Optimización y Programación Lineal

TC3001 - Tarea No 6
Análisis de Sensibilidad
Matemáticas

6 de marzo de 2012

$\boxed{1}$ El granjero Leary cultiva trigo y maíz en su granja con un terrero cultivable de 45 acres. Él puede vender a lo más 140 bushels de trigo y 120 bushels de maíz. Cada acre que el planta con trigo produce 5 bushels mientras que cada acre plantado con maíz produce 4 bushels. El trigo se vende a 30 dólares el bushel mientras que el maíz a 50 dólares el bushel. Para cosechar un acre de trigo requiere 6 horas de labor; cosechar un acre de maíz requiere 10 horas. Se pueden contratar hasta 350 horas de labor a 10 dólares la hora. Sea A1 el número de acres plantados con trigo, A2 el número acres plantados con maíz; y L las horas de labor contratadas. Para maximizar las ganancias, el granjero formuló y resolvió un modelo lineal cuyo reporte aparece en la figura 1. Usándolo, conteste las siguiente preguntas.

- Si sólamente quisiera plantar 40 acres, ¿cuál sería su ganancia?$3,875
  <u>Solución</u>
  La variación $40-45=-5$ es un decremento de 5 unidades ocurre en una restricción obligada cuyo máximo decremento de permanencia de base es 6.666. Así el decremento no se excede y la base sigue siendo óptima. Como la modificación ocurre en los lados derechos de restricciones obligadas lo más seguro es que las variables básicas cambien de valor; los nuevos valores no los conocemos pero podemos calcular el valor del óptimo usando el precio sombra de la restricción 2 (ROW 2) Dual Prices: 75) que es la asociada a la cantidad de acres disponibles:
  $$\text{Nuevo valor } z = 4250 + -5 \cdot 75 = 3875$$
- Si el precio del trigo cayera a 26 dólares el bushel, ¿cuál sería el valor del óptimo del granjero? $3,750
  <u>Solución</u>
  En este caso el coeficiente de A1 pasaría de ser $150 = 30 \cdot 5$ a ser $130 = 26 \cdot 5$. Es decir, que el coeficiente de A1 tendría una variación de -20 como el máximo decrecimiento permitido es 30, entonces la base sigue siendo óptima. Como el cambio ocurre en los coeficientes de la función objetivo y no en los lados derechos de las restricciones, la región factible es la misma y por tanto la esquina óptima es la misma y por tanto, los valores de las variables básicas siguien sin cambios A1=25, A2 =20 y L=350. Podemos determinar el valor del óptimo usando el decremento en el coeficiente y el valor de A1:
  $$\text{Nuevo valor } z = 4250 + -20 \cdot 25 = 3750$$
- Use las variables de holgura para determinar el incremento y el decremento permitidos de trigo que pueden ser vendidos manteniendo la base actual.$[125, \infty)$
  <u>Solución</u>
  La cantidad de trigo que se puede vender se maneja en la restricción marcada con el número 5. Y esta restricción tiene intervalo de variación $[140-15=125, 140+\infty=\infty)$.
- Si sólo 130 bushels de trigo pudieran ser vendidos, ¿cambiaría la respuesta al problema referente a la forma de plantar el terreno y maximizar las ganancias?No hay cambios
  <u>Solución</u>
  Por un lado vemos que el nuevo valor 130 está en el intervalo permitido para mantener la base actual. Al observar la salida de lindo vemos que la restricción marcada como 5 tiene una valor de holgura de 15. Es decir, que esos 10 valores no afectarán los valores de la variables básicas. Por tanto, tanto el valor del óptimo como los valores de las variables de decisión siguen aplicando.

