

# CONTENIDO

Prefacio ii

Introducción iii

---

## CAPITULO I INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES Y ANÁLISIS CUANTITATIVO

|      |   |   |
|------|---|---|
| I. A | SECCIÓN A. Investigación de Operaciones y Análisis Cuantitativo<br>Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría ..... | 1 |
| I. B | SECCIÓN B. Práctica de Análisis Cuantitativo.<br>Presentación de Casos Prácticos.....   | 5 |

## CAPITULO II PROGRAMACIÓN LINEAL

|            |   |    |
|------------|---|----|
| II.A.      | SECCIÓN A. Teoría General de Programación Lineal y Fase de<br>Formulación y Construcción de Modelos.....        | 7  |
| II. A.1.   | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de P. L .....  | 7  |
| II. A.2.   | Formulación y Construcción de Modelos Lineales. Teoría y Práctica.....  | 9  |
| II. A.2.1. | Práctica  | 9  |
| II. B      | SECCIÓN B. Solución de Modelos Lineales con el Método Simplex.....  | 14 |
| II. B.1.   | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría del Método Gráfico..                                     | 14 |
| II. B.2.   | Práctica de Solución de Modelos con el Método Gráfico.....  | 15 |
|            | Caso 1. Modelos con solución óptima única.....  | 15 |
|            | Caso 2. Modelos con soluciones óptimas alternas ó múltiples.....  | 18 |
|            | Caso 3. Modelos sin solución posible. ....  | 20 |
|            | Caso 4. Modelos que presentan solución con valor infinito.....  | 20 |
|            | Caso 5. Modelos con espacio de solución no acotado y solución<br>de valor finito. ....                          | 21 |
|            | Caso 6. Modelos con solución degenerada.....  | 22 |
| II. C      | SECCIÓN C. Solución de Modelos Lineales con el Método<br>Simplex y el Método de Puntos Interiores.....          | 24 |
| II. C.1.   | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de la solución de<br>modelos de Programación Lineal..... | 24 |
| II. C.2.   | Práctica. Solución de modelos con el Método Simplex.....  | 27 |
| II. C.2.1. | Solución con el Método Simplex Regular.....   | 28 |
| II.C.2.2.  | Solución con el uso del programa QSB. ....  | 29 |

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| II.C.2.3. | Solución con el método gráfico en el programa QSB.....  | 31 |
| II.C.2.4. | Solución con el Programa Lindo .....  | 32 |
| II. D.    | SECCIÓN D. Análisis de sensibilidad de la solución Optima y Dualidad en Modelos Lineales. ....                    | 33 |
| II.D.1.   | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de Análisis de Sensibilidad en Programación Lineal. ....   | 33 |
| II.D.2.   | Práctica. Análisis de Sensibilidad. Dualidad. ....  | 34 |
| II.D.2.1. | Análisis de sensibilidad de la solución cuando cambia un coeficiente de una variable en la Función Objetivo. .... | 35 |
| II.D.2.2. | Análisis de sensibilidad cuando cambia el lado derecho de una restricción.....                                    | 36 |
| II.D.2.3. | Análisis de sensibilidad cuando aparece una nueva restricción. ....   | 36 |
| II.D.3.   | Dualidad.....   | 37 |
| II.E      | SECCIÓN E. Uso de la computadora en Programación Lineal.....  | 38 |
| II.E.1.   | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría.....   | 38 |
| II.E.2.   | Práctica. Solución de modelos utilizando el computador.....   | 38 |
|           | Ejemplo 1 con uso del programa Lingo.....   | 39 |
|           | Ejemplo 1 con uso del programa Lindo.....   | 40 |
|           | Ejemplo 1 con uso del programa What'sBest.....  | 41 |
|           | Ejemplo 1 con uso del programa QSB.....   | 42 |
|           | Ejemplo 2 con uso del programa Lindo.....   | 46 |
|           | Ejemplo 3 con uso del programa Lindo.....   | 50 |
| II. E.3.  | Problemas para resolver. ....   | 53 |

### **CAPITULO III            PROGRAMACIÓN LINEAL DE TRANSPORTE.**

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| III. A.   | Sección A. Programación Lineal de transporte, Formulación y Construcción de Modelos Lineales de Transporte.....            | 54 |
| III. A.1. | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de Programación Lineal de Transporte.....                           | 54 |
| III.A.2.  | Práctica de Formulación y Construcción de Modelos Lineales de Transporte.....  | 56 |
|           | Ejemplo 1. Problema en un sistema de transporte.....   | 56 |
|           | Ejemplo 2. Problema en un sistema de alquiler de vehículos.....  | 59 |
|           | Ejemplo 3. Problema en un sistema de subasta de tierras.....   | 61 |
| III.B.    | Sección B. Solución de Modelos Lineales de Transporte.....   | 63 |
| III. B.1. | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de la solución de Modelos de Programación Lineal de Transporte..... | 63 |

|                    |  |     |
|--------------------|--|-----|
| III.B.2            | Práctica de Solución de Modelos Lineales de Transporte con el computador.....                                  | 65  |
|                    | Ejemplo 1. Problema en un sistema de transporte.....   | 65  |
|                    | Ejemplo 2. Problema en un sistema de publicidad.....   | 68  |
|                    | Ejemplo 2. Problema en un sistema de subasta de tierras.....   | 72  |
| III. C.            | Sección C. Análisis de sensibilidad de la solución óptima y dualidad en Programación Lineal de Transporte..... | 77  |
| III.C.1.           | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de Análisis de Sensibilidad en Programación Lineal..... | 77  |
| III. C.2.          | Práctica de Análisis de sensibilidad de la solución y Dualidad en los Lineales de Transporte.....              | 78  |
| <b>CAPITULO IV</b> | <b>PERT- CPM</b>   |     |
| IV. A.             | Sección A. Técnicas de Redes. PERT-CPM.....  | 85  |
| IV.A.1.            | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de PERT-CPM ..  | 85  |
| IV.A.2.            | Práctica de Formulación de Modelos, Redes o Diagramas de Flechas.....  | 87  |
| IV.A.2.1           | Elaboración de Redes.....  | 89  |
| IV. B.             | Sección B. Valores utilizados en PERT_CPM para la toma de decisiones .....                                     | 90  |
| IV.B.1.            | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría.....  | 90  |
| IV.B.2.            | Práctica de Solución de Redes en PERT-CPM.....   | 91  |
| IV.B.2             | Ejemplo 1. Proyecto de construcción solucionado con el programa QSB.   | 92  |
| IV.B.2             | Ejemplo 1. Proyecto de construcción resuelto con el programa LINGO....   | 93  |
| IV.B.2             | Ejemplo 1. Proyecto de construcción solucionado con el programa What Best.....                                 | 94  |
| IV.B.              | Sección C Consideraciones de costo en el manejo de proyectos.....  | 97  |
| IV.C.1.            | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría.....  | 97  |
| IV.C. 2.           | Práctica de solución de Redes con consideración de costos. ....  | 98  |
| IV.C. 2.1.         | Método de Inspección para acelerar proyectos.....  | 101 |
| IV. D.             | Sección D. Aceleración del tiempo de duración de un proyecto usando el computador.....                         | 102 |
| IV. D.1.           | Uso del Programa QSB.....  | 102 |
| IV. D.2.           | Uso del Programa Lingo. ....   | 106 |

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| IV.E.   | Sección E. Consideraciones acerca de probabilidad en PERT- CPM.. | 106 |
| IV.E.1. | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría. ....     | 106 |
| IV.E.2. | Práctica de PERT-CPM en un proyecto. Uso de probabilidades.....  | 107 |

## **CAPITULO V      TEORÍA DE COLAS.**

|           |   |     |
|-----------|---|-----|
| V.A       | Sección A. Estudio de los Sistemas de Espera.....   | 114 |
| V. A.1.   | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la Teoría de Colas.....                          | 114 |
| V. B.     | Sección B. Práctica de Modelos de Sistemas de Espera.....                                     | 117 |
| V. B.1.   | Sistemas de espera con los elementos componentes que lo definen y aspectos que presenta. .... | 117 |
| V. C.     | Sección C. Modelo M/M/1 según la Notación de Kendall.....                                     | 119 |
| V. C.1.   | Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría del Modelo M/M/1.....                  | 119 |
| V. C.2.   | Valores utilizados para tomar decisiones con el Modelo M/M/1.....                             | 121 |
| V. C.2.1. | Probabilidades en proceso estacionario.....   | 121 |
| V. C.2.2. | Características Operacionales.....  | 121 |
| V. C.2.3  | Valores que pueden obtenerse con información adicional.....                                   | 122 |
| V. C.2.4. | Valores obtenidos de las distribuciones probabilísticas.....                                  | 123 |
| V. D.     | Sección D. Práctica con Modelo M/M/1 . Toma de decisiones.....                                | 124 |
| V. E.     | Sección E. Uso de computador en Sistemas de Espera.....                                       | 130 |
| V. E.1.   | Uso del programa QSB.....   | 130 |
| V. E.2.   | Uso del programa Lingo.....   | 131 |
| V. E.3.   | Problemas para resolver. ....   | 131 |

## **ANEXOS.**

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| Anexo 1. Problemas resueltos.....  | 133 |
| Anexo 2. Tabla PERT 1.....         | 136 |
| Anexo 3. Tabla PERT 2. ....        | 137 |
| Anexo 4. Manual de Programas. .... | 138 |
| Bibliografía. ....                 | 165 |

## **P R E F A C I O**

Este manual de estudio ha sido elaborado teniendo como guía el Programa de Estudios de la asignatura Investigación de Operaciones de la Escuela de Economía de la Universidad de Carabobo.

Mucho se ha escrito acerca de que el aprendizaje no es accidental sino el resultado directo de los currículos académicos, diseñados por profesores, cátedras y escuelas; y de las creencias acerca de lo que debe ser el aprendizaje. Todo ello influye sobre las experiencias que se viven como estudiante.

Algunos autores han sugerido que el aprendizaje ocurrirá si el material de soporte está cuidadosamente refinado y en secuencia, aunado a un proceso de estímulo al estudiante. Otros ven el aprendizaje como una actividad manejable no por el estímulo, sino por el propio estudiante, quien debe querer aprender y participar en el proceso de aprendizaje, si es que quiere lograr un progreso real. Otros han estado de acuerdo en aplicar la ciencia en la práctica educacional, diciendo que se deben incluir procedimientos y técnicas. No olvidemos a quienes defienden la tesis que el estudiante será exitoso en el aprendizaje si se le da el tiempo suficiente, que él específicamente necesita, para aprender una tarea particular; tampoco a quienes abogan por una práctica individual constante para que el aprendizaje ocurra. Están además quienes consideran también la influencia en el aprendizaje del medio socio-cultural y los aspectos psicológicos.

Es así como la teoría sobre sistemas de instrucción ha tenido y tiene influencia en la práctica educacional.

Es importante que el estudiante reflexione acerca de lo anteriormente expuesto, cuando se encuentre en el proceso de aprendizaje de esta asignatura. En la elaboración de este manual se ha tomado en consideración parte de esta teoría.

Para facilitar el proceso de aprendizaje de Investigación de Operaciones se ha preparado este material de apoyo, de fácil lectura, donde se han considerado puntos esenciales tales como: Los aspectos que deben ser aprendidos, la forma en que deben ser presentados y secuenciados, qué ideas deben enseñarse antes que otras, la forma más práctica de presentar cada concepto; todo esto para que el estudiante logre los objetivos propuestos en la asignatura. ¡Éxito!

# INTRODUCCIÓN

En esta sección se presenta la asignatura al estudiante, haciendo referencia inicial a la forma como está elaborado el manual. Posteriormente se presenta una idea global del material que se va a desarrollar, como objeto de estudio.

La preparación de este manual sigue la secuencia del Programa de la asignatura Investigación de Operaciones de la Escuela de Economía de la Universidad de Carabobo.

Para facilitar al estudiante la teoría y práctica de los diversos temas y técnicas, se ha dividido su contenido en secciones que contienen específicos puntos del análisis cuantitativo a desarrollar.

Cada capítulo, en su inicio, establece el objetivo final que se quiere lograr en su estudio. Sin embargo, para llegar al objetivo final es importante reconocer que deben cumplirse muchos objetivos intermedios durante el aprendizaje de cada materia específica.

En su elaboración, cada punto particular tiene un orden de prioridad de ideas, hasta culminar la presentación total del material contenido en el capítulo. En cada capítulo o sección se numeran los contenidos, para expresar en forma corta cada concepto o punto particular y para poder tener puntos referenciales al realizar ejercicios prácticos de los contenidos. Cumpliendo con el objetivo que se expone, cada capítulo tiene una parte de teoría y otra de práctica en cada sección que así lo amerite.

Esta forma de presentación pretende facilitar la lectura de contenidos y hacer notar la secuencia entre la teoría y la práctica.

El desarrollo del material de la asignatura, se hace considerando la Investigación de Operaciones como una ciencia administrativa basada en el enfoque científico, para resolver problemas y proporcionar ayuda para la toma de decisiones. Planear, organizar, dirigir, dotar de personal, controlar, son actividades que el Economista en su ejercicio profesional puede desempeñar, y la Investigación de Operaciones le sirve de ayuda con su método analítico y sistemático. Con base en este enfoque gerencial es que se plantea en el presente manual el estudio de esta ciencia.

El capítulo inicial, es una puerta de entrada al estudio de las diversas técnicas y los respectivos modelos que conforman la asignatura. Se hace énfasis en el análisis cuantitativo que es la base del enfoque científico, punto de partida del proceso que determinará la toma de una decisión. Se hace referencia a los pasos a seguir en ese análisis. Se recuerdan aspectos cualitativos en el proceso de tomar decisiones. Se proporcionan conceptos fundamentales que han de manejarse durante toda la asignatura, porque son parte de cada técnica a estudiar. Dentro de ellos están los conceptos de sistema, modelo y optimización. Se justifica el uso de modelos para tomar decisiones. Luego de la teoría se concluye con la práctica en sistemas específicos.

El capítulo II inicia las técnicas a estudiar, siendo la primera, Programación Lineal. Esta es una de las técnicas más empleadas y se aplica en sistemas con relaciones lineales, para usar los recursos escasos de la mejor manera posible. Es uno de los temas más amplios y ocupa el mayor porcentaje del material de la asignatura. Sus diferentes secciones están dedicadas a conocimientos particulares dentro de la técnica tales como: Definición de la técnica, elaboración del modelo general, algoritmo

de solución, análisis de sensibilidad y teoría de dualidad. Cada una con esbozos de los puntos esenciales de la teoría y con realización de prácticas en sistemas diversos, semejantes a la realidad.

El Capítulo III es una continuación de la técnica de Programación Lineal, con estudio de un modelo particular denominado Programación Lineal de Transporte. Esta técnica fue creada para minimizar los costos de transporte asociados a la distribución de un bien desde diferentes orígenes hasta diferentes destinos. Posteriormente ha sido usada en sistemas diferentes a los de transporte, donde el modelo elaborado cumple con las condiciones del modelo Lineal de Transporte. Incluye secciones semejantes a las de la técnica de Programación Lineal, pero en este caso referidas a este modelo específico.

El Capítulo IV contiene el estudio de técnicas utilizadas para el manejo de proyectos que son: PERT y CPM. Ambas técnicas tienen el objetivo de ahorrar el mayor tiempo posible en la ejecución de proyectos. Didácticamente, su estudio ha sido dividido en tres fases: Planeamiento, Programación y Control. El planeamiento concluye cuando se ha elaborado el modelo o red del proyecto, la programación concluye con la elaboración de programas de tiempo de ejecución de actividades y el control se realiza durante toda la ejecución del proyecto. Se incluye además, en su contenido, algunas consideraciones de costo y de probabilidades. En cada una de sus secciones se esbozan los puntos principales de la teoría y se realizan prácticas de su aplicación en proyectos particulares. Debe recordarse que en el estudio de esta técnica no se pretende enseñar a dividir proyectos particulares en actividades, ya que ello amerita conocimientos específicos en cada campo donde se va a ejecutar un proyecto, que deben tener las personas que van a trabajar con él.

El último capítulo está dedicado al estudio de la Teoría de Colas, con especial mención del modelo M/M/1, llamado así según la notación de Kendall. La Teoría es un estudio de los sistemas de espera y de los diferentes modelos que provee la Investigación de Operaciones para ayudar en la toma de decisiones en este campo. En su parte inicial se incluye la teoría básica para definir los sistemas de espera a través de sus aspectos, las causas que los originan, así como también la clasificación de modelos, formas de solución de los mismos y utilización de los resultados para tomar decisiones que mejoren su forma de operar.

Posteriormente se estudia el modelo M/M1, llamado también modelo popular, aplicando el modelo para tomar decisiones en diversos ambientes.

De esta forma se concluye con el material necesario para cumplir con el contenido programático de la asignatura Investigación de Operaciones en la Escuela de Economía.

# CAPITULO I

## INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES y ANÁLISIS CUANTITATIVO

***Objetivo:** Presentar conceptos y aspectos relevantes del enfoque cuantitativo en la toma de decisiones, los cuales deben proveer al estudiante con un entendimiento básico de las habilidades iniciales necesarias para realizar análisis cuantitativo, con Investigación de Operaciones, mediante la teoría y presentación de casos prácticos.*

### I.A SECCION A. Investigación de Operaciones y Análisis Cuantitativo

#### Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría

1. La Investigación de Operaciones es una ciencia gerencial, enfocada hacia la toma de decisiones gerenciales, basada en el método científico para resolver problemas.
2. La Investigación de Operaciones no es sólo un conjunto de herramientas matemáticas. De hecho, es un enfoque sistemático que usa herramientas analíticas para resolver problemas.
3. La Investigación de Operaciones tiene sus raíces en operaciones militares de la Segunda Guerra Mundial; su posterior aplicación en el campo de los negocios, creación de bases teóricas y el desarrollo de la computadora permitió que esta nueva disciplina fuese incluida como asignatura en las universidades a partir de la década de los 50.
4. Entre otras definiciones que se hacen de la Investigación de Operaciones, las de la Sociedad de Investigación de Operaciones de Gran Bretaña y de Estados Unidos, destacan en su definición los aspectos siguientes: a) Su aplicación en **sistemas**. Se usa para tomar decisiones dentro de sistemas. b) El uso de **modelos** como su esencia. Para tomar decisiones se modela el sistema c) Su propósito de ayudar a tomar acción, científicamente. Se usa el enfoque científico, el análisis cuantitativo. d) Su casi ilimitada amplitud de aplicaciones. Se usa en negocios, industrias, gobierno y defensa.
5. Tomar decisiones es la tarea esencial de toda persona o grupo que tiene bajo su responsabilidad el funcionamiento de una organización entera o parte de ella.
6. En la toma de decisiones el análisis puede tomar dos formas: cualitativo y cuantitativo.
7. El análisis cualitativo se basa principalmente en el juicio y experiencia de la gerencia, incluye sentimientos intuitivos sobre el problema tratado y es más un arte que una ciencia.
8. El análisis cuantitativo se concentra en hechos cuantitativos o datos asociados con los problemas y desarrolla expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes en ellos.



Seguidamente, utilizando métodos cuantitativos, obtiene resultados con los que se hacen recomendaciones basadas en los aspectos cuantitativos del problema.

9. El papel del análisis cuantitativo en la toma de decisiones puede variar dependiendo de la importancia de los factores cualitativos.
10. En algunas situaciones, cuando el problema, el modelo y los insumos permanecen iguales, el análisis cuantitativo puede hacer automática la decisión con los resultados obtenidos al usar métodos cuantitativos. En otros casos, el análisis cuantitativo es sólo una ayuda para tomar la decisión y sus resultados deben ser combinados con información cualitativa.
11. Los modelos matemáticos son la base del análisis cuantitativo.
12. La esencia de la Investigación de Operaciones es el uso de modelos.
13. Un modelo es una representación simplificada de un sistema de la vida real, de una situación o de una realidad.
14. Un sistema es un conjunto de elementos que interactúan entre sí.
15. Un modelo captura características selectas de un sistema, proceso o realidad, y luego las combina en una representación abstracta del original.
16. La Investigación de Operaciones hace uso extensivo del análisis cuantitativo, como parte integral del enfoque científico para tomar decisiones gerenciales.
17. Este análisis es racional y lógico. Consiste en: a) Definir claramente un problema, que previamente se ha determinado que existe, b) Desarrollar un modelo, c) Recolectar los datos de insumo, d) Solucionar el Modelo, e) Validar resultados, Interpretarlos y f) Implementarlos en la ejecución de una decisión.
18. Definir el problema es el paso inicial del análisis cuantitativo, es primordial y muchas veces el paso más difícil. Debe reflejar una representación segura del interés total de sistema. La esencia del problema se debe establecer explícitamente y no de manera ambigua.
19. La definición del problema es un paso crítico y determinante en el éxito o fracaso de cualquier enfoque cuantitativo para tomar decisiones. Si el problema no se ha escrito, no se ha definido.
20. Muchas veces se concluye que el problema debe ser redefinido después de haber realizado varios pasos para tomar una decisión.
21. Al definir el problema se deben identificar alternativas, criterios para evaluar esas alternativas, y seleccionarlas La optimización es un criterio utilizado y es sinónimo de maximización o minimización. La evaluación de las alternativas se hace con modelos
22. La definición de un problema determinará el tipo de modelo a usar.
23. Los modelos pueden ser objeto de diversa clasificación. Tres formas de modelo son: Icónico, Analógico y Matemático. Los icónicos son representaciones a escala (réplicas físicas) de objetos

reales. Los analógicos o esquemáticos son modelos físicos en cuanto a la forma pero no son semejantes físicamente al objeto que está siendo modelado ( mapas de carreteras).

24. Los modelos matemáticos (llamados también simbólicos) representan sistemas del mundo real; cuantifican sus variables y las combinan en expresiones y fórmulas matemáticas. Son idealizaciones de problemas de la vida real basados en supuestos claves, estimados y/o estimaciones estadísticas.
25. Los modelos matemáticos son los que, tradicionalmente, han sido más comúnmente identificados con la Investigación de Operaciones.
26. Los modelos matemáticos, base para el análisis cuantitativo, contienen variables y parámetros. Relacionan variables de decisión (Insumos Controlables) con parámetros o coeficientes fijos (Insumos Incontrolables) y frecuentemente buscan maximizar o minimizar una función objetivo sujeta a restricciones.
27. Formular y construir el modelo son procesos integrados. La formulación es el aspecto lógico conceptual y la construcción es la expresión de las relaciones lógicas en el lenguaje simbólico de la Matemática.
28. La Investigación de Operaciones provee un sinnúmero de modelos para distintos sistemas. Esos modelos o representaciones cuantitativas de la realidad es un aspecto clave que diferencia la toma de decisiones cuantitativas de las tomas de decisión en general.
29. El desarrollo de los modelos, y en general el análisis cuantitativo, involucra a grupos interdisciplinarios.
30. El modelo debe tener solución, ser realista, fácil de entender y de modificar. Además debe permitir que los datos de insumo requeridos puedan ser obtenidos
31. Las principales razones para usar modelos, en lugar de trabajar directamente sobre la realidad, son las siguientes: a) Ahorro de dinero, tiempo u otro bien de valor; b) Evitar riesgos de daños al sistema cuando se está solucionando el problema; c) Para entender mejor el ambiente real cuando éste es muy complicado.
32. La recolección de los datos, se refiere a obtener la información cuantitativa que es necesaria para obtener una solución. Incluye escalas de medidas: nominal, ordinal y ratios.
33. Las fuentes de datos incluyen: a) Reportes de la organización y documentos; b) Muestreos estadísticos; c) Entrevistas con personas empleados o relacionadas con la organización cuyo juicio y experiencia son invaluables y a menudo proporcionan información excelente. Además pueden incluirse otras medidas directas. A menudo los datos son incorrectos o inapropiados porque son recolectados bajo suposiciones que no son apropiadas. A veces no están disponibles y deben ser recogidos por el analista.
34. Dependiendo de datos buenos, se obtendrán buenos resultados; de lo contrario, se obtendrá lo que no se quiere, como resultado de la utilización de un mal insumo.

35. La solución de modelos matemáticos, bien documentada en la bibliografía de Investigación de Operaciones, incluye un algoritmo o serie de cálculos específicos que deben realizarse. Cada modelo usa un particular algoritmo. Muchos de ellos contienen pasos repetitivos y por eso se les llama iterativos, esto permite su fácil implementación en la computadora.
36. En análisis cuantitativo la solución óptima es la mejor solución matemática.
37. Las microcomputadoras, al realizar cálculos largos y complejos, han permitido usar las técnicas cuantitativas aún en empresas pequeñas.
38. Los modelos deben ser probados para su validez interna o externa. En sentido interno, las representaciones matemáticas deben tener sentido unas con respecto a las otras. En sentido externo, los resultados obtenidos del modelo deben tener sentido cuando se comparan con la realidad de la situación que es estudiada.
39. Datos pasados pueden ser usados frecuentemente para probar la validez de un modelo matemático.
40. La interpretación de resultados implica examinarlos a la luz de los objetivos propuestos. Se debe determinar las implicaciones de su aplicación. Además, como el modelo es una aproximación de la realidad, debe ser analizada la sensibilidad de la solución a cambios que ocurran en sus insumos. Para ello se cuenta con el Análisis de Sensibilidad o Análisis de Post- optimización.
41. Toma de decisión e implementación consiste en trasladar los resultados obtenidos en detalladas instrucciones de operaciones para la organización. Los procesos de control son necesarios.
42. Muchos grupos de análisis cuantitativo han fracasado en sus esfuerzos porque han fallado en implementar, apropiadamente, una buena solución viable.
43. La solución óptima de un modelo matemático, no es siempre la política que debe ser implementada por la empresa.
44. La decisión final la debe tomar el ser humano, que tiene conocimientos que no se pueden cuantificar exactamente, y que puede ajustar los resultados del análisis para llegar a una decisión conveniente.
45. El análisis cuantitativo no reemplaza el sentido común, es un complemento. Los modelos cuantitativos auxilian a los encargados de tomar decisiones, pero es ir muy lejos decir que lo sustituye. El rol de la experiencia, intuición y juicio del ser humano no puede ser disminuido.
46. Entre los mas usados modelos cuantitativos de Investigación de Operaciones se encuentran los usados en las Técnicas de Programación Lineal, PERT-CPM y los de la Teoría de Colas.
47. Aunque el ritmo de desarrollo de nuevas técnicas ha bajado con relación a los primeros tiempos, en los últimos tiempos ha aumentado la extensión de la amplitud de las áreas donde se aplica y en las magnitudes de los problemas que pueden ser resueltos con las metodologías de Investigación de Operaciones.

48. Un punto clave es que la Investigación de Operaciones usa una metodología que está objetiva y claramente articulada. Está construida alrededor de la filosofía de que tal enfoque es superior al que está basado solamente en la subjetividad y opinión de expertos. Por lo tanto conduce a mejores y más consistentes decisiones. Sin embargo no excluye el juicio y razonamiento no cuantificable del ser humano. No es pues un proceso absoluto de toma de decisiones, sino una ayuda para tomar buenas decisiones.

## **I. B SECCION B. Práctica de Análisis Cuantitativo**

### **Presentación de Casos Prácticos.**

A continuación, se presentan problemas donde el análisis cuantitativo puede aplicarse.

#### **EJEMPLO 1.**

En una empresa productora de cerveza se necesita distribuir el producto desde las dos plantas productoras hasta cinco distribuidores principales.

- a) ¿Cómo participa la Investigación de Operaciones para resolver este problema?
- b) Identifique los insumos incontrollables para los que debe obtenerse información.
- c) Identifique las variables de decisión, el objetivo y las restricciones en el modelo.
- d) ¿El modelo a usar sería determinístico o estocástico?
- e) ¿Cuáles supuestos se pueden asumir para simplificar el modelo?

#### **RESPUESTAS:**

- a) Investigación de Operaciones provee un enfoque con análisis cuantitativo que incluye los pasos señalados en el aparte 17 de la teoría. La definición del problema puede incluir un objetivo de minimizar los costos de transporte totales. Debe identificar los aspectos que afectan el logro de ese objetivo, tales como disponibilidades y demanda del producto. Debe continuar el análisis cuantitativo con la determinación de la información necesaria y disponible en ese sistema de transporte.
- b) Los costos fijos y variables de transporte del producto, las cantidades disponibles de producto en cada una de las dos plantas y las cantidades demandadas por cada uno de los 5 distribuidores.
- c) Las variables de decisión son las cantidades de cerveza a transportar desde cada planta hasta cada distribuidor. El Objetivo es minimizar los costos totales de transporte y las restricciones son de cantidad de oferta disponible y de demanda a satisfacer.
- d) Si la demanda es fluctuante, la producción disponible no es fija y los costos varían de acuerdo a las cantidades a transportar, se le considerará un modelo Estocástico.

- e) Se puede asumir que para cada específico período de planificación las cantidades de cerveza demandados son constantes en cada distribuidor. Igualmente se puede asumir que la cantidad disponible de cerveza producida, en cada planta, es fija para el período de planificación y que los costos unitarios de transporte son fijos. Si se considera esto, para un período específico de transporte de la cerveza, se trabajará con un modelo Determinístico.

## EJEMPLO 2.

El Ministerio de Infraestructura necesita construir 250 unidades habitacionales para resolver parte del problema de los damnificados de una región.

- a) ¿Cómo participa la Investigación de Operaciones para ayudar a resolver este problema?
- b) Identifique los insumos incontrolables para los que debe obtenerse información.
- c) ¿Cuáles son las variables de decisión, el objetivo, las restricciones en el modelo?
- d) ¿El modelo a usar sería determinístico o estocástico?
- e) ¿Cuáles supuestos se pueden asumir para simplificar el modelo?
- f) ¿Qué ventajas tiene trabajar con un modelo en esta situación en comparación a trabajar sobre el sistema real?
- g) ¿Cómo se puede lograr éxito en un análisis cuantitativo?

## RESPUESTAS:

- a) El analista de Investigación de operaciones puede proveer el análisis cuantitativo para determinar el tiempo mínimo de terminación del proyecto tomando en cuenta los costos y tiempos normales de ejecución de las actividades, así como también los costos y tiempos de aceleración de las actividades del proyecto a desarrollar.
- b) Los tiempos de ejecución, normales y acelerados, de las actividades; los costos de acelerar las actividades; los fondos disponibles para la aceleración de actividades; y las precedencias entre una actividad y otra.
- c) Las variables de decisión son las fechas de cuando iniciar y finalizar las actividades, y las actividades que pueden ser aceleradas. El objetivo sería realizar el proyecto en el menor tiempo posible. Las restricciones que deben cumplirse son las de no violar el orden en que se han de ejecutar las actividades y no gastar mas de los fondos disponibles para la aceleración de la ejecución.
- d) Si los tiempos de ejecución de las actividades, tanto los normales como los acelerados, son inciertos y sujetos a variación; si además los costos de aceleración no son conocidos con certeza y las precedencias entre actividades pueden variar, en el proceso de ejecución del proyecto, debido a cambios en el diseño, se estaría trabajando con un modelo Probabilístico o Estocástico.
- e) Se puede asumir que todos los insumos señalados anteriormente son conocidos con certeza en el período de ejecución del proyecto y se trabajará con un modelo Determinístico.
- f) Poniendo énfasis en que los directivos principales se involucren en la definición del problema. El analista también debe involucrarse y trabajar con los intereses de la directiva. Deben integrarse con toda la organización porque todo ello tiene impacto sobre la factibilidad de la implementación que es lo que en definitiva se quiere para resolver esta situación o problema. A veces un cambio mayor o un simple análisis del modelo es mejor que la aplicación a ciegas de un modelo cuantitativo.

## CAPITULO II

### PROGRAMACIÓN LINEAL

***Objetivo:** Proponer en forma cuantitativa acciones o decisiones a tomar para optimizar sistemas donde existan recursos escasos y se presenten relaciones lineales, mediante la teoría y práctica de la Técnica de Programación Lineal.*

#### II.A SECCION A. Teoría General de Programación Lineal y Fase de Formulación y Construcción de Modelos.

##### II.A.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de Programación Lineal

- 1- Programación Lineal es una técnica cuantitativa ampliamente aplicada en sistemas que presenten relaciones lineales, para utilizar los recursos escasos de la mejor manera posible.
- 2- La mejor manera de usar los recursos escasos se logra utilizando un modelo del sistema llamado Modelo de Programación Lineal.
- 3- El Modelo de Programación Lineal es un modelo matemático con variables de decisión, coeficientes y/o parámetros, restricciones y una Función Objetivo.
- 4- Es determinístico porque todos los datos relevantes utilizados, son conocidos. Es lineal porque las restricciones y el objetivo son funciones lineales. La contribución de cada variable al valor total del objetivo y al lado derecho de cada restricción es proporcional al valor de la variable. Es aditivo porque los términos de sus restricciones y objetivo pueden sumarse (o restarse). La contribución de cada variable es independiente del valor de las otras variables. Es divisible porque las variables de decisión pueden aceptar valores fraccionales. En caso de no aceptar valores fraccionales, sería preferible usar Programación Lineal Entera.
- 5- La Formulación y Construcción del Modelo Lineal implica: a) Definir claramente las variables de decisión y expresarlas simbólicamente o convencionalmente. b) Definir claramente la Función Objetivo y las restricciones y expresarlas matemáticamente como funciones lineales.
- 6- Debe cuidarse que los elementos componentes del modelo sean expresados para el mismo período de tiempo.
- 7- Se debe estipular que las variables de decisión sean mayores o iguales a cero. Esto acerca el modelo a la realidad. En los programas de computadora para resolver modelos lineales, ya está incluida esta condición y no hace falta incorporarla manualmente.

- 8- La Función Objetivo del Modelo Lineal es la formulación matemática de una meta establecida y por lo tanto su valor final mide la efectividad lograda. Es una función lineal a ser maximizada o minimizada y tiene la siguiente forma general:

$$\text{Optimizar } C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 + \dots + C_nX_n$$

- 9-  $X_j$ , simboliza matemáticamente a las variables de decisión. Son los valores numéricos que se determinan con la solución del modelo y *representan* o están relacionadas con una actividad o acción a tomar. Son los únicos valores desconocidos en el modelo y pueden existir en cualquier cantidad, desde 1 hasta n variables. Es decir, j varía desde 1 hasta n.
- 10-  $C_j$ , matemáticamente, simboliza el coeficiente de la variable j en la Función Objetivo. Son datos relevantes, insumos incontrolables ya conocidos. En la Función Objetivo *representan* la cantidad con la cual contribuye cada unidad de la variable j, al valor total deseado en el objetivo.
- 11- Las restricciones, desde el punto de vista matemático, son funciones lineales expresadas como igualdades o desigualdades, que limitan el valor de las variables de decisión a valores permisibles. *Representan* recursos, condiciones o requerimientos establecidos. Las restricciones del Modelo Lineal general tienen la forma siguiente:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 + \dots + a_{1n}X_n & \geq \leq = & b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 + \dots + a_{2n}X_n & \geq \leq = & b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 + \dots + a_{3n}X_n & \geq \leq = & b_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + a_{m4}X_4 + \dots + a_{mn}X_n & \geq \leq = & b_m \end{array}$$

- 12-  $a_{ij}$ , matemáticamente simboliza el coeficiente, en la restricción i, de las variable j.  
El subíndice i indica el recurso, requerimiento o condición cuya limitación se está expresando; j indica la variable correspondiente.  
Cuando la limitación es de un recurso i, estos coeficientes *representan* la cantidad del recurso total limitado i, que es utilizada en cada unidad de la variable j. Cuando la limitación es de un requerimiento o condición i, *representan* la cantidad del requerimiento o condición i limitada, que aporta cada unidad de la variable j, al requerimiento o condición total establecida. Son, por ello, valores unitarios, al igual que los coeficientes de las variables en la Función Objetivo.
- 13-  $b_i$ , matemáticamente constituye el lado derecho de la restricción i. *Representa* la cantidad total disponible del recurso limitado i, o la cantidad total de un requerimiento o condición i establecida. Puede existir cualquier cantidad de restricciones por lo tanto i puede variar desde 1 hasta m.
- 14-  $X_j \geq 0$  es una restricción de no negatividad de las j variables, la cual se le considera siempre presente como una condición natural en el Modelo Lineal General.

## II.A.2 *Formulación y Construcción de Modelos Lineales. Teoría y Práctica.*

### II.A.2.1 **Teoría.**

1. El estudiante debe participar practicando el traslado de problemas, que se presentan en sistemas específicos y que ya han sido definidos, a representaciones simplificadas. Por la práctica se obtiene la experiencia. Por lo tanto, debe formular y construir modelos.
2. La Formulación implica describir conceptualmente los elementos componentes del modelo en una situación específica.
3. La Construcción implica expresar en términos matemáticos los elementos definidos en el modelo.
4. Considerando los adelantos realizados para la solución de modelos lineales, la habilidad para formular y construir modelos es cada vez más importante.

### II.A.2.2 **Práctica.**

En cada uno de los enunciados de problemas dados a continuación, debe trasladar la información del sistema a un modelo que lo represente, es decir, *Formule y Construya* el Modelo Lineal respectivo.

#### EJEMPLO 1.

Una empresa fabrica los productos A, B y C y puede vender todo lo que produzca a los siguientes precios: A, Bolívares 700, cada unidad; B, Bolívares 3.500; C, Bolívares 7.000. Producir cada unidad de A necesita 1 hora de trabajo, 2 horas de acabado y 3 unidades de materia prima. Producir una unidad de B necesita 2 horas de trabajo, 3 horas de acabado y 2.5 unidades de materia prima. Producir una unidad de C necesita 3 horas de trabajo, 1 hora de acabado y 4 unidades de materia prima. Para este período de planificación están disponibles 100 horas de trabajo, 200 horas de acabado y 600 unidades de materia prima.

Con base en la teoría señalada en el aparte 5, sección A; para formular y construir el modelo, se tiene lo siguiente:

- a) Debe definirse claramente a las variables de decisión y expresarlas simbólicamente. En la computadora y dependiendo del programa que utilice, dispondrá de un mayor espacio diseñado para escritura que puede utilizar para nombrarlas convencionalmente.

X1: unidades a producir de producto A  
X2: unidades a producir de producto B      Estos son insumos controlables  
X3: unidades a producir de producto C

- b) Debe Definirse claramente el objetivo y expresarse como función lineal.

Objetivo: Maximizar ingresos de venta



$$\text{Max } 700 \frac{\text{Bs.}}{\text{Unid de A}} X1 \text{ Unid de A} + 3.500 X2 + 7.000 X3$$

Escribir el objetivo de esta forma es expresar en unidades físicas uno de sus términos. Este término presenta la información específica de lo que contiene y permite confirmar la esencia física de lo que se está sumando y también que ello es consecuente con lo que se está obteniendo en el total de la ecuación; en este caso, ingreso en Bolívares.

c) Deben definirse las restricciones y expresarlas como funciones lineales.

Restricción 1: Disponibilidad limitada de horas de trabajo.

$$1 \frac{\text{hora de trabajo}}{\text{Unidad de A}} X1 (\text{unid. de producto A}) + 2 X2 + 3 X3 \leq 100 \text{ horas de trabajo}$$

Restricción 2: Horas de acabado disponibles en este período:

$$2 X1 + 3 \frac{\text{hora de acabado}}{\text{Unidad de B}} X2 (\text{unid. de producto B}) + 1 X3 \leq 200 \text{ horas de acabado}$$

Restricción 3: Disponibilidad limitada de unidades de materia prima:

$$3 X1 + 2.5 X2 + 4 \frac{\text{unid. de Materia prima}}{\text{Unidad de B}} X3 (\text{unid. de producto B}) \leq 600 \text{ Unidades de Materia prima}$$

De esta forma las restricciones están expresadas en unidades físicas. Se destaca en cada una de ellas alguno de sus términos, con indicación de lo que representa. Esto confirma que lo que se está sumando es consecuente con lo que se está obteniendo del lado derecho de la ecuación.

Finalmente, incorporando la restricción de no-negatividad de las variables de decisión, se resume así el modelo:

$$\text{Max } 700 X1 + 3.500 X2 + 7.000 X3$$

Sujeto a:

$$1 X1 + 2 X2 + 3 X3 \leq 100$$

$$2 X1 + 3 X2 + 1 X3 \leq 200$$

$$3 X1 + 2.5 X2 + 4 X3 \leq 600$$

$$X1, X2, X3 \geq 0$$

## EJEMPLO 2.

Una empresa fabrica los productos A, B y C y puede vender todo lo que produzca a los siguientes precios: A, Bolívares 700; B, Bolívares 3.500; C, Bolívares 7.000. Producir cada unidad de A necesita 1 hora de trabajo. Producir una unidad de B necesita 2 horas de trabajo, más 2 unidades de A. Producir una unidad de C necesita 3 horas de trabajo, más 1 unidad de B. Cualquier unidad de A utilizada para producir B, no puede ser vendida. Similarmente cualquier unidad de B utilizada para producir C, no puede ser vendida. Para este período de planificación están disponibles 40 horas de trabajo. *Formule y Construya* el modelo Lineal que maximice los ingresos de la empresa.

Solución al final del texto.

### EJEMPLO 3.

La Cámara de Industriales de la región periódicamente promueve servicios públicos, seminarios y programas. Actualmente los planes de promoción para este año están en marcha. Los medios alternativos para realizar la publicidad así como los costos y la audiencia estimados por unidad de publicidad, además de la cantidad máxima de unidades de publicidad en que puede ser usado cada medio se muestran a continuación.

| Restricciones                      | Televisión | Radio  | Prensa |
|------------------------------------|------------|--------|--------|
| Audiencia por unidad de publicidad | 100.000    | 18.000 | 40.000 |
| Costo por unidad de publicidad     | \$ 2.000   | \$ 300 | \$ 600 |
| Uso máximo del medio               | 10         | 20     | 10     |

Para lograr un uso balanceado de los medios, la publicidad en radio no debe exceder el 50% del total de unidades de publicidad autorizados. Además la cantidad de unidades solicitadas en televisión debe ser al menos 10% del total autorizado. El presupuesto total para promociones se ha limitado a \$18.500.

Utilizando el mismo proceso teórico del ejemplo 1, se tiene lo siguiente:

Variables de decisión: X1: unidades de publicidad a contratar en televisión.  
X2: unidades de publicidad a contratar en radio.  
X3: unidades de publicidad a contratar en prensa.

Objetivo: Maximizar la audiencia total o cantidad de personas que ven la publicidad

$$\text{Max } 100.000 \frac{\text{personas}}{\text{Unid en t.v}} X1 \text{ Unid en t.v} + 18.000 X2 + 40.000 X3$$

Restricción 1: Disponibilidad limitada de presupuesto para la publicidad:

$$2.000 \frac{\$}{\text{unid. public. a contratar en t.v.}} X1 (\text{unidades de publicidad a contratar en t.v}) + 300 X2 + 600 X3 \leq 18.500 \$$$

Restricciones 2, 3 y 4: Uso máximo de medios para la publicidad:

$$\begin{aligned} X1 (\text{unidades de publicidad a contratar en t.v}) &\leq 10 \text{ unidades de publicidad a contratar en t.v} \\ X2 (\text{unidades de publicidad a contratar en radio}) &\leq 20 \text{ unidades de publicidad a contratar en radio} \\ X3 (\text{unidades de publicidad a contratar en prensa}) &\leq 10 \text{ unidades de publicidad a contratar en prensa} \end{aligned}$$

Restricción 5: Publicidad limitada a un máximo de 50% en radio, con relación al total de unidades a contratar:

$$X2 (\text{unidades de publicidad a contratar en radio}) \leq 0.5 (X1 + X2 + X3)$$

$$\text{Finalmente quedará expresada así: } -0.5 X1 + 0.5 X2 - 0.5 X3 \leq 0$$

Restricción 6: La cantidad de unidades solicitadas en televisión debe ser al menos 10% del total autorizado

$$X1 (\text{unidades de publicidad a contratar en t.v}) \geq 0.10 (X1 + X2 + X3)$$

$$\text{Finalmente quedará expresada así: } 0.9 X1 - 0.1 X2 - 0.1 X3 \geq 0$$

Posteriormente puede resumir el modelo agregándole la restricción de no-negatividad de las variables

#### EJEMPLO 4.

El Banco Internacional abre de Lunes a Viernes de 8 a.m. a 4p.m. De experiencias pasadas sabe que va a necesitar la cantidad de cajeros señalados en la tabla dada. Hay dos tipos de cajeros: los que trabajan tiempo completo de 8 am a 4 pm, los cinco días, excepto la hora que utilizan para almorzar.

El Banco determina cuándo debe almorzar cada cajero, pero debe ser entre las 12m y la 1 p.m. o entre la 1 p.m. y las 2 p.m. A los empleados a tiempo completo se les paga Bs.1.800 la hora (incluida la hora de almorzar). También hay trabajadores a tiempo parcial que deben trabajar exactamente 3 horas consecutivas cada día y se le paga Bs. 1.100 la hora, sin ningún otro pago. A fin de mantener la calidad del servicio el Banco desea tener un máximo de 5 cajeros contratados a tiempo parcial. Se desea minimizar los costos de empleados contratados.

| Periodo de tiempo  | 8-9 a.m. | 9- 10a.m. | 10- 11a.m. | 11a.m.- 12m. | 12m-1p.m. | 1- 2p.m | 2-3p.m | 3-4p. |
|--------------------|----------|-----------|------------|--------------|-----------|---------|--------|-------|
| Cajeros requeridos | 4        | 3         | 4          | 6            | 5         | 6       | 8      | 8     |

a) Variables de decisión:

X1: Empleados a tiempo completo que toman su almuerzo de 12m- 1pm

X2: Empleados a tiempo completo que toman su almuerzo de 1pm-2pm

X3 Empleados a tiempo parcial que empiezan a trabajar a la 8am

X4 Empleados a tiempo parcial que empiezan a trabajar a la 9am

X5 Empleados a tiempo parcial que empiezan a trabajar a la 10am

X6 Empleados a tiempo parcial que empiezan a trabajar a la 11am

X7 Empleados a tiempo parcial que empiezan a trabajar a la 12m

X8 Empleados a tiempo parcial que empiezan a trabajar a la 1pm

Empleados a tiempo parcial que empiezan a trabajar a la 1pm trabajarán hasta que cierre y por lo tanto no se necesitan empleados a tiempo parcial que empiecen a las 2 pm o las 3 p.m.

b) Objetivo: Minimizar Costos de contratación

$$\text{Min } 14.400 (X_1 + X_2) + 3.300 (X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8)$$

c) Restricciones de requerimientos de empleados totales en los ocho horarios señalados ( 8 restricciones)

Restricción de empleados en el horario de 8 am - 9 a..m.

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$$

Restricción de empleados en el horario de 9 a.m. - 10 a..m.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 3$$

Restricción de empleados en el horario de 10 a.m. - 11 a..m.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 4$$

Restricción de empleados en el horario de 11 a.m. - 12 a.m.

$$X1 + X2 + X4 + X5 + X6 \geq 6$$

Restricción de empleados en el horario de 12m - 1 p.m.

$$X2 + X5 + X6 + X7 \geq 5$$

Restricción de empleados en el horario de 1 p.m. - 2 p.m.

$$X1 + X6 + X7 + X8 \geq 6$$

Restricción de empleados en el horario de 2 p.m - 3 p.m.

$$X1 + X2 + X7 + X8 \geq 8$$

Restricción de empleados en el horario de 3 p.m. - 4 p.m.

$$X1 + X2 + X8 \geq 8$$

Restricción de cantidad máxima de 5 cajeros contratados a tiempo parcial:

$$X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 \leq 5$$

Restricción de no negatividad de las variables: Todas las variables no negativas

NOTA: Para obtener las restricciones puede elaborar un cuadro de doble entrada: Una entrada conteniendo cada Tipo de trabajador y la otra con las horas durante las cuales existen requerimientos específicos; esta última se dividirá en 8 columnas de 8 horarios, al final de las cuales está el total de empleados requeridos en cada uno de ellos.

| Definición o Tipo de Empleado | Requerimiento de trabajadores (Cantidad) |          |          |          |         |        |        |        |
|-------------------------------|--|----------|----------|----------|---------|--------|--------|--------|
|                               | 8-9a.m                                   | 9-10a.m. | 10-11a.m | 11-12a.m | 12-1a.m | 1-2p.m | 2-3p.m | 3-4p.m |
| Almuerzo 12 –1                | X1                                       | X1       | X1       | X1       |         | X1     | X1     | X1     |
| Almuerzo 1-2                  | X2                                       | X2       | X2       | X2       | X2      |        | X2     | X2     |
| Parcial desde las 8           | X3                                       | X3       | X3       |          |         |        |        |        |
| Parcial desde las 9           |  | X4       | X4       | X4       |         |        |        |        |
| Parcial desde las 10          |  |          | X5       | X5       | X5      |        |        |        |
| Parcial desde las 11          |  |          |          | X6       | X6      | X6     |        |        |
| Parcial desde las 12          |  |          |          |          | X7      | X7     | X7     |        |
| Parcial desde las 1           |  |          |          |          |         | X8     | X8     | X8     |
|                               | 4  | 3        | 4        | 6        | 5       | 6      | 8      | 8      |

## II.B SECCION B. Solución de Modelos Lineales con el Método Gráfico.

### II. B.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría del método gráfico

- 1- En el análisis cuantitativo, una vez que se ha formulado y construido un modelo lineal para resolver un problema existente, en un sistema cualquiera, es necesario resolverlo.
- 2- La solución de un modelo lineal muestra siempre un conjunto convexo delimitado por las restricciones del mismo y en el cual, si existe solución posible, al menos uno de sus puntos extremos es la solución óptima. Un punto extremo existe en la intersección de, al menos, dos rectas.
- 3- El método gráfico se usa para resolver modelos lineales con dos variables y muestra el conjunto convexo que constituye la denominada región solución y el(los) punto(s) extremo(s) que proporciona(n) la solución del modelo.
- 4- El Método Gráfico permite conocer la base matemática de la solución de modelos lineales, los conjuntos convexos, y observar gráficamente situaciones que se presentan en modelos de cualquier tamaño. Esto ayuda a la comprensión de la Programación Lineal.
- 5- El proceso para trabajar con el Método Gráfico sigue los pasos siguientes: a) Graficar las restricciones como igualdades y luego determinar el área correspondiente a la desigualdad, sombreando el espacio correspondiente. b) Determinar el área común a todas las restricciones. c) Evaluar la Función Objetivo en cada punto extremo del espacio de soluciones posibles. El punto o los puntos extremos en el que se obtenga el mejor valor, determinarán la solución del modelo.
- 6- Existe un procedimiento alternativo al punto c), señalado en el Método Gráfico, para obtener la solución del modelo. Este procedimiento alternativo consiste en graficar la Función Objetivo con un valor arbitrario dentro de la región solución. Luego se desplaza paralelamente en la dirección que incremente su valor (si está maximizando) o decrezca su valor (si está minimizando). El punto o los puntos extremos que toque esa Función Objetivo antes de salir totalmente fuera de la región de soluciones posibles determinarán el óptimo, o solución del modelo.
- 7- Al conjunto convexo de solución se le llama región de soluciones posibles, porque todos los puntos de esa región satisfacen TODAS las restricciones del modelo.
- 8- Un modelo tiene solución óptima ÚNICA cuando sólo una combinación de variables proporciona el mejor valor para el objetivo; se reconoce en el gráfico porque un único punto extremo provee el mejor valor del objetivo o un único punto extremo limita el valor de la recta objetivo.
- 9- Un modelo tiene soluciones óptimas ALTERNAS cuando más de una combinación de variables proporciona el óptimo valor del objetivo. Se reconoce en el gráfico porque más de un punto extremo proporciona el óptimo valor del objetivo o más de un punto extremo limita el valor de la recta objetivo. La recta objetivo al desplazarse dentro de la región solución cae paralelamente sobre alguna restricción antes de salir totalmente de la región solución.

