

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

BACHELOR-ARBEIT

---

**Projektive Diskretisierung von  
Kegelschnitten**

---

*Angefertigt von:*

Fabian Carsten Heil  
Wilsnacker Straße 22, 10559 Berlin  
*Matr.-Nr.:* 340908

*Korrektur:*

Prof. Dr. Alexander I. Bobenko (Betreuer)  
Prof. Dr. Yuri B. Suris (Zweitprüfer)

Berlin, Januar 2015

## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenständige Anfertigung versichert an Eides statt:

---

Unterschrift

## Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, eine mögliche Definition zur Diskretisierung von (nicht-degenerierten) Kegelschnitten mittels Polygonen zu liefern und deren Eigenschaften zu untersuchen, wobei insbesondere diskrete Analoga zu Eigenschaften von Kegelschnitten von Interesse sind. Dabei werden zwei wesentliche Ansätze verfolgt: Zum einen sollen die gewählten Polygone sich nur um eine projektive Abbildung von regulären Polygonen unterscheiden, zum anderen soll es sich um eine projektive Definition handeln, das Bild eines solchen diskreten Kegelschnittes unter einer projektiven Abbildung sollte also wieder ein diskreter Kegelschnitt sein.

# 1 Einleitung

## 1.1 Diskrete Kegelschnitte nach Tsukerman

Zunächst sei der Leser darauf hingewiesen, dass diese Arbeit keineswegs den ersten Versuch darstellt, eine Diskretisierung von Kegelschnitten zu definieren. Es existiert bereits eine Arbeit von Emmanuel Tsukerman zu diesem Thema (siehe [1]). Tsukerman verfolgt dabei auch den Ansatz, dass für jeden diskreten Kegelschnitt eine projektive Abbildung existieren sollte, welche ihn auf ein reguläres Polygon abbildet. Die Motivation hierfür ist leicht zu finden, da ein reguläres Polygon aufgrund seiner Symmetrie die naheliegendste Diskretisierung eines Kreises darstellt und alle (nicht-degenerierten) Kegelschnitte sich nur um eine projektive Abbildung von Kreisen unterscheiden. Er liefert allerdings keine projektive Definition, das projektive Bild eines diskreten Kegelschnitts wäre also im Allgemeinen kein diskreter Kegelschnitt nach Tsukerman. Da das projektive Bild eines Kegelschnitts aber immer ein Kegelschnitt ist, wäre eine solche Eigenschaft auch für eine Diskretisierung wünschenswert, was eine Definition motiviert, welche eine größere Klasse von Polygonen beschreibt. Nimmt man nun diese beiden Ansätze zusammen, so wird klar, dass eine solche Definition nicht nur eine Diskretisierung von Kegelschnitten darstellt, sondern außerdem *genau die* Polygone beschreibt, die projektiv äquivalent zu regulären Polygonen sind. Aus diesem Grund werden sie im Folgenden auch als *projektiv regulär* bezeichnet.

## 1.2 Projektiv reguläre Polygone

Bevor wir die Definition angeben, möchten wir einige allgemeine Voraussetzungen an die betrachteten Kegelschnitte und Polygone stellen. Zum einen

möchten wir nur nicht-ausgeartete Kegelschnitte betrachten, da eine Diskretisierung von ausgearteten Kegelschnitten kaum Nutzen verspricht, im Gegenteil eher zu Problemen bei der Definition führt. Wenn im Folgenden also die Rede von Kegelschnitten ist, so sind damit nicht-ausgeartete Kegelschnitte gemeint. Desweiteren scheint es sinnvoll, lediglich Polygone mit fünf oder mehr Eckpunkten für Diskretisierungen zu verwenden. Die genannten Definitionen und Eigenschaften gelten zwar auch für Drei- und Vierecke, allerdings ist in diesen Fällen nicht mehr klar, welcher Kegelschnitt überhaupt beschrieben werden soll, da ein Kegelschnitt erst durch Angabe von fünf Punkten oder Tangenten eindeutig bestimmt ist. Davon abgesehen lassen sich drei oder vier Punkte in allgemeiner Lage immer projektiv auf reguläre Dreiecke beziehungsweise Vierecke abbilden, womit die gewählte Definition gar keine zusätzliche Einschränkung bereitstellt. Wir möchten außerdem bloß Polygone betrachten, welche nicht selbstüberschneidend sind. Eine solche Bedingung erscheint für die Diskretisierung von Kegelschnitten selbstverständlich, da Kegelschnitte auch nicht selbstüberschneidend sind, allerdings lassen sich in der Tat selbstüberschneidende Polygone finden, welche die folgende Definition erfüllen, weshalb wir sie von vornherein ausschließen.

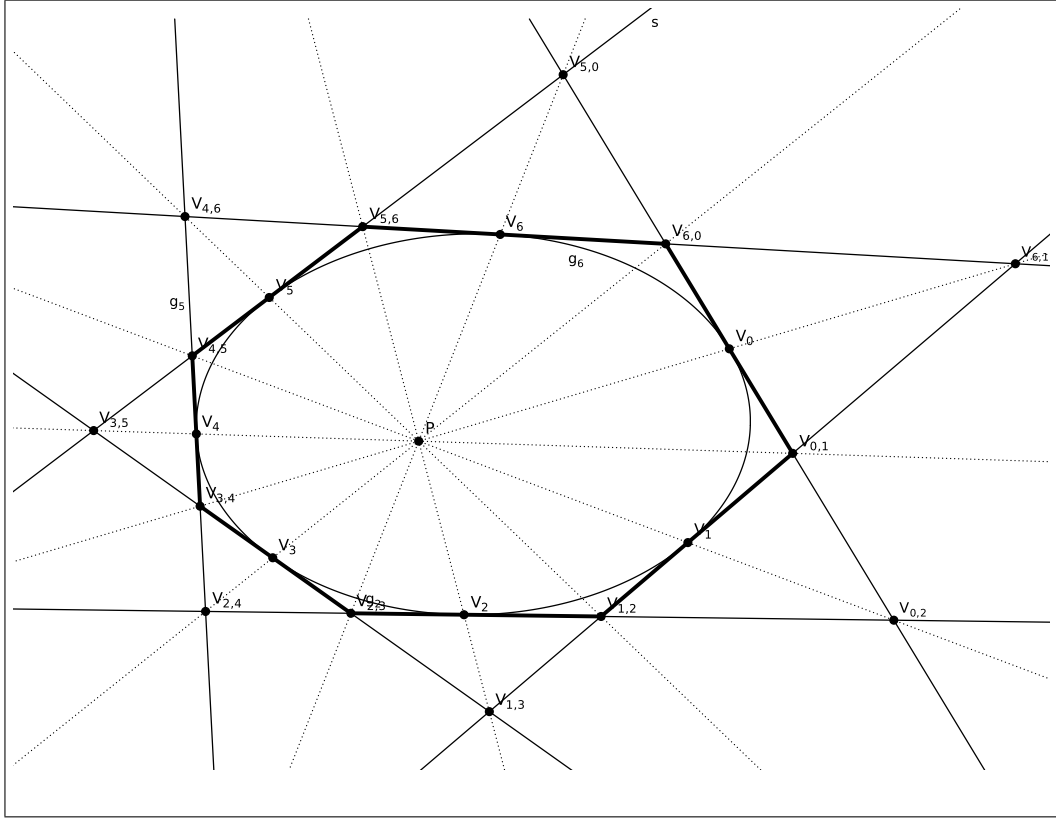
**Definition.** Sei  $C$  ein Kegelschnitt. Wir bezeichnen ein Polygon  $D$  mit Seiten  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  als *projektive Diskretisierung* von  $C$  beziehungsweise als *projektiv regulär*, falls gilt:

1. die Seite  $g_i$  berührt  $C$  im Punkt  $V_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
2. es existiert ein Punkt  $P$  im Inneren von  $C$ , sodass der Schnittpunkt  $g_{i-1} \cap g_{i+1}$  auf der Gerade  $PV_i$  liegt,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Wir nennen  $P$  den *Inzidenzpunkt* von  $D$ .

Wir können bei dieser Definition zunächst feststellen, dass die definierenden Eigenschaften unter projektiven Abbildungen erhalten bleiben, wie von einer projektiven Definition zu erwarten. Man überprüft außerdem schnell, dass die genannten Eigenschaften in der Tat im Fall von regulären Polygonen erfüllt sind und somit eine notwendige Bedingung für projektive Äquivalenz zu regulären Polygonen darstellt. Dahingegen ist es nicht unbedingt offensichtlich, dass die genannten Eigenschaften bereits hinreichend sind, weshalb diese Frage im nächsten Abschnitt genauer erörtert wird.

Um die vorkommenden Schnittpunkte und Verbindungsgeraden leichter referenzieren zu können, wird die folgende Notation eingeführt: Sei  $V_{i,j} := g_i \cap g_j$ , falls  $i \neq j$  und  $V_{i,i} := V_i$ . Weiterhin sei  $g_{i,j} := V_i V_j$ , falls  $i \neq j$  und  $g_{i,i} := g_i$ . Es sollte klar sein, dass die Anordnung des Indexpaares hier keine Rolle



**Abbildung 1:** Projektive Diskretisierung einer Ellipse mit 7 Eckpunkten

spielt und um Fallunterscheidungen zu vermeiden, werden außerdem alle Indizes modulo  $n$  betrachtet, beispielsweise wäre  $V_{-2,n+1} = V_{n-2,1} = V_{1,n-2}$ . Der Vorteil dieser Notation sollte später klar werden. Man sollte außerdem feststellen, dass die Ecken eines projektiv regulären Polygons mit dieser Notation nicht  $V_0, \dots, V_{n-1}$  sind (das sind immer noch die Berührungspunkte der Seiten am Kegelschnitt), sondern vielmehr  $D = V_{0,1}V_{1,2} \dots V_{n-1,0}$  gilt. Die Punkte  $V_i$  liegen also alle auf dem definierenden Kegelschnitt, während die Geraden  $g_i$  ihn berühren.

## 2 Projektive Eigenschaften

Im folgenden Abschnitt sollen die projektiven Eigenschaften von projektiv regulären Polygonen untersucht werden, also Eigenschaften, die von projektiven Abbildungen erhalten bleiben. Dazu gehört auch die bereits angesprochene Eigenschaft, dass jedes projektiv reguläre Polygon mittels einer projektiven Abbildung auf ein reguläres Polygon abgebildet werden kann, was insbesondere bedeutet, dass die projektiven Eigenschaften eine projektiv regulären

Polygons gerade die projektiven Eigenschaften eines regulären Polygons sind, was auch die Bezeichnung als projektiv regulär begründet.