$\boxed{2}$ **CarCo** manufactura automóviles y camiones. Cada auto contribuye a las ganancias en 300 dólares y cada camión en 400. Los recursos requeridos para manufacturar un carro y un camión se muestran en la siguiente tabla.

```
Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      3750.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       A1        25.000000          0.000000
       A2        20.000000          0.000000
        L       350.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
   ACRES)          0.000000         25.000000
   LABOR)          0.000000         17.500000
   HORAS)          0.000000          7.500000
   TRIGO)         15.000000          0.000000
    MAIZ)         40.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      A1      130.000000        30.000000        10.000000
      A2      200.000000        16.666666        30.000000
       L      -10.000000         INFINITY         7.500000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE         DECREASE
   ACRES       45.000000         1.200000         6.666667
   LABOR        0.000000        40.000000        12.000000
   HORAS      350.000000        40.000000        12.000000
   TRIGO      140.000000         INFINITY        15.000000
    MAIZ      120.000000         INFINITY        40.000000
```

Figura 1: Reporte de LINDO para el granjero Leary

Vehículo	Días en Maq. 1	Días en Maq. 2	Acero req. (ton)
Auto	0.8	0.6	2
Camión	1	0.7	3

Para la manufactura cada día la compañía renta hasta 98 máquinas del tipo I a un costo de 50 dólares la máquina. La compañía tiene 73 máquinas del tipo 2 y 260 toneladas de acero disponibles. Consideraciones de mercado indican que al menos 88 autos y al menos 26 camiones deben producirse. Con la intención de maximizar sus ganancias la compañía formuló y resolvió un PL donde $X1$ es el número de autos a ser producidos diariamente, $X2$ es el número de camiones a ser producidos diariamente y $M1$ es el número de máquinas tipo I a ser rentadas diariamente. El reporte se incluye en la figura 2. Con tal reporte responda las siguientes preguntas.

- Si cada auto contribuyera en 310 dólares, ¿el plan productivo de la solución óptima seguiría siendo óptimo? Sí
  Solución
  El rango de variación para el coeficiente de $X1$ es $(300-\infty, 300+20] = (-\infty, 320]$ y el nuevo valor cae en este rango, entonces la base sigue óptima. Como el cambio es en la función objetivo los valores de las variables no se afectan. Por tanto, las decisiones siguen siendo óptimas y no habrá que hacer ningún cambio al plan productivo.
- Si la compañía requiere producir al menos 86 autos, ¿cuál sería la ganancia? $32,580
  Solución
  Tal restricción se codifica en la restricción marcada como 6. El rango de valores posibles para mantener la base es $[85 = 88-3, 88+2 = 90]$ estando el valor 86 en tal intervalo, la base es sigue óptima. Como la restricción 6 tiene valor de holgura 0 significa que la restrición es obligada y tal cambio casi seguro cambiará los valores de las variables de decisión. Aún sin estos valores podemos estimar el impacto en el valor del óptimo usando el precio sombra de la resticción 6 (-20) y el incremento en el valor del lado derecho (-2):

$$\text{Nuevo valor } z = 32540 + (-2) \cdot (-20) = 32580$$

$\boxed{3}$ La corporación **Gepbab** produce tres tipos de productos en dos plantas diferentes. el costo de producir los productos en cada planta se muestra en la siguiente tabla.

