САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

Л. К. БАБАДЖАНЯНЦ
Ю. А. ПУПЫШЕВ
Ю. Ю. ПУПЫШЕВА

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие
Издание второе, исправленное и дополненное

Санкт-Петербург
2011

Перейти к оглавлению на странице: 256

ПРЕДИСЛОВИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ (2008 ГОД)

Теоретическая часть настоящего курса содержит материал, соответствующий лекциям, которые Л.К. Бабаджанянц читает студентам факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Курс генетически связан с лекциями по теоретической механике, которые В.С. Новоселов многие годы читал студентам университета, но, в отличие от его лекций, в которых большее внимание уделялось раскрытию механического содержания рассматриваемых положений, здесь упор делается на изучении основных моделей классической механики средствами классического анализа. Стоит также отметить небольшой объем предлагаемого курса при достаточно полном охвате основ классической механики. Курс В.С. Новоселова не опубликован, но заменой ему можно считать книги [5] – [9], в которых углубленно излагаются основные и дополнительные разделы теоретической механики. Кроме этих книг, для дополнительного чтения можно рекомендовать учебные пособия [1] – [4], [10], [11], [13].

Ю.А. Пупышев и Ю.Ю. Пупышева написали часть VI настоящего курса, которая содержит упражнения и тесты, опробованные на практических занятиях со студентами, а также экзаменационные вопросы. Кроме того, Ю.Ю. Пупышева выполнила все работы по подготовке пособия к публикации.

Пособие состоит из шести частей, причем первые четыре части составляют полное содержание курса лекций для студентов. В части I вводятся в рассмотрение и обсуждаются аффинные пространства и криволинейные координаты. В части II излагаются модели кинематики точки и твердого тела. Часть III посвящена моделям динамики — здесь изучается движение материальных точек и твердых тел, а также движение точки переменной массы. Часть IV является введением в аналитическую динамику — она содержит главы, посвященные основному уравнению механики, уравнениям Лагранжа и Гамильтона, а также вариационным принципам механики. Часть V является дополнительной к курсу лекций, — в ней напоминаются стандартные сведения об алгебраических структурах, пространствах и тензорах (подробное изложение этого материала можно найти в книгах [14] – [17]). Упражнениям и тестам посвящена часть VI. Кроме того, в качестве основных задачников в СПбГУ традиционно используют книги [18], [19].

Пособие можно рекомендовать студентам университетов, обучающимся по специальностям математического и физико-математического направления и, особенно, по специальностям, ориентированным на применение современных методов математического моделирования в естествознании.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ (2011 ГОД)

Во втором издании исправлены опечатки и оно дополнено главой 12 "Вариационные принципы механики".

Перейти к оглавлению на странице: 256

ЧАСТЬ I. ПРОСТРАНСТВА И КООРДИНАТЫ

Здесь вводятся в рассмотрение и обсуждаются аффинные пространства, аффинные и криволинейные координаты. Сведения, которые могут понадобится читателю для понимания этого материала, напоминаются в части V.

ГЛАВА 1. АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Аффинное пространство используют в классической механике по той причине, что в трехмерном случае аффинное евклидово пространство является естественной моделью окружающего нас пространства и, с другой стороны, — это пространство элементарной геометрии (стереометрии) при выбранной единице длины (см. также заключительный подраздел в §1 главы 4).

§1. Аффинные евклидовы пространства

Аффинные пространства

Аффинным пространством называют множество E, связанное с векторным пространством $\vec{E}$ отображением $f : E \times E \to \vec{E}$ со свойствами (вместо $f(a,b)$ мы используем обозначения $\overrightarrow{ab}$ или $\overrightarrow{a,b}$):

1. $(\forall a,b,c \in E)\ \left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = \vec{0} \in \vec{E}\right)$ (*Соотношение Шаля*);
2. $(\forall a \in E)\ \left(x \mapsto \overrightarrow{ax} - \text{биекция на } \vec{E}\right)$.

Элементы множества E называют точками аффинного пространства, а элементы множества $\vec{E}$ — векторами. Отображение f сопоставляет каждой паре точек a,b аффинного пространства вектор $\overrightarrow{ab}$, что позволит нам далее (пользуясь тем, что $\vec{E}$ — векторное пространство) ввести в аффинном пространстве системы координат и другие необходимые понятия.

Из свойств 1,2 можно получить следствия:

3. $(\forall a \in E)\ \left(\overrightarrow{aa} = \vec{0}\right)$;
4. $(\forall a,b \in E)\ \left(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = \vec{0}\right)$ (иначе: $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$);
5. $(\forall a \in E)\ (\forall \vec{h} \in \vec{E})(\exists! b \in E)\ \left(\overrightarrow{ab} = \vec{h}\right)$ (вместо $\overrightarrow{ab} = \vec{h}$ пишут символически: $b = a + \vec{h}$);
6. $(\forall a \in E)\ (\forall \vec{h}, \vec{k} \in \vec{E})\ \left(a + (\vec{h} + \vec{k}) = (a + \vec{h}) + \vec{k}\right)$.

Упражнение 1.1. **Докажите свойства 3–6.**

Определенное выше аффинное пространство, строго говоря, следует не только рассматривать, но и обозначать как тройку $(E, \vec{E}, f)$, но обычно его обозначают просто E. Наряду с векторами векторного пространства $\vec{E}$ в аффинном пространстве вводят понятие *закрепленного вектора*. Если a — точка аффинного пространства E, а $\vec{h}$ — вектор связанного с ним векторного пространства $\vec{E}$, то пару $(a, \vec{h})$ называют *вектором* $\vec{h}$, *закрепленным в точке* a (или *приложенным к точке* a). Каждому закрепленному вектору $(a, \vec{h})$ соответствует упорядоченная пара точек $(a, a + \vec{h})$, и каждой упорядоченной паре точек (a, b) соответствует закрепленный вектор $(a, \overrightarrow{ab})$. Поэтому закрепленным вектором называют также упорядоченную пару точек аффинного пространства. Вместо того, чтобы говорить о закрепленном векторе $(a, \overrightarrow{ab})$, будем также говорить о закрепленном векторе $\overrightarrow{ab}$ или (a, b). Заметим однако, что обозначение $\overrightarrow{ab}$ для закрепленного вектора $(a, \overrightarrow{ab})$ может привести к недоразумению. Закрепленный вектор $\overrightarrow{ab}$ обычно изображают на рисунке стрелкой от a к b и называют направленным отрезком. В противоположность названию *закрепленный вектор*, для векторов из $\vec{E}$ используют название *свободный вектор*.

Прямой, проходящей через точки A, B $(A \neq B)$ аффинного пространства E, назовем множество точек $l\,(A, B) = \left\{ M \in E \,\middle|\, M = A + t \cdot \overrightarrow{AB}\ ,\ t \in R \right\}$. Легко показать, что $l\,(A, B) = l\,(A + \lambda \cdot \overrightarrow{AB},\ B + \mu \cdot \overrightarrow{AB})$ для любых $\lambda,\ \mu \in R,\ \mu \neq \lambda - 1$. Множество $l\,(A, B)$ можно считать упорядоченным, полагая, что точка $B_1 = A + t_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ предшествует точке $B_2 = A + t_2 \cdot \overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда $t_1 < t_2$. В этом случае прямую $l\,(A, B)$ будем считать *направленной*, а точнее – *сонаправленной с вектором* $\overrightarrow{AB}$ (а значит и с любым вектором $t \cdot \overrightarrow{AB}$ при $t > 0$). В частности, две направленные прямые $l\,(A, B)$ и $l\,(B, A)$ имеют противоположные направления, хотя и совпадают как множества. Далее, если не оговорено противное, символом $l\,(A, B)$ обозначается направленная прямая.

Размерностью аффинного пространства E называют размерность связанного с ним векторного пространства $\vec{E}$.

Всякое векторное пространство $\vec{L}$ можно наделить структурой аффинного пространства. Для этого можно взять два экземпляра пространства $\vec{L}$, один из них объявить множеством точек и обозначить E, другой – множеством векторов и обозначить $\vec{E}$, а затем связать E с $\vec{E}$ отображением, которое каждой паре точек $a, b \in E$ ставит в соответствие вектор $\overrightarrow{ab} = (\vec{b} - \vec{a}) \in \vec{E}$. Еще раз отметим, что здесь a, b — точки из $E = \vec{L}$, а $\vec{a}, \vec{b}$ — те же элементы пространства $\vec{L}$, рассматриваемые как векторы из $\vec{E}$.

Всякое аффинное пространство E можно наделить структурой векторного пространства. Для этого фиксируют некоторую точку $O \in E$ и произвольной точке $M \in E$ сопоставляют вектор $\overrightarrow{OM} \in \vec{E}$ (радиус-вектор): множество этих радиус-векторов образует векторное пространство.

Аффинные евклидовы пространства

Аффинное пространство E называют *евклидовым аффинным пространством* или *евклидовым точечным пространством*, если связанное с ним векторное пространство $\vec{E}$ евклидово, то есть на $\vec{E}$ задано скалярное произведение, а значит и евклидова норма. Скалярное произведение векторов $\vec{p}$, $\vec{h} \in \vec{E}$ будем обозначать $\vec{p}\,\vec{h}$, $(\vec{p}, \vec{h})$ или $\left\langle \vec{p}, \vec{h} \right\rangle$. Напомним, что евклидова норма вектора $\vec{p}$ вводится по формуле $\|\vec{p}\| = \sqrt{\vec{p}\,\vec{p}}$. Аффинное евклидово пространство становится метрическим если ввести *евклидово расстояние* ϱ по формуле: $(\forall x, y \in E)\ (\varrho(x, y) = \|\overrightarrow{yx}\|)$. В случае, если $\vec{E}$ — векторное или евклидово пространство R^n, используют обозначение E^n вместо E.

Использование евклидова пространства R^n обеспечивает нас таким мощным и необходимым для классической механики инструментарием, как векторная алгебра и аналитическая геометрия в этом пространстве.

