .

1.- $(x - y + 3)dx + (3x - y + 1)\ d\, y = 0$

2.- $(4x + 3y - 11)dx + (2x + y - 5)dy = 0 \qquad para \quad y(3) = 1$

Ecuación Diferencial Lineal De Primer Orden

La ecuación diferencial de primer orden se define cuando la derivada es de primer orden y una de las variables es de primer grado esto hace que sea ecuación diferencial Lineal y tiene las siguientes formas.

1. si la ecuación diferencial lineal tiene la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p_{(x)} y = Q(x)}$$

1º ORDEN: Por la derivada

Lineal: una de las variables es de grado 1.

Donde $P_{(x)}$ y Q(x) son funciones de variable x no es polinomial cualquier función y también se dice que es lineal respecto de la variable "y" entonces su solución de esta ecuación tiene la forma.

$$\boxed{ye^{\int p(x)\, dx} = \int e^{\int p(x)\, dx} Q(x)dx + c}$$

2. si la ecuación diferencial lineal tiene la forma

$$\boxed{\frac{dx}{dy} + P(y)\, x = Q_{(y)}}$$

Donde $P_{(y)}$ y $Q_{(y)}$son funciones de variable "y" la ED es lineal respeto de la variable "x".

Entonces su solución será:

$$\boxed{ye^{\int p(x)\, dx} = \int e^{\int p(x)\, dx} Q(x)dx + c}$$

DEMOSTRACIÓN

I. Hipótesis:

Son la funciones $P_{(y)}$ y $Q_{(y)}$ funciones reales de variables “x” y y= f(x) sea la función solución de la ED.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)_y = Q_{(x)}}$$

II. tesis

Si la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)_y = Q_{(x)}}$$

Es lineal de 1º orden tiene como solución.

$$\boxed{ye^{\int p(x)\,dx} = \int e^{\int p(x)\,dx} Q(x)dx + c}$$

III. demostración

Por tesis tenemos que:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)_y = Q_{(x)}}$$

Si multiplicamos por $e^{\int p(x)\ dx}$

$$\boxed{\underbrace{e^{\int p(x)\ dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int p(x)\ dx}p_{(x)\,y}} = e^{\int p(x)\ dx}Q_{(x)}}$$

Aplicando la derivada de un producto de

$$\frac{d\left[e^{\int p(x)\,dx}\,y\right]}{dx} = e^{\int p(x)\,dx}(y)' + \left[e^{\int p(x)\,dx}\right]y$$
$$= e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)\,dx}\left[\int P(x)\,dx\right]y$$

2º Teorema Fundamental Del Cálculo

$$\frac{d\left[e^{\int p(x)\,dx}\,y\right]}{dx} = e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)\,dx}P(x)y$$

2 reemplazando en 1

$$\frac{d\left[e^{\int p(x)\,dx}\,y\right]}{dx} = e^{\int p(x)\,dx}\,Q(x)$$
$$d\left[e^{\int p(x)\,dx}\,y\right] = e^{\int p(x)\,dx}\,Q(x)$$

Integrado Tenemos

$$\int d\left[e^{\int p(x)\,dx}\,y\right] = \int e^{\int p(x)\,dx}\,Q(x)\,dx$$

$$\boxed{e^{\int p(x)\,dx}\,y = \int e^{\int p(x)\,dx}\,Q(x)\,dx + c}$$

Por analogía es posible demostrar la otra.

Ejemplo.

Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$

2. $(1 + y2)dx + (are\ tag\ y - x)\ dy = 0$

3.- $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$; $y\ (1) = 1$

4. $y' = \dfrac{y}{x + y^3}$

5.- $\dfrac{dy}{dx} + tagy = x \sec y$

Ecuación Diferencial De Bernoulli

Es una ecuación diferencial de primer orden de la forma $\boxed{\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = y^{n}\,Q(x)}$

Donde: $P_{(X)}$ y $Q_{(X)}$ son funciones reales de variable "x". y, una función donde $n \neq 0 \;\; y \;\; n \neq 1$

Solución

Consiste en transformar a una ecuación lineal de primer orden utilizando un cambio variable y transformar a la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + (1-n)\;\; P_{(x)}\, z = (1-n)y\;\; Q_{(x)}}$$

Para demostrar la transformación de ecuación de Bernoulli reducir a ecuación lineal de 1º orden el procedimiento es el siguiente:

I. Hipótesis

Sean las funciones $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ de variable "x" y sea la función y= f(x) con derivada de 1º orden dy/dx.