- 10- Un modelo NO TIENE SOLUCIÓN POSIBLE cuando no hay alguna combinación de variables que satisfaga todas las restricciones. Se debe a la presencia de restricciones inconsistentes en el modelo. Se reconocen en el gráfico porque no existe ninguna región común para todas las restricciones.
- 11- Un modelo tiene SOLUCIÓN CON VALOR INFINITO cuando hay combinaciones de variables que proporcionan valor infinito para el objetivo y no hay alguna combinación que limite el valor del objetivo a un valor finito. Esto se debe a la omisión de restricciones importantes, del sistema, en el modelo. Estas restricciones limitarían las variables de decisión a valores factibles. Se reconocen en el gráfico porque el espacio de solución es abierto, no acotado, no limitado y la Función Objetivo puede moverse dentro de esa región hasta el infinito sin que un punto extremo, con valor finito, limite su valor.
- 12- Un modelo tiene ESPACIO DE SOLUCION NO ACOTADO y SOLUCION DE VALOR FINITO cuando existen combinaciones de variables que dan un valor infinito al objetivo pero existe al menos una combinación de variables que le proporciona un valor finito. Se reconocen en el gráfico porque la región de soluciones posibles es abierta, no limitada pero hay por lo menos un punto extremo que limita el valor del objetivo.
- 13- Un modelo tiene SOLUCION DEGENERADA cuando existen combinaciones de variables que tienen más de la cantidad normal (una por cada restricción) de variables con valor cero. Esto se debe a la presencia de restricciones redundantes en el modelo. Más de la cantidad normal de variables (una por cada restricción del modelo) debe tomar valor cero para satisfacer a mayor cantidad de restricciones en el **punto óptimo**. Se reconocen en el gráfico porque más de dos restricciones cruzan sobre el punto extremo óptimo.
- 14- Una restricción redundante puede ser removida sin afectar la región solución. Cuando la restricción redundante está sobre el punto extremo óptimo, la solución es Degenerada.
- 15- Los modelos lineales que son formulados en sistemas cuya solución tiene valor infinito y los que no presentan solución posible son casos que no deben existir en el mundo real. En los modelos con solución degenerada, una restricción redundante en un período de planificación dentro de ese sistema, puede no serlo en otro período posterior, por lo tanto es recomendable tener en cuenta esa consideración.

## II.B.2 *Práctica de Solución de Modelos con el Método Gráfico*

### CASO 1. MODELOS CON SOLUCIÓN ÓPTIMA ÚNICA.

El modelo es formulado por una empresa asesora de inversiones para elaborar la cartera de un cliente. Las variables  $X_1$  y  $X_2$  representan la cantidad de acciones Tipo 1 y 2 a comprar para satisfacer el objetivo establecido de maximizar el retorno anual de esa inversión o compra de acciones. El monto total disponible para invertir es de \$80.000. El riesgo es una medida relativa de las dos inversiones alternativas. La acción Tipo 1 es una inversión más riesgosa. Limitando el riesgo total para la cartera, la firma inversora evita colocar montos excesivos de la cartera en inversiones de retorno potencialmente alto pero de alto riesgo. También se limita el monto de acciones de mayor riesgo.

$$\text{Max } 3X_1 + 5X_2 \quad (\text{Retorno anual en \$})$$

Sujeto a:

$$25 X_1 + 50 X_2 \leq 80.000 \text{ \$ de fondos disponibles}$$

$$0.5 X_1 + 0.25 X_2 \leq 700 \quad \text{riesgo máximo}$$

$$1 X_1 \leq 1.000 \quad \text{acciones Tipo 1}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Considerando los apartes 5 y 6 de la teoría, en la sección B, se tiene lo siguiente:

a) Graficar las restricciones:

**Restricción 1:** Cuando  $X_1 = 0$ , entonces  $X_2 = 1.600$ ; Cuando  $X_2 = 0$ , entonces  $X_1 = 3.200$   
Una los puntos  $(3.200, 0)$  y  $(0, 1.600)$ . El lado de la restricción " $<$ " está bajo esa recta.

**Restricción 2:** Cuando  $X_1 = 0$ , entonces  $X_2 = 2.800$ ; Cuando  $X_2 = 0$ , entonces  $X_1 = 1.400$   
Una los puntos  $(1.400, 0)$  y  $(0, 2.800)$ . El lado de la restricción " $<$ " está bajo esa recta.

**Restricción 3:**  $X_1 = 1.000$  y  $X_2 = 0$  Es una recta que parte de la abscisa en el punto 1.000.  
El lado de la restricción " $<$ " se tiene, a partir de esa recta, hacia el lado donde está el punto de origen.

Sombree, o señale de alguna manera, el conjunto convexo llamado también región posible.  
(Ver Gráfico 1).

b) Grafique la Función Objetivo asignándole un valor arbitrario. Este valor, preferiblemente, debe permitir que el objetivo se muestre en la región solución. Por ejemplo, puede ser utilizado el valor 3.000. Los puntos de corte en los ejes, para graficarla, son los puntos  $(1.000, 0)$  y  $(0, 600)$ . La Función Objetivo se grafica con línea de color, en este caso, para diferenciarla de las restricciones.

c) Mueva la Función Objetivo, paralelamente a sí misma en la dirección que incrementa su valor (hacia arriba en este caso), hasta que toque el último (los últimos, si los toca al mismo tiempo) punto extremo de la región solución.

d) En ese punto extremo final, b en este caso, resuelva el par de ecuaciones que se interceptan. En este caso son las ecuaciones 1 y 2. Utilice cualquiera de los métodos para resolver pares de ecuaciones lineales con dos variables.

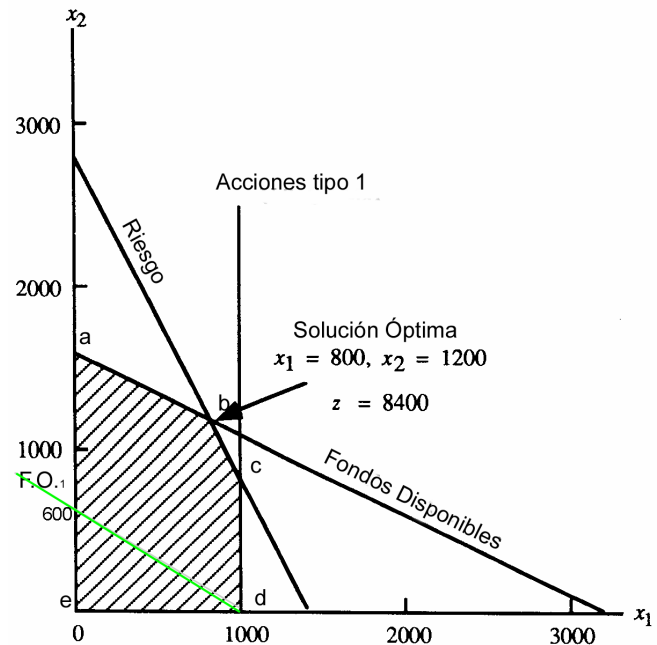


GRAFICO 1

e) Alternativamente, para determinar la solución óptima, puede calcular las coordenadas a todos los puntos extremos: a, b, c y d y e, en el conjunto convexo de soluciones. Luego evalúa la Función Objetivo en cada uno de ellos. El punto extremo que proporcione el mayor valor será el punto extremo óptimo.

f) En ambos casos se obtiene la solución óptima en el punto extremo b con coordenadas  $(800, 1.200)$ . Así, la solución óptima es  $X_1 = 800$  y  $X_2 = 1.200$ . Resolviendo en la Función Objetivo:

$$\text{Max } 3X_1 + 5X_2 \quad \text{Se obtiene: } 3(800) + 5(1.200) = 8.400$$

**En este caso 1, conteste lo siguiente:**

- 1.1 ¿Qué representa el coeficiente de la variable  $X_2$  en la Función Objetivo y en la segunda restricción?
- 1.2 ¿Qué Tipo de solución presenta el modelo?, ¿Por qué? y ¿Cómo se reconoce en el gráfico?
- 1.3 ¿Cuál es la decisión que se recomendaría con la solución encontrada?
- 1.4 Analice las restricciones en el punto óptimo y presente la información que se obtiene.
- 1.5 ¿Qué efecto tendría sobre la solución óptima encontrada un cambio en el retorno anual de cada acción Tipo 2. Suponga que cambia a 9. Explique y muestre sobre el gráfico. ¿Cómo se llama este Análisis que se hace?.

**RESPUESTAS:**

- 1.1 En la Función Objetivo representa el retorno anual de cada acción Tipo 2 comprada, es decir cada acción Tipo 2 que se compre proporcionará un retorno anual de Bs. 5. En la restricción 2, representa el riesgo medido para cada acción Tipo 2. Es decir, cada acción Tipo 2 tiene un riesgo de 0.25.
- 1.2 Solución Única, porque hay una única combinación de acciones Tipo 1 y 2 a comprar que maximiza el retorno anual de la inversión y se reconoce en el gráfico porque un único punto extremo proporciona el máximo valor para el objetivo. En este caso, el punto b.
- 1.3 Comprar 800 acciones Tipo 1 y 1.200 Acciones Tipo 2 para maximizar el ingreso anual en 8.400 unidades monetarias (\$)
- 1.4 Restricción 1:  $25(800) + 50(1200) = 80.000$  Se observa que se cumple exactamente, es decir como una igualdad. Esto indica que con esa decisión óptima se utiliza totalmente el monto máximo de presupuesto disponible para la compra.  
  
Restricción 2:  $0.5(800) + 0.25(1200) = 700$  Se observa que se cumple exactamente, es decir como una igualdad. Esto indica que con esa decisión óptima se tendrá totalmente el monto máximo requerido de riesgo para la compra.  
  
Restricción 3:  $1(800) = 800$ ;  $800 < 1.000$  Se observa que se cumple como una desigualdad. Esto indica que con esa decisión óptima se compran 800 acciones Tipo 1, 200 menos del monto máximo requerido. Recuerde que eso está permitido debido que la restricción es “menor o igual a”.  
  
En el gráfico puede observarse, como algo lógico, que las restricciones que se cumplen como igualdades están cruzando sobre el punto óptimo y las que se cumplen como desigualdades están en la región solución alejadas del punto óptimo.
- 1.5 El análisis se denomina Análisis de Sensibilidad. Se realiza después de haber obtenido la solución óptima. En este caso, se realiza para determinar el efecto que produce sobre la solución óptima, un cambio en un coeficiente de una variable en la Función Objetivo.

La nueva Función Objetivo,  $3X_1 + 9X_2$ , es graficada nuevamente.



Se observa sobre el mismo gráfico 2 que la pendiente de la recta objetivo (f.O2) cambia. Ahora al desplazarse, en crecimiento, el punto extremo que la limita es el de la intersección de las rectas que corresponden a la restricción de fondos disponibles y a la ordenada o restricción de no- negatividad, punto extremo “a”. La nueva solución es una solución única, con otros valores para las variables.

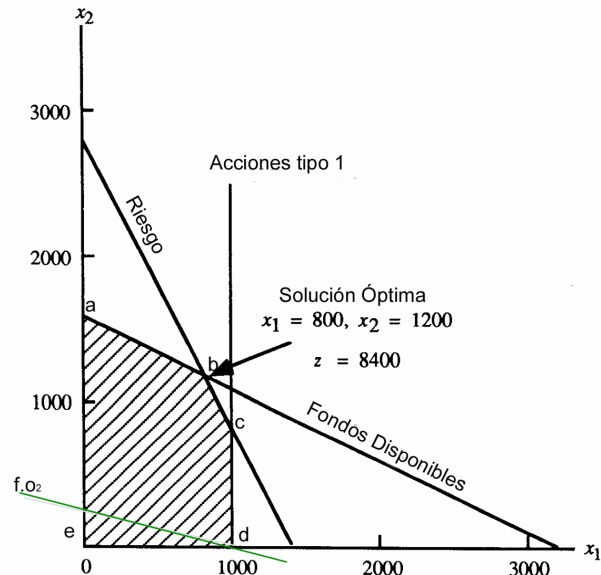


GRAFICO 2

## CASO 2. MODELOS CON SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNAS O MÚLTIPLES.

Max  $6X_1 + 2X_2$  (Beneficio)

Sujeto a:

$3X_1 + X_2 \leq 48$  horas de trabajo

$3X_1 + 4X_2 \leq 120$  unidades de materia Prima

$3X_1 + X_2 \geq 36$  horas de supervisión.

$X_1, X_2 \geq 0$

El modelo es formulado por una empresa que desea determinar la cantidad de unidades de producto 1 ( $X_1$ ) y producto 2 ( $X_2$ ) a fabricar para satisfacer el objetivo establecido de maximizar el beneficio. El monto total disponible de horas de trabajo para este período es de 48. La disponibilidad de materia prima es de 120 unidades y la cantidad mínima de horas disponibles para supervisión es de 36 horas.

Graficar las restricciones y obtener el espacio de solución se efectúa en forma similar al proceso efectuado en el caso 1 y por lo tanto no se repetirán las instrucciones.

(Ver Gráfico 3)

Los puntos extremos del conjunto convexo son: A(16,0), B(8,24), C(8/3,28) y D(12,0).

Dos puntos extremos proporcionan el máximo valor del objetivo, los puntos A y B. Esto permite afirmar que existen soluciones óptimas Alternas para este modelo. Son óptimos todos los puntos sobre el segmento de línea AB que limita el

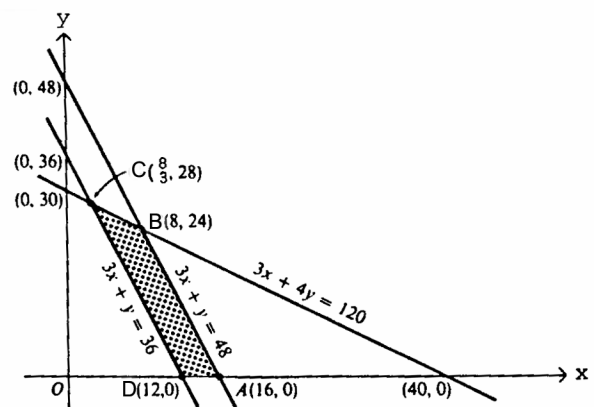


GRAFICO 3

conjunto convexo de solución y corresponden a la primera restricción.

Si Usted utiliza el método de graficar la Función Objetivo con un valor arbitrario, 48 por ejemplo, podrá observar que la línea es completamente paralela a la primera y tercera restricción. Al desplazarla paralelamente hacia su optimización, hacia arriba porque se está maximizando, finalmente caerá completamente sobre la primera restricción, de horas de trabajo, antes de salir totalmente fuera de la región solución. Dos puntos extremos estarían limitando el crecimiento del objetivo, el punto B y el punto A.

“Cualquier recta que tenga ratio de coeficientes igual al de otra recta, es paralela a esa otra recta”

La ventaja que presentan los modelos con este Tipo de solución es que se puede elegir cualquiera de las soluciones óptimas, porque todas presentan el mismo valor óptimo para el objetivo. Por ejemplo, si una de las soluciones tiene valores fraccionales para las variables y no puede trabajarse con valores fraccionales, el que toma la decisión seleccionará una solución con valores enteros.

### **Respuestas para algunas de las preguntas similares a las del modelo anterior (Caso 1: Modelo con Solución Óptima Única):**

1.2 Es una solución óptima alterna porque existe más de una combinación de productos 1 y 2 a producir, que proporcionan el mismo valor óptimo para el beneficio.

Se reconoce en el gráfico porque más de un punto extremo limita el valor óptimo del objetivo o proporciona su valor óptimo, los puntos: A (16,0) y punto B (8,24). Por lo tanto, todos los puntos sobre la recta AB son también óptimos.

1.3 Debe seleccionar una de todas las soluciones. Suponga que elige la del punto extremo B (8, 24)

En este caso la decisión sería: Producir 8 unidades de producto 1 y 24 unidades del producto 2 para maximizar el beneficio en 96 unidades monetarias:  $6(8) + 2(24) = 96$

Este valor para la Función Objetivo también se obtendría en el otro punto extremo A (16, 0) y en cualquier punto sobre la recta AB en la región solución.

1.4. Restricción 1:  $3(8) + 1(24) \leq 48$        $48 = 48$

Se observa que se cumple como igualdad. Esto indica que con esa decisión óptima se utiliza totalmente el monto máximo de horas de trabajo disponible para la producción.

Restricción 2:  $3(8) + 4(24) = 120$

Se observa que se cumple exactamente, es decir como una igualdad. Esto indica que con esa decisión óptima se utilizará totalmente el monto máximo disponible de Materia Prima.

Restricción 3:  $3(8) + 1(24) \geq 36$        $48 > 36$

Se observa que se cumple como una desigualdad. Esto indica que con esa decisión óptima se utilizan 12 horas sobre el monto mínimo disponible de horas de supervisión. Se utilizan 48 horas.

1.5 Aquí puede practicar Análisis de Sensibilidad sobre el gráfico, variando algún elemento del modelo.

### CASO 3. MODELOS SIN SOLUCIÓN POSIBLE.

No se definirán los elementos del modelo porque no habrá una solución posible para tomar alguna decisión.

( Ver gráfico 4 )

$$\text{Max } 40 X_1 + 30 X_2$$

Sujeto a:

$$\frac{2}{5} X_1 + \frac{1}{2} X_2 \leq 20$$

$$\frac{1}{5} X_2 \leq 5$$

$$\frac{3}{5} X_1 + \frac{3}{10} X_2 \leq 21$$

$$X_1 \geq 30$$

$$X_2 \geq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

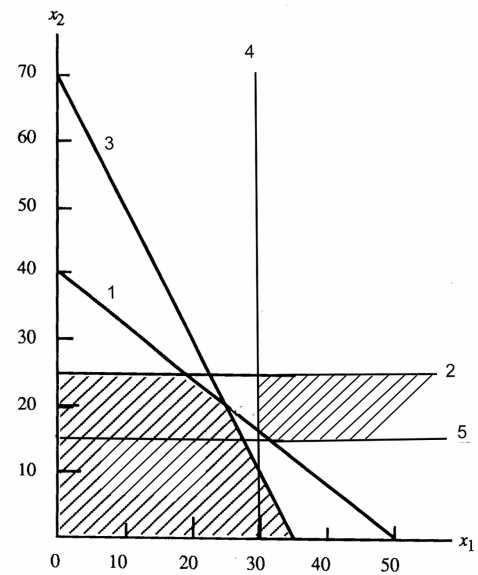


GRAFICO 4

Puede observarse en el Gráfico 4, que mientras las 3 primeras restricciones delimitan un espacio en común, las 2 últimas delimitan otro espacio común para ellas. Por lo tanto, no hay una región de puntos comunes que satisfagan ambos conjuntos de restricciones y el modelo no tendrá solución posible. En estos casos es necesario determinar cuáles son las restricciones inconsistentes para el modelo. Es decir, cuáles son realmente válidas para el modelo.

Observe que si las variables  $X_1$  y  $X_2$  toman el valor mínimo que pueden tomar en las dos últimas restricciones, es decir  $X_1 = 30$  y  $X_2 = 15$  entonces la tercera restricción no se cumpliría. Esto es una inconsistencia.

Estos modelos no deben existir en el mundo real (14). Si el sistema modelado trabaja, entonces el modelo debe representarlo de tal manera que permita obtener una solución posible.

### CASO 4. MODELOS QUE PRESENTAN SOLUCIÓN CON VALOR INFINITO.

$$\text{Max } X_1 + 2X_2$$

Sujeto a:

$$-4 X_1 + 3 X_2 \leq 3$$

$$X_1 - X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

No se definirán los elementos del modelo porque no habrá una solución para tomar alguna decisión.

En el gráfico 5 el conjunto convexo llamado región solución, que contiene todas las soluciones posibles, es un espacio abierto.

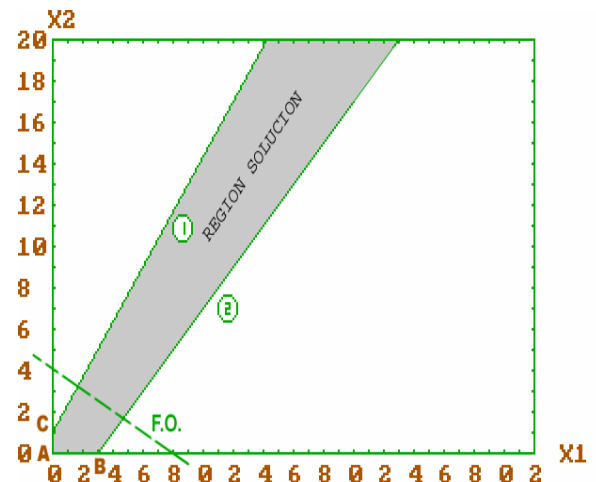


GRAFICO 5

Tiene tres puntos extremos A, B y C, pero ninguno delimita el crecimiento del objetivo. Esta función puede tomar valores infinitos ya que las variables conforman puntos con valores infinitos dentro de la región solución y ninguno de ellos le proporciona un valor finito óptimo. Por lo tanto, existiendo restricciones, no es lógico encontrar un objetivo de valor infinito.

En estos casos debe buscarse dentro del sistema, la restricción o las restricciones que se omitieron en el modelo y que limitarían las variables de decisión a valores factibles.

#### CASO 5. MODELOS CON ESPACIO DE SOLUCION NO ACOTADO Y SOLUCION DE VALOR FINITO.

$$\text{Min } 0.06 X_1 + 0.05 X_2 \quad (\text{costos})$$

Sujeto a:

$$0.30 X_1 + 0.20 X_2 \geq 500 \quad \text{Proteína}$$

$$0.15 X_1 + 0.30 X_2 \geq 300 \quad \text{Grasa}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

El modelo es formulado para una guardería de perros que se destaca por dar una alimentación balanceada a las mascotas. El alimento lo elabora mezclando 2 marcas conocidas de alimentos que llamaremos  $X_1$  y  $X_2$ . Se desea determinar la cantidad de gramos de  $X_1$  y  $X_2$  a mezclar en el alimento, con el objetivo establecido de minimizar los costos de la mezcla. Esta, debe contener al menos 500 gramos de proteínas y al menos 300 gramos de grasa por día. Los porcentajes de contenido de grasa y proteína de cada gramo de  $X_1$  y  $X_2$  se conocen y son usados en el modelo.

El espacio de solución obtenido se muestra en el Gráfico 6. Se observa una región abierta con las soluciones posibles y puntos extremos A, B, C.

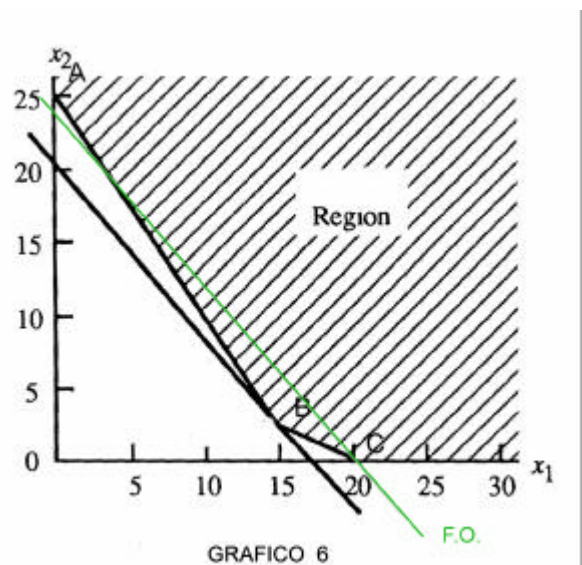
Esto indica que pueden existir combinaciones de cantidad de gramos de alimento  $X_1$  y  $X_2$  con valor infinito, en este caso los costos serían infinitos. Esto es posible porque no se está limitando directamente la cantidad de  $X_1$  y  $X_2$  en alguna restricción específica y las restricciones existentes son todas de Tipo “ $\geq$  que”.

Pero, mientras exista al menos una combinación con valor finito, en algún punto extremo que limite el valor del objetivo, a esa combinación se le considerará óptima. En los casos de región abierta de soluciones posibles, es conveniente entonces encontrar el valor óptimo con el procedimiento de graficar la Función Objetivo.

Al graficar la Función Objetivo, con un valor arbitrario de 120, se observa que al desplazarla paralelamente hacia su optimización, hacia abajo porque se está minimizando, la línea cae sobre el punto B, antes de salir completamente de la región solución. A este punto se le considerará punto extremo óptimo.

La solución óptima es Única con los valores:  $X_1 = 1.500$ ,  $X_2 = 250$  F.O. = 102.5

Conociendo la definición del modelo, puede contestar preguntas similares a las hechas en el caso 1



## CASO 6. MODELOS CON SOLUCION DEGENERADA

$$\text{Min } 2500 X + 2200 Y \quad (\text{costos})$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 10 && \text{Empleados temporales} \\ 300 X + 400 Y &\geq 3.400 && \text{cartas} \\ 80 X + 50 Y &\geq 680 && \text{paquetes} \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

El modelo es formulado por una oficina de correos que puede contratar hasta 10 empleados para manejar el correo. La oficina conoce que un empleado (hombre) puede manejar 300 cartas y 80 paquetes por día y una empleada (mujer) puede manejar 400 cartas y 50 paquetes en un día. No menos de 3.400 cartas y de 680 paquetes se esperan por día. A cada empleado hombre (X), se le paga Bs. 2.500 por día y a una empleada mujer (Y) se le paga Bs. 2.200 por día.

Se quiere determinar la cantidad de hombres (X) y mujeres (Y) que se deben contratar para satisfacer las restricciones y lograr el objetivo establecido de minimizar los costos de la nómina.

Graficar las restricciones y obtener el espacio de solución se efectúa en forma similar al hecho en el caso 1 y por lo tanto no se repiten las instrucciones. El gráfico obtenido es el Gráfico 7.

Se observa una región de soluciones posibles de un solo punto común para todas las restricciones y por lo tanto un único punto extremo A.

Esto indica que existe una única combinación posible y además óptima, de cantidad de empleados X y Y que satisface las restricciones y optimiza el objetivo.

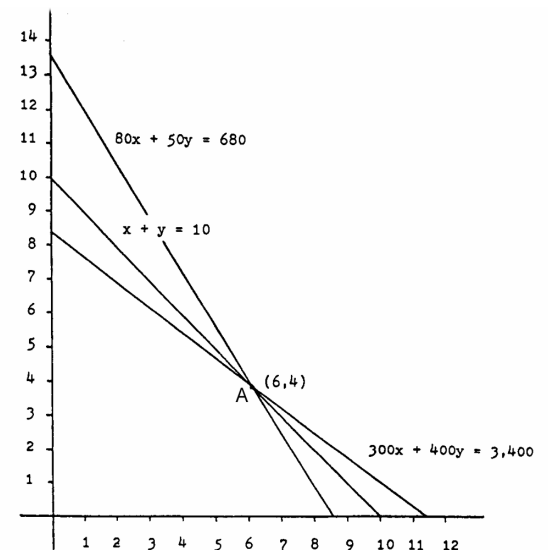


GRAFICO 7

Conociendo la definición del modelo, puede contestar preguntas similares a las hechas en el Caso 1

- 1.1 ¿Qué representa el coeficiente de la variable Y en la Función Objetivo y en la segunda restricción?
- 1.2 ¿Qué Tipo de solución presenta el modelo?, ¿Por qué? y ¿Cómo se reconoce en el gráfico?
- 1.3 ¿Cuál es la solución y la decisión que se recomendaría con la solución encontrada?
- 1.4 Analice las restricciones en el punto óptimo y presente la información que se obtiene.
- 1.5 ¿Qué efecto tendría, sobre la solución óptima encontrada, un cambio en el número de cartas esperadas. Suponga que cambia a 2.400. Explique y muestre sobre el gráfico. ¿Cómo se llama este Análisis?

### Respuestas:

- 1.1 El coeficiente de la variable Y en la Función Objetivo representa lo que se le paga diariamente a cada trabajadora (mujer), es decir, el costo de contratar una trabajadora al día es de Bs. 2.200. En la segunda restricción representa la cantidad de cartas que puede manejar al día cada mujer contratada, es decir, 400 cartas al día puede manejar cada mujer contratada.

- 1.2 Única y Degenerada. Normalmente la solución de un modelo contiene una variable (Estructural o de holgura) con valor mayor que cero por cada restricción del modelo. En este caso, más variables de las normales toman valor cero, para poder satisfacer mayor número de restricciones, en el punto óptimo. Hay entonces menor cantidad de variables con valor mayor que cero con relación al número de restricciones. Por eso se le llama Solución Degenerada en contraposición a la Solución Normal. Además es única porque una sola combinación de empleados, hombres y mujeres, proporciona el mínimo costo.

Se debe a la presencia de restricciones redundantes en el modelo y se reconoce en el gráfico porque más de dos restricciones cruzan sobre el punto óptimo. Del total de restricciones que cruzan el punto óptimo, sólo dos son necesarias para calcular sus coordenadas. En este caso sólo hay una restricción redundante, por ello la Solución es Degenerada. Se reconoce que es única porque hay un solo punto extremo que proporciona el valor óptimo del objetivo.

- 1.3 La solución es  $X = 6$ ,  $Y = 4$ , F.O. = 23.800. La decisión sería contratar 6 empleados hombres y 4 mujeres para minimizar los costos diarios de contratación en 23.800 unidades monetarias:  $2.500(6) + 2.200(4)$ .

#### 1.4 Restricción 1

$$X + Y \leq 10$$

$6 + 4 = 10$  Con esta decisión se contrata el máximo de empleados que se estaba dispuesto a contratar.

#### Restricción 2

$$300X + 400Y \geq 3.400$$

$300(6) + 400(4) = 3.400$  Con esta decisión se manejará el mínimo de cartas que se espera.

#### Restricción 3

$$80X + 50Y \geq 680$$

$80(6) + 50(4) = 680$  Con esta decisión se manejará el mínimo de paquetes que se espera.

- 1.5 El análisis a efectuar se denomina Análisis de Sensibilidad.

Sobre el gráfico está graficada la nueva restricción

$$300X + 400Y \geq 2.400$$

Se observa que no cambia el espacio de soluciones posibles y por lo tanto la solución óptima seguirá siendo la misma.

En general, disminuir la cantidad del lado derecho de una restricción Tipo  $\geq$ , es relajar la restricción y hacerla más fácil de satisfacer.

Esto puede expandir el conjunto convexo o dejarlo igual. En este caso quedó igual. Esto se estudia más detalladamente en Análisis de Sensibilidad, Sección D.

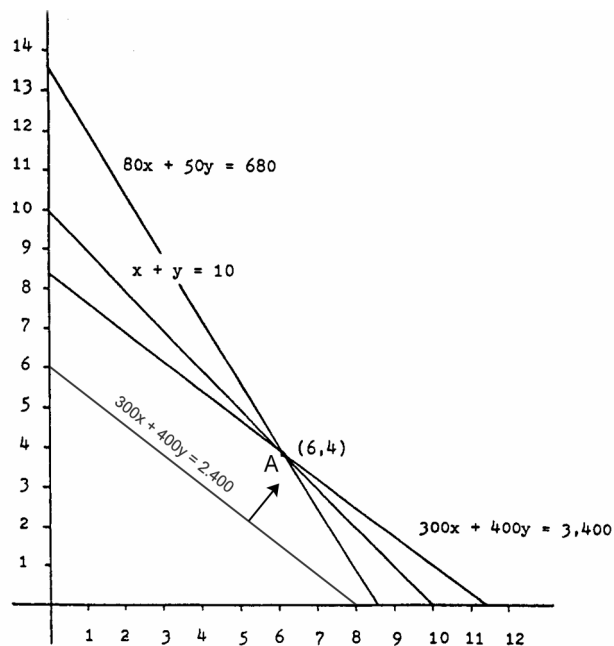


GRAFICO 7

## II.C SECCION C. Solución de Modelos Lineales con el Método SIMPLEX y el Método de Puntos Interiores.

### II.C.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de la solución de Modelos de Programación Lineal

1. El Método Simplex es un procedimiento de cálculo algebraico, iterativo, para resolver Modelos Lineales de cualquier tamaño.
2. El algoritmo Simplex requiere que el Modelo Lineal, para ser solucionado, cumpla las condiciones de Forma Estándar y Sistema Canónico.
3. La Forma Estándar incluye: a) una Función Objetivo a optimizar, b) lado derecho de las restricciones con valor positivo, c) variables de decisión no negativas y d) las restricciones deben ser expresadas como igualdades.
4. Para transformar las restricciones en igualdades se deben incorporar las llamadas variables de holgura.
5. Una variable de holgura tiene coeficiente cero en la Función Objetivo. Se suman en restricciones del Tipo  $\leq$  y se restan en restricciones del Tipo  $\geq$ . En términos matemáticos, expresan la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de las restricciones. Al igual que las variables de decisión deben ser mayores o iguales a cero.
6. En términos del modelo representan la cantidad de recurso no utilizado con relación a un máximo disponible, o utilizado por encima de un mínimo disponible. Esto es así cuando la restricción es de un recurso disponible.
7. Cuando la restricción es de una condición o requerimiento, representan la cantidad de esa condición o requerimiento que se obtiene por encima de un mínimo o que se deja de tener con relación a un máximo.
8. El Sistema Canónico en un Modelo Lineal significa que debe existir una variable básica en cada restricción. Esto permite obtener una primera solución posible que satisface todas las restricciones.
9. Una variable básica tiene coeficiente 1 positivo en una restricción y no existe en las demás.
10. Las variables de decisión (estructurales) del modelo y las variables de holgura pueden ser variables básicas. Cuando ninguna de ellas cumple con la condición de ser básica, se incorpora una variable como artificio matemático, para cumplir con el sistema canónico y a esa variable se le llama variable artificial.
11. Una variable artificial debe tener incorporado un coeficiente muy alto en la Función Objetivo, con signo negativo en maximización y con signo positivo en minimización. Con esto se logra que el procedimiento Simplex las elimine de la solución en las primeras iteraciones. Estas variables deben valer cero en la solución óptima del modelo.

12. Una Tabla Simplex es un resumen detallado de toda la información del modelo para trabajar más fácilmente con él.
13. En las Tablas Simplex, el espacio **Cx** se utiliza para copiar los coeficientes de todas las variables en la Función Objetivo. En fila porque ellos conforman un vector fila. Debajo de cada coeficiente se escribe el símbolo correspondiente a la variable de ese coeficiente. En el espacio **CB**, se copian los coeficientes de las variables correspondientes a las variables que son básicas en cada restricción. En el espacio **BASE** se copian las variables que son básicas en cada restricción. Tanto los coeficientes como las variables están colocadas en el correspondiente nivel de la restricción en la que se usan como básicas. Debajo del símbolo de cada variable se escriben los vectores de esas variables en el modelo. Ellos conforman la matriz de coeficientes. En el espacio **bi** se copian los lados derechos de las restricciones conformando un vector columna, cada solución posible del modelo se leerá en este espacio.
14. El Modelo Lineal en su forma estándar general puede ser escrito en notación matriz- vectores, como:

$$\text{Max } Z = cx$$

$$\text{Sujeto a : } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$b \geq 0$$

Donde  $A$  es una matriz ( $m \times n$ );  $x$  es un vector columna ( $n \times 1$ );  $b$  es vector columna ( $m \times 1$ ) y  $c$  es un vector fila ( $1 \times n$ ). El número de variables es  $n$  y el número de restricciones es  $m$ .

15. El Método Simplex funciona, en forma general, de la siguiente forma: Calcula una solución posible inicial y determina si esa solución es óptima. Si no lo es, se mueve a un punto extremo adyacente, en el conjunto convexo de soluciones posibles, y calcula la nueva solución en ese punto. De nuevo determina si esa solución es o no óptima; si no lo es, repite el proceso anterior. Así continúa sucesivamente hasta encontrar un punto extremo cuyo valor objetivo no pueda ser mejorado y allí concluye, determinando así que ha encontrado la solución óptima.
16. Para calcular la solución posible inicial le otorga valor cero a las variables que no son básicas y resuelve para las otras variables básicas. Cada solución posible satisface todas las restricciones.
17. Para determinar si la solución inicial es óptima, calcula los llamados coeficientes relativos de las variables. Estos valores informan en cuanto variaría el objetivo por cada unidad en que se incrementa el valor de la variable a la que se refiere ese coeficiente relativo.
18. Si la solución no es óptima, al moverse a otro punto extremo adyacente en el conjunto convexo, el Método Simplex efectúa un intercambio de **una** variable básica por **una** no-básica.
19. Para determinar cual variable no-básica debe entrar a formar parte de una nueva solución, como variable básica, se utiliza como criterio el seleccionar la variable que mejore en mayor cantidad el objetivo. La medida utilizada para aplicar este criterio son los llamados Coeficientes Relativos de las variables.
20. Para determinar cuál variable básica debe salir de una solución, para pasar a ser variable no-básica, se utiliza como criterio el seleccionar a la variable básica que se hace cero al introducir



la nueva variable básica. La medida utilizada para aplicar este criterio es el llamado Ratio Mínimo de la variable. Además de indicar la variable que se hace cero, el Ratio Mínimo informa cuál será el valor de la variable entrante en la nueva solución.

21. Para calcular una nueva solución posible efectúa operaciones matemáticas que transforman el sistema actual de ecuaciones, en un sistema de ecuaciones equivalente. Este es un proceso iterativo. En cada iteración intercambia una variable básica por una no-básica. Los Coeficientes Relativos y los Ratios Mínimos tiene fórmulas matemáticas para calcularlos.
22. En cada iteración intercambia una variable básica por una no-básica. En cada solución los Coeficientes Relativos informan si se ha llegado o no al óptimo. Coeficientes Relativos y los Ratios Mínimos tiene fórmulas matemáticas para calcularlos.
23. En las Tablas Simplex se reconoce que hay una solución óptima ÚNICA cuando los coeficientes relativos de variables no-básica tienen valor  $>$  que cero en minimización y  $<$  que cero en maximización. Esto indicaría que ninguna de esas variables IGUALARÍA el valor óptimo encontrado y por lo tanto, es única.
24. Se reconoce que hay una solución óptima ALTERNA cuando por lo menos uno de los coeficientes relativos de variables no-básica tiene valor igual a cero. Esto indicaría que esa variable IGUALARIA el valor óptimo encontrado y por lo tanto, es alterna.
25. Se reconoce que hay una solución óptima con valor INFINITO cuando por lo menos uno de los coeficientes relativos de variables no-básica tiene un valor que indique que la solución actual puede ser mejorada. Pero al calcular el Ratio Mínimo, éste indica que esa variable puede crecer indefinidamente y por lo tanto también el valor del objetivo.
26. Se reconoce que hay una solución óptima IMPOSIBLE cuando todos los coeficientes relativos indican que la solución es óptima pero, por lo menos, una variable artificial permanece en la solución con valor mayor que cero.
27. Se reconoce que hay una solución óptima DEGENERADA cuando por el número de variable básicas con valor mayor que cero es menor que el número de restricciones en el modelo.
28. El Método Simplex estudiado es el Regular, existen variaciones como el Simplex Revisado y numerosos refinamientos que se le han hecho en aplicaciones para computadora.
29. En 1984, el matemático Narendra Karmakar creó un nuevo algoritmo para solucionar modelos lineales. Este algoritmo permite manejar cantidades enormes de variables y restricciones. AT&T desarrolló su implementación en computadora en 1988 y ha presentado versiones posteriores. IBM agregó variantes al algoritmo en 1990. Mientras tanto, se han elaborado miles de trabajos dirigidos a desarrollar variantes mejoradas del algoritmo.
30. El Método de Karmakar también es un algoritmo iterativo, como el Simplex, pero parte de una solución de prueba, obtenida DENTRO de la región de soluciones posibles. En cada iteración se mueve dentro de la región solución a una mejor solución de prueba y así continúa hasta obtener la mejor solución en un punto extremo. La principal diferencia con el Algoritmo Simplex es que trabaja con puntos interiores de la región solución y por eso se le llama también ALGORITMO DE PUNTOS INTERIORES.

31. La empresa Delta Airlines con 7000 pilotos que deben manejar 400 aviones y movilizarlos a 166 ciudades en el mundo, ha preferido las ventajas de este algoritmo para usar eficientemente los recursos escasos.
32. Programas de computadora para la solución de modelos lineales son distribuidos comercialmente. Por lo tanto, la principal atención debe darse a la definición del problema y a la determinación y elaboración del modelo a usar. Todo ello con el fin de poder aplicar la técnica e interpretar resultados para tomar decisiones.

### II.C.2 *Práctica. Solución de Modelos con el Método Simplex.*

El siguiente modelo, de dos variables, se usa como ejemplo para ilustrar el proceso de solución con el Método Simplex.

$$\text{Max } 6X_1 + 4X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$2X_1 + X_2 \geq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

La solución matemática que se lee en los diferentes formatos de salida de datos presentados, es la siguiente:

$$X_1 = 10 \quad X_2 = 0 \quad \text{Función Objetivo} = 60$$

Holgura de la primera restricción con valor cero (0)

Holgura de la segunda restricción con valor dieciséis (16)

**La solución del modelo se ilustra a continuación, en las próximas cuatro páginas:**

- 1) Utilizando el método simplex y resolviendo manualmente, con indicación de los cálculos realizados. Todas las iteraciones necesarias para obtener la solución óptima se muestran en Tablas Simplex
- 2) Utilizando el programa de computadora QSB que utiliza la variación del método simplex llamado M Grande (Big M)
- 3) El modelo también se soluciona en computadora con el método Gráfico del programa QSB. Esto permite mostrar los puntos extremos de solución por los que se mueve el algoritmo Simplex y compararlos en cada iteración, o solución de punto extremo, hasta llegar al punto extremo óptimo.
- 4) A fin de ilustrar los resultados, en otro formato de salida de datos, también se soluciona el modelo usando el programa LINDO en computadora.

## II.C.2.1 Solución con el Método Simplex Regular

Tabla Inicial

| Cj | BASE      | 6     | 4   | 0  | 0  | -M |         |      |
|----|-----------|-------|-----|----|----|----|---------|------|
|    |           | X1    | X2  | S1 | E2 | A2 | bi      | R.M  |
| 0  | <u>S1</u> | 1     | 1   | 1  | 0  | 0  | 10      | 10/1 |
| -M | A2        | (2)   | 1   | 0  | -1 | 1  | 4       | 4/2  |
|    | Cj        | *6+2M | 4+M | 0  | -M | 0  | f.o:-4M |      |

Multiplicar la segunda ecuación por  $\frac{1}{2}$ . El elemento pivote es (2)

Multiplicar la segunda ecuación por  $-\frac{1}{2}$  y agregar a la primera ecuación.

Tabla 2

| Cj | BASE | 6  | 4   | 0  | 0     | -M   |         |        |
|----|------|----|-----|----|-------|------|---------|--------|
|    |      | X1 | X2  | S1 | E2    | A2   | bi      | R.M    |
| 0  | S1   | 0  | 1/2 | 1  | (1/2) | -1/2 | 8       | 8/1/2  |
| 6  | X1   | 1  | 1/2 | 0  | -1/2  | 1/2  | 2       | 8/-1/2 |
|    | Cj   | 0  | 1   | 0  | * 3   | -M-3 | f.o: 12 |        |

Multiplicar la primera ecuación por 2. El elemento pivote es (1/2)

Multiplicar la primera ecuación por 1 y agregar a la segunda ecuación.

Tabla 3 (ÓPTIMA )

| Cj | BASE | 6  | 4  | 0  | 0  | -M |         |  |
|----|------|----|----|----|----|----|---------|--|
|    |      | X1 | X2 | S1 | E2 | A2 | bi      |  |
| 0  | E2   | 0  | 1  | 2  | 1  | -1 | 16      |  |
| 6  | X1   | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 10      |  |
|    | Cj   | 0  | -2 | -6 | 0  | -M | f.o: 60 |  |

Esta solución no puede ser mejorada. Cada unidad de Producto Dos que se elabore en una nueva solución desmejora o disminuye los beneficios en 2 unidades. Cada unidad en que se incremente la cantidad de materia prima que quede disponible disminuirá los beneficios totales en 6 unidades. Las variables artificiales una vez que salen de la base no entran más.

En cada tabla la solución del modelo se lee en la forma siguiente: Cada variable que se encuentra en la BASE se iguala al valor que se lee en el vector bi. Las variables que no están en la base (las no-básicas) tienen valor cero.

Los  $\bar{C}_j$  son los coeficientes relativos que le informan que la solución es óptima porque no puede ser mejorada, todos los valores  $\bar{C}_j$  son negativos o cero.

Los  $\bar{C}_j$  le informan además que la solución es de tipo óptima única. Esto se reconoce en la tabla porque ninguno de los  $\bar{C}_j$  de las variables no-básicas iguala el valor óptimo obtenido para el objetivo. Todos ellos son negativos, indicando que desmejorarían el objetivo, ya que se está maximizando.

### II.C.2.2 Solución utilizando el Programa QSB.

Este programa usa el Método Simplex con la variación BIG M o Método de la M Grande, que determina primero si hay solución posible, al calcular y obtener las variables artificiales con valor final cero. Si obtiene valores cero para esas variables, continúa a partir de allí buscando la solución óptima, que ya ha determinado que existe. Se ilustran las tablas para que compare el formato de salida de datos.

#### METODO de la M GRANDE

##### Initial tableau

|                      |      | X1         | X2         | S1     | S2     | A2         |            | B(i)   |
|----------------------|------|------------|------------|--------|--------|------------|------------|--------|
| Basis                | C(j) | 6.000      | 4.000      | 0      | 0      | - M        | B(i)       | A(i,j) |
| S1                   | 0    | 1.000      | 1.000      | 1.000  | 0      | 0          | 10.00      | 0      |
| A2                   | - M  | 2.000      | 1.000      | 0      | -1.00  | 1.000      | 4.000      | 0      |
| C(j)-Z(j)<br>* Big M |      | 6.000<br>0 | 4.000<br>0 | 0<br>0 | 0<br>0 | 0<br>-1.00 | 0<br>-4.00 |        |

##### Iteration 1

|                      |      | X1             | X2             | S1     | S2         | A2     |            | B(i)   |
|----------------------|------|----------------|----------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| Basis                | C(j) | 6.000          | 4.000          | 0      | 0          | - M    | B(i)       | A(i,j) |
| S1                   | 0    | 1.000          | 1.000          | 1.000  | 0          | 0      | 10.00      | 10.00  |
| A2                   | - M  | 2.000          | 1.000          | 0      | -1.00      | 1.000  | 4.000      | 2.000  |
| C(j)-Z(j)<br>* Big M |      | 6.000<br>2.000 | 4.000<br>1.000 | 0<br>0 | 0<br>-1.00 | 0<br>0 | 0<br>-4.00 |        |

Current objective function value (Max.) = 0 + (-4 Big M)  
 < Highlighted variable is the entering or leaving variable >  
 Entering: X1 Leaving: A2

### Iteration 2

|                      |       | X1    | X2    | S1    | S2    | A2    |       | B(i)   |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Basis                | C(j)  | 6.000 | 4.000 | 0     | 0     | - M   | B(i)  | A(i,j) |
| S1                   | 0     | 0     | 0.500 | 1.000 | 0.500 | -.500 | 8.000 | 16.00  |
| X1                   | 6.000 | 1.000 | 0.500 | 0     | -.500 | 0.500 | 2.000 | 1E+20  |
| C(j)-Z(j)<br>* Big M |       | 0     | 1.000 | 0     | 3.000 | -3.00 | 12.00 |        |
|                      |       | 0     | 0     | 0     | 0     | -1.00 | 0     |        |

Current objective function value (Max.) = 12

< Highlighted variable is the entering or leaving variable >

Entering: S2    Leaving: S1

### Final tableau (Total iteration = 2 )

|                      |       | X1    | X2    | S1    | S2    | A2    |       | B(i)   |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Basis                | C(j)  | 6.000 | 4.000 | 0     | 0     | - M   | B(i)  | A(i,j) |
| S2                   | 0     | 0     | 1.000 | 2.000 | 1.000 | -1.00 | 16.00 | 0      |
| X1                   | 6.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0     | 0     | 10.00 | 0      |
| C(j)-Z(j)<br>* Big M |       | 0     | -2.00 | -6.00 | 0     | 0     | 60.00 |        |
|                      |       | 0     | 0     | 0     | 0     | -1.00 | 0     |        |

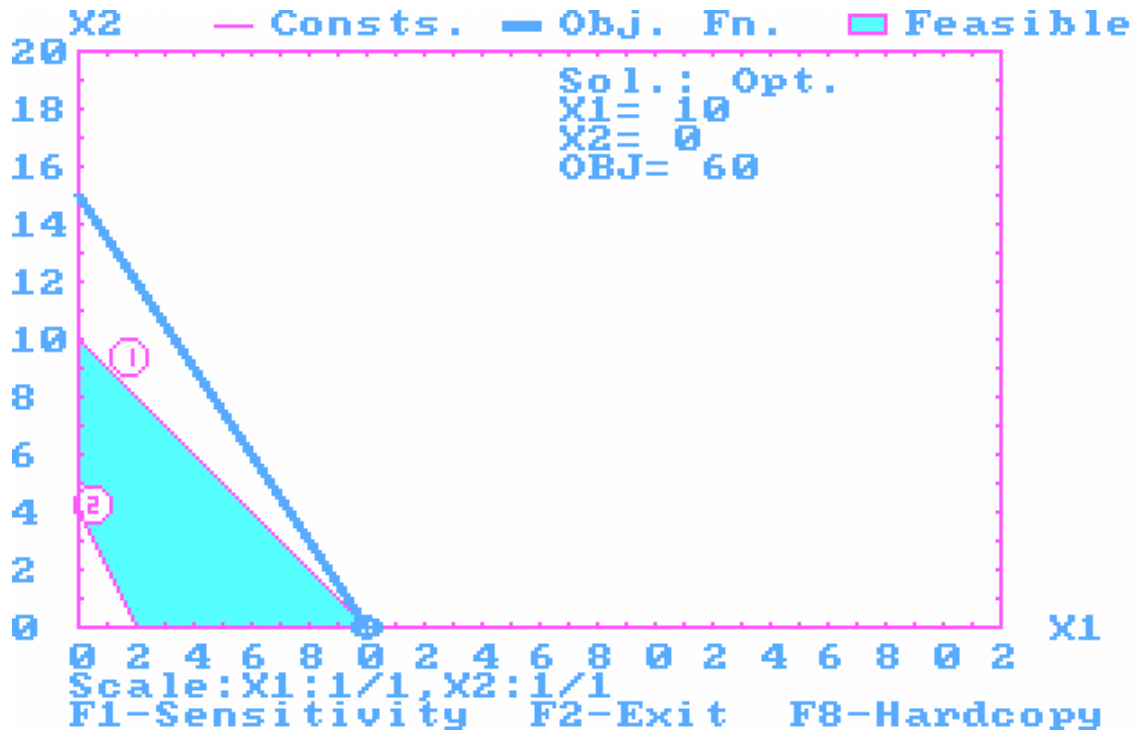
(Max.) Optimal OBJ value = 60

Este método muestra las iteraciones del Método Simplex, eliminando las variables artificiales en una primera etapa. Posteriormente, si las variables artificiales toman valor cero, continua con el proceso de solución y obtiene los valores para el resto de las variables.