Упражнение 1.2. При условии, что заданы координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ относительно ортонормального базиса евклидова пространства R^3, выписать формулы для скалярного, векторного, двойного векторного и смешанного произведений $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$, $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$, для угла между двумя векторами и для проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Упражнение 1.3. **Выписать уравнения прямой и плоскости в евклидовом пространстве R^3. Привести формулы для угла между двумя прямыми, между двумя плоскостями и между прямой и плоскостью.**

Упражнение 1.4. **При условии, что заданы базисы в евклидовых пространствах R^2, R^3, выписать соответственно уравнения кривых и поверхностей второго порядка (общие и канонические). Привести алгоритмы определения типа этих кривых и поверхностей по инвариантам.**

Упражнение 1.5. **При условиях предыдущего упражнения выписать уравнения касательных прямых и плоскостей к кривым и поверхностям второго порядка, заданным своими общими и каноническими уравнениями.**

§2. Аффинные координаты и преобразования

Аффинные и декартовы системы координат

Пусть $E = E^n$, тогда вектор $\overrightarrow{OM} \in \vec{E} = R^n$ можно разложить по базису $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ векторного пространства R^n:

$$\overrightarrow{OM} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j, \tag{2.1}$$

или, в другой записи (см. §1, свойство 5 отображения f):

$$M = O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j. \tag{2.2}$$

Пусть $O \in E^n$, а $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — базис пространства R^n. Упорядоченную последовательность $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называют *репером* пространства E^n; точку O называют *началом* этого репера, а базис $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — его *базисом*. Репер удобно представлять себе как упорядоченный набор из закрепленных в точке O векторов $(O, O+\vec{e}_1)$, …, $(O, O+\vec{e}_n)$.

Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ в (2.2) называют *аффинными координатами* точки $M \in E^n$ относительно выбранного репера с началом $O \in E^n$ и базисом $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. При фиксированных начале и базисе аффинные координаты точки M определены однозначно, так как однозначно представление (2.1).

В случае, если фиксирован базис, вместо равенств (2.2) мы будем писать также $\overrightarrow{OM} \sim (x_1, \ldots, x_n)$ или $\overrightarrow{OM} = (x_1, \ldots, x_n)$, а если фиксированы и базис и начало, то мы будем вместо (2.2) писать также $M \sim (x_1, \ldots, x_n)$, $M = (x_1, \ldots, x_n)$.

Точки $M_0, \ldots, M_n \in E^n$ называют *линейно-независимыми* если линейно-независимы $\overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_n}$ (или, что то же, линейно-независимы векторы $\overrightarrow{M_1M_0}, \ldots, \overrightarrow{M_1M_n}$ и т.п.).

Упорядоченную последовательность $M_0, \ldots, M_n \in E^n$ линейно-независимых точек называют *базисом* в E^n. Каждому базису $(M_0, \ldots, M_n)$ аффинного пространства E^n отвечает его репер $(M_0, \overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_n})$. Наоборот, каждому реперу $(M_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ аффинного пространства E^n можно сопоставить базис $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$. Вместо базиса $(M_0, \ldots, M_n)$ можно задать *аффинную систему координат* – начало координат M_0 и упорядоченный набор прямых $(l\,(M_0, M_1), \ldots, l\,(M_0, M_n))$, называемых *осями координат*. Ясно, что по заданной системе координат можно построить базис (и даже бесконечно много базисов), а по заданному базису можно построить систему координат.

Резюмируя сказанное о введенных выше понятиях репера, базиса и аффинной системы координат, еще раз отметим, что задание любого из этих трех объектов позволяет построить и два других.

Важным для механики является понятие ориентации системы координат: *ориентацией репера* (или, что то же, *ориентацией аффинной системы координат* или *ориентацией аффинного базиса*) называют ориентацию базиса соответствующего векторного пространства.

Упражнение 2.1. Как множество всех базисов векторного пространства разбивают на два подмножества (класса), каждое из которых содержит одинаково ориентированные базисы? Отдельно уточните ответ на этот вопрос для случая евклидова пространства (см. §§2, 4, 5 главы 13 и §2 главы 4).

Далее мы будем рассматривать только евклидово аффинное пространство E^n, а базисы в соответствующем пространстве R^n будем считать ортонормированными. Это означает, в частности, что оси соответствующей аффинной системы координат взаимно ортогональны. Как известно, при $n = 2, 3$ такую систему координат называют *декартовой*, поэтому и в общем случае $n \in [1 : \infty]$ ее естественно (но не обязательно) также называть декартовой.

Упражнение 2.2. Объясните почему аффинные координаты точки в декартовой системе есть проекции ее радиус-вектора на оси координат.

Пусть $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — репер в пространстве E^n, и пусть

$$M = O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j, \quad N = O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j \tag{2.3}$$

— представления точек M, $N \in E^n$ в этом репере. Используя соотношение $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$ и свойство $\overrightarrow{MO} = -\overrightarrow{OM}$, получаем:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} (y_j - x_j)\, \vec{e}_j. \tag{2.4}$$

Аффинные преобразования координат

Теперь мы найдем формулы преобразования аффинных координат точек, то есть связь между координатами точки в различных реперах. Пусть

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j = O_1 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \vec{e}_j, \quad O_1 = O + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j, \tag{2.5}$$

— тогда из равенства $O + \sum_{j=1}^{n} x_j\, \vec{e}_j = O + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{e}_j + \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j\, \vec{e}_j$ следует:

$$x_j = \tilde{x}_j + a_j,\ j \in [1 : n]. \tag{2.6}$$

Прежде, чем обратиться к общему случаю, рассмотрим два ортонормальных базиса $(\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n), (\vec{e}\,''_1, \ldots, \vec{e}\,''_n)$ пространства R^n. Как известно, они связаны равенствами:

$$\vec{e}\,''_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} p_{i,j} \vec{e}\,'_j,\ i \in [1 : n], \tag{2.7}$$

где числовая матрица $P = (p_{i,j})$ удовлетворяет условию ортогональности $P^T = P^{-1}$ или $P^T P = I$. Напомним, почему матрица P должна удовлетворять условию ортогональности. Дело в том, что любое преобразование базисов вида (2.7), не должно менять длины векторов. Это означает, что P должна удовлетворять условию $(\forall\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n)$ $((\vec{x}, \vec{x}) = (P\vec{x}, P\vec{x}))$. Так как $(P\vec{x}, P\vec{x}) = (\vec{x}, P^T P\vec{x})$ и $P^T P$ — симметричная матрица, то отсюда и следует условие ортогональности $P^T P = I$. Из условия ортогональности следует, что $1 = \det I = \det(P^T P) = \det P^T \det P = (\det P)^2$, и тогда $\det P = \pm 1$. Если элементы матрицы P непрерывно зависят от каких-то параметров (например, от времени), то $\det P$ также непрерывно зависит от них. Отсюда следует, что при изменении этих параметров величина $\det P$ не меняется. Мы далее полагаем $\det P = 1$.

Вернемся к формулам преобразования аффинных координат точек. Если $\vec{x}\,' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, $\vec{x}\,'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ — два разложения одного и того же вектора $\vec{x}$ по базисам $(\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n)$, $(\vec{e}\,''_1, \ldots, \vec{e}\,''_n)$ соответственно, то

$$x'' = P\,x', \quad x' = P^T x''. \tag{2.8}$$

Пусть теперь

$$M = O + \sum_{j=1}^{n} x'_j\, \vec{e}\,'_j = O_1 + \sum_{j=1}^{n} x''_j\, \vec{e}\,''_j,\ O_1 = O + \sum_{j=1}^{n} a_j\, \vec{e}\,'_j, \tag{2.9}$$

– тогда из равенств

$$O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} x'_j\, \vec{e}\,'_j = O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j\, \vec{e}\,'_j + \sum\nolimits_{i=1}^{n} x''_i\, \vec{e}\,''_i =$$

$$= O + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_j\, \vec{e}\,'_j + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \vec{e}\,'_j \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_{i,j} x''_i$$

следует, что

$$x'_j = a_j + \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_{i,j} x''_i, \quad j \in [1:n]. \tag{2.10}$$

Аналогично получаем:

$$x''_j = \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_{j,i}(x'_i - a_i), \quad j \in [1:n]. \tag{2.11}$$

Формулы (2.10), (2.11) – искомые.

ГЛАВА 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

В качестве пространства, в котором будут определены криволинейные координаты, мы рассматриваем здесь R^n. Мы будем рассматривать одновременно различные его экземпляры, поэтому будем использовать для них, наряду с R^n, также обозначения $R^n(y), R_1^n(x)$ и т.п. (при $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$). Частные случаи криволинейных координат в пространстве R^n хорошо известны. Это полярные, цилиндрические, сферические координаты и т.д. На этих примерах можно заметить, что задать какие-то криволинейные координаты в некоторой области D пространства $R^n(y)$ означает поставить в соответствие каждой точке $y = (y_1, \ldots, y_n)$ этой области упорядоченный набор вещественных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_1^n$, называемых координатами этой точки. Декартовы координаты, в этом смысле, ничем не отличаются от других координат. С другой стороны, ясно, что не всякое соответствие окажется полезным для введения криволинейных координат. Например, мало пользы в качестве системы координат могло бы принести соответствие, сопоставляющее каждой точке пространства R^n одну и ту же точку $x \in R_1^n$. Выделяя полезные свойства конкретных систем координат пришли к достаточно общему понятию *криволинейной системы координат*.

§1. Криволинейные системы координат

Криволинейной системой координат в области $D \subset R^n(y)$ (область здесь, как обычно, – открытое связное множество) называют систему гладких функций $(x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n))$, задающих взаимно-однозначное отображение области D на некоторую область $D_1 \subset R_1^n(x)$, причем эти функции таковы, что отличен от нуля во всех точках области D якобиан

$$J(y) = \det \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \ldots & \partial x_n/\partial y_1 \\ . & . & . \\ \partial x_1/\partial y_n & \ldots & \partial x_n/\partial y_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Отличие от нуля якобиана $J(y)$ при всех $y \in D$ гарантирует, что отображение $f^{-1}(x)$, обратное к $f(y) =$

$(x_1(y_1,\ldots,y_n),\ \ldots\ ,x_n(y_1,\ldots,y_n))$, также является гладким (это следствие теоремы о неявных функциях).

