

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

MASTER-ARBEIT

**IC-Netze in die sphärischen und
hyperbolischen Ebene**

Angefertigt von:

Fabian Carsten Heil
Wilsnacker Straße 22, 10559 Berlin
Matr.-Nr.: 340908

Erstgutachter:

Prof. Dr. Alexander I. Bobenko

Berlin, Februar 2020

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenständige Anfertigung versichert an Eides statt:

Unterschrift

Abstract

Ziel dieser Arbeit ist es, die Erkenntnisse zu IC-Netzen in der euklidischen Ebene in den sphärischen und hyperbolischen Fall zu übertragen. Hierbei stellen wir fest, dass sich alle Eigenschaften aus dem euklidischen Fall reproduzieren lassen. Neben Verallgemeinerungen der (weitestgehend projektiven) Beweise des euklidischen Falls, konnten wir bei den Inzidenzsätzen neue Beweise mithilfe von Cross-ratios finden.

1 Einleitung

1.1 Bisherige Arbeiten zu IC-Netze

Die erste uns bekannte Arbeit zu IC-Netzen stellt [1] da, in welcher insbesondere euklidische IC-Netze, aber auch hyperbolische behandelt werden. In dieser Arbeit werden bereits die zur Konstruktion benötigten Inzidenzsätze bewiesen und gezeigt, dass die Diagonalen eines IC-Netzes von konfokalen Kegelschnitten gebildet werden. In der Arbeit [2] wird dann ein weiterer Beweis für den Inzidenzsatz geliefert, welcher sich auch problemlos auf den sphärischen und hyperbolischen Fall verallgemeinern lässt. Zudem wird in dieser Arbeit ein Zusammenhang zu Hyperzykeln hergestellt und eine Parametrisierung mit elliptischen Funktionen angegeben. Zuletzt gibt es noch die Arbeit [3], in welcher das Konzept der Laguerre-Geometrie auf Caley-Klein-Räume verallgemeinert wird und der sphärische und hyperbolische Fall als Spezialfälle gewonnen werden können. Ebenso wird gezeigt, dass sich die verschiedenen Laguerre-Geometrien alle als Untergeometrien von Lie-Geometrie betrachtet werden können. In dieser Arbeit möchten wir nun insbesondere IC-Netze in der sphärischen und hyperbolischen Geometrie betrachten. Dabei geben wir zunächst einen neuen Beweis des 5x5-Inzidenzsatzes mittels cross-ratios an, welcher in hyperbolischer, euklidischer und sphärischer Geometrie analog geführt werden kann. Zudem zeigen wir auch eine verallgemeinerte Version von Graves-Chales und folgern damit wie im euklidischen, dass die Diagonalen eines IC-Netzes von konfokalen Kegelschnitten gebildet werden. Zuletzt zeigen wir auch noch das Ivory-Theorem und geben eine Parametrisierung mittels elliptischer Funktionen an.

2 Grundlegende Definitionen

Definition (Skalarprodukte). Wir verwenden in dieser Arbeit die folgenden beiden Skalarprodukte:

- Das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n : x \cdot y$
- Das Lorentz-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{2,1} : \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$

Definition (Die Ebenen). Wir verwenden hier die folgenden Bezeichnungen für die verschiedenen Ebenen:

- $E_0 := \mathbb{R}^2$ ist die euklidische Ebene.
- $E_- := \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot x = 1\}$ ist die sphärische Ebene.
- $E_+ := \mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle x, x \rangle = -1\}$ ist die hyperbolische Ebene.
- $\mathbb{RP}^2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim, x \sim y : \iff \text{Rang}(x, y) = 1$ ist die projektive Ebene. Die Äquivalenzklassen der Punkte bezeichnen wir mit $[x]$.
- Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet $P(M) := \{[x] \in \mathbb{RP}^2 : x \in M\}$ die Projektivisierung dieser Menge.

Definition (Abstände). Wir haben die folgenden Abstände in den entsprechenden Ebenen:

- Für Punkte $x, y \in E_0$ gilt: $d_0(x, y) := \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$
- Für Punkte $x, y \in E_-$ gilt $d_-(x, y) := \cos^{-1}(x \cdot y)$
- Für Punkte $x, y \in E_+$ gilt $d_+(x, y) := \cosh^{-1}(-\langle x, y \rangle)$

Definition (Geraden). Wir haben die folgenden Definitionen von Geraden:

- Eine euklidische Gerade ist $L(n, d) := \{x \in E_0 : n \cdot x = d\}$ mit $n \in \mathbb{S}^1, d \in \mathbb{R}$.
- Eine sphärische Gerade ist $L(n) := \{x \in E_- : n \cdot x = 0\}$ mit $n \in \mathbb{S}^2$.
- Eine hyperbolische Gerade ist $L(n) := \{x \in E_+ : \langle n, x \rangle = 0\}$ mit $n \in \mathbb{R}^{2,1}$
- eine projektive Gerade ist $L(n) := \{[x] \in \mathbb{RP}^2 : n \cdot x = 0\}$ mit $[n] \in \mathbb{RP}^2$

Definition (Kreise). Sei $E \subset \mathbb{RP}^3$ eine Ebene und $\circ \in \{+, -\}$. Dann bezeichnen wir $K = E \cap E_\circ$ als Kreis.

2.1 (Checkerboard)-IC-Netze

Definition ((Checkerboard-IC)-Netze). Eine Abbildung $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E_{\circ}, (i, j) \mapsto f_{i,j}$ bezeichnen wir als Netz, falls:

- Es existieren Geraden L_i, M_j , sodass $f_{i,j} \in L_i \cap M_j, \forall i, j \in \mathbb{Z}$.
- Zu allen Geraden L_i, M_j können wir eine Orientierung finden, sodass die Punkte $f_{i,j}$ auf den Geraden L_i zwischen $f_{i,j-1}$ und $f_{i,j+1}$ und auf den Geraden M_j zwischen $f_{i-1,j}$ und $f_{i+1,j}$ liegen.

Mit $V_{i,j,k}$ bezeichnen wir das Viereck mit Eckpunkten $f_{i,j}, f_{i,j+k}, f_{i+k,j+k}, f_{i+k,j}$ und Seiten $L_i, M_i, L_{i+k}, M_{j+k}$. Wir setzen zudem $V_{i,j} := V_{i,j,1}$.

Falls alle $V_{i,j}$ Inkreise besitzen, so bezeichnen wir f als *Inkreis-Netz* beziehungsweise *IC-Netz*.

Falls alle $V_{i,j}$ mit $i+j \equiv 0 \pmod{2}$ Inkreise besitzen, so ist f ein *Schachbrett-IC-Netz*. Es ist anzumerken, dass Schachbrett-IC-Netze im Gegensatz zu regulären IC-Netzen orientierbar sind.

Der Inkreis des Vierecks $V_{i,j}$ wird mit $K_{i,j}$ bezeichnet (falls existent).

3 Inzidenzsätze

Im Folgenden sollen einige Inzidenzsätze bewiesen werden, welche für die Konstruktion von IC-Netzen essentiell sind. Hierzu führen wir zunächst das notwendige Werkzeug ein.

3.1 Laguerre-Geometrie

Um den Checkerboard-IC-Inzidenzsatz (im euklidischen Fall) zu beweisen, verwenden Bobenko et al. als erstes eine Identifikation der orientierten Gerade

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot n = d\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit dem Punkt

$$\begin{bmatrix} n \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \in Q_0 := \{[x] \in \mathbb{RP}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_0^2\}$$

, wobei das Vorzeichen die Orientierung festlegt. Dabei werden Geraden, welche in einem orientierten Kontakt mit dem gleichen Kreis stehen zu Punkten, welche alle in einer Ebene liegen. Insbesondere kann die Familie von Kreisen, welche von zwei orientierten Geraden eingeschlossen wird, mit einer

Gerade zwischen den zwei entsprechenden Punkten identifiziert werden. Somit wird die Aussage über orientierte Geraden und Kreise zu einer Aussage über Punkte (in einer Quadrik), Geraden und Ebenen in \mathbb{RP}^3 , welche sie dann mit projektiven Methoden beweisen.

Wir verfolgen hier einen ähnlichen Ansatz für die sphärische und hyperbolische Geometrie. So wird zunächst einmal die orientierte Gerade

$$\{x \in \mathbb{S}^2 : x \cdot n = 0\} \subset \mathbb{S}^2$$

mit dem Punkt

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \in Q_- = \{[x] \in \mathbb{RP}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2\}$$

identifiziert. Im hyperbolischen Fall, nehmen wir die Gerade

$$\{x \in \mathbb{H}^2 : \langle n, x \rangle = 0\} \subset \mathbb{H}^2$$

und identifizieren sie mit

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \in Q_+ := \{[x] \in \mathbb{RP}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = x_0^2\}$$

. Bei beiden Identifikationen gilt wieder, dass Geraden genau dann in orientiertem Kontakt mit dem gleichen Kreis stehen, wenn die ihnen entsprechenden Punkte in der Quadrik in einer Ebene liegen. Der Inzidenzsatz kann also genau wie bei Bobenko et al. im euklidischen Fall in eine projektive Aussage in \mathbb{RP}^3 umgewandelt werden und dann dort mit projektiven Methoden bewiesen werden. Hierbei sei darauf hingewiesen, dass Bobenko et al. in ihrem Beweis zwar verwenden, dass die den Geraden entsprechenden Punkte alle in der gleichen Quadrik Q_0 liegen, allerdings wird an keiner Stelle die genaue Form oder auch nur Signatur der Quadrik verwendet. Insofern kann der Beweis im sphärischen und hyperbolischen Fall komplett analog geführt werden, da lediglich die Quadrik Q_0 gegen die Quadrik Q_- beziehungsweise Q_+ ausgetauscht werden muss. Der Beweis ist in [2] auf Seite 7 zu finden und wird deshalb an dieser Stelle nicht noch einmal wiedergegeben. Stattdessen möchten wir an dieser Stelle einen alternativen Beweis angeben, welcher mit Hilfe von crossratios funktioniert

3.2 Dual/Double Numbers und crossratio

Um unseren Beweis führen zu können, müssen wir zunächst zwei Zahlenkonzepte einführen, welche so schon bei Yaglom in [4], Abschnitte 1.4 und 1.5, beschrieben werden.

Definition (Dual Numbers, Double Numbers). Es seien die folgenden Zahlkonzepte definiert:

1. Als Dual Numbers bezeichnen wir:

$$C_0 := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 := 0\}$$

2. Analog sind die Double Numbers:

$$C_+ := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = 1\}$$

3. Des Weiteren sei $C_- := \mathbb{C}$ wie gewohnt definiert.

Man stellt schnell fest, dass Addition und Multiplikation in diesen beiden Objekten denen in den komplexen Zahlen stark ähneln, so gilt etwa in beiden Fällen:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

weiter gilt in C_0 :

$$(a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc)$$

und in C_+ :

$$(a + ib)(c + id) = (ac + bd) + i(ad + bc)$$

Formal kann man das ganze also auch als eine Struktur auf \mathbb{R}^2 sehen, bei der $a + ib \in C_0$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ identifiziert wird und eine entsprechende Multiplikation definiert wird. Allerdings scheint die Notation mit $i^2 = 0$ beziehungsweise $i^2 = 1$ analog zu den komplexen Zahlen wie eine sehr intuitive Variante dies darzustellen. Es sei darauf hingewiesen, dass in beiden Fällen die Division nicht bei allen Divisoren definiert ist, da etwa in C_0 gilt:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2} = \frac{ac + i(bc - ad)}{c^2} = \frac{a}{c} + i \frac{bc - ad}{c^2}$$

weshalb Division nur definiert ist, wenn der Divisor keinen verschwindenden Realteil hat. In C_1 gilt entsprechend:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 - d^2} = \frac{(ac - bd) + i(bc - ad)}{c^2 - d^2}$$

Eine Division ist also nur dann definiert, wenn Real- und Imaginärteil nicht den gleichen Betrag haben.

