Optimización y Programación Lineal

Introducción al Método Simplex

30 de enero de 2011

Introducción

En esta lectura daremos una introducción al método Simplex desarrollado por George Bernard Dantzig (8 de noviembre de 1914 13 de mayo de 2005) en 1947. Este método se basa en la conversión del problema con restricciones con desigualdades en un problema cuyas restricciones son ecuaciones lineales.

Forma Estándar

Un modelo de PL se dice que está en su forma estándar si cada restricción es una igualdad y las restricciones de signo para cada variable son del tipo mayor o igual que cero.

Forma Estándar

Un modelo de PL se dice que está en su forma estándar si cada restricción es una igualdad y las restricciones de signo para cada variable son del tipo mayor o igual que cero.

Ejemplo

No está en la forma estándar:

$$\text{Max}\, z = 3\,x + 2\,y$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & y & \leq & 100 \\ x & + & y & \leq & 80 \\ x & & & \leq & 40 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Conversión a la Forma Estándar

El algoritmo Simplex para resolver modelos de programación lineal requiere que el modelo esté en su forma estándar. Lo que se hace es convertir el modelo a la forma estándar. Esto se logra introduciendo nuevas variables, algunas de las cuales reemplazarán a las variables originales.

Conversión a la Forma Estándar

El algoritmo Simplex para resolver modelos de programación lineal requiere que el modelo esté en su forma estándar. Lo que se hace es convertir el modelo a la forma estándar. Esto se logra introduciendo nuevas variables, algunas de las cuales reemplazarán a las variables originales.

- Para cada restricción del tipo $\leq$ se introduce una nueva variable de holgura (*slack variable*) s_i que **se suma** al primer miembro y la desigualdad se convierte en igualdad; se añade la restricción de signo a la nueva variable $s_i \geq 0$.

Conversión a la Forma Estándar

El algoritmo Simplex para resolver modelos de programación lineal requiere que el modelo esté en su forma estándar. Lo que se hace es convertir el modelo a la forma estándar. Esto se logra introduciendo nuevas variables, algunas de las cuales reemplazarán a las variables originales.

- Para cada restricción del tipo $\leq$ se introduce una nueva variable de holgura (*slack variable*) s_i que **se suma** al primer miembro y la desigualdad se convierte en igualdad; se añade la restricción de signo a la nueva variable $s_i \geq 0$.
- Para cada restricción del tipo $\geq$ se introduce una nueva variable de exceso (*excess variable*) e_i que **se resta** al primer miembro y la desigualdad se convierte en igualdad; se añade la restricción de signo a la nueva variable $e_i \geq 0$.

- Para cada variable x_i que tiene restricción de signo del tipo ≤ 0, se cambian todas las apariciones de x_i en el modelo por la expresión $-x_i'$ donde x_i' es una nueva variable con restricción de signo $x_i' \geq 0$.

- Para cada variable x_i que tiene restricción de signo del tipo ≤ 0, se cambian todas las apariciones de x_i en el modelo por la expresión $-x_i'$ donde x_i' es una nueva variable con restricción de signo $x_i' \geq 0$.
- Para cada variable x_i que no tiene restricción de signo se cambian todas las apariciones de ella en el modelo por la expresión $x_i' - x_i''$ donde x_i' y x_i'' son dos nuevas variables con restricción de signo $x_i' \geq 0$ y $x_i'' \geq 0$.

Ejemplos de Conversión a la Forma Estándar

Ejemplo

Convierta a la forma estándar:

$$\text{Max}\, z = 3\,x + 2\,y$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcll}
2\,x & + & y & \leq & 100 & : R_1 \\
x & + & y & \leq & 80 & : R_2 \\
x & & & \leq & 40 & : R_3 \\
 & & x & \geq & 0 & \\
 & & y & \geq & 0 &
\end{array}$$

Ejemplos de Conversión a la Forma Estándar

Ejemplo

Convierta a la forma estándar:

$$\text{Max}\, z = 3\,x + 2\,y$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcll} 2\,x & + & y & \leq & 100 & : R_1 \\ x & + & y & \leq & 80 & : R_2 \\ x & & & \leq & 40 & : R_3 \\ & & x & \geq & 0 & \\ & & y & \geq & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccc} \text{Max} & z & = & 3\,x & + & 2\,y & & & & & & & & \\ R_1 & \rightarrow & 2\,x & + & y & + & s_1 & & & & & = & 100 \\ R_2 & \rightarrow & x & + & y & & & + & s_2 & & & = & 80 \\ R_3 & \rightarrow & x & & & & & & & + & s_3 & = & 40 \end{array}$$

Satisfaciendo las variables de decisión $x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

Ejemplo

Convierta a la forma estándar:

$$\text{Max}\, z = 50\,x_1 + 20\,x_2 + 30\,x_3$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcrcl}
400\,x_1 & + & 200\,x_2 & + & 150\,x_3 & \geq & 500 \\
3\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & \leq & 6 \\
2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & \geq & 10 \\
2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & = & 8
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Usando las reglas descritas previamente se introducen las nuevas variables e_1, s_1 y e_2 para las restricciones 1, 2 y 3 respectivamente. El nuevo modelo PL queda:

$$\text{Max}\, z = 50\,x_1 + 20\,x_2 + 30\,x_3$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
400\,x_1 & + & 200\,x_2 & + & 150\,x_3 & - & e_1 & & & & & = & 500 \\
3\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & + & s_1 & & & = & 6 \\
2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & & & & & - & e_2 & = & 10 \\
2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 8
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, s_1 \geq 0$$

Solución básica

Una solución básica (SB) a un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $m \times n$ $(n \geq m)$ es una solución al sistema que se obtiene haciendo cero $n - m$ variables y que resulta en un sistema con solución única. A una variable de decisión que deliberadamente se hace cero se le llama variables no básica (VNB) y mientras que a aquélla que se conserva dentro del nuevo sistema se le llama variable básica (VB).

Ejemplo

Determine las soluciones básicas al sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Ejemplo

Determine las soluciones básicas al sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

En este caso: $m = 2 =$número de ecuaciones y $n = 3 =$número de incógnitas. Por tanto, las soluciones básicas se obtienen haciendo cero $n - m = 3 - 2 = 1$ variable. Siendo $n = 3$ el número de variables, tenemos:

$$\begin{pmatrix} n \\ n-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3!}{1! \times (3-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \times 1 \cdot 2} = 3 \,\text{posibles SB}$$

- VNBs $= \{x_1\}$. Haciendo $x_1 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rrrrrrr} + & x_2 & & & = & 3 \\ - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

dando como solución : $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 2$.

- $\text{VNBs} = \{x_1\}$. Haciendo $x_1 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rrrrl} + & x_2 & & & = & 3 \\ - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

  dando como solución : $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 2$.

- $\text{VNBs} = \{x_2\}$. Haciendo $x_2 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rrrrl} + & x_1 & & & = & 3 \\ & & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

  dando como solución : $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ y $x_3 = -1$.

- VNBs $= \{x_1\}$. Haciendo $x_1 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rrrrrrr} + & x_2 & & & = & 3 \\ - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

dando como solución : $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 2$.

