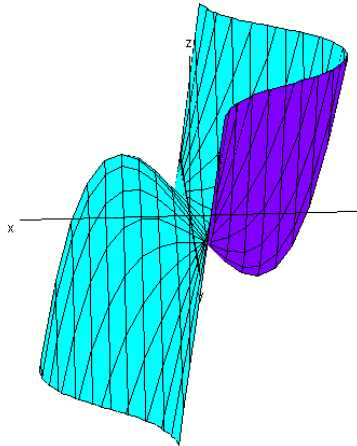
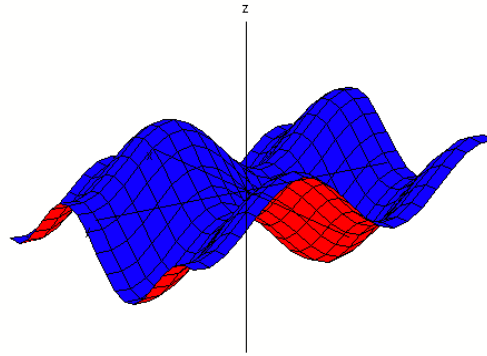


MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES



$$f(x, y) = 3x - x^3 - 3xy^2$$



$$f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y$$

En una función de varias variables una de las aplicaciones de la derivada de primer orden y de segundo orden es determinar los valores denominados extremos relativos de una función máximos, mínimos.

Punto Crítico

Es un punto que pertenece al dominio de la función que esta incluido o forma parte de ese dominio D que esta en el plano xy o también estar en la borde del dominio denominado disco o frontera de dominio en la función $Z = F(x, y)$

El punto critico se determina igualando las derivadas parciales a cero o resolviendo el sistema obtenemos los valores de x, y que serán el punto critico de $P(a, b)$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad x = a \quad ; \quad y = b$$

Una vez obtenido el punto crítico es posible clasificar estos puntos como máximos como mínimos o puntos de silla de acuerdo al criterio de la primera derivada y criterio de la segunda derivada.

Criterio de la Primera Derivada:

- **Máximos Relativos:** se dice que el punto critico $P(a, b)$ que pertenece a la función $Z = F(x, y)$ es considerado máximo relativo si cumple con la siguiente desigualdad

$$f(a, b) < f(x, y)$$

- **Mínimos Relativos:** Se dice que la función $Z = F(x, y)$ tiene como punto mínimo el punto $P(a, b)$ si cumple con la siguiente desigualdad

$$F(a, b) > f(x, y)$$

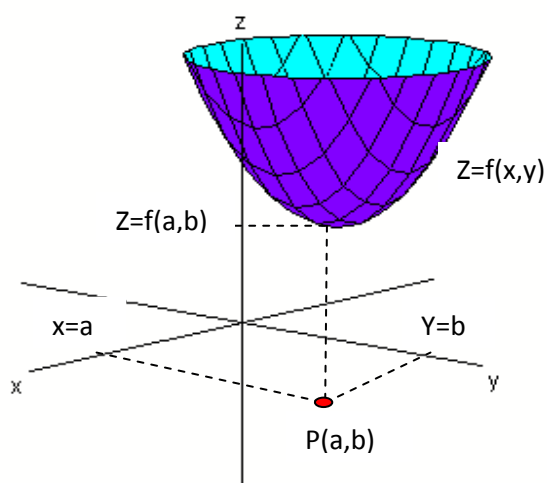
Criterio de la Segunda Derivada.-

Sea la función $Z = f(x, y)$ cuyo punto critico es $P(a, b)$ es posible clasificar utilizando las derivadas parciales de segundo orden en puntos máximos, mínimos, punto en silla.

Para clasificar el punto. Entonces utilizaremos en las derivadas parciales de segundo orden la siguiente nomenclatura:

$$A = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} \quad B = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} \quad C = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y \partial x}$$