Um diesem Problem gerecht zu werden, werden bei Yaglom noch weitere spezielle Zahlen definiert, um diesen problematischen Zahlen einen Kehrwert

zuweisen zu können. So wird in in allen drei der C_\circ der Kehrwert der Zahl 0 als " ∞ " definiert, für welches die folgenden Relationen gelten:

$$z + \infty = \infty, \quad z - \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{\infty}{z} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad \overline{\infty} = \infty$$

Hierbei ist $z \in C_\circ$, beliebig, allerdings gilt in der dritten Gleichung $z \neq 0$ und in den beiden letzten $z \neq \infty$. Die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ haben in diesem Konzept keinerlei Bedeutung. Es sei aber darauf hingewiesen, dass die folgende Berechnung zulässig ist:

$$\frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d} = \frac{a + b \cdot \infty^{-1}}{c + d \cdot \infty^{-1}} = \frac{a}{c}$$

Dieser Umstand wird später die Berechnung von Cross-Ratios relevant sein. Weiter gilt in C_0 , dass $i^{-1} =: \omega$ und die weiteren Relationen sind (mit $z = a + ib \in C_0$ und $c, d \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} z + c\omega &= \omega, & z - c\omega &= (-c)\omega, & zc\omega &= ac\omega, & \frac{c\omega}{z} &= \frac{c}{a}\omega, \\ \frac{z}{c\omega} &= \frac{a}{c}i, & c\omega \pm d\omega &= (c \pm d)\omega, & c\omega \cdot d\omega &= \infty, & \overline{c\omega} &= -c\omega \end{aligned}$$

In C_+ hingegen müssen wir noch mehr Zahlen hinzufügen. So fügen wir die folgenden Zahlen hinzu:

$$\omega_1 := (1 + i)^{-1}, \quad \omega_2 := (1 - i)^{-1}, \quad \sigma_1 := \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \sigma_2 := \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Die weiteren Relationen der ω_i werden analog zum Fall C_0 und ω definiert. Da wir nun unsere Multiplikation und insbesondere Division hinreichend definiert haben, können wir nun die folgende Definition machen, welche in allen dreien der C_\circ gilt.

Definition (Cross-Ratio). Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C_\circ$ mit $\circ \in \{+, -, 0\}$, dann definieren wir:

$$\text{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}$$

3.3 Zusammenhang von Cross-Ratio und 4-Geraden-Kreis-Inzidenz

Nun kommen wir zum ersten entscheidenden Teil unseres Beweises. Wir identifizieren die Zahlen $a + ib \in C_\circ$ mit den Punkten

$$\begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -1\}$$

Anschließend wird diese Ebene stereographisch durch den Punkt $(1, 0, 0)$ in die entsprechende Quadrik Q_\circ projiziert. Wir erhalten die folgenden Abbildungen:

$$f_- : C_- \rightarrow Q_-, a + ib \mapsto \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - 4 \\ 4a \\ 4b \\ a^2 + b^2 + 4 \end{bmatrix}$$

$$f_0 : C_0 \rightarrow Q_0, a + ib \mapsto \begin{bmatrix} a^2 - 4 \\ 4a \\ 4b \\ a^2 + 4 \end{bmatrix}$$

$$f_+ : C_+ \rightarrow Q_+, a + ib \mapsto \begin{bmatrix} a^2 - b^2 - 4 \\ 4a \\ 4b \\ a^2 - b^2 + 4 \end{bmatrix}$$

Nun gilt der Folgende Satz:

Theorem 3.1. *Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C_\circ$. Dann gilt:*

Die Crossratio $\text{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ist genau dann reell, wenn $f_\circ(z_1), f_\circ(z_2), f_\circ(z_3), f_\circ(z_4) \in Q_\circ$ in einer Ebene liegen.

Proof. Wir beweisen die verschiedenen Fälle einzeln.

In dem Fall, dass $\circ = -$ gilt, handelt es sich hierbei um eine leichte Folgerung, denn es gilt bekanntlich:

$$\begin{aligned} & \text{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \\ \iff & z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ liegen auf einem Kreis } K \subset C_- \\ \iff & f_-(z_1), f_-(z_2), f_-(z_3), f_-(z_4) \text{ liegen auf einem Kreis } f_-(K) \subset \mathbb{S}^2 \end{aligned}$$

Und Kreise in \mathbb{S}^2 sind gerade Schnitte mit Ebenen.

Bei den Beweisen der beiden anderen Fälle werden wir die Behauptung konkret nachrechnen. Dazu verwenden wir zur verbesserten Leserlichkeit die folgende Notation:

$$\begin{aligned} z_k &= a_k + ib_k, & a_{kl} &= a_k - a_l, & b_{kl} &= b_k - b_l, & c_{kl} &= \frac{b_{kl}}{a_{kl}}, \\ \hat{a}_{kl} &= c_{kl} a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} & \hat{b}_{kl} &= c_{kl}^{-1} b_{12} b_{23} b_{34} b_{41} \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass dann stets $a_{kl} + a_{lm} = a_{km}$ gilt und das gleiche für die

b_{kl} . Dann gilt weiter in C_0 :

$$\begin{aligned}
\text{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \frac{(a_{12} + ib_{12})(a_{34} + ib_{34})}{(a_{23} + ib_{23})(a_{41} + ib_{41})} \\
&= \frac{a_{12}(1 + ic_{12})a_{34}(1 + ic_{34})}{a_{23}(1 + ic_{23})a_{41}(1 + ic_{41})} \\
&= a_{12}a_{34}(a_{23}a_{41})^{-1}(1 + i(c_{12} + c_{34} - c_{23} - c_{41}))
\end{aligned}$$

Offensichtlich wird dieser Wert genau dann reell, wenn $c_{12} - c_{23} + c_{34} - c_{41} = 0$ gilt. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn $S_0 := \hat{a}_{12} - \hat{a}_{23} + \hat{a}_{34} - \hat{a}_{41} = 0$ gilt. Nun bleibt zu zeigen, dass dies äquivalent ist zu der Behauptung, dass die $[x_k] := f_0(z_k) \in Q_0$ in einer Ebene liegen. Dazu machen wir uns die projektive Eigenschaft zunutze, dass dann die Repräsentanten in homogenen Koordinaten linear abhängig sind. Mit anderen Worten, es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Es reicht also zu zeigen, dass diese Bedingung genau dann zutrifft, wenn auch $S_0 = 0$ gilt. Um dies zu zeigen, werden wir einige Zeilen- und Spaltenumformungen an der obigen Matrix vornehmen, um sie in die gewünschte Form zu bringen. Dabei sind die folgenden Umformungen zulässig:

- Addieren von Vielfachen einer Spalte/Zeile auf eine andere, da dies die Determinante nicht verändert.
- Vertauschen von Spalten/Zeilen, da dies lediglich das Vorzeichen der Determinante ändert.
- Multiplizieren von Spalten/Zeilen mit einem beliebigen Faktor, da dies bloss die Determinante um den gleichen Faktor verändert.

Die folgenden Umformungen bringen die Determinante in die gewollte Form:

$$\begin{array}{lcl}
& \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} & = 0 \\
Z_2 : 4 \rightarrow Z_2 & \det \begin{pmatrix} a_1^2 - 4 & \dots & a_4^2 - 4 \\ a_1 & \dots & a_4 \\ b_1 & \dots & b_4 \\ a_1^2 + 4 & \dots & a_4^2 + 4 \end{pmatrix} & = 0 \\
Z_3 : 4 \rightarrow Z_3 & & \\
(Z_4 - Z_1) : 8 \rightarrow Z_1 & \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_4 \\ b_1 & \dots & b_4 \\ a_1^2 & \dots & a_4^2 \end{pmatrix} & = 0 \\
Z_4 - 4Z_1 \rightarrow Z_4 & & \\
(S_1 - S_2) \rightarrow S_1 & \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{12} & a_{23} & a_{34} & a_4 \\ b_{12} & b_{23} & b_{34} & b_4 \\ \underbrace{a_{12}(a_1 + a_2) \quad a_{23}(a_2 + a_3) \quad a_{34}(a_3 + a_4) \quad a_4^2}_M \end{pmatrix} & = 0 \\
S_2 - S_3 \rightarrow S_2 & & \\
S_3 - S_4 \rightarrow S_3 & &
\end{array}$$

Wir zeigen nun, dass $\det M = S_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\det M &= -a_{12}b_{23}a_{34}(a_3 + a_4) - a_{23}b_{34}a_{12}(a_1 + a_2) - a_{34}b_{12}a_{23}(a_2 + a_3) \\
&\quad + a_{12}b_{34}a_{23}(a_2 + a_3) + a_{23}b_{12}a_{34}(a_3 + a_4) + a_{34}b_{23}a_{12}(a_1 + a_2) \\
&= b_{12}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{12}b_{23}a_{34}(a_{23} - a_{41}) + a_{12}a_{23}b_{34}a_{31} \\
&= b_{12}a_{23}a_{34}(a_{41} + a_{12}) + a_{12}b_{23}a_{23}a_{34} - \hat{a}_{23} + a_{12}a_{23}b_{34}(a_{34} + a_{41}) \\
&= \hat{a}_{12} - \hat{a}_{23} + \hat{a}_{34} + a_{12}a_{23}a_{34}(b_{12} + b_{23} + b_{34}) \\
&= \hat{a}_{12} - \hat{a}_{23} + \hat{a}_{34} - \hat{a}_{41} \\
&= S_0
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung im Fall $\circ = 0$ bewiesen.

Betrachten wir nun den Fall $\circ = +$. Hier gilt für die Cross-Ratio:

$$\begin{aligned}
\text{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \frac{(a_{12} + ib_{12})(a_{34} + ib_{34})}{(a_{23} + ib_{23})(a_{41} + ib_{41})} \\
&= \frac{\overbrace{(a_{12}a_{34} + b_{12}b_{34})}^{d_1} + i \overbrace{(a_{12}b_{34} + b_{12}a_{34})}^{d_2}}{\overbrace{(a_{23}a_{41} + b_{23}b_{41})}^{d_3} + i \overbrace{(a_{23}b_{41} + b_{23}a_{41})}^{d_4}} \\
&= \frac{d_1 + id_2}{d_3 + id_4} \\
&= \frac{(d_1d_3 - d_2d_4) + i(d_2d_3 - d_1d_4)}{d_3^2 - d_4^2}
\end{aligned}$$

Dies wird genau dann reell, wenn gilt

$$0 = d_2d_3 - d_1d_4 = \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} (\hat{a}_{i,i+1} + \hat{b}_{i,i+1}) =: S_+$$

Wie im vorherigen Fall bleibt nun zu zeigen, dass für die Determinante der $[y_k] := f_+(z_k)$ mit den oben beschriebenen Umformungen in die Form S_+ gebracht werden kann.