La solución se lee al igual que en el Método Simplex desarrollado anteriormente.

Los coeficientes relativos,  $\bar{C}_j$ , los muestra a través de su fórmula:  $C(j) - Z(J)$

### II.C.2.3 Solución con el Método Gráfico. (Se usa el programa de computadora QSB.)



En la parte superior del gráfico se indica cuáles son las restricciones (constraints), cuál es la función Objetivo y cuál es la región solución, señalando los colores en que han sido graficadas.

Como puede observarse, el gráfico muestra el espacio de soluciones posibles y las restricciones, señaladas con los números 1 y 2. La función objetivo es graficada para mostrar claramente el último punto extremo que esa función toca antes de salir totalmente de la región solución y que es, por lo tanto el punto extremo óptimo.

Observando la pendiente de la recta que representa el objetivo se puede ver que el punto extremo que toca, en su crecimiento antes de llegar al punto óptimo, es el correspondiente a  $X_1 = 2$ ,  $X_2 = 0$ . Este punto se muestra en la iteración 2 del proceso de solución con el Simplex Regular realizado anteriormente.

En los resultados obtenidos con el método gráfico se tiene escrita la solución óptima y el valor óptimo del objetivo.

En la parte inferior del gráfico muestra la escala en que se ha graficado.

Posteriormente muestra las teclas que tiene que pulsar para realizar análisis de sensibilidad (F1), para salir de donde está en ese momento (F2) ó para imprimirlo (F8).

## II.C.2.4 Solución con el PROGRAMA LINDO

```
MAX 6 X1 + 4 X2
SUBJECT TO
    2) X1 + X2 <= 10
    3) 2 X1 + X2 >= 4
END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 60.0000000

| VARIABLE | VALUE     | REDUCED COST |
|----------|-----------|--------------|
| X1       | 10.000000 | .000000      |
| X2       | .000000   | 2.000000     |

| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES |
|-----|------------------|-------------|
| 2)  | .000000          | 6.000000    |
| 3)  | 16.000000        | .000000     |

NO. ITERATIONS= 4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

| VARIABLE | CURRENT<br>COEF | ALLOWABLE<br>INCREASE | ALLOWABLE<br>DECREASE |
|----------|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| X1       | 6.000000        | INFINITY              | 2.000000              |
| X2       | 4.000000        | 2.                    | INFINITY              |

RIGHTHAND SIDE RANGES

| ROW | CURRENT<br>RHS | ALLOWABLE<br>INCREASE | ALLOWABLE<br>DECREASE |
|-----|----------------|-----------------------|-----------------------|
| 2   | 10.000000      | INFINITY              | 8.000000              |
| 3   | 4.000000       | 16.000000             | INFINITY              |

**Nota:** En cada Tipo de programa que se use, la entrada de datos y el formato de salida de datos puede ser diferente. La lectura de los resultados en este formato es explicada en la sección correspondiente al uso de computadora en la solución de modelos lineales.

## II.D SECCION D. Análisis de Sensibilidad de la Solución Óptima y Dualidad en Modelos Lineales

### II.D.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de análisis de sensibilidad en Programación Lineal

- 1 Análisis de Sensibilidad, llamado también Análisis de Post-optimización, es una estrategia utilizada para tomar en consideración los cambios que pueden ocurrir en los elementos componentes del modelo. Permite conocer cuán sensible es la solución óptima a cambios que ocurran en coeficientes, variables, restricciones y Función Objetivo.
- 2 Siendo determinístico, el modelo de Programación Lineal, asume que se conocen con certeza sus datos de insumo. Sin embargo, nada en la vida es constante. Por ello, el análisis de sensibilidad justifica plenamente la utilización de este modelo al presentar los efectos de los cambios que pueden ocurrir durante el periodo de planificación para el que se está utilizando el modelo, y aún durante la solución del mismo.
- 3 Cuando cambia un número, insumo del modelo, tal como un coeficiente o parámetro, o un lado derecho de una restricción, el análisis de sensibilidad de la solución muestra un rango de valores dentro de los cuales ese número puede cambiar sin cambiar la solución básica obtenida.
- 4 Disminuir el lado derecho de una restricción del Tipo “mayor o igual que” ( $\geq$ ) o incrementarlo en una restricción del Tipo “menor o igual que” ( $\leq$ ) implica hacerla más fácil de satisfacer. El espacio de solución, en estos casos, se expande o lo deja igual.
- 5 Disminuir el lado derecho de una restricción del Tipo “menor o igual que” ( $\leq$ ) o incrementarlo en una restricción del Tipo “mayor o igual que” ( $\geq$ ) implica hacerla más difícil de satisfacer. El espacio de solución, en estos casos, se contrae o lo deja igual.
- 6 Cuando ocurren cambios en el número de variables, aparece una nueva restricción o cambian todos los coeficientes en el objetivo, el análisis de sensibilidad indicará el efecto que esto ocasiona sobre la solución básica.
- 7 Debe recordar que el análisis se refiere a la sensibilidad de la solución básica óptima, no a la sensibilidad de un coeficiente o de una restricción, etc.
- 8 La Dualidad en Programación Lineal tiene su esencia en el hecho de existir dos modelos lineales cuando se ha planteado sólo uno para resolver un problema específico.
- 9 El modelo Lineal asociado al Modelo Lineal Original o Principal se denomina Modelo Dual. Cuando se obtiene la solución de uno, se está obteniendo también la solución del otro.
- 10 El Modelo Dual contiene: a) Una cantidad de variables igual a la cantidad de restricciones que existan en el modelo original, b) Una cantidad de restricciones igual a la cantidad de variables que existan en el modelo original.



- 11 En el Modelo Dual el lado derecho de sus restricciones está conformado por los coeficientes de las variables de la Función Objetivo en el modelo original. A su vez, el lado derecho de las restricciones del modelo original conforma los coeficientes de la Función Objetivo del modelo Dual. Los coeficientes de cada restricción en el Modelo Dual corresponden a los coeficientes de cada variable del modelo original.
- 12 La Función Objetivo del Modelo Dual es el reverso de la Función Objetivo original. Si en el modelo original se maximiza, en el Dual se minimiza y viceversa.
- 13 Para la elaboración del Modelo Dual, a partir de un modelo normal de minimización (todas las restricciones son del Tipo  $\geq$ ) y de un modelo normal de maximización (todas las restricciones son del Tipo  $\leq$ ), se revierte el sentido de las desigualdades y el signo de las variables.
- 14 La solución del Modelo Dual provee información adicional para la decisión que se tomará con la solución del modelo original.
- 15 Cada variable Dual informa en cuánto variará la Función Objetivo del modelo original por cada unidad en que se incremente el lado derecho de la restricción, del modelo original, a la que se refiere esa variable dual. Siempre y cuando esa unidad de incremento sea realmente utilizada. Esto permite determinar la conveniencia o no de incrementar un determinado lado derecho de una restricción.
- 16 Los incrementos permitidos, en el lado derecho de las restricciones, los informará el rango dado por el análisis de sensibilidad de la solución cuando estos elementos cambian. Más allá de esos montos, la solución básica cambiará.
- 17 Las variables duales son válidas sólo para la respectiva solución básica óptima. Si la solución básica óptima cambia, las variables duales cambian. Sólo en un mínimo número de casos permanecen con sus valores.
- 18 Si existen dos soluciones posibles para dos modelos (El original y el Dual) de tal manera que los valores de sus respectivas funciones objetivo son iguales, se puede concluir que ambas soluciones son óptimas para sus respectivos modelos.

## II.D.2 *Práctica. Análisis de sensibilidad. Dualidad*

El procedimiento matemático para realizar análisis de sensibilidad de la solución, es diferente en cada caso. Depende de cuál de los elementos componentes del modelo, varía.

Los programas de computadora pueden proveer este análisis para los casos de cambio en los coeficientes de las variables en la Función Objetivo y cuando cambian los lados derechos de las restricciones. Estos resultados se utilizarán para estudiar esos casos. En forma manual, se efectuará análisis de sensibilidad de la solución cuando aparece una nueva restricción.

Para estudiar dualidad también se usarán resultados dados por la computadora.

El modelo presentado en la sección C1 y solucionado con el programa **LINDO** permite ilustrar los conceptos a estudiar.

### II.D.2.1 *Análisis de Sensibilidad de la solución cuando cambia un coeficiente de una variable en la Función Objetivo.*

En los resultados de computadora se lee para el coeficiente actual (CURRENT COEF) de la variable X1 el crecimiento permitido (ALLOWABLE INCREASE) que indica un valor infinito. De igual manera se lee el decrecimiento permitido para el valor actual (ALLOWABLE DECREASE) de ese coeficiente que indica un valor de 2.

Igualmente proporciona los montos permitidos de decrecimiento y crecimiento permitidos para el coeficiente de la variable X2.

Con esta información pueden calcularse los límites inferior y superior permitidos, en esta solución básica óptima, para el coeficiente de cada variable en la Función Objetivo; es decir, los Rangos de Variación de los coeficientes de las variables de decisión dentro de los cuales la base no cambia (3).

El coeficiente de la variable X1 es actualmente 6 y el incremento permitido es infinito, por lo que el límite superior de crecimiento sería teóricamente infinito. Aunque esto en la práctica no es cierto, lo es desde el punto de vista matemático y por ello se asume de esa forma. El decrecimiento permitido es de 2 unidades y por lo tanto el límite inferior del rango de variación permitido, para que la solución óptima no cambie, es 4. De manera similar se obtienen los límites de variación para el coeficiente de la variable X2.

$$4 \leq Cx1 \leq \infty$$

$$-\infty \leq Cx2 \leq 6$$

La interpretación de estos valores tiene que ver con el contenido o significado de cada variable y del objetivo, dentro del modelo. No habiéndose definido las variables, ni las restricciones, ni el objetivo, se interpretarán en forma general:

El coeficiente de la variable X1 PUEDE variar entre 4 e infinito y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango el valor de la Función Objetivo, puede variar dependiendo del valor que tome ese coeficiente dentro de ese rango.

Esto es así por lo siguiente: Si el coeficiente cambia dentro de ese rango, la solución básica es la misma; es decir, X1 por ejemplo seguirá igual. Si el coeficiente de esa variable cambia a 5 (un valor dentro del rango) entonces, en lugar de multiplicar X1, que sigue igual, por el coeficiente 6 (que tiene actualmente) se multiplicará por 5, y el valor del objetivo disminuirá.

Si cambia a 10 el objetivo aumentará. Si cambia a 4 el valor del objetivo disminuirá y como está en uno de los límites del rango será siempre una indicación de que el modelo tiene solución **óptima alterna**.

Si la variable X1, no hubiese sido básica, tuviese valor cero, entonces el valor del objetivo no variaría dentro de ese rango. Esto es así, porque la variable seguiría siendo la misma y multiplicar cero por cualquier valor dentro del rango del coeficiente no haría variar el valor del objetivo. (Un análisis similar se efectuaría para el rango de variación del coeficiente de la variable X2).

### II.D.2.2 *Análisis de Sensibilidad cuando cambia el lado derecho de una restricción.*

Para determinar los Rangos de Variación de los lados derechos de las restricciones dentro de los cuales la base no cambia (16), se presentan en la tabla de resultados los incrementos y decrecimientos permitidos que se agregaran y restarán, respectivamente, del valor actual, para obtener los límites inferior y superior del rango de variación:

$$2 \leq b_1 \leq \infty$$

$$-\infty \leq b_2 \leq 20$$

El lado derecho de la restricción 2 puede variar entre menos infinito ( $-\infty$ ) y 20 y la solución básica permanecerá igual. Se limita esta explicación a determinar el efecto sobre la solución básica solamente.

Para mayor detalle puede ver el capítulo de Análisis de Sensibilidad en el texto elaborado por la cátedra: “Programación Lineal para Toma de Decisiones”

### II. D.2.3. *Análisis de Sensibilidad de la solución cuando aparece una nueva restricción.*

Para efectuar este análisis debe hacerse lo siguiente:

**Primero**, debe definirse claramente la nueva restricción en el modelo.

**Segundo**, debe expresarse matemáticamente la nueva restricción, es decir, debe formularse.

**Tercero**, debe utilizarse, en la nueva restricción, los valores óptimos que tienen actualmente las variables.

**Cuarto**, debe determinar si los valores óptimos satisfacen la nueva restricción.

Si la nueva restricción es satisfecha con los valores óptimos actuales, entonces debe concluirse que la solución actual sigue siendo la misma. La solución no será sensible cuando aparecen restricciones de ese tipo. Se incorporara la nueva restricción al modelo y se continuará con la misma solución básica.

Si la nueva restricción no es satisfecha con los valores óptimos actuales, entonces debe concluirse que la solución actual cambiará, la solución será muy sensible cuando aparecen restricciones de ese tipo, se incorporara la nueva restricción al modelo y se calculará una nueva solución básica.

En el modelo utilizado, se iniciará con el segundo paso, expresando matemáticamente una nueva Restricción. Suponga que aparece una nueva restricción que es la siguiente:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 20$$

Si se utilizan los valores óptimo actuales de las variables:  $X_1 = 10$  y  $X_2 = 0$  Entonces,

$$2(10) + 3(0) \leq 20$$

$$20 + 0 = 20$$

Se determina de este modo que los valores óptimos actuales de las variables satisfacen la nueva restricción, por lo tanto se incorpora esta nueva restricción al modelo, se continúa con la misma

solución y se concluye que la solución actual no es sensible cuando aparece una restricción de este tipo.

Si la nueva restricción hubiese sido, por ejemplo:

$$3X_1 + 4X_2 \leq 15$$

Se demostraría que  $3(10) + 4(0)$  no es menor o igual que 15, por lo tanto la nueva restricción no se satisface con los valores óptimos actuales de las variables, debe entonces incorporarse al modelo y calcularse una nueva solución. Se concluye que la solución actual es sensible cuando aparece una restricción de este tipo.

### II.D.3 Dualidad

La variable dual mostrada para la primera restricción en la columna de DUAL PRICES tiene un valor de 6.

En forma general la información que proporciona ese valor (15) es el siguiente: “Cada unidad en que se incremente el lado derecho de la primera restricción incrementará el valor de la Función Objetivo en 6, siempre y cuando ese incremento en la restricción sea utilizado”

La variable dual de la segunda restricción, con valor cero, se definiría como el incremento que tendría el objetivo por cada unidad en que se incrementara el lado derecho de la segunda restricción. En este caso, como tiene valor cero, la Función Objetivo no variaría. Puede observarse que la segunda restricción tiene holgura positiva.

Estos valores ayudan a determinar si sería conveniente incrementar esos lados derechos de las restricciones. En ausencia de mayor información, en este caso sería conveniente incrementar el lado derecho de la primera restricción porque se está maximizando y será indiferente incrementar el lado derecho de la segunda restricción.

Puede comprobar que los valores de las funciones objetivo del modelo Original y la del modelo Dual son iguales.

Valor de la Función Objetivo Original = 60

Función Objetivo Dual =  $10 y_1 + 4 y_2$

Donde  $y_1$ ,  $y_2$  son las variables duales correspondientes a la primera y segunda restricción respectivamente.

Sustituyendo los valores de esas variables en la Función Objetivo dual se obtiene:

$$10 y_1 + 4 y_2 = 10 (6) + 4 (0) \qquad \text{Función Objetivo Dual:} \qquad 10 (6) + 4 (0) = 60$$

Este procedimiento comprueba que ambas soluciones, la original y la dual, son soluciones óptimas para sus respectivos modelos.

## **II.E SECCION E. Uso de la Computadora en Programación Lineal**

### **II. E.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría.**

1. Existe gran cantidad de programas comerciales de computadora para resolver modelos lineales.
2. Todos esos programas son semejantes porque sirven para resolver modelos lineales. Son diferentes en cuanto a la cantidad de variables y restricciones que puede manejar, los formatos de entrada y salida de datos, y a la implementación del Método Simplex o de Puntos Interiores.
3. Cada programa, legalmente adquirido, tiene un manual del usuario con las instrucciones necesarias.
4. Los programas comerciales utilizados en la enseñanza, se aplican en la solución de modelos con pocas variables y restricciones a fin de facilitar el aprendizaje.
5. Se usará el programa LINDO ( **L**inear **I**nteractive and **D**iscrete **O**ptimizer), LINGO y What's Best elaborados por Lindo Systems. En algunos modelos se usará Quantitative System Business QSB presentado por la Prentice Hall Inc.
6. Los programas elaborados por Lindo Systems se crearon para trabajar con sistema operativo Windows. El Programa QSB emplea el sistema operativo MS-DOS

### **II.E.2 PRACTICA. Solución de modelos utilizando el computador.**

El campo de aplicación de Programación Lineal es muy amplio. Entre los modelos más utilizados, y considerados clásicos dentro de la Investigación de Operaciones, están los de Programación de la Producción. El problema a continuación ilustrará un caso particular para un sistema de producción.

#### **EJEMPLO 1.**

Una empresa manufacturera elabora tres componentes: 1, 2 y 3 para vender a compañías de refrigeración. Los componentes son procesados en dos máquinas A y B. La máquina A está disponible por 120 horas y la máquina B esta disponible por 110 horas. No más de 200 unidades de componente 3 podrán ser vendidos, pero hasta 1000 unidades de cada uno de los otros dos componentes pueden ser vendidas. De hecho, la empresa tiene ya ordenes de 600 unidades de componente 1 que deben ser satisfechas. Los beneficios de cada unidad de los componentes 1, 2 y 3 son de Bs. 8, 6 y 9 respectivamente. Los tiempos en minutos necesarios para elaborar cada componente en cada máquina son:

| Componente | Máquina 1 | Máquina 2 |
|------------|-----------|-----------|
| 1          | 6         | 4         |
| 2          | 4         | 5         |
| 3          | 4         | 2         |

El modelo elaborado y su solución se presentan a continuación, utilizando diferentes programas (software) como: a) Lingo b) Lindo, c) What'sBest y d) QSB. Puede observar la forma diferente de la entrada de datos y del formato de resultados. Las formas para introducir los datos en los diferentes programas serán detalladas en el "Manual de Programas" que se anexará a este texto.

## a) Uso del Programa LINGO

### *Introducción de datos del modelo:*

```

Max = 8*C1+6*C2+9*C3; ! Función Objetivo de beneficios;

6*C1+ 4*C2+ 4*C3 <= 7200; ! Minutos disponibles en la máquina 1;
4*C1+ 5*C2+ 2*C3 <= 6600; ! Minutos disponibles en la máquina 2;
                C3 <= 200; !Cantidad de componente 1 a fabricar;
C1              <= 1000; !Cantidad de componente 1 a fabricar;
                C2 <= 1000; !Cantidad de componente 1 a fabricar;

C1              >= 600; !Cantidad de componente 1 a fabricar;

```

### *Solución del modelo:*

Global optimal solution found at step: 4  
Objective value: 10800.00

| Variable | Value    | Reduced Cost |
|----------|----------|--------------|
| C1       | 600.0000 | 0.0000000    |
| C2       | 700.0000 | 0.0000000    |
| C3       | 200.0000 | 0.0000000    |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|-----|------------------|------------|
| 1   | 10800.00         | 1.000000   |
| 2   | 0.0000000        | 1.500000   |
| 3   | 300.0000         | 0.0000000  |
| 4   | 0.0000000        | 3.000000   |
| 5   | 400.0000         | 0.0000000  |
| 6   | 300.0000         | 0.0000000  |
| 7   | 0.0000000        | -1.000000  |

Ranges in which the basis is unchanged:

| Variable | Objective Coefficient Ranges |                    |                    |
|----------|------------------------------|--------------------|--------------------|
|          | Current Coefficient          | Allowable Increase | Allowable Decrease |
| C1       | 8.000000                     | 1.000000           | INFINITY           |
| C2       | 6.000000                     | 3.000000           | 0.6666667          |
| C3       | 9.000000                     | INFINITY           | 3.000000           |

| Row | Righthand Side Ranges |                    |                    |
|-----|-----------------------|--------------------|--------------------|
|     | Current RHS           | Allowable Increase | Allowable Decrease |
| 2   | 7200.000              | 240.0000           | 2800.000           |
| 3   | 6600.000              | INFINITY           | 300.0000           |
| 4   | 200.0000              | 700.0000           | 100.0000           |
| 5   | 1000.000              | INFINITY           | 400.0000           |
| 6   | 1000.000              | INFINITY           | 300.0000           |
| 7   | 600.0000              | 400.0000           | 85.71429           |

## b) Uso del Programa LINDO

### *Introducción de datos del modelo y Solución del modelo:*

```

MAX      8 X1 + 6 X2 + 9 X3
SUBJECT TO
    2)    6 X1 + 4 X2 + 4 X3 <=    7200
    3)    4 X1 + 5 X2 + 2 X3 <=    6600
    4)    X3 <=    200
    5)    X1 <=    1000
    6)    X2 <=    1000
    7)    X1 >=    600
END

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 5

#### OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 10800.0000

| VARIABLE | VALUE      | REDUCED COST |
|----------|------------|--------------|
| X1       | 600.000000 | .000000      |
| X2       | 700.000000 | .000000      |
| X3       | 200.000000 | .000000      |

| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES |
|-----|------------------|-------------|
| 2)  | .000000          | 1.500000    |
| 3)  | 300.000000       | .000000     |
| 4)  | .000000          | 3.000000    |
| 5)  | 400.000000       | .000000     |
| 6)  | 300.000000       | .000000     |
| 7)  | .000000          | -1.000000   |

NO. ITERATIONS= 5

#### RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

| VARIABLE | OBJ COEFFICIENT RANGES |                    |                    |
|----------|------------------------|--------------------|--------------------|
|          | CURRENT COEF           | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
| X1       | 8.000000               | 1.000000           | INFINITY           |
| X2       | 6.000000               | 3.000000           | .666667            |
| X3       | 9.000000               | INFINITY           | 3.000000           |

#### RIGHTHAND SIDE RANGES

| ROW | CURRENT RHS | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
|-----|-------------|--------------------|--------------------|
| 2   | 7200.000000 | 240.000000         | 2800.000000        |
| 3   | 6600.000000 | INFINITY           | 300.000000         |
| 4   | 200.000000  | 700.000000         | 100.000000         |
| 5   | 1000.000000 | INFINITY           | 400.000000         |
| 6   | 1000.000000 | INFINITY           | 300.000000         |
| 7   | 600.000000  | 400.000000         | 85.714290          |

### c) Uso del Programa WHAT'sBEST

#### *Introducción de datos del modelo*

|    | A                  | B | C | D                         | E | F  | G | H  | I | J | K            | L      | M | N | O              | P |
|----|--------------------|---|---|---------------------------|---|----|---|----|---|---|--------------|--------|---|---|----------------|---|
| 1  |                    |   |   |                           |   |    |   |    |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 2  |                    |   |   | PRODUCCION DE COMPONENTES |   |    |   |    |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 3  | BENEFICIO TOTAL    |   |   |                           |   |    |   |    |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 4  | 0                  |   |   |                           |   |    |   |    |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 5  |                    |   |   |                           |   |    |   |    |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 6  | COMPONENTE         |   |   | C1                        |   | C2 |   | C3 |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 7  | BENEFICIO / UNIDAD |   |   | 8                         |   | 6  |   | 9  |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 8  |                    |   |   |                           |   |    |   |    |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 9  | CANTIDAD           |   |   | 0                         |   | 0  |   | 0  |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 10 | PRODUCIDA          |   |   |                           |   |    |   |    |   |   |              |        |   |   |                |   |
| 11 |                    |   |   |                           |   |    |   |    |   |   | CANTIDAD     |        |   |   | CANTIDAD TOTAL |   |
| 12 |                    |   |   | RESTRICCIONES             |   |    |   |    |   |   | EN EL OPTIMO |        |   |   | RESTRINGIDA    |   |
| 13 | MINUTOS MAQUINA1   |   |   | 6                         |   | 4  |   | 4  |   |   | 0            | <=     |   |   | 7200           |   |
| 14 | MINUTOS MAQUINA2   |   |   | 4                         |   | 5  |   | 2  |   |   | 0            | <=     |   |   | 6600           |   |
| 15 | PRODEMANDAC1       |   |   | 0                         |   | 0  |   | 1  |   |   | 0            | <=     |   |   | 200            |   |
| 16 | PRODEMANDAC2       |   |   | 1                         |   | 0  |   | 0  |   |   | 0            | <=     |   |   | 1000           |   |
| 17 | PRODEMANDAC3       |   |   | 0                         |   | 1  |   | 0  |   |   | 0            | <=     |   |   | 1000           |   |
| 18 | DEMANDAC1          |   |   | 1                         |   | 0  |   | 0  |   |   | 0            | Not >= |   |   | 600            |   |

#### *Solución del Modelo:*

|    | A                                | B | C | D                         | E | F   | G | H   | I | J  | K            | L   | M  | N  | O              | P |
|----|----------------------------------|---|---|---------------------------|---|-----|---|-----|---|----|--------------|-----|----|----|----------------|---|
| 1  |                                  |   |   |                           |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 2  |                                  |   |   | PRODUCCION DE COMPONENTES |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 3  | BENEFICIO TOTAL                  |   |   |                           |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 4  | 10800                            |   |   |                           |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 5  |                                  |   |   |                           |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 6  | COMPONENTE                       |   |   | C1                        |   | C2  |   | C3  |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 7  | BENEFICIO / UNIDAD               |   |   | 8                         |   | 6   |   | 9   |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 8  |                                  |   |   |                           |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 9  | CANTIDAD                         |   |   | 600                       |   | 700 |   | 200 |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 10 | PRODUCIDA                        |   |   |                           |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 11 |                                  |   |   |                           |   |     |   |     |   |    | CANTIDAD     |     |    |    | CANTIDAD TOTAL |   |
| 12 |                                  |   |   | RESTRICCIONES             |   |     |   |     |   |    | EN EL OPTIMO |     |    |    | RESTRINGIDA    |   |
| 13 | MINUTOS MAQUINA1                 |   |   | 6                         |   | 4   |   | 4   |   |    | 7200         | =<= |    |    | 7200           |   |
| 14 | MINUTOS MAQUINA2                 |   |   | 4                         |   | 5   |   | 2   |   |    | 6300         | <=  |    |    | 6600           |   |
| 15 | PRODEMANDAC1                     |   |   | 0                         |   | 0   |   | 1   |   |    | 200          | =<= |    |    | 200            |   |
| 16 | PRODEMANDAC2                     |   |   | 1                         |   | 0   |   | 0   |   |    | 600          | <=  |    |    | 1000           |   |
| 17 | PRODEMANDAC3                     |   |   | 0                         |   | 1   |   | 0   |   |    | 700          | <=  |    |    | 1000           |   |
| 18 | DEMANDAC1                        |   |   | 1                         |   | 0   |   | 0   |   |    | 600          | =>= |    |    | 600            |   |
| 19 |                                  |   |   |                           |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |
| 20 |                                  |   |   |                           |   |     |   |     |   | R1 | R2           | R3  | R4 | R5 | R6             |   |
| 21 | VARIABLES DUALES por RESTRICCION |   |   |                           |   |     |   |     |   | 2  | 0            | 3   | 0  | 0  | -1             |   |
| 22 |                                  |   |   |                           |   |     |   |     |   |    |              |     |    |    |                |   |



## d) Uso del Programa QSB

### *Solución del Modelo*

| Summarized Results for produc                  |    |            |                     |                        |    | Page : 1   |                     |
|--|----|------------|---------------------|------------------------|----|------------|---------------------|
| Variables<br>No. Names                         |    | Solution   | Opportunity<br>Cost | Variables<br>No. Names |    | Solution   | Opportunity<br>Cost |
| 1  | X1 | +600.00000 | 0                   | 6                      | S3 | 0          | +3.0000000          |
| 2  | X2 | +699.99994 | 0                   | 7                      | S4 | +400.00000 | 0                   |
| 3  | X3 | +200.00000 | 0                   | 8                      | S5 | +300.00003 | 0                   |
| 4  | S1 | 0          | +1.5000000          | 9                      | S6 | 0          | +1.0000002          |
| 5  | S2 | +300.00015 | 0                   | 10                     | A6 | 0          | -1.0000002          |
| Maximum value of the OBJ = 10800    ITERS. = 5 |    |            |                     |                        |    |            |                     |

| Sensitivity Analysis for OBJ Coefficients |            |             |             |      |             |             | Page : 1   |
|---|------------|-------------|-------------|------|-------------|-------------|------------|
| C(j)                                      | Min. C(j)  | Original    | Max. C(j)   | C(j) | Min. C(j)   | Original    | Max. C(j)  |
| C(1)                                      | - Infinity | +8.00000000 | +9.00000000 | C(3) | +6.00000000 | +9.00000000 | + Infinity |
| C(2)                                      | +5.3333330 | +6.00000000 | +9.00000000 |      |             |             |            |

| Sensitivity Analysis for RHS |            |            |            |      |            | Page : 1   |            |
|------------------------------|------------|------------|------------|------|------------|------------|------------|
| B(i)                         | Min. B(i)  | Original   | Max. B(i)  | B(i) | Min. B(i)  | Original   | Max. B(i)  |
| B(1)                         | +4400.0000 | +7200.0000 | +7440.0000 | B(4) | +600.00000 | +1000.0000 | + Infinity |
| B(2)                         | +6300.0000 | +6600.0000 | + Infinity | B(5) | +700.00000 | +1000.0000 | + Infinity |
| B(3)                         | +99.999947 | +200.00000 | +900.00000 | B(6) | +514.28564 | +600.00000 | +1000.0000 |

A continuación aparece el informe de resultados para este modelo. Allí se indica el lugar o posición donde se lee cada valor señalado en dicho informe. Para los ejemplos posteriores no se repetirán estas explicaciones.

## INFORME DE RESULTADOS:

### **Solución Óptima.**

En cualquiera de los formatos de salida de datos puede leer la misma solución:

Fabricar 600 componentes 1, fabricar 700 componentes 2 y 200 componentes 3.

Para nombrar estas variables de decisión en los programas, pueden ser usadas diferentes denominaciones. En el manual de los programas se incluye más información al respecto. En este modelo, los nombres que se han colocado en cada programa se leen:

En **Lingo**: en la columna “VALUE” y las filas con los nombres C1, C2, y C3.

En **Lindo**: en la columna “VALUE” y las filas con denominación X1, X2, y X3.

En **What’sBest**: en las columnas C1, C2 y C3 y la fila CANTIDAD PRODUCIDA

En **QSB**: en la columna “Variables Names” y las filas con denominación X1, X2, y X3.

El número de iteraciones realizadas para llegar al óptimo depende del algoritmo de solución utilizado.

### **Función Objetivo:**

Los Beneficios Máximos obtenidos por su producción y venta es de 10.800 unidades monetarias. (Recuerde que en los resultados se usa notación inglesa; cualquier cantidad colocada después del punto, es un decimal).

Se lee en **Lingo**: en “Objective value”.

Se lee en **Lindo**: en “OBJECTIVE FUNCTION VALUE”

Se leen en **QSB**: en la tabla de resultados en la fila con texto “Maximum Value of the OBJ”

Se lee en **What’sBest**: en “BENEFICIO TOTAL”

### **Holguras:**

Restricción 1: Holgura de valor cero. NO quedan minutos disponibles en la máquina 1. Se utiliza la totalidad máxima disponible de minutos en esa Máquina 1

Restricción 2: Holgura de valor 300. Queda un disponible de 300 minutos sin utilizar en la Máquina 2, con relación al total máximo establecido en la Máquina 2.

Restricción 3: Holgura de valor cero. No se deja de fabricar C3 con relación a la cantidad máxima establecida. Se fabrica el máximo establecido que se puede vender.

Restricción 4: Holgura de valor 400. No se fabrican 400 componentes 1 con relación al máximo que se puede vender. Se fabrican 600

Restricción 5: Holgura de valor 300. No se fabrican 300 componentes 2 con relación al máximo que se puede vender. Se fabrican 700.

Restricción 6: Holgura de valor cero. No se fabrica C1 por encima de la cantidad mínima demandada. Se fabrica el mínimo para cubrir la demanda ya contratada.

Se leen en **Lingo** y en **Lindo** en “SLACK or SURPLUS” a partir de la fila (row) 2 correspondiente a la primera restricción.

Se lee en **What’sBest**: en “cantidad en el óptimo” indicándose para cada restricción.

Se leen en **QSB**: en la columna “Variables Names” y las filas con denominación S1, S2, ....., S6.

## Análisis de Sensibilidad:

El Programa **WHAT'sBEST** **no proporciona** análisis de sensibilidad de la solución. Sin embargo, este análisis puede realizarse efectuando cambios en los elementos componentes del modelo. Seguidamente se procede a solucionarlo de nuevo para observar el efecto causado sobre la solución óptima.

Se presenta este análisis con los resultados del programa **LINDO**.

Los rangos de variación dentro de los cuales la Base no cambia (RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED) indica: a) Los rangos para los coeficientes (COEF) de las variables en la Función Objetivo, y b) Los rangos para los lados derechos de las restricciones.

- a) Rangos para los coeficientes (COEF) de las variables en la Función Objetivo: El análisis presenta la cantidad permitida de crecimiento y la cantidad de decrecimiento permitido para cada coeficiente. Para determinar el rango se debe sumar y restar, respectivamente, estas cantidades al coeficiente actual (CURRENT COEF). que tiene la variable. Se obtiene:

$$-\infty \leq Cx1 \leq 9 \qquad 5.3334 \leq Cx2 \leq 9 \qquad 6 \leq Cx3 \leq \infty$$

El beneficio que proporciona cada componente 1 producido y vendido puede variar entre  $-\infty$  y 9. Dentro de ese rango la solución básica seguirá siendo la misma y el valor de las ganancias totales, ó Función Objetivo, puede variar dependiendo del valor que tome esa ganancia dentro de ese rango. Si cambia a 9 existiría además una solución óptima alterna.

El beneficio que proporciona cada componente 2 producido y vendido puede variar entre 5.3334 y 9 y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango el valor de las ganancias totales, Función Objetivo, puede variar dependiendo del valor que tome esa ganancia dentro de ese rango. Si cambia a 5.3334 ó a 9 existiría además una solución óptima alterna.

El beneficio que proporciona cada componente 3 producido y vendido puede variar entre 6 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango el valor de las ganancias totales, Función Objetivo, puede variar dependiendo del valor que tome esa ganancia dentro de ese rango. Si cambia a 6 existiría además una solución óptima alterna.

- b) Rangos para los lados derechos de las restricciones: (RHS) el análisis presenta la cantidad permitida de crecimiento y la cantidad de decrecimiento permitido para cada lado derecho de las restricciones. Para determinar el rango se debe sumar y restar, respectivamente, estas cantidades al lado derecho actual que tiene la restricción.

$$\begin{array}{lll} 4400 \leq b1 \leq 7440 & 6300 \leq b2 \leq \infty & 100 \leq b3 \leq 900 \\ 600 \leq b4 \leq \infty & 700 \leq b5 \leq \infty & 514.2857 \leq b6 \leq 1000 \end{array}$$

La cantidad máxima de horas disponibles en la máquina 1 puede variar entre 4400 y 7440 y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad máxima de horas disponibles en la máquina 2 puede variar entre 6300 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad máxima de componente 3 a fabricar puede variar entre 100 y 900 y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad máxima de componente 1 a fabricar puede variar entre 600 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad de máxima de componente 2 a fabricar puede variar entre 700 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad mínima de componente 1 a fabricar para la demanda ya contratada puede variar entre 514.28 y 1000 y la solución básica seguirá siendo la misma.

En el programa **QSB** se lee el resultado del análisis de sensibilidad, en las tablas correspondientes a análisis de sensibilidad para los coeficientes de las variables en la Función Objetivo (Sensitivity Analysis for OBJ Coefficients) y en la de análisis de sensibilidad para el lado derecho Right Hand Side). de las restricciones (Sensitivity Análisis for RHS).

En ellas se presentan directamente los límites máximo y mínimo, para cada coeficiente y para cada lado derecho, en las columnas correspondientes a “Max. Cj” y “Min. Cj”, para los coeficientes. Se lee en las columnas “max.Bi” y “Min. Bi” para el lado derecho de las restricciones.

### **Variables Duales:**

Se leen en **Lingo** y en **Lindo**: en los espacios correspondientes a DUAL PRICES a partir de la fila (row) 2 correspondiente a la primera restricción.

Se lee en **What'sBest**: en “Variables duales” indicándose para cada restricción (R)

Se leen en **QSB**: en la columna “Opportunity Cost” y las filas con denominación S1, S2, S3, S4, S5 y A6. Observe que la variable dual correspondiente a la restricción de tipo  $\geq$  se lee en la casilla correspondiente a la variable artificial usada en esa restricción.

La información sobre las variables duales dada es la siguiente:

Para la primera restricción el valor 1.5 de la variable dual indica que los beneficios totales óptimos aumentarán en 1.5 unidades monetarias por cada minuto en que se incremente el máximo de minutos disponible actualmente en la máquina 1. Esto es siempre y cuando ese minuto adicional se utilice realmente. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería conveniente incrementar este monto máximo disponible. El precio máximo que se estaría dispuesto a pagar sería de 1.5 unidades monetarias. El monto máximo en que se podría incrementar es 7440, pues más allá de ese monto la solución básica cambia y se tendría una situación diferente.

Para la segunda restricción el valor 0 de la variable dual indica que los beneficios totales óptimos no variarán por cada minuto en que se incremente el máximo disponible actualmente. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería indiferente incrementar este monto máximo disponible. El precio máximo que se estaría dispuesto a pagar por cada minuto adicional sería de 0 unidades monetarias.

Para la tercera restricción el valor 3 de la variable dual indica que los beneficios totales óptimos se incrementarán en 3 unidades por cada componente 3 en que se incremente el máximo a producir actualmente. Esto es siempre y cuando ese componente adicional se produzca realmente Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería conveniente incrementar este monto máximo disponible.

El precio máximo que se estaría dispuesto a pagar por cada componente 3 producido adicionalmente sería de 3 unidades monetarias. El monto máximo en que se puede incrementar es 900, pues más allá de ese monto la solución básica cambia y se tendría una situación diferente.

Para la cuarta restricción el valor 0 de la variable dual indica que los beneficios totales óptimos no variarán por cada componente 1 en que se incremente el máximo a producir actualmente. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería indiferente incrementar este monto máximo. El precio máximo que se estaría dispuesto a pagar por cada componente 1 adicional sería de 0 unidades monetarias.

Para la quinta restricción el valor 0 de la variable dual indica que los beneficios totales óptimos no variarán por cada componente 2 en que se incremente el máximo a producir actualmente. Esto es siempre y cuando ese componente adicional se produzca realmente. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería indiferente incrementar este monto máximo disponible. El precio máximo que se estaría dispuesto a pagar por cada componente 2 adicional sería de 0 unidades monetarias.

Para la sexta restricción el valor -1 de la variable dual indica que los beneficios totales óptimos disminuirán en 1 unidad monetaria, por cada componente 1 en que se incremente el mínimo de componente 1 demandado actualmente. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, no sería conveniente incrementar este monto máximo disponible.

## ***EJEMPLO 2.***

Una empresa vende su producto, a través de agentes vendedores, mediante visitas de venta a tres tipos de clientes: Comerciales, Industriales y Profesionales. Por cada visita de venta a un cliente comercial obtiene ingresos por ventas de \$ 2.000, por cada visita a un cliente industrial obtiene \$ 5.000 y por cada visita a un cliente Profesional obtiene \$ 10.000 de ingreso por venta.

En el mes actual se dispone de 3.200 horas de los agentes vendedores para efectuar las visitas y de \$ 10.000 para gastos de viáticos.

La administración no permite que más del 20% del tiempo para visitas de venta se dedique a visitar clientes comerciales, ni tampoco acepta que más de un 30% del presupuesto de viáticos sea utilizado en visitas a clientes profesionales.

Para visitar un Cliente Comercial se utilizan 5 horas, 8 para un Cliente Industrial y 11 para un Cliente Profesional.

Los gastos de viáticos por cada visita a cliente Comercial son de \$ 10; \$ 14 por cada visita a cliente Industrial y a \$ 35 por cada visita a cliente Profesional. Se desea maximizar los ingresos de ventas.

Formulación y construcción del modelo:

**Variables de Decisión:**  $X_1$ ,  $X_2$  Y  $X_3$ , representando visitas a realizar a clientes Comerciales, Industriales y Profesionales respectivamente.

**Función Objetivo:** Maximizar los ingresos de ventas.

### **Restricciones:**

Restricción 1: Disponibilidad limitada de horas para realizar las visitas

Restricción 2: Disponibilidad limitada de \$ para gastos de viáticos.

Restricción 3: Requerimiento de no más del 20% del tiempo para visitas a clientes comerciales.

Restricción 4: Requerimiento de no más del 30% del presupuesto para viáticos en visitas a clientes profesionales.

