Из уравнения (80) и условий (81) находим:

$$X_1(x) = C\sin\frac{\omega}{a}x, \quad X_2(x) = D\sin\frac{\omega}{a}(l-x);$$

условия сопрежения (82) дают:

$$C\sin\frac{\omega}{a}x_0 - D\sin\frac{\omega}{a}(l-x_0) = 0,$$

$$C\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}x_0 + D\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(l-x_0) = \frac{A}{k}.$$

Определяя отсюда коэффициенты C и D, получаем:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = \frac{Aa}{k\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}(l-x_0)}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\frac{\omega}{a}x\cos\omega t, & 0 \le x \le x_0, \\ u_2 = \frac{Aa}{k\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x_0}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\frac{\omega}{a}(l-x)\cos\omega t, & x_0 < x \le l. \end{cases}$$

Аналогично записывается решение при $f(t) = A\sin\omega t$. Итак, полученное решение для случая $f(t) = A\cos\omega t$ или $f(t) = A\sin\omega t$. Если $f(t)$ — периодическая функция, равная

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega nt + b_n\sin\omega nt)$$

(ω — наименьшая частота), то, очевидно,

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = \frac{1}{k}\left[\frac{a_0 x}{2}\left(1-\frac{x_0}{l}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin\frac{\omega n}{a}(l-x_0)}{\omega n\sin\frac{\omega n}{a}l}\sin\frac{\omega n x}{a}(a_n\cos\omega nt + b_n\sin\omega nt)\right], & 0 \le x \le x_0 \quad ; \\ u_2 = \frac{1}{k}\left[\frac{a_0 x_0}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin\frac{\omega n}{a}x_0}{\omega n\sin\frac{\omega n}{a}l}\sin\frac{\omega n(l-x)}{a}(a_n\cos\omega nt + b_n\sin\omega nt)\right], & x_0 \le x \le l. \end{cases} \tag{83}$$

Первые слагаемые этих сумм соответствуют стационарному прогибу, определяемому по величине силы $f(t) = \frac{\alpha_0}{2} = \mathrm{const}$, как нетрудно видеть, функциями:

$$u = \begin{cases} u_1(x,t) = u_1(x) = \frac{1}{k}\frac{\alpha_0}{2}x\left(1-\frac{x_0}{l}\right) & \text{при } 0 \le x \le x_0, \\ u_2(x,t) = u_2(x) = \frac{1}{k}\frac{\alpha_0}{2}x_0\left(1-\frac{x}{l}\right) & \text{при } x_0 \le x \le l. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ непериодическая, то, представляя ее в виде интеграла Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Если знаменатель у этих функций (83) равен нулю:

$$\sin\frac{\omega l}{a}=0,$$

$$\frac{\omega l}{a}=\omega_n.$$

т. е. если спектр частот возбуждающей силы содержит одну из частот собственных колебаний (резонанс), то установившегося решения не существует.

Если точка приложения силы x_0 является одним из узлов стоячей волны, соответствующей свободному колебанию с частотой ω_n, то

$$\sin\frac{\omega_n}{a}x_0=0,$$

$$\sin\frac{\omega_n}{a}(l-x_0)=0.$$

При этом числители соответствующих слагаемых для и обращения в нуль, и явление резонанса не имеет места. Если же точка приложения силы, действующей с частотой ω_n, является пучностью соответствующей стоячей волны с частотой ω_n, то

$$\sin\frac{\omega_n}{a}x_0=1,$$

и явление резонанса будет выражено наиболее резко.

Отсюда следует правило, что для возбуждения резонанса струны при действии на нее несосредоточенной силой надо, чтобы частота ее ω была равна одной из собственных частот струны, а точка приложения силы совпадала с одной из пучностей стоячей волны.

9. Общая схема метода разделения переменных.

Метод разделения переменных применимым не только для уравнения колебаний однородной струны, но и для уравнения колебаний неоднородной струны. Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$L[u]=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<l,\quad t>0,\tag{84}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0,\qquad t>0,\tag{85}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x),\qquad 0\le x\le l.\tag{86}$$