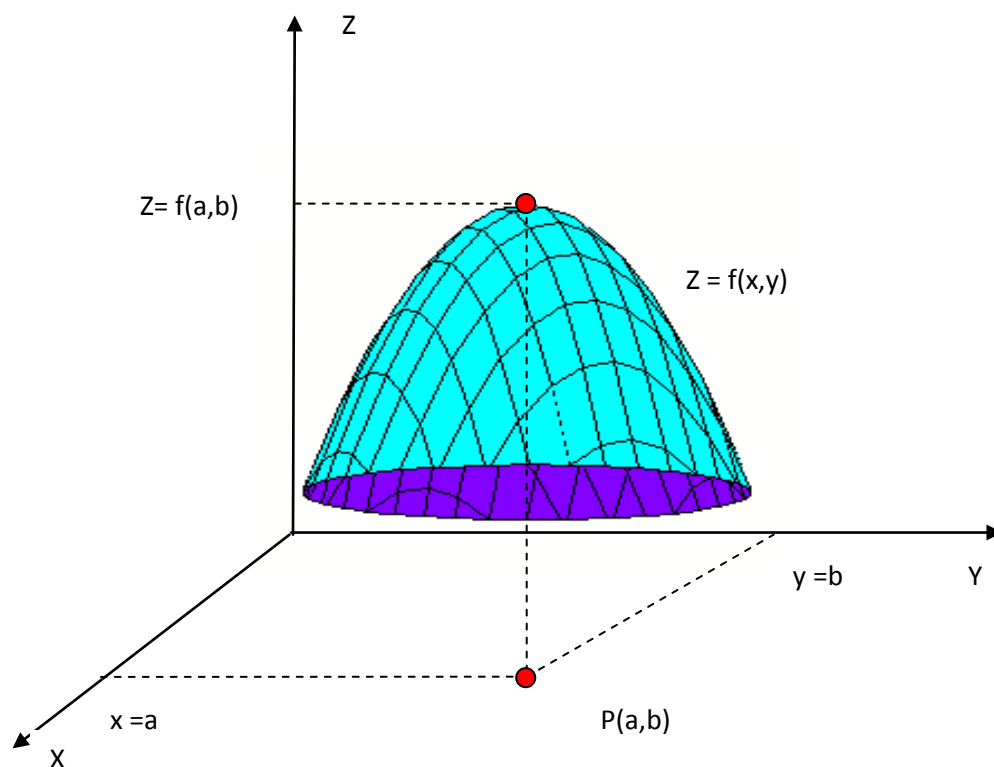
Punto Mínimo Relativo



Se dice que el punto $P(a,b)$ es considerado **mínimo relativo** si cumple con la siguiente condición:

$$\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \right]^2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0$$

Punto Máximo Relativo

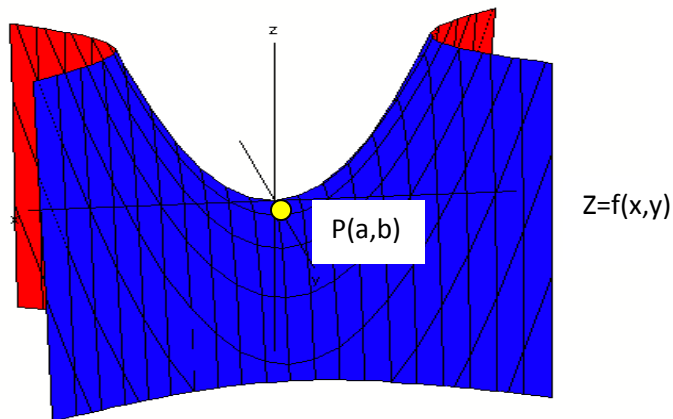


$$[AB - C^2] > 0 \quad y \quad A > 0$$

Se dice que el punto $P(a,b)$ es considerado **máximo relativo** si cumple con la siguiente condición:

$$\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \right]^2 > 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0$$

Punto de Silla



Se dice que el punto $P(a,b)$ es considerado **Punto de Silla** si cumple con la siguiente condición:

$$\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \right]^2 < 0$$

Resumen:

$$\text{Si : } D = \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \right]^2$$

Maximo : $D > 0$ y $A < 0$

Ejemplo:

Para la siguiente función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ determinar los puntos críticos y clasificar de acuerdo al criterio de la segunda derivada.

1.- Determinar las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$$

2.- Las derivadas Parciales igualar a cero y Hallar lo P.C

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \quad // \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \quad \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

$$y = x^3 \quad \textcircled{3}$$

3 reemplazar en 2

$$\begin{aligned} (x^3) - x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad x = -1$$

X reemplazando en 3

$$x = 0 ; x = 1 ; x = -1$$

3.- Escribir los puntos críticos

$$P_1(0,0) \quad P_2(-1,2) \quad P_3(-1,-1)$$

4.- Determinar las derivadas parciales de segundo orden

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12y^2$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^2$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$$

5.- Clasificar los puntos críticos

PUNTO	A	B	C	D	CONCLUSION	P12(X,Y,Z)
(0,0)	0	0	-4	-16	Punto de silla	(0,0,1)
(1,1)	12	12	-4	128	Punto minimo	(1,1,-1)
(-1,-1)	12	12	-4	128	Punto minimo	(-1,-1,-1)

Máximos y Mínimos con Restricción.