- VNBs $= \{x_2\}$. Haciendo $x_2 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rrrrrrr} + & x_1 & & & = & 3 \\ & & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

dando como solución : $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ y $x_3 = -1$.

- VNBs $= \{x_3\}$. Haciendo $x_3 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rrrrrrr} + & x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ & & - & x_2 & = & -1 \end{array}$$

dando como solución : $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$.

Ejemplo

Determine las soluciones básicas al sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Ejemplo

Determine las soluciones básicas al sistema:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & = & 3
\end{array}
$$

En este ejemplo hay $3!/(1! \times (3-1)!) = 3$ posibles soluciones básicas.

Ejemplo

Determine las soluciones básicas al sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

En este ejemplo hay $3!/(1! \times (3-1)!) = 3$ posibles soluciones básicas.

- VNBs $= \{x_1\}$. Haciendo $x_1 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ + & 4\,x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

dando como solución : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$.

Ejemplo

Determine las soluciones básicas al sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

En este ejemplo hay $3!/(1! \times (3-1)!) = 3$ posibles soluciones básicas.

- VNBs $= \{x_1\}$. Haciendo $x_1 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & + & 4\,x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

  dando como solución : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$.

- VNBs $= \{x_2\}$. Haciendo $x_2 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & + & x_1 & + & x_3 & = & 1 \\ & + & 2\,x_1 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

  dando como solución : $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = -1$.

- VNBs $= \{x_3\}$. Haciendo $x_3 = 0$ el sistema original queda:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & = & 3 \end{array}$$

este sistema es inconsistente. Por tanto, no hay solución básica correspondiente a VNBs $= \{x_3\}$.

Solución básica factible

Una solución básica factible (SBF) a un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $m \times n$ $(n \geq m)$ es una solución básica con valores **no negativos** para las variables de decisión.

Ejemplo

Determina las soluciones básicas factibles del sistema estándar correspondiente a la región que definen las restricciones

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 40 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 60 \end{array}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Ejemplo

Determina las soluciones básicas factibles del sistema estándar correspondiente a la región que definen las restricciones

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 40 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 60 \end{array}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

La forma estándar es:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 40 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & = & 60 \end{array}$$

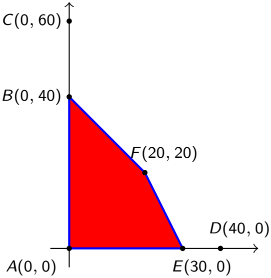
y cumpliendo $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$.

En este caso desaparecemos $4-2$ variables para obtener las SB:

- $VNBs = \{x_1, x_2\} \rightarrow VB = \{s_1 = 40, s_2 = 60\}$ A(0,0)
- $VNBs = \{x_1, s_1\} \rightarrow VB = \{x_2 = 40, s_2 = 20\}$ B(0,40)
- $VNBs = \{x_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_2 = 60, s_1 = -20\}$ C(0,60), no es solución básica factible
- $VNBs = \{x_2, s_1\} \rightarrow VB = \{x_1 = 40, s_2 = -20\}$ D(40,0), no es solución básica factible
- $VNBs = \{x_2, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 30, s_1 = 10\}$ E(30,0)
- $VNBs = \{s_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}$ F(20,20)

En este caso desaparecemos $4 - 2$ variables para obtener las SB:

- $VNBs = \{x_1, x_2\} \rightarrow VB = \{s_1 = 40, s_2 = 60\}$ A(0,0)
- $VNBs = \{x_1, s_1\} \rightarrow VB = \{x_2 = 40, s_2 = 20\}$ B(0,40)
- $VNBs = \{x_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_2 = 60, s_1 = -20\}$ C(0,60), no es solución básica factible
- $VNBs = \{x_2, s_1\} \rightarrow VB = \{x_1 = 40, s_2 = -20\}$ D(40,0), no es solución básica factible
- $VNBs = \{x_2, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 30, s_1 = 10\}$ E(30,0)
- $VNBs = \{s_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}$ F(20,20)



Dirección de No Acotamiento

Considere un modelo PL en su forma estándar con región factible S y con restricciones $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Un vector **no cero d** es una dirección de no acotamiento si para para cualquier $\mathbf{x} \in S$ y para cualquier escalar $c \geq 0$ se cumple que $\mathbf{x} + c\,\mathbf{d}$ está en S.

Se demuestra: **Teorema**

> $\mathbf{d}$ *es una dirección de no acotamiento si y sólo si* $\mathbf{d}$ *cumple que* $\mathbf{A}\,\mathbf{d} = \mathbf{0}$ *y* $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$.

Ejemplo

Determine las SBF y direcciones de no acotamiento para la región

$$2\,x_1 + 3\,x_2 \geq 6$$

cumpliendo $x_1, x_2 \geq 0$.

Ejemplo

Determine las SBF y direcciones de no acotamiento para la región

$$2\,x_1 + 3\,x_2 \geq 6$$

cumpliendo $x_1, x_2 \geq 0$.

La forma estándar queda

$$2\,x_1 + 3\,x_2 - e_1 = 6$$

con $x_1, x_2, e_1 \geq 0$.

- $VNBs = \{x_1, x_2\} \rightarrow VB = \{e_1 = -6\}$ A(0,0) NF
- $VNBs = \{x_1, e_1\} \rightarrow VB = \{x_2 = 2\}$ B(0,2) SBF
- $VNBs = \{x_2, e_1\} \rightarrow VB = \{x_1 = 3\}$ C(3,0) SBF

- $VNBs = \{x_1, x_2\} \rightarrow VB = \{e_1 = -6\}$ A(0,0) NF
- $VNBs = \{x_1, e_1\} \rightarrow VB = \{x_2 = 2\}$ B(0,2) SBF
- $VNBs = \{x_2, e_1\} \rightarrow VB = \{x_1 = 3\}$ C(3,0) SBF

Encontramos la solución general para $2\,x_1 + 3\,x_2 - e_1 = 0$ despejando e_1:
$e_{=}2\,x_1 + 3\,x_2$ es decir, que la dirección de no acotamiento es:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 \end{pmatrix}$$

le podemos dar valores a x_1, x_2 para generar direcciones de no acotamiento. Por ejemplo, $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$ dando la dirección $\mathbf{d} =< 1, 0, 2 >$ cuya proyección en el espacio con x_1 y x_2 es el eje x. También podemos elegir $x_2 = 1$ y $x_1 = 0$ dando la dirección $\mathbf{d} =< 0, 1, 3 >$ cuya proyección en el espacio con x_1 y x_2 es el eje y. Inclusive podemos tomar $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ dando la dirección $\mathbf{d} =< 1, 1, 5 >$.

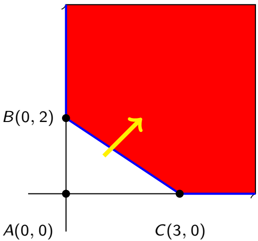


Figura: Dirección de no acotamiento para el ejemplo

Ejemplo

Determine las SBF y direcciones de no acotamiento para la región

$$\begin{array}{rcrcr} 7\,x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 28 \\ 2\,x_1 & + & 12\,x_2 & \geq & 24 \end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

Ejemplo

Determine las SBF y direcciones de no acotamiento para la región

$$\begin{array}{rcrcr} 7\,x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 28 \\ 2\,x_1 & + & 12\,x_2 & \geq & 24 \end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

La forma estándar queda

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & s_1 & & & = & 28 \\ 2\,x_1 & + & 12\,x_2 & & & - & s_2 & = & 24 \end{array}$$

con $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$.