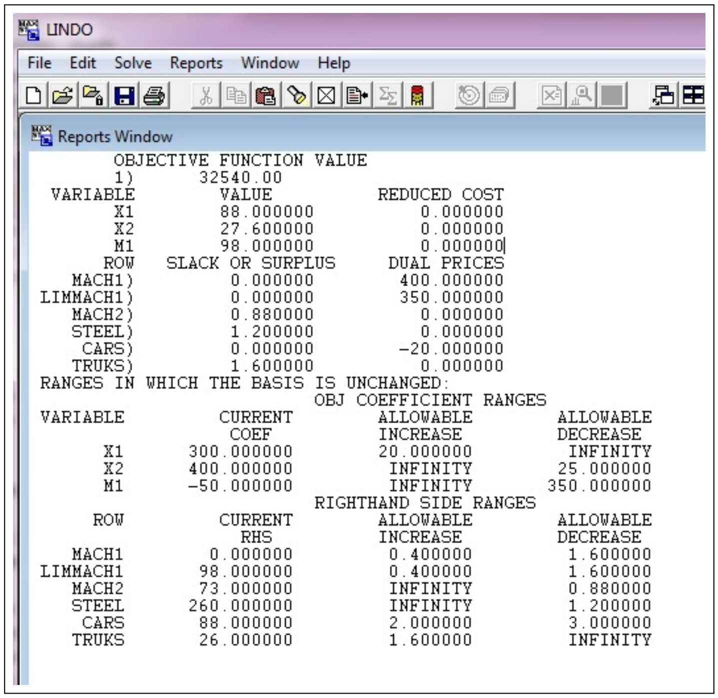


Figura 2: Reporte de LINDO para el problema de **CarCo**

Planta	Producto($)		
	1	2	3
1	5	6	8
2	8	7	10

Cada planta puede producir en total 10,000 unidades. Al menos 6,000 unidades del producto 1, 8,000 unidades del producto 2, y 5,000 unidades del producto 3 deberían producirse. Para minimizar el costo de la producción satisfaciendo las demandas la compañía formuló y resolvió un PL donde Xij es el número de productos j deben producirse en la planta i. El reporte de LINDO se muestra en la figura 3. MIN 5 X11 + 6 X12 + 8 X13 + 8 X21 + 7 X22 + 10 X23 ST CAPP1) X11 + X12 + X13 ¡= 10000 CAPP1) X21 + X22 + X23 ¡= 10000 DEMP1) X11 + X21 ¿= 6000 DEMP2) X12 + X22 ¿= 8000 DEMP3) X13 + X23 ¿= 5000 END

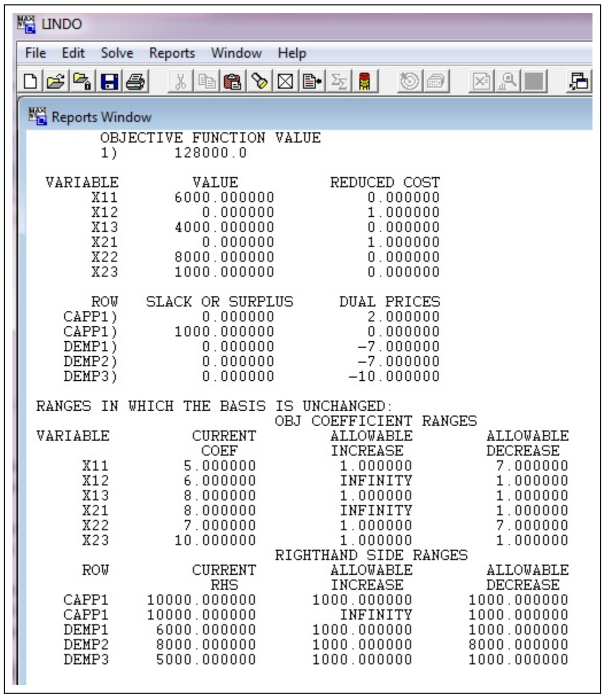
Usándolo contesta las siguientes preguntas.

- ¿Cuál tendría que ser el costo de producción en la fábrica 1 para que la empresa decidiera fabricar el producto 2 en la planta 1? Abajo de 5
  Solución
  La variable de decisión es $X12$ y su valor en el óptimo es 0. El rango para el coeficiente en la función objetivo de $X12$ donde no habrá cambio es $[5 = 6-1, 6+\infty = +\infty)$. Por tanto, si el coeficiente de $X12$ en la función objetivo es menor que 5 la variable $X12$ entrará a la base.

- Si la planta 1 tuviera una capacidad de 9,000 unidades, ¿cuál sería el costo total de la producción?$10,800
  Solución
  La capacidad de la planta 1 está manejada en la restricción marcada como 2, la cual tiene como valor de holgura cero y como precio sombra o dual 2. Así mismo el intervalo de variación es $[10000-1000, 10000+1000] = [9000, 11000]$. Estando el valor nuevo en el intervalo de variación la base sigue óptima. Como la restricción es obligada los valores de las variables básicas seguro cambiarán y para calcularlos habrá que hacer más cálculos, pero podemos obtener el valor del óptimo tomando en cuenta la variación (-1000) y el precio sombra (2):