Таким образом, криволинейная система координат задается двумя гладкими, взаимно-обратными отображениями $f(y)$ и $f^{-1}(x)$, устанавливающими гомеоморфизм между множествами $D = f^{-1}(D_1)$ и $D_1 = f(D)$.

Гладкость – понятие гибкое, нам следует уточнить его. *Отображение $f : D \to R_1^n$ называют гладким отображением класса* $C^r(D)$ при $1 \leqslant r < \infty$, или $r = \infty$, или $r = \omega$, если оно дифференцируемо до порядка r включительно, или бесконечно дифференцируемо, или аналитично соответственно. Часто гладкое отображение какого-то класса называют просто *гладким отображением*, а класс гладкости уточняют при необходимости. Гладкий гомеоморфизм класса $C^r(D)$ между D и D_1 называют *диффеоморфизмом* класса $C^r(D)$, а множества D и D_1, при существовании такого диффеоморфизма, называют *диффеоморфными*.

Итак, криволинейная система координат в области $D \subset R^n$ — это некоторый диффеоморфизм $f : D \to R_1^n$ с ненулевым якобианом.

Так как мы собираемся пользоваться различными системами координат и, в частности, переходить от одной системы координат к другой, то должны рассмотреть общее понятие замены координат.

Пусть $y = (y_1,\ldots,y_n) \in R^n(y)$, и в области $D \subset R^n(y)$ две системы координат $x(y) = (x_1(y),\ldots,x_n(y))$ и $z(y) = (z_1(y),\ldots,z_n(y))$ (Рис. 1.1) заданы отображениями $f : D \to D_1 \subset R_1^n(x)$ и $g : D \to D_2 \subset R_2^n(z)$.

Заменой координат x на z (или z на x) называется отображение $\psi_{xz} : D_1 \to D_2(\psi_{zx} : D_2 \to D_1)$, задаваемое формулой $\psi_{xz} = g \circ f^{-1}$ (соответственно, $\psi_{zx} = f \circ g^{-1}$), то есть $\psi_{xz}(x) = g\left(f^{-1}(x)\right)$ $\left(\psi_{zx}(z) = f(g^{-1}(z))\right)$ (Рис. 1.1).

При замене $\psi_{xz} = g \circ f^{-1}$ точка $y \in D$ получает вместо криволинейных координат $(x_1(y),\ldots,x_n(y))$ новые координаты $(z_1(y),\ldots,z_n(y))$.

Можно показать, что замена $\psi_{xz} : D_1 \to D_2$ — диффеоморфизм с ненулевым якобианом, то есть это криволинейная система координат в $D_1 \subset R_1^n(x)$.

Если задана декартова система координат, то задание новой криволинейной системы координат удобно трактовать как замену

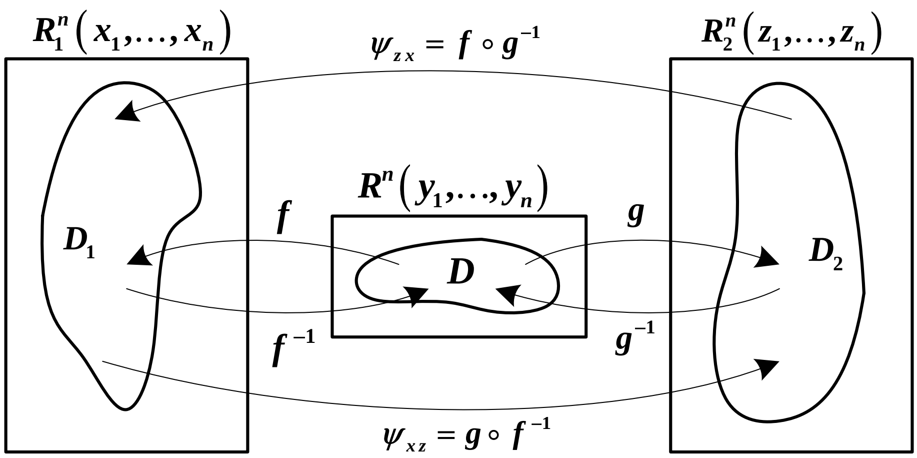


Рисунок 1.1

и задавать формулами замены координат. В качестве примера рассмотрим цилиндрическую систему координат в R^3 (Рис. 2.2). Рассмотрим $R^3(y)$, $R_1^3(x)$ при $y = (y_1, y_2, y_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ и используем обозначения:

$$\begin{gathered} \varrho = y_1,\ \varphi = y_2,\ z = y_3, \\ D = \left\{(\varrho,\varphi,z)\in R^3 \mid \varrho > 0,\ \varphi\in[0,2\pi),\ z\in R\right\}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Формулы

$$x_1 = \varrho\cos\varphi,\ x_2 = \varrho\sin\varphi,\ x_3 = z \tag{1.3}$$

определяют гладкое отображение $f : D \to D_1 \subset R_1^3(x)$ с якобианом:

$$J(\varrho,\varphi,z) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \varrho. \tag{1.4}$$

Как видим, формулы (1.3) задают криволинейную систему координат в области $D \subset R^3(\varrho,\varphi,z)$, а значит и в области $D_1 \subset R_1^3(x)$.

§2. Локальные базисы

В механике фиксированную декартову систему координат в R^3 часто обозначают $Oxyz$, а упорядоченный набор координат точки рассматривают как радиус-вектор $\vec r = (x,y,z) = x\vec i + y\vec j + z\vec k$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты системы $Oxyz$. Криволинейные координаты обозначим $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ и будем задавать их формулами $q_i = q_i(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z) \in D$, $i = 1, 2, 3$, то есть $\vec{q} = \vec{q}(\vec{r})$, или $x = x(\vec{q})$, $y = y(\vec{q})$, $z = z(\vec{q})$, $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q})$ при $\vec{q} = (q_1,\ q_2,\ q_3) \in Q = \{\, \vec{q} \mid \vec{q} = \vec{q}(\vec{r}),\ \vec{r} \in D \,\}$, причем предполагается, что $\vec{q}(\vec{r}(\vec{q})) = \vec{q}$, $\vec{r}(\vec{q}(\vec{r})) = \vec{r}$ в областях Q и D соответственно.

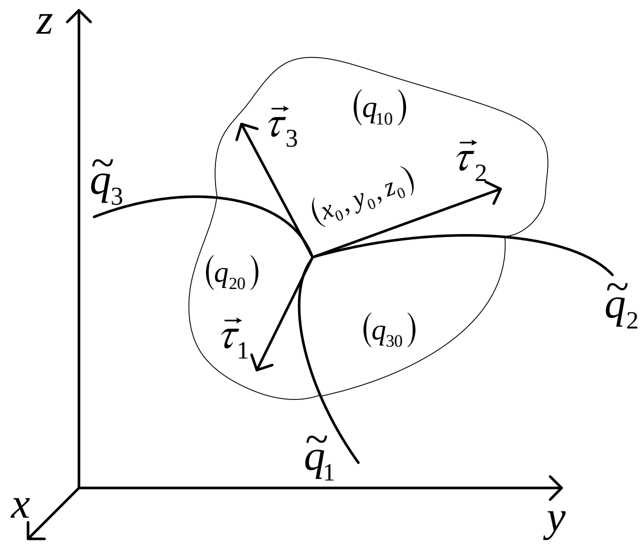


Рисунок 2.1

Теперь мы введем в рассмотрение понятия *координатной поверхности, координатной линии, локального базиса* и *ортогональности* криволинейной системы координат. Это позволит нам в дальнейшем проектировать различные векторы (скорость, ускорение и т.п.) на оси криволинейной системы координат, то есть на оси упомянутого локального базиса. Наиболее простыми оказываются формулы проекций векторов на оси ортогональных криволинейных систем координат.

Пусть $\vec{q}_0 = (q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0}) \in Q$, $\vec{r}_0 = \vec{r}(\vec{q}_0) = (x_0, y_0, z_0)$, тогда три множества

$$(q_{i,0}) = \{\, (x, y, z) \in D \;\mid\; q_i(x, y, z) = q_{i,0} \,\}, i = 1, 2, 3 \tag{2.1}$$

называют *координатными поверхностями* криволинейной системы координат $\vec{q} = (q_1,\ q_2,\ q_3)$ в точке $(q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0})$, а множества

$$\tilde{q}_3 = (q_{1,0}) \cap (q_{2,0}),\ \tilde{q}_2 = (q_{1,0}) \cap (q_{3,0}),\ \tilde{q}_1 = (q_{2,0}) \cap (q_{3,0}) \tag{2.2}$$

— ее *координатными линиями* в этой точке. Ясно, что

$$(q_{1,0}) \cap (q_{2,0}) \cap (q_{3,0}) = \{\, (x_0, y_0, z_0) \,\}\,. \tag{2.3}$$

В соответствии с определением криволинейной системы координат, ее якобиан отличен от нуля в каждой точке области определения Q. Три вектора $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$ составляют строки матрицы этого якобиана и поэтому не могут быть нулевыми. Эти векторы являются касательными в точке $\vec{q}_0 = (q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0}) \in Q$ к линиям $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{q}_3$ соответственно.

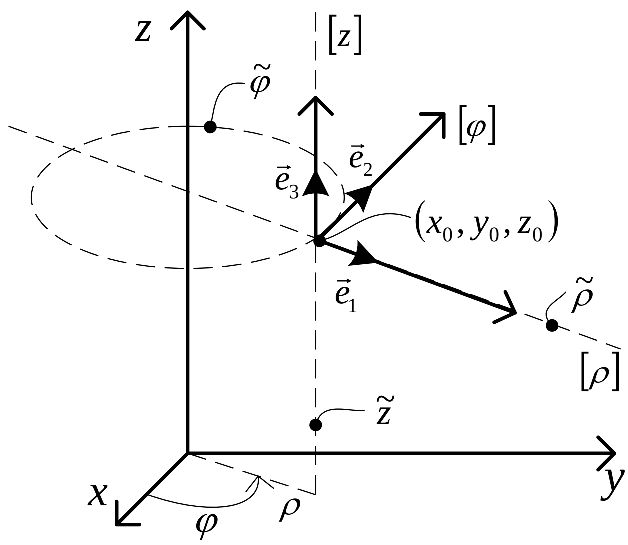


Рисунок 2.2

Действительно, координатная кривая $\tilde{q}_i$ в точке $(q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0})$ параметризуется переменной q_i, то есть, например, для линии $\tilde{q}_1$ можно положить $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_{2,0}, q_{3,0})$, и тогда производная $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ дает направление касательной к этой кривой.