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = 0 \\
\begin{matrix} Z_2 : 4 \rightarrow Z_2 \\ Z_3 : 4 \rightarrow Z_3 \end{matrix} &\det \begin{pmatrix} a_1^2 - b_1^2 - 4 & \dots & a_4^2 - b_4^2 - 4 \\ a_1 & \dots & a_4 \\ b_1 & \dots & b_4 \\ a_1^2 - b_1^2 + 4 & \dots & a_4^2 - b_4^2 + 4 \end{pmatrix} = 0 \\
\begin{matrix} (Z_4 - Z_1) : 8 \rightarrow Z_1 \\ Z_4 - 4Z_1 \rightarrow Z_4 \end{matrix} &\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_4 \\ b_1 & \dots & b_4 \\ a_1^2 - b_1^2 & \dots & a_4^2 - b_4^2 \end{pmatrix} = 0 \\
\rightarrow &\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_4 \\ b_1 & \dots & b_4 \\ a_1^2 & \dots & a_4^2 \end{pmatrix}}_A + \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ b_1 & \dots & b_4 \\ a_1 & \dots & a_4 \\ b_1^2 & \dots & b_4^2 \end{pmatrix}}_B = 0
\end{aligned}$$

Wir haben bereits festgestellt, dass gilt:

$$\det A = S_0 = \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \hat{a}_{i,i+1}$$

Ebenso sieht man sofort, dass man von Matrix A zu Matrix B kommt, indem man alle a_k und b_k vertauscht. Es gilt also offensichtlich :

$$\det B = \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \hat{b}_{i,i+1}$$

und damit auch $\det A + \det B = S_+$. □

Insbesondere gilt nun also das folgende Lemma:

Lemma 3.2 (4-Geraden-Kreis-Inzidenz und Crossratio). *Seien L_1, L_2, L_3, L_4 orientierte Geraden in der Ebene E_o . l_1, l_2, l_3, l_4 die entsprechenden Punkte in C_o . Dann gilt:*

$$\text{cr}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{R} \iff L_1, L_2, L_3, L_4 \text{ berühren den gleichen Kreis}$$

3.4 Beweis der Inzidenzsätze

Nun haben wir alle Werkzeuge zusammen, um ans an den eigentlichen Beweis des Inzidenzsatzes zu wagen. Der Beweis verläuft nun wie folgt: Zuerst nehmen wir unsere orientierten Geraden in der Ebene E_o und identifizieren sie mit den entsprechenden Zahlen in C_o . Dann stellen wir bei allen Tupeln von Geraden, bei denen eine Inzidenz mit einem Kreis bekannt ist, die entsprechende Crossratio-Bedingung der zugehörigen Zahlen auf. Dabei haben wir mehrere Inzidenzen gegeben und lediglich eine, die zu zeigen ist. Dazu zeigen wir einfach, dass das Produkt aller relevanten Crossratios (inklusive der gesuchten) reell ist (in unserem Fall 1 oder -1). Da wir bei fast allen Cross-Ratios bereits wissen, dass sie reell sind, folgt dann für die letzte ebenso, dass sie reell sein muss und damit auch, dass der gesuchte Kreis existiert. Im folgenden bezeichne dazu $l_j, m_k \in C_o$ die zu den Geraden L_j, M_k gehörigen Zahlen und weiterhin seien:

$$l_{jk} := l_j - l_k \quad m_{jk} := m_j - m_k \quad d_{jk} := l_j - m_k \quad K_{i,j}^* := K_{i,j,3}$$

Bevor wir den eigentlichen 5x5-Inzidenzsatz beweisen, werden wir noch das folgende Lemma beweisen, welches auch eine gute Übung für den Beweis des folgenden Satzes darstellt:

Theorem 3.3 (Miquel). *Sei $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E_\circ$ ein Netz mit sonstigen Bezeichnungen wie bisher. Es gilt nun:*

Existieren 5 von den Kreisen $K_{0,0}, K_{0,2}, K_{1,1}, K_{2,0}, K_{2,2}, K_{0,0}^$, dann existiert auch der Letzte.*

Proof. Wir betrachten folgende, mit den betroffenen Kreisen $K_{i,j}$ assoziierten, Crossratios:

$$\begin{aligned}
K_{0,0} : \quad c_{0,0} &:= \text{cr}(l_0, l_1, m_1, m_0) = -\frac{\textcolor{red}{l}_{0,1} \textcolor{green}{m}_{1,0}}{d_{1,1} d_{0,0}}, \\
K_{0,2} : \quad c_{0,2} &:= \text{cr}(m_3, l_0, l_1, m_2) = -\frac{d_{0,3} d_{1,2}}{\textcolor{red}{l}_{0,1} \textcolor{blue}{m}_{2,3}}, \\
K_{2,2} : \quad c_{2,2} &:= \text{cr}(m_2, m_3, l_3, l_2) = -\frac{\textcolor{blue}{m}_{2,3} \textcolor{orange}{l}_{2,3}}{d_{3,3} d_{2,2}}, \\
K_{2,0} : \quad c_{2,0} &:= \text{cr}(m_0, l_3, l_2, m_1) = -\frac{d_{3,0} d_{2,1}}{\textcolor{orange}{l}_{3,2} \textcolor{green}{m}_{1,0}}, \\
K_{0,0}^* : \quad c_{0,0}^* &:= \text{cr}(m_0, l_0, m_3, l_3) = \frac{d_{0,0} d_{3,3}}{d_{0,3} d_{0,3}}, \\
K_{1,1} : \quad c_{1,1} &:= \text{cr}(l_1, m_1, l_2, m_2) = \frac{d_{1,1} d_{2,2}}{d_{2,1} d_{1,2}} \\
\prod_{i,j \in \{0,2\}} c_{i,j} &= -\prod_{i=0}^3 \frac{d_{i,3-i}}{d_{i,i}} = -(c_{0,0}^* c_{1,1})^{-1}
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass das Produkt aller Crossratios gerade die reelle Zahl -1 ist. Sind also alle bis auf einen dieser Crossratios reell, so ist es also auch der letzte. Insbesondere bedeutet dies: Existieren 5 der Kreise, so existiert auch der Letzte. \square

Nun sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen, welcher bereits in [1] und [2] bewiesen wurde.

Theorem 3.4 (Inzidenzsatz zu 5x5-(Checkerboard)-IC-Netzen). *Sei $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E_\circ$ ein Netz mit Geraden L_i, M_j und sonstiger Notation wie oben. Dann gilt die folgende Inzidenzaussage:*

Existieren die Kreise $K_{i,j}, \forall i, j \in \{0 \dots 4\}$ mit $i + j \in \{0, 2, 4, 6\}$, dann existiert auch $K_{4,4}$.

Proof. Aufgrund von Miquel ist es für den Beweis des 5x5-Satzes nun ausreichend die Existenz von $K_{2,2}^*$ zu zeigen. Zudem folgt bereits die Existenz der Kreise $K_{0,0}^*, K_{0,2}^*, K_{2,0}^*$ und wir dürfen diesen Umstand in unserem Beweis

benutzen. Wir betrachten also die folgenden 12 Crossratios:

$$\begin{aligned}
K_{1,1} : c_{1,1} &:= \text{cr}(l_1, l_2, m_1, m_2) = -\frac{\textcolor{red}{l}_{1,2}\textcolor{blue}{m}_{1,2}}{d_{2,1}d_{1,2}}, \\
K_{1,3} : c_{1,3} &:= \text{cr}(m_3, l_1, l_2, m_4) = \frac{d_{1,3}d_{2,4}}{\textcolor{red}{l}_{1,2}\textcolor{green}{m}_{3,4}}, \\
K_{3,3} : c_{3,3} &:= \text{cr}(l_3, l_4, m_3, m_4) = -\frac{\textcolor{orange}{l}_{3,4}\textcolor{green}{m}_{3,4}}{d_{4,3}d_{3,4}}, \\
K_{3,1} : c_{3,1} &:= \text{cr}(m_1, l_3, l_4, m_2) = \frac{d_{3,1}d_{4,2}}{\textcolor{orange}{l}_{3,4}\textcolor{blue}{m}_{1,2}}
\end{aligned}$$

Bei Multiplikation heben sich die entsprechend eingefärbten Teile gegenseitig auf und es ergibt sich:

$$p_1 := \prod_{i,j \in \{1,3\}} c_{i,j} = \frac{d_{1,3}d_{3,1}d_{2,4}d_{4,2}}{d_{1,2}d_{2,1}d_{3,4}d_{4,3}},$$

$$\begin{aligned}
K_{0,0}^* : c_{0,0}^* &:= \text{cr}(l_0, l_3, m_0, m_3) = -\frac{\textcolor{red}{l}_{0,3}\textcolor{blue}{m}_{0,3}}{d_{3,0}d_{0,3}}, \\
K_{0,2}^* : c_{0,2}^* &:= \text{cr}(m_2, l_0, l_3, m_5) = \frac{d_{0,2}d_{3,5}}{\textcolor{red}{l}_{0,3}\textcolor{green}{m}_{2,5}}, \\
K_{2,2}^* : c_{2,2}^* &:= \text{cr}(l_2, l_5, m_2, m_5) = -\frac{\textcolor{orange}{l}_{2,5}\textcolor{green}{m}_{2,5}}{d_{5,2}d_{2,5}}, \\
K_{2,0}^* : c_{2,0}^* &:= \text{cr}(m_0, l_2, l_5, m_3) = \frac{d_{2,0}d_{5,3}}{\textcolor{orange}{l}_{2,5}\textcolor{blue}{m}_{0,3}}
\end{aligned}$$

Wie oben heben sich auch hier die gefärbten Teile gegenseitig auf und wir erhalten:

$$p_2 := \prod_{i,j \in \{0,2\}} c_{i,j}^* = \frac{d_{0,2}d_{2,0}d_{3,5}d_{5,3}}{d_{0,3}d_{3,0}d_{2,5}d_{5,2}}$$

$$\begin{aligned}
K_{0,2} : c_{0,2} &:= \text{cr}(l_0, m_3, l_1, m_2) = \frac{d_{0,3}d_{1,2}}{d_{1,3}d_{0,2}}, \\
K_{2,4} : c_{2,4} &:= \text{cr}(l_3, m_4, l_2, m_5) = \frac{d_{3,4}d_{2,5}}{d_{2,4}d_{3,5}}, \\
K_{2,0} : c_{2,0} &:= \text{cr}(l_2, m_1, l_3, m_0) = \frac{d_{2,1}d_{3,0}}{d_{3,1}d_{2,0}}, \\
K_{4,2} : c_{4,2} &:= \text{cr}(l_4, m_3, l_5, m_2) = \frac{d_{4,3}d_{5,2}}{d_{5,3}d_{4,2}}
\end{aligned}$$

Bei genauer Betrachtung der bleibenden Terme stellen wir nun fest, dass gilt:

$$p_1 p_2 = \frac{d_{1,3} d_{0,2}}{d_{0,3} d_{1,2}} \cdot \frac{d_{3,1} d_{2,0}}{d_{2,1} d_{3,0}} \cdot \frac{d_{2,4} d_{3,5}}{d_{3,4} d_{2,5}} \cdot \frac{d_{4,2} d_{5,3}}{d_{4,3} d_{5,2}} = (c_{0,2} \cdot c_{2,0} \cdot c_{2,4} \cdot c_{4,2})^{-1}$$

Wir sehen also, dass das Produkt von allen diesen Cross-Ratios die reelle Zahl 1 ergibt. Insbesondere bedeutet dies, dass auch die Cross-Ratio $c_{2,2}^*$ reell sein muss, da wir wissen, dass alle anderen Cross-Ratios reell sind. Folglich existiert auch der Kreis $K_{2,2}^*$ und somit wegen dem vorigen Lemma auch der eigentlich gesuchte Kreis $K_{4,4}$. Damit ist also der 5x5-Inzidenzsatz für Checkerboard-IC-Netze bewiesen. \square

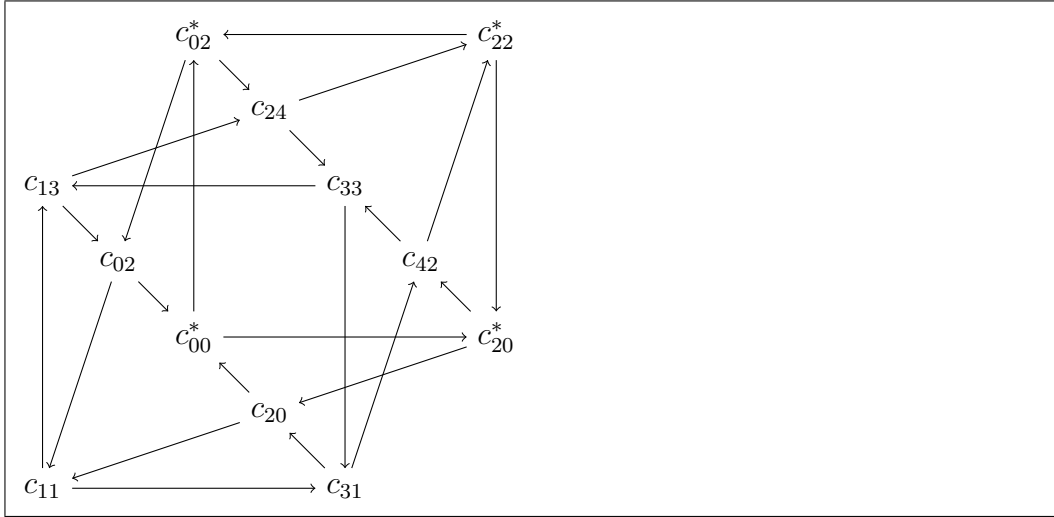


Figure 1: Illustration des crossratio-Beweises. Die Kanten entsprechen Differenzen, die in beiden crossratios auftreten und sich somit aufheben.