En la solución del modelo obtenida usando el programa **LINDO** en computadora, se presenta la construcción del modelo.

```

MAX 2000 X1 + 5000 X2 + 10000 X3
SUBJECT TO
2) 5 X1 + 8 X2 + 11 X3 <= 3200
3) 10 X1 + 14 X2 + 35 X3 <= 10000
4) 5 X1 <= 640
5) 35 X3 <= 3000
END

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2267857.00

| VARIABLE | VALUE      | REDUCED COST |
|----------|------------|--------------|
| X1       | .000000    | 1125.000000  |
| X2       | 282.142900 | .000000      |
| X3       | 85.714290  | .000000      |

| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES |
|-----|------------------|-------------|
| 2)  | .000000          | 625.000000  |
| 3)  | 3050.000000      | .000000     |
| 4)  | 640.000000       | .000000     |
| 5)  | .000000          | 89.285710   |

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

| VARIABLE | OBJ COEFFICIENT RANGES |                    |                    |
|----------|------------------------|--------------------|--------------------|
|          | CURRENT COEF           | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
| X1       | 2000.000000            | 1125.000000        | INFINITY           |
| X2       | 5000.000000            | 2272.727000        | 1800.000000        |
| X3       | 10000.000000           | INFINITY           | 3125.000000        |

| ROW | RIGHTHAND SIDE RANGES |                    |                    |
|-----|-----------------------|--------------------|--------------------|
|     | CURRENT RHS           | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
| 2   | 3200.000000           | 1742.857000        | 2257.143000        |
| 3   | 10000.000000          | INFINITY           | 3050.0000          |
| 4   | 640.000000            | INFINITY           | 640.000000         |
| 5   | 3000.000000           | 6777.778000        | 3000.000000        |

Nota: Si desea copiar el modelo, para que lo muestre junto con los resultados, debe utilizar los comandos necesarios señalados en el manual del programa.

## INFORME DE RESULTADOS:

### **Solución Óptima:**

$$X_1 = 0 \quad X_2 = 282.142900 \quad X_3 = 85.714290$$

Interpretando esos valores, a la luz de los significados de las variables en el modelo, se tiene lo siguiente:

No realizar visitas a clientes comerciales, realizar 282.1429 visitas a clientes Profesionales y 85.714290 visitas a clientes industriales. Sería conveniente el uso de Programación Lineal Entera.

### **Función Objetivo.**

Los ingresos máximos obtenidos por ventas son de 2.267.857 unidades monetarias.

(Recuerde que cualquier cantidad colocada después del punto, en los resultados, es una cifra decimal, ya que los programas utilizan notación inglesa).

### **Holguras:**

Restricción 1: No quedan disponibles horas para visitas, se utilizan todas las disponibles.

Restricción 2: Del presupuesto total máximo para gastos de viático quedan disponibles 3050 \$.

Restricción 3: Queda sin utilizar el máximo requerido de 640 horas para visitas a Comerciales. O también: Quedan disponibles las 640 horas máximas, requeridas para visitas a clientes comerciales ya que no se realiza visitas a estos clientes.

Restricción 4: Se utilizar el total del máximo requerido de \$ de viáticos para visitas a clientes Profesionales. O también: No queda disponibilidad alguna de los viáticos máximos para estas visitas.

### **Análisis de Sensibilidad:**

a) Los rangos de variación para los coeficientes de las variables en la Función Objetivo:

$$-\infty \leq C_{X_1} \leq 3125 \quad 3200 \leq C_{X_2} \leq 7.272.727 \quad 6.875 \leq C_{X_3} \leq 8$$

Los ingresos que proporciona cada visita a cliente comercial pueden variar entre - infinito y 3.125 y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango el valor de los ingresos totales, Función Objetivo, no varían ya que el valor de la variable  $X_1$  es cero, por lo tanto al multiplicarla por cualquier valor dentro de ese rango no tendrá ningún efecto en el valor del objetivo.

Los ingresos que proporciona cada visita a cliente profesional pueden variar entre 3.200 y 7.272,727 y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango el valor de los ingresos totales, Función Objetivo, puede variar dependiendo del valor que tome ese ingreso dentro de ese rango. Si cambia a 3.200 o 7.272,727 existiría además una solución óptima alterna.

Los ingresos que proporciona cada visita a cliente industrial pueden variar entre 6.875 e 8 y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango el valor de los ingresos totales,

Función Objetivo, puede variar dependiendo del valor que tome ese ingreso dentro de ese rango. Si cambia a 6.875 existiría además una solución óptima alterna.

- c) Los rangos de variación dentro de los cuales la Base no cambia (RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED) indica los siguientes rangos para los lados derechos de las restricciones (RHS):

d)

$$\begin{array}{ll} 942.857 \leq b_1 \leq 4942.857 & 6.950 \leq b_2 \leq \infty \\ 0 \leq b_3 \leq \infty & 0 \leq b_4 \leq 9777,7780 \end{array}$$

La cantidad máxima de horas disponibles para las visitas puede variar entre 942.857 y 4942.857 y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad máxima de dólares disponibles para viáticos puede variar entre 6.950 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad del 20% de horas requeridas para visitas a clientes comerciales puede variar entre 0 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad del 30% del presupuesto de viáticos requerida para visitas a clientes profesionales puede variar entre 0 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma.

### **Variables Duales:**

Para la primera restricción el valor 625 de la variable dual indica que los ingresos totales óptimos aumentarán en esa cantidad, por cada hora en que se incremente el máximo de horas disponible actualmente para las visitas, siempre y cuando ese incremento sea utilizado. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería conveniente incrementar este monto máximo disponible. La cantidad máxima a la que se puede incrementar esta cantidad de horas es de 4942.857 tal como lo indica el análisis de sensibilidad de la solución. Más allá de esa cantidad, la solución básica cambiaría, cambiando el monto de la variable dual y obligando a hacer un análisis diferente.

Para la segunda restricción el valor 0 de la variable dual indica que los ingresos totales óptimos no aumentarán por cada unidad monetaria en que se incremente el máximo presupuesto disponible actualmente. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería indiferente incrementar este monto máximo disponible. La cantidad máxima a la que se puede incrementar esta cantidad teóricamente es una cantidad infinita tal como lo indica el análisis de sensibilidad de la solución. En la práctica se refiere a cualquier cantidad finita.

Para la tercera restricción el valor 0 de la variable dual indica que los ingresos totales óptimos no variarán por cada hora en que se incremente el máximo de 20% requerido actualmente para realizar visitas a clientes comerciales. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería indiferente incrementar este monto máximo.

Para la cuarta restricción el valor 89.28571 de la variable dual indica que los ingresos totales



óptimos aumentarán en esa cantidad por cada \$ en que se incremente el máximo de 30% requerido actualmente para viáticos de visitas a realizar a clientes profesionales. Por lo tanto, en ausencia de mayor información, sería conveniente incrementar este monto máximo disponible. La cantidad máxima a la que se puede incrementar esta cantidad es de 9777,778 tal como lo indica el análisis de sensibilidad de la solución. Más allá de esa cantidad, la solución básica cambiaría, cambiando el monto de la variable dual y obligando a hacer un análisis diferente.

NOTA: El uso de Programación Lineal Entera resulta más conveniente en este modelo.

### *Ejemplo 3.*

Una empresa de alquiler de depósitos personales desea expandirse y construir nuevos Mini-almacenes. Para ello puede construir mini-almacenes tipo A (X1) y mini-almacenes tipo B (X2) con restricciones sobre el presupuesto a gastar en la construcción de esos mini-almacenes (Restricción 1), limitación de espacio de metros cuadrados de espacio para los mini-almacenes (restricción 2) Limitación sobre el número de mini-almacenes tipo A que puede construir por razones de demanda de alquiler de esos mini-almacenes (restricción 3). El objetivo que quiere lograr es la maximización de ganancias ( en \$) obtenidas en el alquiler.

La formulación y la solución del modelo se obtiene en computadora usando el programa **LINDO**.

MAX        500 X1 + 200 X2

SUBJECT TO

2)        200 X1 + 400 X2 <=     40000 \$ de presupuesto disponible

3)        100 X1 + 50 X2 <=     8000 metros cuadrados de espacio disponibles.

4)        X1 <=     60            mini-almacenes tipo A

END

LP OPTIMUM FOUND    AT STEP        2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)                38000.0000

| VARIABLE | VALUE     | REDUCED COST |
|----------|-----------|--------------|
| X1       | 60.000000 | .000000      |
| X2       | 40.000000 | .000000      |

| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES |
|-----|------------------|-------------|
| 2)  | 12000.000000     | .000000     |
| 3)  | .000000          | 4.000000    |
| 4)  | .000000          | 100.000000  |

NO. ITERATIONS=            2

# RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

## OBJ COEFFICIENT RANGES

| VARIABLE | CURRENT<br>COEF | ALLOWABLE<br>INCREASE | ALLOWABLE<br>DECREASE |
|----------|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| X1       | 500.000000      | INFINITY              | 100.000000            |
| X2       | 200.000000      | 50.000000             | 200.000000            |

## RIGHTHAND SIDE RANGES

| ROW | CURRENT<br>RHS | ALLOWABLE<br>INCREASE | ALLOWABLE<br>DECREASE |
|-----|----------------|-----------------------|-----------------------|
| 2   | 40000.000000   | INFINITY              | 12000.000000          |
| 3   | 8000.000000    | 1500.000000           | 2000.000000           |
| 4   | 60.000000      | 20.000000             | 20.000000             |

## INFORME DE RESULTADOS:

### **Solución Óptima:**

X1 = 60    X2= 40                  Función Objetivo = 38000

Fabricar 60 mini-almacenes tipo A y 40 mini-almacenes tipo B.

**Función Objetivo:** Las ganancias máximas obtenidas por alquilarlos es de \$ 38000

### **Holguras:**

Restricción 1: Queda un disponible de \$ 12000 del presupuesto total máximo, sin utilizar.

Restricción 2: Se utiliza la totalidad máxima disponible de metros cuadrados

Restricción 3: Se fabrica el máximo de mini-almacenes tipo A.

### **Análisis de Sensibilidad de la Solución:**

a) Los rangos de variación dentro de los cuales la Base no cambia, indican los siguientes rangos para los coeficientes de las variables en la Función Objetivo:

$$400 \leq C_{x1} \leq \infty \qquad 0 \leq C_{x2} \leq 250$$

La ganancia que proporciona cada almacén tipo A puede variar entre 400 e infinito y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango, el valor de las ganancias totales (Función Objetivo)

puede variar dependiendo del valor que tome la ganancia de cada almacén dentro de ese rango. Si cambia a 400, existiría además una solución óptima alterna.

La ganancia que proporciona alquilar cada almacén tipo B puede variar entre 0 y 250 y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango, el valor de las ganancias totales (Función Objetivo) puede variar dependiendo del valor que tome la ganancia de cada almacén dentro de ese rango. Si cambia a 250, existiría además una solución óptima alterna.

b) Los rangos de variación dentro de los cuales la Base no cambia, indican los siguientes rangos para los lados derechos de las restricciones:

$$28000 \leq b_1 \leq \infty$$

$$6000 \leq b_2 \leq 9500$$

$$40 \leq b_3 \leq 80$$

La cantidad de presupuesto máximo disponible puede variar entre 28.000 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad de metros cuadrados máximo disponibles puede variar entre 6.000 9.500 y la solución básica seguirá siendo la misma.

La cantidad de almacenes tipo A demandados puede variar entre 40 y 80 y la solución básica seguirá siendo la misma.

### **Variables Duales:**

Para la primera restricción, el valor cero de la variable dual indica que las ganancias totales óptimas no variarán por cada Bolívar en que se incremente el máximo de presupuesto disponible actualmente. Por lo tanto, en ausencia de más información, sería indiferente incrementar este monto máximo disponible.

Para la segunda restricción, el valor 4 de la variable dual indica que las ganancias totales óptimas aumentarán en cuatro unidades ( \$ 4) por cada metro cuadrado en que aumente el máximo de metros cuadrados disponibles actualmente. Por lo tanto, en ausencia de información adicional, sería conveniente incrementar este monto máximo disponible. El precio máximo que se estaría dispuesto a pagar por cada metro adicional sería de 4 unidades monetarias. La cantidad máxima a la que se puede incrementar esta cantidad de metros cuadrados es de 9.500, tal como lo indica el análisis de sensibilidad de la solución. Más allá de esa cantidad, la solución básica cambiaría, cambiando el monto de la variable dual y obligando a hacer un análisis diferente.

Para la tercera restricción el valor 100 de la variable dual indica que las ganancias totales óptimas aumentarán en cien unidades por cada almacén tipo A en que se incremente el máximo demandado actualmente. Por lo tanto, en ausencia de información adicional, sería conveniente incrementar este monto máximo disponible. El precio máximo que se estaría dispuesto a pagar por cada almacén A en que se incremente este monto a fabricar para la demanda sería de 100 unidades monetarias. Se podría aumentar hasta un máximo de 80 almacenes, pues más allá de ese monto la solución básica cambiará y así también el valor dual.

### II.E.3 Problemas para resolver:

- 1.- Formule y Construya el modelo necesario para el problema planteado.
- 2.- Obtenga su solución con alguno de los programas de computadora disponibles.
- 3.- Presente un informe con todos los resultados obtenidos.
- 4.- ¿Resulta conveniente la Programación Lineal para un modelo de este tipo? Explique.

La empresa constructora Siracid está considerando construir un desarrollo habitacional con la ayuda de fondos del gobierno. Estos fondos se entregaran sólo si Siracid cumple la condición establecida de que al menos 25% del total de unidades construidas sean unidades de bajo costo. Hay tres tipos de unidades: casas, town-houses y condominios. Dentro de ellos hay tres estilos: bajo costo, estándar y de lujo. Los condominios tendrán sólo modelos estándar y de lujo. Siracid tiene 100.000 metros cuadrados para la construcción. Se quiere que las casas ocupen entre 25% y 40 % del área total. Lo mismo para los town-houses. Para los condominios se necesita que ocupen de 10% a 25% del área total. A continuación se proporciona la cantidad de espacio total en metros cuadrados (incluyendo estacionamientos y áreas verdes) y los beneficios esperados.

| Espacio en metros cuadrados |            |          |         |  | Beneficio(en millones de Bs) |            |          |         |
|-----------------------------|------------|----------|---------|--|------------------------------|------------|----------|---------|
|                             | Bajo costo | Estándar | De lujo |  |                              | Bajo Costo | estándar | De lujo |
| Casas                       | 180        | 220      | 300     |  | Casas                        | 5          | 12       | 25      |
| Town-houses                 | 74         | 160      | 223     |  | Town-houses                  | 4          | 10       | 18      |
| condominios                 | ---        | 100      | 150     |  | Condominios                  | ---        | 9        | 16      |

Solución del modelo con WHAT'sBEST, al final del texto.

## CAPITULO III

### PROGRAMACIÓN LINEAL DE TRANSPORTE

***Objetivo:** Proponer en forma cuantitativa acciones o decisiones a tomar que optimicen sistemas de transporte y similares, donde existan relaciones lineales, mediante la teoría y práctica de la Técnica de Programación Lineal de Transporte.*

#### III.A SECCION A. Programación Lineal de Transporte, Formulación y Construcción de Modelos Lineales de Transporte

##### III.A.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la Teoría de Programación Lineal de Transporte, Formulación y Construcción del Modelo

1. Programación Lineal de Transporte es una técnica cuantitativa creada para minimizar los costos asociados a la distribución de un bien o servicio desde diferentes orígenes hasta diferentes destinos. Las condiciones de linealidad están presentes, como en cualquier técnica de programación lineal.
2. Debido al éxito alcanzado en los Sistemas de Transporte, esta técnica se utilizó posteriormente en otros sistemas. En ellos, el problema no implica transporte físico de bienes pero existen relaciones lineales, y el modelo formulado tiene las características de un Modelo de Transporte.
3. El modelo usado en esta técnica es un modelo lineal, con características especiales, llamado Modelo Lineal de transporte.
4. Las características que hacen del Modelo Lineal de Transporte un modelo de programación lineal especial son: a) Los coeficientes de las variables, en las restricciones, son uno o cero.  
b) Las cantidades demandadas deben ser iguales a las cantidades ofrecidas para poder solucionar el modelo.
5. El producto a transportar debe ser único y homogéneo. Si se ofrece cemento, por ejemplo, la demanda debe ser de cemento, es decir, un producto único. Si se ofrecen sacos de cemento la demanda debe ser de sacos de cemento y no a granel, es decir, es homogéneo. En caso de multiproductos, se puede hacer una multi-formulación.
6. En la Formulación y Construcción del Modelo Lineal de Transporte deben considerarse aspectos ya estudiados en la formulación de modelos lineales generales tales como a) Definir claramente las variables de decisión y expresarlas simbólicamente b) Definir claramente la Función Objetivo y las restricciones y expresarlas matemáticamente como funciones lineales.
7. Debe cuidarse que los elementos componentes del modelo sean expresados para el mismo período de tiempo. Se debe estipular que las variables de decisión sean mayores o iguales a cero. Esto acerca el modelo a la realidad.

8. La Función Objetivo del Modelo Lineal de Transporte es la formulación matemática de una meta establecida. Es una función Lineal a ser maximizada o minimizada. En el modelo original de transporte representa los costos totales de transporte a ser minimizados. Los orígenes o sitios, desde donde se transporta el bien, están simbolizados en el subíndice  $i$  y los destinos, hasta los que se transporta el bien, con el subíndice  $j$ . Tiene la siguiente forma general:  $m \quad n$

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

9.  $X_{ij}$ , matemáticamente, simboliza a las variables de decisión. Son los valores numéricos que se determinan con la solución del modelo y están relacionadas con la actividad de transporte. En el Modelo de Transporte representan la cantidad del bien a transportar desde el origen  $i$  hasta el destino  $j$ . Los orígenes  $i$  pueden existir en cualquier cantidad, desde 1 hasta  $m$  orígenes; igualmente puede existir cualquier cantidad de destinos  $j$ , desde 1 hasta  $n$ .
10.  $C_{ij}$ , matemáticamente, simboliza el coeficiente de la variable  $X_{ij}$ . Son datos de insumo del modelo. En la función objetivo representan la cantidad con la cual contribuye cada unidad de la variable  $X_{ij}$ , al valor total deseado en el objetivo. Específicamente en transporte representa el costo de transporte de cada unidad, del bien a transportar, desde el origen  $i$  hasta el destino  $j$ .
11. Las restricciones, desde el punto de vista matemático, son funciones lineales expresadas como igualdades o desigualdades que limitan el valor de las variables de decisión a valores permisibles. Representan, en el Modelo de Transporte, la cantidad del bien disponible en cada origen para ser transportada (restricciones de oferta) y las cantidades demandadas que deben ser transportadas a los destinos (restricciones de demanda). Las restricciones del Modelo Lineal de Transporte, incluida la de no- negatividad de las variables, tienen la forma general siguiente:

$$\text{(Oferta)} \quad \sum_{j=1}^n X_{ij} \leq a_i$$

$$\text{(Demanda)} \quad \sum_{i=1}^m X_{ij} \geq b_j$$

$$\text{(No-negatividad de variables)} \quad X_{ij} \geq 0$$

12. Cada modelo tiene tantas restricciones de oferta como el número de orígenes ( $m$ ) que existan y tantas restricciones de demanda como el número de destinos ( $n$ ) que existan.
13. Las restricciones de oferta garantizan que no se transportará más de la cantidad disponible en los orígenes.
14. Las restricciones de demanda garantizan que las cantidades demandas serán satisfechas.
15.  $a_i$ , matemáticamente simboliza el lado derecho de la restricción  $i$  de oferta.  
El subíndice  $i$  indica el origen desde el cual va a ser transportado el bien, donde  $i = 1, \dots, m$   
**Representan** la cantidad del bien que está disponible, para transportarse, en el origen  $i$ .
16.  $b_j$ , matemáticamente constituye el lado derecho de la restricción  $j$  de demanda.  
El subíndice  $j$  indica el destino hasta el cual va a ser transportado el bien, donde  $j = 1, \dots, n$   
**Representan** la cantidad del bien que es demandado, para transportarse, en el destino  $j$ .

17.  $X_{ij} \geq 0$  es una restricción de no negatividad de las variables. Se le considera siempre presente como una condición natural en cualquier modelo lineal.
18. Siendo m el número de restricciones de oferta y n el número de restricciones de demanda, en un Modelo de Transporte existirá siempre,  $m \times n$  variables en total.
19. Siendo m el número de restricciones de oferta y n el número de restricciones de demanda, en un Modelo de Transporte existirá siempre  $m+n-1$  variables básicas y  $(mxn) - (m+n-1)$  no-básicas.
20. En todo Modelo de Transporte elaborado a partir de un sistema que no sea de transporte, pueden intercambiarse los orígenes y destinos. Esto dependerá de la conveniencia para la interpretación de los resultados.
21. Toda la información de un Modelo de Transporte puede ser resumida en las llamadas Tablas de Transporte, al igual que el modelo lineal general se resumía en tablas simplex. Estas tablas presentan la forma siguiente, en un modelo de tres orígenes y tres destinos.

|         |   | Destinos |     |     |     |     |     | Oferta |
|---------|---|----------|-----|-----|-----|-----|-----|--------|
|         |   | A        |     | B   |     | C   |     |        |
| Origen  | 1 | X11      | c11 | X12 | c12 | X13 | c13 | a1     |
|         | 2 | X21      | c21 | X22 | c22 | X23 | c23 | a2     |
|         | 3 | X31      | c31 | X32 | c32 | X33 | c33 | a3     |
| Demanda |   | b1       |     | b2  |     | b3  |     |        |

### III.A.2 ***PRÁCTICA de Formulación y Construcción de Modelos Lineales de Transporte.***

**NOTA:** Debe recordarse que las cifras, las unidades monetarias y cualquier otro dato utilizado en los ejemplos, son convencionales. Pueden o no coincidir con datos reales.

#### **Ejemplo 1. Problema en un Sistema de Transporte.**

La empresa Gal elabora cerveza, como uno de sus productos, en tres plantas localizadas en tres ciudades del país, A, B y C. Este producto se transporta a cuatro almacenes localizados en cuatro ciudades del país, 1, 2, 3 y 4 para su posterior distribución. Los costos de transporte (en miles de bolívares) por camión de cerveza, se indican en la matriz de costos que se le presenta. Cada camión puede transportar 1000 cajas de cerveza. La cantidad de cajas de cerveza, disponible en las plantas, para transportar es la siguiente: A: 90.000; B: 40.000; C: 80.000. Las cajas de cerveza que requiere cada almacén son las siguientes: 1: 40.000; 2: 60.000; 3: 50.000; 4: 60.000.

|   | 1  | 2  | 3 | 4  |
|---|----|----|---|----|
| A | 10 | 20 | 5 | 9  |
| B | 2  | 10 | 8 | 30 |
| C | 1  | 20 | 7 | 10 |

### Variables de Decisión:

$X_{ij}$ : camiones de cerveza a transportar desde la Planta de la ciudad  $i$  hasta el almacén de la ciudad  $j$

$$i = A, B, C \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Las variables son 12 en total:  $(m \times n)$   $(3 \times 4)$ . Pueden ser definidas una por una, pero es suficiente hacerlo con una cualquiera de ellas para expresar lo que representan. Por ejemplo:

$XA_3$ : camiones de cerveza a transportar desde la planta en la Ciudad A hasta el almacén de la Ciudad 3.

Nota: Para ayudarse en la definición conceptual de las variables imagine que el valor de ella ya lo ha encontrado y es un número cualquiera. Por ejemplo 8. Coloque ese 8 antes de la definición dada a la variable y compruebe que puede leerlo con coherencia. Así, en este caso, Usted puede leer: 8 camiones de cerveza a transportar desde la planta de la ciudad A hasta el almacén de la ciudad 3.

**Restricciones de Oferta:** Disponibilidades limitadas de cajas de cerveza en las plantas de las 3 ciudades:

$$XA_1 + XA_2 + XA_3 + XA_4 \leq 90$$

$$XB_1 + XB_2 + XB_3 + XB_4 \leq 40$$

$$XC_1 + XC_2 + XC_3 + XC_4 \leq 80$$

La cantidad del lado derecho de la restricción es el resultado de transformar la cantidad de cajas de cerveza disponibles, en camiones. Esto es así porque la variable  $X_{ij}$  se ha definido en “camiones” y no se puede sumar camiones y obtener un total de cajas de cerveza. Se debe ser coherente y lo que se suma debe ser lo que se obtiene, recuerde la Aditividad de los modelos lineales.

Definición conceptual de una específica restricción de Oferta. La tercera, por ejemplo:

Representa la suma de camiones de cerveza transportados desde la planta de la ciudad C hasta el almacén de la ciudad 1 ( $XC_1$ ), más los transportados desde esa misma planta hasta el almacén 2 ( $XC_2$ ), más los transportados hasta el almacén 3 ( $XC_3$ ), mas los transportados hasta el almacén 4 ( $XC_4$ ). Esta suma debe ser menor o igual a la cantidad de camiones disponibles en la planta de la ciudad C. En este caso 80, ya que dispone de 80.000 cajas de cerveza equivalente a 80 camiones.

**Restricciones de Demanda:** Requerimientos de cajas de cerveza en los almacenes de las 4 ciudades:

$$XA_1 + XB_1 + XC_1 \geq 40$$

$$XA_2 + XB_2 + XC_2 \geq 60$$

$$XA_3 + XB_3 + XC_3 \geq 50$$

$$XA_4 + XB_4 + XC_4 \geq 60$$

De nuevo la cantidad del lado derecho es el resultado de transformar la cantidad de cajas de cerveza disponibles, en camiones. Cada ecuación del modelo debe ser coherente. Lo que se suma son camiones y eso es lo que debe obtenerse.



Definición conceptual de una específica restricción de demanda: La primera, por ejemplo:

Representa la suma de camiones de cerveza transportados hasta el almacén de la ciudad 1 desde las plantas de la ciudad A ( $X_{A1}$ ) más los transportados desde la planta de la ciudad B ( $X_{B1}$ ), más los transportados desde la planta de la ciudad C ( $X_{C1}$ ), para satisfacer la demanda de ese almacén de la ciudad 1. Esta suma debe ser mayor o igual a la cantidad de camiones demandados en el almacén de la ciudad 1. En este caso 40, ya que demanda 40.000 cajas de cerveza equivalente a 40 camiones.

### Restricciones de no-negatividad de las variables:

Las variables están restringidas a ser no-negativas. No se pueden transportar cantidades negativas, no existentes, de cerveza. Por eso, esta restricción acerca el modelo a la realidad.

**Función Objetivo:** Se define como Minimizar los costos totales de transporte de los camiones de cerveza desde las 3 plantas hasta los cuatro almacenes..

$$\text{Min } 10 X_{A1} + 20 X_{A2} + 5 X_{A3} + 9 X_{A4} + 2 X_{B1} + 10 X_{B2} + 8 X_{B3} + 30 X_{B4} + 1 X_{C1} + 20 X_{C2} + 7 X_{C3} + 10 X_{C4}$$

Esta expresión matemática representa la suma de los costos totales de transporte desde todas las plantas hasta todos los almacenes.

Así por ejemplo,  $20 X_{C2}$  representa los costos totales de los camiones de cerveza transportados desde la planta de la ciudad C hasta el almacén de la ciudad 2. Donde 20 es el costo unitario de transporte; es decir, el costo de transporte de un camión de cerveza desde la planta de la ciudad C hasta el almacén de la ciudad 2;  $X_{C2}$  es la cantidad transportada.

Resumiendo el modelo y colocando las variables en la posición de las variables similares, se puede observar más claramente la característica esencial que hace especial al Modelo Lineal de Transporte: “Los coeficientes de las variables en las restricciones son 1 o cero”.

Analizando la variable  $X_{A3}$  se observa que tiene coeficiente 1 en la primera restricción, cero en la segunda; es decir, no existe en esa restricción. Tiene coeficiente cero en la tercera, cero en la cuarta, cero en la quinta, uno en la sexta y cero en la séptima. Igual característica se observa en las demás variables. El resumen del modelo formulado y construido es el siguiente:

$$\text{Min } 10 X_{A1} + 20 X_{A2} + 5 X_{A3} + 9 X_{A4} + 2 X_{B1} + 10 X_{B2} + 8 X_{B3} + 30 X_{B4} + 1 X_{C1} + 20 X_{C2} + 7 X_{C3} + 10 X_{C4}$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rcll} X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} & & & \leq 90 \\ & X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} & & \leq 40 \\ & & X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} & \leq 80 \\ X_{A1} & & + X_{B1} & + X_{C1} \geq 40 \\ & X_{A2} & & + X_{B2} & + X_{C2} \geq 60 \\ & & X_{A3} & & + X_{B3} & + X_{C3} \geq 50 \\ & & & X_{A4} & + X_{B4} & + X_{C4} \geq 60 \end{array}$$

Todas las variables no-negativas

## Ejemplo 2. Problema en un Sistema de Alquiler de Vehículos.

**“Al igual que se usa en sistemas de transporte, el Modelo de Transporte puede ser utilizado en otros sistemas y con otros objetivos.”**

Una empresa de alquiler de carros sirve a siete ciudades y presenta actualmente un exceso de carros en tres ciudades (C1, C2, C3) y una carencia de ellos en cuatro de las ciudades (D1, D2, D3 y D4). El exceso de carros: es de 20 en C1, 20 en C2 y 32 en C3. La escasez de carros es de 16 en D1, 20 en D2, 20 en D3 y 16 en D4.

La tabla o matriz de distancias en kilómetros, entre las ciudades se le presenta al finalizar el enunciado. Los valores de M representan distancias muy largas. Esto indica que no es posible transportar carros desde C1 hasta D4, ni desde C3 hasta D2 por alguna razón, por ejemplo, porque las vías están en reparación y no se permite el paso. (Si en la solución final aparece una cantidad de carros con ese costo será la confirmación de que no existe solución óptima posible para el modelo). Se desea determinar cómo distribuir los carros para satisfacer las restricciones y minimizar la distancia total recorrida.

|    | D1 | D2 | D3 | D4 |
|----|----|----|----|----|
| C1 | 17 | 23 | 20 | M  |
| C2 | 23 | 15 | 23 | 20 |
| C3 | 25 | M  | 13 | 21 |

### Variables de Decisión:

$X_{ij}$ : carros que deben recorrer los kilómetros desde la ciudad i hasta la ciudad j

$i = C1, C2, C3 \quad j = D1, D2, D3, D4$

$X_{C1D3}$ : carros que deben recorrer los kilómetros desde la ciudad C1 hasta la ciudad D3.

**Restricciones de Oferta:** Disponibilidades limitadas de carros en las 3 ciudades:

$$X_{C1D1} + X_{C1D2} + X_{C1D3} + X_{C1D4} \leq 20$$

$$X_{C2D1} + X_{C2D2} + X_{C2D3} + X_{C2D4} \leq 20$$

$$X_{C3D1} + X_{C3D2} + X_{C3D3} + X_{C3D4} \leq 32$$

Definición conceptual de una específica restricción de Oferta:

La segunda, por ejemplo: representa la suma de los carros que deben recorrer desde la ciudad C2 hasta las ciudades D1, D2 y D4. Esta suma debe ser menor o igual a la cantidad de carros que están disponibles en la ciudad C2. En este caso 20 carros.

**Restricciones de Demanda:** Requerimientos de carros en las 4 ciudades:

$$X_{C1D1} + X_{C2D1} + X_{C3D1} \geq 16$$

$$X_{C1D2} + X_{C2D2} + X_{C3D2} \geq 20$$

$$X_{C1D3} + X_{C2D3} + X_{C3D3} \geq 20$$

$$X_{C1D4} + X_{C2D4} + X_{C3D4} \geq 16$$

Definición conceptual de una específica restricción de demanda. La cuarta, por ejemplo:

Representa la suma de carros que han recorrido, o que deben recorrer hasta la ciudad D4 desde las ciudades C1, C2, C3, para satisfacer la demanda de esa ciudad. Esta suma debe ser mayor o igual a 16, que es la cantidad de carros demandados en la ciudad D4.

### Restricciones de no-negatividad de las variables:

Las variables están restringidas a ser no-negativas. Cantidades negativas, no existentes de carros, no pueden recorrer distancia alguna. Por eso, esta restricción acerca el modelo a la realidad.

**Función Objetivo:** Minimizar los KILOMETROS totales recorridos por los carros desde las 3 ciudades C1, C2 y C3 hasta 4 cuatro ciudades demandantes

$$\text{Min } 17 X_{C1D1} + 23 X_{C1D2} + 20 X_{C1D3} + M X_{C1D4} + 23 X_{C2D1} + 15 X_{C2D2} + 23 X_{C2D3} \\ + 20 X_{C2D4} + 25 X_{C3D1} + M X_{C3D2} + 13 X_{C3D3} + 21 X_{C3D4}$$

Representa la suma de los kilómetros totales recorridos por los carros desde todas las ciudades que tienen exceso de carros (C1, C2, C3) hasta todas las ciudades que tienen carencia de carros: (D1, D2, D3 y D4).

Por ejemplo,  $20 X_{C2D4}$  representa los kilómetros totales recorridos por todos los carros que van desde la ciudad C2 hasta la ciudad D4, estos son los subíndices. Donde 20 es la cantidad de kilómetros que recorre cada carro, desde la ciudad C2 hasta la ciudad D4.

Resumen del Modelo:

$$\text{Min } 17 X_{C1D1} + 23 X_{C1D2} + 20 X_{C1D3} + M X_{C1D4} + 23 X_{C2D1} + 15 X_{C2D2} + \\ 23 X_{C2D3} + 20 X_{C2D4} + 25 X_{C3D1} + M X_{C3D2} + 13 X_{C3D3} + 21 X_{C3D4}$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rcl} X_{C1D1} + X_{C1D2} + X_{C1D3} + X_{C1D4} & & \leq 20 \\ & X_{C2D1} + X_{C2D2} + X_{C2D3} + X_{C2D4} & \leq 20 \\ & & X_{C3D1} + X_{C3D2} + X_{C3D3} + X_{C3D4} \leq 32 \\ \\ X_{C1D1} + & X_{C2D1} + & X_{C3D1} & \geq 16 \\ & X_{C1D2} + & X_{C2D2} + & X_{C3D2} & \geq 20 \\ & & X_{C1D3} + & X_{C2D3} + & X_{C3D3} & \geq 20 \\ & & & X_{C1D4} + & X_{C2D4} + & X_{C3D4} & \geq 16 \end{array}$$

Todas las variables no negativas

**Nota:** Puede observar la característica esencial del Modelo de Transporte: “Coeficientes de las variables, en las restricciones, son 1 o cero”. Si desea simplificar los subíndices, puede utilizar sólo números, por ejemplo  $X_{14}$  en lugar de  $X_{C1D4}$ .

### Ejemplo 3.

#### Problema en un Sistema de Subasta de Tierras.

El Ministerio de Agricultura está subastando tierras en dos estados del país Lara y Cojedes. Están disponibles 100.000 hectáreas en cada Estado. Tres consorcios agrícolas 1,2 y 3, participan en la subasta. El Gobierno ha establecido que ninguno de los tres consorcios recibirá más del 40% del total de tierras que se están subastando. El consorcio 1 ha ofrecido Bolívares 1.000.000 por cada hectárea en el estado Lara y Bs. 2.000.000 por hectárea en el estado Cojedes. El consorcio 2 ha ofrecido Bs. 900.000 por hectárea en el estado Lara y Bs. 2.200.000 en Cojedes. El consorcio 3 ha ofrecido Bs. 1.100.000 por hectárea en Lara y 1.900.000 en Cojedes. El gobierno desea maximizar sus ingresos.

#### Variables de Decisión:

$X_{ij}$ : Hectáreas de tierra a subastar del estado  $i$  que se adjudicarán al consorcio  $j$

$$i = \text{Lara}(1), \text{Cojedes}(2) \quad j = 1,2,3.$$

Las variables son 6 en total (mxn) (2x3). Puede específicamente definirse, por ejemplo a:

$X_{13}$ : Hectáreas de tierra a subastar del estado Lara que se adjudicarán al consorcio 3.

**Restricciones de Oferta:** (2 restricciones) Disponibilidades limitadas de tierras en los 2 estados:

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} &\leq 100.000 && \text{hectáreas disponibles en Lara} \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} &\leq 100.000 && \text{hectáreas disponibles en Cojedes} \end{aligned}$$

Definición conceptual de una específica restricción de Oferta. La primera, por ejemplo:

Representa la suma de hectáreas a subastar del estado Lara que se adjudicarán al consorcio 1 ( $X_{11}$ ), más las que se adjudicarán al consorcio 2 ( $X_{12}$ ), más las que se adjudicarán al consorcio 3 ( $X_{13}$ ). Esta suma debe ser menor o igual a la cantidad de hectáreas disponibles en el estado Lara que en este caso es de 100.0000.

**Restricciones de Demanda:** Requerimientos de hectáreas de tierra por los tres consorcios.

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{21} &\geq 80.000 && \text{hectáreas} \\ X_{12} + X_{22} &\geq 80.000 && \text{hectáreas} \\ X_{13} + X_{23} &\geq 80.000 && \text{hectáreas} \end{aligned}$$

Definición conceptual de una específica restricción de demanda. La primera, por ejemplo:

Representa la suma de hectáreas de tierra del Estado Lara adjudicadas en la subasta al consorcio 1 ( $X_{11}$ ), más las hectáreas del Estado Cojedes adjudicadas al consorcio 1( $X_{12}$ ). Esta suma debe ser igual a la cantidad de hectáreas que demanda el consorcio 1. En este caso son 80.000 hectáreas por lo siguiente: en cada Estado no puede ser adjudicado más del 40% del total, esto hace un monto de 40.000 en cada estado y 80.000 en total en los dos Estados.

### Restricciones de no-negatividad de las variables:

Las variables están restringidas a ser no-negativas. No se pueden adjudicar cantidades negativas, no existentes, de tierra. Por eso, esta restricción acerca el modelo a la realidad.

**Función Objetivo:** Maximizar los Ingresos totales que obtiene el gobierno por las tierras.

$$\text{Max } 10 X_{11} + 9 X_{12} + 11 X_{13} + 20 X_{21} + 22 X_{22} + 19 X_{23}$$

Se ha simplificado, cambiando a Bs. 100.000, el monto a pagar por hectárea. Esto permite trabajar con montos menores.

Representa la suma de los ingresos totales del gobierno de todas las hectáreas de tierra subastadas en todos los Estados adjudicadas a todos los consorcios.

Así por ejemplo,  $20 X_{21}$  representa los ingresos totales de las tierras subastadas del Estado Cojedes adjudicadas al consorcio 1. Donde 20 es un ingreso unitario, específicamente el ingreso que proporciona cada hectárea de tierra del Estado Cojedes adjudicada al consorcio 1.

### Notas Finales:

Con este ejemplo puede constatar que los modelos de transporte también pueden ser usados con objetivos de maximización.

Resumiendo el modelo y colocando las variables en la posición de las variables similares, se puede observar más claramente la característica esencial que hace especial, al Modelo Lineal de Transporte: “Los coeficientes de las variables, en las restricciones, son 1 o cero”.

$$\text{Max } 10 X_{11} + 9 X_{12} + 11 X_{13} + 20 X_{21} + 22 X_{22} + 19 X_{23}$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rcl} X_{11} + X_{12} + X_{13} & & \leq 100.000 \\ & X_{21} + X_{22} + X_{23} & \leq 100.000 \\ X_{11} & + X_{21} & \geq 80.000 \\ & X_{12} & + X_{22} & \geq 80.000 \\ & & X_{13} & + X_{23} & \geq 80.000 \end{array}$$

Todas las variables no negativas

### III.B SECCION B. Solución de Modelos Lineales de Transporte. Uso de Programas de Computación.

#### III.B.1. Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de la solución de modelos de Programación Lineal de Transporte

1. El Método Simplex es un procedimiento de cálculo algebraico, iterativo, para resolver Modelos Lineales de cualquier tamaño. Por lo tanto, siendo lineales, los modelos de transporte pueden ser solucionados con este Algoritmo. Sin embargo, resulta ineficiente para su solución, sólo necesita observar la cantidad de 1 y 0 que tiene en la matriz de restricciones. Por ello, se creó el Algoritmo de Transporte para solucionarlos.
2. El Algoritmo de Transporte funciona, en forma general, igual al Algoritmo Simplex. Calcula una solución posible inicial, y determina si esa solución es óptima. Si no lo es, se mueve a un punto extremo adyacente en el conjunto convexo de soluciones posible y calcula la nueva solución en ese punto. Determina nuevamente si es o no óptima, si no lo es, repite el proceso anterior y así continúa sucesivamente hasta encontrar un punto extremo cuyo valor objetivo no pueda ser mejorado y allí concluye con la solución óptima.
3. La diferencia entre los algoritmos Simplex y de Transporte, radica en los cálculos matemáticos que realizan para encontrar la solución inicial y para determinar si la solución es o no óptima. Tiene mayor rapidez que el Simplex, requiere menos memoria en la computadora, por lo que permite resolver modelos más grandes, y produce soluciones enteras.
4. Para usar el Algoritmo de Transporte es necesario que las cantidades ofrecidas del bien o servicio sean iguales a las cantidades demandadas. Como esto no ocurre siempre en la práctica, se hace necesario **BALANCEAR** el modelo, es decir igualar las cantidades ofrecidas con las demandadas
5. Cuando la Oferta excede a la Demanda se debe crear un destino ficticio para que absorba la cantidad en exceso de la oferta. El costo de transporte unitario en ese destino será de valor cero puesto que realmente no se transportará ninguna cantidad del bien o servicio. Cualquier cantidad que quede en ese destino informará la cantidad del bien o servicio que ha quedado disponible, sin transportar, en el origen respectivo.

|         |   | Destinos |     |     |     |     |     |          |     |        |
|---------|---|----------|-----|-----|-----|-----|-----|----------|-----|--------|
|         |   | A        |     | B   |     | C   |     | Ficticio |     | Oferta |
| Origen  | 1 | X11      | c11 | X12 | c12 | X13 | c13 | X1f      | c1f | a1     |
|         | 2 | X21      | c21 | X22 | c22 | X23 | c23 | X2f      | c2f | a2     |
|         | 3 | X31      | c31 | X32 | c32 | X33 | c33 | X3f      | c3f | a3     |
| Demanda |   | b1       |     | b2  |     | b3  |     | ai-bj    |     |        |

6. Cuando la Demanda excede a la Oferta se debe crear un origen ficticio para que provea la cantidad en exceso de la demanda. El costo de transporte unitario en ese origen será de valor cero, ya que realmente no se transportará ninguna cantidad del bien o servicio desde ese origen, no existente en la realidad. Cualquier cantidad que quede en ese origen informará la cantidad del

bien o servicio que no se ha transportado al destino respectivo, es decir, la demanda que ha quedado insatisfecha en el destino respectivo.

|         |          | Destinos |     |     |     |     |     | Oferta                          |
|---------|----------|----------|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------------------|
|         |          | A        |     | B   |     | C   |     |                                 |
| Origen  | 1        | X11      | c11 | X12 | c12 | X13 | c13 | a1                              |
|         | 2        | X21      | c21 | X22 | c22 | X23 | c23 | a2                              |
|         | 3        | X31      | c31 | X32 | c32 | X33 | c33 | a3                              |
|         | Ficticio | Xf1      | cf1 | Xf2 | cf2 | Xf3 | cf3 | b <sub>j</sub> - a <sub>i</sub> |
| Demanda |          | b1       |     | b2  |     | b3  |     |                                 |

7. En algunos casos, el origen o destino ficticio podrá contener costos unitarios mayores que cero. Por ejemplo, cuando se tengan costos unitarios de mantener en inventario cada unidad no transportada, desde ese origen ficticio, y se desee minimizar, junto a los costos de transporte, el costo de mantener en inventario esas unidades no transportadas. Otro ejemplo se tendría cuando el demandante recarga un costo por cada unidad demandada y no transportada, y se desea minimizar, junto a los costos de transporte, el costo de la demanda insatisfecha.
8. Las TABLAS de Transporte son un resumen detallado de la información del modelo. Las restricciones de oferta se leen horizontalmente y las restricciones de demanda verticalmente.
9. Para calcular la solución inicial posible (que satisface todas las restricciones), el algoritmo tiene varios métodos, entre los cuales pueden citarse: a) Método de la Esquina Noroeste, b) Método del Costo Unitario Mínimo, y c) Método de Aproximación de Vogel o método VAM ( **V**ogel's **A**pproximation **M**ethod). Cada uno de ellos con aspectos particulares que los hacen menos o más eficientes en el propósito de obtener una solución inicial posible..
10. Para determinar si la solución es o no óptima utiliza también varios métodos como: a) Método Stepping Stone (no se acostumbra a usar la traducción al español) y b) Método de los Multiplicadores, basado en teoría de Dualidad, donde los multiplicadores en la tabla óptima corresponden a las variables duales.
11. Los coeficientes relativos son valores que indican en cuánto variaría el objetivo por cada unidad de incremento en el valor de la variable a la que corresponde ese coeficiente, si esa variable pasa a formar parte de una nueva solución. Se utilizan como criterio para determinar si la solución encontrada es óptima o no. Esto es válido también en Modelos de Transporte porque son también Modelos Lineales. La forma de calcularlos en este algoritmo es diferente a la usada en el Método Simplex y depende del método usado para determinar si la solución es o no es óptima.
12. Además de la Programación Lineal de Transporte se cuentan otras variaciones en Programación Lineal tales como son la Programación Lineal de Transbordo, Programación Lineal de Asignación, Programación Lineal Entera y Programación Lineal por Objetivos, cada una de las cuales utiliza un algoritmo propio para su solución.
13. Todos los algoritmos de solución se encuentran bien detallados en la bibliografía de Investigación de Operaciones y Técnicas o Métodos Cuantitativos en la administración.





Construidas las restricciones e incorporada la función Objetivo, el modelo formulado es el siguiente:

$$\text{Min } Z = 10X_{11} + 20X_{12} + 9X_{13} + 8X_{21} + 10X_{22} + 6X_{23} + 10X_{31} + 30X_{32} + 7X_{33}$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rcll} X_{11} + X_{12} + X_{13} & & & \leq 9.000 \\ & X_{21} + X_{22} + X_{23} & & \leq 4.000 \\ & & X_{31} + X_{32} + X_{33} & \leq 8.000 \\ X_{11} & + X_{21} & + X_{31} & \geq 6.000 \\ & X_{12} & + X_{22} & + X_{32} \geq 5.000 \\ & & X_{13} & + X_{23} & + X_{33} \geq 7.000 \end{array}$$

Todas las variables No-negativas

**Introducción del modelo** para su solución con el programa **LINGO**.