## 2.1 Polare Dualität

Ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis der folgenden Eigenschaften ist das Prinzip der Dualität. Hierbei wird ein Punkt  $P \in \mathbb{RP}^2$  mit einer Geraden  $p \subset \mathbb{RP}^2$  identifiziert und umgekehrt. Jeder Punkt  $P \in \mathbb{RP}^2$  entspricht einem eindimensionalen Unterraum  $U_P \subset \mathbb{R}^3$ , durch die Wahl einer Basis von  $\mathbb{R}^3$  lässt sich  $U_P$  mit einem eindimensionalen Unterraum  $(U_P)^* \subset (\mathbb{R}^3)^*$  identifizieren. Nun gibt es einen eindeutigen zweidimensionalen Unterraum  $U_p \subset \mathbb{R}^3$ , sodass  $(U_P)^* = (U_p)^0$  gilt.  $U_p$  wiederum entspricht einer Geraden  $p \subset \mathbb{RP}^2$ , was eine Abbildung  $d$  mit  $d(P) = p$  liefert. Offenbar lässt sich dieser Prozess ebenso für  $p$  durchführen, weshalb  $d(p) = P$  definiert ist. Da die Abbildung  $d$  von der Wahl einer Basis abhängt, entspricht sie einer linearen Abbildung in  $GL(3, \mathbb{R})$ , sind also  $d_1$  und  $d_2$  zwei duale Abbildungen, so ist  $d_2 \circ d_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  eine projektive Abbildung. Wegen  $(U_1 \cap U_2)^0 = (U_1)^0 \cup (U_2)^0$  und  $(U_1 \cup U_2)^0 = (U_1)^0 \cap (U_2)^0$  erhält  $d$  außerdem Inzidenzen, es gilt also  $d(P_1 P_2) = d(P_1) \cap d(P_2)$  und  $d(P_1 \cap P_2) = d(P_1) d(P_2)$ . Einen Spezialfall der Dualität stellt die polare Dualität oder Polarität dar. Hier ist die duale Abbildung  $d$  abhängig von einem (nicht-entarteten) Kegelschnitt  $C$ , die zu  $d$  korrespondierende lineare Abbildung wäre dann eine symmetrische Matrix  $M_C \in GL(3, \mathbb{R})$ , welche  $C$  beschreibt. In diesem Fall wird ein Punkt  $P \in C$  auf die Tangente  $p$  an  $C$  in  $P$  abgebildet, die Bilder der übrigen Punkte ergeben sich dann bereits eindeutig durch Erhaltung der Inzidenzen. Auf diese Weise lässt sich auch ein dualer Kegelschnitt definieren, ist nämlich  $d$  eine duale Abbildung,  $C$  ein Kegelschnitt und  $d_C$  die duale Abbildung bezüglich  $C$ , so können wir  $d(C) := d \circ d_C(C)$  setzen. Ist nun  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , so sieht  $d_C$  wie folgt aus: Ein Punkt  $P$  wird auf die Gerade abgebildet, welche orthogonal zu  $MP$  steht und durch  $P'$ , den inversen Punkt zu  $P$  bezüglich  $K$ , verläuft; entsprechend wird eine Gerade  $p$  auf das Inverse des Lotfußpunktes von  $M$  auf  $p$  abgebildet (Siehe auch [3, Abschnitt 6]). Es gilt nun außerdem das folgende Lemma:

**Lemma 2.1.** *Sei  $C$  ein Kegelschnitt mit Fokus  $F$  und  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $F$ . Bezeichnet nun  $d_K$  die duale Abbildung bezüglich  $K$ , so ist  $d_K(C)$  ein Kreis.*

*Beweis.* Zunächst bildet  $d_C$  die Punkte auf  $C$  auf die Tangenten an  $C$  ab. Die Lotfußpunkte der Tangenten eines Kegelschnittes bezüglich eines Fokus des Kegelschnittes liegen nun bekanntlich auf einem Kreis oder einer Geraden ([4,

Seite 26]). Da diese Punkte nun mittels einer Inversion an  $K$  abgebildet werden, ist das Resultat wieder ein Kreis.  $\square$

Der Beweis und die Referenzen des Lemmas wurden aus Tsukermans Arbeit ([1]) übernommen.

## 2.2 Projektive Äquivalenz zu regulären Polygonen

Mithilfe dieses Vorwissens - insbesondere über die Dualität bezüglich eines Kreises - können wir nun das folgende Lemma beweisen, welches sich später als nützlich erweisen soll.

**Lemma 2.2.** *Sei  $C$  ein Kegelschnitt und  $P$  ein Punkt im Inneren von  $C$ . Dann existiert eine projektive Abbildung  $f$ , sodass  $f(C)$  ein Kreis ist und  $f(P)$  der Mittelpunkt dieses Kreises.*

*Beweis.* Bekanntlich existiert für zwei beliebige nicht-degenerierte Kegelschnitte  $C_1$  und  $C_2$  immer eine projektive Abbildung  $f$ , sodass  $f(C_1) = C_2$  gilt, insbesondere existiert also eine projektive Abbildung, welche  $C$  auf einen Kreis abbildet. Wir dürfen also davon ausgehen, dass  $C$  ein Kreis ist und  $P$  ein Punkt im Inneren des Kreises. Weiterhin habe  $C$  den Radius 1 und den Mittelpunkt  $M$ . Sei nun außerdem  $F$  ein Punkt auf der Geraden  $MP$ , welcher zwischen  $M$  und  $P$  liegt.

Bezeichne jetzt  $d$  die Dualitätsabbildung bezüglich des Kreises mit Mittelpunkt  $F$  und Radius 1. Da  $F$  im Inneren von  $C$  liegt, ist  $d(C)$  eine Ellipse und da außerdem  $C$  ein Kreis ist, muss  $F$  ein Fokus von  $d(C)$  sein. Bezeichne  $F'$  den anderen Fokus von  $d(C)$ . Aufgrund von Symmetrie stehen die Geraden  $d(M)$  und  $d(P)$  senkrecht auf der Geraden  $FF'$ . Sei  $M'$  der Schnittpunkt von  $d(M)$  mit  $FF'$  und  $P'$  der Schnittpunkt von  $d(P)$  mit  $FF'$ . Offenbar liegen  $M'$  und  $P'$  außerhalb von  $d(C)$  und die Punkte  $F$  und  $F'$  liegen zwischen ihnen, wobei  $F$  näher an  $M'$  liegt und  $F'$  näher an  $P'$ .

Der Punkt  $F$  lässt sich nun so wählen, dass  $\|FM'\| = \|F'P'\|$  gilt. Bevor wir dies beweisen, wollen wir darauf eingehen, wie daraus der Beweis des Lemmas folgt. Ist nämlich  $F$  entsprechend gewählt und bezeichnet  $s$  die Spiegelung an der Mittelsenkrechte von  $F$  und  $F'$ , so gilt  $s \circ d(C) = d(C)$  und  $s \circ d(P) = d(M)$ . Entsprechend folgt:

$$d^{-1} \circ s \circ d(C) = d^{-1} \circ d(C) = C$$

$$d^{-1} \circ s \circ d(P) = d^{-1} \circ d(M) = M$$

Offenbar ist die Abbildung  $d^{-1} \circ s \circ d$  projektiv und bildet  $P$  auf  $M$  ab, während sie  $C$  invariant lässt, erfüllt also die gewünschten Eigenschaften.

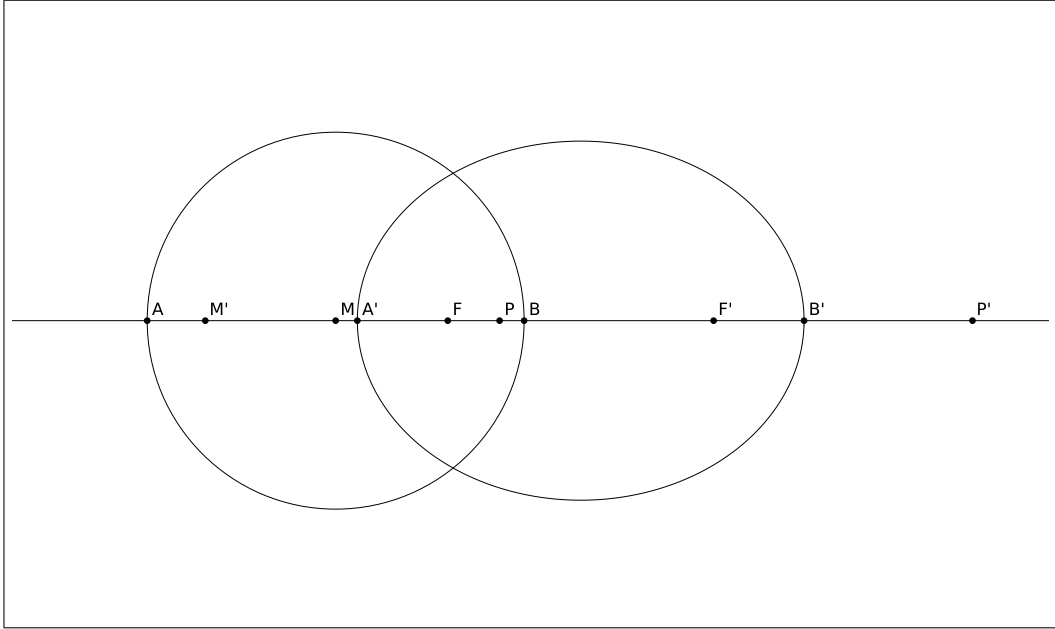
Wir stellen außerdem fest, dass:

$$d^{-1} \circ s \circ d(M) = d^{-1} \circ d(P) = P$$

$$d^{-1} \circ s \circ d(F) = d^{-1} \circ s(l_\infty) = d^{-1}(l_\infty) = F$$

wobei  $l_\infty$  die Gerade im Unendlichen bezeichnet, welche von einer Spiegelung natürlich auf sich selbst abgebildet wird. Diese beiden Umstände sind zu diesem Zeitpunkt noch nicht relevant, werden aber später noch von Interesse sein.

Kommen wir nun zum Beweis der Behauptung bezüglich der Wahl von  $F$ .