Nun lässt sich auch der folgende Satz folgern:

Theorem 3.5 (Inzidenzsatz zu 3x3-IC-Netz). *Sei $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E_o$ ein Netz mit Geraden L_i, M_j . Wie bisher bezeichnen wir die Inkreise $K_{i,j}$ (falls existent). Es gilt nun:
Existieren die Kreise $K_{i,j}, \forall i, j \in \{0, 1, 2\}$ mit $i + j \leq 3$, dann existiert auch $K_{2,2}$.*

Proof. Die Behauptung folgt direkt aus dem 5x5-Satz, indem man die Kreise $K_{1,1}, K_{1,3}, K_{3,1}, K_{3,3}$ zu Punkten werden lässt. \square

Ebenso lässt sich auch das folgende Lemma aus Miquel folgern:

Lemma 3.6. *Sei $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E_\circ$ ein Netz. Es gilt:
Existieren 4 von den Kreisen $K_{0,0}, K_{0,1}, K_{1,0}, K_{1,1}, K_{0,0,2}$, dann existiert auch der Letzte.*

Des Weiteren können wir mit diesen beiden Lemmata das Folgende Korollar aufstellen:

Korollar 3.7. 1. *Sei $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E_\circ$ ein IC-Netz. Dann existieren die Inkreise $K_{i,j,k}, \forall i, j, k$.*
2. *Sei f ein Checkerboard-IC-Netz. Dann existieren die Inkreise $K_{i,j,2k+1}, i+j \equiv 0 \pmod{2}, k \in \mathbb{N}$.*

Proof. 1. Folgt aus 2., indem man die Kreise $K_{i,j}$ mit $i, j \equiv 1 \pmod{2}$ zu Punkten werden lässt

2. Induktion über k : Für $k=1$ ist dies die Voraussetzung
Die Behauptung gelte nun für $k-1$. Die Kreise $K_{i,j,2k-1}, K_{i,j+2k}, K_{i+2k,j}, K_{i+2k,j+2k}$ und $K_{i+2k-1,j+2k-1}$ existieren also alle. Nach Miquel existiert also auch der Kreis $K_{i,j,2k+1}$.

□

4 Konstruktion von (Checkerboard)-IC-Netzen

Theorem 4.1 (Konstruktion von IC-Netzen). *Seien L_0, L_1, L_2, M_0, M_1 Geraden, sodass die Kreise $K_{0,0}$ sowie $K_{0,1}$ existieren. Dann können wir hieraus eindeutig ein komplettes IC-Netz konstruieren.*

Proof. Die Kreise $K_{0,1}, K_{1,1}$ sind durch die gegebenen Geraden eindeutig bestimmt und somit auch M_2 ist als gemeinsame Tangente der beiden Kreise. Auf gleiche Weise erhalten wir die Kreise $K_{0,2}, K_{1,2}, K_{2,0}, K_{2,1}$, sowie die Geraden L_3, M_3 als deren Tangenten. Aus dem 3x3-IC-Inzidenzatz folgt nun die Existenz von $K_{2,2}$. Auf diese Weise können nun in alle Richtungen weiteren Kreise und Geraden hinzugefügt bis das Netz komplett ist. □

Theorem 4.2 (Konstruktion von Checkerboard-IC-Netzen). *Seien $L_i, M_j, i, j \in \{0 \dots 4\}$ Geraden, sodass die Kreise $K_{i,j} : i, j \in \{0, 1, 2, 3\}, i+j \equiv 0 \pmod{2}$ existieren. Dann können wir hieraus ein komplettes Schachbrett-IC-Netz konstruieren. Zudem ist das Netz bereits durch die Wahl der Kreise $K_{0,0}, K_{1,1}, K_{2,2}, K_{3,3}, K_{0,2}, K_{2,0}$ eindeutig bestimmt.*

Proof. Nach der Wahl der oben genannten Kreise sind die Geraden $L_i, M_j, i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ als deren Tangenten bereits eindeutig bestimmt. Daraus

folgt die Lage der Kreise $K_{1,3}, K_{3,1}$ und somit der Geraden L_4, M_4 . Hiermit sind auch die Kreise $K_{0,4}, K_{2,4}, K_{4,0}, K_{4,2}$ bekannt sowie die Geraden L_5, M_5 . Aus dem obigen Inzidenzsatz folgt nun auch die Existenz von $K_{4,4}$. Wie bereits bei IC-Netzen kann das Netz nun in alle Richtungen auf diese Art und Weise komplettiert werden. \square

5 Kegelschnitte

5.1 Definitionen

Im folgenden möchten wir zeigen, dass die Diagonalen eines IC-Netzes stets konfokale Kegelschnitte bilden. Dazu betrachten wir zunächst die folgende Definition von Kegelschnitten.

Definition (Metrischer Kegelschnitt). Seien $f_1, f_2 \in E_o$ zwei Fokuspunkte und weiter $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir

- $E(f_1, f_2, \alpha) := \{x \in E_o : d_o(f_1, x) + d_o(f_2, x) = 2\alpha\}$ ist eine Ellipse.
- $H(f_1, f_2, \alpha) := \{x \in E_o : d_o(f_1, x) - d_o(f_2, x) = 2\alpha\}$ ist eine Hyperbel.
- $C(f_1, f_2, \alpha) = \begin{cases} E(f_1, f_2, \alpha) & \alpha > \varphi \\ H(f_1, f_2, \alpha) & \alpha < \varphi \end{cases}$ dabei ist $\varphi = \frac{d_o(f_1, f_2)}{2}$

Bemerkung. Wir stellen fest, dass im sphärischen Fall gilt $d(x, y) + (-x, y) = \pi$) und somit:

$$\begin{aligned} H(f_1, f_2, \alpha) &= \{x \in E_- : 2\alpha = d_-(f_1, x) - d_-(f_2, x)\} \\ &= \{x \in E_- : 2\alpha + \pi = d_-(f_1, x) + d_-(f_2, x)\} \\ &= E(f_1, -f_2, \alpha + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Wir dürfen also annehmen, dass es sich bei sphärischen Kegelschnitten stets um Ellipsen handelt. Ebenso sieht man, dass dann $\alpha \in \left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)$ angenommen werden darf, wobei $\varphi = \frac{d(f_1, f_2)}{2}$ gilt.

Darüber hinaus existiert noch die folgende projektive Definition.

Definition (Projektive Kegelschnitte). Sei $S \in \text{Sym}(\mathbb{R}, 3)$ eine symmetrische Matrix. Dann definieren wir:

- Die Menge $C(S) := \{[x] \in \mathbb{RP}^2 : x \cdot Sx = 0\}$ bezeichnen wir als projektiven Kegelschnitt.

- Ist $K = C(S)$ und die Matrix S invertierbar, so bezeichnen wir mit $K^* := C(S^{-1})$ den zu $C(S)$ dualen Kegelschnitt. In ihm sind die Normalen-Vektoren aller Tangenten von $C(S)$ enthalten.

Als erstes wollen wir nun feststellen, dass alle metrischen Kegelschnitte in der Tat auch projektive Kegelschnitte darstellen. Dazu geben die folgenden beiden Propositionen Aufschluss.

Proposition 5.1 (Sphärische metrische Kegelschnitte als Projektive Kegelschnitte).
Seien

$$f_1, f_2 \in E_- \quad \alpha \in \left(\frac{d(f_1, f_2)}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Und wir definieren weiter:

$$\begin{aligned} F_1 &:= f_1 f_1^\top + f_2 f_2^\top & F_2 &:= f_1 f_2^\top + f_2 f_1^\top \\ A &:= \cos(2\alpha) & S &:= (1 - A^2)I - F_1 + AF_2 \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$C(S) = P(E(f_1, f_2, \alpha))$$

Proof. Sei zunächst $x \in E_-$. Wir definieren.

$$c_i := \cos(d_-(f_i, x)) = x \cdot f_i \quad s_i = \sin(d_-(f_i, x))$$

Dann gelten die Folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} & x^\top S x \\ = & x^\top ((1 - A^2)I - F_1 + AF_2)x \\ = & (1 - A^2)x^\top x - x^\top F_1 x + Ax^\top F_2 x \\ = & (1 - A^2) - (x \cdot f_1)^2 - (x \cdot f_2)^2 + 2A(x \cdot f_1)(x \cdot f_2) \\ = & (1 - c_1^2 - c_2^2 + c_1^2 c_2^2) - (c_1^2 c_2^2 - 2Ac_1 c_2 + A^2) \\ = & (1 - c_1^2)(1 - c_2^2) - (c_1^2 - (c_1 c_2 - A))^2 \\ = & s_1^2 s_2^2 - (c_1 c_2 - A)^2 \end{aligned}$$

Weiter gilt also:

$$\begin{aligned} & [x] \in C(S) \\ \iff & x^\top S x = 0 \\ \iff & (c_1 c_2 - A)^2 = s_1^2 s_2^2 \\ \iff & c_1 c_2 - A = \pm s_1 s_2 \\ \iff & c_1 c_2 \pm s_1 s_2 = A \\ \iff & \cos(d_-(x, f_1) \mp d_-(x, f_2)) = A \\ \iff & d_-(f_1, x) \mp d_-(f_2, x) = 2\alpha \\ \iff & x \in C(f_1, f_2, \alpha) \end{aligned}$$

□

Proposition 5.2 (Hyperbolische metrische Kegelschnitte als Projektive Kegelschnitte).
Seien

$$f_1, f_2 \in E_- \quad \alpha \geq 0$$

Dann Definieren wir:

$$\begin{aligned} F_1 &:= f_1 f_1^\top + f_2 f_2^\top & F_2 &:= f_1 f_2^\top + f_2 f_1^\top & A &:= \cosh(2\alpha) \\ J &:= \text{diag}(1, 1, -1) & S &:= J((A^2 - 1)J - F_1 + AF_2)J \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$C(S) = P(C(f_1, f_2, \alpha))$$

Proof. Sei zunächst $x \in E_+$. Wir definieren.

$$c_i := \cosh(d_+(f_i, x)) = -\langle x, f_i \rangle \quad s_i = \sinh(d_+(f_i, x))$$

Dann gelten die Folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} & x^\top S x \\ = & x^\top J((A^2 - 1)J - F_1 + AF_2)Jx \\ = & (A^2 - 1)x^\top Jx - x^\top JF_1Jx + Ax^\top JF_2Jx \\ = & (1 - A^2) - \langle x, f_1 \rangle^2 - \langle x, f_2 \rangle^2 + 2A\langle x, f_1 \rangle\langle x, f_2 \rangle \\ = & (1 - c_1^2 - c_2^2 + c_1^2 c_2^2 - (c_1^2 c_2^2 - 2Ac_1 c_2 + A^2)) \\ = & (1 - c_1^2)(1 - c_2^2) - (c_1 c_2 - A)^2 \\ = & s_1^2 s_2^2 - (c_1 c_2 - A)^2 \end{aligned}$$

Weiter gilt also:

$$\begin{aligned} & [x] \in C(S) \\ \iff & x^\top S x = 0 \\ \iff & (c_1 c_2 - A)^2 = s_1^2 s_2^2 \\ \iff & c_1 c_2 - A = \pm s_1 s_2 \\ \iff & c_1 c_2 \pm s_1 s_2 = A \\ \iff & \cosh(d_+(x, f_1) \pm d_+(x, f_2)) = A \\ \iff & d_+(f_1, x) \pm d_+(f_2, x) = 2\alpha \\ \iff & x \in C(f_1, f_2, \alpha) \end{aligned}$$

□

Wir sehen also, dass sich sowohl sphärische als auch hyperbolische Kegelschnitte als projektive Kegelschnitte darstellen lassen und entsprechend alle Eigenschaften von ihnen erben. Bei genauer Betrachtung stellt man allerdings fest, dass im hyperbolischen Fall auch projektive Kegelschnitte existieren, welche sich nicht mit diesen Abstandsgleichungen beschreiben lassen. Um

auch für diese Kegelschnitte Konfokalität betrachten zu können, benötigen wir den sogenannten absoluten Kegelschnitt. Dieser ist im sphärischen Fall $\Omega_- := C(\text{diag}(1, 1, 1))$ und im hyperbolischen Fall $\Omega_+ := C(\text{diag}(1, 1, -1))$. Nun können wir die folgende Definition von Foki treffen.