```
MIN = 10*X11+20*X12+19*X13+8*X21+10*X22+6*X23+10*X31+30*X32+7*X33;
```

```
X11+ X12+ X13 <= 9000;
X21+ X22+ X23 <= 4000;
X31+ X32+ X33 <= 8000;
X11+ X21+ X31 >= 6000;
X12+ X22+ X32 >= 5000;
X13+ X23+ X33 >= 7000;
```

### ***a) Solución del modelo con LINGO***

Global optimal solution found at step: 7  
Objective value: 169000.0

| Variable | Value     | Reduced Cost |
|----------|-----------|--------------|
| X11      | 5000.000  | 0.0000000    |
| X12      | 1000.000  | 0.0000000    |
| X13      | 0.0000000 | 12.00000     |
| X21      | 0.0000000 | 8.000000     |
| X22      | 4000.000  | 0.0000000    |
| X23      | 0.0000000 | 9.000000     |
| X31      | 1000.000  | 0.0000000    |
| X32      | 0.0000000 | 10.00000     |
| X33      | 7000.000  | 0.0000000    |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|-----|------------------|------------|
| 1   | 169000.0         | 1.000000   |
| 2   | 3000.000         | 0.0000000  |
| 3   | 0.0000000        | 10.00000   |
| 4   | 0.0000000        | 0.0000000  |
| 5   | 0.0000000        | -10.00000  |
| 6   | 0.0000000        | -20.00000  |
| 7   | 0.0000000        | -7.000000  |

Ranges in which the basis is unchanged:

| Variable | Objective Coefficient Ranges |                    |                    |
|----------|------------------------------|--------------------|--------------------|
|          | Current Coefficient          | Allowable Increase | Allowable Decrease |
| X11      | 10.00000                     | 8.000000           | 0.0                |
| X12      | 20.00000                     | 10.00000           | 8.000000           |
| X13      | 19.00000                     | INFINITY           | 12.00000           |
| X21      | 8.000000                     | INFINITY           | 8.000000           |
| X22      | 10.00000                     | 8.000000           | INFINITY           |
| X23      | 6.000000                     | INFINITY           | 9.000000           |
| X31      | 10.00000                     | 0.0                | 9.000000           |
| X32      | 30.00000                     | INFINITY           | 10.00000           |
| X33      | 7.000000                     | 9.000000           | 7.000000           |

#### Righthand Side Ranges

| Row | Current RHS | Allowable |          |
|-----|-------------|-----------|----------|
|     |             | Increase  | Decrease |
| 2   | 9000.000    | INFINITY  | 3000.000 |
| 3   | 4000.000    | 1000.000  | 3000.000 |
| 4   | 8000.000    | 5000.000  | 1000.000 |
| 5   | 6000.000    | 3000.000  | 5000.000 |
| 6   | 5000.000    | 3000.000  | 1000.000 |
| 7   | 7000.000    | 1000.000  | 5000.000 |

Los resultados analizados *se leen* en **LINGO** en la forma siguiente:

Las variables de decisión en la columna **VARIABLE** con el nombre de las  $X_{ij}$ . Los valores de las variables se obtienen al lado de esos nombres, en la columna **VALUE**.

El valor de la **Función Objetivo** se lee en “Objective Value”

La **holgura** de las restricciones se presenta en la columna **SLACK** or **SURPLUS** al lado de la fila correspondiente a cada restricción. Estos valores se inician en la fila 2, correspondiendo la fila 1 a la función objetivo. A partir de la fila 2 presenta primero la holgura de las restricciones de oferta y luego presenta la de las restricciones de demanda.

La única holgura mayor que cero, con valor de 3000 se lee en la columna correspondiente a la restricción 1. Esta restricción corresponde a la primera restricción de oferta. Se lee en la fila 2.

### INFORME DE RESULTADOS:

#### **Solución Óptima.**

El transporte óptimo del producto, que resulta de la solución, es el siguiente:

Del País 1 se debe transportar:

5000 unidades al almacén de la ciudad 1 y  
1000 unidades al almacén de la ciudad 2

Del País 2 se debe transportar:

4000 unidades al almacén de la ciudad 2

Del País 3 se debe transportar:

1000 unidades al almacén de la ciudad 1 y

7000 unidades al almacén de la ciudad 3

### **Función Objetivo:**

Este transporte minimizará los **costos totales de transporte** a un monto total de 169000 unidades monetarias.

### **Holguras.**

Del país 1 se transportan 6000 unidades del producto. Siendo 9000 unidades el total de su oferta, se concluye que le quedan disponibles, sin transportar por no existir demanda, 3000 unidades del producto. Esta cantidad representa la diferencia existente entre la totalidad de la oferta y la demanda del producto.

Esta cantidad representa la única holgura que tiene valor mayor que cero.

## **Ejemplo 2.**

### **Problema en un Sistema de Publicidad.**

Su empresa realiza la publicidad de sus productos con cuatro firmas que existen en el mercado: F1, F2, F3, y F4. Actualmente saca al mercado un nuevo producto y desea tener disponibles 30 unidades de publicidad en prensa, 15 en televisión, y 25 en radio, dentro de tres meses. Dado el tamaño de las firmas se espera que F1 pueda elaborar 15 unidades de publicidad en total, F2 puede elaborar 25 en total, F3 puede elaborar 10 en total y F4 puede elaborar 20 unidades de publicidad en total. Para determinar como realizar la publicidad al menor costo tiene las ofertas que presentaron esas firmas (en cientos de \$ por unidad de publicidad) y que se presentan a continuación:

|            | F1 | F2 | F3 | F4 |
|------------|----|----|----|----|
| Prensa     | 16 | 10 | 12 | 12 |
| Televisión | 26 | 20 | 30 | 21 |
| Radio      | 22 | 15 | 23 | 14 |

### **Formulación y Construcción del Modelo:**

**Función Objetivo:** Minimizar costos totales de la publicidad del producto que se realizará en tres medios publicitarios y será elaborada por 4 firmas existentes en el mercado.

**Variables de decisión:**  $X_{ij}$

$i$  = medios publicitarios 1, 2,3 = Prensa, Televisión, radio       $j$  = firmas 1,2,3 = F1, F2, F3, F4

$X_{ij}$  : unidades de publicidad a realizar en el medio publicitario  $i$  elaborada por la firma  $j$

$$\text{Min } Z = 16X_{11} + 10X_{12} + 12X_{13} + 12X_{14} + 26X_{21} + 20X_{22} + 30X_{23} + 21X_{24} + 22X_{31} + 15X_{32} + 23X_{33} + 14X_{34}$$

Donde, por ejemplo,  $30X_{23}$  es el resultado de multiplicar el costo de cada unidad de publicidad en televisión (30), por la cantidad total ( $X_{21}$ ) elaborada por la firma que tiene ese costo, que es la firma 2. Representa el costo total de las unidades de publicidad para televisión elaboradas por la firma 2

Restricciones de Oferta: Tres restricciones de oferta correspondientes a las unidades de publicidad que quiere tener disponibles su empresa en los tres medios: Prensa, televisión y radio.

Restricciones de Demanda: Cuatro restricciones de demanda correspondientes a las unidades de publicidad que puede elaborar cada una de las cuatro firmas y por lo tanto, demanda su elaboración.

Restricción de No- negatividad de las variables.

Puede observar, tal como lo explica la teoría de programación lineal de transporte (aparte 19), que los orígenes y destinos en este modelo pueden ser usados indistintamente.

En este caso se utilizaron los medios como orígenes y las firmas como destinos.

Las restricciones son:

$$\begin{array}{rcl}
 X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} & & \leq 30 \\
 & X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} & \leq 15 \\
 & & X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 25 \\
 X_{11} & + X_{21} & + X_{31} \geq 15 \\
 & X_{12} & + X_{22} & + X_{32} \geq 25 \\
 & & X_{13} & + X_{23} & + X_{33} \geq 10 \\
 & & & X_{14} & + X_{24} & + X_{34} \geq 20
 \end{array}$$

Todas las variables No-negativas

Conceptualmente, la primera restricción de oferta, por ejemplo, puede leerla de la manera siguiente:

Representa la suma de las unidades de publicidad a realizar en prensa elaboradas por la firma1 ( $X_{11}$ ), más las elaboradas por la firma2 ( $X_{12}$ ), más las elaboradas por la firma3 ( $X_{13}$ ), más las elaboradas por la firma4 ( $X_{14}$ ); esa suma debe ser menor o igual a la disponibilidad que quiere tener la empresa en el medio publicitario prensa, que es de 30 unidades de publicidad.

La cuarta restricción de demanda puede leerla conceptualmente de la siguiente manera:

Representa la suma de las unidades de publicidad elaboradas por la firma 4 para realizar en prensa ( $X_{41}$ ), en televisión ( $X_{42}$ ) y en radio ( $X_{43}$ ). Esa cantidad es mayor o igual a 20, que es la cantidad que demanda para elaborar la firma 4.

En el modelo elaborado, la cantidad de unidades de publicidad que quiere tener disponibles la empresa y las que pueden elaborar las firmas no es igual. Por lo tanto, para la solución del modelo

se debe incorporar un medio publicitario ficticio. La cantidad demandada por ese medio ficticio será de 10 unidades, es decir la cantidad en exceso de la demanda sobre la oferta.

Debe recordarse que cada modelo debe ser para un período específico, en este caso de tres meses. Esto como se lo indica la teoría general de Programación Lineal de Transporte, aparte 6.

#### a) Solución del Modelo con el programa What'sBest :

El programa **WHAT's BEST** elaborado por LINDO Systems para trabajar con el sistema operativo Windows, se usa para obtener la solución del modelo. Utiliza la hoja de cálculo que contiene los "solvers" o algoritmos de solución..

La forma en que fue elaborada la hoja de cálculo con la información del Modelo, antes de su solución, se muestra a continuación.

|    | A           | B  | C    | D      | E                  | F  | G      | H        | I  | J      | K        | L  | M      | N        | O | P     | Q          |
|----|-------------|--|------|--------|--------------------|----|--------|----------|----|--------|----------|----|--------|----------|---|-------|------------|
| 1  |             | Modelo de Transporte en un sistema de Publicidad |      |        |                    |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 2  |             |  |      |        |                    |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 3  | Unidades    |  |      |        |                    |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 4  | Publicidad  |  |      |        | Firmas Productoras |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       | Publicidad |
| 5  | en medio    |  | F1   |        | Cost               | F2 |        | Cost     | F3 |        | Cost     | F4 |        | Cost     |   |       | Publicidad |
| 6  | Prensa      |  | 0    |        | \$ 16.00           | 0  |        | \$ 10.00 | 0  |        | \$ 12.00 | 0  |        | \$ 12.00 | 0 | <=    | 30         |
| 7  | Televisión  |  | 0    |        | \$ 26.00           | 0  |        | \$ 20.00 | 0  |        | \$ 30.00 | 0  |        | \$ 21.00 | 0 | <=    | 15         |
| 8  | Radio       |  | 0    |        | \$ 22.00           | 0  |        | \$ 15.00 | 0  |        | \$ 23.00 | 0  |        | \$ 14.00 | 0 | <=    | 25         |
| 9  |             |  |      |        |                    |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 10 |             |  | 0    | Not >= | 15                 | 0  | Not >= | 25       | 0  | Not >= | 10       | 0  | Not >= | 20       |   |       |            |
| 11 |             |  |      |        |                    |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 12 |             |  |      |        |                    |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   | COSTO | TOTAL      |
| 13 |             |  | Cost | 0      |                    |    | 0      |          |    | 0      |          |    | 0      |          |   | 0     |            |
| 14 |             |  |      |        |                    |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 15 | Restricción |  |      |        | Variables Duales   |    |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 16 | Prensa      |  |      |        |                    | 0  |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 17 | Televisión  |  |      |        |                    | 0  |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 18 | Radio       |  |      |        |                    | 0  |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 19 | F1          |  |      |        |                    | 0  |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 20 | F2          |  |      |        |                    | 0  |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 21 | F3          |  |      |        |                    | 0  |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |
| 22 | F4          |  |      |        |                    | 0  |        |          |    |        |          |    |        |          |   |       |            |

Al igual que en una tabla de transporte, los **valores de las variables** se leen en los espacios correspondientes a las celdas donde convergen los orígenes: Prensa, Televisión, Radio con los destinos F1, F2, F3, F4.

El **costo total (función objetivo)**, se muestra en la celda que se encuentra debajo de su nombre.

Se muestran también todos los datos del modelo, incluidos costos unitarios, cantidad total de publicidad que se quiere disponible en los diferentes medios (oferta) y cantidad total de publicidad que puede elaborar cada firma (demanda).

También se muestran los **costos subtotales** de la publicidad, en las celdas D10, G10, J10 y M10, cuya suma determina el costo total de la publicidad.

Si se desea calcular el valor de las **variables duales**, se colocan las fórmulas necesarias para obtenerlas y se leen los valores en el sitio seleccionado para ello. Pueden calcularse posteriormente seleccionando “advanced” y “dual” en el programa What’sBest.

A continuación se presenta el modelo ya solucionado la en Hoja de Cálculo. Se ha permitido que el programa decida el algoritmo a utilizar.

|    | A           | B    | C   | D        | E  | F  | G        | H  | I  | J        | K   | L | M        | N  | O   | P     | Q          |
|----|-------------|------|-----|----------|----|----|----------|----|----|----------|-----|---|----------|----|-----|-------|------------|
| 2  |             |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 3  | Unidades    |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 4  | Publicidad  |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 5  | en medio    | F1   |     | Cost     | F2 |    | Cost     | F3 |    | Cost     | F4  |   | Cost     |    |     |       | Publicidad |
| 6  | Prensa      | 0    |     | \$ 16.00 | 20 |    | \$ 10.00 | 10 |    | \$ 12.00 | 0   |   | \$ 12.00 | 30 | =<= |       | 30         |
| 7  | Televisión  | 15   |     | \$ 26.00 | 0  |    | \$ 20.00 | 0  |    | \$ 30.00 | 0   |   | \$ 21.00 | 15 | =<= |       | 15         |
| 8  | Radio       | 0    |     | \$ 22.00 | 5  |    | \$ 15.00 | 0  |    | \$ 23.00 | 20  |   | \$ 14.00 | 25 | =<= |       | 25         |
| 9  |             |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 10 |             | 15   | =>= |          | 15 | 25 | =>=      |    | 25 | 10       | =>= |   | 10       | 20 | =>= |       | 20         |
| 11 |             |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 12 |             |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 13 |             | Cost |     | 390      |    |    | 275      |    |    | 120      |     |   | 280      |    |     | COSTO | TOTAL      |
| 14 |             |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     | 1065  |            |
| 15 | Restricción |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 16 | Prensa      |      |     |          |    |    | -10      |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 17 | Televisión  |      |     |          |    |    | 0        |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 18 | Radio       |      |     |          |    |    | -5       |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 19 | F1          |      |     |          |    |    | 26       |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 20 | F2          |      |     |          |    |    | 20       |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 21 | F3          |      |     |          |    |    | 22       |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 22 | F4          |      |     |          |    |    | 19       |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |
| 23 |             |      |     |          |    |    |          |    |    |          |     |   |          |    |     |       |            |

## INFORME de RESULTADOS.

### Solución.

La publicidad para **Prensa** debe ser elaborada de la forma siguiente:

20 Unidades de publicidad por la firma productora F2 y

10 Unidades de publicidad por la firma productora F3

La publicidad para **Televisión** debe ser elaborada de la forma siguiente:

15 Unidades de publicidad por la firma productora F1

La publicidad para **Radio** debe ser elaborada de la forma siguiente:

5 Unidades de publicidad por la firma productora F2 y  
20 Unidades de publicidad por la firma productora F4

### **Función Objetivo.-**

**Los costos mínimos totales** de esta publicidad tienen un monto de \$1065 (multiplicado por cien).

La cantidad de publicidad que se quiere tener disponible es igual a la cantidad que pueden elaborar las cuatro firmas existentes. Por lo tanto **no existe holgura** en las restricciones.

### **Ejemplo 3.**

#### **Problema en un sistema de subasta de tierras.**

Este problema es presentado en la sección A.1, ejemplo 3 de Formulación y Construcción de modelos de transporte. Es un problema de maximización y, como tal, ilustra casos de maximización con el uso de estos modelos.

El modelo formulado se muestra al inicio del formato de resultados. La solución del modelo se presenta a continuación y es obtenida usando el programa LINDO, y el programa QSB. Esto permite ilustrar los mismos resultados en formatos diferentes.

#### **a) Solución con el Programa LINDO.**

$$\text{MAX } 10X_{11} + 9X_{12} + 11X_{13} + 20X_{21} + 22X_{22} + 19X_{23} \\ 0X_{F1} + 0X_{F2} + 0X_{F3}$$

ST

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} < 100000$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} < 100000$$

$$X_{F1} + X_{F2} + X_{F3} < 40000$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{F1} > 80000$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{F2} > 80000$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{F3} > 80000$$

END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 10

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3240000.

| VARIABLE        | VALUE        | REDUCED COST |
|-----------------|--------------|--------------|
| X <sub>11</sub> | 20000.000000 | 0.000000     |
| X <sub>12</sub> | 0.000000     | 3.000000     |
| X <sub>13</sub> | 80000.000000 | 0.000000     |
| X <sub>21</sub> | 20000.000000 | 0.000000     |
| X <sub>22</sub> | 80000.000000 | 0.000000     |
| X <sub>23</sub> | 0.000000     | 2.000000     |
| X <sub>F1</sub> | 40000.000000 | 0.000000     |
| X <sub>F2</sub> | 0.000000     | 2.000000     |
| X <sub>F3</sub> | 0.000000     | 1.000000     |

| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES |
|-----|------------------|-------------|
| 2)  | 0.000000         | 12.000000   |
| 3)  | 0.000000         | 22.000000   |
| 4)  | 0.000000         | 2.000000    |
| 5)  | 0.000000         | -2.000000   |
| 6)  | 0.000000         | 0.000000    |
| 7)  | 0.000000         | -1.000000   |

NO. ITERATIONS= 10

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:  
OBJ COEFFICIENT RANGES

| VARIABLE        | CURRENT COEF | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
|-----------------|--------------|--------------------|--------------------|
| X <sub>11</sub> | 10.000000    | 1.000000           | 1.000000           |
| X <sub>12</sub> | 9.000000     | 3.000000           | INFINITY           |
| X <sub>13</sub> | 11.000000    | 1.000000           | 1.000000           |
| X <sub>21</sub> | 20.000000    | 1.000000           | 2.000000           |
| X <sub>22</sub> | 22.000000    | INFINITY           | 1.000000           |
| X <sub>23</sub> | 19.000000    | 2.000000           | INFINITY           |
| X <sub>F1</sub> | 0.000000     | INFINITY           | 1.000000           |
| X <sub>F2</sub> | 0.000000     | 2.000000           | INFINITY           |
| X <sub>F3</sub> | 0.000000     | 1.000000           | INFINITY           |

RIGHTHAND SIDE RANGES

| ROW | CURRENT RHS   | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
|-----|---------------|--------------------|--------------------|
| 2   | 100000.000000 | 20000.000000       | 0.000000           |
| 3   | 100000.000000 | INFINITY           | 0.000000           |
| 4   | 40000.000000  | 20000.000000       | 0.000000           |
| 5   | 80000.000000  | 0.000000           | 20000.000000       |
| 6   | 80000.000000  | 0.000000           | INFINITY           |
| 7   | 80000.000000  | 0.000000           | 20000.000000       |



El programa LINDO se usa para resolver modelos lineales generales. Puede solucionar también modelos de transporte.

Se observa que el modelo planteado para su solución, es un **Modelo de Transporte** ya **balanceado**. En este problema la demanda supera a la oferta y se agrega un origen ficticio. Por lo tanto, debe incluir los orígenes o destinos ficticios donde sean necesarios.

Resuelve el modelo en **10 iteraciones**. Esto demuestra que realiza más trabajo que el algoritmo de transporte para obtener la solución. El algoritmo de transporte usado en QSB resuelve el modelo en la **primera solución**, usando el método VAM. Esta diferencia, cuando se trabaja en modelos pequeños, no es importante.

## b) Solución del Modelo con el Programa QSB.

Este programa fue creado para solucionar modelos lineales de transporte. Permite seleccionar el método para encontrar la solución inicial. En este caso particular, se seleccionó el método VAM. Los resultados obtenidos los muestra en un resumen (Summary of results). El nombre Terra le fue dado para efectos de guardarlo en el archivo. También puede mostrar los resultados en forma de Tabla de transporte. Ambos se presentan a continuación.

Final tableau (Total iterations = 0) by VAM

| SN \ DN         | C1             | C2             | C3             | Supplies | U(i)   |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--------|
| Lara            | 10.00          | 9.000          | 11.00          | 100000   | 0      |
|                 | 20000          |                | 80000          |          |        |
| Cjedes          | 20.00          | 22.00          | 19.00          | 100000   | 10.00  |
|                 | 20000          | 80000          |                |          |        |
| Dummy           | 0              | 0              | 0              | 40000    | -10.00 |
|                 | 40000          |                |                |          |        |
| Demands<br>V(j) | 80000<br>10.00 | 80000<br>12.00 | 80000<br>11.00 |          |        |

Maximum Value of OBJ = 3240000 with multiple optimals.

| Summary of Results for terra                                   |    |          |         |         |          |    |          |         |         |
|--|----|----------|---------|---------|----------|----|----------|---------|---------|
|  |    |          |         |         | Page : 1 |    |          |         |         |
| From   | To | Shipment | @ prft. | Opp.Ct. | From     | To | Shipment | @ prft. | Opp.Ct. |
| Lara   | C1 | +20000   | +10.000 | 0       | Cjedes   | C3 | 0        | +19.000 | -2.0000 |
| Lara   | C2 | 0        | +9.0000 | -3.0000 | Dummy    | C1 | +40000   | 0       | 0       |
| Lara   | C3 | +80000   | +11.000 | 0       | Dummy    | C2 | 0        | 0       | -2.0000 |
| Cjedes   | C1 | +20000   | +20.000 | 0       | Dummy    | C3 | 0        | 0       | -1.0000 |
| Cjedes   | C2 | +80000   | +22.000 | 0       |          |    |          |         |         |
| Maximum value of OBJ = 3240000 (multiple sols.) Iterations = 0 |    |          |         |         |          |    |          |         |         |

El programa QSB, ya instalado en la computadora, solicita la información para la introducción de datos a través de preguntas. Una vez completada la entrada del modelo, presenta opciones diversas incluyendo la de solucionar el modelo.

La primera solución posible fue óptima. Por ello aparece señalando 0 iteraciones.

Los resultados muestran los valores de las variables de decisión, el valor del objetivo y las variables duales.

Los valores de las variables se observan en los espacios correspondientes a las celdas donde los orígenes: Lara, Cojedes y el origen ficticio “Dummy”, **agregado por el programa**, convergen con los destinos: C1,C2,C3. Estos son los nombres que se le han dado a los orígenes y destinos en el modelo a solucionar con este programa.

Los datos de costos unitarios, cantidad total de tierras que se tiene disponible en los diferentes estados (oferta) y cantidad total de cantidad total de tierras que demanda cada consorcio, así como los costos unitarios se muestran en la tabla, conjuntamente con la solución.

## INFORME DE RESULTADOS.

### **Solución Óptima:**

La subasta de tierras que proporciona la solución es la siguiente:

De las tierras del Estado Lara se otorgarán: 20000 hectáreas al Consorcio 1 y  
80000 hectáreas al consorcio 3  
De las tierras del Estado Cojedes se otorgarán: 20000 hectáreas al Consorcio 1 y  
80000 hectáreas al consorcio 2

Se lee en **LINDO** en la columna “VALUE” correspondiente a las variables X<sub>11</sub> hasta la X<sub>23</sub>.

Se leen en **QSB**, en la tabla que presenta un sumario, en las columnas correspondientes a cada Estado, indicado con su nombre y cada consorcio indicados como C1, C2 y C3. El monto de la variable se informa en la columna “Shipment”. De igual manera pueden leerse en la tabla de transporte en las celdas donde converge cada Estado con cada consorcio.

**Holguras:**

De las 80000 hectáreas que demanda el Consorcio 1 sólo se le otorgan 40000, por lo que aparece una demanda insatisfecha de 40000 hectáreas para ese Consorcio 1.

Se leen en **LINDO** en la columna “VALUE” correspondiente a las variables  $X_{F1}$  hasta la  $X_{F3}$ .

Se leen en **QSB**, en la tabla que presenta un sumario y en la tabla de transporte, en las columnas y celdas correspondientes al origen ficticio “dummy”

**Función Objetivo.-**

**El Ingreso máximo** obtenido es de 3240000 (multiplicado por 100000)

Se lee en **LINDO**, en “objective function value”

### III.C SECCION C. Análisis de Sensibilidad de la Solución Óptima y Dualidad en Modelos Lineales de Transporte

#### III.C.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de análisis de sensibilidad en Programación Lineal de Transporte

1. El Análisis de sensibilidad de la solución, así como los conceptos de teoría de Dualidad estudiados en Programación Lineal General, también se aplican en los modelos Lineales de Transporte. Se repasarán sólo algunos puntos.
2. Cuando cambia un número (insumo del modelo, tal como un coeficiente o parámetro) o un lado derecho de una restricción, el análisis de sensibilidad de la solución muestra un rango de valores dentro de los cuales ese número puede cambiar sin cambiar la solución básica obtenida.
3. Cuando ocurren cambios en el número de variables (aparece una nueva restricción o cambian todos los coeficientes en el objetivo), el análisis de sensibilidad indicará el efecto que esto ocasiona sobre la solución básica.
4. Debe recordar que el análisis se refiere a la sensibilidad de la solución básica óptima, no a la sensibilidad de un coeficiente o de una restricción.
5. La Dualidad en Programación Lineal tiene su esencia en el hecho de existir dos modelos lineales, cuando se ha planteado sólo uno para resolver un problema específico.
6. El modelo Lineal asociado al Modelo Lineal Original o Principal se denomina Modelo Dual. Cuando se soluciona uno de ellos se obtiene al mismo tiempo la solución para el otro.
7. La solución del Modelo Dual provee información para la decisión que se tomará con la solución del modelo original.
8. Cada variable Dual informa en cuánto variará la función objetivo del modelo original por cada unidad en que se incremente el lado derecho de la restricción, del modelo original, a la que se refiere esa variable dual. Esto permite determinar la conveniencia o no de incrementar un determinado lado derecho de una restricción.
9. Los incrementos permitidos, en el lado derecho de las restricciones, los informará el rango dado por el análisis de sensibilidad de la solución cuando estos elementos cambian. Más allá de esos montos, la solución básica cambiará.
10. Las variables duales son válidas sólo para la respectiva solución básica óptima. Si la solución básica óptima cambia, las variables duales cambian. Sólo en un mínimo número de casos permanecen con sus valores.

### ***III. C.2 Práctica de Análisis de Sensibilidad y Dualidad en Modelos Lineales de Transporte.***

#### **Ejemplo 1.**

##### **Problema en un Sistema de Transporte.**

A continuación, se analizan los resultados para el modelo formulado y solucionado en la sección III. B.2, ejemplo 1, correspondiente a un problema en un sistema de transporte.

El programa de computadora utilizado es **LINGO**. Este programa presenta los resultados en forma similar a los que presenta el programa LINDO. Los programas QSB y WHAT'SBEST no presentan análisis de sensibilidad. En el Programa WHAT'SBEST se permite hacer cambios en el modelo sobre la hoja de cálculo y al resolver nuevamente proporciona los efectos obtenidos sobre la solución óptima. En los modelos utilizados en la enseñanza toma sólo segundos de tiempo el proceso de resolver nuevamente el modelo.

El **análisis de sensibilidad** de la solución en los resultados obtenidos con LINGO, se lee en: "RANGES in wich the BASIS is UNCHANGED", es decir, RANGOS dentro de los cuales la solución Básica no cambia.

Se lee para los rangos de los coeficientes de la función Objetivo en "Objective coefficients ranges", donde presenta los incrementos y decrecimientos permitidos en "allowable Increase" y allowable decrease" para el coeficiente actual o "current coef".

También se lee para los rangos del lado derecho de las restricciones en "Right hand side ranges", presentando los incrementos y decrecimientos permitidos para el lado derecho que tienen actualmente las restricciones.

Las **variables Duales** se leen en la columna correspondiente a "Dual price", mostrando el valor de la primera variable dual, en la fila dos. La primera fila corresponde a la función Objetivo.

### **INFORME DE RESULTADOS**

En el informe, del análisis de sensibilidad de la solución, se presentarán solamente los resultados para las siguientes situaciones: a) cambia un coeficiente de la Función Objetivo; b) cambia un lado derecho de una restricción de oferta; c) cambia un lado derecho de una restricción de Demanda.

Al igual que en el programa LINDO, los límites inferior y superior de los rangos de variación que se obtienen en este análisis, deben calcularse sumando y restando los incrementos y decrecimientos permitidos, respectivamente.

El informe de resultados para las variables duales se presentará para la variable dual de una sola restricción.

El análisis de sensibilidad de la solución cuando cambian los demás coeficientes y los demás lados derechos de restricciones, así como la interpretación de las demás variables duales, es similar.

**a) Cambia un coeficiente de la Función Objetivo.**

Ranges in which the basis is unchanged:

| Objective Coefficient Ranges |                     |                    |                    |
|------------------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| Variable                     | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
| X32                          | 30.00000            | INFINITY           | 10.00000           |

Del resultado anterior se calcula el siguiente rango para el costo unitario de transporte desde el País 3 hasta el almacén de la Ciudad 2:

$$20 \leq C_{32} \leq \infty$$

Este rango informa que el costo de transporte de cada unidad de producto desde el país 3, nombrado en el análisis de sensibilidad como A3, para ser enviado hasta el almacén de la ciudad 2, D2, puede variar entre 20 e  $\infty$  y la solución básica seguirá siendo la misma. El límite superior se explica por si solo, si en esta solución básica no se transporta alguna cantidad desde ese origen hasta ese destino, al subir ese costo unitario, mucho menos se recomendará transportar cantidad alguna hasta ese destino.

Dentro de ese rango, el valor de los costos totales de transporte (Función Objetivo) no variará, puesto que no se transportará cantidad alguna que incida sobre los costos totales.

**b) Cambia un lado derecho de una restricción de oferta.**

| Righthand Side Ranges |             |                    |                    |
|-----------------------|-------------|--------------------|--------------------|
| Row                   | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
| 3                     | 4000.000    | 1000.000           | 3000.000           |

Calculando el rango para el lado derecho de la restricción 2 de Oferta, se obtiene:

$$1000 \leq a_2 \leq 5000$$

Este rango informa que la cantidad disponible, para ser transportada, en el país 2 puede variar entre 1000 y 5000 y la solución básica actual permanecerá igual.

**c) Cambia un lado derecho de una restricción de Demanda.**

| Righthand Side Ranges |             |                    |                    |
|-----------------------|-------------|--------------------|--------------------|
| Row                   | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
| 7                     | 7000.000    | 1000.000           | 5000.000           |

El rango calculado para el lado derecho de la restricción 3 de Demanda es el siguiente:

$$2000 \leq b_3 \leq 8000$$

Es decir, la cantidad demandada en el almacén de la ciudad 3 puede variar entre 2000 y 8000. Dentro de ese rango la solución básica actual permanecerá igual

**Variable Dual correspondiente a la segunda restricción de Demanda:**  $V_2 = -20$

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|-----|------------------|------------|
| 6   | 0.0000000        | -20.00000  |

Este valor informa que por cada unidad en que se incremente la cantidad demandada en el almacén de la ciudad 2, los costos totales de transporte se incrementarán en 20 unidades monetarias, siempre y cuando esa unidad extra sea realmente transportada. **En los resultados de este programa los precios duales que aparecen con valores negativos se leen desmejorando el valor del objetivo.**

Ud. puede verificar que esos valores son realmente las variables duales, comprobando que el valor de la función objetivo dual tiene el mismo valor de la función objetivo original. Así, siendo  $U_i$  y  $V_j$  las variables duales de las restricciones de oferta y demanda respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Función Objetivo Dual: } & 9000U_1 + 4000U_2 + 8000U_3 + 6000V_1 + 5000V_2 + 7000V_3 + 3000V_f \\ & = 9000(0) + 4000(-10) + 8000(0) + 6000(10) + 5000(20) + 7000(7) + 3000(0) \\ & = 169000 \end{aligned}$$

Luego, siendo el valor de la Función Objetivo Original igual al de la Función Objetivo Dual se concluye que ambas soluciones son óptimas y que por lo tanto los  $U_i$  y  $V_j$  son las variables duales.

## Ejemplo 2.

### Problema en un Sistema de Publicidad

Este modelo fue formulado y solucionado en la sección III.B.2, ejemplo 2 de la Práctica de Solución de Modelos de Transporte.

El **Análisis de Sensibilidad** lo puede hacer directamente en la solución encontrada, sobre la hoja de cálculo del programa What'sBest. Efectúa cambios en algún elemento del modelo y lo resuelve de nuevo. Este proceso es sumamente rápido. Al hacerlo podrá observar los cambios efectuados a la solución básica previamente obtenida.

Puede efectuar cambios en los costos unitarios de publicidad, en la cantidad de publicidad que se quiere disponible en los diferentes medios, o en la cantidad de publicidad que pueden elaborar las firmas. Al resolver nuevamente el modelo obtendrá los resultados rápidamente. En ellos podrá observar si la solución óptima o los costos óptimos han cambiado o no. Es decir, los efectos que ese cambio tiene sobre la solución básica encontrada.

La **dualidad** se analiza brevemente a continuación.

|    |             |  |  |                  |     |
|----|-------------|--|--|------------------|-----|
| 15 | Restricción |  |  | Variables Duales |     |
| 16 | Prensa      |  |  |                  | -10 |
| 17 | Televisión  |  |  |                  | 0   |

En la hoja de cálculo con la solución del modelo se observa el valor de la variable dual para la primera restricción de oferta tiene valor  $-10$  e informa que por cada unidad de publicidad en que se incremente la cantidad, que se quiere tener disponible en Prensa, los costos totales de la publicidad disminuirán en 10. Esto es así siempre y cuando, esa unidad de publicidad extra esté realmente disponible.

De igual modo se obtienen en la hoja de cálculo, los valores para todas las variables duales. Por ejemplo, la variable dual para la tercera restricción de demanda tiene valor 22 e informa que por cada unidad de publicidad en que se incremente la cantidad que puede elaborar la firma 3, los costos totales de la publicidad se incrementarán en 22, siempre y cuando esa unidad extra de publicidad sea realmente elaborada.

Si desea **verificar** que las **variables duales son efectivamente óptimas**, puede construir la función Objetivo Dual del modelo y sustituir estos valores en ella.

Si el valor de esa función es igual al valor de la función Objetivo original, se concluirá que son óptimas tanto la solución del modelo original como la del modelo dual.

$$\text{Función Objetivo Dual: } 30U_1 + 15U_2 + 25U_3 + 15V_1 + 25V_2 + 10V_3 + 20V_4$$

Sustituyendo en ella los valores de las variables duales se obtiene:

$$30(-10) + 15(0) + 25(-5) + 15(26) + 25(20) + 10(22) + 20(19) = 1065$$

El valor de la Función Objetivo original es de: 1065

Al ser iguales los valores de las dos funciones objetivo, original y dual, queda demostrado que ambas soluciones son óptimas para sus respectivos modelos.



### Ejemplo 3.

#### Problema en un Sistema de Subasta de Tierras.

Este modelo fue formulado y construido en la sección III.A.2, ejemplo 3. Su solución se obtiene en la sección III. B.2, ejemplo3.

El programa QSB no proporciona Análisis de Sensibilidad de la Solución para modelos de Transporte.

El programa **LINDO** proporciona el siguiente Análisis de Sensibilidad de la Solución.

Los resultados del **análisis de sensibilidad** de la solución se leen en: “RANGES in wich the BASIS is UNCHANGED”, es decir, RANGOS dentro de los cuales la solución Básica no cambia.

Se obtienen los rangos de los coeficientes de la función Objetivo en “Objective coefficients ranges”. Presenta los incrementos y decrecimientos permitidos en “allowable Increase” y allowable decrease” para el coeficiente actual o “current coef”.

También se obtienen los rangos del lado derecho de las restricciones en “Right hand side ranges”, presentando los incrementos y decrecimientos permitidos para el lado derecho que tienen actualmente las restricciones.

En ambos casos debe sumar los incrementos y restar los decrecimientos permitidos, para obtener los límites superior e inferior de los rangos respectivos.

Las **variables duales** se leen en la columna correspondiente a “Dual price”, mostrando el valor de la primera variable dual, en la fila dos. La primera fila corresponde a la función Objetivo.

En la solución proporcionada por el programa **QSB** se leen en los resultados mostrados en la Tabla final en la fila con el nombre Vj conteniendo las variables duales correspondientes a las restricciones de demanda y en la columna Ui con contenido de las variables duales correspondientes a las restricciones de oferta

### INFORME DE RESULTADOS

En el informe del Análisis de Sensibilidad de la solución, se presentan solamente los resultados para las situaciones cuando: a) Cambia un coeficiente de la Función Objetivo; b) Cambia un lado derecho de una restricción de oferta; c) Cambia un lado derecho de una restricción de Demanda.

El informe de resultados para las variables duales se presentará para la variable dual de una sola restricción de oferta y para una de demanda.

El análisis de sensibilidad de la solución cuando cambian los demás coeficientes y los demás lados derechos de restricciones, así como la interpretación de las demás variables duales, es similar.

**a) Cambia un coeficiente de la Función Objetivo**

Rango obtenido para el ingreso unitario de cada hectárea del Estado Lara otorgada al Consorcio 3:

| VARIABLE        | CURRENT<br>COEF | ALLOWABLE<br>INCREASE | ALLOWABLE<br>DECREASE |
|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| X <sub>13</sub> | 11.000000       | 1.000000              | 1.000000              |

Del resultado anterior se calcula el siguiente rango para el coeficiente de la variable X<sub>13</sub>.

$$10 \leq CX_{13} \leq 12$$

Este rango le informa que el ingreso de cada hectárea del Estado Lara otorgada al consorcio 3, puede variar entre 10 y 12 y la solución básica seguirá siendo la misma. Dentro de ese rango el valor de los ingresos totales (función objetivo) puede variar dependiendo del valor que tome ese ingreso unitario dentro de ese rango.

**b) Cambia un lado derecho de una Restricción de Oferta**

| ROW | CURRENT<br>RHS | ALLOWABLE<br>INCREASE | ALLOWABLE<br>DECREASE |
|-----|----------------|-----------------------|-----------------------|
| 2   | 100000.000000  | 20000.000000          | 0.000000              |

Del resultado anterior se calcula el siguiente rango para el lado derecho de la restricción 1 de Oferta:

$$100000 \leq a_1 \leq 120000$$

Esto quiere decir que la cantidad de hectáreas que están disponible, para ser subastadas, en el Estado Lara puede variar entre 100000 y 120000 y la solución básica actual permanecerá igual

**c) Cambia un lado derecho de una Restricción de Demanda.**

| ROW | CURRENT<br>RHS | ALLOWABLE<br>INCREASE | ALLOWABLE<br>DECREASE |
|-----|----------------|-----------------------|-----------------------|
| 6   | 80000.000000   | 0.000000              | INFINITY              |

Del resultado anterior, se calcula el rango para el lado derecho de la restricción 2 de Demanda y se obtiene:

$$-\infty \leq b_2 \leq 80000$$

Esto nos informa que la cantidad de hectáreas demandadas por el consorcio 2 puede variar entre  $-\infty$  y 80000. Dentro de ese rango, la solución básica actual permanecerá igual.

**Variable dual correspondiente a la primera restricción de Oferta:**  $U_1 = 12$

| ROW | DUAL PRICES |
|-----|-------------|
| 2)  | 12.000000   |

Este valor informa que por cada unidad en que se incremente la cantidad disponible de hectáreas en el Estado Lara, los ingresos totales (F.O.) aumentarán en 12 unidades monetarias.

**Variable dual correspondiente a la tercera restricción de Demanda:**  $V_3 = -1$

| ROW | DUAL PRICES |
|-----|-------------|
| 7)  | -1.000000   |

Este valor informa lo siguiente: “por cada hectárea en que se incremente la cantidad demandada por el consorcio 3, los ingresos totales de se incrementarán en 1 unidad monetaria, siempre y cuando esa hectárea extra sea realmente otorgada”.

En los resultados del Programa QSB, estas variables duales son mostradas en la columna “opportunity cost” de la tabla con el sumario de resultados.

Son los  $U_i$  y  $V_j$  que se muestran en la Tabla de transporte de los resultados obtenidos con el mismo Programa QSB.

### **Verificación de que los valores $U_i$ y $V_j$ son efectivamente las variables duales óptimas.-**

Debe calcularse el valor de la función objetivo Dual:

Función Objetivo Dual:

$$\text{Min } 100000 U_1 + 100000 U_2 + 40000 U_f + 80000 V_1 + 80000 V_2 + 80000 V_3$$

Sustituyendo los valores de  $U_i$  y  $V_j$  en esa función, se obtiene:

$$\text{Min } 100000(12) + 100000(22) + 40000(2) + 80000(-2) + 80000(0) + 80000(-1) = 3240000$$

El valor obtenido para la función Objetivo del modelo Dual es de 3240000.

Este valor es igual al valor de la función objetivo original. Por lo tanto, al verificar esto, queda demostrado que ambas soluciones, la del modelo original y la del dual son soluciones óptimas para sus respectivos modelos.

## CAPITULO IV

### PERT- CPM

**Objetivo:** *Proponer fechas de iniciación y finalización para las actividades de un proyecto, de tal manera que éste se ejecute en el menor tiempo posible, mediante la aplicación de la teoría y práctica de la Técnica de PERT- CPM.*

#### IV.A SECCION A. TÉCNICAS DE REDES. PERT-CPM

##### IV.A.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría de PERT-CPM

1. PERT y CPM son técnicas cuantitativas para manejar proyectos con el enfoque analítico de la investigación de operaciones. PERT corresponde a las siglas en inglés de: Técnicas de Revisión y Evaluación de Programas (**P**rogram **E**valuation and **T**echnique **R**eview ) y CPM corresponde a siglas de: Método del Camino Crítico ( **C**ritical **P**ath **M**ethod ).
2. PERT fue creado por una firma asesora de la marina norteamericana para el desarrollo del proyecto Polaris, no ejecutado con anterioridad. CPM fue desarrollado por los investigadores Du Pont y Sperry Rand para proyectos de construcción, que se han ejecutado siempre. De allí surgen diferencias iniciales que existieron en ambas técnicas.
3. PERT usa tiempos probabilísticos en proyectos que no se han ejecutado nunca o se han ejecutado pocas veces. CPM usa tiempos determinísticos o conocidos, debido a que proyectos similares se han ejecutado muchas veces. Pero ambas técnicas de manejo de proyectos tienen el mismo objetivo, que es ahorrar el mayor tiempo posible en la ejecución de un proyecto; es decir, son técnicas tiempo- orientadas.
4. Estas técnicas están incluidas dentro de las técnicas de Redes porque los modelos utilizados son REDES. Es decir, cada proyecto se representa con una red.
5. Ambas técnicas han sido usadas exitosamente en: a) Proyectos de construcción tales como edificios, autopistas, puentes, piscinas y casas, b) Instalación de nuevos sistemas en computadoras, c) Diseño y mercadeo de nuevos productos, d) Realización de fusiones en corporaciones, e) Construcción de barcos, f) Mudanzas de grandes empresas a otras localizaciones, g) Mantenimiento de grandes refinerías.
6. El manejo de un proyecto con PERT-CPM puede considerarse didácticamente dividido en tres fases: Planeamiento, Programación y Control.
7. Planeamiento es la fase en la cual se divide un proyecto en actividades; se establece el tiempo necesario para ejecutarlas, se determinan las relaciones de precedencia entre ellas y se concluye

con la elaboración del **modelo** del proyecto llamado Diagrama de Flechas o Red del Proyecto. Por eso, la técnica está incluida dentro de las técnicas de redes.

8. Programación es la fase equivalente, en el Análisis Cuantitativo, a la solución del modelo. En ella se calculan los tiempos de ocurrencia de los eventos, los tiempos más tempranos y más tardes de iniciación y finalización de las actividades. Se calculan las holguras de tiempo disponible y se aíslan las Actividades Críticas, con holgura cero, que conformarán el Camino Crítico de la Red. Todo ello se muestra en los Programas de Tiempos de Ocurrencia de Eventos y de Ejecución de Actividades.
9. El Camino Crítico de una Red es un camino conformado por actividades en secuencia en la red. Dichas actividades tienen la mayor duración total de tiempos de ejecución. La importancia de una actividad crítica radica en el hecho de que su retraso en el tiempo programado para ejecutarla, retrasará todo el proyecto.
10. La etapa de Control corresponde a la etapa de supervisión ejecutada en cualquier actividad administrativa. En PERT-CPM se realiza utilizando lo obtenido en etapas previas; es decir, el Diagrama de Flechas y el Programa de Tiempos de Ejecución de las Actividades. No puede planearse y programarse sin realizar la supervisión necesaria que garantice el cumplimiento de lo establecido.
11. Un Diagrama de Flechas o Red del Proyecto o Modelo del Proyecto se elabora con los elementos siguientes:
  - a) Arcos de flecha o segmentos continuos de línea ( \_\_\_\_\_ ), cada uno de los cuales representa a una única actividad del proyecto.
  - b) Puntas de las flechas ( > ) que representan la secuencia en que deben ser ejecutadas las actividades del proyecto.
  - c) Nudos ( O ) circulares o nodos, que representan el momento o la fecha calendario en que han concluido las actividades que concurren a él, y pueden ser iniciadas las actividades siguientes en la secuencia establecida. Se les denomina “Eventos”.
  - d) Actividades ficticias. Estas no consumen tiempo ni recursos; se representan con segmentos de línea entrecortada para diferenciarlas de las actividades reales ( ----- )
  - e) Numeración de eventos que debe ser progresiva y continua. Sobre la Red deben colocarse también los tiempos necesarios para ejecutar cada actividad.
12. Las actividades ficticias se usan por las razones siguientes: a) Para evitar que dos o más actividades tengan el mismo Evento inicial y final y b) Para representar relaciones de precedencia que de otra manera no pueden ser representadas. Una red puede contener cualquier cantidad de actividades ficticias. Una red bien elaborada debe contener el mínimo necesario de este tipo de actividades.
13. Las actividades del proyecto deben ejecutarse en un orden determinado y eso está representado en las relaciones de precedencia. Las precedencias son siempre precedencias directas.
14. En PERT se asume que los tiempos de ejecución de las actividades son completamente independientes.

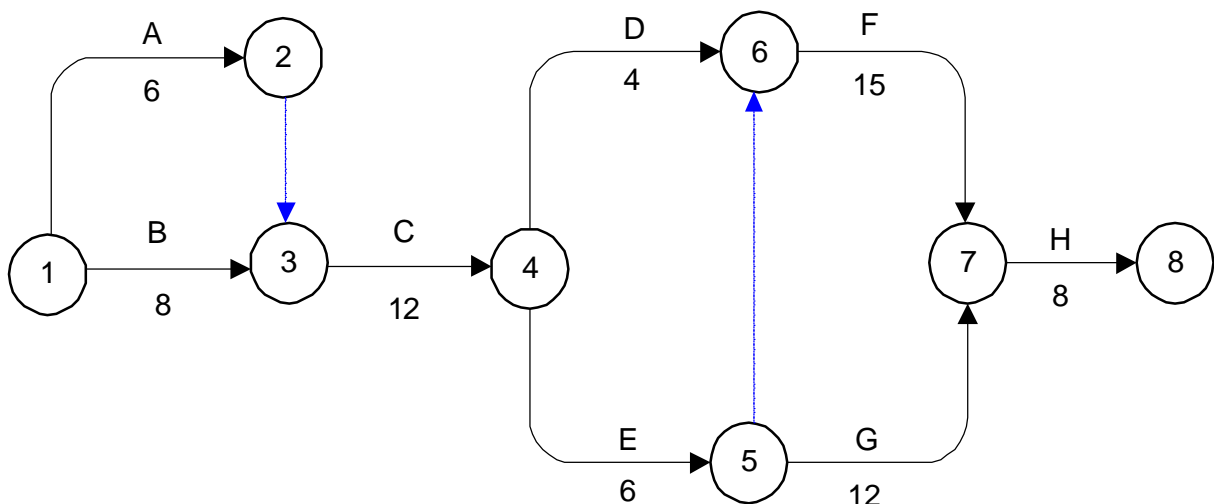
#### IV.A.2 *Práctica de Formulación de Modelos, Redes o Diagramas de Flechas en Proyectos.*

##### Ejemplo 1. Construcción de un Complejo Deportivo

La universidad del Estado está considerando construir un complejo atlético de usos múltiples dentro de su campo. El complejo proveerá un gimnasio para juegos inter-universidades, espacio de oficinas, salones de clases y todos los servicios necesarios dentro de él. Las actividades que serán emprendidas antes de su construcción se muestran, con la información necesaria, a continuación:

| Actividad | Descripción                                     | Actividades Precedentes | Duración (semanas) |
|-----------|---|-------------------------|--------------------|
| A         | Estudios del sitio para la construcción         | -----                   | 6                  |
| B         | Desarrollo del diseño inicial                   | -----                   | 8                  |
| C         | Obtener aprobación de las instancias Superiores | A,B                     | 12                 |
| D         | Seleccionar al arquitecto                       | C                       | 4                  |
| E         | Establecer el presupuesto                       | C                       | 6                  |
| F         | Finalizar el diseño                             | D,E                     | 15                 |
| G         | Obtener financiamiento                          | E                       | 12                 |
| H         | Contratar al constructor                        | F,G                     | 8                  |

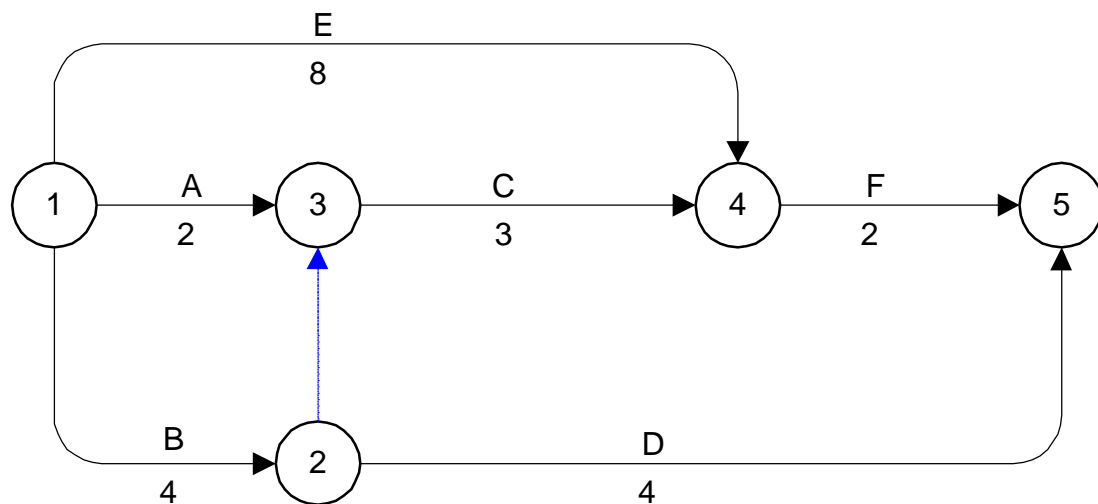
##### Red del Proyecto



**Ejemplo 2. Aplicación de un nuevo procedimiento para revisión de equipaje en los aeropuertos.**

| Actividad | Descripción                                   | Actividades<br>Siguietes | Duración<br>(Semanas) |
|-----------|---|--------------------------|-----------------------|
| A         | Escribir las Instrucciones                    | C                        | 2                     |
| B         | Seleccionar a los operadores                  | C, D                     | 4                     |
| C         | Entrenar a los operadores                     | F                        | 3                     |
| D         | Anunciar el nuevo servicio                    | ----                     | 4                     |
| E         | Comprar, esperar el envío y recibir el equipo | F                        | 8                     |
| F         | Probar los nuevos operadores con el equipo    | ----                     | 2                     |

**Red del Proyecto.**



**Uso de Ficticias:**

**CASO 1.**

La actividad ficticia (2,3) fue usada para evitar que las actividades A y B tuviesen el mismo nudo inicial y final

La actividad ficticia (5,6) fue usada para representar la relación de precedencia de la actividad E para la F, relación que no se puede representar en otra forma.

**CASO 2**

La actividad ficticia (2,3) fue usada para representar la relación de precedencia que las actividades B tiene con la actividad C.

#### IV .A.2.1. *Elabore las Redes para los siguientes proyectos:*

Los elementos componentes de la red descritos anteriormente (10) y (11) deben ser usados para la elaboración de estas Redes o Diagrama de Flechas.

En caso de usar actividades ficticias: 1) Use la menor cantidad posible. 2) Explique las razones por las cuales usó cada una de ellas. Los resultados de esta práctica se presentan al final del texto.

#### **Ejemplo 3. Conocimiento previo de la empresa para realizar una auditoría.**

Cuando una firma de contadores debe realizar una auditoría a una corporación, la primera fase de ella envuelve obtener “conocimiento del negocio”. Esta fase requiere que se ejecuten las actividades siguientes:

| Actividad | Descripción   | Actividades Precedentes | Duración (Semanas) |
|-----------|---|-------------------------|--------------------|
| A         | Establecer los términos del contrato                  | —                       | 3                  |
| B         | Estimar riesgos auditables e importancia              | A                       | 6                  |
| C         | Identificar tipos de transacciones y errores posibles | A                       | 14                 |
| D         | Describir los sistemas                                | C                       | 8                  |
| E         | Verificar las descripciones de los sistemas           | D                       | 4                  |
| F         | Evaluar controles internos                            | B,E                     | 8                  |
| G         | Diseñar enfoque de la auditoría                       | F                       | 9                  |

#### **Ejemplo 4. (No se describen actividades; representa cualquier proyecto)**

| Actividad | Actividades Precedentes | Duración (días) | Actividad | Actividades Precedentes | Duración (días) |
|-----------|-------------------------|-----------------|-----------|-------------------------|-----------------|
| A         | —                       | 1               | J         | H                       | 10              |
| B         | A                       | 20              | K         | H                       | 5               |
| C         | B                       | 10              | L         | E                       | 13              |
| D         | B                       | 5               | M         | G                       | 5               |
| E         | A                       | 7               | N         | J, K                    | 7               |
| F         | A                       | 4               | P         | E, I                    | 9               |
| G         | A                       | 8               | R         | F                       | 3               |
| H         | G                       | 3               | S         | M, N                    | 4               |
| I         | C, D                    | 2               | T         | L, P, R                 | 8               |



## IV.B SECCION B. Valores utilizados en PERT-CPM para la Toma de Decisiones

### IV. B.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría

1. La ejecución de un proyecto, implica tomar decisiones en relación con su tiempo de ejecución, con las fechas para ejecutar sus actividades, con la cantidad de holgura de tiempo que pueda tener la ejecución de cada una de ellas y con el hecho de que sean críticas o no críticas.
2. La Etapa de Programación en PERT-CPM es la etapa de solución de la Red planteada para un proyecto y proporciona todos los valores necesarios para lograr el objetivo de la técnica. En el enfoque analítico de Investigación de Operaciones equivale a la etapa de solución del modelo.
3. La Etapa de Programación proporciona, para la toma de decisiones, la información siguiente: a) Tiempo de duración del proyecto, b) Fechas de ocurrencia más temprana y más tarde de los eventos c) Fechas mas temprana y más tarde programadas para iniciar y finalizar cada actividad, d) Actividades críticas que deben ejecutarse exactamente como están programadas para que se cumpla el tiempo calculado para el proyecto. e) Tiempo en que se pueden retardar las actividades no críticas antes de que ocasionen un retardo en la duración calculada del proyecto (holguras).
4. La duración calculada del proyecto es la menor cantidad de tiempo en que puede ser ejecutado el proyecto. Se obtiene con el tiempo más temprano (y más tarde) de ocurrencia del último evento del proyecto y es igual a la suma de los tiempos de ejecución de las actividades del camino crítico. Si existen varios caminos críticos, será igual la suma en cada camino crítico. Todos los tiempos calculados para eventos y actividades en la red tienen su razón de ser en que no deben retrasar este tiempo calculado para la ejecución del proyecto.
5. El tiempo más temprano de ocurrencia de un evento es la fecha calendario en que han **concluido**, en sus **tiempos más tempranos**, **todas** las actividades directamente anteriores a ese evento. Se calcula tomando el máximo valor de las sumas de los tiempos más tempranos de iniciación, de cada una de las actividades directamente anteriores a él, más el tiempo de ejecución de cada de ellas.
6. El tiempo más tarde en que puede ocurrir un evento, sin retrasar la duración calculada del proyecto, es la fecha calendario en que pueden concluir lo mas tarde posible todas las actividades directamente anteriores a ese evento, sin retrasar lo más tarde que puede ocurrir el o los eventos directamente posteriores a ellas. Se calcula tomando el mínimo valor obtenido al restar de los tiempos más tardes de ocurrencia de los eventos directamente posteriores a él, los tiempos de ejecución de las actividades directamente posteriores a él. Por ello, es una fecha que depende del tiempo mas temprano (y tarde) de finalización del proyecto.
7. El tiempo más temprano de iniciar una actividad es la fecha calendario en que puede iniciarse una actividad cuando todas las actividades, que la preceden directamente, han sido concluidas lo mas temprano posible. Este tiempo es entonces el mismo que el tiempo mas temprano de ocurrencia del evento de donde ella parte en la red.
8. Tiempo más tarde de finalizar una actividad es la fecha calendario para terminar una actividad sin retrasar lo mas tarde que pueden ser iniciadas las actividades directamente posteriores a ella.

Por lo tanto corresponde al tiempo calculado para lo más tarde que puede ocurrir un evento, en este caso, el evento donde esa actividad finaliza en la red.

9. Tiempo mas tarde de iniciar una actividad es la fecha calendario en que una actividad puede empezar a ser ejecutada sin que retrase la fecha calendario correspondiente a lo más tarde que pueden finalizar esa actividad. Se calcula restando al tiempo de finalización mas tarde de la actividad, el tiempo necesario para ejecutarla.
10. Tiempo más temprano de finalizar una actividad es la fecha calendario para terminar de ejecutar una actividad cuando esa actividad ha sido iniciada lo más temprano posible. Se calcula sumándole al tiempo más temprano de iniciación de esa actividad, el tiempo necesario para ejecutarla.
11. La holgura total de una actividad es el tiempo que se obtiene después de descontar de la total disponibilidad de tiempo para ejecutar una actividad, el tiempo realmente necesario para ejecutarla. Se calcula para cada actividad, obteniendo primero, el tiempo total disponible entre lo mas temprano de iniciarla y lo mas tarde de finalizarla; luego se le resta el tiempo que se necesita para ejecutarla.
12. El camino crítico de una red lo constituye el conjunto de actividades, en secuencia, con **mayor** duración en su ejecución. La suma de los tiempos de ejecución de las actividades críticas (por cada camino crítico) es igual al **menor** tiempo de ejecución del proyecto. Dependiendo del tamaño y complejidad del proyecto existirá uno o más caminos críticos. Todas las actividades del camino crítico son actividades críticas.
13. En la medida en que exista mayor cantidad de actividades críticas, mayor será el control que se debe tener para lograr la ejecución del proyecto en el menor tiempo posible.

#### IV.B.2 *Práctica de Solución de Redes en PERT-CPM.*

Como se ha establecido anteriormente, la etapa de programación en PERT-CPM corresponde a la solución del modelo. En ella se obtienen los valores usados para tomar decisiones (3).

De igual manera se ha señalado en apartes anteriores, los conceptos y forma analítica de resolver y obtener esos valores (Apartes 4 a 11). Usted debe manejar esos conceptos y aspectos del cálculo.

En esta sección se utilizarán programas existentes de computadora para solucionar redes.

El ejemplo 1, de la sección A1 correspondiente a la construcción de un complejo deportivo por parte de la universidad se presenta a continuación con sus resultados e interpretación obtenidos con los programas QSB, LINGO y WHAT'SBEST. Esto se ha hecho así para permitir al estudiante comparar los formatos de salida de datos

## Ejemplo 1.

### Construcción de Complejo Deportivo.

Para el referido proyecto, se le pide lo siguiente:

- ¿Cuál es la duración del proyecto?
- Calcule el programa de tiempos de Ejecución de actividades.
- ¿Cuáles son las actividades críticas y el camino crítico?
- El costo para cada actividad es de Bs. 50.000. Para la semana 24 de ejecución se le presenta la información siguiente con relación al estatus del proyecto:

| Actividad | Costo Real | % Ejecutado |
|-----------|------------|-------------|
| A         | 53.000     | 100%        |
| B         | 49.900     | 100%        |
| C         | 48.000     | 100%        |
| D         | 4.500      | 10%         |
| E         | 10.000     | 25%         |
| F         | 0          | 0           |
| G         | 0          | 0           |
| H         | 0          | 0           |

Los costos totales, a la fecha de esa información, ¿están por debajo o por encima del total que debe estar ejecutado?

- ¿Será ejecutado a tiempo el proyecto?
- ¿Qué acción correctiva recomendaría?

#### IV. B.2.1. Uso del PROGRAMA QSB

##### *Solución del modelo*

| CPM Analysis for Atleta Page 1      |               |                |              |                 |               |             |
|-------------------------------------|---------------|----------------|--------------|-----------------|---------------|-------------|
| Activity Number                     | Activity Name | Earliest Start | Latest Start | Earliest Finish | Latest Finish | Slack LS-ES |
| 1                                   | A             | 0              | 2.0000       | 6.0000          | 8.0000        | 2.0000      |
| 2                                   | B             | 0              | 0            | 8.0000          | 8.0000        | Critical    |
| 3                                   | FICT1         | 6.0000         | 8.0000       | 6.0000          | 8.0000        | 2.0000      |
| 4                                   | C             | 8.0000         | 8.0000       | 20.000          | 20.000        | Critical    |
| 5                                   | E             | 20.000         | 20.000       | 26.000          | 26.000        | Critical    |
| 6                                   | D             | 20.000         | 22.000       | 24.000          | 26.000        | 2.0000      |
| 7                                   | FICT2         | 26.000         | 26.000       | 26.000          | 26.000        | Critical    |
| 8                                   | G             | 26.000         | 29.000       | 38.000          | 41.000        | 3.0000      |
| 9                                   | F             | 26.000         | 26.000       | 41.000          | 41.000        | Critical    |
| 10                                  | H             | 41.000         | 41.000       | 49.000          | 49.000        | Critical    |
| Completion time = 49 Total cost = 0 |               |                |              |                 |               |             |

Earliest start (finish): Tiempo más temprano de iniciación (finalización)

Latest start (finish): Tiempo más tarde de iniciación (finalización)

Crítico Path: Camino Crítico

Este programa presenta también el camino crítico en la forma siguiente:

Critical paths for **Atleta** with completion time = 49 Total cost = 0

CP # 1 :  
1====> 3====> 4====> 5====> 6====> 7====> 8  
B C E FICT2 F H

Observe que la actividad ficticia (FICT2) usada para representar la relación de precedencia de la actividad E para la F, forma parte del camino crítico. La suma de tiempos de estas actividades es el tiempo de duración del proyecto. Esto es así porque al terminar de ejecutarse esta secuencia de actividades, con mayor duración, se dará por finalizado el proyecto. En otras secuencias de actividades la duración será menor y estarán ya terminadas cuando las del camino crítico finalicen.

## IV.B.2.2 Uso del PROGRAMA LINGO

### *Solución del modelo*

```
Feasible solution found at step:      0

Variable                                Value
ULTIMA_ACTIVIDAD                       8.000000

DURACION_DEL_PROYECTO                 49.000000

TIEMPO( SITIO)                        6.000000
TIEMPO( DISENI)                       8.000000
TIEMPO( APROBACION)                   12.000000
TIEMPO( ARQUITECTO)                   4.000000
TIEMPO( PRESUPUESTO)                   6.000000
TIEMPO( DISENF)                       15.000000
TIEMPO( FINANCIAMIENTO)                12.000000
TIEMPO( CONSTRUCTOR)                   8.000000

INICIO_MAS_TEMPRANO( SITIO)            0.000000
INICIO_MAS_TEMPRANO( DISENI)           0.000000
INICIO_MAS_TEMPRANO( APROBACION)        8.000000
INICIO_MAS_TEMPRANO( ARQUITECTO)       20.000000
INICIO_MAS_TEMPRANO( PRESUPUESTO)      20.000000
INICIO_MAS_TEMPRANO( DISENF)           26.000000
INICIO_MAS_TEMPRANO( FINANCIAMIENTO)    26.000000
INICIO_MAS_TEMPRANO( CONSTRUCTOR)      41.000000

