

Optimisation multicritère

Description. Pendant de nombreuses années, l'intérêt des chercheurs s'était porté sur les problèmes d'optimisation monocritère. Un constat qui ne concorde pas avec la réalité industrielle, où la majorité des problèmes présentent plusieurs (souvent contradictoires) objectifs à optimiser. Le rôle de l'optimisation dans ce cas consiste à générer un ensemble de solutions optimales plutôt qu'une seule. Il appartiendrait donc au décideur de choisir une solution parmi celles proposées.

L'optimisation multi-objectif se base sur la notion de dominance ou de Pareto optimalité.

Mono-objectif : une fonction f

Multi-objectif : un ensemble de fonctions f_i

Définition 1. une solution x est dite dominant la solution y SSI :

$$\forall f_i \text{ une fonction à minimiser } f_i(x) \leq f_i(y)$$

$$\text{et } \exists f_i \text{ une fonction à minimiser } f_i(x) < f_i(y)$$

Définition 2. pour une population P de solution, une solution x est dite Pareto optimale SSI :

$$\nexists y \in P / y \text{ domine } x$$

Exercice 1. Dominance

On suppose qu'après le lancement d'un algorithme génétique bi-critère (f_1, f_2) pendant plusieurs générations on ait obtenu une population de solutions ayant les fitness suivantes :

$X = \{x_1 = (2.08, 5.34) ; x_2 = (5.92, 2.08) ; x_3 = (4.18, 3.69) ; x_4 = (6.69, 6.67) ; x_5 = (7.19, 1.80) ; x_6 = (9.89, 8.49) ; x_7 = (5.23, 7.41) ; x_8 = (9.61, 7.28) ; x_9 = (1.90, 6.48) ; x_{10} = (4.68, 1.47)\}$

- 1- Donnez l'ensemble des solutions dominant la solution de fitness (5.0, 5.0).
- 2- Donnez l'ensemble des solutions dominées par la solution de fitness (5.0, 5.0).
- 3- Donnez l'ensemble des solutions Pareto (non-dominées) de cette population.

Exercice 2. Sélection

L'aspect multicritère de l'optimisation rend inutilisable les schémas de sélection classiques dans les algorithmes génétiques basés sur le ranking ou la fitness. Plusieurs techniques ont été alors proposées dans la littérature.

Sélection NDS (Non Dominated Sorting)

Dans la *Non Dominated Sorting* (NDS) le rang d'un individu est égal au nombre de solutions qui le dominant dans la population plus un. Le rang de l'individu jouera alors le rôle de la fonction d'utilité globale.

Sélection NSGA (Nondominated Sorting Genetic Algorithm)

Cette méthode se base sur la détermination progressive, des différents niveaux de dominance entre les solutions. Tout d'abord un ensemble I est initialisé à l'ensemble de toutes les solutions de la population. Les individus non-dominés dans I obtiennent le rang 1 et sont retirés de l'ensemble I . Ce cycle est répété jusqu'à ce que l'ensemble I soit vide.

- 1- Calculez le rang des individus de la population selon la méthode NDS et NSGA.

- 2- On considère que chaque individu i de la population a une probabilité d'être sélectionné égale à :

$$PS_i = \frac{(TP - r_i)}{\sum_{j \in pop} (TP - r_j)}$$

où r_i est le rang de l'individu i et TP la taille de la population.

Calculez la probabilité de sélection de chaque individu de la population selon les méthodes NDS et NSGA.