$$\text{Nuevo valor } z = 128,000 - (-1,000) \cdot (2) = 130,000$$

- Si el costo de la producción de una unidad del producto 3 en la planta 1 fuera 9 dólares, ¿cuál sería la nueva solución óptima? La misma



```
LINDO
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help
Reports Window
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      128000.0

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X11      6000.000000          0.000000
       X12         0.000000          1.000000
       X13      4000.000000          0.000000
       X21         0.000000          1.000000
       X22      8000.000000          0.000000
       X23      1000.000000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     CAPP1)        0.000000          2.000000
     CAPP1)     1000.000000          0.000000
     DEMP1)        0.000000         -7.000000
     DEMP2)        0.000000         -7.000000
     DEMP3)        0.000000        -10.000000

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                          OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      X11        5.000000        1.000000         7.000000
      X12        6.000000        INFINITY         1.000000
      X13        8.000000        1.000000         1.000000
      X21        8.000000        INFINITY         1.000000
      X22        7.000000        1.000000         7.000000
      X23       10.000000        1.000000         1.000000
                          RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
     CAPP1    10000.000000     1000.000000      1000.000000
     CAPP1    10000.000000        INFINITY      1000.000000
     DEMP1     6000.000000     1000.000000      1000.000000
     DEMP2     8000.000000     1000.000000      8000.000000
     DEMP3     5000.000000     1000.000000      1000.000000
```

Figura 3: Reporte de LINDO para el problema de **Gepbab**

Solución

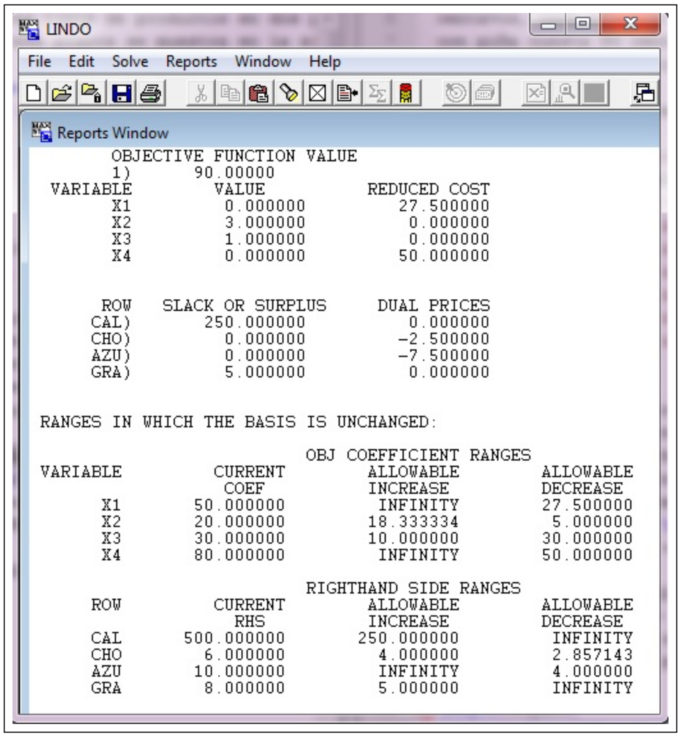
Tal costo de producción está asociado a la variable $X13$ cuyo intervalo de variación es $[8-1, 8+1] = [7, 9]$ y el nuevo valor cae allí, por tanto la solución encontrada sigue siendo óptima.

$\boxed{4}$ Mi dieta requiere que toda la comida que yo como sea de uno de los 4 *grupos básicos*. (Pastelillos de chocolate, nieve, refresco y pay de queso) Las cuatro comidas están disponibles en las presentaciones: brownies, nieve de chocolate, Cola y pay de queso con piña. Cada brownie cuesta 50 centavos de dolar, cada cucharada de nieve de chocolate cuesta 20 centavos, cada botella de Cola cuesta 30 centavos de dolar y cada rebanada de pay de queso con piña cuesta 80 centavos. Cada día yo debo ingerir al menos 500 calorias, 6 oz de chocolate, 10 onzas de azúcar y 8 onzas de grasa. La tabla con la información nutrimental se da a continuación.