Совокупность трех векторов $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3)$ единичной длины, определяемых формулой $\vec{\tau}_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, $i = 1, 2, 3$ называют *локальным базисом* в точке $\vec{q}_0 = (q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0})$ рассматриваемой криволинейной системы координат. Если векторы $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_3$ взаимно ортогональны в точке $\vec{q}_0 = (q_{1,0}, q_{2,0}, q_{3,0})$ (в каждой точке области Q), то базис и сама криволинейная система называются *ортогональными* в этой точке (в области Q).

Получим условия ортогональности криволинейной системы координат. Так как ни один из векторов $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$ не может быть нулевым, то условия ортогональности локального базиса $\vec{\tau}_1\,\vec{\tau}_2 = 0$, $\vec{\tau}_1\,\vec{\tau}_3 = 0$, $\vec{\tau}_2\,\vec{\tau}_3 = 0$ эквивалентны равенствам $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0$, а значит и равенствам:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} = 0,\ i, j = 1, 2, 3, i \neq j. \tag{2.4}$$

Упражнение 2.1. Показать, что цилиндрическая система координат ортогональна во всей своей области определения (Рис. 2.2).

Перейти к оглавлению на странице: 256

ЧАСТЬ II. КИНЕМАТИКА

В классической механике изучают движение точки, системы из конечного числа точек и твердого тела. Так как в кинематике (в отличие от динамики и аналитической динамики, которые мы изучим в дальнейшем) не рассматривают причин, вызывающих движение, то не нашлось резонов изучать движение системы из конечного числа точек в рамках модели, которая в чем-то существенном отличалась бы от модели кинематики точки. Наиболее содержательной частью кинематики является кинематика твердого тела. Мы рассмотрим здесь последовательно кинематику точки (глава 3) и кинематику твердого тела (глава 4), а затем, на основе полученных результатов, рассмотрим сложное движение точки и твердого тела (глава 5) как дальнейшее развитие моделей кинематики точки и твердого тела.

ГЛАВА 3. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Движение, скорость и ускорение точки находятся в ряду основных понятий механики. Их вычисление или исследование не всегда целесообразно в декартовых координатах. В настоящей главе мы получим формулы для проекций скорости и ускорения точки на оси криволинейной (§1, §2) и естественной (§3, §4) систем координат и рассмотрим два простых, но важных примера – движение точки по прямой и по окружности (§5). Но до этого необходимо ввести в рассмотрение для модели кинематики точки понятия пространства, механической системы, движения, перемещения, скорости и ускорения.

В качестве пространства будем использовать аффинное евклидово пространство E^n, $n = 1, 2, 3$; точку этого пространства будем представлять радиус–вектором $\vec{r}$ в какой-либо декартовой системе координат; например, если $n = 3$, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты системы $Oxyz$, то $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Механической системой в момент t_0 или *положением системы в момент* t_0 будем называть точку M^0 в E^n, $n = 1, 2, 3$. Пусть J – промежуток на R. *Движением этой системы (точки)* будем называть дважды непрерывно дифференцируемую функцию $D : J \longrightarrow E^n$ времени t такую, что $D(t_0) = M^0$. В частности, если точка этого пространства представлена радиус–вектором $\vec{r}$ в какой-либо декартовой системе координат, то ее движение представляется вектор–функцией $\vec{r} : J \longrightarrow R^n$. В этом случае *скоростью и ускорением точки в этом движении называют соответственно вектор–функции* $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{w} = \ddot{\vec{r}}$, а *траекторией точки называют кривую* $\{\vec{r}(t) \in R^n \,|t \in J\}$.

Замечание 1. **Наряду с df/dt, $d^2f/dt^2, \ldots$ для производных f по аргументу t, мы используем, как это принято в механике, и обозначения $\dot{f}$, $\ddot{f}, \ldots$.**

§1. Коэффициенты Ламе. Проекции скорости точки на оси криволинейной системы координат

Так как

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial x}{\partial q_m}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m}\vec{k} = H_m \vec{\tau}_m, \tag{1.1}$$

где

$$H_m = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_m}\right)^2}, \tag{1.2}$$

то

$$\vec{\tau}_m = (H_m)^{-1}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}. \tag{1.3}$$

Величины H_m (иногда удобнее обозначение H_{q_m}) называют *коэффициентами Ламе*. При помощи формул (1.1), (1.3) мы найдем направляющие косинусы осей локального базиса криволинейной системы координат $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ относительно осей декартовой системы $Oxyz$ и разложение вектора скорости точки в этом базисе. Из формулы (1.3) получаем:

$$\cos\angle(\vec{\tau}_m, \vec{i}) = \vec{\tau}_m\vec{i} = (H_m)^{-1}\,\frac{\partial x}{\partial q_m}, \quad \ldots, \quad m = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Движением точки в криволинейных координатах $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ называют $\vec{q} = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ – дважды непрерывно дифференцируемую вектор–функцию аргумента t (времени) на промежутке $J \subset R$.

Функции $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$ называют соответственно *обобщенными скоростями и ускорениями точки в этом движении*, а кривую (множество точек) $\{(q_1, q_2, q_3) \in R^3 \,|\, q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), q_3 = q_3(t), t \in J\}$ – *траекторией точки в криволинейных координатах*.

Теорема 1.1. **Пусть $\vec{q} = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ – движение точки, а v_{q_m} – проекция вектора скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ на q_m (то есть на ось $\vec{\tau}_m$). Тогда:**

$$v_{q_m} = H_{q_m}\dot{q}_m, \quad m = 1, 2, 3. \tag{1.5}$$

Доказательство.

Так как

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{1.6}$$

то из формулы (1.1) получаем:

$$\vec{v} = H_1\dot{q}_1\vec{\tau}_1 + H_2\dot{q}_2\vec{\tau}_2 + H_3\dot{q}_3\vec{\tau}_3, \tag{1.7}$$

откуда и следует (1.5).

■

Следствие 1.1. Если криволинейная система ортогональна, то

$$\begin{gathered} v = \sqrt{(H_1\dot{q}_1)^2 + (H_2\dot{q}_2)^2 + (H_3\dot{q}_3)^2}, \\ \cos\angle(\vec{v}, \vec{\tau}_m) = H_m\dot{q}_m v^{-1}, \quad m = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Пример 1.1. Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Так как

$$\begin{gathered} \frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\varrho\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \varrho\cos\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial y}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \end{gathered} \tag{1.9}$$

то легко проверить, что условия ортогональности (2.4) **главы 2 выполнены.**

Так как

$$H_\varrho = 1,\ H_\varphi = \varrho,\ H_z = 1, \tag{1.10}$$

то

$$v_\varrho = \dot{\varrho},\ v_\varphi = \varrho\dot{\varphi},\ v_z = \dot{z}. \tag{1.11}$$

Из ортогональности цилиндрической системы координат следует, что

$$v = \sqrt{(\dot{\varrho})^2 + (\varrho\dot{\varphi})^2 + (\dot{z})^2}, \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered} \cos\angle(\vec{v}, \vec{\tau}_\varrho) = \dot{\varrho}v^{-1}, \\ \cos\angle(\vec{v}, \vec{\tau}_z) = \dot{z}v^{-1},\ \cos\angle(\vec{v}, \vec{\tau}_\varphi) = \varrho\dot{\varphi}v^{-1}. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Пример 1.2. **Точка движется в плоскости $z = 0$ с постоянной по модулю скоростью $v = v_0$. Ее полярная координата φ в этом движении изменяется по закону $\varphi(t) = \omega_0 t$, где $\omega_0 > 0$ – постоянная. Кроме того, известно, что $\varrho(0) = 0,\ \dot{\varrho}(0) > 0$. Найти траекторию точки в виде $\varrho = \varrho(\varphi)$.**

Решение

Из формулы (1.12) следует, что $(\dot{\varrho})^2 + (\varrho\dot{\varphi})^2 = {v_0}^2$. Так как $\dot{\varphi} > 0$ и $\dot{\varrho}(0) > 0$, то $\dot{\varrho} = \sqrt{{v_0}^2 - \varrho^2{\omega_0}^2}$. Так как $t = \varphi/\omega_0$, то $\omega_0 d\varrho \Big/ \sqrt{{v_0}^2 - \varrho^2{\omega_0}^2} = d\varphi$, откуда получаем $\arcsin(\omega_0\varrho/v_0) = \varphi + c$. Так как $\varrho(0) = 0$, то $c = 0$, и мы получаем $\varrho = (v_0/\omega_0)\sin\varphi$. Это уравнение окружности радиуса $a = (v_0/\omega_0)$ с центром в точке $(0, a/2)$ (Рис. 1.1).

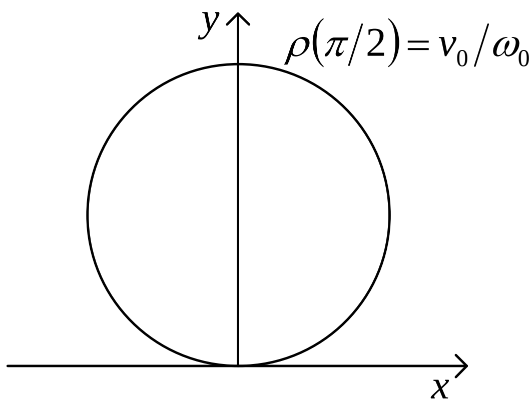


Рисунок 1.1

§2. Проекции ускорения точки на оси ортогональной криволинейной системы координат

Формулу (1.6) запишем в виде:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \vec{v}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3. \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. **Пусть w_{q_m} – проекция ускорения $\vec{w}$ на ось q_m, то есть на вектор $\vec{\tau}_m$, и используются обозначения (2.1) и $T = \frac{1}{2}\vec{v}\vec{v} = \frac{1}{2}v^2$. Тогда, если криволинейная система коор-**

динат (q_1, q_2, q_3) **ортогональна, то**

$$w_{q_m} = {H_{q_m}}^{-1} E_{q_m}(T), \tag{2.2}$$

где $E_{q_m}(T)$ **– линейный дифференциальный оператор (оператор Эйлера–Лагранжа), определяемый равенством**

$$E_{q_m}(T) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m}. \tag{2.3}$$

Доказательство.