Definition. Sei $K \subset E_\circ, \circ \in \{+, -\}$ ein Kegelschnitt und seien $T_i, i = 1 \dots 4$ die (möglicherweise komplexen) gemeinsamen Tangenten mit Ω_\circ . Dann werden die Tupel $(T_i \cap T_j, T_k \cap T_l)$ mit $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ als Fokuspaare des Kegelschnittes bezeichnet. Es ist immer mindestens ein Paar von Foki reell.

Als nächstes müssen wir natürlich noch prüfen, dass diese Definition für metrische Kegelschnitte wieder unsere bisherigen Foki liefert. Dazu dienen die folgenden Propositionen.

Proposition 5.3. *Seien:*

$$\begin{aligned} f_1 &:= \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} & f_2 &:= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} & \varphi &\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f &:= \cos(\varphi) & a &:= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$C(f_1, f_2, \alpha) = C(\text{diag}((1 - a^2)^{-1}, (f^2 - a^2)^{-1}, -a^{-2}))$$

Des Weiteren hat der Kegelschnitt folgende mit Ω_- gemeinsame Tangenten, welche nicht von α abhängen: $L(\pm if, 1, \pm i\sqrt{1 - f^2})$. Wir stellen zudem fest, dass sich die Geradenpaare mit komplex konjugierten Normalen in den Punkten f_1, f_2 schneiden.

Proof. Wir verwenden unsere Formel aus Proposition 5.1. Es gilt zunächst:

$$A = 2a^2 - 1 \quad F_1 = 2\text{diag}(1 - f^2, 0, f^2) \quad F_2 = 2\text{diag}(-(1 - f^2), 0, f^2)$$

Und weiter:

$$\begin{aligned}
& C(S) \\
= & C((1 - A^2)I - F_1 + AF_2) \\
= & C(\text{diag}(1 - A^2 - 2(1 + A)(1 - f^2), 1 - A^2, 1 - A^2 - 2(1 - A)f^2)) \\
= & C\left(\text{diag}\left(1 - \frac{2(1 - f^2)}{1 - A}, 1, 1 - \frac{2f^2}{1 + A}\right)\right) \\
= & C\left(\text{diag}\left(1 - \frac{1 - f^2}{1 - a^2}, 1, 1 - \frac{f^2}{a^2}\right)\right) \\
= & C\left(\text{diag}\left(\frac{f^2 - a^2}{1 - a^2}, 1, -\frac{f^2 - a^2}{a^2}\right)\right) \\
= & C(\text{diag}((1 - a^2)^{-1}, (f^2 - a^2)^{-1}, -a^{-2}))
\end{aligned}$$

Folglich werden die Normalen der Tangenten durch die Gleichung

$$0 = (1 - a^2)x^2 + (f^2 - a^2)y^2 - a^2z^2$$

beschrieben, welche von den oben genannten Vektoren gelöst wird. \square

Proposition 5.4. *Seien:*

$$\begin{aligned}
f_1 &:= \begin{pmatrix} \sinh(\varphi) \\ 0 \\ \cosh(\varphi) \end{pmatrix} & f_2 &:= \begin{pmatrix} -\sinh(\varphi) \\ 0 \\ \cosh(\varphi) \end{pmatrix} & \varphi &\geq 0 \\
f &:= \cosh(\varphi) & a &:= \cosh(\alpha)
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$C(f_1, f_2, \alpha) = C(\text{diag}((a^2 - 1)^{-1}, (a^2 - f^2)^{-1}, -a^{-2}))$$

Zudem besitzen die Kegelschnitte die folgenden mit Ω_+ gemeinsame Tangenten, welche nicht von α abhängen: $L(\pm f, \pm i, \sqrt{f^2 - 1})$. Man stellt auch fest, dass der Schnitt der Geraden mit komplex konjugierten Normalen gerade unsere beiden Ausgangspunkte ergibt.

Proof. Wir verwenden unsere Formel aus Proposition 5.2. Dann gilt unter anderem:

$$A = 2a^2 - 1 \quad F_1 = 2\text{diag}(f^2 - 1, 0, f^2) \quad F_2 = 2\text{diag}(-(f^2 - 1), 0, f^2)$$

Und dann:

$$\begin{aligned}
& C(S) \\
= & C(J((A^2 - 1)J - F_1 + AF_2)J) \\
= & C(\text{diag}(A^2 - 1 - 2(A + 1)(f^2 - 1), A^2 - 1, 1 - A^2 + 2(A - 1)f^2)) \\
= & C\left(\text{diag}\left(1 - \frac{2(f^2 - 1)}{A - 1}, 1, -1 + \frac{2f^2}{A + 1}\right)\right) \\
= & C\left(\text{diag}\left(1 - \frac{f^2 - 1}{a^2 - 1}, 1, -1 + \frac{f^2}{a^2}\right)\right) \\
= & C\left(\text{diag}\left(\frac{a^2 - f^2}{a^2 - 1}, 1, \frac{f^2 - a^2}{a^2}\right)\right) \\
= & C(\text{diag}((a^2 - 1)^{-1}, (a^2 - f^2)^{-1}, -a^{-2}))
\end{aligned}$$

Insbesondere werden die Tangenten durch die Gleichung

$$0 = (a^2 - 1)x^2 + (a^2 - f^2)y^2 - a^2z^2$$

gegeben, welche durch die oben genannten Vektoren offensichtlich gelöst wird. \square

5.2 Winkeleigenschaften

Im Folgenden wollen wir nun einige Winkeleigenschaften von (Fokus)Kegelschnitten auflisten. Die meisten sollten aus der euklidischen Ebene bekannt sein, sie gelten allerdings auch in den anderen Ebenen. Die Beweise sind alle elementar-geometrisch und verwenden lediglich Dreiecksungleichung und Dreieckskongruenzen. Somit sollten wir zuerst zeigen, dass die gebrauchten Konkruenzaussagen auch in den der hyperbolischen und sphärischen Geometrie gelten. Dazu werden wir die folgenden Cosinus-Theoreme verwenden:

Theorem 5.5 (Cosinus-Theoreme). *Sei D ein Dreieck in E_o mit Seitenlängen a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ . Dann gelten im sphärischen Fall die folgenden Aussagen:*

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\
\cos a &= \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}
\end{aligned}$$

Und im hyperbolischen Fall:

$$\cos \alpha = \frac{-\cosh a + \cosh b \cosh c}{\sinh b \sinh c}$$
$$\cosh a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

Mit diesen Aussagen können wir nun die folgenden Kongruenzaussagen folgern.

Theorem 5.6. Seien D, D' Dreiecke mit Seitenlängen a, b, c beziehungsweise a', b', c' und Winkeln α, β, γ beziehungsweise α', β', γ' . Wir bezeichnen die Dreiecke als kongruent, falls alle entsprechenden Seiten und Winkel übereinstimmen. Die beiden Dreiecke sind kongruent, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- SSS: Alle drei Seiten sind gleich.
- WWW: Alle drei Winkel sind gleich.
- SWS: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gleich.
- WSW: Eine Seite und die angrenzenden Winkel sind gleich.
- SWR: Eine Seite und ein angrenzender Winkel sind gleich, der gegenüberliegende Winkel ist ein rechter Winkel.

Proof. Zu SSS:

Wir beobachten dass die rechte Seite im ersten Theorem identisch ist, da diese nur von den Seitenlängen abhängt. Es folgt, dass auch die Winkel identisch sind. Durch zyklisches verschieben kann so die Gleichheit aller drei Winkel gezeigt werden.

Zu WWW:

Diese Aussage folgt direkt aus dem zweiten Cosinustheorem, da hier wieder die rechte Seite gleich ist und somit die Gleichheit der linken Seite und damit der Seiten folgt.

Zu SWS:

Hierzu beobachten wir, dass sich die ersten Theoreme wie folgt umstellen lassen:

- sphärisch: $\cos a = \cos \alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c$
- hyperbolisch: $\cosh a = \cosh b \cosh c - \cos \alpha \sinh b \sinh c$

Insbesondere sehen wir, dass die dritte Seite identisch sein muss und die Kongruenz folgt aus SSS

Zu WSW :

Hierzu stellen wir die zweiten Theoreme um:

- sphärisch: $\cos \alpha = \cos a \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma$
- hyperbolisch: $\cos \alpha = \cosh a \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma$

Wieder stellen wir fest, dass nun bei beiden Dreiecken die rechte Seite gleich sind und somit die Gleichheit des dritten Winkels und dann durch WWW auch die Kongruenz folgt.

Zu SWR:

Da $\cos(\alpha) = 0$ gilt, kann das zweite Theorem wie folgt umgestellt werden:

- sphärisch: $\tan \gamma = \frac{1}{\cos a \tan \beta}$
- hyperbolisch: $\tan \gamma = \frac{1}{\cosh a \tan \beta}$

Wir sehen, also dass die rechten Seiten wieder bei beiden Dreiecken gleich sind und es folgt, dass auch der letzte Winkel identisch sein muss und die Kongruenz folgt aus WWW. \square

Mit diesem Kongruenztheorem, lassen sich nun die folgenden Winkleigenschaften von Fokus-Kegelschnitten nachweisen.

Theorem 5.7 (Reflektionseigenschaft). *Sei $K \subset E_o$ ein Kegelschnitt mit Foki f_1, f_2 . Sei weiterhin $x \in K$ und L die Tangente an K in x . Dann gilt $\angle(L, xf_1) = \angle(f_2x, L)$.*

Proof. Sei f'_1 die Reflektion von f_1 an L . Die Behauptung ist bewiesen, wenn x auf der Strecke f'_1f_2 liegt. Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann gibt es einen Punkt $y = L \cap (f'_1f_2)$ mit $y \neq x$. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt nun $\|f'_1y\| + \|yf_2\| < \|f'_1x\| + \|xf_2\| = \|f_1x\| + \|xf_2\|$. Doch dann muss y im Inneren von K liegen, im Widerspruch zu $y \in L$. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Theorem 5.8 (Isogonaleigenschaft). *Sei $K \subset E_o$ ein Kegelschnitt mit Foki f_1, f_2 und seien $x, y \in K$. Seien weiterhin L, M die Tangenten an K in x beziehungsweise y und sei $z = L \cap M$. Dann gilt $\angle xzf_1 = \angle f_2zy$.*

Proof. Seien f'_1, f'_2 die Reflektionen von f_1 an L und von f_2 an M . Es gilt nun $\|f_1 z\| = \|f'_1 z\|$ sowie $\|f_2 z\| = \|f'_2 z\|$. Desweiteren gilt

$$\|f'_1 f_2\| = \|f'_1 x\| + \|x f_2\| = \|f_1 x\| + \|x f_2\| = \|f_1 y\| + \|y f_2\| = \|f_1 y\| + \|f f'_2\| = \|f_1 f'_2\|$$

Folglich sind die Dreiecke $f_1 Z f'_2$ und $f'_1 Z f_2$ kongruent und es gilt $\angle f_1 z f'_2 = \angle f'_1 z f_2$. Entsprechend gilt auch $\angle f'_1 z f_1 = \angle f_2 z f'_2$ und somit auch $\angle x z f_1 = \angle f_2 z y$, wie behauptet. \square

Korollar 5.9. *Sei A ein Kegelschnitt mit Foki f_1, f_2 und Tangenten L, M . Sei weiterhin $z := L \cap M$, B ein Kegelschnitt durch z konfokal zu A und T die Tangente an B in z .*

Dann gilt: $\angle(T, L) = \angle(M, T)$.