- $VNBs = \{x_1, x_2\} \rightarrow VB = \{s_1 = -24, s_2 = -28\}$ A(0,0) NF
- $VNBs = \{x_1, s_1\} \rightarrow VB = \{x_2 = 14, s_2 = 144\}$ B(0,14)
- $VNBs = \{x_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_2 = 2, s_1 = -24\}$ C(0,2) NF
- $VNBs = \{x_2, s_1\} \rightarrow VB = \{x_1 = 4, s_2 = -16\}$ D(4,0) NF
- $VNBs = \{x_2, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 12, s_1 = 56\}$ E(12,0)
- $VNBs = \{s_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 18/5, x_2 = 7/5\}$ F(18/5,7/5)

- $VNBs = \{x_1, x_2\} \rightarrow VB = \{s_1 = -24, s_2 = -28\}$ A(0,0) NF
- $VNBs = \{x_1, s_1\} \rightarrow VB = \{x_2 = 14, s_2 = 144\}$ B(0,14)
- $VNBs = \{x_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_2 = 2, s_1 = -24\}$ C(0,2) NF
- $VNBs = \{x_2, s_1\} \rightarrow VB = \{x_1 = 4, s_2 = -16\}$ D(4,0) NF
- $VNBs = \{x_2, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 12, s_1 = 56\}$ E(12,0)
- $VNBs = \{s_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 18/5, x_2 = 7/5\}$ F(18/5,7/5)

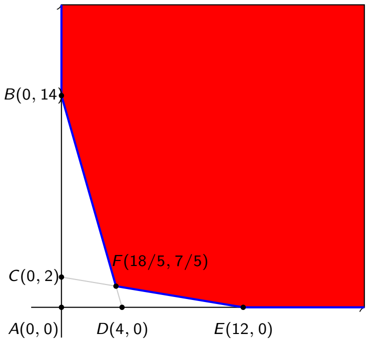


Figura: No acotamiento

Resolviendo $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 7\,x_1 + 2\,x_2 \\ 2\,x_1 + 12\,x_2 \end{pmatrix}$$

Haciendo $x_1 = x_2 = 1$ obtenemos una dirección de no acotamiento:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Determine las SBF y direcciones de no acotamiento para la región

$$\begin{array}{rcrcrcr} & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ - & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ - & x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

Ejemplo

Determine las SBF y direcciones de no acotamiento para la región

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ - & & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ - & & x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

Ejemplo

Determine las SBF y direcciones de no acotamiento para la región

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ x_1 & & & \leq & 1 \\ & + & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

Relación entre SBF y los extremos de RF

Un punto clave que relaciona la parte geométrica con la parte algebraica es el siguiente resultado teórico:

Teorema

La región factible a un modelo lineal corresponde a un conjunto convexo, y a cada extremo de la región le corresponde una SBF de su forma estándar y a cada SBF le corresponde un extremo de la región factible.

El siguiente resultado dice que todos los puntos de la región factible pueden obtenerse mediante conbinaciones lineales convexas de los extremos. Inclusive, cuando la región factible es no acotada todos los puntos de la región factible se obtienen trasladando las combinaciones convexas por direcciones de no acotamiento.

Teorema

Considere un modelo PL en la forma estándar que tiene como soluciones básicas factibles a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$*. Cualquier punto en la región factible puede ser escrito en la forma:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \, \mathbf{b}_i$$

donde $\mathbf{d}$ *es el vector cero o es una dirección de no acotamiento y se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i = 1$$

y $\sigma_i \geq 0$*.*

Los puntos donde ocurren los óptimos

Teorema

Si un modelo PL tiene solución óptima, entonces tiene una solución básica factible óptima.

Los puntos donde ocurren los óptimos

Teorema
Si un modelo PL tiene solución óptima, entonces tiene una solución básica factible óptima.

Sea $\mathbf{x}_o$ una solución óptima. Entonces $\mathbf{x}_o$ puede escribirse de la forma:

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \, \mathbf{b}_i$$

donde $\mathbf{b}_k$ son las SBF al PL, $\mathbf{d}$ es el vector cero o es el vector de dirección de no acotamiento y $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i = 1$ y $\sigma_i \geq 0$. Suponga que la función objetivo es $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \bullet \mathbf{x}$. Existen tres casos posibles para $\mathbf{c} \bullet \mathbf{d}$:

Los puntos donde ocurren los óptimos

Teorema

Si un modelo PL tiene solución óptima, entonces tiene una solución básica factible óptima.

Sea $\mathbf{x}_o$ una solución óptima. Entonces $\mathbf{x}_o$ puede escribirse de la forma:

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \, \mathbf{b}_i$$

donde $\mathbf{b}_k$ son las SBF al PL, $\mathbf{d}$ es el vector cero o es el vector de dirección de no acotamiento y $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i = 1$ y $\sigma_i \geq 0$. Suponga que la función objetivo es $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \bullet \mathbf{x}$. Existen tres casos posibles para $\mathbf{c} \bullet \mathbf{d}$:

- $\mathbf{c} \bullet \mathbf{d} > 0$: Como para cualquier $k > 0$, $\mathbf{y}_k = k\,\mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \, \mathbf{b}_i$ es una solución factible, entonces

$$\mathbf{c} \bullet \mathbf{y}_k = k\,(\mathbf{c} \bullet \mathbf{d}) + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \, \mathbf{c} \bullet \mathbf{b}_i$$

podría hacerse crecer indefinidamente. Contradiciendo el hecho de que en $\mathbf{x}_o$

- $\mathbf{c} \bullet \mathbf{d} < 0$: Como $\mathbf{y} = 0\,\mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\, \mathbf{b}_i$ es una solución factible, entonces

$$\mathbf{c} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\, \mathbf{c} \bullet \mathbf{b}_i > \mathbf{c} \bullet \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\, \mathbf{c} \bullet \mathbf{b}_i = \mathbf{c} \bullet \mathbf{x}_o$$

Contradiciendo el hecho de que en $\mathbf{x}_o$ alcanzó un óptimo.

- $\mathbf{c} \bullet \mathbf{d} < 0$: Como $\mathbf{y} = 0\,\mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,\mathbf{b}_i$ es una solución factible, entonces

$$\mathbf{c} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,\mathbf{c} \bullet \mathbf{b}_i > \mathbf{c} \bullet \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,\mathbf{c} \bullet \mathbf{b}_i = \mathbf{c} \bullet \mathbf{x}_o$$

Contradiciendo el hecho de que en $\mathbf{x}_o$ alcanzó un óptimo.