Sea la función $Z = f(x, y)$ continua en un dominio que esta restringido (acondicionada) a otra función $g(x, y) = k$ entonces para determinar los máximos y mínimos de una función se debe transformar en una sola función utilizando los multiplicadores de LaGrange λ, μ, γ

$$H(X, Y, \lambda) = F(x, y) + \lambda [g(x, y) - k]$$

$H(x, y, \lambda)$: La nueva función

$F(x, y)$: Función principal

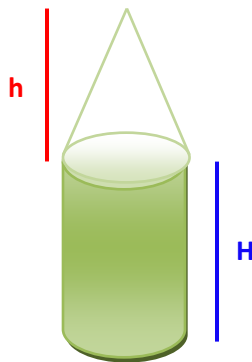
$G(x, y)$: Función condición

λ : Multiplicador de LaGrange

Ejemplo 1

Se desea construir un silo de la forma de un cilindro con un cono superpuesto si el radio del cilindro es de 5 y el área total de la superficie es 1000 hallar la altura H del cilindro y la altura h del cono de manera que el volumen sea máximo.

1.- Esquema y datos



$$h = ?$$

$$H = ?$$

Área total de la Superficie es 1000

$$\text{Area del Cono sin Base} = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$\text{Area del Cilindro sin Tapa} = 2\pi RH$$

2.- Identificar la función principal y la función condición.

- **Función.**

$$V = V_{\text{CONO}} + V_{\text{CILINDRO}}$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} + \pi R^2 H$$

$$V = \frac{25\pi h}{3} + 25\pi H$$

• Condición

$$A_T = A_{CILINDRO} + A_{CONO}$$

$$A_T = \pi R \sqrt{R^2 + h^2} + 2\pi R H$$

$$A_T = 5\pi \sqrt{25 + h^2} + 10\pi H = 1000$$

$$V(h, H, \lambda) = \frac{25}{3}\pi h + 25\pi H + \lambda (5\pi \sqrt{25 + h^2} + 10\pi H - 1000)$$

3.- Determinar los valores de h, H.

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{25}{3}\pi + \frac{5\pi\lambda h}{25+h^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = 25\pi + \lambda(10\pi) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{5\sqrt{25+h^2}}{3h} + 10\pi H - 1000 = 0 \quad (3)$$

Despejando λ e igualando λ_1 y λ_2

reemplazando h en 3

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$5\sqrt{25 + \sqrt{20}^2} + 10\pi H = 1000$$

$$-\frac{5\sqrt{25+h^2}}{3h} = -\frac{5}{2} \quad (-1)$$

$$5\sqrt{45} + 10\pi H = 1000$$

$$2\sqrt{25 + h^2} = 3h$$

$$H = \frac{1000 - 5\pi\sqrt{45}}{10\pi}$$

$$4(25 + h^2) = 9h^2$$

$$H = 28.47$$

$$100 + 4h^2 = 9h^2$$

$$5h^2 = 100$$

$$h = \sqrt{20} \rightarrow h = 4.47$$

4.- Conclusión

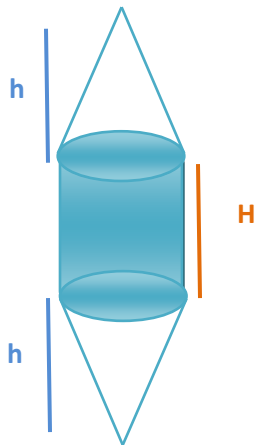
Para que el Volumen sea máximo las medidas deben ser $H = 28.47$ unidades ;

$$h = 4.47 \text{ unidades}$$

EJEMPLO 2

Un recipiente se construye con un cilindro circular recto de radio 5 m y con dos tapas cónicas en los extremos. Si el volumen 1000 m^3 . Hallar la altura H del cilindro y la altura h del conode manera que el área sea mínimo posible.

1.- Esquema y datos



$$R = 5m$$

$$V = 1000 \text{ m}^3$$

$$\text{Area del Cono sin Base} = 2\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$\text{Area del Cilindro sin Tapas} = 2\pi RH$$

2.- Identificar la función principal y la función condición.