INICIO_MAS_TARDE( SITIO)               2.000000
INICIO_MAS_TARDE( DISENI)              0.000000
INICIO_MAS_TARDE( APROBACION)          8.000000
INICIO_MAS_TARDE( ARQUITECTO)         22.000000
INICIO_MAS_TARDE( PRESUPUESTO)        20.000000
INICIO_MAS_TARDE( DISENF)              26.000000
INICIO_MAS_TARDE( FINANCIAMIENTO)      29.000000
INICIO_MAS_TARDE( CONSTRUCTOR)        41.000000
```

|  |           |
|--|-----------|
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( SITIO)          | 6.000000  |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( DISENI)         | 8.000000  |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( APROBACION)     | 20.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( ARQUITECTO)     | 24.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( PRESUPUESTO)    | 26.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( DISENF)         | 41.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( FINANCIAMIENTO) | 38.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( CONSTRUCTOR)    | 49.00000  |
|  |           |
| FINALIZACION_MAS_TARDE( SITIO)             | 8.000000  |
| FINALIZACION_MAS_TARDE( DISENI)            | 8.000000  |
| FINALIZACION_MAS_TARDE( APROBACION)        | 20.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TARDE( ARQUITECTO)        | 26.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TARDE( PRESUPUESTO)       | 26.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TARDE( DISENF)            | 41.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TARDE( FINANCIAMIENTO)    | 41.00000  |
| FINALIZACION_MAS_TARDE( CONSTRUCTOR)       | 49.00000  |
|  |           |
| HOLGURA( SITIO)                            | 2.000000  |
| HOLGURA( DISENI)                           | 0.0000000 |
| HOLGURA( APROBACION)                       | 0.0000000 |
| HOLGURA( ARQUITECTO)                       | 2.000000  |
| HOLGURA( PRESUPUESTO)                      | 0.0000000 |
| HOLGURA( DISENF)                           | 0.0000000 |
| HOLGURA( FINANCIAMIENTO)                   | 3.000000  |
| HOLGURA( CONSTRUCTOR)                      | 0.0000000 |

#### IV.B.2.3 Uso del PROGRAMA WHAT'SBEST

Se muestra la hoja de cálculo completa para que pueda observar filas y columnas con la información y resultados del modelo.

Para obtener la solución del modelo, se colocan las fórmulas necesarias en las celdas seleccionadas. Como en cualquier hoja de cálculo que tiene valores conocidos previamente, los resultados se van obteniendo.

En caso de repetición de fórmulas sólo debe copiarlas nuevamente y el programa las acomoda para la nueva situación.

Por lo tanto, debe tener conocimiento del uso de la hoja de cálculo, preferiblemente del Programa EXCEL, para poder trabajar con este programa.



| Actividad | Costo real | Valor                     | Diferencia |
|-----------|------------|---------------------------|------------|
| A         | 53.000     | $(1.00) * 50000 = 50.000$ | 3.000      |
| B         | 49.900     | $(1.00) * 50000 = 50.000$ | -100       |
| C         | 48.000     | $(1.00) * 50000 = 50.000$ | -2.000     |
| D         | 4.500      | $(0.10) * 50000 = 5.000$  | -500       |
| E         | 10.000     | $(0.25) * 50000 = 12.500$ | -2.500     |
| F         | 0          | 0                         | 0          |
| G         | 0          | 0                         | 0          |
| H         | 0          | 0                         | 0          |
| TOTALES   | 165.400    | 167.500                   | -2.100     |

De acuerdo a estos cálculos, y para la fecha de la información dada, los costos totales del proyecto están por debajo de lo presupuestado en 2.100 unidades monetarias.

- e) Al comparar, en la semana 24, el tiempo necesario para ejecutar cada actividad con el tiempo que aún le falta para que haya sido ejecutada totalmente esa actividad se obtiene lo siguiente:

| Actividad | Tiempo ejecución | Tiempo ejecutado | Tiempo remanente |
|-----------|------------------|------------------|------------------|
| A         | 6                | 6                | 0                |
| B         | 8                | 8                | 0                |
| C         | 12               | 12               | 0                |
| D         | 4                | 0.4              | 3.6              |
| E         | 6                | 1.5              | 4.5              |
| F         | 15               | 15               | 15               |
| G         | 12               | 0                | 12               |
| H         | 8                | 0                | 8                |

Con esta información y tomando en cuenta la red del proyecto, se observa que el tiempo de ejecución del proyecto es ahora de 51.5 semanas, es decir, 2.5 semanas de retraso.

- f) Podría considerar utilizar la cantidad que se ha ahorrado hasta ahora en el presupuesto, para ayudar a acelerar la actividad E y, por lo tanto, la duración del proyecto entero.

## IV.C SECCION C. Consideraciones de Costo en el Manejo de Proyectos

### IV. C.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría

1. Una alternativa para reducir la duración calculada de un proyecto consiste en revisar detalladamente todo lo que se ha hecho en la etapa de planeamiento, a fin de detectar errores u omisiones, que al subsanarse, puedan resultar en una disminución de la duración calculada del proyecto, sin incrementar sus costos. Por ejemplo, las actividades en serie que pueden ser ejecutadas en paralelo, o tiempos para las actividades que hayan sido mal calculados
2. El tiempo calculado para la duración de un proyecto también puede ser reducido acelerando el tiempo de ejecución de las actividades críticas. Esta es otra alternativa para reducir la duración calculada de un proyecto.
3. Cuando los tiempos usados para las actividades son determinísticos, tal como sucede en CPM, se asume que el tiempo normal para ejecutar una actividad puede lograrse a un costo normal. Esa actividad puede ser acelerada reduciendo su tiempo de ejecución, mediante un incremento en los costos directos de la actividad, llamados costos de aceleración o costos acelerados.
4. El costo directo de una actividad incluye gastos que son imputables a una actividad específica; por ejemplo, los ladrillos para una determinada pared. La suma de costos directos de las actividades totales constituye el costo directo total del proyecto.
5. El costo indirecto del proyecto incluye gastos no imputables a una actividad en particular. Por ejemplo, los gastos de alquiler de equipos, locales y gastos administrativos. Se calculan para todo el proyecto.
6. Cuando se acelera el tiempo de ejecución de un proyecto, acelerando el tiempo de ejecución de las actividades, los costos directos se incrementan y los costos indirectos del proyecto tienden a bajar.
7. Los tiempos y costos para una actividad que ha sido acelerada se le denominan tiempos acelerados y costos acelerados, en contraposición a los tiempos y costos normales.
8. Punto de Aceleración de una actividad, en contraposición al Punto Normal, indica el momento en que una actividad cualquiera no puede reducir más su tiempo de ejecución aunque se incrementen sus costos directos.
9. La pendiente de costo de una actividad, existente entre el punto normal y el de aceleración, mide la variación en el costo directo por cada unidad de tiempo en que se acelere el tiempo de ejecución de esa actividad; se calcula matemáticamente como cualquier pendiente.
10. Para obtener un valor positivo, que es el que realmente existe, la pendiente de costo se calcula dividiendo el resultado de la resta entre el Costo Normal y el Costo Acelerado, entre el resultado de la resta entre el tiempo normal y el acelerado.



11. En el proceso de aceleración de un proyecto, actividades no críticas pueden volverse críticas. La pendiente de costo permite determinar cuál actividad crítica incrementa en menor cantidad los costos directos.
12. La aceleración total de un proyecto resulta siempre muy costosa. En general se acelera un proyecto de tal manera que los costos totales se incrementen lo menos posible. También puede reducirse hasta aquel tiempo que cumpla algún propósito, tal como permitir participar en una licitación de tiempo establecido o lanzar un producto al mercado antes que la competencia. Siempre con el menor incremento en los costos.
13. La aceleración a realizar se establece en la etapa de planeamiento; por lo tanto, la programación se hace con los tiempos acelerados. Esto enfatiza las ventajas de trabajar con un modelo o red de un proyecto.
14. PERT/costo es una técnica para monitorear los costos durante un proyecto. Con él, se evalúan grupos de actividades relacionadas con presupuestos estimados y tiempos de ejecución.
15. Programación Lineal puede ser utilizada en proyectos con objetivos de minimización de costos.

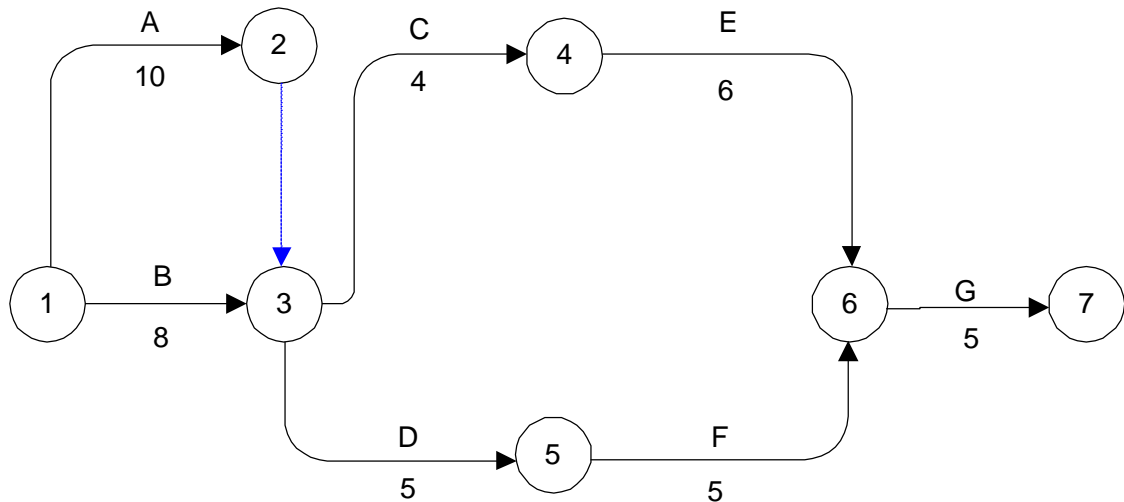
#### ***IV.C.2 Práctica de solución de redes con consideración de costos del proyecto.***

*Proyecto 1.-*

| Actividad | Actividades Precedentes | Duración Normal (días) | Duración acelerada (días) | Pendiente de Costo |
|-----------|-------------------------|------------------------|---------------------------|--------------------|
| A         | -----                   | 10                     | 7                         | 4                  |
| B         | -----                   | 8                      | 6                         | 4                  |
| C         | A, B                    | 4                      | 3                         | 3                  |
| D         | A, B                    | 5                      | 3                         | 3                  |
| E         | C                       | 6                      | 3                         | 5                  |
| F         | D                       | 5                      | 2                         | 1                  |
| G         | E,F                     | 5                      | 4                         | 4                  |

El costo indirecto o general, es de 5 unidades monetarias por día..

A continuación se muestra la Red elaborada para el proyecto.



Continuando con el uso de la técnica CPM, se soluciona la Red con cualquiera de los programas disponibles. En este caso **se usa el programa QSB**. Se le asignó el nombre “RAPIDO” al archivo de computadora usado para el modelo.

#### Datos de entrada

CPM Entry for RAPIDO Page 1

| Activity number | Activity name | Start node | End node | Normal duration | Crash duration | Normal cost | Crash cost |
|-----------------|---------------|------------|----------|-----------------|----------------|-------------|------------|
| 1               | <A >          | <1 >       | <3 >     | <10 >           | < >            | < >         | < >        |
| 2               | <B >          | <1 >       | <2 >     | <8 >            | < >            | < >         | < >        |
| 3               | <FICT1 >      | <2 >       | <3 >     | <0 >            | < >            | < >         | < >        |
| 4               | <C >          | <3 >       | <4 >     | <4 >            | < >            | < >         | < >        |
| 5               | <D >          | <3 >       | <5 >     | <5 >            | < >            | < >         | < >        |
| 6               | <E >          | <4 >       | <6 >     | <6 >            | < >            | < >         | < >        |
| 7               | <F >          | <5 >       | <6 >     | <5 >            | < >            | < >         | < >        |
| 8               | <G >          | <6 >       | <7 >     | <5 >            | < >            | < >         | < >        |

#### Solución del modelo

| CPM Analysis for RAPIDO Page 1      |               |                |              |                 |               |             |
|-------------------------------------|---------------|----------------|--------------|-----------------|---------------|-------------|
| Activity Number                     | Activity Name | Earliest Start | Latest Start | Earliest Finish | Latest Finish | Slack LS-ES |
| 1                                   | B             | 0              | 2.0000       | 8.0000          | 10.000        | 2.0000      |
| 2                                   | A             | 0              | 0            | 10.000          | 10.000        | Critical    |
| 3                                   | FICT1         | 8.0000         | 10.000       | 8.0000          | 10.000        | 2.0000      |
| 4                                   | C             | 10.000         | 10.000       | 14.000          | 14.000        | Critical    |
| 5                                   | D             | 10.000         | 10.000       | 15.000          | 15.000        | Critical    |
| 6                                   | E             | 14.000         | 14.000       | 20.000          | 20.000        | Critical    |
| 7                                   | F             | 15.000         | 15.000       | 20.000          | 20.000        | Critical    |
| 8                                   | G             | 20.000         | 20.000       | 25.000          | 25.000        | Critical    |
| Completion time = 25 Total cost = 0 |               |                |              |                 |               |             |

### *Caminos Críticos:*

Critical paths for RAPIDO with completion time = 25 Total cost = 0

CP # 1 :  
1  $\xrightarrow{A}$  3  $\xrightarrow{C}$  4  $\xrightarrow{E}$  6  $\xrightarrow{G}$  7

CP # 2 :  
1  $\xrightarrow{A}$  3  $\xrightarrow{D}$  5  $\xrightarrow{F}$  6  $\xrightarrow{G}$  7

El tiempo normal de ejecución de este proyecto es de 25 días. Las actividades críticas son: A, C, D, E, F, G. Se observan dos caminos críticos.

Si no hay aceleración del tiempo de ejecución, los costos del proyecto, considerando sólo el enfoque de aceleración, son:

Costos indirectos + costos de aceleración  $5(25) + 0 = 125$  unidades monetarias.

Si se aceleraran todas las actividades a su tiempo de aceleración la duración del proyecto sería de 17 días y su costo bajo aceleración sería:

$$5(17) + 51 = 136$$

Esto resulta demasiado costoso; el problema consiste en lograr una reducción de la duración del proyecto con el menor costo adicional. Para proyectos pequeños, esto se hace por un método de inspección que implica los pasos siguientes:

1. Encontrar el camino crítico en condiciones normales e identificar las actividades críticas
2. Calcular la pendiente de costos para cada actividad del proyecto usando la fórmula dada (10):

$$\frac{\text{Costo acelerado} - \text{costo normal}}{\text{Tiempo normal} - \text{tiempo acelerado}}$$

3. Seleccionar a la actividad crítica con menor pendiente de costo, menor costo de aceleración por unidad de tiempo.
4. Acelerar esta actividad al monto máximo establecido o hasta el monto que satisfaga algún objetivo preestablecido (12).
5. Verificar que el camino crítico sigue siendo el mismo, pues a medida que se acelera un proyecto, actividades no críticas pueden convertirse en críticas (11). Si el camino es el mismo, se retorna al paso 3. Si no es el mismo, se encuentra el nuevo camino crítico y se retorna al paso 3.

Para proyectos grandes, este procedimiento es inaplicable manualmente y se puede usar programación matemática.

#### IV.C.2.1 Método de Inspección aplicado al proyecto planteado:

El camino crítico se ha determinado con las actividades críticas A, C, D, E, F, G. Entre los eventos 4 y 7 hay caminos críticos paralelos. Esto se debe tener en consideración.

La pendiente de costo, o costo de aceleración por día, ha sido calculada con la información necesaria para hacerlo y se indican en la tabla de actividades, para cada una de ellas.

Se acelera la actividad crítica con menor pendiente de costo. En este caso resulta ser la actividad F, pero como se encuentra en caminos críticos paralelos, se tendría que acelerar otra actividad del camino paralelo, ocasionando mayores costos diarios. Seguimos con la G que solo tiene un día para acelerarlo, en comparación a la actividad A.

La actividad G se acelera al máximo, en este caso 1 día, llevándola a 4 días de ejecución. El costo total, con aceleración, se reduce a:  $5(24) + 4 = 124$

Verificado que el camino crítico sigue siendo el mismo, aceleramos la actividad A en una unidad de tiempo. Incluyendo el costo de 4 por día de reducción de la actividad A. Esto resulta en un costo total igual a:  $5(23) + 8 = 123$

Sin embargo la actividad A no puede llevarse a su máxima aceleración, reduciéndola a 7 días. Cuando A se acelera a 8 días la actividad B llega a ser también crítica resultando un nuevo camino crítico paralelo y cualquier reducción sola de A no reduciría la duración del proyecto. (Resulta más costoso acelerar la A y la B conjuntamente, pues tal aceleración ocasionaría un costo de 6 en total, mayor que el costo indirecto de 5 unidades diarias). Por lo tanto, se reduce la actividad A hasta 8 días con un costo total del proyecto igual a:  $5(22) + 12 = 122$

Verificado que hay ahora un nuevo camino crítico se procede entonces a revisar las actividades críticas C, D, E y F.

Estas actividades están en caminos críticos paralelos, entre los eventos 4 y 7. Por lo tanto se debe acelerar una actividad en el camino que va a través de los eventos 4, 5 y 7 y otra actividad en el camino señalado por los eventos 4, 6 y 7. Se examinan, entonces, todas las combinaciones posibles:

| Actividades | Incremento en costo directo | Decrecimiento de costos indirectos | Cambio neto en el costo total |
|-------------|-----------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| C y D       | $3 + 3 = 6$                 | 5                                  | Incremento de 1               |
| C y F       | $3 + 1 = 4$                 | 5                                  | Decrecimiento de 1            |
| E y D       | $5 + 3 = 8$                 | 5                                  | Incremento de 3               |
| E y F       | $5 + 1 = 6$                 | 5                                  | Incremento de 1               |

Puede observarse que la combinación de C y F es la única que reduce los costos. Reduciendo la actividad C y F en un día ocasiona un costo total de:  $5(21) + 16 = 121$

Este costo es considerando el enfoque de aceleración, considerando los costos indirectos más los costos de aceleración.

En conclusión, la duración óptima del proyecto, en términos de aceleración, es de 21 días y el costo es de 121 unidades monetarias. Los costos de aceleración mínimos son de 16 unidades monetarias.

En proyectos grandes, este proceso realizado manualmente resulta engorroso, ineficiente y costoso.

## IV.D SECCION D. Aceleración del Tiempo de Duración de un Proyecto utilizando el Computador.

Utilizando cualquiera de los programas comerciales, disponibles para usar en computadora, que permiten la aceleración del tiempo de duración calculado para un proyecto, puede lograr los mismos resultados que obtuvo manualmente. Se ilustra a continuación este proceso de aceleración realizado en el mismo proyecto del ejemplo. En este caso utilizaremos el programa **QSB** y el programa **LINGO**

El programa QSB requiere la información acerca de costos acelerados y normales de las actividades, conjuntamente con los tiempos normales y acelerados. Proporciona los incrementos en los costos por cada actividad acelerada, hasta lograr un monto de aceleración pre-establecido y el costo directo total. Muestra también el nuevo, o los nuevos caminos críticos.

El programa LINGO requiere la información del valor de la pendiente de costo. Proporciona los costos totales mínimos de aceleración. Es decir, permite calcular la aceleración de un proyecto con el menor costo posible.

### IV.D.1 USO DEL PROGRAMA QSB

CPM Entry for Rapido Page 1

| Activity number | Activity name | Start node | End node | Normal duration | Crash duration | Normal cost | Crash cost |
|-----------------|---------------|------------|----------|-----------------|----------------|-------------|------------|
| 1               | <A >          | <1 >       | <3 >     | <10 >           | <7 >           | <88 >       | <100 >     |
| 2               | <B >          | <1 >       | <2 >     | <8 >            | <6 >           | <70 >       | <78 >      |
| 3               | <FICT1 >      | <2 >       | <3 >     | <0 >            | < >            | < >         | < >        |
| 4               | <C >          | <3 >       | <4 >     | <4 >            | <3 >           | <50 >       | <53 >      |
| 5               | <D >          | <3 >       | <5 >     | <5 >            | <3 >           | <80 >       | <86 >      |
| 6               | <E >          | <4 >       | <6 >     | <6 >            | <3 >           | <130 >      | <145 >     |
| 7               | <F >          | <5 >       | <6 >     | <5 >            | <2 >           | <71 >       | <74 >      |
| 8               | <G >          | <6 >       | <7 >     | <5 >            | <4 >           | <120 >      | <124 >     |

### Solución del modelo con la aceleración del tiempo de ejecución de las actividades

How many time units do you want to reduce (0 to end) ? 4

Do you want to print the crashing result (Y/N)? N

For this crash: To reduce 4 time unit(s).

Crash activity A 2 time unit(s) New duration = 8 Incremental cost = 8

Crash activity C 1 time unit(s) New duration = 3 Incremental cost = 3

Crash activity F 1 time unit(s) New duration = 4 Incremental cost = 1

Crash activity G 1 time unit(s) New duration = 4 Incremental cost = 4

Critical paths for RAPIDO with completion time = 21 Total cost = 625

Este resultado informa que para reducir en 4 unidades de tiempo el proyecto (To reduce 4 time units) debe acelerar, o reducir, el tiempo de ejecución de la actividad A en 2 días, lo que conlleva a un incremento de 8 unidades en los costos. (Crash activity A 2 time unit(s) New duration = 8 Incremental cost = 8)

Similar información presenta para las actividades C, F y G que han sido aceleradas en 1 unidad de tiempo cada uno y muestra los costos de aceleración en los cuales se ha incurrido. Un costo de 3 para la actividad C, un costo de 1 para la actividad F y un costo de 4 para la actividad G. En total los costos de aceleración suman 16.

Esta es la cantidad obtenida con el procedimiento manual realizado inicialmente..

Los resultados con **QSB** muestran también los caminos críticos que resultan con la aceleración de 4 días efectuada al proyecto.



Se observan 4 caminos críticos paralelos. En cualquiera de ellos la suma de los tiempos de sus actividades es de 21.

Estas secuencias de actividades constituyen las secuencias de mayor duración en el proyecto y por lo tanto determinan su duración mínima.

## IV. D.2 USO DEL PROGRAMA LINGO

### *Introducción de datos del modelo*

```
MODEL:  !Proyecto con aceleración;

SETS:
    ACTIVIDADES / A, B, C, D, E, F, G/:
        TIEMPO, !tiempo normal para la actividad;
        FINALIZACION_MAS_TEMPRANA,
        TIEMPO_de_ACCELERACION,
        COSTO_de_ACCELERACION,  !Pendiente de Costo;
        ACCELERACION;

    ! Estas son las relaciones de precedencia;
    PRECD( ACTIVIDADES, ACTIVIDADES) /
        A,C  A,D  B,C  B,D  C,E  D,F  E,G  F,G/;

ENDSETS

DATA:
        TIEMPO = 10  8  4  5  6  5  5;
    TIEMPO_de_ACCELERACION =  7  6  3  3  3  2  4;
    COSTO_de_ACCELERACION =  4  4  3  3  5  1  4;
    DURACION_ACCELERADA = 21;

ENDDATA

@FOR( PRECD( I, J):
    FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( J) >= FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( I)
        + TIEMPO( J) - ACCELERACION( J)
    );

    FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( 1) >= TIEMPO( 1) - ACCELERACION( 1);
    FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( 2) >= TIEMPO( 2) - ACCELERACION( 2);

    !Lo más que puede ser acelerada una actividad es igual al tiempo normal menos la
    duración acelerada;

@FOR( ACTIVIDADES( J):
    ACCELERACION( J) <= TIEMPO( J) - TIEMPO_de_ACCELERACION( J)
    );

    !TIEMPO DE ACCELERACION DEL PROYECTO;
    !Lo siguiente asume que hay una actividad final única;

    FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( @SIZE( ACTIVIDADES)) <= DURACION_ACCELERADA;
    !Minimizar los costos de aceleración;