- $\mathbf{c} \bullet \mathbf{d} = 0$: Así

$$\mathbf{c} \bullet \mathbf{x}_o = \mathbf{c} \bullet \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,\mathbf{c} \bullet \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,\mathbf{c} \bullet \mathbf{b}_i$$

Si suponemos que $\mathbf{b}_j$ es la SBF con mayor evaluación en la función objetivo ($\mathbf{c}\,\mathbf{b}_i \leq \mathbf{c}\,\mathbf{b}_j$ para toda $i = 1, 2, \ldots, k$). Entonces

$$\mathbf{c}\,\mathbf{x}_o = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}_i \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}_j = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\right) \mathbf{c}\,\mathbf{b}_j = \mathbf{c}\,\mathbf{b}_j$$

Como $\mathbf{x}_o$ es óptimo se deduce que $\mathbf{c}\,\mathbf{x}_o = \mathbf{c}\,\mathbf{b}_j$. Es decir, que la SBF $\mathbf{b}_j$ es también un óptimo para el PL.

SBF Adyacentes

Una definción importante que relaciona la parte geométrica con la parte algebraica.

Para un modelo PL con m restricciones, dos soluciones básicas factibles se dicen ser soluciones básicas factibles adyacentes si acaso tienen $m-1$ variables básicas en común.

Ejemplo

Determine las SBFs y encuentre sus relaciones de adyacencia al siguiente PL:

$$\text{Maximice } z = 4\,x_1 + 3\,x_2$$

sujeto a:

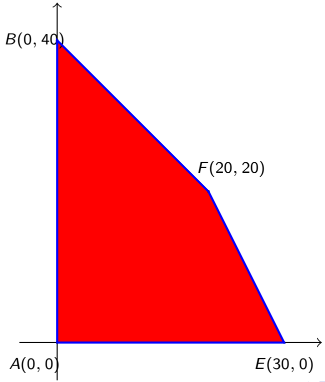
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 40 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & = & 60 \end{array}$$

y cumpliendo $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$.

Este problema tiene como FBS:

- $VNBs = \{x_1, x_2\} \rightarrow VB = \{s_1 = 40, s_2 = 60\}$ A(0,0)
- $VNBs = \{x_1, s_1\} \rightarrow VB = \{x_2 = 40, s_2 = 20\}$ B(0,40)
- $VNBs = \{x_2, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 30, s_1 = 10\}$ E(30,0)
- $VNBs = \{s_1, s_2\} \rightarrow VB = \{x_1 = 20, x_2 = 20\}$ F(20,20)

Son adyacentes: A(0,0) y B(0,40), A(0,0) y E(30,0), B(0,40) y F(20,20), y E(30,0) y F(20,20).



Algoritmo Simplex

El algoritmo Simplex procede de la siguiente manera:

1. Convierta el modelo PL a su forma estándar.
2. Obtenga una SBF a la forma estándar.
3. Determine si la SBF es óptima: Si hay una variable no básica cuyo aumento hace que el valor actual de la función a maximizar suba, entonces la solución actual no es óptima.
4. Si la SBF no es óptima, determine la variable no-básica que debería convertise en básica (la de mayor impacto en la función objetivo) y cuál variable básica debería convertise en una no-básica (la que impone una restricción mayor a la variable de mayor impacto). Con la selección anterior y usando operaciones elementales de renglón determine una SBF nueva adyacente a la anterior.
5. Reinicie con el paso 3 y con la nueva SBF.

Ejemplo

Ejemplo

Muebles Dakota construye escritorios, mesas y sillas. La construcción de cada tipo de mueble requiere madera, mano de obra en carpintería y mano de obra en terminado.

Recurso	Escritorio	Mesa	Silla
Madera(pies)	8	6	1
Terminado (horas)	4	2	1.5
Carpintería (horas)	2	1.5	0.5

Actualmente se tiene disponibles 48 pies de madera, 20 horas de terminado y 8 horas de carpintería. Un escritorio se vende en $60, una mesa en $30 y una silla en $20. La compañía cree que la demanda por escritorios y sillas es ilímitada, pero que a lo más 5 mesas se pueden vender. Como los recursos están disponibles, la compañia sólo desea maximizar las ventas.

El modelo PL se formula como:

- Variables de decisión:
  - $x_1 =$ Número de escritorios a producirse
  - $x_2 =$ Número de mesas a producirse
  - $x_3 =$ Número de sillas a producirse
- Objetivo:

$$\text{Maximizar ventas } z = 60\,x_1 + 30\,x_2 + 20\,x_3$$

- Restricciones:
  - Por madera disponible (pies): $8\,x_1 + 6\,x_2 + x_3 \leq 48$
  - Por horas de terminado disponibles: $4\,x_1 + 2\,x_2 + 1.5\,x_3 \leq 20$
  - Por horas de carpintería disponibles: $2\,x_1 + 1.5\,x_2 + 0.5\,x_3 \leq 8$
  - Por demanda: $x_2 \leq 5$
  - De signo: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

En la forma estándar con la función objetivo vista a su vez como ecuación queda:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
z & - & 60\,x_1 & - & 30\,x_2 & - & 20\,x_3 & & & & & & & & = 0 \\
 & & 8\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & & & & & = 48 \\
 & & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 1.5\,x_3 & & & + & s_2 & & & & = 20 \\
 & & 2\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & & & + & s_3 & & = 8 \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & & + \;\; s_4 & = 5
\end{array}
$$

En la forma estándar con la función objetivo vista a su vez como ecuación queda:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
z & - & 60\,x_1 & - & 30\,x_2 & - & 20\,x_3 & & & & & & & & = 0 \\
 & & 8\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & & & & & = 48 \\
 & & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 1.5\,x_3 & & & + & s_2 & & & & = 20 \\
 & & 2\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & & & + & s_3 & & = 8 \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & & + \;\; s_4 & = 5
\end{array}$$

Una solución básica factible (en rojo las variables y en azul sus valores):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
{\color{red}z} & - & 60\,x_1 & - & 30\,x_2 & - & 20\,x_3 & & & & & & & & = {\color{blue}0} \\
 & & 8\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & + & {\color{red}s_1} & & & & & & = {\color{blue}48} \\
 & & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 1.5\,x_3 & & & + & {\color{red}s_2} & & & & = {\color{blue}20} \\
 & & 2\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & & & + & {\color{red}s_3} & & = {\color{blue}8} \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & & + \;\; {\color{red}s_4} & = {\color{blue}5}
\end{array}$$

Las variables básicas son z, s_1, s_2, s_3 y s_4. Mientras que las no básicas son x_1, x_2 y x_3. Observamos que si incrementamos cualquiera de las variables no básicas el valor de z se incrementa. Esta observación se deduce de que los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 son negativos en la ecuación de la función objetivo. De esta observación determinamos que la SBF actual no es óptima.

Las variables básicas son z, s_1, s_2, s_3 y s_4. Mientras que las no básicas son x_1, x_2 y x_3. Observamos que si incrementamos cualquiera de las variables no básicas el valor de z se incrementa. Esta observación se deduce de que los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 son negativos en la ecuación de la función objetivo. De esta observación determinamos que la SBF actual no es óptima.
Observamos que de estas variables, la que tiene el coeficientes negativo más grande es x_1. Así el aumento de x_1 tiene un mayor impacto en el crecimiento de z. Esta variable no básica se llamará variable entrante. Así que tomaremos la decisión de aumentar el valor de x_1, que ahora es cero pues es variable no básica.