- Función.

$$A = 2\pi R\sqrt{R^2 + h^2} + 2\pi RH$$

• Condición

$$V_T = 2V_{CONO} + V_{CILINDRO}$$

$$V_T = \frac{2\pi R^2 h}{3} + \pi R^2 H = 1000$$

$$A(h, H, \lambda) = 10\pi\sqrt{25 + h^2} + 10\pi H + \lambda \left(\frac{50\pi h}{3} + 25\pi H - 1000 \right)$$

3.- Determinar los valores de h, H.

$$\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{10\pi * 2h}{2\sqrt{25+h^2}} + \lambda \left(\frac{50}{3}\pi \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial H} = 10\pi + \lambda(25\pi) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = \frac{5\pi}{3}h + 25\pi H - 1000 = 0 \quad (3)$$

Despejando λ e igualando λ_1 y λ_2

reemplazando h en 3

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$\frac{50\pi\sqrt{20}}{3} + 25\pi H = 1000$$

$$-\frac{3h}{5\sqrt{25+h^2}} = -\frac{2}{5} \quad (-1)$$

$$H = \frac{1000 - \frac{50\pi\sqrt{20}}{3}}{25\pi}$$

$$3^2 h^2 = 2^2 (\sqrt{25 + h^2})^2$$

$$H = 9.75m$$

$$9h^2 = 4(25 + h^2)$$

$$5h^2 = 100$$

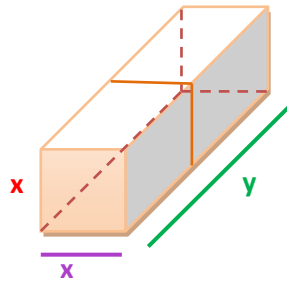
$$h = \sqrt{20} \rightarrow h = 4.47m$$

4.- Conclusión

Para que el área del recipiente sea mínimo las medidas deben ser: del cilindro $H = 9.75 \text{ m}$; la de los conos será de $h = 4.47 \text{ m}$

EJEMPLO 3

De acuerdo con los reglamentos postales, el perímetro mas largo de los paquetes enviados por correo de cuarta clases no puede exceder de 72 pulgadas. ¿Cuál es el mayor volumen posible de un paquete rectangular con dos lados cuadrados que puede ser enviado por correo de cuarta clase?

1.- Esquema y datos

$$x = ?$$

$$y = ?$$

$$P + \ell = 72 \text{ pulg}$$

$$V_{\max} = ?$$

2.- Identificar la función principal y la función condición.• **Función.**

$$V = x * x * z \longrightarrow V = x^2 z$$

• **Condición**

$$P + \ell = 72$$

$$4x + y - 72 = 0$$

$$F(x, y) = x^2 y + \lambda(4x + y - 72)$$

3.- Determinar los valores de x, y

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + \lambda(4) = 0$$

1

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \lambda = 0$$

2

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 4x + y - 72 = 0$$

3

Despejando λ e igualando λ_1 y λ_2

4 reemplazando en 3

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$-\frac{2xy}{4} = -x^2 \quad (-1)$$

$$y = 2x \quad (4)$$

$$4x + y - 72 = 0$$

$$4x + 2x = -72$$

$$6x = 72$$

$$x = \frac{72}{6} \rightarrow x = 12 \text{ pulg}$$

En 4

$$y = 2x$$

$$y = 2(12) \text{ pulg}$$

$$V = x^2 y$$

$$V = (12 \text{ pulg})^2 (24 \text{ pulg})$$

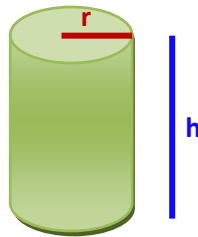
$$V = 3456 \text{ pulg}^3$$

4.- Conclusión El volumen máximo del paquete es de 3456 pulg³.

EJEMPLO 4

Use el hecho de que doce onzas líquidas son (aproximadamente 6.89π pulgadas cúbicas) Determinar las dimensiones de la lata de cerveza de 12 onzas que puede ser construida usando la menor cantidad de metal.

1.- Esquema y datos



$$r = ?$$

$$h = ?$$

$$\text{El volumen es de } 6.89 \pi \text{ pulg}^3$$

$$\text{Área Menor} = ?$$

2.- Identificar la función principal y la función condición.

- Función.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

- Condición

$$V = \pi r^2 h$$

$$6.89\pi = \pi r^2 h$$

$$r^2 h - 6.89 = 0$$

$$A(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi r h + \lambda(r^2 h - 6.89)$$

3.- Determinar los valores de h, r.