Tipo	Calorias	Chocolate(Onzas)	Azúcar(Onzas)	Grasa(Onzas)
Brownie	400	3	2	2
Nieve chocolate (1 cucharada)	200	2	2	4
Cola (1 botella)	150	0	4	1
Pay (1 rebanada)	500	0	4	5

Suponga que he resuelto el PL que me permite minimizar el costo de los productos donde BR es el número de pastelillos de chocolate, IC es el número de cucharadas de nieve, COLA es el número de botellas de Cola y PC es el número de rebanadas de pay a comprar. El reporte de LINDO se muestran en la figura 4. Usándolo responda las siguientes preguntas.

- Si un pastelillo de chocolate costara 30 centavos, ¿cuál sería la solución óptima al problema? La misma
  Solución
  Este costo está asociado al coeficiente de $X1$ cuyo rango de variación está dado por el intervalo: $[50 - 27.5, 50 + \infty] = [22.5, +\infty]$ y nuestro nuevo valor está allí. Por tanto, la base sigue óptima. Como el cambio está en la función objetivo, no sólo la base sino también la soluición sigue óptima.
- Si una botella de Cola costara 35 centavos, ¿cuál sería la solución óptima al problema? Sigue siendo óptima la solución encontrada.



```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      90.00000
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         0.000000         27.500000
        X2         3.000000          0.000000
        X3         1.000000          0.000000
        X4         0.000000         50.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      CAL)       250.000000          0.000000
      CHO)         0.000000         -2.500000
      AZU)         0.000000         -7.500000
      GRA)         5.000000          0.000000

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1       50.000000         INFINITY        27.500000
       X2       20.000000        18.333334         5.000000
       X3       30.000000        10.000000        30.000000
       X4       80.000000         INFINITY        50.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
      CAL      500.000000       250.000000         INFINITY
      CHO        6.000000         4.000000         2.857143
      AZU       10.000000         INFINITY         4.000000
      GRA        8.000000         5.000000         INFINITY
```

Figura 4: Reporte de LINDO para el problema 4

Solución

El costo referido está asociado al coeficiente de $X3$ en la función objetivo el cual tiene rango de variación $[30-30, 30+10] = [0, 40]$, como el nuevo valor está en tal intervalo, la base sigue óptima. Como el cambio en en la función objetivo, la solución permanece óptima.

- Si al menos 8 onzas de chocolate se requirieran en mi dieta, ¿cuál sería el costo de mi dieta óptima? 95 centavos

  Solución

  El requerimiento del chocolate está dado en la restricción del renglón 3) el cual tiene intervalo de variación $[6-2.85, 6+4] = [3.15, 10]$. El incremento es 2. El nuevo valor está en tal intervalo entonces la base sigue óptima y el valor de z nuevo es:

  $$z = 90 - (-2.5)(2) = 95$$

- Si requiero al menos 600 calorías y no 500, ¿cuál sería el costo de mi dieta óptima? 90 centavos

  Solución

  El cambio ocurre en el renglón (2) cuyo rango de variación es $[500-\infty, 500+250] = [-\infty, 750]$ y el nuevo valor está en tal intervalo. Por tanto, la base sigue óptima y el nuevo valor del óptimo es:

  $$z = 90 - (0)(100) = 90$$

- Si requiero al menos 9 onzas de azúcar, ¿cuál sería el costo de mi dieta óptima? 82.5 centavos

  Solución

  El cambio ocurre en el renglón (4) cuyo rango de variación es $[10-4, 10+\infty] = [6, -\infty]$ y el nuevo valor está en tal intervalo. Por tanto, la base sigue óptima y el nuevo valor del óptimo es:

  $$z = 90 - (-7.5)(-1) = 82.5$$

$\boxed{5}$ Siguiendo con el problema de la *dieta*: Si el costo de un pastelillo de chocolate es de 70 centavos y el costo de una rebanada de pay es ahora de 60 centavos, ¿la base actual sigue siendo óptima? Sí

Solución

Los cambios están asociados a los coeficientes de $X1$ y $X4$ en la función objetivo las cuales son variables no básicas y con rangos de variación $[50-27.5, 50+\infty] = [22.7, \infty]$ y $[80-50, 80+\infty] = [30, \infty]$ respectivamente. Como ambos valores nuevos están en sus intervalos correspondientes y como se trata de cambios en la función objetivo, entonces la solución sigue óptima.