Las variables básicas son z, s_1, s_2, s_3 y s_4. Mientras que las no básicas son x_1, x_2 y x_3. Observamos que si incrementamos cualquiera de las variables no básicas el valor de z se incrementa. Esta observación se deduce de que los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 son negativos en la ecuación de la función objetivo. De esta observación determinamos que la SBF actual no es óptima.
Observamos que de estas variables, la que tiene el coeficientes negativo más grande es x_1. Así el aumento de x_1 tiene un mayor impacto en el crecimiento de z. Esta variable no básica se llamará variable entrante. Así que tomaremos la decisión de aumentar el valor de x_1, que ahora es cero pues es variable no básica. Sin embargo, no podemos aumentar indiscriminadamente el valor de x_1. Debemos revisar las restricciones para ver si una de ellas le impone límite al valor que puede tomar x_1. Este límite lo vamos a obtener recordando que sólo debemos manejar soluciones básicas factibles, es decir, soluciones donde no puede haber variables de decisión con valor negativo.

La variable no-básica de mayor impacto benéfico sobre z es x_1 (la variable entrante es la variable no-básica de mayor coeficiente negativo en el renglón de z):

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrl}
z & - & 60\,x_1 & - & 30\,x_2 & - & 20\,x_3 & & & & & & & & = 0 \\
 & & 8\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & & & & & = 48 \\
 & & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 1.5\,x_3 & & & + & s_2 & & & & = 20 \\
 & & 2\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & & & + & s_3 & & = 8 \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & & + \; s_4 & = 5
\end{array}$$

La variable no-básica de mayor impacto benéfico sobre z es x_1 (la variable entrante es la variable no-básica de mayor coeficiente negativo en el renglón de z):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcr}
z & - & 60\,x_1 & - & 30\,x_2 & - & 20\,x_3 & & & & & & & & & = & 0 \\
 & & 8\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & & & & & & = & 48 \\
 & & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 1.5\,x_3 & & & + & s_2 & & & & & = & 20 \\
 & & 2\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & & & + & s_3 & & & = & 8 \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & & + & s_4 & = & 5
\end{array}
$$

Ahora busquemos por cuál variable básica cambiar (por la que le permitiría un mayor crecimiento manteniendo la factibilidad).

Debemos tener en mente que x_1 es la única variable no básica que hemos decidido aumentar su valor. Es decir, que las variables no básicas x_2 y x_3 seguirán con valor cero. Con esto en mente las ecuaciones inferiores se convierten en las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcr} 8\,x_1 & + & s_1 & = & 48 \\ 4\,x_1 & + & s_2 & = & 20 \\ 2\,x_1 & + & s_3 & = & 8 \\ & & s_4 & = & 5 \end{array}$$

Si despejamos las variables básicas para ponerlas en función de x_1 obtenemos:

$$\begin{array}{rcrcr} s_1 & = & 48 & - & 8\,x_1 \\ s_2 & = & 20 & - & 4\,x_1 \\ s_3 & = & 8 & - & 2\,x_1 \\ s_4 & = & 5 & & \end{array}$$

Deducimos que la primera de estas ecuaciones impone a x_1 un creciemto máximo de $x_1 = 48/8 = 6$ (mayor que esto haría que el valor de s_1 se hace negativa); La segunda de estas relaciones impone a x_1 un crecimiento máximo de $x_1 = 20/4 = 5$ (mayor que esto haría que el valor de s_2 se haga negativa). La tercera de estas relaciones impone a x_1 un crecimiento máximo de $x_1 = 8/2 = 4$ (mayor que esto haría que el valor de s_3 se haga negativa). La última de estas restricciones no se ve afectada por un cambio en el valor de x_1. Como debemos mantener los valores de las variables de decisión no negativos, concluimos que el máximo valor que puede tomar x_1 es 4 (el menor valor de los antes mencionados). Y este valor ubica la variable básica que se hará cero. Es decir, que pasará a ser variable no básica. Esta variable se llamará variable saliente. Se dice que la variable saldrá de la base.

En términos algoritmicos, para determinar la variable básica saliente: para cada una de las ecuaciones inferiores se determina la razón entre los lados derechos de las ecuaciones dividida entre el coeficiente de la variable entrante en cada ecuación. Y de estas razones se escoge la más pequeña. La ecuación correspondiente a tal razón determina la variable básica saliente.
Si la variable entrante no aparece en la ecuación (cero como coeficiente) diremos que tal ecuación no limita el crecimiento de la variable entrante. Si la variable entrante tiene coeficiente negativo en una ecuación, cuando se hace el despeje de la variable básica correspondiente lo que se obtiene es una fórmula que no limita el crecimiento de la variable entrante pues la variable básica correspondiente aumentaría de valor; siendo no negativa, sería siendo no negativa. Por tanto, para motivos de determinar el valor máximo al que se puede incrementa la variable entrante, se determinará la menor razón entre los lados derechos y los coeficientes positivos. Como los lados derechos de las ecuaciones inferiores contienen los valores de las variables básicas estos ninguno de estos será negativo. la variable saliente es la variable básica en cuyo renglón la variable entrante tiene coeficiente positivo y la razón:

$$\frac{\text{Lado derecho del renglón}}{\text{Coeficiente de la variable entrante en el renglón}}$$

es el más pequeño.

Al aplicar la regla, identificamos que s_3 es la variable saliente debido a que es la que más limita el creciemiento de x_1:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
z & - & 60\,x_1 & - & 30\,x_2 & - & 20\,x_3 & & & & & & & = 0 & \\
 & & 8\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & & & & = 48 & 6 \\
 & & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 1.5\,x_3 & & & + & s_2 & & & = 20 & 5 \\
 & & 2\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & & & + & \boxed{s_3} & = 8 & \boxed{4} \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & + \; s_4 & = 5 &
\end{array}
$$

Al aplicar la regla, identificamos que s_3 es la variable saliente debido a que es la que más limita el creciemiento de x_1:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccl}
z & - & 60\,x_1 & - & 30\,x_2 & - & 20\,x_3 & & & & & & & = 0 & \\
 & & 8\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & & & & = 48 & 6 \\
 & & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 1.5\,x_3 & & & + & s_2 & & & = 20 & 5 \\
 & & 2\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & & & + & \boxed{s_3} & = 8 & \boxed{4} \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & + \; s_4 & = 5 &
\end{array}
$$

En el renglón de la variable saliente, la variable entrante debe tener coeficiente 1: La operación que debe hacerse es dividir el renglón entre el coeficiente de la variable entrante en él, en este caso 2, obteniéndose:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccl}
z & - & 60\,x_1 & - & 30\,x_2 & - & 20\,x_3 & & & & & & & & = 0 \\
 & & 8\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & & & & & = 48 \\
 & & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 1.5\,x_3 & & & + & s_2 & & & & = 20 \\
 & & x_1 & + & 0.75\,x_2 & + & 0.25\,x_3 & & & & & + & 0.5\,s_3 & & = 4 \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & & + \; s_4 & = 5
\end{array}
$$

Se realizan operaciones de eliminación pivoteando con el renglón de la variable saliente y utilizando la variable entrante:

- $E_0 \leftarrow E_0 + 60\, E_3$,
- $E_1 \leftarrow E_1 - 8\, E_3$,
- $E_2 \leftarrow E_1 - 4\, E_3$

obteniendo:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
z & & + & 15\,x_2 & - & 5\,x_3 & & & & & + & 30\,s_3 & & & = 240 \\
 & & & & - & x_3 & + & s_1 & & & - & 4\,s_3 & & & = 16 \\
 & & - & x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & + & s_2 & - & 2\,s_3 & & & = 4 \\
 & x_1 & + & 0.75\,x_2 & + & 0.25\,x_3 & & & & & + & 0.5\,s_3 & & & = 4 \\
 & & & x_2 & & & & & & & & & + & s_4 & = 5
\end{array}
$$

La variable no-básica de mayor impacto benéfico sobre z es x_3 (la variable entrante es la variable no-básica de mayor coeficiente negativo en el renglón de z) y buscamos la variable básica saliente:

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
z & + & 15\,x_2 & - & 5\,x_3 & & & & & + & 30\,s_3 & & = 240 & \\
 & & & - & x_3 & + & s_1 & & & - & 4\,s_3 & & = 16 & NR \\
 & - & x_2 & + & 0.5\,x_3 & & & + & \boxed{s_2} & - & 2\,s_3 & & = 4 & \boxed{8} \\
x_1 & + & 0.75\,x_2 & + & 0.25\,x_3 & & & & & + & 0.5\,s_3 & & = 4 & 16 \\
 & & x_2 & & & & & & & & & + \; s_4 & = 5 & NR
\end{array}
$$

En el renglón de la variable saliente la variable entrante debe tener coeficiente 1: La operación que debe hacerse es dividir el renglón entre el coeficiente de la variable entrante en él:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
z & + & 15\,x_2 & - & 5\,x_3 & & & & & + & 30\,s_3 & & & = 240 \\
 & & & - & x_3 & + & s_1 & & & - & 4\,s_3 & & & = 16 \\
 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & & & + & 2\,s_2 & - & 4\,s_3 & & & = 8 \\
x_1 & + & 0.75\,x_2 & + & 0.25\,x_3 & & & & & + & 0.5\,s_3 & & & = 4 \\
 & & x_2 & & & & & & & & & + & s_4 & = 5
\end{array}
$$

Se realizan operaciones de eliminación pivoteando con el renglón de la variable saliente y utilizando la variable entrante:

- $E_0 \leftarrow E_0 + 5\,E_2$,
- $E_1 \leftarrow E_1 + E_2$,
- $E_3 \leftarrow E_1 - 0.25\,E_2$

obteniendo:

$$
\begin{array}{cccrcccccrcrccl}
z & & & + & 5\,x_2 & & & & & + & 10\,s_2 & + & 10\,s_3 & & = 280 \\
 & & & - & 2\,x_2 & & & + & s_1 & & 2\,s_2 & - & 8\,s_3 & & = 24 \\
 & & & - & 2\,x_2 & + & x_3 & & & + & 2\,s_2 & - & 4\,s_3 & & = 8 \\
 & x_1 & & + & 1.25\,x_2 & + & & & & - & 0.5\,s_2 & + & 1.5\,s_3 & & = 2 \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & & + \; s_4 & = 5
\end{array}
$$

La solución básica encontrada es $z = 280$, $x_1 = 2$, $x_3 = 8$, $s_1 = 24$, $s_4 = 5$: $x_2 = 0$ y $s_2 = 0$.

Ejemplo

Ejemplo

Resuelve el siguiente modelo PL:

$$\text{Maximice } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrl} 4\,x_1 & + & x_2 & \leq 80 \\ x_1 & + & x_2 & \leq 60 \\ x_1 & & & \leq 20 \end{array}$$

con $x_1, x_2 \geq 0$.

La forma estándar es:

$$\text{Maximice } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 4\,x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = 80 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & & & = 60 \\ x_1 & & & & & & & + & s_3 & = 40 \end{array}$$

La tabla Simplex (Tableau) inicia de la siguiente forma:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB
1	-1	-1	0	0	0	0	z
0	4	1	1	0	0	80	s_1
0	1	1	0	1	0	60	s_2
0	1	0	0	0	1	40	s_3

La tabla Simplex (Tableau) inicia de la siguiente forma:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB
1	-1	-1	0	0	0	0	z
0	4	1	1	0	0	80	s_1
0	1	1	0	1	0	60	s_2
0	1	0	0	0	1	40	s_3

Al observar que la dentro de las variables no básicas existen algunas con coeficientes negativos concluimos que la SBF no es óptima. Escogemos la que tiene coeficientes negativo mayor o la primera de estas. Determinamos la variable no-básica entrante y las razones para ella:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB	
1	-1	-1	0	0	0	0	z	
0	4	1	1	0	0	80	$s_1 \rightarrow x_1$	$\boxed{20} = 80/4$
0	1	1	0	1	0	60	s_2	$60 = 60/1$
0	1	0	0	0	1	40	s_3	$40 = 40/1$

Después de hacer 1 el pivote y ceros en la columna correspondiente:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{4} R_2} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow[\,]{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - (-1)R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - (1)R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - (1)R_2}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & \boxed{1} & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & -1/4 & -/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

Después de hacer 1 el pivote y ceros en la columna correspondiente:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{4} R_2} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - (-1)R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - (1)R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - (1)R_2}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & \boxed{1} & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & -1/4 & -/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

Quedando la tabla del Simplex de la siguiente forma:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB
1	0	$-3/4$	$1/4$	0	0	20	z
0	1	$1/4$	$1/4$	0	0	20	x_1
0	0	$3/4$	$-1/4$	1	0	40	s_2
0	0	$-1/4$	$-1/4$	0	1	20	s_3

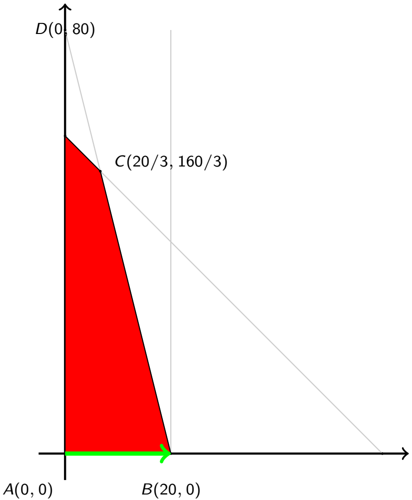


Figura: Cambio de SBF a otra SBF

Observamos que existen variables no básicas con coeficiente negativo y concluimos que la SBF actual no es óptima.

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB
1	0	$-3/4$	$1/4$	0	0	20	z
0	1	$1/4$	$1/4$	0	0	20	x_1
0	0	$3/4$	$-1/4$	1	0	40	s_2
0	0	$-1/4$	$-1/4$	0	1	20	s_3

Observamos que existen variables no básicas con coeficiente negativo y concluimos que la SBF actual no es óptima.