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi h + \lambda 2rh = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r + \lambda r^2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = r^2 h - 6.89 = 0 \quad (3)$$

Despejando λ e igualando λ_1 y λ_2

reemplazando 4 en 3

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$r^2 * 2r - 6.89 = 0$$

$$-\frac{2\pi(2r+h)}{2rh} = -\frac{2\pi r}{r^2} \quad (-1)$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6.89}{2}}$$

$$2r + h = 2h$$

$$r = 1.50 \text{ pulg.}$$

$$2h - h = 2r$$

$$h = 2r \quad (4) \longrightarrow$$

$$h = 2 \sqrt[3]{\frac{6.89}{2}}$$

$$h = 3.020 \text{ pulg}$$

4.- Conclusión

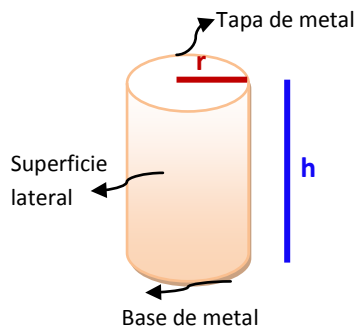
Las dimensiones deben ser para el Radio $r = 1.50 \text{ pulg}$; y para la altura $h = 3.020 \text{ pulg}$ para que se gaste lo mínimo en material.

EJEMPLO 5

Un envase cilíndrico contendrá 6π pulgadas cúbicas de jugo de naranja helado. El costo por pulgada cuadrada del metal para la elaboración de la tapa y de la base equivale a dos veces el costo por pulgada cuadrada del cartón para la parte lateral.

- ¿Cuáles son las dimensiones del envase menos costoso?
- ¿Cuántos cm^2 de cartón y de metal serán necesarios?

1.- Esquema y datos



$$a). r = ?$$

$$h = ?$$

$$C_{min} = ?$$

$$b). A_{cartón} = ?$$

$$A_{metal} = ?$$

El volumen es de $6\pi \text{ pulg}^3$

$$C_{M,T+B} = 2C_{CLA}$$

2.- Identificar la función principal y la función condición.

a).

- **Función.**

$$C_o = C_{T+B} + C_{SL}$$

$$C_o = 2(2\pi r^2) + 1(2\pi rh)$$

$$C_o = 4\pi r^2 + 2\pi rh$$

- **Condición**

$$V = \pi r^2 h$$

$$6\pi = \pi r^2 h$$

$$r^2h - 6 = 0$$

$$C_o(r, h, \lambda) = 2 \frac{Bs}{cm^2} (2\pi r^2) cm^2 + 1 \frac{Bs}{cm^2} 2\pi rh + \lambda(r^2h - 6)$$

$$C_o(r, h, \lambda) = 4\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(r^2h - 6)$$

3.- Determinar los valores de h, r.

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 8\pi r + 2\pi h + \lambda 2rh = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r + \lambda r^2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = r^2h - 6 = 0 \quad (3)$$

Despejando λ e igualando λ_1 y λ_2

reemplazando 4 en 3

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$r^2 * 4r - 6 = 0$$

$$-\frac{2\pi(4r+h)}{2rh} = -\frac{2\pi r}{r} \quad (-1)$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6}{4}}$$

$$4r + h = 2h$$

$$r = 1.14 \text{ pulg.}$$

$$2h - h = 4r$$

$$h = 4r \quad (4) \longrightarrow$$

$$h = 4 \sqrt[3]{\frac{6}{4}}$$

$$h = 4.56 \text{ pulg}$$

b). $A_{cartón} = 2\pi rh$

$$A_{cartón} = 2\pi(1.14 \text{ pulg})(4.56 \text{ pulg})$$

$$A_{cartón} = 32.66 \text{ pulg}^2 \frac{6.54^2 cm^2}{pulg^2}$$

$$A_{cartón} = 210.7 \text{ cm}^2$$

$$A_{metal} = 2\pi r^2$$

$$A_{metal} = 2\pi(1.14 \text{ pulg}^2) * \frac{(2.54)^2 \text{ cm}^2}{\text{pulg}^2}$$

$$A_{metal} = 52.65 \text{ cm}^2$$

4.- Conclusión

- a). las dimensiones del envase son $r = 1.14 \text{ pulg}$ y $h = 4.56 \text{ pulg}$ para que el costo sea mínimo.
- b). Sera necesario 210.7 cm^2 de cartón y 52.65 cm^2 en metal.