Так как $w_{q_m} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{\tau}_m$, $\vec{\tau}_m = H_{q_m}^{-1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}$ (см. (1.3)), то

$$H_{q_m} w_{q_m} = \frac{d\vec{v}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}, \tag{2.4}$$

поэтому для доказательства теоремы мы должны показать, что

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m}. \tag{2.5}$$

Так как

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} + \vec{v}\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}, \tag{2.6}$$

то равенство (2.5) будет доказано если в (2.6) использовать формулы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_m}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_m}, \tag{2.8}$$

Остается доказать эти равенства. Второе из них следует непосредственно из формулы (2.1), а первое – из очевидных равенств:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_k} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m\, \partial q_k}\dot{q}_m, \tag{2.9}$$

(получено дифференцированием равенства (2.1)),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_k\, \partial q_m}\dot{q}_m \tag{2.10}$$

(получено по формуле дифференцирования сложной функции).

Что и требовалось. ■

Пример 2.1. **Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Так как она ортогональна, то получаем:**

$$v = \sqrt{(\dot{\varrho})^2 + (\varrho\dot{\varphi})^2 + (\dot{z})^2}, \ \ T = \frac{1}{2}\left((\dot{\varrho})^2 + (\varrho\dot{\varphi})^2 + (\dot{z})^2\right), \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varrho} = \varrho\dot{\varphi}^2, \ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varrho}} = \dot{\varrho}, \ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \varrho^2\dot{\varphi}, \ \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \dot{z} \tag{2.12}$$

и из формулы (2.2) **получаем следующие выражения для проекций ускорения на оси цилиндрической системы координат:**

$$w_\varrho = \ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2, \ w_\varphi = 2\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \varrho\ddot{\varphi}, \ w_z = \ddot{z}. \tag{2.13}$$

Упражнение 2.1. **Найти выражения для скорости и ускорения точки в обобщенных сферических координатах** u, v, w**, задаваемых формулами:**

$$x = au\cos v\sin w, \quad y = bu\sin v\sin w, \quad z = cu\cos w \tag{2.14}$$

при

$$0 \leqslant u < \infty, \ 0 \leqslant v < 2\pi, \ 0 \leqslant w < \pi, \ a, b, c, > 0, \ a \neq b. \tag{2.15}$$

§3. Описание движения точки в естественных координатах

В отличие от криволинейных координат, которые определяются в каких-то областях $D \subset R^n$ при $n = 1, 2, 3$, естественная система координат определяется на траектории движения точки. В этих координатах скорость и ускорение точки имеют понятную геометрическую интерпретацию и простые формулы для соответствующих проекций на оси координат.

Будем предполагать, что траектория движения точки задана параметрически вектор-функцией $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ на некотором промежутке $J \subset R$ времени t.

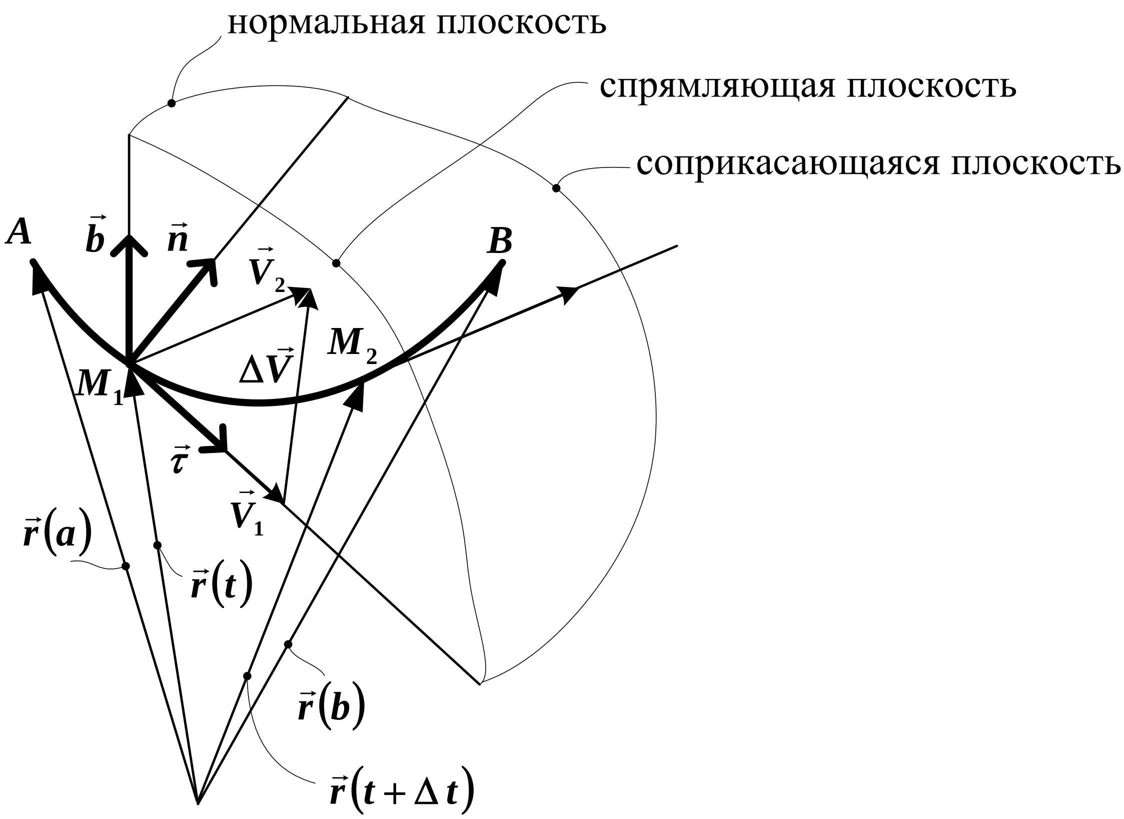


Рисунок 3.1

Пусть $a, b \in J$, $a < b$, а $A = (x(a), y(a), z(a))$, $B = (x(b), y(b), z(b))$ — начало и конец участка траектории AB, соответствующего движению точки (рис. 3.1). Будем предполагать, что на этом участке (то есть при $t \in [a, b]$) функция $\vec{r}(t)$ непрерывно дифференцируема k раз (обычно предполагают, что $k = 2$), причем выполнено условие

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}, \; t \in [a, b]. \tag{3.1}$$

Как известно, при сделанных предположениях, в каждой точке $\vec{r}(t)$ участка AB (который мы будем далее называть регулярным участком траектории) траектория имеет касательную, совпадающую по направлению с вектором скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$. Пусть $a < t < t + \Delta t < b$ и используются обозначения:

$$M_1 = (x(t), y(t), z(t)), \; M_2 = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)),$$

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}(t), \ \vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}(t + \Delta t), \ \Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Упражнение 3.1. Пусть выполнено условие:

(a) никакая часть дуги $\overset{\frown}{AB}$ не является прямолинейной. Показать, что в этом случае плоскость $\Pi(M_1, \vec{v}_1, \Delta\vec{v})$, проходящая через точку M_1 и параллельная векторам $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, имеет предельное положение при $\Delta t \to 0$, то есть имеет предел при $\Delta\vec{v} \to 0$ единичный вектор нормали, определяющий направление этой плоскости (эту предельную плоскость называют *соприкасающейся*).

Далее условие (a) будем считать выполненным, если не оговорено противное. В случае, если условие (a) не выполнено, движение точки на прямолинейных участках естественно рассматривать отдельно.

Теперь введем в рассмотрение ортогональный базис — тройку $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ единичных взаимно-ортогональных векторов (ортов), исходящих из точки M_1, это $\vec{\tau} = \vec{v}/v$ — орт касательной, $\vec{n}$ — орт нормали, определяемый как единичный вектор, ортогональный вектору $\vec{\tau}$, лежащий в соприкасающейся плоскости и ориентированный в направлении вогнутости кривой в точке M_1, и, наконец, $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ — орт бинормали.

Таким образом, с каждой парой $(t, \vec{r}(t))$ мы связали базис — его называют *естественным базисом* (а также естественной системой координат, натуральным базисом и т.п.).

Отметим, что одна и та же точка M траектории может соответствовать нескольким моментам времени в том смысле, что:

$$M = \big(x(t^1), y(t^1), z(t^1)\big) = \big(x(t^2), y(t^2), z(t^2)\big) = \ldots$$

Натуральные системы, отвечающие парам $(t^i, \vec{r}(t^i))$, $i = 1, 2, \ldots$, могут быть различными. Тем самым может оказаться, что точке M пространства, через которую проходит траектория, будет сопоставлено несколько различных базисов. В этой связи напомним, что при введении криволинейных координат мы сопоставляли каждой точке $\vec{r} = (x, y, z)$ некоторой области D пространства R^n, $n = 1, 2, 3$ единственный базис.

Упражнение 3.2.

1. Пусть пространственная кривая задана параметрически через движение $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Получите формулы для ортов $\vec{\tau}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)$.

2. Найти проекции векторов скорости и ускорения на орты $\vec{\tau}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)$ для случая движения $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t \ln t)$.

Разложение скорости по осям естественной системы координат очевидно: $\vec{v} = v\vec{\tau}$. В оставшейся части настоящего параграфа мы получим разложение по этим осям вектора ускорения $\vec{w} = \dot{\vec{v}}$.

Так как $\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta\vec{v}/\Delta t)$, а вектор $\Delta\vec{v}$ лежит в плоскости $\Pi(M_1, \vec{v}_1, \Delta\vec{v})$, то $\vec{w}$ лежит в соприкасающейся плоскости.

Так как

$$\vec{w} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d}{dt}\vec{\tau}, \tag{3.2}$$

а векторы $\vec{w}$ и $\vec{\tau}$ лежат в соприкасающейся плоскости, то и вектор $d\vec{\tau}/dt = v^{-1}(\vec{w} - (dv/dt)\vec{\tau})$ лежит в соприкасающейся плоскости.