II tesis

Sea la ecuación diferencial de primer orden denominada de Bernoulli: $\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x) = y^{n} Q(n)}$

Cuyo proceso de solución se transforma en la

$$\boxed{\frac{dz}{dx} + (1-n)\;\; P_{(x)}\, z = (1-n)y\;\; Q_{(x)}}$$

III. Demostración

- Según la tesis se puede demostrar la transformación de la ecuación.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P_{(x)y} = y^n\ Q_{(x)}} \qquad 1$$

- Dividiendo a la ecuación 1 por: y^n

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{P_{(x)y}}{y^n} = \frac{y^n\ Q_{(x)}}{y^n}$$

$$\boxed{y^n\ \frac{dy}{dx} + y^{1-n}\ P_{(x)} = Q_{(X)}} \qquad 2$$

- Multiplicando por: (1-n)a la ecuación 2

$$\boxed{(1-n)\ y^n\ \frac{dy}{dx} + (1-n)\,y^{1-n}\ P_{(x)} = (1-n)\ Q_{(X)}} \qquad 3$$

- Realizando una sustitución a cambio de variable en 3

$$\boxed{\begin{array}{l} z = y^{1-n} \\ \dfrac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\ \dfrac{dy}{dx} \end{array}}$$

- Realizando el C.V en 3 tenemos:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} + (1-n)\ P_{(x)}z = (1-n)\ Q\ (x)}$$

- La solución de la ecuación diferencial será:

$$\boxed{z\,e^{\int p(x)\,dx} = \int e^{\int p(x)\,dx}\,y\ Q(x)\ dx + c}$$

- Finalmente volver a las variable iniciales x,y.

Si la ecuación diferencial tiene la forma:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} + P_{(x)}x = x^n\ Q\ (x)}$$

Para resolver se transforma a la forma:

$$\boxed{\frac{dz}{dy} + (1-n)\ P(y)z = (1-n)\ Q_{(y)}}$$

La demostración por analogía es la misma

Comparación De La Ecuación De Bernoulli Con Otras Ecuaciones

Puede tomar las siguientes formas

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P_{(y)z} = y^n\ \ Q_{(y)}}$$

1. Si n =0 se transforma en una ecuación lineal.
2. Si n = 1 la ecuación será de variables separables
3. Si n = o y n =1 entonces la ecuación se denomina

Ejemplo:

Hallar la solución de la siguiente ecuación diferencial:

1. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{cos^2 x}$
2. $4x\,y' + 3y = -e^x\ x^4 y^5$
3. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\ senx$

Ecuación Diferencial Exacta

Se define como una ecuación de la forma

$$\boxed{M_{(X,Y)}dx \quad + \quad N_{(X,Y)}dy = 0}$$

Donde M y N son funciones de dos variables

Se dice que es diferencial exacta si se cumple la siguiente igualdad.

$$\boxed{M_{(X,Y)} = \frac{\partial f}{\partial x}; \qquad N_{(X,Y)} = \frac{\partial f}{\partial y}}$$

Para que sea exacta

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}}$$

Entonces la ecuación diferencial exacta se puede escribir como:

$$\boxed{d\left[f(x,y)\right] = 0}$$

Donde la solución de esta ecuación será una función.

$$\boxed{\mathrm{f}(x,y) \ = c}$$

Para resolver esta ecuación diferencial se sigue el siguiente procedimiento.