$\boxed{6}$ Siguiendo con el problema de la *dieta*: Si el costo de un pastelillo de chocolate es de 20 centavos y el costo de una rebanada pay es ahora de un dolar, ¿la base actual sigue siendo óptima? No

Solución

Note que todas las variables tienen costo reducido diferente de cero. Por lo tanto, aplica el primer caso. Debemos verificar que los cambios en los coeficientes queden dentro de los intervalos: La primera variable tiene un coeficiente que cae fuera de rango. Por lo tanto, SEGURO que la solución deja de ser óptima.

$\boxed{7}$ Siguiendo con el problema de la *dieta*: Si el requerimiento de grasa se reduce a 3 onzas y el de calorias se incrementa a 800, ¿la base actual sigue siendo óptima? No

Solución

Los cambios son relativos a las variables de holgura con precios duales cero. Es decir, son relativos a variables básicas. Para hacer el análisis debemos aplicar la regla del 100 %: Calculemos los porcentajes de variación de ambos valores:

- Para row (2) la variación es $800 - 500 = 300$ por tanto el porcentaje de variación debe hacerse contra 250:

$$b_1 = \frac{300}{250} > 1$$

  Al rebasar 1., no hay necesidad de ningún cálculo extra. La base no seguirá óptima: cambiará

$\boxed{8}$ Siguiendo con el problema de la *dieta*: Si el requerimiento de grasa es 6 onzas y el de calorias es de 600, ¿la base actual sigue siendo óptima? Sí

Solución

Los cambios son relativos a las variables de holgura con precios duales cero. Es decir, son relativos a variables básicas. Para hacer el análisis debemos aplicar la regla del 100 %: Calculemos los porcentajes de variación de ambos valores:

- Para row (2) la variación es $600 - 500 = 100$ por tanto el porcentaje de variación debe hacerse contra 250:

$$b_1 = \frac{100}{250} = 0.4$$

- Para row (4) la variación es $6 - 8 = -2$ por tanto el porcentaje de variación debe hacerse contra ∞:

$$b_4 = \frac{-(-2)}{\infty} = 0.0$$

Así, el cambio total porcentual es $b_1 + b_4 = 0.4 + 0 = 0.4$. Como no rebasa el 100 % la base sigue óptima.

$\boxed{9}$ Siguiendo con el problema de la *dieta*: Si el precio de una botella de Cola es de 15 centavos y el de una rebanada de pay es de 60 centavos, ¿cuál será la nueva solución óptima? Habrá que correr de nuevo el modelo con los cambios porque la base cambia.

Solución

Los cambios son relativos a los coeficiente de las variables $X3$ y $X4$, una de las cuales es variable básica (costo reducido 0 para $X3$). Para hacer el análisis debemos aplicar la regla del 100 %: Calculemos los porcentajes de variación de ambos valores:

- Para $X3$ la variación es $25 - 30 = -5$ por tanto el porcentaje de variación debe hacerse contra 4:

$$b_3 = \frac{-(-5)}{4} > 1$$

  Al rebasar 1, no hay necesidad de ningún cálculo extra. La base no seguirá óptima: cambiará

$\boxed{10}$ Siguiendo con el problema de la *dieta*: Si se requieren 8 onzas de chocolate y 600 calorías, ¿sigue siendo óptima la base? Sí

Solución

Los cambios son relativos a las variables de holgura una de las cuales es básicas (Precio dual cero para la del renglón (2)) Para hacer el análisis debemos aplicar la regla del 100 %: Calculemos los porcentajes de variación de ambos valores:

- Para row (2) la variación es $600 - 500 = 100$ por tanto el porcentaje de variación debe hacerse contra 250:

$$b_1 = \frac{100}{250} = 0.4$$

- Para row (3) la variación es $8 - 6 = 2$ por tanto el porcentaje de variación debe hacerse contra 4:

$$b_2 = \frac{2}{4} = 0.5$$

Así, el cambio total porcentual es $b_1 + b_2 = 0.4 + 0.5 = 0.9$. Como no rebasa el 100 % la base sigue óptima.