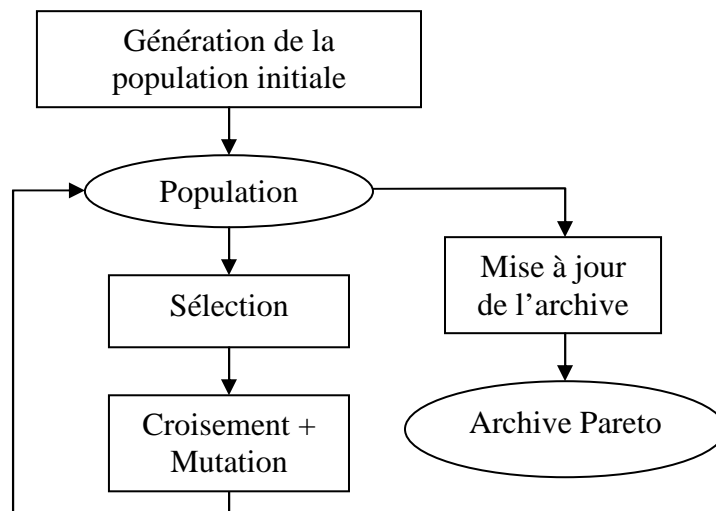
- 3- Quelle conclusion en tirez-vous concernant la pression de sélection?

Exercice 3. Réduction de l'ensemble Pareto

Pour stocker l'ensemble des solutions non dominées trouvées pendant la recherche, les algorithmes génétiques multicritère ont recours à une population archive. Pour certains problèmes, l'ensemble Pareto optimal peut être extrêmement large. Dans ce cas la limitation de la taille de cet ensemble est nécessaire à cause des points suivants:

- De point de vu du décideur, la présentation de toutes les solutions Pareto trouvées est inutile quand leur nombre excède une certaine limite.
- Dans des cas d'optimisation de fonction continue, il est informatiquement impossible et non nécessairement désirable de fournir toutes les solutions Pareto.

- 1- Proposez une procédure permettant de limiter le nombre de solutions Pareto archivées.
- 2- Indiquez la position où viendrait se greffer cette procédure dans le schéma d'algorithme génétique multicritère présenté ci-dessous.



Exercice 4. Comparaison des fronts Pareto

Dans un cas d'optimisation monocritère la comparaison entre deux différentes méthodes d'optimisation se fait directement par la comparaison de la meilleure solution fournie par chaque algorithme. Dans l'optimisation multicritère, le résultat de chaque algorithme d'optimisation est un ensemble de solutions Pareto. Pour comparer les solutions obtenues par chaque algorithme on a souvent recours aux notions d'efficacité relative et de contribution.

Définition 3. L'efficacité relative d'un ensemble X par rapport à un ensemble Y est égale au nombre de solutions appartenant à X qui ne sont dominées par aucune solution de Y.

Définition 4. La contribution d'un ensemble X par rapport à un ensemble Y est déterminée par le rapport entre le nombre de solutions non dominées de X et le nombre de solutions contenue dans l'union de X et de Y.

$$CONT(X, Y) = \frac{\frac{\|C\|}{2} + \|W1\| + \|N1\|}{\|C\| + \|W1\| + \|W2\| + \|N1\| + \|N2\|}$$

où :

- C : correspond à l'ensemble des solutions en commun entre X et Y.
- W1 : correspond à l'ensemble des solutions de X dominant des solutions dans Y (inversement pour W2).
- L1 : ensemble des solutions dominées dans X par des solutions appartenant à Y (inversement pour L2).
- N1 : Solutions à la fois non dominées et non dominantes de l'ensemble X (respectivement de l'ensemble Y pour N2).

- 1- Calculez l'efficacité relative de l'ensemble Pareto(X) par rapport à l'ensemble Pareto(Y) où l'ensemble Y est décrit ci-dessous :

$$Y = \{ y_1=(8.01, 8.11) ; y_2=(0.65, 7.33) ; y_3=(8.08, 7.46) ; y_4=(1.21, 5.01) ; \\ y_5=(6.34, 4.05) ; y_6=(4.08, 6.15) ; y_7=(2.35, 6.48) ; y_8=(3.33, 4.26) ; y_9=(3.68, 9.68) ; \\ y_{10}=(8.45, 2.68) \}$$

- 2- Calculez la contribution de l'ensemble Pareto(X) par rapport à Pareto(Y) ainsi que la contribution de Pareto(Y) par rapport à Pareto(X).
- 3- Que signifie une valeur de contribution égale à 1 ?