    MIN = @SUM( ACTIVIDADES: COSTO_de_ACCELERACION * ACCELERACION);
END
```

En la solución obtenida se han eliminado algunos valores que no interesan para los resultados.

### ***Solución del Modelo.***

Global optimal solution found at step: 20

Objective value: 16.00000

| Variable                      | Value     | Reduced Cost |
|-------------------------------|-----------|--------------|
| DURACION_ACELERADA            | 21.00000  | 0.0000000    |
| TIEMPO( A)                    | 10.00000  | 0.0000000    |
| TIEMPO( B)                    | 8.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO( C)                    | 4.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO( D)                    | 5.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO( E)                    | 6.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO( F)                    | 5.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO( G)                    | 5.000000  | 0.0000000    |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( A) | 8.000000  | 0.0000000    |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( B) | 8.000000  | 0.0000000    |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( C) | 11.00000  | 0.0000000    |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( D) | 13.00000  | 0.0000000    |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( E) | 17.00000  | 0.0000000    |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( F) | 17.00000  | 0.0000000    |
| FINALIZACION_MAS_TEMPRANA( G) | 21.00000  | 0.0000000    |
| TIEMPO_DE_ACELERACION( A)     | 7.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO_DE_ACELERACION( B)     | 6.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO_DE_ACELERACION( C)     | 3.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO_DE_ACELERACION( D)     | 3.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO_DE_ACELERACION( E)     | 3.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO_DE_ACELERACION( F)     | 2.000000  | 0.0000000    |
| TIEMPO_DE_ACELERACION( G)     | 4.000000  | 0.0000000    |
| COSTO_DE_ACELERACION( A)      | 4.000000  | 0.0000000    |
| COSTO_DE_ACELERACION( B)      | 4.000000  | 0.0000000    |
| COSTO_DE_ACELERACION( C)      | 3.000000  | 0.0000000    |
| COSTO_DE_ACELERACION( D)      | 3.000000  | 0.0000000    |
| COSTO_DE_ACELERACION( E)      | 5.000000  | 0.0000000    |
| COSTO_DE_ACELERACION( F)      | 1.000000  | 0.0000000    |
| COSTO_DE_ACELERACION( G)      | 4.000000  | 0.0000000    |
| ACELERACION( A)               | 2.000000  | 0.0000000    |
| ACELERACION( B)               | 0.0000000 | 4.000000     |
| ACELERACION( C)               | 1.000000  | 0.0000000    |
| ACELERACION( D)               | 0.0000000 | 2.000000     |
| ACELERACION( E)               | 0.0000000 | 2.000000     |
| ACELERACION( F)               | 1.000000  | 0.0000000    |
| ACELERACION( G)               | 1.000000  | 0.0000000    |

Puede observar las actividades que han sido aceleradas, y los montos en que han sido aceleradas. Esto se muestra en ACELERACIÓN ( J), donde j = A, B, C, D, E, F, G. ACELERACION fue el nombre dado en la entrada de datos del modelo a la cantidad de tiempo a acelerar.

La actividad A se aceleró en 2 unidades de tiempo, las actividades C, F y G se aceleraron en 1 unidad de tiempo. Este es el mismo resultado que se obtuvo con el procedimiento manual. El costo mínimo de la aceleración es de 16 unidades monetarias, y se muestra en “Objective value”.



## IV. E SECCION E. Consideraciones acerca de Probabilidad en PERT-CPM

### IV. E.1. Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría

1. PERT probabilístico usa tres estimados de tiempo en la ejecución de las actividades para obtener información básica acerca de sus distribuciones de probabilidad.
2. El tiempo más probable estimado denotado por la letra **m**, es el estimado más realista para la moda de la distribución (el punto más alto de la distribución), es el tiempo que se obtiene con mas frecuencia, el que más se observa en la distribución..
3. El tiempo optimista estimado, denotado por la letra **a**, es un tiempo no muy probable, pero posible para la ejecución de la actividad si todo marcha muy bien. Es un estimado esencialmente del límite inferior de la distribución de probabilidad.
4. El tiempo pesimista, denotado por la letra **b**, es un estimado esencialmente del límite superior de la distribución de probabilidad. Es un tiempo de ejecución de la actividad que es posible si se presentan todos los inconvenientes relacionados con esa actividad.
5. La distribución de tiempo para cada actividad es (al menos aproximadamente) una distribución Beta. Bajo esa asunción el tiempo promedio de ejecución de una actividad es calculado como:
$$\frac{a + 4m + b}{6}$$
6. La Varianza de cada actividad será, bajo es misma asunción, es la siguiente:  $\left(\frac{b - a}{6}\right)^2$
7. Usando el tiempo promedio esperado como un tiempo fijo, se procede con los cálculos regulares para determinar los programas de tiempos y la duración del proyecto.
8. La suma de los tiempos promedios esperados de las actividades del camino crítico proporciona el tiempo promedio esperado para el proyecto.
9. La distribución de probabilidad del tiempo de ejecución del proyecto es (al menos aproximadamente) una distribución normal. Esto tiene su base en el Teorema del Límite Central de la Teoría de Probabilidad.
10. La Varianza del proyecto es igual a la suma de las varianzas de las actividades críticas del camino crítico. Si existe más de un camino crítico existirá mas de una Varianza. Esta fórmula de cálculo de la Varianza se basa en que los tiempos de ejecución de las actividades son independientes.
11. Con la distribución normal del tiempo de ejecución de un proyecto y cantidad de desviaciones estándar calculadas, se puede determinar, en la tabla normal, la probabilidad de ejecución del proyecto para una fecha determinada.
12. La variable  $Z = \frac{\text{Tiempo deseado} - \text{Tiempo promedio}}{\text{Desviación estándar}}$

Permite determinar la cantidad de Desviaciones Estándar existentes entre el promedio de tiempo calculado y un tiempo deseado cualquiera.

#### IV. E.2. *Práctica de PERT en un Proyecto. Uso de Probabilidades*

### PROYECTO 1

Usted está encargado de planificar y coordinar el programa de entrenamiento de la gerencia de ventas en su empresa. Las actividades que ha listado para este proyecto son las siguientes:

| Actividad | Descripción                                      | Actividades precedentes | Duración (semanas) |              |           |
|-----------|--|-------------------------|--------------------|--------------|-----------|
|           |  |                         | Optimista          | Mas probable | Pesimista |
| A         | Planear los tópicos                              | —                       | 1.5                | 2.0          | 2.5       |
| B         | Obtener conferencistas                           | A                       | 2.0                | 2.5          | 6.0       |
| C         | Listar sitios de reunión                         | —                       | 1.0                | 2.0          | 3.0       |
| D         | Seleccionar el lugar                             | C                       | 1.5                | 2.0          | 2.5       |
| E         | Finalizar planes de viajes de los conferencistas | B, D                    | 0.5                | 1.0          | 1.5       |
| F         | Hacer chequeo final con los conferencistas       | E                       | 1.0                | 2.0          | 3.0       |
| G         | Preparar y enviar folletos                       | B, D                    | 3.0                | 3.5          | 7.0       |
| H         | Hacer reservaciones                              | G                       | 3.0                | 4.0          | 5.0       |
| I         | Manejar detalles de último minuto                | F, H                    | 1.5                | 2.0          | 2.5       |

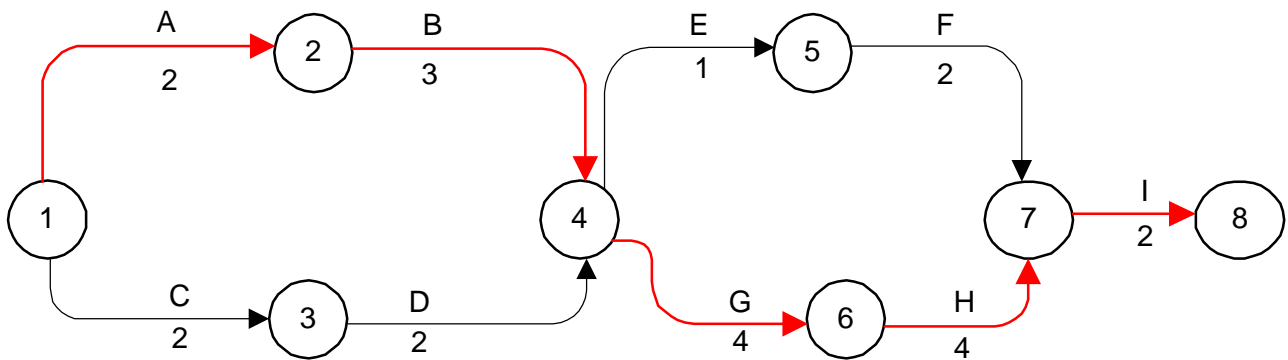
Continúe usando PERT:

- ¿Cuál es la duración calculada del proyecto?
- Explique el programa de actividades obtenido en la etapa de programación.
- ¿Cuáles son las actividades críticas? Señálelas claramente sobre la Red.
- Calcule la probabilidad de que el proyecto sea concluido en 12 semanas.
- Si desea una probabilidad de 0.99 de que el proyecto se ejecute a tiempo, cuan lejos de la fecha calculada de ejecución debe empezar a trabajar en el proyecto.
- ¿Por qué el cálculo de la probabilidad de que el proyecto se termine a tiempo está basado en el análisis del camino crítico? ¿En qué caso, si hay alguno, sería deseable calcula esa probabilidad para un camino no critico?

Para trabajar con estos tiempos debe calcularse un tiempo promedio que se considera fijo (7) para la elaboración de los programas de tiempo.

| Actividad | Tiempo Promedio | Varianza |
|-----------|-----------------|----------|
| A         | 2               | 0.03     |
| B         | 3               | 0.44     |
| C         | 2               | 0.11     |
| D         | 2               | 0.03     |
| E         | 1               | 0.03     |
| F         | 2               | 0.11     |
| G         | 4               | 0.44     |
| H         | 4               | 0.11     |
| I         | 2               | 0.03     |

### RED del Proyecto.



### Respuestas.

- La duración calculada del proyecto es de 15 semanas en promedio.
- El programa muestra los tiempos más tempranos y más tardes de iniciación y finalización de las actividades. Estos tiempos deben ser trasladados a fechas calendarios.

Si la fecha de iniciación más temprana de la actividad A es cero, esto indica que debe ser iniciada como muy temprano en la fecha fijada para empezar el programa de entrenamiento. Por ejemplo, el 14 de Abril. De allí en adelante las demás fechas se calculan a partir del 14 de abril.

La holgura representa la cantidad de tiempo que una actividad no crítica se puede retrasar a partir de su fecha de iniciación más temprano. Así, por ejemplo, la actividad C puede retrasarse 1 semana contada a partir del 14 de Abril que es la fecha más temprano en que ella podía iniciarse.

- c) Las actividades críticas se han señalado con líneas rojas (ó diferentes a las actividades no críticas) sobre la Red. Igualmente lo muestra, en forma separada, el resultado con el programa QSB. Hay un solo camino crítico conformado por las actividades A,B,G, H y la I.

Por lo tanto, las actividades críticas son A, B, G, H, I.

- d) Varianza única del proyecto:  $V = V_A + V_B + V_G + V_H + V_I$

$$V = 0.03 + 0.44 + 0.44 + 0.11 + 0.03$$

$$V = 1.05$$

$$\text{Desviación estándar} = 1.027$$

$$Z = \frac{12 - 15}{1.027}$$

$$Z = 2.92 \text{ desviaciones estándar}$$

$$P_{12} = 0.0017$$

La probabilidad de terminación del proyecto en 12 semanas es de 0.0017

Estos valores, calculados manualmente, también han sido calculados con el programa QSB.

- e) Si se desea una probabilidad de 0.99 de que el proyecto se ejecute a tiempo, entonces debe empezar 17.4 semanas antes.

Cálculos a efectuar:

$$\text{La variable } Z = \frac{\text{Tiempo deseado} - \text{Tiempo promedio}}{\text{Desviación estándar}}$$

Conociendo que para .99 de probabilidad la cantidad de desviaciones estándar es de 2.33, se tiene:

$$\frac{\text{Tiempo deseado} - 15}{1.027} = 2.33 \quad \text{de donde el tiempo deseado es de } 17.4 \text{ semanas.}$$

- f) Esto es así porque el camino crítico es el más largo camino en el proyecto y generalmente tiene la más baja probabilidad de completarse en el tiempo deseado. Los caminos no críticos tendrían una más alta probabilidad de ser terminados a tiempo.

Puede ser bueno considerar el cálculo de la probabilidad para un camino no crítico, si las actividades tienen poca holgura, si el tiempo de ejecución del proyecto por ese camino es casi igual al que se obtiene en el camino crítico o si las actividades de ese camino tienen varianzas relativamente altas. Cuando todas estas situaciones ocurren, el camino no crítico puede tener una probabilidad de ser terminado a tiempo, que es menor que la del camino crítico.

NOTA: Las tablas PERT de probabilidades se incorporan, como anexo, al final del texto en las páginas 135 y 136.

A continuación se presenta la solución utilizada para responder las preguntas. Se le asignó el nombre “VENTAS” al archivo de computadora usado para el proyecto.

## PROGRAMA QSB

### Introducción de datos

Input Data Describing Your Problem VENTAS Page 1

| Activity name | Start node | End node | Optimistic Time | Most likely Time | Pessimistic Time |
|---------------|------------|----------|-----------------|------------------|------------------|
| <A>           | <1>        | <2>      | <1.5000>        | <2.0000>         | <2.5000>         |
| <C>           | <1>        | <3>      | <1.0000>        | <2.0000>         | <3.0000>         |
| <B>           | <2>        | <4>      | <2.0000>        | <2.5000>         | <6.0000>         |
| <D>           | <3>        | <4>      | <1.5000>        | <2.0000>         | <2.5000>         |
| <E>           | <4>        | <5>      | <0.5000>        | <1.0000>         | <1.5000>         |
| <G>           | <4>        | <6>      | <3.0000>        | <3.5000>         | <7.0000>         |
| <F>           | <5>        | <7>      | <1.0000>        | <2.0000>         | <3.0000>         |
| <H>           | <6>        | <7>      | <3.0000>        | <4.0000>         | <5.0000>         |
| <I>           | <7>        | <8>      | <1.5000>        | <2.0000>         | <2.5000>         |

### Solución del Modelo

PERT Analysis for VENTAS Page 1

| Activity No.                  | Name | Activity Exp.Tm. | Var.   | Earliest Start | Latest Start | Earliest Finish | Latest Finish | Slack LS-ES |
|-------------------------------|------|------------------|--------|----------------|--------------|-----------------|---------------|-------------|
| 1                             | A    | 2.0000           | 0.0278 | 0              | 0            | 2.0000          | 2.0000        | Critical    |
| 2                             | C    | 2.0000           | 0.1111 | 0              | 1.0000       | 2.0000          | 3.0000        | 1.0000      |
| 3                             | B    | 3.0000           | 0.4444 | 2.0000         | 2.0000       | 5.0000          | 5.0000        | Critical    |
| 4                             | D    | 2.0000           | 0.0278 | 2.0000         | 3.0000       | 4.0000          | 5.0000        | 1.0000      |
| 5                             | E    | 1.0000           | 0.0278 | 5.0000         | 10.000       | 6.0000          | 11.000        | 5.0000      |
| 6                             | G    | 4.0000           | 0.4444 | 5.0000         | 5.0000       | 9.0000          | 9.0000        | Critical    |
| 7                             | F    | 2.0000           | 0.1111 | 6.0000         | 11.000       | 8.0000          | 13.000        | 5.0000      |
| 8                             | H    | 4.0000           | 0.1111 | 9.0000         | 9.0000       | 13.000          | 13.000        | Critical    |
| 9                             | I    | 2.0000           | 0.0278 | 13.000         | 13.000       | 15.000          | 15.000        | Critical    |
| Expected completion time = 15 |      |                  |        |                |              |                 |               |             |

Critical paths for VENTAS with completion time = 15

CP # 1 : (with variance = 1.055556 )

1=====> 2=====> 4=====> 6=====> 7=====> 8

Aunque el cálculo de la probabilidad de terminación del proyecto en 12 semanas se realizó manualmente, se presenta a continuación el mismo resultado obtenido con el programa QSB

### Probability Analysis for VENTAS

The following probability calculations assume that activities are independent and that all paths are also independent. It also assumes that your network has a large enough number of activities so as to enable use of the normal distribution. Therefore, when the activities are not independent or the number of activities is not large, the following analysis may be highly biased.

Expected completion time = 15

What is your project schedule time (type 0 to end analysis) ? 12

On CP # 1 : Variance = 1.055556 Standard deviation = 1.027402  
Probability of finishing within 12 is 1.756072E-03

The probability of finishing the whole project within 12 is 1.756072E-03

Do you want to enter a new scheduled completion time (Y/N)?

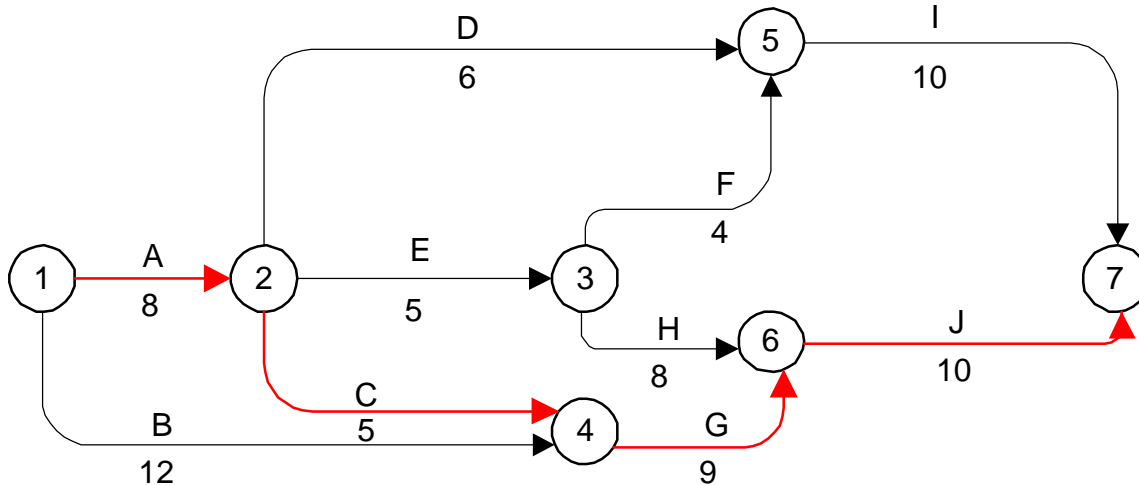
"The probability of finishing the whole project within 12 is 1.756072E-03 " = La probabilidad de terminar el proyecto entero dentro de 12 semanas es de 0.001756

## PROYECTO 2

Trabaje con el siguiente proyecto. ( El tiempo está especificado en días.)

| ACTIVIDAD | Actividades siguientes | a | m  | b  |
|-----------|------------------------|---|----|----|
| A         | C, D, E                | 2 | 8  | 14 |
| B         | G                      | 3 | 12 | 21 |
| C         | G                      | 2 | 5  | 8  |
| D         | I                      | 4 | 5  | 12 |
| E         | F, H                   | 1 | 3  | 17 |
| F         | I                      | 2 | 3  | 10 |
| G         | J                      | 3 | 9  | 15 |
| H         | J                      | 7 | 8  | 9  |
| I         | ----                   | 3 | 11 | 13 |
| J         | ----                   | 7 | 10 | 13 |

### RED del Proyecto.



Dada la Red del proyecto, usando los tiempos promedios calculados para las actividades, Se le pide:

- ¿Cuál es la duración del proyecto?
- ¿Cuáles son las actividades críticas y el camino crítico?
- ¿Qué información le proporciona el tiempo de iniciación más temprano de la actividad G?
- ¿Cuánto tiempo se pueden retrasar las actividades D y F sin retrasar la duración del proyecto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto sea ejecutado dentro de 27 días?
- ¿Por qué no siempre es siempre bueno asumir que se debe considerar sólo el camino con las actividades críticas para la determinación del tiempo de finalización del proyecto?

### Respuestas.

- La duración del proyecto es de 32 días.
- Las actividades críticas son A, C, G, J. Se muestran en el resultado del programa QSB, en "critical paths" y sobre la red se presenta con línea roja para diferenciarlas de las demás actividades.
- Informa que lo más temprano que puede iniciarse la actividad G es a partir de la fecha correspondiente a 13 días después de iniciado el proyecto.
- Se pueden retrasar 8 y 5 días, respectivamente, a partir de su fecha más temprana de iniciación.
- Desviación estándar = 3.16       $Z = 1.5823$        $P_{27} = 0.057$
- Siendo promedios los tiempos utilizados, los tiempos de las actividades críticas pueden variar lo suficiente para que un nuevo camino crítico se forme.

## Solución con QSB.

Se le asignó el nombre “Pertej” (PERT, ejemplo) al archivo de computadora usado para el proyecto.

### Input Data Describing Your Problem Pertej Page 1

| Activity number | Activity name | Start node | End node | Optimistic Time | Most likely Time | Pessimistic Time |
|-----------------|---------------|------------|----------|-----------------|------------------|------------------|
| 1               | <A>           | <1>        | <2>      | <2.0000>        | <8.0000>         | <14.0000>        |
| 2               | <B>           | <1>        | <4>      | <3.0000>        | <12.0000>        | <21.0000>        |
| 3               | <E>           | <2>        | <3>      | <1.0000>        | <3.0000>         | <17.0000>        |
| 4               | <C>           | <2>        | <4>      | <2.0000>        | <5.0000>         | <8.0000>         |
| 5               | <D>           | <2>        | <5>      | <4.0000>        | <5.0000>         | <12.0000>        |
| 6               | <F>           | <3>        | <5>      | <2.0000>        | <3.0000>         | <10.0000>        |
| 7               | <H>           | <3>        | <6>      | <7.0000>        | <8.0000>         | <9.0000>         |
| 8               | <G>           | <4>        | <6>      | <3.0000>        | <9.0000>         | <15.0000>        |
| 9               | <I>           | <5>        | <7>      | <3.0000>        | <11.0000>        | <13.0000>        |
| 10              | <J>           | <6>        | <7>      | <7.0000>        | <10.0000>        | <13.0000>        |

### PERT Analysis for Pertej Page 1

| Activity No. | Name | Activity Exp.Tm. | Var.   | Earliest Start | Latest Start | Earliest Finish | Latest Finish | Slack LS-ES |
|--------------|------|------------------|--------|----------------|--------------|-----------------|---------------|-------------|
| 1            | A    | 8.0000           | 4.0000 | 0              | 0            | 8.0000          | 8.0000        | Critical    |
| 2            | B    | 12.0000          | 9.0000 | 0              | 1.0000       | 12.0000         | 13.0000       | 1.0000      |
| 3            | E    | 5.0000           | 7.1111 | 8.0000         | 9.0000       | 13.0000         | 14.0000       | 1.0000      |
| 4            | C    | 5.0000           | 1.0000 | 8.0000         | 8.0000       | 13.0000         | 13.0000       | Critical    |
| 5            | D    | 6.0000           | 1.7778 | 8.0000         | 16.0000      | 14.0000         | 22.0000       | 8.0000      |
| 6            | F    | 4.0000           | 1.7778 | 13.0000        | 18.0000      | 17.0000         | 22.0000       | 5.0000      |
| 7            | H    | 8.0000           | 0.1111 | 13.0000        | 14.0000      | 21.0000         | 22.0000       | 1.0000      |
| 8            | G    | 9.0000           | 4.0000 | 13.0000        | 13.0000      | 22.0000         | 22.0000       | Critical    |
| 9            | I    | 10.0000          | 2.7778 | 17.0000        | 22.0000      | 27.0000         | 32.0000       | 5.0000      |
| 10           | J    | 10.0000          | 1.0000 | 22.0000        | 22.0000      | 32.0000         | 32.0000       | Critical    |

Expected completion time = 32

Critical paths for Pertej with completion time = 32

CP # 1 : (with variance = 10 )

1=====> 2=====> 4=====> 6=====> 7

### Probability Analysis for Pertej

The following probability calculations assume that activities are independent and that all paths are also independent. It also assumes that your network has a large enough number of activities so as to enable use of the normal distribution. Therefore, when the activities are not independent or the number of activities is not large, the following analysis may be highly biased.

Expected completion time = 32

What is your project schedule time (type 0 to end analysis) ? 27

On CP # 1 : Variance = 10 Standard deviation = 3.162278  
Probability of finishing within 27 is 5.692041E-02

The probability of finishing the whole project within 27 is 5.692041E-02

Do you want to enter a new scheduled completion time (Y/N)?



# CAPITULO V

## TEORIA de COLAS

*Objetivo: Proponer, en forma cuantitativa, acciones o decisiones que mejoren la forma en que opera un específico sistema de espera, mediante la teoría y práctica de la Teoría de Colas.*

### V.A SECCION A. ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE ESPERA

#### V.A.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la Teoría de Colas

1. La teoría de colas es un estudio de las líneas de espera, filas o colas.
2. La teoría intenta estudiar las causas y remedios para el congestionamiento. Consecuentemente desarrolla modelos usando técnicas de procesos aleatorios.
3. El objetivo es mejorar la forma en que operan los sistemas para hacerlos más eficientes.
4. La teoría de colas se basa en que los procesos de llegada y tiempos de servicio, en los sistemas de espera, pueden ser descritos por apropiadas distribuciones probabilísticas. A partir de esas distribuciones se pueden derivar los modelos para esos sistemas.
5. Los tiempos de servicio y el proceso de llegada son independientes en el sentido de que la duración del servicio no depende de cuando ocurra la llegada (ni los tiempos de llegada dependen de la duración del servicio), pero el proceso de servicio es dependiente del proceso de llegada, en el sentido de que no puede comenzar hasta que la llegada haya ocurrido
6. Un sistema de espera está conformado por las unidades que llegan a recibir servicio (constituyendo las filas, colas o líneas de espera) y las unidades que prestan el servicio, que son los servidores.
7. Una línea de espera se forma en cualquier parte en que la demanda de un servicio supera su capacidad. Esto ocurre siempre que los patrones de servicio (forma en que se presta el servicio) y los patrones de llegada (forma en ocurren las llegadas) son probabilísticas.
8. Las unidades que llegan y las que prestan servicio tiene una amplia variedad de acepciones.
9. Las unidades que llegan pueden ser personas, carros, cartas, aviones, barcos, llamadas telefónicas. Carros llegando a peajes, carros llegando a semáforos, etc.
10. De la misma forma las unidades que prestan servicio pueden ser cajeros, secretarias, fotocopadoras, aeropuertos, muelles, líneas telefónicas, peajes, semáforos etc.

11. Describir el sistema de espera es importante para derivar el modelo que representa ese sistema. Los modelos derivados son del tipo estocásticos o probabilísticos, porque en los sistemas que ellos representan está presente el factor aleatorio.
12. La descripción de un sistema implica analizar los siguientes **aspectos**: a) El proceso de llegada, b) La configuración de la fila. c) La disciplina en la fila, e) La disciplina en el servicio y f) El servicio.
13. El proceso de llegadas se refiere al arribo de las unidades, que solicitan servicio, al sistema. Describir el proceso de llegada es definir si las unidades llegan de una fuente finita o infinita, si llegan en grupo o en unidades simples, si llegan de una fuente única o variada, si están controladas total o parcialmente, o no lo están; y finalmente como un punto muy importante, definir el tipo de distribución probabilística que tienen.
14. La configuración de la fila se refiere a la forma que presenta la fila. Su descripción incluye: La definición del tipo de cola, si es física o conceptual, determinar el número de filas y definir si hay o no restricciones en el número de unidades.
15. La disciplina en la fila de espera se refiere a la conducta que siguen las unidades al llegar al sistema. Su descripción implica definir la forma de comportamiento de la unidad, si el sistema está lleno y se rechaza a la unidad, si selecciona la fila aleatoriamente o la más corta, si es paciente y espera su servicio.
16. La disciplina en el servicio se refiere a las políticas que aplica la unidad de servicio para seleccionar la unidad a la que se le prestará servicio. Su descripción implica determinar si la unidad entra aleatoriamente, si entra por prioridades, si la primera que entra es la primera que sale o si la última que entra es la primera que sale.
17. El servicio está representado por las unidades que prestan servicio. Para describirlo debe determinarse si hay uno o varios servidores, si están en serie o en paralelo. Además, algo muy importante para la elaboración del modelo del sistema lo constituye la determinación de la distribución probabilística de los tiempos en que se presta el servicio.
18. De todos estos aspectos, que se pueden determinar por observación, las distribuciones probabilísticas, de las llegadas y de los tiempos de servicio, deben ser objeto de comprobación estadística mediante el uso de la prueba chi cuadrado. Esta prueba permite determinar si distribuciones empíricas, observadas, se adaptan o no a determinadas distribuciones teóricas.
19. Una vez descrito el sistema, el modelo que lo representa puede ser elaborado.
20. La clasificación de los sistemas de espera se hace tomando en cuenta los aspectos señalados. La notación de Kendall descrita como  $X/Y/Z$  es una de las más usadas para la clasificación. El espacio  $X$  describe el proceso de llegada,  $Y$  describe el proceso de servicio y  $Z$  el número de servidores.
21. En 1971 la Conferencia de estandarización de la notación en Teoría de Colas extendió la Notación de Kendall agregándole más términos.

22. La toma de decisiones, con técnicas cuantitativas, en los sistemas de espera, sigue el mismo esquema estudiado para el análisis cuantitativo.
23. La solución del modelo de un sistema de espera puede realizarse mediante simulación o en forma analítica. Con la simulación, el investigador de operaciones realiza lo que en el laboratorio hace el científico, experimenta. Con la forma analítica, aplica matemática para la solución.
24. La solución del modelo provee valores, llamados **CARACTERISTICAS OPERACIONALES**, que informan como está operando el sistema descrito.
25. Las Características Operacionales, conjuntamente con valores obtenidos de las distribuciones probabilísticas o con información adicional, permiten tomar acción sobre los elementos componentes del sistema para efectuar cambios en el sistema.

## **V.B SECCION B. Practica de Modelos de Sistemas de Espera.**

### **V.B.1 Sistema de Espera: Elementos componentes que lo definen y aspectos que presenta**

Sistema de Espera que se presenta en los sitios de comida rápida:

Cada cliente que llega sería deseable atenderlo de inmediato, pero a veces llegan más clientes de los que puede atender el personal. Por lo tanto, se forman las colas, filas o líneas de espera. Si hay preocupación por la cantidad de tiempo de espera para servir a cada cliente debido a que los métodos actuales están resultando ineficientes, puede determinarse que hay que reducir los tiempos de servicio y mejorar el servicio.

En una caja registradora un servidor toma la orden, calcula y dice cuánto es el monto a pagar, toma el dinero del cliente y llena la orden. Luego otro cliente es atendido por el servidor.

Esto es el caso de un sistema donde existe una sola línea de espera con un servidor. (15)

Para definir el proceso de llegadas (14) debe determinarse la distribución de probabilidad para el número de llegadas en un período de tiempo dado. En muchos sistemas de espera las llegadas ocurren en una forma aleatoria, una llegada es independiente de la otra, y no es posible saber cuando llegará un cliente.

En esos casos se ha encontrado que la distribución probabilística Poisson provee una buena descripción del proceso de llegadas.

En la práctica, se debe observar a las llegadas por períodos de tiempo durante varios días o semanas. Como segundo paso se debe aplicar la prueba estadística chi cuadrado para comprobar que, efectivamente, la distribución Poisson proporciona una aproximación razonable a la distribución de las llegadas observadas.

Cada cliente que llega se une a la cola y espera para ser servido, la disciplina (16) que sigue en fila es de ser paciente.

El tiempo de servicio (18) comienza en el momento en que se empieza a atender al cliente. Los tiempos de servicio son variables, raramente constantes, pues cada cliente ordena cosas y cantidades diferentes.

También se ha determinado que en estos casos la distribución exponencial proporciona una buena aproximación de los tiempos de servicio en líneas de espera.

En la práctica, se debe observar (lo mismo que para las llegadas) datos sobre los tiempos en que se sirve a cada cliente, por períodos de tiempo de varios días o semanas. Como segundo paso se debe aplicar la prueba estadística chi cuadrado para comprobar que, efectivamente, la Distribución Exponencial proporciona una aproximación razonable a la distribución de los tiempos de servicio observados.

Para describir la disciplina en el servicio (17) se debe definir la manera en que se seleccionan los clientes que van a recibir servicio. En estos sistemas de comida rápida, casi siempre, el primero que llega es el primero que se sirve.

Al abrir el local de comida rápida, no hay clientes. Luego, las actividades del negocio, alcanzan un estado estable. El período inicial es el período transitorio. Este período finaliza cuando se alcanza el estado normal o estado permanente o estacionario de operación.

De esta forma, se ha descrito un sistema de espera a través de sus aspectos. Estos sistemas se representan en los modelos de la Teoría de Colas y su solución proporciona las Características Operacionales de las líneas de espera en régimen permanente.

Cada sistema es diferente. Aunque parecerían demasiados aspectos que deben cumplirse, para ser representados en un modelo, puede comprobarse que en cada sistema cada uno de estos aspectos, con particularidades específicas, están presentes.

Los aspectos que presenta el sistema de Modelo M/M/1, el cual se estudiará a continuación, son los más comunes. Por eso se le llama también Modelo Popular

## V.C SECCION C. MODELO M/M/1 según la Notación de Kendall.

### V.C.1 Esbozo de conceptos y aspectos relevantes de la teoría

1. Este modelo se deriva en sistemas de espera descritos con los siguientes **aspectos**: a) Proceso de llegada: Fuente infinita, llegadas simples, no controladas, que ocurren independientemente, de acuerdo a la distribución Poisson, b) Configuración de la fila: Fila única sin restricción en el número de unidades, c) Disciplina en la fila: Unidades pacientes. d) Disciplina en el servicio: Primero que llega, primero que sale. e) Servicio: Un solo servidor, y los tiempos en que se presta el servicio se distribuyen exponencialmente.
2. La derivación del modelo está bien documentada en la bibliografía de la asignatura. A continuación se presentan las ecuaciones componentes del modelo que describe este sistema:

$$\text{a. } \frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t)$$

$$\text{b. } \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

En el modelo  $\lambda$  es la tasa media de llegadas o número promedio de unidades que llegan al sistema por unidad de tiempo.  $\mu$  es la tasa media de servicio o número promedio de unidades servidas por unidad de tiempo.

3. En la distribución Poisson:  $\lambda\tau$  es la media de la distribución. Donde  $\tau$  es el intervalo de tiempo de observación.  $1/\lambda$  es el tiempo medio entre llegadas. En la distribución exponencial,  $1/\mu$  es el tiempo promedio en que se presta servicio a una unidad.
4. La solución a este modelo, donde las probabilidades dependen del tiempo, esta fuera del alcance de esta asignatura; por ello, su solución analítica se hace en régimen permanente, cuando el proceso es estacionario y no depende del tiempo. Este proceso estacionario se logra cuando  $\lambda$  es menor que  $\mu$ .
5. Muchas decisiones en sistemas de espera involucran comparación de conductas en el largo plazo. En esos casos los resultados en régimen estacionario son suficientes. Si se sabe que no es estacionario, una forma de eliminar esa dificultad, es aislar los periodos de tiempo donde el proceso es relativamente estacionario, restringiendo el modelo y sus conclusiones a esos periodos.
6. El intervalo de tiempo en que  $\lambda$  y  $\mu$  pueden ser consideradas constantes debe ser sensiblemente mayor que el necesario para lograr la estabilización. Es conveniente tomar como intervalo de medida una duración superior a 3 ó 4 veces la duración de la estabilización.
7. En régimen permanente o estacionario, la solución del modelo proporciona: Las Probabilidades en Proceso Estacionario y las Características Operacionales que informan cómo esta operando el sistema. Así pues proporciona: a)  $P_0$ : que es la probabilidad de que exista cero unidades en el sistema, b)  $P_n$ : Probabilidad de que existan  $n$  unidades en el sistema, para  $n > 0$ , c) Tiempo

promedio esperado en la fila, d) Tiempo promedio esperado en el sistema, e) Número promedio de unidades en el sistema, f) Número promedio de unidades en la fila. Como todo valor promedio, tiene sus varianzas respectivas.

8. Otros valores, derivados de las distribuciones Poisson y Exponencial, también pueden ser usados para ayudar en la toma de decisiones. Estos son: a) Probabilidad de que la unidad espere más de  $t$  unidades de tiempo en el sistema y b) Probabilidad de que la unidad espere más de  $t$  unidades de tiempo en la fila.
9. Otros valores que pueden ser utilizados para tomar decisiones en este sistema de espera y que pueden obtenerse con información adicional, cuando se la tiene, son: a) Ratio de Pérdida de Clientes y b) Tasa de Servicio de Costo Optimo.
10. El Ratio de Pérdida de Clientes resulta de dividir el tiempo promedio esperado en la fila (numerador) y el tiempo promedio en que recibe servicio la unidad (denominador). Mientras mayor sea este valor o relación entre estos dos valores, más fácil será que el cliente abandone el sistema.
11. La Tasa de Servicio de Costo Optimo se puede obtener al derivar, con relación a la tasa de servicio, la curva de costos totales: Servir, y esperar. Se obtendrá la tasa de servicio donde los costos serán menores. Sólo puede ser usada cuando se disponga de costos de esperar y de servir.
12. Cada uno de estos valores se calcula con una fórmula obtenida tanto de la solución del modelo, como de las distribuciones probabilísticas. La terminología usada es convencional y se presentan en hoja anexa.
13. El gerente en un sistema de espera generalmente tiene a su mando la unidad de servicios, por lo que su acción principal será sobre este elemento componente del sistema. Por otro lado, las llegadas en este modelo no son controladas de ninguna forma.
14. La toma de acciones o decisiones en este específico sistema puede hacerse entonces de dos maneras: a) Por nivel de aspiración y b) Por valores óptimos.
15. Decidir por nivel de aspiración significa aplicar una tasa de servicio (o tiempo de servicio) que se obtiene al satisfacer una o más características operacionales deseadas (de acuerdo a lo que aspire el que toma la decisión).
16. El Análisis de Sensibilidad de la solución con cambios en la tasa de servicio, permaneciendo constantes las llegadas, facilita la decisión.
17. Decidir por valores óptimos significa aplicar una tasa de servicio de costo óptimo, porque se tiene información acerca de los costos de servir y de esperar en ese sistema.
18. Debe recordarse que los valores a utilizar para tomar decisiones son solo números. Una vez calculado el valor de la tasa de servicio a aplicar, el tomador de decisiones deberá determinar cómo lograr realmente que esa tasa se cumpla, para lo que deberá tomar las medidas administrativas necesarias. Es decir, debe implementar la decisión.

## V.C.2 VALORES UTILIZADOS CON EL MODELO M/M/1 PARA TOMAR DECISIONES

### V.C.2.1.1 Probabilidades en Proceso Estacionario o Régimen Permanente:

1.1-Probabilidad de cero unidades en el sistema: probabilidad de que esté desocupado el servidor.

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

1.2.-Probabilidad de n unidades en el sistema: probabilidad de que el sistema este ocupado, con n unidades. Siendo  $n > 0$

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad P_n = P_0 (L_t)^n$$

### V. C.2.2. Características Operacionales:

2.1 -Número promedio de unidades en la fila:

$$U_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad U_f = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

2.2- Número promedio de unidades en el sistema:

$$U_s = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

2.3-Tiempo promedio esperado en la fila:

$$T_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

2.4-Tiempo promedio esperado en el sistema:

$$T_{ES} = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$



Debido a que los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  aparecen juntos como un ratio, es convencional reemplazarlos por el parámetro simple  $\rho$  ( letra griega rho). Más explícitamente simbolizado como  $I_t$  en nuestra terminología. Representa la Intensidad de Tráfico.

La interpretación de este parámetro puede obtenerse de la solución en situación estacionaria. Siendo  $P_0$ , la probabilidad de que no existan unidades en el sistema, es decir que el sistema esté desocupado. Entonces la probabilidad de que el sistema esté ocupado será igual a  $(1 - P_0)$ .

Siendo  $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$  Entonces:

Probabilidad de sistema ocupado =  $1 - \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)$  Resolviendo queda:

Probabilidad de sistema ocupado =  $\lambda / \mu$

Esto es lo que se llama intensidad de tráfico, representada con la letra griega  $\rho$  (rho) en la simbología de la bibliografía y para la cual utilizaremos la simbología  $I_t$  (Intensidad de Trafico) en el aula de clases.

Cada uno de los valores promedio de las Características Operacionales tiene su dispersión. Esta dispersión, es medida con la varianza de cada uno de esos valores. No se colocarán sus fórmulas en este manual.

### V. C. 2. 3. Valores que pueden obtenerse con información adicional.

3.1-Ratio de Pérdida de clientes = Tiempo esperado en la fila / tiempo de servicio

$R_{pc} = T_f / (1/\mu)$  de donde se obtiene:

$$R_{pc} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

Mide la relación que hay entre el tiempo que espera la unidad para ser servida y el tiempo en que es servida. Por lo tanto, a medida que esta relación es mayor, la unidad tiende a irse del sistema pues es mucho el tiempo que debe esperar, en comparación al tiempo en que recibe el servicio.

### 3.2- Tasa de servicio de costo óptimo:

$$\mu = \lambda + \sqrt{\lambda \frac{C_e}{C_s}} \quad \text{Donde: } C_e \text{ es el costo de esperar y}$$

$C_s$  es el costo de servir

El costo de esperar se obtiene multiplicando el costo de esperar por el número promedio de unidades que esperan en el sistema. El costo de servir se obtiene Al multiplicar el costo marginal de servir por el número promedio de unidades servidas por unidad de tiempo.

### V. C. 2. 4. Valores obtenidos de las Distribuciones Probabilísticas:

4.1-Probabilidad de que la unidad espere más de t unidades de tiempo en el sistema:

$$P_{ts} = e^{-t/T_{ES}}$$

Donde t es el intervalo de tiempo en el sistema y  $T_{ES}$  el tiempo esperado en el sistema

4.2-Probabilidad de que la unidad espere más de t unidades de tiempo en la fila:

$$P_{Tf} = I_t e^{-t/T_{ES}}$$

Donde t es el intervalo de tiempo en la fila y  $T_{ES}$  el tiempo esperado en el sistema.

## V. D SECCION D. PRACTICA con el Modelo M/M/1. Toma de Decisiones

### Ejemplo 1.

Suponga que usted es un Corredor de Bolsa de una conocida firma de la ciudad. Como tal, debe procesar transacciones que le llegan a una tasa media de 20 por hora. Cada orden recibida requiere un promedio de tiempo de 2 minutos para procesarla. Usted conoce el modelo M/M/1 y ha determinado que las condiciones están dadas para su aplicación. Por lo tanto, utiliza el modelo y procede a calcular los valores resultantes.

$\lambda = 20$  órdenes llegan por hora

$1/\mu = 2$  minutos  $\therefore \mu = 1/2$   $\mu = 0.5$  órdenes son atendidas por minuto.

$\mu = 30$  órdenes son atendidas por hora.

Recuerde que ambos parámetros deben ser expresados en la misma unidad de tiempo.

Probabilidad de cero unidades en el sistema:  $P_0 = 1 - 20/30$   $P_0 = 0.33$

Número de unidades en el sistema:  $20 / (30 - 20) = 2$  órdenes promedio esperan en el Sistema. Incluye las que están en fila y las que están siendo atendidas.

Número de unidades en la fila:  $(20)^2 / 30(30 - 20) = 1.33$  órdenes en promedio esperando en la fila para ser atendidas.

Tiempo en el sistema:  $1 / 30 - 20 = 0.1$  horas = 6 minutos. Este es el tiempo promedio que espera una orden desde que llega hasta que sale procesada. Incluye el tiempo de espera antes de ser procesada y el tiempo en que es procesada.

Tiempo en la fila:  $20 / 30(30 - 20) = 0.0667$  horas = 4 minutos es el tiempo que espera en la fila una orden antes de ser procesada.

$\rho = \lambda t = 20 / 30 = 0.66$  es la probabilidad de que el Corredor este ocupado. También puede decir que el Corredor está ocupado el 66% del tiempo.

Probabilidad de que existan 6 órdenes en el sistema:  $(20/30)^6 (0.33) = 0.0273$

Si se observan los resultados, se conocen cosas importantes acerca de la forma en que opera el sistema. Se ve que una orden tarda 4 minutos antes de ser atendida o procesada. Si se quiere servicio rápido, esto sería un indicador que debe considerarse. También se observa que el 66% de las órdenes que llegan tienen que esperar por servicio.

Así pues, si las características de operación son insatisfactorias, debe diseñar alternativas para mejorar la forma de operación del sistema.

La acción de mejoramiento generalmente se hace sobre la unidad de servicio. En este caso el Corredor puede: a) Aumentar la tasa de servicio empleando nueva tecnología o b) Contratar otro Corredor para servir más órdenes por unidad de tiempo.

Se analizará la primera alternativa. En el segundo caso se estaría presente en un sistema con más de un servidor, para el cual debe utilizarse otro modelo.

En la primera alternativa, el Corredor estima que puede servir 35 órdenes por hora. Considerando que permanecen constantes las llegadas, las nuevas características operacionales muestran mejoramiento. Eso es particularmente notorio en el tiempo de espera en el sistema.

Probabilidad de cero unidades en el sistema: 0.43

Número de unidades en el sistema: 1.33

Número de unidades en la fila: 0.76

Tiempo en el sistema: 4 minutos

Tiempo en la fila: 2.29 minutos

$\rho = \lambda t = 0.57$

Probabilidad de que existan 6 órdenes en el sistema: 0.0144

Los nuevos resultados, muestran mejoramiento de las características operacionales por el aumento en la tasa de servicio. Particularmente, el tiempo esperado en el sistema se ha reducido de 6 a 4 minutos.

En caso de que no se tenga muy claro cuáles características operacionales se desea mejorar, puede realizarse análisis de sensibilidad de la solución, realizando cambios en la tasa de servicio. Este análisis muestra para cada una de las tasas, los nuevos valores de las características operacionales considerando que permanecen constantes las llegadas.

El comportamiento del sistema con diferentes tasas, permite al Corredor decidir con mayor facilidad. El análisis de sensibilidad de la solución cuando cambia la tasa de servicio muestra los efectos ocasionados y se muestra a continuación.

| $\mu$ | $P_0$ | $\rho = \lambda t$ | $U_f$ | $U_s$ | $T_f$  | $T_s$  |
|-------|-------|--------------------|-------|-------|--------|--------|
| 24    | 0.17  | 0.83               | 4.166 | 5     | 0.2083 | 0.25   |
| 27    | 0.26  | 0.74               | 2.11  | 2.85  | 0.106  | 0.1429 |
| 30    | 0.33  | 0.66               | 1.33  | 2     | 0.0667 | 0.1    |
| 35    | 0.43  | 0.57               | 0.76  | 1.33  | 0.038  | 0.0667 |
| 37    | 0.54  | 0.46               | 0.63  | 1.18  | 0.032  | 0.058  |

Los modelos estocásticos han revelado que existe un conflicto inevitable entre el deseo de mantener ocupado el servidor y el de mantener corta la longitud promedio de la cola

Como puede observar en el análisis, a medida que el servidor está más ocupado la cola se hace más larga.

Para este mismo problema y tomando la información del enunciado, conteste lo siguiente:

- 1.-¿Qué porcentaje de órdenes tomará menos de 1 minuto procesarlas?
- 2.-¿Qué porcentaje de órdenes será procesado en exactamente 3 minutos?

Respuestas al final del texto.

## Ejemplo 2.

Car's Auto-tienda tiene un empleado que se encarga de instalar sistemas de alarma a carros y lo hace a una tasa promedio de 3 por hora; cerca de 1 cada 20 minutos. Los clientes que solicitan este servicio llegan en promedio de 2 por hora. Los aspectos del sistema M/M/1 se encuentran aquí presentes. ¿Cómo es el comportamiento de este sistema?

RESPUESTA.

Información disponible:

$$\lambda = 2 \text{ clientes por hora, o 2 carros por hora}$$

$$\mu = 3 \text{ clientes servidos por hora}$$

Las Características Operacionales muestran como se comporta el sistema, por lo tanto es necesario calcularlas.

$$U_f = \lambda^2 / (\mu(3 - \lambda)) = 1.33 \text{ carros en promedio esperando en la fila (incluye los que están esperando por la instalación)}$$

$$U_s = \lambda / (\mu - \lambda) = 2 \text{ carros en promedio esperando en el sistema (incluye los que están esperando por la instalación y el que está siendo servido)}$$

$$T_f = \lambda / (\mu(3 - \lambda)) = 2/3 \text{ hora} = 40 \text{ minutos}$$

$$T_s = 1 / (\mu - \lambda) = 1 \text{ hora}$$

$$I_t = \rho = \lambda / \mu = 0.67 \text{ es la probabilidad de que el instalador esté ocupado.}$$

$$P_0 = 1 - \lambda / \mu = 0.33 \text{ es la probabilidad de que no esté ningún carro en el sistema.}$$

Ahora que se han calculado esos valores puede tomar decisiones por nivel de aspiración.

- a) Si se desea que el cliente no espere en el sistema (fila y servicio) más de 50 minutos y a la vez se quiere una ocupación del instalador (servidor) sobre el 60 % del tiempo, permaneciendo constantes las llegadas ¿Cuál es la tasa de servicio que satisface esas condiciones?

$$\text{Nivel de aspiración: } T_s < 50 \text{ minutos} \quad \text{y} \quad I_t > 0.60$$

Datos ó información disponible:

$$\lambda = 2 \text{ clientes por hora, o } 2 \text{ carros por hora} = 0.0333 \text{ por minuto}$$

$$\mu = 3 \text{ clientes servidos por hora}$$

Valor que debe calcularse:

$$\mu = ?$$

Características operacionales que se desean:  $T_s < 50$  minutos y  $It > 0.60$

$$\frac{1}{\mu - 0.0333} < 50 \text{ minutos} \quad \therefore \quad \mu > 0.0533 \text{ por minuto} = 3.19 \text{ por hora}$$

$$2 / \mu > 0.60 \quad \therefore \quad \mu < 3.33 \text{ por hora} = 0.0556 \text{ por minuto}$$

La tasa de servicio que satisface esas condiciones debe estar entre 3.19 y 3.33 carros en promedio servidos por hora. Como se establece, estos son valores promedios. El logro de esta tasa dependerá de las medidas administrativas que se apliquen; recuerde que el modelo solo provee números (cantidades).

b) ¿Cuál es la variación en el tiempo medio de servicio que debe lograrse para tener un ratio de pérdida de clientes  $< 1.5$ ? (las llegadas permanecen constantes)

$$R_{pc} = \text{Tiempo esperado en la fila} / \text{tiempo de servicio} = \lambda / \mu - \lambda$$

$$\frac{2}{\mu - 2} < 1.5 \quad \therefore \quad \mu > 3.33 \text{ carros por hora}$$

El nuevo tiempo de servicio es:  $1 / 3.33 = 0.30$  horas = 18 minutos

La variación que debe lograrse en el tiempo medio de servicio es de 2 minutos:

$$\text{Tiempo anterior} - \text{tiempo nuevo} = 20 - 18 = 2 \text{ minutos}$$

La solución del modelo no considera factores de costo que permitan una decisión óptima. Algunas veces la decisión requiere que la gerencia haga un balance entre el incremento de los costos para mejorar el servicio y la disminución que se obtiene por proveer ese servicio.

### Ejemplo 3.

En un taller mecánico, la gerencia está considerando contratar un nuevo mecánico para manejar todos los cambios de cauchos para los clientes que ordenan nuevos juegos de cauchos. Dos mecánicos han solicitado el trabajo. Uno de ellos tiene experiencia limitada y puede ser contratado pagándole Bs. 500 la hora. Se espera que este mecánico pueda atender un promedio de 3 clientes por hora. El otro mecánico tiene varios años de experiencia, puede servir un promedio de 4 clientes por hora y se le pagaría Bs. 1.000 la hora. Asuma que los clientes arriban a una tasa de 2 por hora. En el sistema es aplicable el modelo M/M/1. (¿Recuerda los aspectos que presenta un sistema donde se aplica el modelo M/M/1?)

- a) Calcule las características Operacionales con cada mecánico.
- b) Si el taller asigna un costo de espera a cada cliente de Bs. 1.500 por hora, ¿Cuál mecánico proporciona el menor costo de operación?

Respuestas:

a) Para el mecánico 1, la tasa de servicio  $\mu = 3$  clientes por hora

Para el mecánico 2, la tasa de servicio  $\mu = 4$  clientes por hora

En ambos casos  $\lambda = 2$  clientes por hora

| Características operacionales                | Mecánico 1   | Mecánico 2 |
|--|--------------|------------|
| Promedio de clientes esperando en la fila.   | 1.33         | 0.5        |
| Promedio de clientes esperando en el sistema | 2            | 1          |
| Tiempo promedio esperado en la fila          | 0.6667 horas | 0.25 horas |
| Tiempo promedio esperado en el sistema       | 1 hora       | 0.5 horas  |
| Probabilidad de esperar                      | 0.6667       | 0.5        |

Costo total del mecánico 1:

Costo de esperar: 1500Bs/hora ( 2 clientes) = 3.000 Bs.

Costo de servir: 500Bs/hora

Costo total = 3.000 + 500 = 3500 Bs. por hora

Costo total del mecánico 2:

Costo de esperar: 1500Bs/hora (1 cliente) = 1.500 Bs.

Costo de servir: 1.000Bs/hora

Costo total = 1.500 + 1.000 = 2.500 Bs. por hora.

Por lo tanto si el costo por hora es menor con el mecánico 2, la decisión es contratar al mecánico 2.

#### Ejemplo 4.

Una franquicia de comida rápida, está pensando abrir operaciones de servicio por ventanilla a los clientes, desde su vehículo. Los clientes que llegan al intercomunicador a colocar órdenes y luego manejan hasta la ventanilla para pagar y recibir sus órdenes lo hacen a una tasa de 24 por hora. En el sistema es aplicable el modelo M/M1. Se está considerando las alternativas siguientes:

-Realizar la operación con un solo empleado que llene la orden y reciba el dinero del cliente. En esta alternativa, el tiempo promedio de servicio es de 2 minutos.

-Realizar la operación con un empleado y un ayudante que tome el dinero del cliente. En esta alternativa, el tiempo promedio de servicio es de 1.25 minutos.

En ambos caso es un sistema de una sola ventanilla, por lo que se mantiene el sistema de un solo servidor, modelo M/M/1. Se le pide:

- Calcule las Características Operacionales para cada alternativa.
- Tome una decisión.
- Si dispone de información del costo de espera de 2.500 por hora, pues es considerado alto este costo en los servicios de comida rápida y el costo de cada empleado es de 800 por hora, siendo además cargado Bs. 2.000 por equipos y espacio. ¿Cuál sería la alternativa de menor costo para el servicio?

Respuestas:

|               | P0  | Uf  | Tf     | Us | Ts     | Pe  |
|---------------|-----|-----|--------|----|--------|-----|
| Alternativa 1 | 0.2 | 3.2 | 0.1333 | 4  | 0.1667 | 0.8 |
| Alternativa 2 | 0.5 | 0.5 | 0.02   | 1  | 0.0417 | 0.5 |

a) Las características operacionales informan que en la alternativa 1 el sistema opera de la siguiente manera: 0.2 de probabilidad de estar desocupado el servidor; 3.2 clientes promedio esperan en la fila; 0.1333 horas en promedio espera cada cliente para ser servido; 4 clientes en promedio esperan en el sistema (fila y siendo servido); 0.1667 horas en promedio espera cada cliente desde que entra hasta que sale del sistema; hay una probabilidad de 0.8 de que un cliente que llega tenga que esperar.

Las características operacionales informan que en la alternativa 2 el sistema opera de la siguiente manera: 0.5 de probabilidad de estar desocupado el servidor; 0.5 clientes promedio esperan en la fila; 0.02 horas en promedio espera cada cliente para ser servido; 1 cliente en promedio espera en el sistema (fila y siendo servido); 0.0417 horas en promedio espera cada cliente desde que entra hasta que sale del sistema; hay una probabilidad de 0.5 de que un cliente que llega tenga que esperar.

b) La mejor alternativa es la 2 por proporcionar una mejor operación del sistema

c) Se calculan los costos totales en las dos alternativas:

Alternativa 1: Costo del empleado = 800 Costo adicional imputable al servicio = 2.000  
 Costo de esperar = 2.500 Bs/hora. 4 unidades esperan en el sistema  
 Costo de esperar =  $2.500(4) = 10.000$   
 Costo total = Costo de esperar + costo de servir  
 Costo total =  $10.000 + 800 + 2000 = 12.800$

Alternativa 2: Costo de los empleados = 800 (2)  
 Costo adicional imputable al servicio = 2.000  
 Costo de esperar = 2.500 Bs/hora. 1 unidad espera en el sistema  
 Costo de esperar =  $2.500(1) = 2.500$   
 Costo total = Costo de esperar + costo de servir  
 Costo total =  $2.500 + 800 + 2000 = 5.300$

La alternativa de menor costo para el servicio es la 2 por ser la de menor costo.



## V.E SECCION E. USO DEL COMPUTADOR EN SISTEMAS DE ESPERA.

Los modelos que provee la Teoría de Colas pueden ser solucionados en forma analítica y por simulación. Los procesos en ambos casos son programables en computadora y por lo tanto existen en el mercado programas comerciales para tal efecto.

### V.E.1 USO DEL PROGRAMA QSB

En esta sección se utilizará el QSB, de sencilla aplicación, el cual provee en su solución los resultados correspondientes a las características operacionales.

Para ilustrarlo y comparar la solución, con los resultados obtenidos manualmente, se utilizara el ejemplo de la sección V. D, ejemplo2. A continuación se presenta el resultado.

#### Solving the Model for Caso2

**M/M/1**  
With lamda = 2 customers per hour and  $\mu = 3$  customers per hour

Utilization factor ( $\rho$ ) = .6666667  
Average number of customers in the system ( $L$ ) = 2  
Average number of customers in the queue ( $Lq$ ) = 1.333333  
Average time a customer in the system ( $W$ ) = 1  
Average time a customer in the queue ( $Wq$ ) = .6666666  
The probability that all servers are idle ( $P_0$ ) = .3333333  
The probability an arriving customer waits ( $P_w$ ) = .6666667

$P(1) = 0.22222$   $P(2) = 0.14815$   $P(3) = 0.09877$   $P(4) = 0.06584$

$\sum_{i=1}^4 P(i) = 0.534979$

Unificando la terminología usada en el programa con la terminología usada en clase se tiene:

$U_f = L_q = 1.33$  carros en promedio esperando en la fila (incluye los que están esperando por la instalación)

$U_s = L = 2$  carros en promedio esperando en el sistema (incluye los que están esperando por la instalación y el que está siendo servido)

$T_f = W_q = 2/3$  hora = 0.666 horas = 40 minutos

$T_s = W = 1$  hora

$I_t = \rho = 2/3 = 0.67$  es la probabilidad de que el instalador esté ocupado.

$P_0 = 1 - 2/3 = 0.33$  es la probabilidad de que no esté ningún carro en el sistema.

## V.E.2 USO DEL PROGRAMA LINGO.

Feasible solution found at step: 0

| Variable | Value     |
|----------|-----------|
| ARV_RATE | 2.000000  |
| SRV_TIME | 0.3330000 |
| NO_SRVRS | 1.000000  |
| LOAD     | 0.6660000 |
| PWAIT    | 0.6660000 |
| WAITCND  | 0.9970060 |
| WAITUNC  | 0.6640060 |

| Row | Slack or Surplus |
|-----|------------------|
| 1   | 0.0000000        |
| 2   | 0.0000000        |
| 3   | 0.0000000        |
| 4   | 0.0000000        |

## V.E.3. PROBLEMAS PARA RESOLVER.

En el problema planteado en el Ejemplo 1, sección D, Prácticas con modelo M/M/1, suponga que su negocio en la Bolsa crecerá en un 50%. Para cubrir la demanda creciente, tiene un nuevo corredor que realiza el trabajo con la misma velocidad con que lo hace Usted.

Conteste:

- ¿Por qué Usted sólo, no podría realizar las transacciones?
- ¿Cuál es la probabilidad de que los dos Corredores no estén trabajando, o procesando alguna orden, en algún momento en el tiempo?

Respuestas al final del texto.

A N E X O S

## ANEXO 1

### PROBLEMAS RESUELTOS

#### Capítulo II

##### Sección A.

Problema 2:

X1: Unidades de A producidas en total  
X2: Unidades de B producidas en total  
X3: Unidades de C producidas en total  
X4: Unidades de A vendidas  
X5: Unidades de B vendidas.

$$\text{Max } 700 X4 + 3.500 X5 + 7.000 X3$$

Sujeto a:

$$X1 + 2X2 + 3X3 \leq 40$$

$$X1 = X4 + 2 X2$$

$$X2 = X5 + X3$$

$$X1, X2, X3, X4, X5 \geq 0$$

##### Sección E.

Problema único para ser resuelto:

X1: Casas de Bajo Costo  
X2: Town-houses de Bajo Costo  
X3: Casas estándar  
 $\leq 100000$

$$\text{Max } 5X1 + 4X2 + 12X3 + 10X4 + 9X5 + 25X6 + 18X7 + 16X8$$

Sujeto a:

$$180X1 + 74X2 + 220X3 + 160X4 + 100X5 + 300X6 + 223X7 + 150X8$$

X4: Town-houses Estándar

$$180X1 + 220X3 + 300X6 \geq 25000$$

X5: Condominios estándar

$$180X1 + 220X3 + 300X6 \leq 40000$$

X6: Casas de Lujo

$$74X2 + 160X4 + 223X7 \geq 25000$$

X7: Town-houses de Lujo

$$74X2 + 160X4 + 223X7 \leq 40000$$

X8: Condominios de Lujo

$$100X5 + 150X8 \geq 10000$$

$$100X5 + 150X8 \leq 25000$$

$$0.75X1 + 0.75X2 - 0.25X3 - 0.25X4 - 0.25X5 - 0.25X6 - 0.25X7 - 0.25X8$$

$$\geq 0$$

Todas las variables no negativas

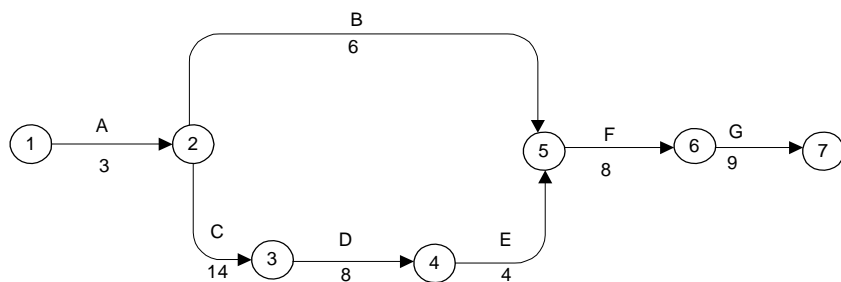
Solución con el programa What'sBest a continuación.

|    | A                                  | B       | C       | D                         | E   | F    | G   | H   | I   | J  | K     | L   | M      | N |
|----|------------------------------------|---------|---------|---------------------------|-----|------|-----|-----|-----|----|-------|-----|--------|---|
| 1  |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 2  |                                    |         |         | CONSTRUCCION DE VIVIENDAS |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 3  |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 4  |                                    |         |         | TIPO DE VIVIENDA          |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 5  |                                    | X1      | X2      | X3                        | X4  | X5   | X6  | X7  | X8  |    |       |     |        |   |
| 6  |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 7  | CANTIDAD A CONSTRUIR               | 138.889 | 338     | 0                         | 0   | 100  | 0   | 0   | 0   |    |       |     |        |   |
| 8  |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 9  | BENEFICIO UNITARIO                 |         | 5       | 4                         | 12  | 10   | 9   | 25  | 18  | 16 |       |     |        |   |
| 10 |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 11 | BENEFICIO TOTAL                    |         |         |                           |     | 2946 |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 12 |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 13 |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 14 |                                    |         |         | RESTRICCIONES             |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 15 |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 16 | Disponibilidad de Area             | 180     | 74      | 220                       | 160 | 100  | 300 | 223 | 150 |    | 60000 | <=  | 100000 |   |
| 17 | Area minima para Casas             | 180     |         | 220                       |     |      | 300 |     |     |    | 25000 | =>= | 25000  |   |
| 18 | Area máxima para Casas             | 180     |         | 220                       |     |      | 300 |     |     |    | 25000 | <=  | 40000  |   |
| 19 | Area minima para Town-houses       |         | 74      |                           | 160 |      |     | 223 |     |    | 25000 | =>= | 25000  |   |
| 20 | Area máxima para Town-houses       |         | 74      |                           | 160 |      |     | 223 |     |    | 25000 | <=  | 40000  |   |
| 21 | Area minima para Condominios       |         |         |                           |     | 100  |     |     | 150 |    | 10000 | =>= | 10000  |   |
| 22 | Area máxima para Condominios       |         |         |                           |     | 100  |     |     | 150 |    | 10000 | <=  | 25000  |   |
| 23 | Limitacion viviendas de bajo costo |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 24 |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 25 |                                    |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 26 | VARIABLES DUALES para              |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 27 | cada RESTRICCION ( R )             |         |         |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 28 | R1                                 |         | 0       |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 29 | R2                                 |         | 0.02778 |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 30 | R3                                 |         | 0       |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 31 | R4                                 |         | 0.05405 |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 32 | R5                                 |         | 0       |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 33 | R6                                 |         | 0.09    |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 34 | R7                                 |         | 0       |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |
| 35 | R8                                 |         | 0       |                           |     |      |     |     |     |    |       |     |        |   |

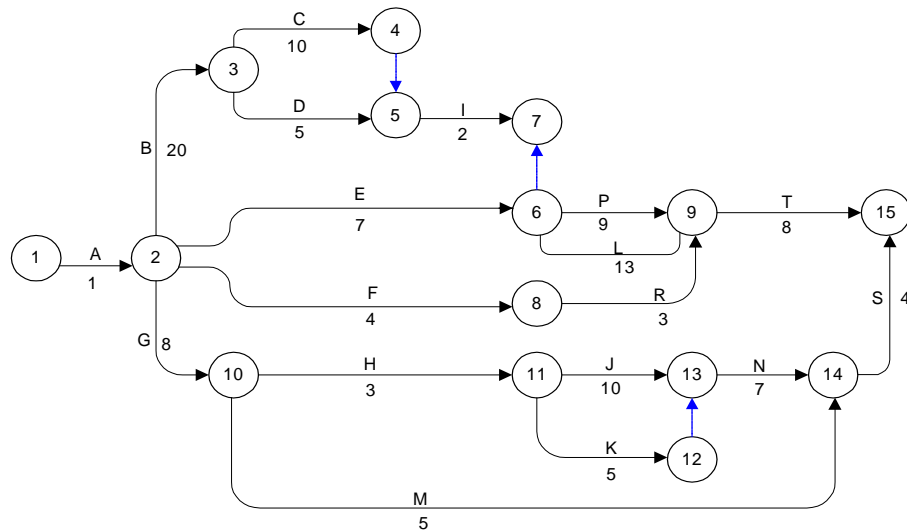
## Capitulo IV

Elabore las Redes para los siguientes proyectos:

### Ejemplo 3.



## Ejemplo 4



## Capítulo V

### Ejemplo 1. Modelo M/M/1

1.-  $P(T < 1 \text{ minuto})$  es  $P(t < 1/60 \text{ hora})$ . Usando la distribución exponencial

$$P(T < t) = 1 - e^{-\mu t} \quad \text{por lo tanto}$$

$$P(T < 1/60) = 1 - e^{-30 (1/60)} = 1 - e^{-0.5} = 1 - 0.6065 = .3935$$

El 39% de las órdenes tardará menos de un minuto procesarlas.

2.- Siendo continua la distribución exponencial, la probabilidad de un tiempo de servicio exactamente igual a cualquier cantidad específica es cero.

### Ejemplo 5.

La nueva tasa de llegadas es 50% más alta. Esto es igual a :

$$\lambda = 1.5 (20) = 30 \text{ transacciones llegando por hora}$$

- Usted, solo, atiende a una tasa de 30 transacciones por hora. Por lo tanto la probabilidad de que esté ocupado, o de que el sistema esté ocupado es  $\lambda/\mu = 1$ . Esto quiere decir que la cola de transacciones en espera crecerá indefinidamente y Usted, solo, no podrá atender la demanda.
- Con dos servidores,  $\lambda = 30$  y  $\mu = 30$  y la ocupación del sistema = 1 el sistema de espera ha cambiado y la probabilidad se calculará con la fórmula que corresponde al nuevo sistema.

ANEXO 2. TABLA PERT 1

| z   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9      |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| .0  | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359  |
| .1  | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753  |
| .2  | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141  |
| .3  | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517  |
| .4  | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879  |
| .5  | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224  |
| .6  | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549  |
| .7  | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7703 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852  |
| .8  | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133  |
| .9  | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389  |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621  |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830  |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015  |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9098 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177  |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9278 | .9292 | .9306 | .9319  |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9430 | .9441  |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545  |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633  |
| 1.8 | .9641 | .9648 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9700 | .9706  |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9762 | .9767  |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817  |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857  |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9874 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890  |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916  |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936  |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952  |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964  |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974  |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981  |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986  |
| 3.  | .9987 | .9990 | .9993 | .9995 | .9997 | .9998 | .9998 | .9999 | .9999 | 1.0000 |

Tabla de Valores de la Función de Distribución Normal Estándar.

ANEXO 3. TABLA PERT 2

| z    | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -3   | .0013 | .0010 | .0007 | .0005 | .0003 | .0002 | .0002 | .0001 | .0001 | .0000 |
| -2.9 | .0019 | .0018 | .0017 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| -2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| -2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| -2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| -2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| -2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| -2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| -2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0126 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| -2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| -2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| -1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0238 | .0233 |
| -1.8 | .0359 | .0352 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0300 | .0294 |
| -1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| -1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| -1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0570 | .0559 |
| -1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0722 | .0708 | .0694 | .0681 |
| -1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| -1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| -1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| -1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| -.9  | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| -.8  | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| -.7  | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2297 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| -.6  | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| -.5  | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| -.4  | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| -.3  | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| -.2  | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| -.1  | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| -.0  | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |

Tabla de Valores de la Función de Distribución Normal Estándar (continuación).



## **Anexo 4**

# **MANUAL DE USO DE PROGRAMAS**

## USO DE PROGRAMAS DE COMPUTADORA.

En esta sección se presentaran los programas de computadora utilizados para resolver modelos planteados en Programación Lineal, Programación Lineal de Transporte, PERT-CPM y modelos de Sistemas de Espera.

Los programas son: A) LINGO, B) WHAT'SBEST, C) LINDO y D) QSB. Los programas Lingo, What'sBest y Lindo han sido elaborados por Lindo Systems para trabajar con sistema operativo Windows. El programa QSB, presentado por Prentice Hall, ha sido elaborado para trabajar con sistema operativo MS-DOS.

Se hará referencia sólo a puntos específicos necesarios para introducir un modelo en la computadora ya que cada programa tiene múltiples facilidades y facetas para su uso, detalladas en los manuales originales dentro de un amplio contenido. En Internet, en el sitio web WWW.LINDO.COM, puede utilizar estos programas con licencia temporal y también puede usar la versión de demostración para conocer más acerca de ellos. En la página Web de la cátedra se podrán ver las formas como han sido introducidos los datos que se explican en esta sección.

El método de instrucción estará basado en la explicación de la forma para introducir particulares modelos ya usados en el texto y de detalles generales relativos al programa. El estudiante, con el conocimiento de la materia correspondiente en la asignatura, puede utilizar las instrucciones dadas en modelos similares dentro de las áreas estudiadas. Adicionalmente, puede mejorar su forma de usar los programas con lecturas acerca de los programas, realizadas en [www.Lindo.com](http://www.Lindo.com)

Debe aclararse que pueden existir otras maneras de introducir datos y fórmulas de un modelo dentro de la hoja de cálculo y en general en cualquiera de estos programas de Lindo Systems. Se le presenta una de esas formas y en la medida que se familiarice con los programas mejorará su forma de trabajar con ellos.

### **NOTA IMPORTANTE:**

Debe enfatizarse que para utilizar cualquiera de estos programas en la computadora, debe ser conocida ampliamente la teoría sobre Programación Lineal General, Programación Lineal de Transporte, PERT-CPM, Teoría de Colas y particularmente la Formulación y Construcción de los modelos utilizados en cada una de esas técnicas. Si esto no es así, el más completo instructivo para el usuario carecerá de sentido

#### **A) PROGRAMA LINGO**

Al empezar a usar el programa, previamente instalado en la computadora, aparece una pantalla en blanco que utilizará para copiar el modelo.

#### **A.1. Detalles Generales:**

- Todo signo de exclamación (!) señala un comentario y debe ser terminado con Punto y coma (;).
- Puede introducir los comentarios que considere convenientes para facilitar la lectura del modelo.

- Cualquier comentario escrito entre un signo de exclamación y un punto y coma es ignorado por Lingo. Esos comentarios pueden ocupar más de una línea y pueden compartir líneas con otras expresiones de Lingo.
- Lingo no distingue entre mayúsculas y minúsculas para nombrar las variables. Por eso puede usar cualquiera de las dos formas para nombrarlas.
- Los nombres de variables deben empezar con una letra. Después puede contener números y letras, hasta 32 caracteres.
- Las instrucciones claves en Lingo son mostradas en azul, los comentarios en verde y todo lo remanente en negro.
- Paréntesis iguales aparecen titilando en rojo cuando se coloca el cursor inmediatamente después de un paréntesis. Esto es útil para localizar errores de sintaxis en sus modelos.
- Misceláneos:
  - @FOR se usa para generar restricciones sobre los miembros de un set
  - @SUM calcula la suma de una expresión sobre todos los miembros de un set
  - @MIN calcula el mínimo de una expresión sobre todos los miembros de un set
  - @MAX calcula el máximo de una expresión sobre todos los miembros de un set
- En general cada vez que inicia una información debe colocar dos puntos y al finalizar un determinado dato o información debe colocar punto y coma.
- Permite usar hasta 300 variables y 150 restricciones.
- Lingo permite seleccionar el algoritmo de solución o Usted puede permitir que él mismo lo seleccione. Contiene el algoritmo de puntos interiores que es de mejor uso en modelos de gran tamaño.
- Antes de ejecutar la orden de solucionar el modelo, Lingo revisa la información y le muestra si hay errores y donde los hay.
- Además del formato de resultados le presenta una hoja llamada “solver status Windows” conteniendo información sobre la composición del modelo y lo mantiene al tanto del progreso del proceso de solución.
- Cada expresión condicional colocada sobre un set operador, aritmético, lógico o de relación, debe ser terminada con dos puntos (:).
- Se trabaja con sets o grupo de objetos relacionados y sus atributos.
- HELP TOPICS, le ayudará en consultas sobre la introducción del modelo y puntos particulares del programa. El texto está escrito en inglés.

## A.2. USO DEL PROGRAMA “LINGO” PARA SOLUCIONAR MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL GENERAL.

El problema a continuación ilustra un caso particular para un sistema de producción. Su formulación y solución fueron planteadas en el Capítulo II, SECCION E1, Ejemplo 1.

Una empresa manufacturera elabora tres componentes: 1, 2 y 3 para vender a compañías de refrigeración. Los componentes son procesados en dos máquinas A y B. La máquina A está disponible por 120 horas y la máquina B esta disponible por 110 horas. No más de 200 unidades de componente 3 podrán ser vendidos, pero hasta 1000 unidades de cada uno de los otros dos componentes pueden ser vendidas. De hecho la empresa tiene ya órdenes de 600 unidades de componente 1 que deben ser satisfechas. Los beneficios de cada unidad de los componentes 1, 2 y 3 son de Bs. 8, 6 y 9 respectivamente.

Los tiempos en minutos necesarios para cada elaborar cada componente en cada máquina son:

| Componente | Máquina 1 | Máquina 2 |
|------------|-----------|-----------|
| 1          | 6         | 4         |
| 2          | 4         | 5         |
| 3          | 4         | 2         |

El modelo puede ser copiado en la forma que se presenta a continuación. Se indica el tipo de optimización a realizar se copia la expresión matemática para el objetivo y se finaliza copiando las restricciones. Cada elemento copiado debe finalizar en un punto y coma. Los comentarios, señalados en verde, son adicionales y pueden o no escribirse.

### *Introducción de datos del modelo:*

```
Max = 8*C1+6*C2+9*C3; ! función Objetivo de beneficios;

6*C1+ 4*C2+ 4*C3 <= 7200; ! Minutos disponibles en la máquina 1;
4*C1+ 5*C2+ 2*C3 <= 6600; ! Minutos disponibles en la máquina 2;
C3 <= 200; !Cantidad de componente 1 a fabricar;
C1 <= 1000; !Cantidad de componente 1 a fabricar;
C2 <= 1000; !Cantidad de componente 1 a fabricar;

C1 >= 600; !Cantidad de componente 1 a fabricar;
```

Extrapolando la situación a casos donde las variables pueden ser de cientos, se puede ver que sería tedioso y propenso a errores introducir así los valores. LINGO permite expresar cualquier modelo, de cualquier extensión, de una forma corta, fácil de copiar y entender. Algunos detalles de esa nueva forma se ilustrarán en este manual.

1.-Se trabaja con **SETS**, esto no es difícil, observe:

La sección de sets o conjuntos que tienen algo en común, comienza con la expresión SETS: y termina con ENDSETS

Observe los sets formados para este modelo. Pueden ser escritos en su idioma. Sólo las palabras claves del programa (mostradas en azul) se escriben en inglés.

Los componentes a elaborar, constituyen un set, son las variables de decisión, y sus miembros son los tipos de componentes C1, C2 y C3, cada uno con atributos de beneficio y cantidad. Esto se escribe de la manera siguiente:

```
COMPONENTES/ C1,C2,C3 /:  
    BENEFICIO, CANTIDAD;
```

Los miembros componentes se copian, separados por una coma, dentro de “slashes” o barras inclinadas. Para empezar a copiar los atributos debe primero, escribir dos puntos (:). Cada atributo se copia separado con una coma, uno de otro. Cada set copiado, con miembros y atributos, finaliza con punto y coma (;).

De la misma manera se procede para otros sets. En este problema, se definen como RECURSOS y DEMANDA. Recursos, para referirse a todas las restricciones del tipo  $\leq$  y por ello se copian en un solo set. Los miembros integrantes del set son las máquinas y los componentes 1 y 2 a fabricar. Estos integrantes están limitados a una cantidad  $\leq$ . El atributo de cada uno es la disponibilidad. Los nombres dados a sets, miembros de sets o atributos es convencional.

```
RECURSOS / MAQUINA1, MAQUINA2,COMPONENTE3,  
    COMPONENTE1, COMPONENTE2/: DISPONIBLE;
```

El set denominado DEMANDA se crea para las restricciones del tipo  $\geq$ . Su único miembro es la cantidad demandada de componente 1. El único atributo es la cantidad mínima demandada, y se le llamó “demandado”.  
DEMANDAS /DCOMPONENTE1/: DEMANDADO;

Los nombres de los sets se seleccionan convenientemente de acuerdo al modelo planteado.

Los dos últimos sets representan relaciones existentes en el modelo. La sintaxis usada para definirlo es diferente a los otros sets. En este caso, se usó: RXC para expresar la relación entre Recursos y Componentes y RCD para relacionarlo con demanda y Componente. Cada uno con atributo que se llamo “utilizado” y “requerido” respectivamente. En teoría, en las restricciones de los modelos lineales, los recursos son utilizados y las demandas constituyen requerimientos.

```
RXC( RECURSOS, COMPONENTES): UTILIZADO;  
DXC( DEMANDAS, COMPONENTES): REQUERIDO;
```

En la forma copiada, se le está diciendo a LINGO que esos son sets derivados: RXC derivado de los sets primitivos Recursos y Componentes y DXC de los sets primitivos Demandas y Componentes. Se pudo haber copiado cada miembro de cada set, pero LINGO ayuda a generarlos al señalarlos en esa forma.

En la sección **DATA** se le permite aislar los datos del resto de su modelo. Se empieza copiando la palabra **DATA:** y se finaliza con **ENDATA**

Para iniciar a copiar los miembros de los set establecidos y/o sus atributos, las expresiones tienen la sintaxis siguiente:

```
object_list = value_list;
```

La “object\_list” contiene los nombres de los atributos y/o un set con cuyos miembros desea iniciar; opcionalmente pueden estar separados por comas. No puede haber más de un nombre de un set en la Lista-Objeto; pero puede haber cualquier cantidad de atributos. Ejemplo.

|                       |   |
|-----------------------|---|
| SETS:                 | También se pudo copiar en la forma siguiente: |
| SET1 /A, B, C/: X, Y; | SETS:   |
| ENDSETS               | SET1 /A, B, C/: X, Y;                         |
| DATA:                 | ENDSETS                                       |
| X = 1, 2, 3;          | DATA:   |
| Y = 4, 5, 6;          | X, Y = 1, 4,                                  |
| ENDDATA               | 2, 5,   |
|                       | 3, 6;   |
|                       | ENDDATA                                       |

También se pudo copiar en la forma siguiente: En esta sección puede escribir iniciales

```
SETS:
  SET1: X, Y;
ENDSETS
DATA:
  SET1, X, Y = A 1 4
              B 2 5
              C 3 6;
ENDDATA
```

LINGO lee los valores de un informe de datos, asignando los primeros n valores a la primera posición de cada uno de los n atributos en la lista de atributos: Los segundos n valores los asigna a la segunda posición de cada uno de los n atributos y así sucesivamente. En otras palabras, Lingo espera los datos en columnas más bien que en filas.