**Abbildung 2:** Skizze zum Beweis des Lemmas 2.2

Bezeichne dazu  $A$  und  $B$  die Schnittpunkte von  $MF$  mit  $C$ , wobei  $\|AF\| > \|BF\|$  gelte. Sei weiterhin  $A' := d(A) \cap d(C)$  und  $B' := d(B) \cap d(C)$ , offenbar liegen dann  $A'$  und  $B'$  auf der Gerade  $FF'$ , während  $d(A)$  und  $d(B)$  senkrecht auf ihr stehen. Sei weiterhin  $f := \|MF\|$  und  $p := \|MP\|$ . Offensichtlich gilt nun  $\|FA'\| = \|F'B'\|$ , weshalb die Aussage  $\|FM'\| = \|F'P'\|$  äquivalent ist zu  $\|A'M'\| = \|B'P'\|$ . Für diese beiden Längen gilt nun:

$$\|M'A'\| = \|FM'\| - \|FA'\| = \frac{1}{\|FM\|} - \frac{1}{\|FA\|} = \frac{1}{f} - \frac{1}{1+f}$$

$$\|B'P'\| = \|FP'\| - \|FB'\| = \frac{1}{\|FP\|} - \frac{1}{\|FB\|} = \frac{1}{p-f} - \frac{1}{1-f}$$



Gesucht ist also eine Lösung für die Gleichung:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{1+f} = \frac{1}{p-f} - \frac{1}{1-f}$$

Wobei  $p \in (0, 1)$  und  $f \in (0, p)$  gelten soll. Einige Äquivalenzumformungen ergeben nun:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} - \frac{1}{1+f} &= \frac{1}{p-f} - \frac{1}{1-f} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f(1+f)} &= \frac{1-p}{(p-f)(1-f)} \\ \Leftrightarrow (p-f)(1-f) &= f(1+f)(1-p) \\ \Leftrightarrow p - pf - f + f^2 &= f - pf + f^2 - pf^2 \\ \Leftrightarrow pf^2 - 2f + p &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(f - \frac{1}{p}\right)^2 &= \frac{1}{p^2} - 1 \\ \Leftrightarrow f &= \frac{1}{p} - \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1} \end{aligned}$$

In den letzten beiden Schritten wird dabei bereits verwendet, dass  $p \in (0, 1)$  gelten soll, was teilen durch  $p$ , sowie ziehen der Wurzel erlaubt. Außerdem legt es das Vorzeichen der Wurzel fest, da bei positivem Vorzeichen  $f > 1$  gelten würde, entgegen der Voraussetzung. Es scheint also eine Lösung für  $f$  gefunden zu sein, es bleibt noch zu prüfen, ob tatsächlich  $f \in (0, p)$  gilt. Es gilt aber

$$0 < \frac{1}{p} - \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1} < \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{1}{p^2} - 1 < \frac{1}{p^2}$$

was offenbar wahr ist und außerdem

$$\frac{1}{p} - \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1} < p \Leftrightarrow \frac{1}{p} - p < \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{p^2} - 2 + p^2 < \frac{1}{p^2} - 1 \Leftrightarrow p^2 < 1$$

was wegen  $p \in (0, 1)$  ebenfalls wahr ist und somit den Beweis abschließt.  $\square$

Es sollte angemerkt werden, dass das Lemma lediglich die Existenz einer solchen Abbildung garantiert, nicht jedoch die Eindeutigkeit. In der Tat ist die Abbildung ohne weitere Bedingungen nicht eindeutig bestimmt. Mithilfe des Lemmas lässt sich nun allerdings das folgende Theorem beweisen, welches insbesondere die Bezeichnung *projektiv regulär* rechtfertigt.

**Theorem 2.3.**  $D$  ist ein projektiv reguläres Polygon  $\Leftrightarrow \exists f : \mathbb{RP}^2 \xrightarrow{\text{proj.}} \mathbb{RP}^2$ , sodass  $F(D)$  ein reguläres Polygon ist.

*Beweis.* " $\Leftarrow$ "

Für diese Richtung ist zu zeigen, dass das projektive Bild eines regulären Polygons immer ein projektiv reguläres Polygon ist. Die definierenden Eigenschaften eines projektiv regulären Polygons sind nun offenbar so gewählt, dass sie unter projektiven Abbildungen erhalten bleiben. Es genügt also zu zeigen, dass die Eigenschaften für ein reguläres Polygon erfüllt sind. Die Bezeichnungen für alle vorkommenden Punkte und Geraden sei wie gehabt. Zunächst stellen wir fest, dass jedes reguläre Polygon  $D$  einen Kreis  $C$  umschreibt und die Berührungspunkte  $V_i$  gerade die Mittelpunkte der Seiten sind, womit die erste Eigenschaft bereits erfüllt ist. Wir wählen nun den Mittelpunkt von  $C$  als Inzidenzpunkt  $P$  und definieren  $l_i := PV_i$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $l_i \cap g_{i-1} = l_i \cap g_{i+1}$  gilt und somit  $V_{i-1,i+1}$  auf der Geraden  $l_i$  liegt, wie gefordert. Sei dazu  $V_i^- := l_i \cap g_{i-1}$  und  $V_i^+ := l_i \cap g_{i+1}$ . Da  $D$  ein reguläres Polygon ist, gilt nun  $\angle V_{i-1}PV_i^- = \angle V_i^+PV_{i+1}$ , außerdem  $\angle V_i^-V_{i-1}P = \angle PV_{i+1}V_i^+ = \frac{\pi}{2}$ , weil  $g_{i-1}$  und  $g_{i+1}$  Tangenten an  $C$  sind. Weiterhin ist  $\|PV_{i-1}\| = \|PV_{i+1}\|$ , weshalb die Dreiecke  $V_{i-1}PV_i^-$  und  $V_i^+PV_{i+1}$  kongruent sind, woraus  $\|PV_i^-\| = \|PV_i^+\|$  folgt und somit  $V_i^- = V_i^+ = V_{i-1,i+1}$ , was zu zeigen war.

" $\Rightarrow$ "

Sei  $D$  eine projektive Diskretisierung des Kegelschnitts  $C$  mit Inzidenzpunkt  $P$ . Nach Lemma 2.2 existiert eine projektive Abbildung  $f$ , sodass  $f(C)$  ein Kreis ist und  $f(P)$  der Mittelpunkt des Kreises. Wir werden zeigen, dass dann  $f(D)$  ein reguläres Polygon sein muss. Zur besseren Leserlichkeit werden im Folgenden die Bildpunkte mit Namen der Urbildpunkte bezeichnet, ohne die Abbildung mittels  $f(\dots)$  explizit zu kennzeichnen.

Es gilt  $\angle V_{i-1,i+1}V_{i-1}P = \angle PV_{i+1}V_{i-1,i+1} = \frac{\pi}{2}$ , da  $g_{i-1}$  und  $g_{i+1}$  Tangenten des Kreises sind, außerdem  $\|PV_{i-1}\| = \|PV_{i+1}\|$ , da dies der Radius des Kreises ist. Es folgt  $\angle V_{i-1}PV_{i-1,i+1} = \angle V_{i-1,i+1}PV_{i+1}$  und da  $V_{i-1,i+1}$  auf der Geraden  $PV_i$  liegt, gilt auch  $\angle V_{i-1}PV_i = \angle V_iPV_{i+1} =: \alpha$ . Somit ist  $V_0, V_1 \dots V_{n-1}$  ein reguläres Polygon. Wegen  $\angle V_{i,i+1}V_iP = \angle PV_{i+1}V_{i,i+1} = \frac{\pi}{2}$  und  $\|PV_i\| = \|PV_{i+1}\|$  folgt auch  $\angle V_iPV_{i,i+1} = \angle V_{i,i+1}PV_{i+1} = \frac{\alpha}{2}$  und somit  $\angle V_{i-1,i}PV_{i,i+1} = \alpha$ . Offensichtlich gilt auch  $\|PV_{i-1,i}\| = \|PV_{i,i+1}\|$  für alle  $i$ , weshalb  $V_{0,1}, \dots, V_{n-1,0}$  ebenfalls ein reguläres Polygon ist, was zu zeigen war.  $\square$

Aus dem Theorem folgen nun direkt einige Eigenschaften der Polygone, welche in dem folgenden Korollar zusammengefasst werden.

**Korollar 2.4.** 1. Sei  $D$  ein projektiv reguläres Polygon mit Inzidenzpunkt

$P$  und Berührungspunkten  $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$ . Dann ist  $V_0V_1 \cdots V_{n-1}$  ein projektiv reguläres Polygon mit Inzidenzpunkt  $P$ .

2. Jedes projektiv reguläre Polygon ist ein Poncelet-Polygon.
3. Sei  $C$  ein (nicht-degenerierter) Kegelschnitt und  $P$  ein Punkt im Inneren von  $C$ . Dann existiert eine projektive Diskretisierung von  $C$  mit Inzidenzpunkt  $P$ .
4. Seien  $D_1$  und  $D_2$  zwei projektiv reguläre Polygone mit jeweils  $n$  Eckpunkten. Dann existiert eine projektive Abbildung  $f$  mit  $f(D_1) = D_2$ .
5. Sei  $D$  ein projektiv reguläres Polygon und  $f$  eine projektive Abbildung, so ist  $f(D)$  ein projektiv reguläres Polygon.

*Beweis.* 1. Sei  $f$  eine projektive Abbildung, sodass  $f(D)$  ein reguläres Polygon ist. Offenbar ist  $R := f(V_0)f(V_1) \cdots f(V_{n-1})$  dann ebenfalls ein reguläres Polygon und beide Polygone liegen auf konzentrischen Kreisen, haben also beide den Inzidenzpunkt  $f(P)$ . Nach dem vorigen Theorem ist somit  $f^{-1}(R)$  ein projektiv reguläres Polygon und hat Inzidenzpunkt  $P$ .