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB
1	0	$-3/4$	$1/4$	0	0	20	z
0	1	$1/4$	$1/4$	0	0	20	x_1
0	0	$3/4$	$-1/4$	1	0	40	s_2
0	0	$-1/4$	$-1/4$	0	1	20	s_3

Determinamos que x_2 es la variable no-básica entrante las razones que limitan su crecimiento:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB	
1	0	$-3/4$	$1/4$	0	0	20	z	
0	1	$1/4$	$1/4$	0	0	20	x_1	$80 = 20/(1/4)$
0	0	$3/4$	$-1/4$	1	0	40	$s_2 \rightarrow x_2$	$\boxed{53.3} = 40/(3/4)$
0	0	$-1/4$	$-1/4$	0	1	20	s_3	No limita

Después de hacer 1 el pivote y ceros en la columna correspondiente:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{4}{3} R_3} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & -1/4 & -/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 - (-\frac{3}{4})R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - (\frac{1}{4})R_3 \\ R_4 \leftarrow R_4 - (-\frac{1}{4})R_3 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 & 100/3 \end{array}\right]$$

Después de hacer 1 el pivote y ceros en la columna correspondiente:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{4}{3} R_3} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & -1/4 & -/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1 \leftarrow R_1 - (-\frac{3}{4})R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - (\frac{1}{4})R_3 \\ R_4 \leftarrow R_4 - (-\frac{1}{4})R_3}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 & 100/3 \end{array}\right]$$

El Tableau del Simplex queda de la siguiente forma:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB
1	0	0	0	1	0	60	z
0	1	0	1/3	−1/3	0	20/3	x_1
0	0	1	−1/3	4/3	0	160/3	x_2
0	0	0	−1/3	1/3	1	100/3	s_3

Después de hacer 1 el pivote y ceros en la columna correspondiente:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{4}{3} R_3} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & -1/4 & -/4 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - (-\frac{1}{4})R_3]{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - (-\frac{3}{4})R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - (\frac{1}{4})R_3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 4/3 & 0 & 160/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 & 100/3 \end{array}\right]$$

El Tableau del Simplex queda de la siguiente forma:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	VB
1	0	0	0	1	0	60	z
0	1	0	1/3	−1/3	0	20/3	x_1
0	0	1	−1/3	4/3	0	160/3	x_2
0	0	0	−1/3	1/3	1	100/3	s_3

No hay forma de aumentar el valor de z: hemos alcanzado el óptimo.

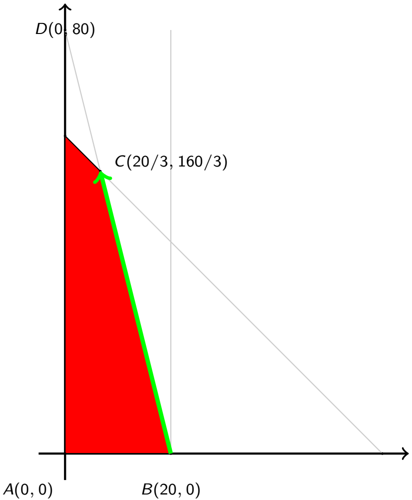


Figura: Cambio de SBF a otra SBF

Ejemplo

Resuelve al siguiente PL:

$$\text{Max}\, z = x + 3\,y$$

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 8\,y & \leq & 40 \\ 3\,x & + & 4\,y & \leq & 25 \\ 2\,x & + & y & \leq & 10 \\ x & & & \leq & 4 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{array}$$

Ejemplo

Resuelve al siguiente PL:

$$
\begin{array}{rcrcl}
\multicolumn{5}{c}{\text{Max}\, z = x + 3\,y} \\
x & + & 8\,y & \leq & 40 \\
3\,x & + & 4\,y & \leq & 25 \\
2\,x & + & y & \leq & 10 \\
x & & & \leq & 4 \\
 & & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcccccccl}
\multicolumn{11}{l}{\text{Max}\, z = x + 3\,y} \\
x & + & 8\,y & + & s_1 & & & & & = & 40 \\
3\,x & + & 4\,y & & & + & s_2 & & & = & 25 \\
2\,x & + & y & & & & & + \; s_3 & & = & 10 \\
x & & & & & & & & + \; s_4 & = & 4 \\
\multicolumn{3}{l}{x, y, s_1, s_2, s_3, s_4} & \geq & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Siendo un problema de maximización, al observar que hay variables no básicas con coeficiente negativo en el renglón de la función objetivo, concluimos que la SBF actual no es óptima:

z	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	-1	-3	0	0	0	0	0	z
0	1	8	1	0	0	0	40	s_1
0	3	4	0	1	0	0	25	s_2
0	2	1	0	0	1	0	10	s_3
0	1	0	0	0	0	1	4	s_4

Siendo un problema de maximización, al observar que hay variables no básicas con coeficiente negativo en el renglón de la función objetivo, concluimos que la SBF actual no es óptima:

z	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	-1	-3	0	0	0	0	0	z
0	1	8	1	0	0	0	40	s_1
0	3	4	0	1	0	0	25	s_2
0	2	1	0	0	1	0	10	s_3
0	1	0	0	0	0	1	4	s_4

La variable entrante es y y las razones para su crecimiento quedan:

z	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB	
1	-1	-3	0	0	0	0	0	z	
0	1	8	1	0	0	0	40	$s_1 \rightarrow y$	5
0	3	4	0	1	0	0	25	s_2	6.25
0	2	1	0	0	1	0	10	s_3	10
0	1	0	0	0	0	1	4	s_4	—

Al pivotear sobre y obtenemos la siguiente tabla del Simplex:

z	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	$-5/8$	0	$3/8$	0	0	0	15	z
0	$1/8$	1	$1/8$	0	0	0	5	y
0	$5/2$	0	$-1/2$	1	0	0	5	s_2
0	$15/8$	0	$-1/8$	0	1	0	5	s_3
0	1	0	0	0	0	1	4	s_4

Al pivotear sobre y obtenemos la siguiente tabla del Simplex:

z	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	$-5/8$	0	$3/8$	0	0	0	15	z
0	$1/8$	1	$1/8$	0	0	0	5	y
0	$5/2$	0	$-1/2$	1	0	0	5	s_2
0	$15/8$	0	$-1/8$	0	1	0	5	s_3
0	1	0	0	0	0	1	4	s_4

Observamos que la SBF no es óptima y que las razones para variable entrante x quedan de la siguiente forma:

z	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB	
1	$-5/8$	0	$3/8$	0	0	0	15	z	
0	$1/8$	1	$1/8$	0	0	0	5	y	40
0	$5/2$	0	$-1/2$	1	0	0	5	$s_2 \rightarrow x$	2
0	$15/8$	0	$-1/8$	0	1	0	5	s_3	2.666666667
0	1	0	0	0	0	1	4	s_4	4

Al pivotear sobre x obtenemos la siguiente tabla Simplex:

z	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	0	0	$1/4$	$1/4$	0	0	$65/4$	z
0	0	1	$3/20$	$-1/20$	0	0	$19/4$	y
0	1	0	$-1/5$	$2/5$	0	0	2	x
0	0	0	$1/4$	$-3/4$	1	0	$5/4$	s_3
0	0	0	$1/5$	$-2/5$	0	1	2	s_4

Siendo un problema de maximización, al no haber variables no básicas con coeficiente negativo concluimos que la solución actual es óptima. Valor óptimo encontrado de la función $z(x = 2, y = 19/4) = 65/4$

Ejemplo

Encuentre el óptimo de: Max $w = 14\,x + 25\,y + 19\,z$ sujeto a

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 5\,y & + & z & \leq & 3.0 \\ 2\,x & + & y & + & z & \leq & 2.0 \\ x & + & 2\,y & + & 2\,z & \leq & 2.0 \\ & & & & z & \leq & 0.8 \end{array}$$

y $x, y, z \geq 0$.