Proof. Wegen der Reflektionseigenschaft von B gilt $\angle(T, z f_1) = \angle(f_2 z, T)$ und wegen der Isogonaleigenschaft von A : $\angle(L, z f_1) = \angle(f_2 z, M)$. Es folgt:

$$\angle(TL) = \angle(t, z f_1) \pm \angle(L, z f_1) = \angle(f_2 z, T) \pm \angle(f_2 z, M) = \angle(T, M)$$

\square

5.3 Familien von Kegelschnitten

Als nächstes betrachten wir die projektiven Eigenschaften von Kegelschnitten. Dazu haben wir hier zwei Definitionen von Familien von Kegelschnitten.

Definition ((Dualer) Pencil). Seien $C(A), C(B)$ Kegelschnitte mit $A, B \in \text{Sym}(\mathbb{R}, 3)$. Wir bezeichnen mit

$$\text{Pen}(C(A), C(B)) := \{C(aA + bB) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

den von A und B aufgespannten Pencil von Kegelschnitten.

Ist weiterhin P ein Pencil von Kegelschnitten, so bezeichnen wir die Menge

$$\{C(A^{-1}) : C(A) \in P\}$$

als dualen Pencil von Kegelschnitten.

Nun werden wir uns einige Beispiele von Pencils und dualen Pencils anschauen.

Proposition 5.10. *Seien $w, x, y, z \in \mathbb{RP}^2$ Punkte in allgemeiner Lage. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Pencil P , sodass $w, x, y, z \in K, \forall K \in P$*

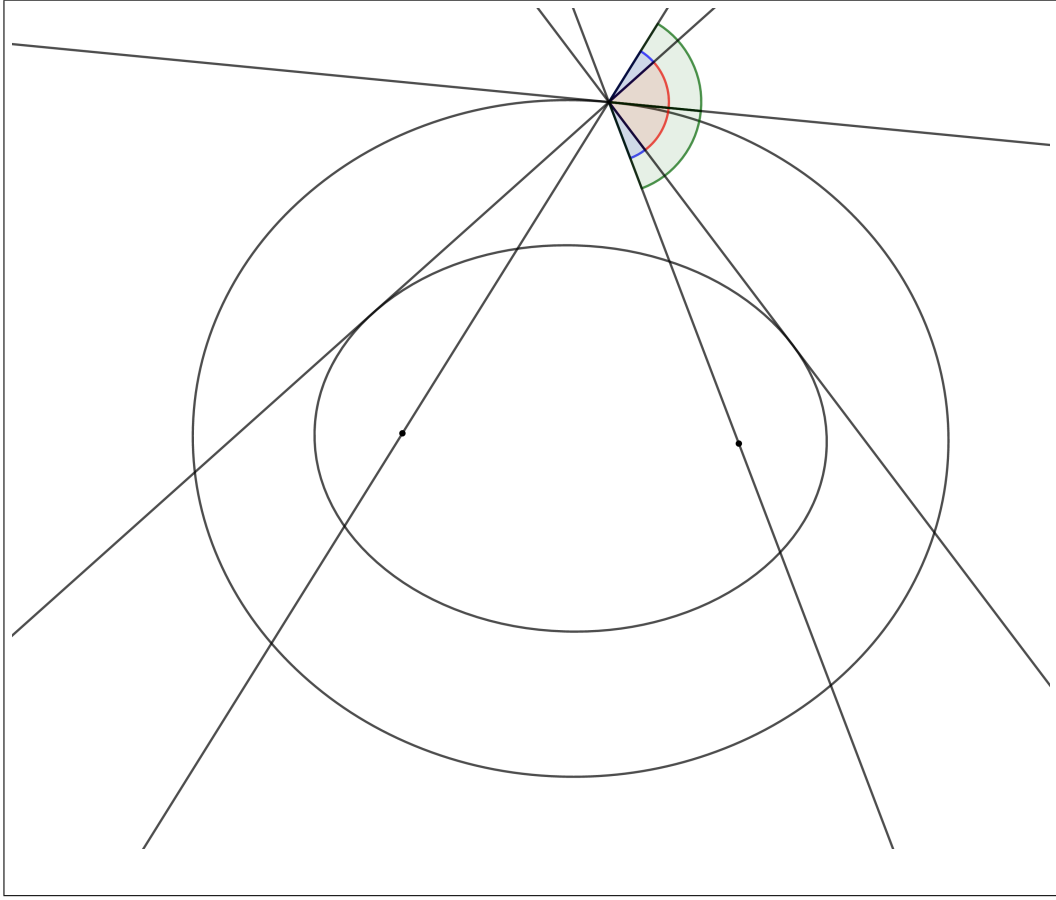


Figure 2: Winkeleigenschaften auf einen Blick: Die blauen Winkel sind gleich groß und die obige Tangente halbiert den roten und grünen Winkel.

Proof. Nach einer projektiven Abbildung erhalten wir $w = [0, 0, 1], x = [1, 0, 1], y = [0, 1, 1], z = [1, 1, 1]$. Ist nun $K = C(S)$ ein Kegelschnitt durch diese Punkte, so gilt für die Komponenten von S :

$$\begin{array}{llll}
 w \in K : & s_{3,3} = 0 & & \\
 x \in K : & s_{1,1} + 2s_{1,3} + s_{3,3} = 0 & \iff & s_{1,1} = -2s_{1,3} \\
 y \in K : & s_{2,2} + 2s_{2,3} + s_{3,3} = 0 & \iff & s_{2,2} = -2s_{2,3} \\
 z \in K : & s_{1,1} + s_{2,2} + 2s_{1,3} + 2s_{2,3} + 2s_{1,2} = 0 & \iff & s_{1,2} = 0
 \end{array}$$

$$S = aA + bB, A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt also $K \in \text{Pen}(A, B)$. □

Korollar 5.11. Seien vier Geraden $L_i \subset \mathbb{RP}^2$ gegeben. Dann existiert ein

dualer Pencil P , sodass die L_i Tangenten an allen $K \in P$ sind.
Dies ist die duale Version der vorigen Proposition.

Die obige Proposition zeigt insbesondere, dass konfokale Kegelschnitte stets einen dualen Pencil bilden.

Proposition 5.12. *Seien $L(n_1), L(n_2)$ zwei verschiedene Geraden und $[p_i] \in L(n_i)$ zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Pencil P , sodass $\forall C(S) \in P$ mit $\det(S) \neq 0 : p_i \in C(S), [Sp_i] = [n_i]$. Die Kegelschnitte verlaufen also durch die gegebenen Punkte und haben die gegebenen Geraden als Tangenten. Aufgespannt wird der Pencil durch $L(n_1) \cup L(n_2)$ und die Doppelgerade durch die Punkte $[p_1], [p_2]$.*

Proof. Nach einer projektiven Abbildung darf angenommen werden, dass gilt:

$$[n_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [n_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [p_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [p_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Gerade durch die beiden Punkte ist dann $L(1, 1, -1)$. Sei nun S so, dass $[Sp_i] = [n_i]$ gilt, dann erhalten wir für die Komponenten von S :

$$\begin{aligned} [Sp_1] = [n_1] : \quad & s_{1,3} = -s_{1,1} \quad s_{1,2} + s_{2,3} = \alpha \quad s_{1,3} = -s_{3,3} \quad s_{1,1} \\ [Sp_2] = [n_2] : \quad & s_{1,2} + s_{1,3} = \beta \quad s_{2,3} = -s_{2,2} \quad s_{2,3} = -s_{3,3} \quad s_{2,2} \end{aligned}$$

Es gilt also $s_{1,1} = s_{2,2} = s_{3,3} = -s_{1,3} = -s_{2,3} =: a$ und somit $\alpha = \beta =: b$ und $s_{1,2} = a + b$. Damit haben wir also:

$$S = aA + bB, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht auch leicht, dass in der Tat $C(A) = L(1, 1, -1)$ und $C(B) = L(n_1) \cup L(n_2)$ gilt. \square

Mit diesem Wissen können wir nun auch die folgenden beiden Lemmata beweisen, wobei der Beweis des ersten Lemmas so auch in [5] auf Seite 8 zu finden ist.

Lemma 5.13. *Sei $A \subset \mathbb{RP}^2$ ein Kegelschnitt und $p_i \in A$ vier Punkte, sowie $L_{i,j}$ die Gerade durch p_i, p_j . Sei B ein Kegelschnitt, der $L_{1,2}$ in $q_{1,2}$ und $L_{3,4}$ in $q_{3,4}$ berührt.*

Dann existiert ein Kegelschnitt C aus dem Pencil durch A und B , sodass C die Gerade $L_{2,3}$ und $L_{4,1}$ berührt und die Berührungspunkte auf einer Geraden mit $q_{1,2}, q_{3,4}$ liegen.

Proof. Zuerst sei $D := L_{1,2} \cup L_{3,4}$, $E := L_{2,3} \cup L_{4,1}$ und sei F die Doppelgerade durch $q_{1,2}, q_{3,4}$. Sei nun P_1 der Pencil durch A und B . Sei weiter P_2 der Pencil, der durch die Punkte p_i definiert ist, es gilt $A, D, E \in P_2$. Als drittes betrachten wir den Pencil P_3 durch B und D , dies sind gerade die Kegelschnitte mit Tangenten $L_{1,2}$ und $L_{3,4}$ in $q_{1,2}$ und $q_{3,4}$, es gilt also insbesondere $F \in P_3$. Wir stellen weiterhin fest, dass die drei Pencils als Geraden in \mathbb{RP}^5 von nur 3 Punkten aufgespannt werden und somit in einer Ebene liegen. Folglich liegt auch der Pencil P_4 durch E und F in dieser Ebene und muss P_1 schneiden. Sei nun C dieser Schnittpunkt, dann hat C in der Tat die Tangenten $L_{2,3}, L_{4,1}$ in $q_{2,3}, q_{4,1}$, wie gefordert. Da zudem die Doppelgerade durch $q_{2,3}, q_{4,1}$ in P_4 liegt, diese aber wegen $F \in P_4$ bereits eindeutig bestimmt ist, liegen die $q_{i,j}$ alle auf einer Geraden. \square

Bei dem zweiten Lemma handelt es sich nun lediglich um die dualen Fassung des letzten.

Lemma 5.14. *Sei $A \subset \mathbb{RP}^2$ ein Kegelschnitt und L_i vier Tangenten an A . Weiterhin setzen wir $P_{i,j} = L_i \cap L_j$. Sei B ein Kegelschnitt durch die Punkte $P_{1,2}, P_{3,4}$.*

Dann existiert ein Kegelschnitt C aus dem von A und B aufgespannten dualen Pencil, welcher die Punkte $P_{2,3}, P_{4,1}$ enthält. Zudem schneiden sich die vier Tangenten durch die $P_{i,j}$ in einem Punkt.

6 IC-Netze und konfokale Kegelschnitte

6.1 Graves-Chales und konfokale Diagonalen von IC-Netzen

Nun möchten wir einen interessanten Zusammenhang zwischen IC-Netzen und Familien von konfokalen Kegelschnitten beweisen. Dazu benötigen wir das Theorem von Graves-Chales, welches wir nun beweisen können. Dabei möchten wir darauf hinweisen, dass der Beweis so auch in [5] zu finden ist.

Theorem 6.1 (Graves-Chales). *Sei $K \subset E_o$ ein (Fokus-)Kegelschnitt und seien L_0, L_1, M_0, M_1 Tangenten an K und weiter $v_{i,j} := L_i \cap M_j$, sodass wir ein Viereck $V := v_{0,0}v_{1,0}v_{1,1}v_{0,1}$ erhalten. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Punkte $v_{0,0}, v_{1,1}$ liegen auf einem Kegelschnitt konfokal zu K .*
2. *Die Punkte $v_{0,1}, v_{1,0}$ liegen auf einem Kegelschnitt konfokal zu K .*

3. Das Viereck V besitzt einen Inkreis.

Proof. Da konfokale Kegelschnitte einen dualen Pencil bilden, darf 5.14 angewendet werden, aus welchem gerade die Äquivalenz zwischen (1.) und (2.) folgt und ausserdem, dass sich die Tangenten in den Punkten $v_{i,j}$ in einem gemeinsamen Punkt m schneiden. Zudem folgt aus dem Beweis dieses Lemmas, dass die folgenden Kegelschnitte in einer Ebene liegen: Der absolute Kegelschnitt Ω_o , der Kegelschnitt K^* , die Doppelgerade $L(m) =: A$ sowie die Geraden $L(v_{0,0}) \cup L(v_{1,1}) =: B$. Insbesondere bedeutet dies, dass sich der duale Pencil $\text{dPen}(\Omega_o^*, A^*)$, welcher die Kreise mit Mittelpunkt m enthält, und der duale Pencil $\text{dPen}(K, B^*)$, welcher alle Kegelschnitte mit den Tangenten L_i enthält, sich schneiden müssen. Dieser Schnittpunkt ist dann gerade ein Kreis mit Mittelpunkt m , welcher die vier Seiten berührt. Damit ist (3.) gezeigt.