2. Offenbar ist jedes reguläre Polygon ein Poncelet-Polygon, da es einen Inkreis und einen Umkreis hat. Da diese Eigenschaft von projektiven Abbildungen erhalten bleibt, sind auch alle projektiv regulären Polygone Poncelet-Polygone.
3. Sei  $R$  ein reguläres Polygon. Offenbar diskretisiert  $R$  einen Kreis und hat als Inzidenzpunkt den Mittelpunkt des Kreises. Nach Lemma 1 existiert nun eine projektive Abbildung  $f$ , welche den Kreis auf  $C$  abbildet und den Mittelpunkt auf  $P$ . Somit ist  $f(R)$  eine projektive Diskretisierung von  $C$  mit Inzidenzpunkt  $P$ .
4. Es existieren projektive Abbildungen  $f_1$  und  $f_2$ , sodass  $f_1(D_1)$  und  $f_2(D_2)$  reguläre Polygone sind und offenbar können wir die Abbildungen so wählen, dass  $f_1(D_1) = f_2(D_2)$  gilt. Setzen wir  $f := f_2^{-1} \circ f_1$ , so gilt  $f(D_1) = D_2$ .
5. Es existiert eine projektive Abbildung  $g$ , sodass  $g(D)$  ein reguläres Polygon ist. Somit wird  $f(D)$  von der Abbildung  $g \circ f^{-1}$  auf ein reguläres Polygon abgebildet und ist somit selbst projektiv regulär.

□

Die ersten beiden Punkte des Korollars zeigen sehr deutlich, dass projektiv reguläre Polygone nicht nur einen Kegelschnitt beschreiben, sondern eigentlich zwei, einen einbeschriebenen und einen umschreibenden. Wir haben für die Definition den einbeschriebenen Kegelschnitt verwendet, im Wesentlichen weil es für die später betrachteten Analoga der Reflektions- und Isogonaleigenschaft von Kegelschnitten von Vorteil ist, wenn die Seiten des Polygons Tangenten des definierenden Kegelschnitts bilden. Dennoch ist eine Definition über den äußeren Kegelschnitt sehr wohl möglich. Wir werden aus diesem Grund drei alternative Definitionen angeben, welche sich ergeben, indem man entweder das erste, das zweite oder beide der ursprünglichen Definitionensaxiome bezüglich dem definierenden Kegelschnitt dualisiert. Hierbei sei angemerkt, dass wir die vorherige Notation jeweils entsprechend so abändern, dass die  $V_i$  Punkte auf dem definierenden Kegelschnitt sind und die  $g_i$  die Tangenten in diesen Punkten.

**Theorem 2.5.** *Für ein Polygon  $D$  sind die Folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $D$  ist projektiv regulär.
2.  $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$  bezeichne die Eckpunkte von  $D$  und es gelte:
  - (a)  $\exists$  Kegelschnitt  $C$ , sodass  $V_i \in C, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $g_i$  sei Tangente an  $C$  in  $V_i$
  - (b)  $\exists$  Punkt  $P$  im Inneren von  $C$ , sodass  $V_{i-1, i+1}$  auf der Gerade  $PV_i$  liegt,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
3.  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  bezeichne die Seiten von  $D$  und es gelte:
  - (a)  $\exists$  Kegelschnitt  $C$ , sodass  $g_i$  Tangente an  $C, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $V_i$  sei der Berührungspunkt von  $g_i$  an  $C$
  - (b)  $\exists$  Gerade  $p$  mit  $p \cap C = \emptyset$ , sodass  $(p \cap g_i) \in g_{i-1, i+1}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
4.  $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$  bezeichne die Eckpunkte von  $D$  und es gelte:
  - (a)  $\exists$  Kegelschnitt  $C$ , sodass  $V_i \in C, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $g_i$  sei Tangente an  $C$  in  $V_i$
  - (b)  $\exists$  Gerade  $p$  mit  $p \cap C = \emptyset$ , sodass  $(p \cap g_i) \in g_{i-1, i+1}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

*Beweis.* Die Aussagen 1 und 3 sind äquivalent, da lediglich das zweite Definitionensaxiom bezüglich  $C$  dualisiert wird. Das Gleiche gilt für Aussagen 2 und 4, weshalb es für den Beweis des Lemmas ausreicht die Äquivalenz von

1 und 2 zu zeigen.

"2  $\Rightarrow$  1 ": Die Geraden  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  bilden offenbar die Seiten eines projektiv regulären Polygons, weshalb  $D$  projektiv regulär ist.

"1  $\Rightarrow$  2 ": Offenbar erfüllen die Berührungspunkte eines projektiv regulären Polygons diese Eigenschaft. Da die Berührungspunkte selbst ein projektiv reguläres Polygon bilden und somit auf ein beliebiges anders projektiv reguläres Polygon mit gleicher Anzahl an Eckpunkten abgebildet werden können, überträgt sich diese Eigenschaft auf alle projektiv regulären Polygone.  $\square$

Die Gerade  $p$  bezeichnen wir aufgrund ihrer Aufgabe und der Beziehung zum Inzidenzpunkt  $P$  als *Inzidenzgerade*. Man sollte außerdem feststellen, dass  $P$  der Pol von  $p$  ist, sowohl bezüglich des einbeschriebenen Kegelschnittes als auch bezüglich des umschreibenden Kegelschnittes. Um dies einzusehen, genügt es wieder den Fall des regulären Polygons zu betrachten, dort sind Inkreis und Umkreis offenbar konzentrisch und  $P$  ist gerade der Mittelpunkt der Kreise, während  $p$  die Gerade im Unendlichen ist und somit polar zu  $P$  bezüglich In- und Umkreis.

Das Theorem zeigt, dass es für eine projektive Betrachtung kaum einen Unterschied macht, ob wir ein Polygon über den einbeschriebenen oder den umschreibenden Kegelschnitt definieren. Entsprechend können wir auch wählen, ob wir mit unserer bisherigen Notation die Seiten des Polygons mit  $g_i$  bezeichnen oder aber die Eckpunkte mit  $V_i$ , in beiden Fällen gehen wir davon aus, dass die  $V_i$  auf dem definierenden Kegelschnitt liegen und die  $g_i$  Tangenten in  $V_i$  sind. Insbesondere sind die beiden folgenden Theoreme gültig, unabhängig davon, welcher Kegelschnitt für die Definition verwendet wird.

## 2.3 Eigenschaften der $V_{i,j}$ und $g_{i,j}$

**Theorem 2.6.** *Sei  $D$  ein projektiv reguläres Polygon mit Inzidenzpunkt  $P$ . Für alle  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  gilt: Die Punkte  $V_{i,j}$  mit  $i+j \equiv k \pmod n$  sowie  $P$  liegen auf einer Gerade  $l_k$ .*

*Beweis.* Auch hier handelt es sich wieder um eine Eigenschaft, welche von projektiven Abbildungen erhalten bleibt, weshalb es genügt, ein reguläres Polygon zu betrachten. Allerdings macht es Sinn, die Fälle für ungerades und gerades  $n$  getrennt zu betrachten.

Ist  $n$  ungerade, so existiert immer ein  $i_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  mit  $i_k + i_k \equiv k \pmod n$ , nämlich  $i_k = \frac{k}{2}$ , falls  $k$  gerade ist und  $i_k = \frac{n+k}{2}$ , falls  $k$  ungerade ist. Entsprechend definieren wir  $l_k := PV_{i_k, i_k}$ . Die Behauptung ist nun, dass alle weiteren  $V_{i,j}$  mit  $i+j \equiv k \pmod n$  ebenfalls auf  $l_k$  liegen, dies sind genau die Punkte  $V_{i_k-m, i_k+m}$  für  $1 \leq m < \frac{n}{2}$ . Es ist also zu zeigen, dass

$l_k \cap g_{i_k-m} = l_k \cap g_{i_k+m}$  gilt, sei dazu  $X_{m,k}^- := l_k \cap g_{i_k-m}$  und  $X_{m,k}^+ := l_k \cap g_{i_k+m}$ . Da wir ein reguläres Polygon betrachten, gilt nun aber

$$\angle X_{m,k}^- V_{i_k-m} P = \angle P V_{i_k+m} X_{m,k}^+ = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle V_{i_k-m} P X_{m,k}^- = \angle X_{m,k}^+ P V_{i_k+m} = \frac{m}{n} 2\pi$$

$$\|P V_{i_k-m}\| = \|P V_{i_k+m}\|$$

somit sind die Dreiecke  $P V_{i_k-m} X_{m,k}^-$ ,  $P V_{i_k+m} X_{m,k}^+$  kongruent und  $\|P X_{m,k}^-\| = \|P X_{m,k}^+\|$  folgt, also auch  $X_{m,k}^- = X_{m,k}^+$  und somit  $V_{i_k-m, i_k+m} \in l_k$ .

Ist  $n$  gerade, so muss auch zwischen geradem und ungeradem  $k$  unterschieden werden. Ist  $k$  gerade, so kann man  $i_k = \frac{k}{2}$  wählen und den Beweis wie oben fortsetzen. Ist  $k$  ungerade, so existiert kein  $i_k$  mit  $i_k + i_k \equiv k \pmod{n}$ , allerdings gilt für  $i_k = \frac{k-1}{2}$ , dass  $i_k + i_k + 1 \equiv k \pmod{n}$ , weshalb wir  $l_k := P V_{i_k, i_k+1}$  setzen können. Ähnlich wie zuvor muss nun gezeigt werden, dass auch die Punkte  $V_{i_k-m, i_k+1}$  auf  $l_k$  liegen. Wegen  $\angle V_i P V_{i,i+1} = \angle V_{i+1} P V_{i+1}$  bleibt aber die entscheidende Winkeleigenschaft erhalten und der Rest folgt wie zuvor.  $\square$

Dualisieren dieser Aussage am definierenden Kegelschnitt liefert das folgende Korollar:

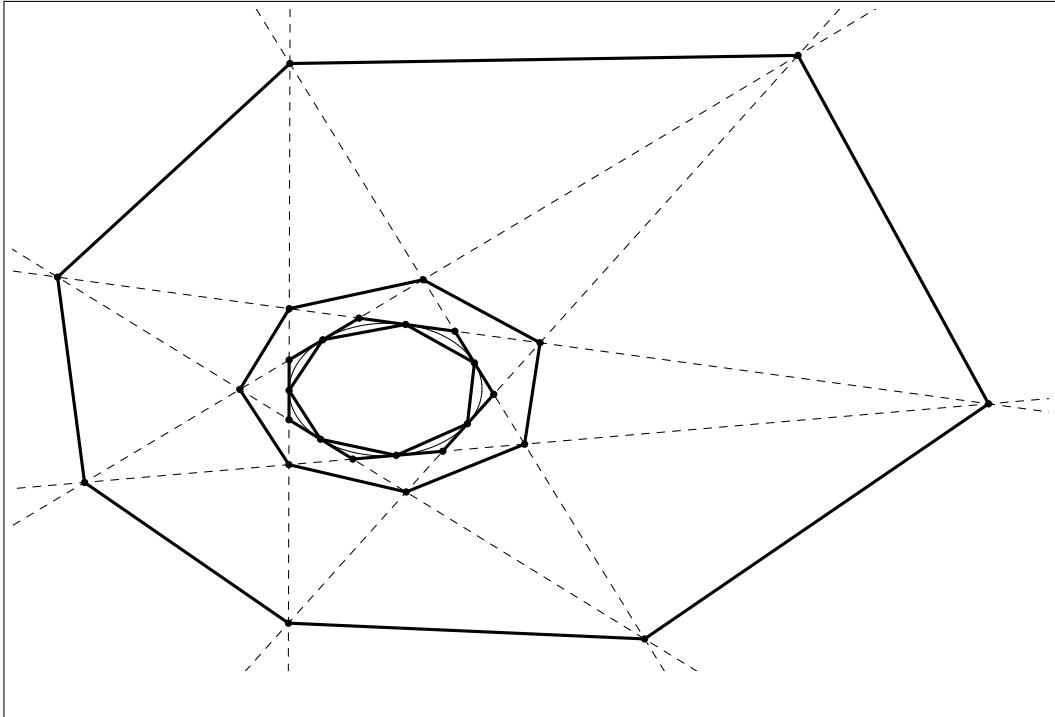
**Korollar 2.7.** *Sei  $D$  ein projektiv reguläres Polygon mit Inzidenzgerade  $p$ . Für alle  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  gilt: Die Geraden  $g_{i,j}$  mit  $i+j \equiv k \pmod{n}$  sowie  $p$  schneiden sich in einem Punkt  $L_k$ .*

Im Folgenden möchten wir das Poncelet-Netz eines projektiv regulären Polygons betrachten. Wir definieren dazu für  $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < \frac{n}{2}$ :  $D_k = V_{0,k} V_{1,1+k} \cdots V_{n-1, n+k-1}$ . Hierbei ist die Wahl der Notation (entweder  $g_i$  als Seiten oder  $V_i$  als Ecken) selbstverständlich wieder frei, jedoch erscheint es intuitiver die Polygone aus den Schnittpunkten der Seiten des ursprünglichen Polygons zu konstruieren, statt zusätzliche Tangenten am äußeren Kegelschnitt zu konstruieren. Je nach Wahl der Notation gilt  $D = D_1$  oder  $D = D_0$  für das ursprüngliche Polygon  $D$ . Im allgemeinen Fall gilt für ein Poncelet-Polygon, dass die so definierten Polygone selbst wieder Poncelet-Polygone sind ([5]), in unserem Fall können wir eine stärkere Aussage treffen:

**Theorem 2.8.** *Ist  $D$  ein projektiv reguläres Polygon mit Inzidenzpunkt  $P$  und Inzidenzgerade  $p$ , so ist für  $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < \frac{n}{2}$  das Polygon  $D_k$  ein projektiv reguläres Polygon mit Inzidenzpunkt  $P$  und Inzidenzgerade  $p$ .*

*Beweis.* Auch hier können wir uns wieder auf den Fall beschränken, dass  $D$  regulär ist und werden entsprechend zeigen, dass die  $D_k$  reguläre Polygone sind, deren Eckpunkte auf konzentrischen Kreisen liegen, wodurch sie auch Inzidenzpunkt und Inzidenzgerade teilen. Bezeichne dazu  $r$  den Radius des Inkreises von  $D$ .

Zunächst stellen wir fest, dass für alle  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  und alle  $0 \leq k < \frac{n}{2}$   $\angle V_i P V_{i+k} = k \frac{2\pi}{n}$  gilt und folglich  $\|P V_{i,i+k}\| = \frac{r}{\cos(\frac{k\pi}{n})}$ , womit die Eckpunkte eines jeden  $D_k$  auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $P$  liegen. Für jedes  $i$  und  $k$  existiert nun aber ein  $k'$ , sodass  $V_{i,i+k} \in l_{k'}$ , außerdem gibt es ein  $i'$ , sodass entweder  $V_{i'} \in l_{k'}$  oder  $V_{i',i'+1} \in l_{k'}$ . Nun gilt aber  $\angle V_{i'-1} P V_{i'} = \angle V_{i'} P V_{i'+1}$  beziehungsweise  $\angle V_{i'-1,i'} P V_{i',i'+1} = \angle V_{i',i'+1} P V_{i'+2}$ , somit also auch  $\angle V_{i-1,i+k-1} P V_{i,i+k} = \angle V_{i,i+k} P V_{i+1,i+k+1}$ , was zu zeigen war.  $\square$



**Abbildung 3:** Ein projektiv reguläres Polygon mit seiner Familie

Auch hier können wir wieder eine duale Aussage formulieren. Dazu definieren wir  $D_k^*$  für  $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < \frac{n}{2}$  als das Polygon mit Seiten  $g_{0,k}, g_{1,k+1}, \dots, g_{n-1,n+k-1}$ . Entsprechend ist  $D_k^*$  gerade das duale Polygon zu  $D_k$  bezüglich  $C$ , da  $g_{i,j}$  die polare Gerade zu  $V_{i,j}$  ist. Somit folgt das nächste Korollar direkt aus Dualität. Alternativ kann man auch hier wieder den Fall des regulären Polygons betrachten, dort ist offensichtlich, dass die  $D_k^*$  selbst wieder reguläre Polygone bilden.

**Korollar 2.9.** *Ist  $D$  ein projektiv reguläres Polygon mit Inzidenzpunkt  $P$  und Inzidenzgerade  $p$ , so ist für  $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < \frac{n}{2}$  das Polygon  $D_k^*$  ein projektiv reguläres Polygon mit Inzidenzpunkt  $P$  und Inzidenzgerade  $p$ .*

Aus einem einzelnen projektiv regulären Polygon lassen sich also eine ganze Reihe weiterer Polygone gleicher Art konstruieren, die alle unterschiedliche Kegelschnitte diskretisieren. Die gleichen Konstruktionen lassen sich natürlich auf jedem der neuen Polygone wiederholen, wodurch eine unendliche Menge an Polygonen entsteht. Die durch die Polygone beschriebenen Kegelschnitte liegen in einer 1-Parameter-Familie, da sie projektive Bilder von konzentrischen Kreisen darstellen, weswegen wir die diskreten Analoga auch als einer Familie zugehörig verstehen können.

### 3 Fokus- und Winkeleigenschaften

Im Folgenden werden nun Eigenschaften betrachtet, die nicht direkt aus der projektiven Äquivalenz zu regulären Polygonen folgen. Dabei handelt es sich um diskrete Analoga der Reflektions- und der Isogonaleigenschaft von Kegelschnitten (diese Eigenschaften sind unter anderem in [2] nachzulesen). Zu diesem Zweck möchten wir auch die Fokuspunkte einer Diskretisierung definieren. Hat der Kegelschnitt  $C$  die Fokuspunkte  $F_1$  und  $F_2$  und ist  $D$  eine projektive Diskretisierung von  $C$ , so bezeichnen wir  $F_1$  und  $F_2$  als Fokuspunkte von  $D$ . Hierbei ist nun zu beachten, dass die Seiten des Polygons tatsächlich Tangenten an  $C$  sind. Außerdem muss man nun unterscheiden, ob es sich bei  $C$  um einen Kreis, eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel handelt. Ellipsen und Hyperbeln haben jeweils zwei Fokuspunkte, welche wir entsprechend als  $F_1$  und  $F_2$  bezeichnen. Im Fall des Kreises existiert nur ein Fokuspunkt, nämlich der Mittelpunkt, weshalb hier  $F_1 = F_2$  gilt. Eine Parabel besitzt nun ebenfalls bloß einen Fokuspunkt, wobei die Wahl  $F_1 = F_2$  hier keinen Sinn mehr macht (man betrachte beispielsweise die Reflektionseigenschaft), weshalb der zweite Punkt der Schnittpunkt von Symmetrieachse der Parabel und der Gerade im Unendlichen sein soll. Geraden durch diesen Fokuspunkt sind also alle Geraden, welche parallel zur Symmetrieachse verlaufen. Mit dieser Definition der Fokuspunkte ergeben sich die folgenden Analoga auf sehr natürliche Art und Weise.

#### 3.1 Reflektionseigenschaft

Die Reflektionseigenschaft von Kegelschnitten besagt Folgendes: Ist  $C$  ein Kegelschnitt mit Fokuspunkten  $F_1$  und  $F_2$  und ist  $X \in C$ , sowie  $x$  die Tan-

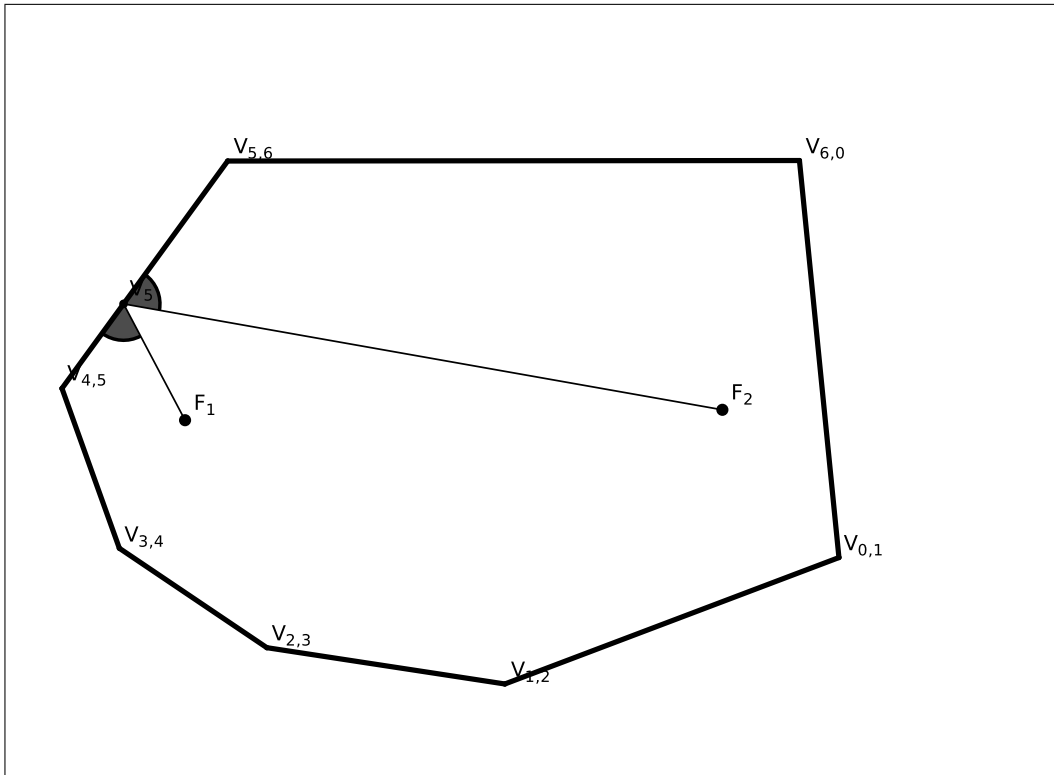


gente an  $C$  in  $X$ , so gilt, dass die Gerade  $F_1X$  gespiegelt an der Geraden  $x$  die Gerade  $F_2X$  ergibt. Entsprechend ergibt sich als diskretes Analog:

**Theorem 3.1.** *Sei  $D$  eine projektive Diskretisierung von  $C$  mit Fokuspunkten  $F_1$  und  $F_2$ . So gilt für alle  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ : Die Gerade  $F_1V_i$  gespiegelt an  $g_i$  ergibt die Gerade  $F_2V_i$ .*

*Beweis.* Der Punkt  $V_i$  liegt auf  $C$  und  $g_i$  ist die Tangente an  $C$  in  $V_i$ . Da  $F_1$  und  $F_2$  die Fokuspunkte von  $C$  sind, ergibt sich die Behauptung direkt aus der Reflektionseigenschaft von Kegelschnitten im glatten Fall.  $\square$

Natürlich gilt damit auch  $\angle F_1V_iV_{i-1} = \angle V_{i,i+1}V_iF_2$ .



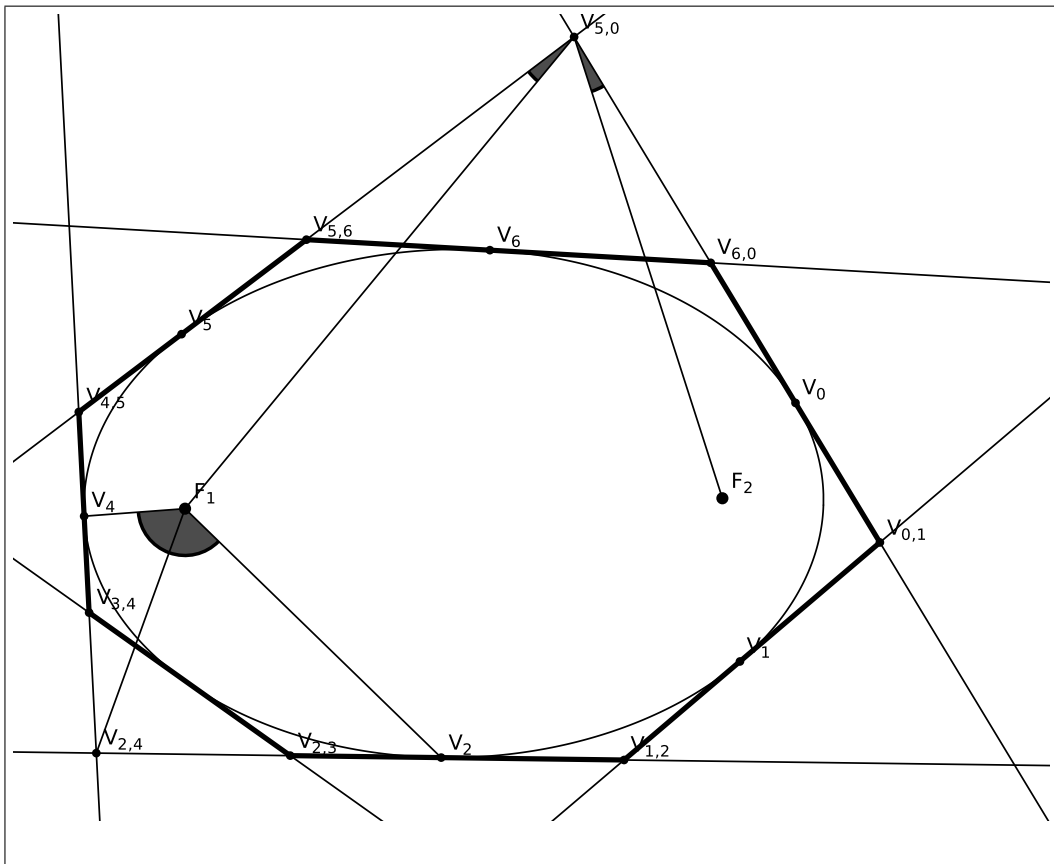
**Abbildung 4:** Reflektionseigenschaft: Die eingezeichneten Winkel sind gleich groß

### 3.2 Isogonaleigenschaft

Ist  $C$  ein Kegelschnitt mit Fokuspunkten  $F_1$  und  $F_2$ , weiterhin  $X, Y \in C$ ,  $X \neq Y$ ,  $x, y$  Tangenten in  $X$  und  $Y$  an  $C$  und  $Z := X \cap Y$ , so gilt  $\angle XZF_1 = \angle F_2ZY$ ,  $\angle XF_1Z = \angle ZF_1X$  und  $\angle XF_2Z = \angle ZF_2Y$ . Als diskretes Analog gilt dann:

**Theorem 3.2.** Sei  $D$  eine projektive Diskretisierung von  $C$  mit Fokuspunkten  $F_1$  und  $F_2$ . Dann gelten für  $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, i \neq j$  die folgenden Winkelbeziehungen:  $\angle V_i V_{i,j} F_1 = \angle F_2 V_{i,j} V_j$ ,  $\angle V_i F_1 V_{i,j} = \angle V_{i,j} F_1 V_j$  und  $\angle V_i F_2 V_{i,j} = \angle V_{i,j} F_2 V_j$ .

*Beweis.* Da  $V_i, V_j \in C$  und  $V_{i,j}$  gerade der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten ist, ergibt sich die Behauptung auch hier wieder aus der Isogonaleigenschaft im glatten Fall.  $\square$



**Abbildung 5:** Reflektionseigenschaft: Die eingezeichneten Winkel sind gleich groß

## 4 Eindeutigkeit der Diskretisierung

Wir haben bereits gesehen, dass es zu einem einzelnen Kegelschnitt eine Vielzahl von möglichen Diskretisierungen gibt, so kann etwa als Inzidenzpunkt

ein beliebiger Punkt im Inneren des Kegelschnitts gewählt werden und offensichtlich kann man die Anzahl der Eckpunkte beliebig hoch wählen. In diesem Abschnitt soll deshalb geklärt werden, welche Angaben notwendig sind, um eine Diskretisierung zu bestimmen und wie die Abbildungen zwischen einzelnen Diskretisierungen eines Kegelschnittes aussehen.

## 4.1 Eine Familie von Kegelschnitten

In Abschnitt 2.3 wurde bereits erwähnt, dass eine Diskretisierung eigentlich nicht nur einen einzelnen Kegelschnitt beschreibt, sondern dass gewissermaßen eine ganze Familie damit verbunden ist, auf der auch die Diskretisierungen  $D_k$  und  $D_k^*$  liegen. Es ist zu vermuten, dass diese Familie nur vom Inzidenzpunkt  $P$  und dem diskretisierten Kegelschnitt  $C$  abhängt, allerdings folgt dies nicht direkt aus den bisherigen Eigenschaften, weshalb dies im Folgenden bewiesen wird. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst eine hilfreiche Abbildung.

**Definition.** Sei  $P \in \mathbb{RP}^2$  ein beliebiger Punkt und  $l \subset \mathbb{RP}^2$  eine Gerade, sodass  $P \notin l$ , und sei  $r \in \mathbb{R}_+$ . Wir definieren  $S_{P,l,r} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  folgendermaßen: Ist  $X = P$  oder  $X \in l$ , so sei  $S_{P,l,r}(X) := X$ , andernfalls sei  $l_X := PX$  die Gerade durch  $P$  und  $X$  und  $P_X := l_X \cap l$  der Schnittpunkt von  $l_X$  und  $l$ . Dann sei  $S_{P,l,r}(X) := Y \in l_X$ , sodass  $\text{cr}(P, X, P_X, Y) = r$  gilt,  $Y$  ist nach Eigenschaften von  $\text{cr}$  eindeutig bestimmt.

**Proposition 4.1.** *Die Abbildung  $S_{P,l,r}$  hat die folgenden Eigenschaften:*

1. Ist  $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  projektiv, so gilt  $f \circ S_{P,l,r} = S_{f(P),f(l),r} \circ f$ .
2. Ist  $l$  die Gerade im Unendlichen, so ist  $S_{P,l,r}$  eine Streckung mit Zentrum  $P$  um Faktor  $r$ .
3.  $S_{P,l,r}$  ist projektiv.

*Beweis.* 1. Da  $f$  projektiv ist und  $\text{cr}$  invariant bezüglich projektiven Abbildungen ist, folgt dies unmittelbar aus der Definition von  $S_{P,l,r}$ .

2. Wir können homogene Koordinaten für  $l_X$  wählen, sodass  $P = 0$ ,  $X = 1$  und  $P_X = \infty$  gilt, wegen  $\text{cr}(P, X, P_X, S_{P,l,r}(X)) = r$ , hat dann  $S_{P,l,r}(X)$  die homogene Koordinate  $r$ , ist also in der Tat das Bild von  $X$  unter einer Streckung im Punkt  $P$  mit Faktor  $r$ .

3. Sei  $f$  eine projektive Abbildung, sodass  $f(l)$ , die Gerade im Unendlichen ist. Dann ist  $S_{f(P),f(l),r}$  eine Streckung und folglich projektiv. Wegen 1. gilt  $S_{P,l,r} = f^{-1} \circ S_{f(P),f(l),r} \circ f$ , was als Komposition von projektiven Abbildungen, selbst wieder projektiv ist.