Ejemplo

Encuentre el óptimo de: Max $w = 14\,x + 25\,y + 19\,z$ sujeto a

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 5\,y & + & z & \leq & 3.0 \\ 2\,x & + & y & + & z & \leq & 2.0 \\ x & + & 2\,y & + & 2\,z & \leq & 2.0 \\ & & & & z & \leq & 0.8 \end{array}$$

y $x, y, z \geq 0$.
La fórma estándar queda: Max $w = 14\,x + 25\,y + 19\,z$

$$\begin{array}{rcrcrcccccccccl} x & + & 5\,y & + & z & + & s_1 & & & & & & & = & 3.0 \\ 2\,x & + & y & + & z & & & + & s_2 & & & & & = & 2.0 \\ x & + & 2\,y & + & 2\,z & & & & & + & s_3 & & & = & 2.0 \\ & & & & z & & & & & & & + & s_4 & = & 0.8 \end{array}$$

y $x, y, z, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$.

El tableau del Simplex queda:

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	-15	-25	-19	0	0	0	0	0	w
0	1	5	1	1	0	0	0	3	s_1
0	2	1	1	0	1	0	0	2	s_2
0	1	2	2	0	0	1	0	2	s_3
0	0	0	1	0	0	0	1	.8	s_4

Esta solución corresponde a $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Siendo un problema de maximización, al haber coeficientes negativos para las variables no básicas en el renglón de la función objetivo concluimos que la SBF actual no es óptima.

El tableau del Simplex queda:

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	-15	-25	-19	0	0	0	0	0	w
0	1	5	1	1	0	0	0	3	s_1
0	2	1	1	0	1	0	0	2	s_2
0	1	2	2	0	0	1	0	2	s_3
0	0	0	1	0	0	0	1	.8	s_4

Esta solución corresponde a $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Siendo un problema de maximización, al haber coeficientes negativos para las variables no básicas en el renglón de la función objetivo concluimos que la SBF actual no es óptima. La variable entrante es y y sus razones quedan de la siguiente forma.

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB	
1	-15	-25	-19	0	0	0	0	0	w	
0	1	5	1	$\boxed{1}$	0	0	0	3	$s_1 \to y$	.6
0	2	1	1	0	1	0	0	2	s_2	2
0	1	2	2	0	0	1	0	2	s_3	1
0	0	0	1	0	0	0	1	.8	s_4	—

Pivoteando sobre y obtenemos la siguiente tabla Simplex:

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	-10	0	-14	5	0	0	0	15	w
0	$1/5$	1	$1/5$	$1/5$	0	0	0	$3/5$	y
0	$9/5$	0	$4/5$	$-1/5$	1	0	0	$7/5$	s_2
0	$3/5$	0	$8/5$	$-2/5$	0	1	0	$4/5$	s_3
0	0	0	1	0	0	0	1	.8	s_4

Esta solución corresponde a $x = 0$, $y = 3/5$, $z = 0$. Reconocemos que la solución no es óptima.

Pivoteando sobre y obtenemos la siguiente tabla Simplex:

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	-10	0	-14	5	0	0	0	15	w
0	$1/5$	1	$1/5$	$1/5$	0	0	0	$3/5$	y
0	$9/5$	0	$4/5$	$-1/5$	1	0	0	$7/5$	s_2
0	$3/5$	0	$8/5$	$-2/5$	0	1	0	$4/5$	s_3
0	0	0	1	0	0	0	1	.8	s_4

Esta solución corresponde a $x = 0$, $y = 3/5$, $z = 0$. Reconocemos que la solución no es óptima. La variable entrante en este caso es z y sus razones quedan de la siguiente forma.

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB	
1	-10	0	-14	5	0	0	0	15	w	
0	$1/5$	1	$1/5$	$1/5$	0	0	0	$3/5$	7	3
0	$9/5$	0	$4/5$	$-1/5$	1	0	0	$7/5$	s_2	1.75
0	$3/5$	0	$8/5$	$-2/5$	0	$\boxed{1}$	0	$4/5$	$s_3 \rightarrow z$	.50
0	0	0	1	0	0	0	1	.8	s_4	.8

Pivoteando sobre z obtenemos la siguiente tabla Simplex.

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	$-19/4$	0	0	$3/2$	0	$35/4$	0	22	w
0	$1/8$	1	0	$1/4$	0	$-1/8$	0	$1/2$	y
0	$3/2$	0	0	0	1	$-1/2$	0	1	s_2
0	$3/8$	0	1	$-1/4$	0	$5/8$	0	$1/2$	z
0	$-3/8$	0	0	$1/4$	0	$-5/8$	1	.30	s_4

Esta solución corresponde a $x = 0$, $y = 1/2$, $z = 1/2$. Esta SBF no es óptima.

Pivoteando sobre z obtenemos la siguiente tabla Simplex.

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	$-19/4$	0	0	$3/2$	0	$35/4$	0	22	w
0	$1/8$	1	0	$1/4$	0	$-1/8$	0	$1/2$	y
0	$3/2$	0	0	0	1	$-1/2$	0	1	s_2
0	$3/8$	0	1	$-1/4$	0	$5/8$	0	$1/2$	z
0	$-3/8$	0	0	$1/4$	0	$-5/8$	1	.30	s_4

Esta solución corresponde a $x = 0$, $y = 1/2$, $z = 1/2$. Esta SBF no es óptima. La variable entrante es x y sus razones quedan como sigue.

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB	
1	$-19/4$	0	0	$3/2$	0	$35/4$	0	22	w	
0	$1/8$	1	0	$1/4$	0	$-1/8$	0	$1/2$	y	4
0	$3/2$	0	0	0	$\boxed{1}$	$-1/2$	0	1	$s_2 \rightarrow x$	.66
0	$3/8$	0	1	$-1/4$	0	$5/8$	0	$1/2$	z	1.33
0	$-3/8$	0	0	$1/4$	0	$-5/8$	1	.30	s_4	—

Pivoteando en x sobre el renglón de s_2 obtenemos el siguiente tableau.

w	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	VB
1	0	0	0	$3/2$	$19/6$	$43/6$	0	$151/6$	w
0	0	1	0	$1/4$	$-1/12$	$-1/12$	0	$5/12$	y
0	1	0	0	0	$2/3$	$-1/3$	0	$2/3$	x
0	0	0	1	$-1/4$	$-1/4$	$3/4$	0	$1/4$	z
0	0	0	0	$1/4$	$1/4$	$-3/4$	1	.55	s_4

Observamos que aumentando los valores de las variables no básicas, no es posible aumentar el valor de z. Por tanto, se alcaza el óptimo en $x = 2/3$, $y = 5/12$ y $z = 1/4$ con valor $w = 151/6$.