```
DATA:
  BENEFICIO =
    8
    6
    9;
  DISPONIBLE =
    7200 6600 200 1000 1000;
  DEMANDADO =
    600;
  UTILIZADO = 6 4 4
              4 5 2
              0 0 1
              1 0 0
              0 1 0;
  REQUERIDO = 1 0 0;
ENDDATA
```

FORMULANDO la Función **OBJETIVO**:

En este caso, se desea maximizar beneficios obtenidos por la producción y venta de los tres tipos de componentes. Siendo la variable COMPONENTES la que tiene beneficio unitario, el objetivo puede formularse incluyendo la cantidad por el beneficio unitario de la manera siguiente:

```
MAX = @SUM( COMPONENTES:
          BENEFICIO * CANTIDAD);
```

En palabras, allí dice: “Maximizar la suma de los beneficios unitarios multiplicado por la cantidad producida, para todos los tipos de componentes o miembros del set COMPONENTES. @SUM es usada para generar la operación de sumar los resultados de multiplicar todos los costos unitarios por las cantidades.

FORMULANDO las **RESTRICCIONES**:

La función @FOR se usa para generar todas las restricciones en los sets correspondientes.

Así, para las restricciones del tipo <= se copia:

```
@FOR( RECURSOS( I):
      @SUM( COMPONENTES( J):
            UTILIZADO( I, J) * CANTIDAD( J)) <=
            DISPONIBLE( I));
```

De manera similar, para las restricciones del tipo >= se copia:

```
@FOR( DEMANDAS( I):
      @SUM( COMPONENTES( J):
            REQUERIDO( I, J) * CANTIDAD( J)) >=
            DEMANDADO( I));
```

En resumen, para introducir en la computadora se obtiene el modelo que se presenta a continuación.

```
SETS:
    COMPONENTES/ C1,C2,C3 /:
        BENEFICIO, CANTIDAD;
    RECURSOS / MAQUINA1, MAQUINA2,COMPONENTE3,
        COMPONENTE1, COMPONENTE2/: DISPONIBLE;
    DEMANDAS /DCOMPONENTE1/: DEMANDADO;
    RXC( RECURSOS, COMPONENTES): UTILIZADO;
    DXC( DEMANDAS, COMPONENTES): REQUERIDO;
```

ENDSETS

```
DATA:
    BENEFICIO =
        8
        6
        9;
    DISPONIBLE =
        7200 6600 200 1000 1000;
    DEMANDADO =
        600;
    UTILIZADO =  6  4  4
                4  5  2
                0  0  1
                1  0  0
                0  1  0;
    REQUERIDO =  1  0  0;
```

ENDDATA

```

MAX = @SUM( COMPONENTES:
            BENEFICIO * CANTIDAD);

@FOR( RECURSOS( I):
      @SUM( COMPONENTES( J):
            UTILIZADO( I, J) * CANTIDAD( J)) <=
            DISPONIBLE( I));
@FOR( DEMANDAS( I):
      @SUM( COMPONENTES( J):
            REQUERIDO( I, J) * CANTIDAD( J)) >=
            DEMANDADO( I));

```

Para ser solucionado con el programa LINGO se pulsa sobre la expresión “SOLVER”. Si no ha seleccionado el algoritmo de solución, el programa lo selecciona.

```

Global optimal solution found at step:          4
Objective value:                            10800.00

```

| Variable                     | Value     | Reduced Cost |
|------------------------------|-----------|--------------|
| BENEFICIO( C1)               | 8.000000  | 0.0000000    |
| BENEFICIO( C2)               | 6.000000  | 0.0000000    |
| BENEFICIO( C3)               | 9.000000  | 0.0000000    |
| CANTIDAD( C1)                | 600.0000  | 0.0000000    |
| CANTIDAD( C2)                | 700.0000  | 0.0000000    |
| CANTIDAD( C3)                | 200.0000  | 0.0000000    |
| DISPONIBLE( MAQUINA1)        | 7200.000  | 0.0000000    |
| DISPONIBLE( MAQUINA2)        | 6600.000  | 0.0000000    |
| DISPONIBLE( COMPONENTE3)     | 200.0000  | 0.0000000    |
| DISPONIBLE( COMPONENTE1)     | 1000.000  | 0.0000000    |
| DISPONIBLE( COMPONENTE2)     | 1000.000  | 0.0000000    |
| DEMANDADO( DCOMPONENTE1)     | 600.0000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( MAQUINA1, C1)     | 6.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( MAQUINA1, C2)     | 4.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( MAQUINA1, C3)     | 4.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( MAQUINA2, C1)     | 4.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( MAQUINA2, C2)     | 5.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( MAQUINA2, C3)     | 2.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE3, C1)  | 0.0000000 | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE3, C2)  | 0.0000000 | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE3, C3)  | 1.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE1, C1)  | 1.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE1, C2)  | 0.0000000 | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE1, C3)  | 0.0000000 | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE2, C1)  | 0.0000000 | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE2, C2)  | 1.000000  | 0.0000000    |
| UTILIZADO( COMPONENTE2, C3)  | 0.0000000 | 0.0000000    |
| REQUERIDO( DCOMPONENTE1, C1) | 1.000000  | 0.0000000    |
| REQUERIDO( DCOMPONENTE1, C2) | 0.0000000 | 0.0000000    |
| REQUERIDO( DCOMPONENTE1, C3) | 0.0000000 | 0.0000000    |



| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|-----|------------------|------------|
| 1   | 10800.00         | 1.000000   |
| 2   | 0.000000         | 1.500000   |
| 3   | 300.0000         | 0.000000   |
| 4   | 0.000000         | 3.000000   |
| 5   | 400.0000         | 0.000000   |
| 6   | 300.0000         | 0.000000   |
| 7   | 0.000000         | -1.000000  |

### A.3 USO DEL PROGRAMA “LINGO” PARA SOLUCIONAR MODELOS DE TRANSPORTE.

Una empresa manufacturera elabora un producto en tres países diferentes P1, P2 y P3, que debe ser transportado a tres distribuidores situados en tres diferentes ciudades C1, C2 y C3 para su posterior venta. La cantidad de unidades de producto disponible en P1 es de 9.000, en P2 existen 4.000 y en P3 es de 8.000. Las unidades de producto requeridas en C1 es de 6.000, en C2 es de 5.000 y en C3 es de 7.000. Los costos unitarios de transporte, en unidades monetarias, desde cada país hasta cada una de los distribuidores de las tres ciudades se muestran en la siguiente matriz.

|    | C1 | C2 | C3 |
|----|----|----|----|
| P1 | 10 | 20 | 9  |
| P2 | 8  | 10 | 6  |
| P3 | 10 | 30 | 7  |

Los **sets** formados son: 1) **países** con tres países miembros denominados P1, P2 y P3. Las ofertas o capacidad es el atributo de cada país. 2) Los almacenes en las ciudades que serán **distribuidores**, constituyen un set con miembros denominados D1, D2 y D3, con la demanda que tiene cada uno como atributo. 3) Se crea un tercer set al que se le llamó **links**, convencionalmente. Este es un set que es derivado de los sets primitivos países y distribuidores, con cantidades que serán transportadas y costos unitarios como atributos. Tanto en este, como en los set anteriores puede usar cualquier palabra relacionada o conveniente.

La forma de introducir esos sets aparece a continuación, con el ejemplo del modelo de transporte:

**SETS:**

```
PAISES/ P1 P2 P3/: CAPACIDAD;
DISTRIBUIDORES/ D1 D2 D3/: DEMANDA;
LINKS (Países, Distribuidores): COSTO, CANTIDAD;
```

**ENDSETS**

#### **FUNCIÓN OBJETIVO:**

Construir la función Objetivo del ejemplo implica considerar las cantidades a transportar de los orígenes  $i$  a los destinos  $j$  con sus costos respectivos. Estos son los atributos contenidos en el set LINKS. El Costo total a minimizar es la suma de los costos del producto multiplicados por las cantidades, desde todos los orígenes  $i$  a todos los destinos  $j$ . Es decir:

`COSTO(I, J) * CANTIDAD(I, J));` (Recuerde terminar en punto y coma cada información, pues de lo contrario no solucionará el modelo). De la teoría de formulación de modelos de Transporte, se conoce que hay que realizar la suma de esos valores y usa la función: `@SUMA ( LINKS( I, J ) :`

Finalmente se le dice a Lingo que se quiere minimizar la función precediéndola con `MIN =`

```
! The objective;
MIN = @SUM( LINKS( I, J ) :
    COSTO(I, J) * CANTIDAD(I, J));
```

Los comentarios son adicionales.

## RESTRICCIONES.

Las restricciones de oferta están limitadas por lo que denominamos **CAPACIDAD** en el modelo. Estas restricciones son la suma de cantidades transportadas de *i* a *j* y eso debe ser  $\leq$  a la capacidad, cerrando siempre con punto y coma.

```
@SUM( DISTRIBUIDORES( J) : CANTIDAD( I, J)) <=
    CAPACIDAD( I));
```

Como ya se ha indicado la función `@FOR` genera restricciones, en este caso para cada capacidad en los países *i*.

Agregando el comentario de restricciones de capacidad, que puede ser escrito en español, ya que Lingo ignora estos comentarios, se obtiene lo siguiente:

```
!The capacity constraints;
@FOR ( PAISES( I) :
    @SUM( DISTRIBUIDORES( J) : CANTIDAD( I, J)) <=
        CAPACIDAD( I));
```

De manera similar se construyen las restricciones de demanda limitadas por lo que denominamos **DEMANDA** en el modelo. Se genera una restricción para cada distribuidor

`@FOR (DISTRIBUIDORES(J):` y sumamos las cantidades transportadas desde todos los países `@SUM(PAISES(I):` para cada uno de los distribuidores, cantidad que está establecida en la demanda. Con el comentario agregado, queda lo siguiente para el modelo:

```
!The demand constraints;
@FOR ( DISTRIBUIDORES( J) :
    @SUM( PAISES( I) : CANTIDAD( I, J)) =
        DEMANDA( J));
```

## DATOS PARA EL MODELO

Para introducir los datos se iniciará con `DATA:` utilizando una línea para ello y finalizará también en una sola línea con la palabra `ENDDATA`.

En este caso de transporte, se ha llamado capacidad a las cantidades de oferta y demanda a las cantidades solicitadas. En su modelo puede usar el nombre que le sea conveniente. Se colocan las

cantidades de oferta en la fila de “capacidad” y las cantidades solicitadas en la fila de “demanda”, colocando un signo igual antes de empezar a copiarlas y un punto y coma cuando finalice. Los costos unitarios se copian como matriz igual a la que se tiene en la matriz de costos, empezando con la línea “Costo =”. Al copiar el último número debe colocar punto y coma. Con el comentario agregado, que puede escribirse en español, se tiene:

```
!Here is the data;
DATA:
    CAPACIDAD = 9000 4000 8000;
    DEMANDA = 6000 5000 7000;
    COSTO = 10 20 9
           8 10 6
           10 30 7;
ENDDATA
```

Finalmente para pasar a resolver el modelo se tiene en total lo siguiente:

### *Introducción del Modelo en la Computadora*

```
MODEL:
!Un problema de transporte con 3 paises y 3 distribuidores;
SETS:
    PAISES/ P1 P2 P3/: CAPACIDAD;
    DISTRIBUIDORES/ D1 D2 D3/: DEMANDA;
    LINKS (Países, Distribuidores): COSTO, CANTIDAD;
ENDSETS
! The objective;
MIN = @SUM( LINKS( I, J):
    COSTO( I, J)* CANTIDAD( I, J));
!The demand constraints;
@FOR ( DISTRIBUIDORES( J):
    @SUM( PAISES( I): CANTIDAD( I, J)) =
        DEMANDA( J));
!The capacity constraints;
@FOR ( PAISES( I):
    @SUM( DISTRIBUIDORES( J): CANTIDAD( I, J)) <=
        CAPACIDAD( I));
!Here is the data;
DATA:
    CAPACIDAD = 9000 4000 8000;
    DEMANDA = 6000 5000 7000;
    COSTO = 10 20 9
           8 10 6
           10 30 7;
ENDDATA
END
```

*El formato de salida de resultados es el siguiente:*

```
Global optimal solution found at step:          3
Objective value:                             169000.0
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|----------|-------|--------------|
|----------|-------|--------------|

|                   |           |           |
|-------------------|-----------|-----------|
| CAPACIDAD( P1)    | 9000.000  | 0.0000000 |
| CAPACIDAD( P2)    | 4000.000  | 0.0000000 |
| CAPACIDAD( P3)    | 8000.000  | 0.0000000 |
| DEMANDA( D1)      | 6000.000  | 0.0000000 |
| DEMANDA( D2)      | 5000.000  | 0.0000000 |
| DEMANDA( D3)      | 7000.000  | 0.0000000 |
|                   |           |           |
| COSTO( P1, D1)    | 10.00000  | 0.0000000 |
| COSTO( P1, D2)    | 20.00000  | 0.0000000 |
| COSTO( P1, D3)    | 9.000000  | 0.0000000 |
| COSTO( P2, D1)    | 8.000000  | 0.0000000 |
| COSTO( P2, D2)    | 10.00000  | 0.0000000 |
| COSTO( P2, D3)    | 6.000000  | 0.0000000 |
| COSTO( P3, D1)    | 10.00000  | 0.0000000 |
| COSTO( P3, D2)    | 30.00000  | 0.0000000 |
| COSTO( P3, D3)    | 7.000000  | 0.0000000 |
|                   |           |           |
| CANTIDAD( P1, D1) | 5000.000  | 0.0000000 |
| CANTIDAD( P1, D2) | 1000.000  | 0.0000000 |
| CANTIDAD( P1, D3) | 0.0000000 | 2.000000  |
| CANTIDAD( P2, D1) | 0.0000000 | 8.000000  |
| CANTIDAD( P2, D2) | 4000.000  | 0.0000000 |
| CANTIDAD( P2, D3) | 0.0000000 | 9.000000  |
| CANTIDAD( P3, D1) | 1000.000  | 0.0000000 |
| CANTIDAD( P3, D2) | 0.0000000 | 10.00000  |
| CANTIDAD( P3, D3) | 7000.000  | 0.0000000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|-----|------------------|------------|
| 1   | 169000.0         | 1.000000   |
| 2   | 0.0000000        | -10.00000  |
| 3   | 0.0000000        | -20.00000  |
| 4   | 0.0000000        | -7.000000  |
| 5   | 3000.000         | 0.0000000  |
| 6   | 0.0000000        | 10.00000   |
| 7   | 0.0000000        | 0.0000000  |

Ranges in which the basis is unchanged:

#### Objective Coefficient Ranges

| Variable         | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| VOLUMEN( A1, D1) | 10.00000            | 2.000000           | 0.0                |
| VOLUMEN( A1, D2) | 20.00000            | 10.00000           | 8.000000           |
| VOLUMEN( A1, D3) | 9.000000            | INFINITY           | 2.000000           |
| VOLUMEN( A2, D1) | 8.000000            | INFINITY           | 8.000000           |
| VOLUMEN( A2, D2) | 10.00000            | 8.000000           | INFINITY           |
| VOLUMEN( A2, D3) | 6.000000            | INFINITY           | 9.000000           |
| VOLUMEN( A3, D1) | 10.00000            | 0.0                | 2.000000           |
| VOLUMEN( A3, D2) | 30.00000            | INFINITY           | 10.00000           |
| VOLUMEN( A3, D3) | 7.000000            | 2.000000           | INFINITY           |

Righthand Side Ranges

| Row | Current<br>RHS | Allowable<br>Increase | Allowable<br>Decrease |
|-----|----------------|-----------------------|-----------------------|
| 2   | 6000.000       | 3000.000              | 5000.000              |
| 3   | 5000.000       | 3000.000              | 1000.000              |
| 4   | 7000.000       | 1000.000              | 5000.000              |
| 5   | 9000.000       | INFINITY              | 3000.000              |
| 6   | 4000.000       | 1000.000              | 3000.000              |
| 7   | 8000.000       | 5000.000              | 1000.000              |

Los resultados analizados *se leen* en **LINGO** en la forma siguiente:

Las variables de decisión en la columna **VARIABLE** con el nombre de cantidades (Pi Dj). Se indica el País con P y el almacén, en la ciudad que lo distribuirá, con la letra D.

Los valores de las variables se obtienen al lado de esos nombres, en la columna **VALUE**.

El valor de la **Función Objetivo** se lee en “Objective value”

Los datos de CAPACIDAD, DEMANDA y COSTO corresponden a la información contenida en el modelo. Puede verificar esto con el modelo elaborado.

La **holgura** de las restricciones se presenta en la columna **SLACK or SURPLUS** al lado de la fila correspondiente a cada restricción. Estos valores se inician en la fila 2, correspondiendo la fila 1 a la función objetivo. A partir de la fila 2 presenta primero la holgura de las restricciones de demanda y luego presenta la de las restricciones de oferta.

La única holgura mayor que cero, con valor de 3000 se lee en la columna correspondiente a la restricción 4. Esta restricción corresponde a la primera restricción de oferta. Se lee en la fila 5.

#### A.4. USO DE PROGRAMA “LINGO” PARA SOLUCIONAR MODELOS DE PERT-CPM.

Ejemplo. Proyecto de construcción para el Aula Magna de la Universidad.

| Actividad | Descripción                                     | Actividades Precedentes | Duración (semanas) |
|-----------|---|-------------------------|--------------------|
| A         | Estudios del sitio para la construcción         | -----                   | 6                  |
| B         | Desarrollo del diseño inicial                   | -----                   | 8                  |
| C         | Obtener aprobación de las instancias Superiores | A,B                     | 12                 |
| D         | Seleccionar al arquitecto                       | C                       | 4                  |
| E         | Establecer el presupuesto                       | C                       | 6                  |
| F         | Finalizar el diseño                             | D,E                     | 15                 |
| G         | Obtener financiamiento                          | E                       | 12                 |
| H         | Contratar al constructor                        | F,G                     | 8                  |

#### Introducción del Modelo en la Computadora

El uso de sets, resulta apropiado en proyectos, dada la cantidad de actividades y la cantidad de valores que es necesario calcular para cada una de esas actividades.

El único [set](#) primitivo es el set de ACTIVIDADES conformado por miembros que son cada una de las actividades a desarrollar en el proyecto. Se copian todas, separadas por coma, dentro de “slash” o barra inclinada. Los atributos están conformados por todos los diferentes tiempos que ellas pueden tener: Tiempo de ejecución, tiempo de iniciación más temprana, etc.

El set PRECD (Precedencias) es un set derivado donde se incluyen las relaciones de precedencia entre las actividades, en grupo de dos en dos se señalan todas las presencias para todas las actividades.

Se finaliza con ENDSETS.

[Data](#). El único dato en este modelo son los tiempos de las actividades y se copian en el mismo orden en que fueron copiadas las actividades en el set.

[DATA](#):

TIEMPO = 6, 8, 12, 4, 6, 15, 12, 8;

[ENDDATA](#)

Los atributos asignados a cada actividad son: Tiempos de inicio y finalización más tempranos y más tarde de ejecución, y las holguras correspondientes. Para calcular dichos atributos se ha usado la función @FOR, para generar ese cálculo para todas las actividades. Esto ayuda a copiar el modelo,

evitando lo largo, tedioso y la propensión a cometer errores al copiar los cálculos para cada uno de esos tiempos y para cada una de las actividades del proyecto.

Si usted conoce la definición teórica de esos tiempos puede elaborar fácilmente la representación de ese cálculo.

Cada una de esas expresiones contiene el nombre del tiempo que calculará para todas las actividades del proyecto

```
@FOR( ACTIVIDADES( J) | J #GT# 2:
  INICIO_MAS_TEMPRANO( J) = @MAX( PRECD( I, J): INICIO_MAS_TEMPRANO( I) +
TIEMPO( I ) )
);
@FOR( ACTIVIDADES( J):
  FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( J) = INICIO_MAS_TEMPRANO( J) + TIEMPO( J);
);
@FOR( ACTIVIDADES( I) | I #LT# ULTIMA_ACTIVIDAD:
  INICIO_MAS_TARDE( I) = @MIN( PRECD( I, J): INICIO_MAS_TARDE( J) - TIEMPO( I));
);
@FOR( ACTIVIDADES( I):
  FINALIZACION_MAS_TARDE( I) = INICIO_MAS_TARDE( I) + TIEMPO( I);
);
@FOR( ACTIVIDADES( I): HOLGURA( I) = INICIO_MAS_TARDE( I) - INICIO_MAS_TEMPRANO(
I));
```

Es importante indicar el número de actividades iniciales del proyecto. Se le informa, en este caso, que existen dos actividades iniciales. Es decir, dos actividades se iniciarán cuando se inicie el proyecto en la fecha denominada fecha cero.

Igualmente se le informa a Lingo que existe una única actividad final

```
INICIO_MAS_TEMPRANO( 1) = 0;
INICIO_MAS_TEMPRANO( 2) = 0;
ULTIMA_ACTIVIDAD = @SIZE( ACTIVIDADES);
INICIO_MAS_TARDE( ULTIMA_ACTIVIDAD) = INICIO_MAS_TEMPRANO( ULTIMA_ACTIVIDAD);
!TIEMPO DE DURACION DEL PROYECTO;
DURACION_DEL_PROYECTO = FINALIZACION_MAS_TARDE( ULTIMA_ACTIVIDAD);
END
```

Finalmente, y para que lo señale claramente se le copia que la duración del proyecto es igual que el tiempo de finalización mas tarde (o mas temprano de la ultima actividad). La solución del modelo se le presenta en el Manual de Investigación de Operaciones, SECCION B1. Ejemplo 1

Así el modelo es:

```

MODEL:
SETS:
    ACTIVIDADES / SITIO, DISENI, APROBACION,
                ARQUITECTO, PRESUPUESTO, DISENF,
                FINANCIAMIENTO, CONSTRUCTOR /:
                TIEMPO, INICIO_MAS_TEMPRANO, INICIO_MAS_TARDE,
FINALIZACION_MAS_TEMPRANO, FINALIZACION_MAS_TARDE, HOLGURA;

    PRECD( ACTIVIDADES, ACTIVIDADES) /
        DISENI, APROBACION,
        SITIO, APROBACION,
        APROBACION, ARQUITECTO,
        APROBACION, PRESUPUESTO,
        PRESUPUESTO, DISENF,
        ARQUITECTO, DISENF,
        PRESUPUESTO, FINANCIAMIENTO,
        DISENF, CONSTRUCTOR,
        FINANCIAMIENTO, CONSTRUCTOR /;

ENDSETS
DATA:
    TIEMPO = 6, 8, 12, 4, 6, 15, 12, 8;
ENDDATA

@FOR( ACTIVIDADES( J) | J #GT# 2:
    INICIO_MAS_TEMPRANO( J) = @MAX( PRECD( I, J): INICIO_MAS_TEMPRANO( I) +
    TIEMPO( I ) )
);
@FOR( ACTIVIDADES( J):
    FINALIZACION_MAS_TEMPRANO( J) = INICIO_MAS_TEMPRANO( J) + TIEMPO( J);
);
@FOR( ACTIVIDADES( I) | I #LT# ULTIMA_ACTIVIDAD:
    INICIO_MAS_TARDE( I) = @MIN( PRECD( I, J): INICIO_MAS_TARDE( J) - TIEMPO( I));
);
@FOR( ACTIVIDADES( I):
    FINALIZACION_MAS_TARDE( I) = INICIO_MAS_TARDE( I) + TIEMPO( I);
);
@FOR( ACTIVIDADES( I): HOLGURA( I) = INICIO_MAS_TARDE( I) - INICIO_MAS_TEMPRANO
( I));

INICIO_MAS_TEMPRANO( 1) = 0;
INICIO_MAS_TEMPRANO( 2) = 0;
ULTIMA_ACTIVIDAD = @SIZE( ACTIVIDADES);
INICIO_MAS_TARDE( ULTIMA_ACTIVIDAD) = INICIO_MAS_TEMPRANO( ULTIMA_ACTIVIDAD);
!TIEMPO DE DURACION DEL PROYECTO;
DURACION_DEL_PROYECTO = FINALIZACION_MAS_TARDE( ULTIMA_ACTIVIDAD);
END

```

La solución del modelo se le presenta en el Manual de Investigación de Operaciones, SECCION B1. Ejemplo 1

## A.5. PROGRAMA LINGO en SISTEMAS de ESPERA.

El programa permite trabajar modelos de sistemas de espera pero no serán detallados en este manual.



## B) PROGRAMA WHAT'SBEST

Este programa fue elaborado por Lindo Systems para Microsoft Excel. Por lo tanto, debe tener algún conocimiento del Programa Excel para utilizarlo. Tiene capacidad para 300 variables y 150 restricciones. Permite elaborar los modelos sobre la hoja de cálculo y luego resolverlos con los algoritmos que presenta. Puede dejar que el programa seleccione el algoritmo de solución o puede dejarlo para su elección. Al abrir el programa, aparecerá una hoja de calculo para la introducción del modelo. Se explicarán detalles para la introducción del modelo con el módulo ABC, el más simple del programa.

### B.1 WHAT'SBEST en *Modelos Lineales de Transporte*.

El modelo a usar, como referencia, es el ejemplo presentado y solucionado con este programa en el Manual de Investigación de Operaciones, *Práctica de solución de Modelos Lineales de Transporte*, sección B1, ejemplo2.

Modelos de Programación Lineal General, en un sistema de producción, se han ilustrado solucionados con este mismo programa en el manual de estudio señalado anteriormente. Con ese tipo de modelos puede utilizar instrucciones similares a las que se le presentan para este ejemplo.

Microsoft Excel

File Edit View Insert Format Tools Data Window WBI Help

100% Arial 10 B I U

Y10 =

BOOKREDUCED.xls

|    | A  | B                  | C        | D  | E        | F      | G        | H  | I        | J                    | K  | L      | M  | N | O | P     | Q     |
|----|--|--------------------|----------|----|----------|--------|----------|----|----------|----------------------|----|--------|----|---|---|-------|-------|
| 1  | Modelo de Transporte en un sistema de Publicidad |                    |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 2  |  |                    |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 3  | Unidades   |                    |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 4  | Publicidad                                       | Firmas Productoras |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 5  | en medio   | F1                 | Cost     | F2 | Cost     | F3     | Cost     | F4 | Cost     | Publicidad por medio |    |        |    |   |   |       |       |
| 6  | Prensa   | 0                  | \$ 16.00 | 0  | \$ 10.00 | 0      | \$ 12.00 | 0  | \$ 12.00 | 0                    | <= | 30     |    |   |   |       |       |
| 7  | Televisión                                       | 0                  | \$ 26.00 | 0  | \$ 20.00 | 0      | \$ 30.00 | 0  | \$ 21.00 | 0                    | <= | 15     |    |   |   |       |       |
| 8  | Radio  | 0                  | \$ 22.00 | 0  | \$ 15.00 | 0      | \$ 23.00 | 0  | \$ 14.00 | 0                    | <= | 25     |    |   |   |       |       |
| 9  |  |                    |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 10 |  | 0                  | Not >=   | 15 | 0        | Not >= | 25       | 0  | Not >=   | 10                   | 0  | Not >= | 20 |   |   |       |       |
| 11 |  |                    |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 12 |  |                    |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   | COSTO | TOTAL |
| 13 |  | Cost               | 0        |    | 0        |        | 0        |    | 0        |                      |    |        | 0  |   |   | 0     |       |
| 14 |  |                    |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 15 | Restricción                                      | Variables Duales   |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 16 | Prensa   | 0                  |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 17 | Televisión                                       | 0                  |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 18 | Radio  | 0                  |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 19 | F1   | 0                  |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 20 | F2   | 0                  |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 21 | F3   | 0                  |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |
| 22 | F4   | 0                  |          |    |          |        |          |    |          |                      |    |        |    |   |   |       |       |

Sheet1 / Sheet2 / Sheet3 /

Ready NUM

Start Adobe Photoshop BOOKRE...

5:35 PM

En la hoja de cálculo debe copiar los datos del modelo, con los textos o comentarios que le sean pertinentes para su entendimiento. Observe el modelo de referencia copiado en la hoja de cálculo antes de su optimización.

Se aplica el **ABC** a esta hoja de cálculo, para mostrar cómo What`sBest provee la mejor respuesta:

#### **A.- Determine las Celdas Ajustables.-**

Estas son las variables de decisión cuyos valores deben ser calculados. Estas celdas ajustables deben tener un valor colocado en ellas y se acostumbra a usar el valor cero. En el modelo, los valores cero en las columnas F1, F2, F3 y F4 son las celdas ajustables. Para hacerlas ajustables utiliza la comunicación con el programa pulsando WHAT`sBEST en la barra superior y solicitando la opción “Adjustable”. Previamente selecciona las celdas a ser ajustadas y presiona “OK” sobre la opción “make Adjustable”. Si no las ha seleccionado previamente, puede copiarlas en los espacios dados para ello. Para indicar varias celdas seguidas puede utilizar, por ejemplo, C6:C8, esto quiere decir que las celdas de la C6 a la C8 serán ajustables, y así continúa hasta ajustar todas las celdas necesarias.

#### **B.- Defina la Mejor Celda (“BEST” cell).-**

Debe seleccionar una celda donde se colocara el mejor (best) valor para su objetivo. En el modelo del ejemplo, la mejor solución debe minimizar los costos de publicidad, y se elige la celda P13 para colocar este costo. Esta celda contiene la suma de los costos subtotales de publicidad que se encuentran en las celdas D13, G13, J13, M13.

Por lo tanto, la fórmula colocada en esa “BEST” celda es: SUM(D13,G13,J13,M13)

La fórmula de la celda D13, a su vez, será SUMPRODUCT(C6:C8,E6:E8).

Las fórmulas en las celdas G13, J13 y M13, serán similares a la de D13, considerando las celdas respectivas.

#### **C.-Especifique las Restricciones.-**

Conociendo las restricciones generales de oferta y demanda en un Modelo de Transporte, se pueden especificar fácilmente las mismas. Horizontalmente lee las de oferta y verticalmente las de demanda. Así por ejemplo, para especificar la primera restricción de publicidad en prensa colocará la fórmula que indica la suma de las cantidades de publicidad a elaborar por las distintas firmas, cantidades que se encuentran en las celdas C6, F6, I6, L6. Por lo tanto la fórmula es SUM(C6,F6,I6,L6) que se coloca en la celda O6.

Luego establece la restricción con el programa y pulsa sobre CONSTRAINTS para establecer el tipo de desigualdad y determinar la celda donde colocará esta desigualdad. En este caso se coloca en P6 que esta antes de Q6 donde se especifica el lado derecho de esa restricción que es 30. Así podrá leerse:  $O6 \leq Q6$

Para las demás restricciones se procede de manera similar.

#### **Variables Duales.-**

Para obtener el valor de las variables duales debe señalar la celda de la restricción para la cual desea calcular esta variables y hacer clic sobre “WB!”, y luego pulsar sobre ADVANCED. Aparecerá la indicación DUAL y debe pulsar allí. Esto le permitirá señalar la celda donde colocará la variable.

En el ejemplo, puede pulsar sobre P6 para calcular la variable dual de la restricción de prensa. Además se le indica la celda F16, donde se colocará la variable dual al solucionar el modelo.

De aquí en adelante puede pedir la solución del modelo, pulsando sobre SOLVE; lo resolverá con el algoritmo que decida el programa. También puede ir a OPTIONS y seleccionar el algoritmo que prefiera para la solución. Recuerde que el algoritmo de puntos internos BARRIER, trabaja mejor

para modelos de gran tamaño. Si el programa tiene errores al ser introducido, Lingo le informará el tipo de error que ha cometido.

Cualquier cambio que ocurra sobre cualquier elemento componente de modelo puede colocarse sobre el modelo y volver a resolverlo. Los resultados son muy rápidos y podrá observar el efecto de ese cambio sobre la solución óptima; es decir, podrá observar un análisis de sensibilidad de la solución.

## C) USO DEL PROGRAMA “LINDO” .

### Notas generales:

- La función Objetivo en todos los modelos debe empezar con MAX o MIN
- Los nombres de las variables están limitados a 8 caracteres
- El nombre para restricciones debe terminar con paréntesis
- Los operadores reconocidos (+, -, >, <, =)
- Cualquier comentario agregado empieza con signo de exclamación
- Se permite separación de líneas
- Sólo acepta valores en el lado derecho de las restricciones
- Sólo variables y coeficientes del lado izquierdo de las ecuaciones
- Permite el uso de 300 variables y 150 restricciones.

Cuando se abre el programa aparece una ventana principal. Todas las otras ventanas estarán contenidas dentro de esta ventana. La ventana principal contiene un menú de comandos y la barra de comandos. La ventana más pequeña llamada “UNTITLED” (“sin título”), indicando que no se le ha asignado ningún nombre aún; es una ventana en blanco para el nuevo modelo.

Los comandos en la barra son:

- |              |                        |
|--------------|------------------------|
| 1.File Menu  | 4.Reports Menu         |
| 2.Edit Menu  | 5.Window Menu          |
| 3.Solve Menu | 6.Help Menu6.Help Menu |

Se copiará el modelo directamente sobre esta ventana. Se desarrolla el objetivo y define las variables.

Si un usuario desea por ejemplo:

Minimize  $4X + 3Y$

Subject to

$$2X + 3Y < 24$$

$$3X + 6Y < 18$$

Eso es exactamente lo que debe copiar dentro de Lindo, después de iniciar el programa.

Las palabras SUBJECT TO o simplemente ST, colocadas en una línea, debe preceder a las restricciones.

Finalmente en la línea después de la última restricción escribimos la palabra END, que le informa que ha terminado de copiar su modelo.

Hay tres estilos básicos para usar el software Lindo. Para problemas pequeños y medianos, Lindo es sencillo de utilizar interactivamente desde el teclado e introducir un modelo es fácil de hacer. También puede usarse con archivos creados en otro lado.

### **C.1 Uso de LINDO en un *Modelo de Transporte*.**

Problema en un sistema de subasta de tierras.

El Ministerio de Agricultura está subastando tierras en dos estados del país Lara y Cojedes. Están disponibles 100.000 hectáreas en cada estado. Tres consorcios agrícolas 1,2 y 3, participan en la subasta. El Gobierno ha establecido que ninguno de los tres consorcios recibirá más del 40% del total de tierras que se están subastando. El consorcio 1 ha ofrecido Bolívares 1.000.000 por cada hectárea en el estado Lara y Bs. 2.000.000 por hectárea en el estado Cojedes. El consorcio 2 ha ofrecido Bs. 900.000 por hectárea en el estado Lara y Bs. 2.200.000 en Cojedes. El consorcio 3 ha ofrecido Bs. 1.100.000 por hectárea en Lara y 1.900.000 en Cojedes. El gobierno desea maximizar sus ingresos.

Este ejemplo 3 es solucionado en la sección B1, Práctica de solución de modelos lineales de transporte, del manual de Investigación de Operaciones.

Debe observar que LINDO no es un programa específico para solucionar modelos de transporte. DEBE agregar el origen o destino ficticio que haga falta para resolverlo, ya que el programa no lo hace. Así tenemos que el modelo introducido para su solución con LINDO, en el ejemplo de maximización de beneficios por la subasta de tierras, sin ningún comentario agregado, y tal como se formuló, es el siguiente

MAX 10X11 + 9X12 + 11X13 + 20X21 + 22X22 + 19X23  
0XF1 + 0XF2 + 0XF3

ST

X11 + X12 + X13 < 100000  
X21 + X22 + X23 < 100000  
XF1 + XF2 + XF3 < 40000  
X11 + X21 + XF1 > 80000  
X12 + X22 + XF2 > 80000  
X13 + X23 + XF3 > 80000

**END**

## D) PROGRAMA QSB.

Quantitative Systems Business, **QSB**, es un programa creado para trabajar con el sistema operativo MS-DOS.

El menú de programas contiene entre otros:

- |                                |                                    |
|--------------------------------|------------------------------------|
| 1—Linear programming”          | (Programación lineal)              |
| 2—Integer linear programming”  | (Programación lineal entera)       |
| 3—Transshipment problem”       | ( Problema de transbordo)          |
| 3—Assignment problem”          | (Problema de asignación)           |
| 4— Network modeling “          | (Modelado de redes)                |
| 5—Project scheduling – CPM”    | (Programación de proyectos-CPM)    |
| 6-- Project scheduling – PERT” | (Programación de proyectos-PERT)   |
| A—Queuing theory”              | (Teoría de colas)                  |
| B—Queuing system simulation”   | (Simulación de sistemas de espera) |

### D.1. Uso del Programa QSB en Programación Lineal General

Estando ya disponible, el programa en la computadora, usted puede ir directamente a cualquiera de los program. Exe instalados. Por ejemplo el programa PROG1.EXE, es para trabajar con Programas Lineales generales. Aparece en pantalla lo siguiente:

```
Welcome to your Linear Programming (LP) Decision Support System!
The options available for LP are as follows.
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.

Option      Function
1  ----    Overview of LP Decision Support System
2  ----    Enter new problem
3  ----    Read existing problem from disk(ette)
4  ----    Display and/or print input data
5  ----    Solve problem
6  ----    Save problem on disk(ette)
7  ----    Modify problem
8  ----    Display and/or print final solution
9  ----    Return to the program menu
0  ----    Exit from QSB
```

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

Le informa que para seleccionar cualquiera de las opciones puede pulsa la tecla de subir y bajar y cuando tenga una opción seleccionada simplemente presiona ENTER.

Con la opción 2, por ejemplo, puede copiar el modelo desde el teclado.

Please name your problem using up to 6 characters ? \_

Le pide el nombre que le dará problema para el cual puede usar hasta 6 caracteres. Lo copia y pulsa ENTER . Se le asignó el nombre “pedro” al archivo de computadora usado para este modelo

#### LP Model Entry for pedro

Please observe the following conventions when entering a problem:

- (1) 100, 100.0, +100, +100.0, 1E2, and 1.0E+2 are the same.
- (2) -123, -1.23E2, and -1.23E+2 are the same.
- (3) >=, >, =>, and ≥ are the same; <=, <, =<, and ≤ are the same.
- (4) After you enter your data, press the ENTER key.
- (5) On the same screen page, you may correct errors by pressing the BACKSPACE key to move the cursor to the correct position.
- (6) When you are satisfied with the data on a page, press the SPACE BAR.
- (7) When entering the problem, press the Esc key to go to a previous page; press the / key to go to the next page.

Do you want to maximize (1) or minimize (2) criterion? (Enter 1 or 2)      < >  
How many variables are there in your problem? (Enter number ≤ 500 )      < >  
How many constraints are there in your problem? (Enter number ≤ 500 )      < >  
How many '>' constraints are there in your problem? (Enter number ≤ 500 ) < >  
Do you want to use the default variable names (X1,X2,...,Xn) (Y/N)?      < >

En la página siguiente le explica algunos convencionalismos para la Introducción del Modelo en la Computadora y le hace las preguntas siguientes:

- ¿Ud quiere maximizar (1) o minimizar (2) (escriba 1 o 2)
- ¿Cuántas variables tiene su problema? (puede indicar un número  $\leq 500$ )
- ¿Cuántas restricciones tiene su problema? (puede indicar hasta un número  $\leq 500$ )
- ¿Cuántas restricciones del tipo  $\geq$  tiene su problema? (puede indicar hasta un número  $\leq 500$ )
- ¿Quiere usar los nombres (X1,X2,...,Xn) (Y,N)? (si los desea usar copia Y)

Debe presionar la barra espaciadora para continuar.

Si no los desea usar y escribe N, en la pantalla siguiente empieza a preguntar los nombres que le desea dar y allí, en los espacios dados, los copia.

Si ha colocado Y, o N, en la pantalla siguiente aparecerá la solicitud de coeficientes para las variables en el objetivo y en las restricciones. Si hubiese dado nombres particulares, en la pantalla aparecerían los nombres dados. En este caso se le indicó que se quería usar los nombres Xi

## Enter the Coefficients of the LP Model

```

Min      _____ X1      _____ X2
Subject to
(1)      _____ X1      _____ X2  ≥  _____
(2)      _____ X1      _____ X2  ≥  _____
  
```

Una vez copiados, se presiona la barra espaciadora para continuar. Le informa que ha completado de copiar su modelo y que puede presionar cualquier tecla para continuar. Aparece nuevamente la pantalla inicial. Selecciona la opción deseada. Puede resolverlo con la opción 5.

### Option Menu for Solving rapido

When solving the problem, you have the option to display steps of the simplex method. This option is permissible only when your problem is small, that is, when  $N+N1+N2+N3 \leq 9$ , where  $N$  is the number of variables,  $N1$  is the number of ' $\leq$ ' constraints,  $N2$  is the number of '=' constraints, and  $N3$  is the number of '>' constraints; otherwise, only pivoting information will be displayed. You can also choose the graphic method when your problem has only 2 variables and less than 10 constraints.

#### Option

- 1 ---- Solve and display the initial tableau
- 2 ---- Solve and display the final tableau
- 3 ---- Solve and display the initial and final tableaus
- 4 ---- Solve and display every tableau
- 5 ---- Solve without displaying any tableau
- 6 ---- Solve by using the graphic method
- 7 ---- Return to the function menu

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

Esta nueva pantalla presenta información sobre el proceso de solución, con opciones que puede seleccionar. El método gráfico solo se seleccionará si el modelo es de dos variables y se desea solucionar gráficamente. Una vez solucionado el modelo tiene opción de realizar análisis de sensibilidad de la solución.

### Option Menu for Displaying and/or Printing the Final Solution to pedro

You have the following options available for displaying or printing the final solution. If you want to print the solution, make sure that the printer is ready.

#### Option

- 1 ---- Display the final solution only
- 2 ---- Display the solution and sensitivity analysis
- 3 ---- Display/print the solution
- 4 ---- Display/print the solution and sensitivity analysis
- 5 ---- Print the final tableau
- 6 ---- Return to the function menu

Para imprimir presenta opciones como las que se muestran en el menú de opciones.

Finalmente puede retornar a la función Menu, opción 6, y mostrará nuevamente la tabla inicial de opciones.

Si selecciona la opción 9 aparece la siguiente tabla donde puede seleccionar nuevamente el programa que quiere usar, dentro de una variedad de técnicas expuestas como opciones. Al seleccionarla, se repetirá el proceso de solicitar información para esa específica técnica con los pasos siguientes necesarios para el problema a estudiar.

| Welcome to QSB (Quantitative Systems for Business)!                        |                            |          |                             |
|--|----------------------------|----------|-----------------------------|
| You may choose from following management science decision support systems: |                            |          |                             |
| Code No.   | Program                    | Code No. | Program                     |
| 1  | Linear programming         | 9        | Inventory theory            |
| 2  | Integer linear programming | A        | Queuing theory              |
| 3  | Transshipment problem      | B        | Queuing system simulation   |
| 4  | Assignment problem         | C        | Decision/probability theory |
| 5  | Network modeling           | D        | Markov process              |
| 6  | Project scheduling -- CPM  | E        | Time series forecasting     |
| 7  | Project scheduling -- PERT | F        | Specify the type of printer |
| 8  | Dynamic programming        | G        | Exit from QSB               |

\*\* QSB(I): Programs 1 to 5, QSB(II): Programs 6 to E \*\*

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

## D.2. USO DE PROGRAMA QSB DE PARA SOLUCIONAR MODELOS DE TRANSPORTE

Si usted ha solicitado la opción 3, en la tabla anteriormente presentada o ha entrado a QSB directamente con PROG3.EXE, ha solicitado trabajar con Programas de Transporte y de Tránsito. Puede iniciar leyendo las opciones que aparecen en “Welcome to your support system”

En el programa para resolver modelos de transporte puede usar la opción de introducir el modelo desde el teclado con la opción “Introduzca el nuevo modelo”. Aparece un texto que le pide el nombre del problema para el que puede utilizar hasta 6 caracteres.

Aparece luego en pantalla una serie de preguntas similares a las de programación Lineal General, tales como:

¿Ud quiere maximizar (1) o minimizar (2) (escriba 1 o 2)

¿Cuántos orígenes tiene su modelo? (puede indicar un número  $\leq 500$ )

¿Cuántos destinos tiene su modelo? (puede indicar hasta un número  $\leq 500$ )



¿Cuántos puntos de transbordo tiene su modelo? (no responde esta pregunta en transporte)

¿Quiere usar los nombres S1....Sn, D1.....Dn (Y,N) (si los desea usar copia Y)

Debe presionar la barra espaciadora para continuar.

Si no los desea usar y escribe N, en la pantalla siguiente empieza a preguntar los nombres que le desea dar y allí en los espacios dados los copia.

El programa le irá indicando si debe usar ENTER o barra de espacio para seguir o Escape para volver a la pagina anterior.

Luego le muestra en la pantalla los nombres dados a los orígenes y destinos con espacios para llenar primero con las ofertas disponibilidades, esta es la hoja de CAPACITIES of sources. Después debe llenar las demandas en los destinos (Demands of Destinations). Al terminar se pulsa la barra de espacio.

En la pantalla siguiente le pregunta:

Do you want to use free format.....

Esto es, si Ud. desea o no usar el formato libre para entrar los coeficientes de las variables.

Si ha dicho que no (N), enseguida aparece pidiendo entrar los coeficientes en el mismo orden de la tabla de transporte con los orígenes y destinos de su modelo.

Una vez copiados, el modelo ha concluido y pulsa cualquier tecla que lo lleva al menú similar al que se muestra en Programación Lineal General y que traducido al español dice lo siguiente:

Solúcionelo y muestre la tabla inicial

Solúcionelo y muestre cada iteración

Solúcionelo y muestre la tabla final

Solúcionelo sin mostrar iteración alguna

Seleccione el método para encontrar la solución inicial

Retorne a la función menú

Puede seleccionar el método VAM estudiado. El programa le muestra lo que usted haya pedido en las opciones solicitadas.

Así continua solicitando las opciones que desee.

### **D.3. QSB EN SISTEMAS DE ESPERA.**

Los cálculos a efectuar en el modelo estudiado M/ M/1 están limitados a calcular las características operacionales y algunas probabilidades. Se ilustra su uso en un sistema de espera con  $\lambda = 20$  llegadas por hora y  $\mu = 30$  servicios por hora. El programa es PROG8.EXE

En la tabla inicial de opciones se selecciona “entrar el nuevo problema”. Al igual que en otras técnicas, solicita el nombre que se le da al nuevo problema y además pide que se especifique la unidad de tiempo en la cual serán presentadas tanto la tasa de llegadas como la tasa de servicio. Se le asignó el nombre “colas” al archivo de computadora usado para el modelo.

Este punto lo presenta de la manera siguiente:

---

```
Please name your problem using up to 6 characters ? colas
Please specify the time unit (minute, hour, etc.) (default is minute) ? hour
```

Luego presenta la información siguiente que trata de convencionalismos para poder introducir la información del modelo en el programa.

---

```
QUEUE Model Entry for colas

Please observe the following conventions when entering a problem:
(1) The Esc key allows you to reenter data from the beginning.
(2) The / key allows you to reenter data for the previous question.
(3) To enter default value, just press ENTER key.
(4) Enter 0 arrival rate to return to the function menu.
```

A continuación solicita los datos del modelo, es decir la tasa de llegadas y la tasa de servicio. Además pregunta el tipo de distribución probabilística y la longitud de la cola.

---

```
QUEUE Model Entry for colas

Customer arrival rate (lambda) per hour ? 20
How many servers (channels) ? 1
Service rate (μ) per hour for one server ? 30
Available service time distributions are:
    1 -- Exponential
    2 -- Constant
    3 -- General
What is the service time distribution (default = 1) ? 1
Is queue finite (Y/N) ? y
    What is the maximum queue length (default = ∞) ?
```

Cuando se pide la opción de solucionar el modelo aparece en pantalla lo siguiente:

```
Solving the Model for colas

The probability of n customers in the system is defined as P(n).
Specify the value of n for which P(n) will be evaluated (default=10) ?
```

Esto es, solicita el valor del numero de unidades para las cuales se calculará la probabilidad. Si no tiene ningún número en particular, el programa la calculará hasta 10 unidades. El resultado que presenta es el siguiente.

```
Solving the Model for colas

M/M/1
th lamda = 20 customers per hour and μ = 30 customers per hour

Utilization factor (p) = .6666667
Average number of customers in the system (L) = 2
Average number of customers in the queue (Lq) = 1.333333
Average time a customer in the system (W) = .1
Average time a customer in the queue (Wq) = 6.666666E-02
The probability that all servers are idle (Po)= .3333333
The probability an arriving customer waits(Pw)= .6666667

=0.22222 P(2) =0.14815 P(3) =0.09877 P(4) =0.06584 P(5) =0.04390
=0.02926 P(7) =0.01951 P(8) =0.01301 P(9) =0.00867 P(10) =0.00578

10
Σ P(i) =0.655106
i=1
```

Las siguientes opciones son similares a las de las otras técnicas donde se usa el programa. Es decir, imprimir, mostrar en pantalla, volver al menú principal, salir de QSB, Etc.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

La bibliografía existente sobre Investigación de Operaciones es amplia y extensa, por lo que no se recomendará algún libro de texto en particular. Cada estudiante decidirá cuál libro considera mejor o más conveniente, para el aprendizaje de la asignatura. Puede usar, en los capítulos respectivos, cualquier bibliografía que contenga los siguientes tópicos:

- INVESTIGACIÓN de OPERACIONES
- PROGRAMACIÓN LINEAL
- PERT-CPM
- TEORIA DE COLAS.
- MICROECONOMÍA.
- MODELOS CUANTITATIVOS EN LA ADMINISTRACIÓN.
- TÉCNICAS CUANTITATIVAS.

**Como referencia, se citan los siguientes autores:**

- Robert J. Thierauf y Richard Grosse.
- F. J. Gould y G. D. EPPEN
- Frank S. Budnick,
- Richard Mojena y Thomas Vollmann
- Handy Taha
- Frederick S. Hillier y Gerald J. Lieberman
- Kamlesh Mathur y Daniel Solow
- Ackoff Russell
- Don T. Phillips, A. Ravindran y James Solberg
- Everett E. Adam jr.
- Serie Shaum de Investigación de Operaciones

**BIBLIOGRAFÍA elaborada para la Cátedra por la profesora Zoraida Omaña G.:**

Programación Lineal para Toma de Decisiones. (Disponible en Biblioteca)  
Programación Lineal en Empresas Venezolanas. (Disponible en Biblioteca)  
Práctica de Investigación de Operaciones. ( A la venta en Publicaciones)  
Guía de Investigación de Operaciones.  
Manual de Investigación de Operaciones. (Disponible en Biblioteca)