□

Man kann  $S_{P,l,r}$  also als eine "verzerrte Streckung" von  $P$  aus in "Richtung" der Geraden  $l$  verstehen. Wir werden diese Abbildung nun nutzen, um die gesuchte Familie von Kegelschnitten zu definieren. Sei dazu  $C$  ein Kegelschnitt und  $P$  ein Punkt im Inneren von  $C$ . Sei außerdem  $l$  die zu  $P$  polare Gerade bezüglich  $C$ . Wir definieren  $\mathcal{F}(P, C) = \{S_{P,l,r}(C) | r \in \mathbb{R}_+\}$ . Da  $S_{P,l,r}$  projektiv ist, stellen wir zunächst fest, dass die Mengen  $S_{P,l,r}(C)$  in der Tat Kegelschnitte sind. Ist außerdem  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , so ist die zu  $M$  polare Gerade  $l_\infty$ , die Gerade im Unendlichen, weshalb die  $S_{M,l_\infty,r}$  Streckungen mit Zentrum  $M$  sind und die Familie  $\mathcal{F}(M, K)$  somit die Kreise mit Mittelpunkt  $M$  enthält. Für Diskretisierungen von  $K$  mit Inzidenzpunkt  $M$  wird also die gewünschte Familie beschrieben. Ist nun  $C$  wieder ein beliebiger Kegelschnitt,  $P$  ein Punkt im Inneren,  $l$  polar zu  $P$  bezüglich  $C$  und  $f$  projektiv mit  $f(M) = P, f(K) = C$ , so gilt für  $K_r := S_{M,l_\infty,r}(K) \in \mathcal{F}(M, K)$  :

$$f(K_r) = f \circ S_{M,l_\infty,r}(K) = S_{f(M),f(l_\infty),r} \circ f(K) = S_{P,l,r}(C) \in \mathcal{F}(P, C)$$

Wir stellen also fest, dass  $\mathcal{F}(P, C)$  in der Tat die gewünschten Kegelschnitte enthält. Es gilt außerdem:

**Lemma 4.2.** *Sei  $D$  eine Diskretisierung des Kegelschnitts  $C$  mit  $n$  Eckpunkten, Inzidenzpunkt  $P$  und Inzidenzgerade  $l$ , und seien die  $D_k$  entsprechend definiert. Dann liegen die Eckpunkte von  $D_k$  auf dem Kegelschnitt  $S_{P,l,r_k}(C)$ , wobei  $r_k := \cos(\frac{k}{n}\pi)$ .*

*Beweis.* Es genügt, einen Spezialfall zu betrachten, da alle Diskretisierungen mittels projektiven Abbildungen aufeinander abgebildet werden können und der Faktor dabei erhalten bleibt. Sei also  $C$  ein Kreis mit Radius 1 und  $P$  dessen Mittelpunkt. Dann ist  $D$  ein reguläres Polygon und es gilt  $\angle V_i P V_{i+k} = \frac{k}{n} 2\pi$ . Entsprechend ist  $\angle V_i P V_{i+k} = \frac{k}{n} \pi$ . Das Dreieck  $V_i V_{i+k} P$  ist außerdem rechtwinklig bei  $V_i$  und es gilt  $\|V_i P\| = 1$ , folglich  $\|V_{i+k} P\| = \cos(\frac{k}{n}\pi) = r_k$ .  $\square$

Insbesondere stellen wir fest, dass die Eckpunkte von  $D$  auf  $S_{P,l,\cos(\frac{\pi}{n})}$  liegen.

## 4.2 Eindeutigkeitssatz

Mit diesem Wissen über die von einer Diskretisierung  $D$  beschriebene Kegelschnitt-Familie lässt sich nun das folgende Theorem beweisen.

**Theorem 4.3.** *Sei  $C$  ein Kegelschnitt,  $P$  ein Punkt im Inneren von  $C$ ,  $V \in C$  und  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , dann existiert eine eindeutig bestimmte Diskretisierung  $D$  von  $C$  mit  $n$  Eckpunkten, Inzidenzpunkt  $P$  und Berührungspunkt  $V$ .*

*Beweis.* Existenz: Sei  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und  $f$  projektiv, sodass  $f(M) = P$  und  $f(K) = C$ . Offensichtlich existiert ein reguläres  $n$ -gon  $R$ , welches  $K$  diskretisiert und einen Berührungspunkt in  $f^{-1}(V)$  hat. Entsprechend ist  $D := f(R)$  eine Diskretisierung von  $C$  mit den gewünschten Eigenschaften.

Eindeutigkeit: Sei  $D$  eine beliebige Diskretisierung von  $C$  mit  $n$  Eckpunkten, Inzidenzpunkt  $P$  und Berührungspunkt  $V$ . Sei  $l$  die zu  $P$  polare Gerade bezüglich  $C$ , sei  $V_0 := V$  und  $C' := S_{P,l,\cos(\frac{\pi}{n})}$ . Die Seite  $g_0$  ist als Tangente an  $C$  in  $V_0$  eindeutig bestimmt; wir wissen außerdem, dass die Eckpunkte von  $D$  auf  $C'$  liegen, somit sind  $V_{n-1,0}$  und  $V_{0,1}$  die Schnittpunkte von  $g_0$  mit  $C'$ . Die Seiten  $g_{n-1}$  und  $g_1$  sind nun Tangenten an  $C$  und verlaufen durch die Punkte  $V_{n-1,0}$  beziehungsweise  $V_{0,1}$ ; da mit  $g_0$  für beide dieser Punkte bereits eine Tangente festgelegt ist, ist die jeweils andere eindeutig bestimmt. Somit können wir  $V_{n-1} := g_{n-1} \cap C$  und  $V_1 := g_1 \cap C$  definieren. Auf gleiche Art können nun die restlichen Eckpunkte von  $D$  eindeutig bestimmt werden, womit  $D$  selbst eindeutig bestimmt ist.  $\square$

Hierbei ist anzumerken, dass in der Formulierung des Theorems die Beschränkung  $n \geq 3$  angegeben ist, es jedoch nach wie vor sinnvoll ist  $n \geq 5$  zu wählen. Die oben angegebene Konstruktion ist zwar auch bei Dreiecken und Vierecken eindeutig, allerdings sind umgekehrt Drei- und Vierecke nicht geeignet um einen Kegelschnitt eindeutig zu beschreiben. Man sollte außerdem feststellen, dass die genaue Indizierung der Berührungspunkte und -geraden offenbar nicht festgelegt ist, was aber das zugrundeliegende Polygon nicht verändert.

*Bemerkung.* Statt einer Diskretisierung mit gegebenen Berührungspunkt  $V$  können wir auch ein projektiv reguläres Polygon mit gegebenem Eckpunkt  $V$  konstruieren, der Prozess ist im wesentlichen der gleiche, nur dass wir nun den äußeren Kegelschnitt  $C$  gegeben haben und der innere Kegelschnitt  $C' := S_{P,l,(\cos(\frac{\pi}{n}))^{-1}}$  ist. Das resultierende Polygon ist dann eine Diskretisierung von  $C'$ . Außerdem können wir statt dem Inzidenzpunkt natürlich auch eine Inzidenzgerade  $l$  mit  $l \cap C = \emptyset$  angeben, da wir den Inzidenzpunkt dann über Polarität bezüglich  $C$  erhalten und der Rest wie gehabt bleibt.

**Korollar 4.4.** *Seien  $C_1, C_2$  Kegelschnitte,  $P_1, P_2$  Punkte im Inneren von  $C_1$  beziehungsweise  $C_2$  und sei  $V_1 \in C_1$ ,  $V_2 \in C_2$ . Es existiert eine eindeutige projektive Abbildung  $f$ , sodass  $f(C_1) = C_2$ ,  $f(P_1) = P_2$ ,  $f(V_1) = V_2$  gilt.*

*Beweis.* Existenz: Sei  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$ . Seien  $f_1, f_2$  projektiv mit  $f_i(K) = C_i$ ,  $f_i(M) = P_i$ ,  $i = 1, 2$ . Nun liegen  $X_1 := f_1^{-1}(V_1)$  und  $X_2 := f_2^{-1}(V_2)$  beide auf  $K$ , weshalb eine Rotation  $R$  um  $M$  existiert, sodass

$R(X_1) = X_2$  gilt. Definiere  $f := f_2 \circ R \circ f_1^{-1}$ , dann gilt:

$$f(P_1) = f_2 \circ R \circ f_1^{-1}(P_1) = f_2 \circ R(M) = f_2(M) = P_2$$

$$f(C_1) = f_2 \circ R \circ f_1^{-1}(C_1) = f_2 \circ R(K) = f_2(K) = C_2$$

$$f(V_1) = f_2 \circ R \circ f_1^{-1}(V_1) = f_2 \circ R(X_1) = f_2(X_2) = V_2$$

Eindeutigkeit: Sei  $f$  eine beliebige projektive Abbildung mit  $f(C_1) = C_2$ ,  $f(P_1) = P_2$ ,  $f(V_1) = V_2$  und außerdem  $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ . Nun existiert eine eindeutige Diskretisierung  $D_1$  von  $C_1$  mit  $n$  Eckpunkten, Inzidenzpunkt  $P_1$  und Berührungspunkt  $V_1$ . Entsprechend gibt es eine eindeutige Diskretisierung  $D_2$  von  $C_2$  mit  $n$  Eckpunkten, Inzidenzpunkt  $P_2$  und Berührungspunkt  $V_2$ . Folglich gilt  $f(D_1) = D_2$ . Auf diese Weise ist also das Bild von mindestens 4 Punkten in allgemeiner Lage festgelegt (in der Tat von wesentlich mehr, wenn  $n$  entsprechend gewählt wird), womit  $f$  eindeutig bestimmt ist.  $\square$

Interessant an diesem Korollar ist nun weniger die Existenz einer solchen Abbildung (diese war schon vorher klar), als viel mehr die Eindeutigkeit, da sie es uns ermöglicht die Abbildungen zwischen verschiedenen Diskretisierungen zu klassifizieren, was wir im nächsten Teilabschnitt tun werden.

### 4.3 Abbildungen zwischen Diskretisierungen

Werfen wir zunächst einen Blick auf Abbildungen, welche einen Kegelschnitt  $C$  und einen Punkt  $P$  im Inneren von  $C$  unverändert lassen. Dies sind offenbar die Abbildungen, welche verschiedene Diskretisierungen von  $C$  mit Inzidenzpunkt  $P$  aufeinander abbilden. Die folgenden Lemmata helfen, diese Abbildungen zu beschreiben.