Es bleibt zu zeigen, dass aus Aussage (3.) die ersten beiden gefolgert werden können. Dazu existiere der Inkreis von V . Weiter sei K' der Kegelschnitt konfokal zu K durch den Punkt $v_{0,0}$ und sei $v'_{1,1}$ der Schnittpunkt von K mit L_1 und sei M'_1 die Tangente an K durch diesen neuen Punkt. Nach dem was wir gerade gezeigt haben, existiert dann der Inkreis des Vierecks mit Seiten L_0, M_0, L_1, M'_1 . Da dieser aber bereits durch drei Tangenten eindeutig bestimmt ist, muss es sich hierbei um den Inkreis von V handeln und da dieser nicht mehr als 4 Tangenten mit K gemeinsam haben kann, gilt $M_1 = M'_1$ sowie $v_{1,1} = v'_{1,1}$, insbesondere ist durch die Existenz von K' auch die Aussage (1.) gezeigt, was unseren Beweis abschließt. \square

Des weiteren folgt dann aus diesen beiden Bedingungen, dass sich die Tangenten and den Kegelschnitten in den Eckpunkten von V alle in einem Punkt schneiden und wir haben bereits in Korollar 5.5 gezeigt, dass es sich bei diesen Tangenten gerade um die Winkelhalbierenden der angrenzenden Seiten von V handelt. Insbesondere schneiden sich also alle Winkelhalbierenden in einem Punkt, welcher damit bekanntlich auch den Mittelpunkt des (existenten) Inkreises von V bildet. Mit Hilfe von diesem Theorem sind wir nun in der Lage, den folgenden Zusammenhang zwischen IC-Netzen und konfokalen Kegelschnitten herzustellen.

Theorem 6.2 (Konfokale Diagonalen von IC-Netzen). *Sei $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E_o$ ein IC-Netz mit Geraden L_i, M_j . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:*

- Die Geraden des IC-Netzes berühren alle einen gemeinsamen Kegelschnitt K .
- Es existieren K_s^+, K_t^- konfokal zu K , sodass gilt

$$L_i \cap M_j = K_{i+j}^+ \cap K_{i-j}^-$$

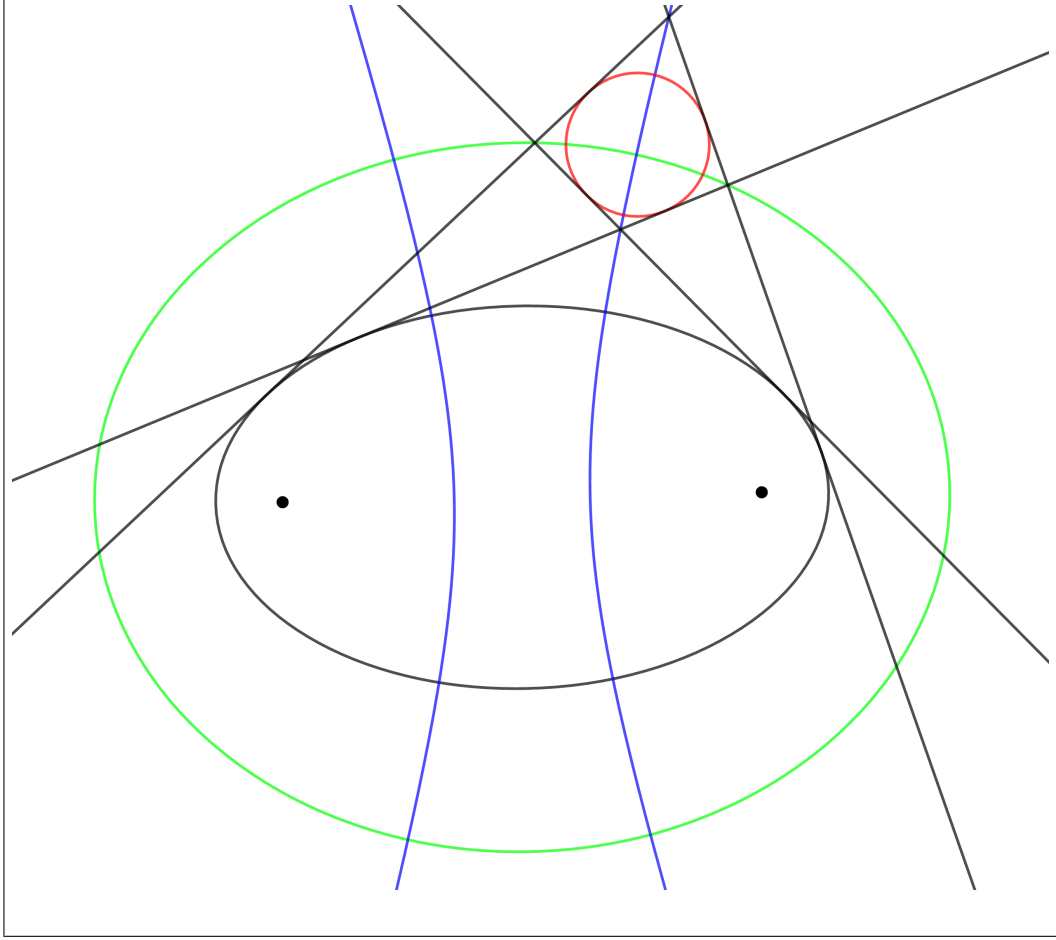


Figure 3: Graves-Chales: Die Existenz der farbigen Objekte ist äquivalent

Diese bilden also die Diagonalen des IC-Netzes.

Proof. Wir beginnen unseren Beweis mit den Geraden L_0, L_1, L_2, M_0, M_1 . Von diesen wissen wir, dass wir aus ihnen das ganze IC-Netz eindeutig konstruieren können. Darüber hinaus stellen wir fest, dass es zu diesen 5 Geraden genau einen eindeutig bestimmten Kegelschnitt gibt, den sie alle berühren. Sei dies der Kegelschnitt K . Nun folgt aufgrund der Existenz der Inkreise bereits mit Graves-Chales die Existenz der konfokalen Diagonalen in den Vierecken $V_{0,0}, V_{1,0}$. Nun zeigen wir zunächst für $V_{2,0}$, dass auch hier die Diagonalen existieren. Dazu sei K_2^- der andere zu K konfokale Kegelschnitt durch $f_{2,0}$ und wir definieren $f'_{3,1} := M_1 \cap K_2^-$ sowie L'_3 als Tangente an K durch diesen Punkt. Nach Graves-Chales existiert in diesem Viereck nun auch die andere konfokale Diagonale und ein Inkreis, welcher aufgrund von Eindeutigkeit dem Inkreis von $V_{2,0}$ entsprechen muss und insbesondere folgt $f_{3,1} = f'_{3,1}$. Damit ist die Diagonalen-Eigenschaft für das Viereck $V_{2,0}$ gezeigt.

Es sollte klar sein, dass auf diese Weise in alle Richtungen weiterverfahren werden kann, womit die Behauptung für das komplette IC-Netz bewiesen ist. \square

6.2 Ivory Theorem

Nun möchten wir das sogenannte Ivory-Theorem beweisen und stellen dabei insbesondere fest, dass eine sehr ähnliche Aussage auf IC-Netzen gilt. Um diese zu Beweisen, brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 6.3. *Sei $A_1A_2A_3A_4 \subset E_o$ ein Viereck, welches einen Inkreis besitzt, dann gilt für die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten: $\|A_1A_2\| + \|A_3A_4\| = \|A_2A_3\| + \|A_4A_1\|$.*

Proof. Sei M der Mittelpunkt des Inkreises und seien B_i die Berührungspunkte der Seiten A_iA_{i+1} mit dem Kreis. Es gilt nun $\|MB_i\| = \|MB_{i-1}\|$, da dies der Radius des Kreises ist und $\angle MB_{i-1}A_i = \angle A_iB_iM$, da dies stets rechte Winkel sind. Entsprechend sind die Dreiecke MA_iB_i und $MB_{i-1}A_i$ kongruent (bis auf Spiegelung) und es gilt $\|A_iB_i\| = \|B_{i-1}A_i\|$. Es folgt direkt:

$$\begin{aligned} \|A_1A_2\| + \|A_3A_4\| &= \|A_1B_1\| + \|B_1A_2\| + \|A_3B_3\| + \|B_3A_4\| \\ &= \|B_4A_1\| + \|A_2B_2\| + \|B_2A_3\| + \|A_4B_4\| \\ &= \|A_2A_3\| + \|A_4A_1\| \end{aligned}$$

\square

Damit sind wir nun in der Lage die folgende Aussage zu IC-Netzen zu beweisen:

Theorem 6.4 (Ivory auf IC-Netzen). *Sei $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E_o$ ein IC-Netz, dann gilt $\|f_{i,j+k}f_{i+2k,j+k}\| = \|f_{i+k,j}f_{i+k,j+2k}\|, \forall i, j, k$.*

Proof. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir den Fall $i = j = 0$, alle anderen Fälle funktionieren komplett analog. Da f ein IC-Netz ist, existieren die Inkreise $K_{0,0,k}, K_{0,k,k}, K_{k,0,k}, K_{k,k,k}$ sowie $K_{0,0,2k}$. Mit vorigem Lemma gelten also die folgenden 5 Gleichungen:

$$\begin{aligned} \|f_{0,0}f_{0,k}\| + \|f_{k,0}f_{k,k}\| &= \|f_{0,k}f_{k,k}\| + \|f_{k,0}f_{0,0}\| \\ \|f_{0,k}f_{0,2k}\| + \|f_{k,k}f_{k,2k}\| &= \|f_{0,2k}f_{k,2k}\| + \|f_{k,k}f_{0,k}\| \\ \|f_{k,0}f_{k,k}\| + \|f_{2k,0}f_{2k,k}\| &= \|f_{k,k}f_{2k,k}\| + \|f_{2k,0}f_{k,0}\| \\ \|f_{k,k}f_{k,2k}\| + \|f_{2k,k}f_{2k,2k}\| &= \|f_{2k,k}f_{2k,2k}\| + \|f_{2k,k}f_{k,k}\| \\ \|f_{0,0}f_{0,k}\| + \|f_{0,k}f_{0,2k}\| &+ \|f_{2k,0}f_{2k,k}\| + \|f_{2k,k}f_{2k,2k}\| \\ = \|f_{0,2k}f_{k,2k}\| + \|f_{k,2k}f_{2k,2k}\| &+ \|f_{0,0}f_{k,0}\| + \|f_{k,0}f_{2k,0}\| \end{aligned}$$

Addiert man nun die ersten vier Gleichungen, subtrahiert die letzte und dividiert das Ergebnis durch 2, so erhält man:

$$\|f_{k,0}f_{k,k}\| + \|f_{k,k}f_{k,2k}\| = \|f_{0,k}f_{k,k}\| + \|f_{k,k}f_{2k,k}\|$$

was genau unserer Behauptung entspricht. \square

Da wir wissen, dass die Diagonalen unseres IC-Netzes konfokale Kegelschnitte sind, kann das folgende Theorem gefolgert werden.