Так как

$$0 = \frac{d}{dt}1 = \frac{d}{dt}(\vec{\tau}\vec{\tau}) = 2\vec{\tau}\frac{d}{dt}\vec{\tau}, \tag{3.3}$$

то вектор $d\vec{\tau}/dt$ ортогонален вектору $\vec{\tau}$, а точнее направлен по вектору $\vec{n}$.

Таким образом, из формулы (3.2) получаем:

$$\vec{w} = w_\tau\vec{\tau} + w_n\vec{n} + w_b\vec{b}, \tag{3.4}$$

где

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \; w_n = v\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|, \; w_b = 0. \tag{3.5}$$

Величины $w_\tau\vec{\tau}$, $w_n\vec{n}$ называют *касательным и нормальным ускорениями* (*бинормальное* ускорение $w_b\vec{b}$ равно нулю). Величина w_n может быть выражена через радиус кривизны траектории. Для того, чтобы получить это полезное в приложениях выражение, мы введем последовательно понятия *естественной координаты, угла смежности, кривизны* и *радиуса кривизны.*

Пусть t_0 — фиксированный момент времени, а t — текущий момент, причем $a < t_0 < t < b$. Одно из определений длины дуги

$s = s(t)$ траектории от точки $\vec{r}(t_0)$ до точки $\vec{r}(t)$ следующее:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| \, dt = \int_{t_0}^{t} v(t) \, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} \, dt. \tag{3.6}$$

Если $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t), \Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, то другое, эквивалентное, определение следующее:

$$\Delta\vec{r} = (\Delta s)\vec{\tau} + \vec{o}(\Delta s), \ (\Delta t \to 0). \tag{3.7}$$

Этими формулами мы будем пользоваться. *Естественной координатой* называют длину дуги $s(t)$, отсчитываемую в сторону движения от некоторой точки (выше мы назвали эту точку символом $\vec{r}(t_0)$). Из равенств (3.7) и (3.6) соответственно получаем следующие формулы:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}, \tag{3.8}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \tag{3.9}$$

Углом смежности $\Delta\varphi < \pi$ называют угол между $\vec{\tau}(t)$ и $\vec{\tau}(t+\Delta t)$, отсчитываемый от первого вектора ко второму.

Можно показать, что на регулярном участке траектории существует предел $\lim_{\Delta t \to 0}(\Delta\varphi/\Delta t) = d\varphi/dt$, а тогда существует и величина

$$K = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds} = v^{-1}\frac{d\varphi}{dt}, \tag{3.10}$$

называемая *кривизной траектории* в точке $\vec{r}(t)$. Величину $\varrho = K^{-1}$ называют *радиусом кривизны* траектории в этой точке (для прямолинейных участков траектории радиус кривизны равен, по определению, $+\infty$).

Лемма 3.1.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}. \tag{3.11}$$

Доказательство.

Используя обозначения $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}(t + \Delta t) - \vec{\tau}(t)$, $\vec{m} = \Delta\vec{\tau}/|\Delta\vec{\tau}|$, получаем

$$|\Delta\vec{\tau}| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}, \ \Delta\vec{\tau} = 2\left(\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\vec{m}, \tag{3.12}$$

откуда выводим, что

$$\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{(\Delta\varphi/2)}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{m} \tag{3.13}$$

и, так как при $\Delta t \to 0$ истинны предельные соотношения

$$\Delta\varphi \to 0,\ \sin(\Delta\varphi/2) \to 0,\ \vec{m} \to \vec{n}, \tag{3.14}$$

то из (3.13) при $\Delta t \to 0$ получаем (3.11). Что и требовалось. ■

Теорема 3.1.

$$w_n = v^2/\varrho. \tag{3.15}$$

Доказательство.

Из формул (3.5), (3.11), (3.10) получаем

$$w_n = v\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = v\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Что и требовалось. ■

§4. Определение кривизны траектории точки по движению

Согласно определению, данному в предыдущем пункте, кривизна траектории в точке, имеющей естественную координату s, (см. (3.10)) зависит только от этой координаты и не зависит от выбора параметризации этой траектории. Тем не менее, один из удобных методов нахождения кривизны, *кинематический метод*, использует параметризацию траектории — задание движения точки по траектории как функции времени в декартовых или криволинейных координатах.

Кинематический метод

Пусть движение точки задано тройкой скалярных функций $x(t), y(t), z(t)$. Пусть $v = v(t)$, $w = w(t)$ — модули ее скорости и ускорения. Используя результаты предыдущего параграфа, выписываем следующую цепочку формул для вычисления K, ϱ:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}, \\ w &= \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2 + (\ddot{z}(t))^2}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$w_\tau = \dot{v}, \ w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau{}^2} = v^2/\varrho, \tag{4.2}$$

$$K = v^{-2}\sqrt{w^2 - w_\tau{}^2}, \ \varrho = K^{-1}. \tag{4.3}$$

Пусть теперь движение точки задано тройкой криволинейных координат — скалярных функций $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$, а $v = v(t)$, $w = w(t)$ — попрежнему модули ее скорости и ускорения. В предположении, что эта система координат ортогональна, и используя формулы (1.5), (2.2) для проекций скорости и ускорения точки, получаем:

$$v_{q_m} = H_{q_m}\dot{q}_m, \ w_{q_m} = H_{q_m}{}^{-1}E_{q_m}(T), \ m = 1, 2, 3, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(v_{q_1}(t))^2 + (v_{q_2}(t))^2 + (v_{q_3}(t))^2}, \\ w &= \sqrt{(w_{q_1}(t))^2 + (w_{q_2}(t))^2 + (w_{q_3}(t))^2}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

— теперь по формулам (4.2), (4.3) можно вычислить величины K, ϱ.

§5. Два примера движения точки

Мы рассмотрим примеры, которые позволят сопоставить известные со школы факты с введенными выше понятиями.

Прямолинейное движение

Так называют движение точки, траектория которой лежит на прямой. Начало системы $Oxyz$ поместим на этой прямой, а ось x направим вдоль нее. Тогда получим уравнение траектории:

$$y = 0, \ z = 0 \tag{5.1}$$

и, как следствие, формулы:

$$\begin{aligned} v^2 &= (\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2 = (\dot{x}(t))^2, \\ w^2 &= (\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2 + (\ddot{z}(t))^2 = (\ddot{x}(t))^2, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$w_\tau^2 = (\dot v)^2 = (\ddot x)^2,\ w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = 0, \tag{5.3}$$

$$K = 0,\ \varrho = K^{-1} = +\infty. \tag{5.4}$$

Прямолинейное движение называют *равномерным*, если $v(t) = \alpha$, где α — постоянная. Так как $v(t) = \dot x(t)$, то $x(t) = \alpha t + \beta$, где β — произвольная постоянная. Если $x(t_0) = x_0$, то $x(t) = x_0 + \alpha(t - t_0)$. Если ввести естественную координату $s = |x - x_0|$, то $s = |\alpha(t - t_0)|$. Прямолинейное движение *равнопеременное* при $w(t) = \alpha$, и постоянном α. Из $w(t) = \ddot x(t)$ следует $x(t) = \alpha t^2/2 + \beta t + \gamma$, где β, γ — произвольные постоянные. Если $x(t_0) = x_0,\ \dot x(t_0) = \dot x_0$, то получаем формулу $x(t) = x_0 + \dot x_0(t - t_0) + \alpha(t - t_0)^2/2$. Если ввести естественную координату $s = |x - x_0|$, то $s = |\dot x_0(t - t_0) + \alpha(t - t_0)^2/2|$.

Движение по окружности

Здесь и далее будут использоваться понятия угла и угла поворота.

О понятии угла и угла поворота:

(а) *Углом поворота между векторами* называется вектор

$$\angle(\vec a, \vec b) = \begin{cases} (\arccos(\vec a, \vec b)) \cdot \frac{\vec a \times \vec b}{|\vec a \times \vec b|}, \vec a \nparallel \vec b; \\ \vec 0, \vec a \parallel \vec b, \end{cases}$$

$$\angle(\vec a, \vec b) = -\angle(\vec b, \vec a).$$

(б) *Углом между векторами* $\vec a$ и $\vec b$, или *углом между прямыми*, проходящими через эти векторы (он равен наименьшему из углов между этими прямыми), называем величину $|\angle(\vec a, \vec b)| = \arccos(\vec a, \vec b)$.

(в) Когда говорят об угле между $\vec a$ и $\vec b$, отсчитываемом от $\vec a$ к $\vec b$ или наоборот, то имеют в виду угол поворота $\angle(\vec a, \vec b)$ или $\angle(\vec b, \vec a)$.

Иногда вместо угла поворота $\angle(\vec a, \vec b)$ будем говорить об угле, отсчитываемом от $\vec a$ к $\vec b$.

Движением по окружности называют любое движение точки, траектория которого лежит на окружности. Радиус кривизны, а значит и кривизну окружности радиуса R просто найти, опираясь на определение кривизны через угол смежности.

Пусть Δs — приращение естественной координаты за время движения точки от момента t до момента $t + \Delta t$, а $\Delta\varphi$ — угол смежности за это время.

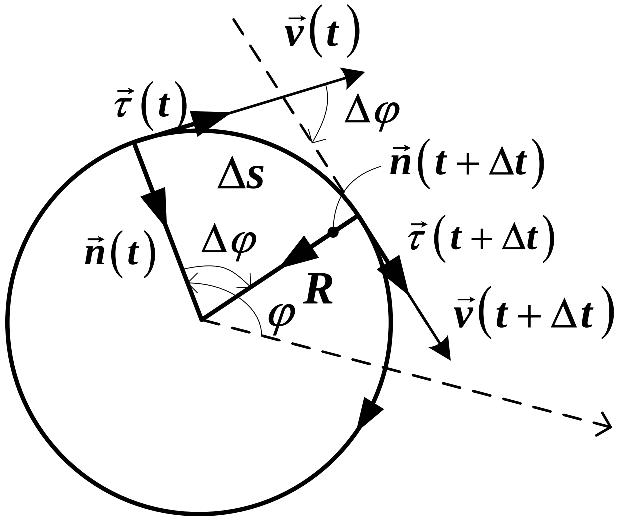


Рисунок 5.1

Так как $\Delta s = R\Delta\varphi$, то устремляя Δt к нулю (а тогда и Δs, $\Delta\varphi$ стремятся к нулю), получаем равенства: $K = d\varphi/ds = \lim\limits_{\Delta s\to 0}(\Delta\varphi/\Delta s) = R^{-1}$, $\varrho = R$.