- Verificar si es exacta.
- Integrar una parte de la ecuación diferencial respecto de una de las variables.
- La función f(x,y) se deriva respecto e una de las variables y comprar son las funciones.

$$f(x,y) \ = \int N(x,y)\ dy + g(cx)$$

$$f(x,y) \ = \int M(x,y)\ dx + g(cy)$$

- Finalmente determinar la constante y reemplazar en la función.

Ejemplo:

1 $(y - x\ \ lny)\,dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0$

2 $(lny - 5y^2\ sen5x)\,dx + \left(\frac{x}{y} + 2y\cos 5x\,x\right)dy = 0$

3 Escriba aquí la ecuación.

Factor de integración

Sea la ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Donde M y N representan la derivada parcial de cada una de las funciones que resulta de la

$$d\left[f\ (x,y)\right] = 0$$

Al verificar no se muestra que es una diferencial exacta entonces se determina o encontrar una función $M_{(x,y)}$ que se denomina factor de integración que al multiplicar a la ecuación diferencial se transforma en una diferencial exacta.

$$\mu(x,y)\ M(x,y)dx + \ \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

Entonces para resolver se debe verificar nuevamente si es exacta con:

$$\boxed{\frac{\partial\left[\mu M\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[\mu N\right]}{\partial x}}$$

Para determinar el factor de integración se puedo clasificar de la siguiente manera:

Caso I

Si el factor de integración es de variable “x” se determina una fusión f(x) de la siguiente manera.

$$\boxed{f(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}} \Rightarrow \boxed{\mu = e^{\int f(x)dx}}$$

Caso II

Cuando el factor de integración tiene una función de única variable "y" se determinar de la siguiente manera:

$$\boxed{f(y) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}} \Rightarrow \boxed{\mu = e^{\int f(y)dy}}$$

Caso III

Si la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \neq 0$$

Y es homogénea entonces el factor de integración se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{\mu = \frac{1}{xM + yN}}$$

Caso IV

Si la suma de las derivadas parciales es igual a cero a demás una de las parciales diferentes de la otra el factor de integración se determina de la siguiente manera:

$$x\frac{\partial M}{\partial y} + y\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}}$$

Caso V

Si ningunos de los anteriores casos se enmarca a la ecuación diferencial para determinar el factor de integración se de utilizar la tabla de factor de integración que se encuentra en el libro de Murria Siebel y Espinoza:

Ejemplo:

Hallar la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$ydx\text{-}(x+x^2y)dy=0$$

1ºpaso: Determinar si es exacta

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y}=1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=-1-2xy \end{array}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \quad no \;\; es \;\; exacta$$

2ºpaso Determinar el factor de integración

$$f(x)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

$$f(x)=\frac{1-(-1-2xy)}{-(x+x^2y)}$$

$$f(x)=\frac{2+2xy}{-(x+x^2y)}$$

$$f(x)=\frac{2(1+xy)}{-x(1+xy)}$$

$$\mu=e^{\int f(x)dx}$$

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{x} dx}$$

$$\mu = e^{-2\ln x}$$

$$\mu = e^{-\ln x^2}$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{x^2}}$$

3. transformar la ecuación diferencial en el factor de integración

$$ydx - (x + x^2 y)dy = 0$$

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x^2}(x + x^2 y)dy = 0$$

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x^2}x(1 + x^2 y)dy = 0$$

$$\frac{y}{x^2}dx - \left(\frac{1}{x^2} + y\right)dy = 0$$

$$\mu M_{(x,y)} \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$$

$$\mu N_{(x,y)} = -\left(\frac{1}{x} + y\right) \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \quad es \ \ exacta$$

$$\frac{\partial \mu M}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

4. Resolver la ecuación diferencial

$$f(x,y) = \int \frac{y}{x^2} dx + cy$$

$$f(x,y) = -\frac{y}{x} + cy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} + c'y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mu \ N(x,y)$$

$$\frac{-1}{x} + c'y = -\left(\frac{1}{x} + y\right)$$

$$c'y = -y$$

$$cy = -\int ydy$$

$$cy = -\frac{y^2}{2} + c$$

La solución será:

$$f(x,y) = -\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2} + c$$

$$\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$$