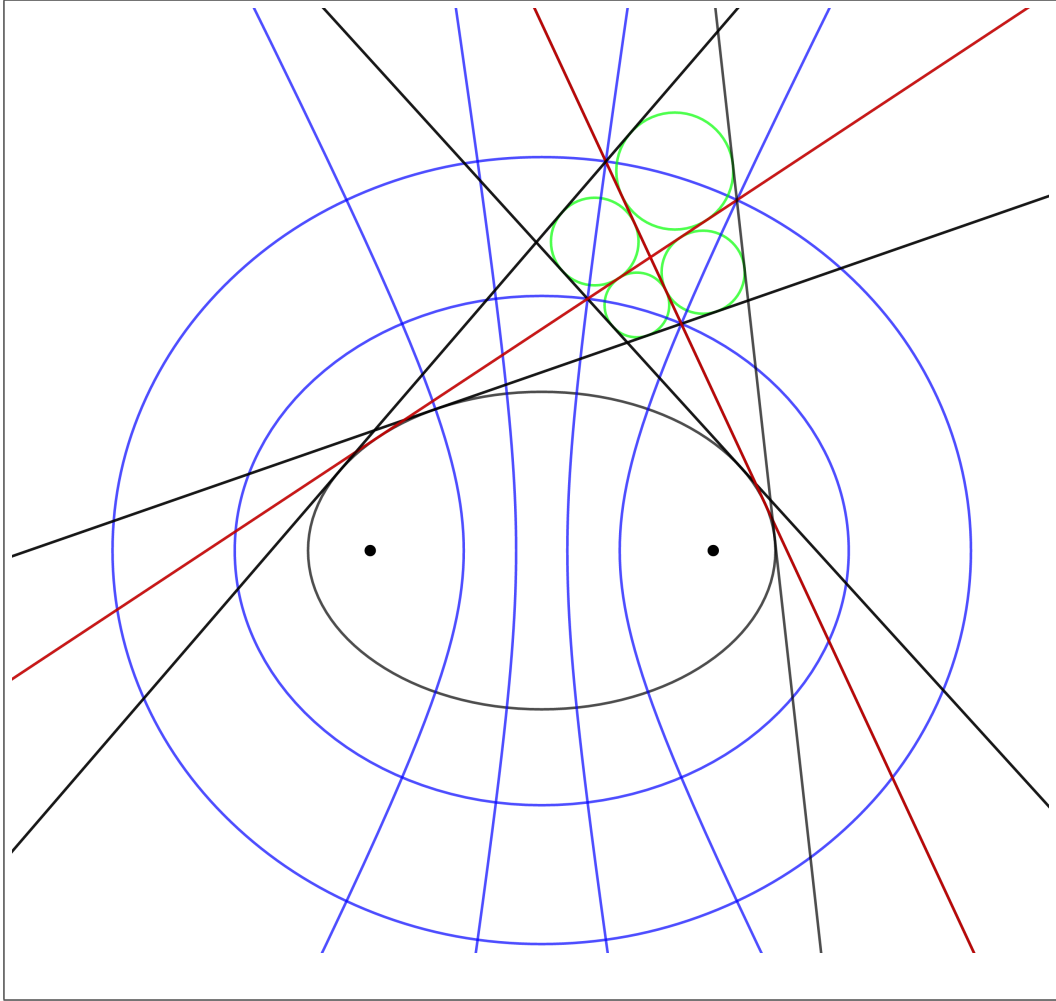


Figure 4: Ivory-Theorem: Die Strecken entlang der roten Geraden sind identisch

Theorem 6.5 (Ivory). Seien $K_{-1}^-, K_1^-, K_1^+, K_3^+$ je zwei konfokale Hyperbeln und Ellipsen und seien weiter $f_{i,j} := K_{i-j}^- \cap K_{i+j}^+$ deren Schnittpunkte. Dann gilt:

$$\|f_{1,0}f_{1,2}\| = \|f_{0,1}f_{2,1}\|$$

Proof. Wir haben bereits diese Aussage zu IC-Netzen bewiesen, es muss also bloss ein IC-Netz mit den gegebenen Kegelschnitten Als Diagonalen konstruiert werden. Sei dazu zunächst L_1 die Gerade durch $f_{1,0}$ und $f_{1,2}$. Sei nun K derjenige zu den gegebenen Kegelschnitten konfokale Kegelschnitt, welcher L_1 als Tangente hat. Nun definieren wir die Geraden $L_0, M_0, , M_2$ als Tangenten an K durch die entsprechenden gegebenen $f_{i,j}$. Sei zudem M_1 die Tangente an K durch $f_{0,1}$. Es bleibt zu zeigen, dass die Gerade M_1 auch durch $f_{2,1}$ verläuft. Sei dazu zunächst $f'_{2,1} := M_1 \cap H_1^-$ definiert und sei weiter L_2 die Tangente an K durch diesen Punkt. Per Definition existiert nun je eine der Diagonalen in den Vierecken $V_{0,0}, V_{1,0}, V_{0,1}$ und somit nach Graves-Chales auch die andere. Insbesondere ist damit die Existenz der Diagonale H_2^+ in dem großen Viereck $V_{0,0,2}$ gezeigt und somit existiert auch die andere Diagonale H_0^- und es gilt $H_0^- \cap H_2^+ = L_1 \cap M_1 =: f_{1,1}$. Wenn wir nun das Viereck $V_{1,1}$ betrachten, so existiert hier nun die Diagonale H_0^- , weshalb die Existenz der anderen Diagonale H_3^+ folgt. Insbesondere folgt damit $f'_{2,1} = f_{2,1}$, was zu zeigen war. Damit ist das gesamte kleine IC-Netz konstruiert und aus dem vorherigen Theorem folgt nun die Behauptung von diesem. \square

7 Parametrisierung mit Elliptischen Funktionen

In der Arbeit [2] geben Bobenko et al. eine konkrete Parametrisierung von IC-Netzen an, welche ausnutzt, dass ihre Normalenvektoren im Schnitt der Quadrik Q_0 mit dem Kegel, welcher durch den gemeinsamen berührten Kegel aufgespannt liegen. Wir möchten nun eine solche Parametrisierung in Q_+ und Q_- finden. Dazu haben wir die folgenden beiden Propositionen.

Proposition 7.1. *Seien in E_- :*

$$\begin{aligned} f_1 &:= \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix} & f_2 &:= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix} & \varphi &\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f &:= \cos \varphi & a &:= \cos \alpha \end{aligned}$$

Dann liegen die Normalenvektoren des Kegelschnittes $C(f_1, f_2, \alpha)$ in einer Kurve welche beschrieben wird durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1 - a^2)x^2 &+ (f^2 - a^2)y^2 - a^2z^2 &= 0 \\ x^2 &+ y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Diese Menge ist nun parametrisiert durch

$$n_{\pm}(t) := \pm \begin{pmatrix} \operatorname{acn}(t, k) \\ \frac{a}{f} \operatorname{sn}(t, k) \\ \sqrt{1 - a^2} \operatorname{dn}(t, k) \end{pmatrix} \quad k := \sqrt{\frac{a^2(1 - f^2)}{f^2(1 - a^2)}}$$

Proof. Es gilt $m' = 1 - k^2 = \frac{f^2 - a^2}{f^2(1 - a^2)}$ und somit

$$(1 - a^2) \operatorname{dn}^2 = (1 - a^2)(\operatorname{cn}^2 + m' \operatorname{sn}^2) = (1 - a^2) \operatorname{cn}^2 + \left(1 - \frac{a^2}{f^2}\right) \operatorname{sn}^2$$

Entsprechend gilt in der ersten Gleichung:

$$\begin{aligned} & (1 - a^2)x^2 + (f^2 - a^2)y^2 - a^2z^2 \\ = & (1 - a^2)a^2 \operatorname{cn}^2 + \frac{(f^2 - a^2)a^2}{f^2} \operatorname{sn}^2 - a^2(1 - a^2) \operatorname{dn}^2 \\ = & (1 - a^2)a^2 \operatorname{cn}^2 + \left(1 - \frac{a^2}{f^2}\right) a^2 \operatorname{sn}^2 - a^2[(1 - a^2) \operatorname{cn}^2 + \left(1 - \frac{a^2}{f^2}\right) \operatorname{sn}^2] \\ = & 0 \end{aligned}$$

Und in der zweiten:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ = & a^2 \operatorname{cn}^2 + \frac{a^2}{f^2} \operatorname{sn}^2 + (1 - a^2) \operatorname{dn}^2 \\ = & a^2 \operatorname{cn}^2 + \frac{a^2}{f^2} \operatorname{sn}^2 + (1 - a^2) \operatorname{cn}^2 + \left(1 - \frac{a^2}{f^2}\right) \operatorname{sn}^2 \\ = & \operatorname{cn}^2 + \operatorname{sn}^2 \\ = & 1 \end{aligned}$$

□

Proposition 7.2. Seien in E_+ :

$$\begin{aligned} f_1 &:= \begin{pmatrix} \sinh \varphi \\ 0 \\ \cosh \varphi \end{pmatrix} & f_2 &:= \begin{pmatrix} -\sinh \varphi \\ 0 \\ \cosh \varphi \end{pmatrix} & \varphi &> 0 \\ f &:= \cosh \varphi & a &:= \cosh \alpha \end{aligned}$$

Dann liegen die Normalenvektoren des Kegelschnittes $C(f_1, f_2, \alpha)$ in einer Kurve welche beschrieben wird durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a^2 - 1)x^2 &+ (a^2 - f^2)y^2 - a^2z^2 &= 0 \\ x^2 &+ y^2 - z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Diese Menge ist nun parametrisiert durch

$$n_{\pm}(t) := \pm \begin{pmatrix} \operatorname{acn}(t, k) \\ \frac{a}{f} \operatorname{sn}(t, k) \\ \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{dn}(t, k) \end{pmatrix} \quad k := \sqrt{\frac{a^2(f^2 - 1)}{f^2(a^2 - 1)}}$$

Proof. Es gilt $m' = 1 - k^2 = \frac{a^2 - f^2}{f^2(a^2 - 1)}$ und somit

$$(a^2 - 1) \operatorname{dn}^2 = (a^2 - 1)(\operatorname{cn}^2 + m' \operatorname{sn}^2) = (a^2 - 1) \operatorname{cn}^2 + \left(\frac{a^2}{f^2} - 1 \right) \operatorname{sn}^2$$

Entsprechend gilt in der ersten Gleichung:

$$\begin{aligned} & (a^2 - 1)x^2 + (a^2 - f^2)y^2 - a^2z^2 \\ = & (a^2 - 1)a^2 \operatorname{cn}^2 + \frac{(a^2 - f^2)a^2}{f^2} \operatorname{sn}^2 - a^2(a^2 - 1) \operatorname{dn}^2 \\ = & (a^2 - 1)a^2 \operatorname{cn}^2 + \left(\frac{a^2}{f^2} - 1 \right) a^2 \operatorname{sn}^2 - a^2[(a^2 - 1) \operatorname{cn}^2 + \left(\frac{a^2}{f^2} - 1 \right) \operatorname{sn}^2] \\ = & 0 \end{aligned}$$

Und in der zweiten:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - z^2 \\ = & a^2 \operatorname{cn}^2 + \frac{a^2}{f^2} \operatorname{sn}^2 - (a^2 - 1) \operatorname{dn}^2 \\ = & a^2 \operatorname{cn}^2 + \frac{a^2}{f^2} \operatorname{sn}^2 - (a^2 - 1) \operatorname{cn}^2 - \left(\frac{a^2}{f^2} - 1 \right) \operatorname{sn}^2 \\ = & \operatorname{cn}^2 + \operatorname{sn}^2 \\ = & 1 \end{aligned}$$

□

References

- [1] A. V. Akopyan und A. I. Bobenko, *Incircular nets and confocal conics*, Transactions of the American Mathematical Society 360:4
- [2] A. I. Bobenko, W. K. Schief und J. Techter, *Checkerboard incircular nets. Laguerre geometry and parametrisation*, Geometriae dedicata 204:1
- [3] A. I. Bobenko, C. O. R. Lutz, H. Pottmann, J. Techter *Laguerre Geometry in spaceforms and incircular nets*
<https://www.discretization.de/publications/file/589>

- [4] I. M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, New York and London, 1968
- [5] I. Izvestiev, *Spherical and hyperbolic conics*,
<https://arxiv.org/abs/1702.06860>