С движением по окружности связывают векторные величины — угловую скорость и угловое ускорение, которые мы сейчас введем. Движение считаем заданным в цилиндрической системе координат (r, φ, z) равенствами:

$$z = 0,\ r = R,\ \varphi = \varphi(t). \tag{5.5}$$

Здесь полюс системы координат помещен в центр окружности, $z = 0$ — уравнение плоскости, в которой лежит окружность, а φ — полярный угол, отсчитываемый от фиксированного луча, исходящего из полюса и лежащего в этой плоскости. Приращение полярного угла за время Δt есть угол смежности за это время. Так как $v = ds/dt$ (см. (3.6)), то разделив равенство $\Delta s = R\Delta\varphi$ на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем:

$$v = R\dot{\varphi}, \tag{5.6}$$

$$w_\tau = \dot{v} = R\ddot{\varphi}, \tag{5.7}$$

$$w_n = v^2/\varrho = R\dot{\varphi}^2, \tag{5.8}$$

$$\vec{w} = R\ddot{\varphi}\vec{\tau} + R\dot{\varphi}^2\vec{n}. \tag{5.9}$$

Пусть $\vec{e}$ — единичный вектор, параллельный бинормали и исходящий из полюса — центра окружности. Введем в рассмотрение следующие величины:
$\Delta\varphi\vec{e}$ — вектор угла поворота,
$\vec{\omega}_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{e}$ — средняя угловая скорость,
$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}$ — угловая скорость,
$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ — угловое ускорение.

Тогда формулы (5.6)–(5.9) можно переписать в следующем виде:

$$v = R\omega,\ w_\tau = R\varepsilon,\ w_n = R\omega^2, \tag{5.10}$$

$$\vec{w} = R\varepsilon\vec{\tau} + R\omega^2\vec{n}. \tag{5.11}$$

Движение по окружности называют *равномерным вращением*, если $\omega = \omega_0$, где ω_0 — постоянная (не зависит от времени). Так как $\omega = \dot{\varphi}$, то

$$\varphi(t) = \omega_0(t - t_0) + \varphi(t_0),\ \varepsilon = 0,\ w_\tau = 0,\ w_n = R\omega_0^2. \tag{5.12}$$

Движение по окружности называют *равнопеременным вращением*, если $\varepsilon = \varepsilon_0$, где ε_0 — постоянная.

Так как $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, то

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}(t - t_0)^2 + \omega(t_0)(t - t_0) + \varphi(t_0),\ w_\tau = R\varepsilon_0. \tag{5.13}$$

Упражнение 5.1. Движение точки задано в цилиндрических координатах:

$$z = 0,\ r = ae^{bt},\ \varphi = ct, \tag{5.14}$$

где a, b, c — положительные постоянные. Найти уравнение траектории этой точки. Найти скорость и ускорение точки и радиус кривизны траектории как функции аргумента r. Определить зависимость радиуса кривизны от естественной координаты.

ГЛАВА 4. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Модель твердого тела и его движения важна в механике уже потому, что с ними тесно связано понятие аффинной (декартовой) системы координат, а без этого понятия мало что осталось бы от классической механики и ряда других, опирающихся на ее положения, разделов естествознания.

В §1 основные понятия, рассмотренные в предыдущей главе в рамках модели кинематики точки, обобщаются на случай механической системы из конечного или бесконечного множества точек, вводится модель твердого тела, понятие числа степеней свободы положения механической системы и обсуждается вопрос о связи понятий твердого тела, аффинного пространства, аффинных и криволинейных систем координат.

В §2 устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством движений твердого тела и множеством преобразований движения аффинного евклидова пространства, наделенным структурой группы. Это позволяет рассмотреть различные классы движений твердого тела, соответствующие тем или иным подгруппам этой группы. В следующих параграфах главы изучается движение твердого тела для каждой из подгрупп. Общий случай движения твердого тела рассматривается в §7.

§1. Движение механической системы. Твердое тело. Число степеней свободы положения. Аффинное пространство и координаты, связанные с твердым телом

Движение механической системы

Символом T обозначим некоторое множество, далее это будет множество индексов τ, которыми помечены все точки механической системы. Символом J обозначим промежуток на прямой R — далее это будет промежуток времени t, на котором определено движение механической системы.

Как и в модели кинематики точки, пространством будем считать аффинное евклидово пространство E^n, $n = 1, 2, 3$; точку этого пространства будем представлять радиус–вектором $\vec{r}$ в декартовой системе координат и если, например $n = 3$, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты системы

$Oxyz$, то $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Механической системой в момент t_0 или *положением системы в момент* t_0 будем называть семейство $\mathcal{M} = \{M_\tau\}_{\tau \in T}$ точек в E^n, $n = 1, 2, 3$. *Движением этой системы* будем называть семейство $\mathcal{DM} = \{D_\tau : J \to E^n\}_{\tau \in T}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций времени t такое, что

$$(\forall \tau \in T)\,(D_\tau(t_0) = M_\tau). \tag{1.1}$$

Ясно, что положением этой механической системы в любой другой момент $t \in J$ будет семейство $\{D_\tau(t)\}_{\tau \in T}$ значений функций D_τ.

Перемещением механической системы за время от t_1 до t_2 (из положения $\{a_\tau\}_{\tau \in T}$ в положение $\{b_\tau\}_{\tau \in T}$) называют семейство векторов $\left\{\overrightarrow{D_\tau(t_1),\ D_\tau(t_2)}\right\}_{\tau \in T}$ (соответственно, векторов $\left\{\overrightarrow{a_\tau,\ b_\tau}\right\}_{\tau \in T}$).

Твердое тело

Различные множества движений $\mathcal{DM}$ назовем *классами движений*. *Неизменяемой на классе движений* назовем такую механическую систему, что

$$(\forall t \in J)\,(\forall \tau_1, \tau_2 \in T)\,(\varrho(D_{\tau_1}(t), D_{\tau_2}(t)) = \varrho(M_{\tau_1}, M_{\tau_2}). \tag{1.2}$$

для любого движения этого класса. Механическую систему назовем *сплошной связной средой на классе движений*, если каждое ее положение есть область (то есть, открытое связное множество) или замкнутая область в E^n. *Твердым телом* или *абсолютно твердым телом на классе движений* назовем сплошную связную неизменяемую механическую систему на этом классе движений.

Число степеней свободы

Будем говорить, что движение $\mathcal{DM} = \{D_\tau\}_{\tau \in T}$ может быть выражено через систему скалярных функций $q_i : J \to R$, $i = 1, \ldots, m$, если:

$$\begin{gathered}(\forall \tau \in T)\,(\exists (q_1, \ldots, q_m)\ \mapsto f_\tau(q_1, \ldots, q_m))\\ (\forall t \in J)\,(D_\tau(t) = f_\tau(q_1(t), \ldots, q_m(t))).\end{gathered} \tag{1.3}$$

Говорят, что механическая система имеет s *степеней свободы положения на классе движений*, если всякое движение этого класса может быть выражено через некоторую систему скалярных функций $q_i : J \to R$, $i = 1, \ldots, s$ и если хотя бы одно движение этого класса не может быть выражено ни через какую систему из меньшего числа скалярных функций. Если класс движений очевиден из контекста, то говорят просто о *числе s степеней свободы* механической системы. Понятие числа степеней свободы вначале обсудим на примере движений механической системы, состоящей из конечного числа N точек. Такая система на классе всех движений в E^n, $n = 1, 2, 3$ имеет очевидно $s = n \cdot N$ степеней свободы.

Рассмотрим такой подкласс всех движений этой системы, для которых координаты (x_ν, y_ν, z_ν), $\nu = 1, \ldots, N$ ее точек удовлетворяют уравнениям

$$f_\nu(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \ \nu = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

причем функции f_ν аргументов $(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)$ независимы при $t \in J$ (будем считать, что ранг матрицы Якоби этих функций равен m). В этом случае говорят, что рассматривается механическая система из N точек, *стесненная m голономными связями*. Эти и другие виды связей мы обсудим еще при изучении аналитической динамики.

Упражнение 1.1. Механическая система в E^n, $n = 1, 2, 3$ из N точек, стесненная m голономными связями имеет $s = n \cdot N - m$ степеней свободы.

Приведем два примера такой системы.
1. Движению отрезка длиной l в плоскости можно сопоставить механическую систему в E^2, состоящую из двух концевых точек отрезка $M_1 \sim (x_1, y_1)$, $M_2 \sim (x_2, y_2)$ и стесненную одной голономной связью:

$$f = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0.$$

Здесь $n = 2$, $N = 2$, $m = 1$, поэтому $s = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.
2. Движению треугольника в пространстве сопоставим систему в E^3, состоящую из точек $M_1 \sim (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 \sim (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 \sim (x_3, y_3, z_3)$ (вершин треугольника) и стесненную тремя голономными связями:

$$f_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - {l_{1,2}}^2 = 0,$$

$$f_2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - {l_{1,3}}^2 = 0,$$
$$f_2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - {l_{2,3}}^2 = 0,$$

где $l_{1,2}, l_{1,3}, l_{2,3}$ — длины сторон треугольника.

Здесь $n = 3$, $N = 3$, $m = 3$, $s = 3 \cdot 3 - 3 = 6$.