**Lemma 4.5.** *Sei  $C$  ein Kegelschnitt,  $P$  ein Punkt im Inneren von  $C$ , sei außerdem  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , sowie  $f$  und  $g$  projektive Abbildungen mit  $f(K) = g(K) = C$  und  $f(M) = g(M) = P$ . Dann existiert eine Rotation  $R$  um den Punkt  $M$ , sodass  $f = g \circ R$ .*

*Beweis.* Sei  $X \in C$ , die Punkte  $Y_f := f^{-1}(X)$  und  $Y_g := g^{-1}(X)$  liegen auf  $K$ , weshalb eine Rotation  $R$  um  $M$  existiert, sodass  $R(Y_f) = Y_g$  gilt. Dann ist  $g \circ R \circ f^{-1}(X) = g \circ R(Y_f) = g(Y_g) = X$ . Die Abbildung  $g \circ R \circ f^{-1}$  bildet also  $C$  auf  $C$ ,  $P$  auf  $P$  und  $X$  auf  $X$  ab, ist also bereits eindeutig bestimmt. Da die Identität dies erfüllt, muss  $g \circ R \circ f^{-1} = \text{id}$  gelten, beziehungsweise  $g \circ R = f$ .  $\square$

**Lemma 4.6.** *Sei  $C$  ein Kegelschnitt,  $P$  ein Punkt im Inneren von  $C$  und  $V_1, V_2 \in C$ . Sei außerdem  $f$  eine projektive Abbildung mit  $f(C) = C$ ,  $f(P) = P$  und  $f(V_1) = V_2$ . Dann können wir  $f$  schreiben als  $f = g \circ R_\theta \circ g^{-1}$ . Dabei ist  $g$  eine projektive Abbildung, sodass  $K := g^{-1}(C)$  ein Kreis ist mit Mittelpunkt  $M := g^{-1}(P)$ , und  $R_\theta$  ist eine Rotation um Punkt  $M$  und Drehwinkel  $\theta$ . Der Winkel  $\theta$  ist hierbei nicht abhängig von der genauen Wahl von  $g$ .*

*Beweis.* Sei  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und  $g$  projektiv mit  $g(K) = C$  und  $g(M) = P$ . Offensichtlich existiert eine Rotation  $R_\theta$  um  $M$ , sodass  $R_\theta(g^{-1}(V_1)) = g^{-1}(V_2)$  gilt. Entsprechend also  $g \circ R_\theta \circ g^{-1}(P) = P$ ,  $g \circ R_\theta \circ g^{-1}(C) = C$  und  $g \circ R_\theta \circ g^{-1}(V_1) = V_2$ . Da die Abbildung dadurch bereits eindeutig bestimmt ist, muss  $f = g \circ R_\theta \circ g^{-1}$  gelten.

Es bleibt zu zeigen, dass der Drehwinkel  $\theta$  nicht von der Wahl von  $g$  abhängt. Sei also  $\tilde{g}$  eine weitere projektive Abbildung mit  $\tilde{g}(K) = C$ ,  $\tilde{g}(M) = P$ . Nach vorigem Lemma gibt es nun eine Rotation  $R_\alpha$ , sodass  $g = \tilde{g} \circ R_\alpha$ . Entsprechend gilt:

$$f = g \circ R_\theta \circ g^{-1} = \tilde{g} \circ R_\alpha \circ R_\theta \circ R_\alpha^{-1} \circ \tilde{g}^{-1} = \tilde{g} \circ R_\theta \circ \tilde{g}^{-1}$$

Hierbei wird ausgenutzt, dass die Rotationen um einen Punkt eine kommutative Gruppe bilden. Der Drehwinkel hängt also in der Tat nicht von der Wahl von  $g$  ab.  $\square$

Abbildungen dieser Art entsprechen also in etwa Rotationen, weshalb wir sie als  $\text{Rot}(P, C)$ , die Rotationen um den Punkt  $P$  auf dem Kegelschnitt  $C$ , bezeichnen möchten. Die zu einem bestimmten Winkel  $\theta$  korrespondierende Rotation nennen wir  $R_{P,C,\theta}$ . Ist  $C$  ein Kreis und  $P$  der Mittelpunkt dieses Kreises, so handelt es sich natürlich einfach um übliche Rotationen. Wir stellen außerdem fest, dass  $\text{Rot}(P, C)$  eine Gruppenstruktur hat und alle diese Gruppen isomorph sind. Sind nämlich  $C_1, C_2$  unterschiedliche Kegelschnitte, sowie  $P_1, P_2$  Punkte in deren Inneren und  $f$  projektiv mit  $f(C_1) = C_2$ ,  $f(P_1) = P_2$ , so können wir einen Isomorphismus  $\phi_f : \text{Rot}(P_1, C_1) \rightarrow \text{Rot}(P_2, C_2)$  definieren durch  $\phi_f(R) = f \circ R \circ f^{-1}$ . Betrachten wir nun den Fall zweier Diskretisierungen des gleichen Kegelschnittes mit verschiedenen Inzidenzpunkten. Dazu lässt sich die folgende Aussage treffen:

**Lemma 4.7.** *Sei  $C$  ein Kegelschnitt und  $Q_1$  sowie  $Q_2$  Punkte im Inneren von  $C$ . Es existiert ein Punkt  $P \in Q_1 Q_2$ , sodass  $R_{P,C,\pi}(Q_1) = Q_2$  und  $R_{P,C,\pi}(Q_2) = Q_1$ .*

*Beweis.* Zum Beweis dieser Behauptung erinnern wir uns an den Beweis von Lemma 2.2. Dort hatten wir gezeigt, dass für einen Kreis  $K$  mit Mittelpunkt

$M$  und einen weiteren Punkt  $X$  im Inneren des Kreises eine projektive Abbildung  $f$  existiert, sodass  $f(K) = K$ ,  $f(M) = X$  und  $f(X) = M$  gilt (die Bezeichnungen waren im Beweis anders gewählt). Wir hatten außerdem festgestellt, dass ein Punkt  $F$  existiert, für den  $f(F) = F$  gilt. Wir wissen nun, dass  $f \in \text{Rot}(F, K)$  gelten muss, da sowohl der Kreis  $K$  als auch der Punkt  $F$  unter der Abbildung erhalten bleiben. Da die Gerade  $XM$  auf sich selbst abgebildet wird, muss außerdem  $f = R_{F,K,\pi}$  gelten. Sei nun also  $g$  projektiv mit  $g(K) = C$ ,  $g(M) = Q_1$  und  $g(X) = Q_2$ . Sei  $P := g^{-1}(F)$ . Dann gilt:

$$g \circ R_{F,K,\pi} \circ g^{-1}(Q_1) = g \circ R_{F,K,\pi}(M) = g(X) = Q_2$$

$$g \circ R_{F,K,\pi} \circ g^{-1}(Q_2) = g \circ R_{F,K,\pi}(X) = g(M) = Q_1$$

$$g \circ R_{F,K,\pi} \circ g^{-1}(P) = g \circ R_{F,K,\pi}(F) = g(F) = P$$

$$g \circ R_{F,K,\pi} \circ g^{-1}(C) = g \circ R_{F,K,\pi}(K) = g(K) = C$$

Es ist also  $g \circ R_{F,K,\pi} \circ g^{-1} = R_{P,C,\pi} \in \text{Rot}(P, C)$ . □

Wir stellen also fest, dass zwei verschiedene Diskretisierungen des gleichen Kegelschnittes mittels solcher Rotationen ineinander überführt werden können.

## 4.4 Vergleich mit Tsukerman

Zuletzt möchten wir noch einen kurzen Vergleich mit Tsukermans Definition eines diskreten Kegelschnittes anstellen. Wie bereits erwähnt zeigt Tsukerman in seiner Arbeit, dass die von ihm definierten diskreten Kegelschnitte mit einer projektiven Abbildung auf reguläre Polygone abgebildet werden können. Insofern wissen wir bereits, dass es sich dabei auch um projektiv reguläre Polygone handelt. Um festzustellen, was sie im Vergleich zu anderen projektiv regulären Polygonen auszeichnet, werfen wir zunächst einen Blick auf Tsukermans Definition ([1, Def 1.1]):

**Definition** (Diskreter Kegelschnitt nach Tsukerman). Sei  $C$  ein Kegelschnitt mit Fokus  $F$ . Ein diskreter Kegelschnitt ist ein Polygon  $D = V_0V_1 \cdots V_{n-1}$ , sodass für  $i \in 0, 1, \dots, n-1$ ,  $V_i \in C$  und  $\angle V_i F V_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ .

Zunächst fällt auf, dass für die Definition hier der äußere Kegelschnitt verwendet wird, nicht der innere. Allerdings zeigt Tsukerman, dass  $F$  auch Fokus des inneren Kegelschnitts ist und die Winkeleigenschaft auch für die Berührungspunkte gilt. Insofern lässt sich das Polygon ebenso gut über den inneren Kegelschnitt definieren, wie es bei unserer Definition der Fall ist. Außerdem stellen wir fest, dass der Fokuspunkt  $F$  die Aufgabe des Inzidenzpunktes



übernimmt und Tsukerman selbst weist auch die Inzidenzeigenschaft nach. Definieren wir nun ein projektiv reguläres Polygon, bei dem der Inzidenzpunkt gleichzeitig Fokus des beschriebenen Kegelschnittes ist, so folgt die obige Winkelbedingung aus der Isogonaleigenschaft. Insofern stellen wir fest, dass die von Tsukerman definierten diskreten Kegelschnitte gerade die projektiv regulären Polygone sind, bei denen der Inzidenzpunkt mit einem der Foki des beschriebenen Kegelschnittes übereinstimmt.

## Literatur

- [1] E Tsukerman, *Discrete Conics as Distinguished Projective Images of Regular Polygons*. Discrete and Computational Geometry, Manuscript Draft October 2014.
- [2] A. V. Akopyan und A. A. Zaslavsky, *Geometry of conics*, Mathematical World, Ausgabe 26, American Mathematical Society, RI, 2007, Übersetzt aus dem Russischen von Alex Matsinkovsky.
- [3] H. S. M. Coxeter und S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, New Mathematical Library, Ausgabe 19, Random House, Inc., New York, 1967.
- [4] D. Hilbert und S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952. Übersetzt von P. Neményi.
- [5] Richard Evan Schwartz, *The Poncelet grid*, Adv. Geometry, 7(2):157:175, 2007.