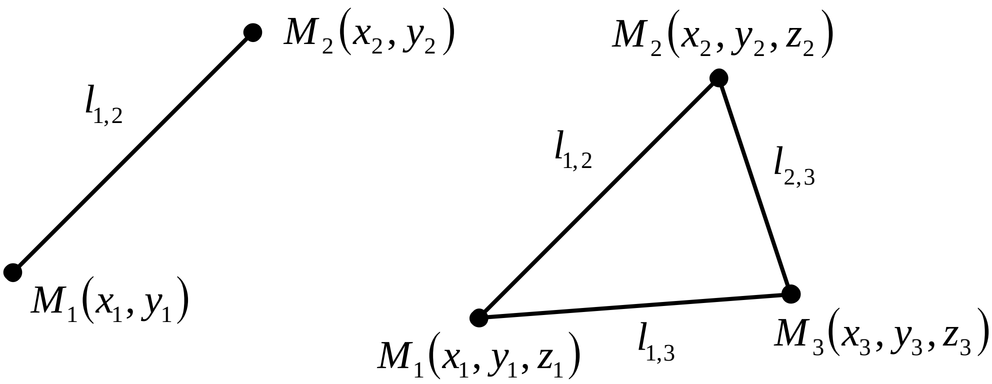


Рисунок 1.1

Упражнение 1.2. Приведите еще несколько подобных примеров.

Вернемся к случаю твердого тела. С твердым телом можно связать ортонормированный репер. Для этого достаточно задать в теле $n+1$ независимые точки (почему это можно сделать?). Во все время движения (то есть при всех $t \in J$) все точки тела будут иметь неизменяемые (то есть не зависящие от $t \in J$) координаты в этом репере. Поэтому для этого частного случая механической системы, твердого тела, используют следующее удобное соглашение: твердое тело отождествляют с упомянутым выше репером (*подвижным репером*) или с экземпляром пространства, определяемым этим репером (*подвижным пространством*). Исходные репер и пространство называют при этом *неподвижным репером* и *неподвижным пространством* соответственно. Можно показать, что для твердого тела на классе всех его движений в E^n, $n = 1, 2, 3$ число степеней свободы положения равно:

$$s = n \cdot (n+1)/2. \tag{1.5}$$

Упражнение 1.3. Докажите равенство (1.5), пользуясь тем, что положение твердого тела можно задать координатами

$n+1$ его независимых точек, и формулой $s = n \cdot N - m$ для механической системы, состоящей из N точек и стесненной m голономными связями.

Теперь обсудим число степеней свободы твердого тела на двух важных классах его движений в E^3. Движение твердого тела называют *поступательным*, если любые два положения в этом движении имеют вид $\left\{O_1 + \sum_{j=1}^{3} x_j{}^{\tau} \vec{e}_j\right\}_{\tau\in T}$ и $\left\{O_2 + \sum_{j=1}^{3} x_j{}^{\tau} \vec{e}_j\right\}_{\tau\in T}$, то есть если у подвижного репера, связанного с этим телом, с течением времени может изменяться только начало репера. Движение твердого тела называют *вращением вокруг точки* O, если любые два его положения имеют вид $\left\{O + \sum_{j=1}^{3} x_j{}^{\tau} \vec{e}_j{}'\right\}_{\tau\in T}$ и $\left\{O + \sum_{j=1}^{3} x_j{}^{\tau} \vec{e}_j{}''\right\}_{\tau\in T}$, то есть если с течением времени не меняются координаты (в неподвижной системе) некоторой точки O этого тела.

Упражнение 1.4. **Найдите число степеней свободы положения твердого тела на этих двух классах движений.**

Об используемых моделях пространства, времени и движения. Аффинное пространство и координаты, связанные с твердым телом

Когда в настоящем курсе классической механики мы говорим о движении механической системы и, в частности, твердого тела, то предполагаем, что речь идет о движении в каком-то аффинном евклидовом пространстве, и что нам известен хотя бы один ортонормированный репер, относительно которого можно рассматривать это движение. Если это предположение выполнено, то несложно построить другие реперы и другие аффинные пространства, но это не избавит нас как от самого предположения, так и от вопроса — откуда берутся или, точнее, что означают с практической точки зрения исходное аффинное пространство и его репер? Здесь мы обсудим этот вопрос.

Мы придерживаемся той точки зрения, что исходные аффинное пространство и репер — это математические модели чего-то "реального", а конкретнее, считаем, что исходное аффинное пространство — математическая модель окружающего нас "реального" пространства, а исходный репер (или декартова система координат) — некоторая математическая конструкция, связанная с "реальным" твердым телом. Введя понятие движения механической системы мы представили его при помощи вектор-функций аргумента, который назвали временем. Естественно считать, что это время — математическая модель "реального" времени. Твердым телом или абсолютно твердым телом (на классе движений) мы назвали сплошную связную неизменяемую механическую систему (на этом классе движений).

Таким образом, мы предполагаем, что относительно "реальных"пространства, времени, тел и их движения имеем достаточное интуитивное представление, чтобы строить те или иные модели классической механики. Выбор моделей определяется не только самими этими представлениями, но и, в частности, соображениями удобства. В этой связи напомним, что выше, помимо только что упомянутого определения твердого тела, мы договорились, ради удобства, отождествлять твердое тело с репером (подвижным репером) или с экземпляром пространства, определяемым этим репером (подвижным пространством). Тем самым мы ввели еще один вариант модели твердого тела, эквивалентный первому. С другой стороны, сама формулировка последней модели содержит в себе ответ на вопрос, который мы здесь обсуждали: как оказалось, в качестве "исходных" аффинного пространства и репера можно взять модель любого "реального" твердого тела. Эту модель твердого тела обычно называют "телом отсчета" или "системой отсчета" (при фиксированных единицах измерения длины и времени). В качестве примера "тела отсчета" рассмотрим простейшую, шаровую, модель Земли.

С моделью Земли в виде шара радиуса R свяжем ортонормированный репер $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ такой, что $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, точка O — центр Земли, $O+R\vec{k}$ — ее северный полюс, а $O+R\vec{i}$, $O+R\vec{j}$ — точки на экваторе. Любую точку M связанного с моделью Земли аффинного пространства E^3 будем представлять радиус-вектором $\vec{r}=(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ в репере $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (или, что фактически то же, в декартовой системе координат $Oxyz$) и, в то же время, это же множество радиус-векторов будем рассматривать как соответствующее векторное евклидово пространство R^3 этого аффинного пространства.

Для рассматриваемой модели Земли в качестве криволинейных координат точки M часто рассматривают ее сферические координаты (r, φ, ϑ), называемые сферическим радиусом, долготой и широтой и задаваемые равенствами $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ при $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

С этими координатами связаны и наиболее известные координаты — географические. Для их введения конкретизируют направление ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, привязывая их не только к плоскости экватора, но еще к одной конкретной точке на реальной Земле — лежащую на экваторе точку $O + R\vec{i}$ выбирают так, что плоскость, проходящая через точки O, $O + R\vec{k}$, $O + R\vec{i}$, содержит и точку, совпадающую со специальной отметкой у Гринвичской обсерватории возле Лондона. Координаты $\vartheta, \varphi - \pi, r - R$ называют тогда географическими широтой, долготой и высотой точки M.

С географическими координатами связаны такие общеизвестные понятия, как меридианы и параллели, северная и южная широты, восточная и западная долготы и их градусное измерение.

Упражнение 1.5. Введите понятия меридианов и параллелей, северной и южной широты, восточной и западной долготы, и их градусное измерение. Приведите также соответствующий рисунок.

§2. Группа движений аффинного евклидова пространства

Предварительные сведения

Здесь мы вспомним начальные сведения из теории групп.

Бинарной алгебраической операцией или *законом композиции на множестве* X называют отображение $\tau : X \times X \to X$. Вместо $\tau(a, b)$ пишут $a\tau b$, например $a*b$, $a\circ b$, $a+b$, $a\cdot b$ (или ab). В последних двух случаях говорят соответственно *о сумме* и *произведении* элементов a и b, то есть законы композиции "$+$" и "$\cdot$" называют суммой и произведением. Если "$*$" — закон композиции на X, то пару $(X, *)$ называют *алгебраической системой* или *алгебраической структурой*. Чаще говорят просто об алгебраической системе X. Если $(\forall a, b, c \in X)\,(a * (b * c) = (a * b) * c)$, то закон "$*$" называется *ассоциативным*. Если закон композиции "$*$" ассоциативен, то алгебраическую систему $(X, *)$ называют *полугруппой*.

Элемент $e \in X$ называется *единичным* или *нейтральным* относительно закона композиции "$*$", если $(\forall x \in X)\,(e*x = x*e = x)$. В алгебраической системе не может быть более одного единичного элемента. Полугруппу с единицей называют *моноидом*. Элемент a моноида $(X, *, e)$ называют *обратимым*, если $(\exists b \in X)\,(a*b = b*a = e)$. Для элемента b такого, что $a * b = b * a = e$, используют обозначение a^{-1}. Моноид, все элементы которого обратимы называют *группой*. Закон композиции "$*$" называется *коммутативным*, если $(\forall a, b \in X)\,(a * b = b * a)$. Группу с коммутативным законом композиции называют *абелевой* (или *коммутативной*) группой.

Если $(G, *)$ (или просто G) — группа, e — ее единица и выполнены условия $H \subset G$, $e \in H$, $(h_1, h_2 \in H) \Rightarrow (h_1 * h_2 \in H)$, $(h \in H) \Rightarrow (h^{-1} \in H)$, то $(H, *|_H)$ (или просто H) называется *подгруппой группы* G.

Важнейшие для нас примеры групп — *группы преобразований*. Пусть $s(\Omega)$ — множество всех биективных отображений $f : \Omega \to \Omega$. На этом множестве в качестве закона композиции можно задать суперпозицию отображений. Точнее говоря, в качестве закона композиции τ можно взять отображение $\tau : s(\Omega) \times s(\Omega) \to s(\Omega)$ такое, что $(\forall f, \varphi \in s(\Omega))\,(\tau(f, \varphi) = f \circ \varphi)$, где $(\forall x \in \Omega)\,((f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)))$. Оказывается, что $s(\Omega)$ с таким законом композиции — группа, причем ее единицей является тождественное отображение, то есть отображение $id_\Omega : \Omega \to \Omega$ такое, что $(\forall x \in \Omega)\,(id_\Omega(x) = x)$.

Группа движений твердого тела

Вернемся к движению механической системы в E^3. Мы определили его как семейство $\mathcal{DM} = \left\{D_\tau : J \to E^3\right\}_{\tau \in T}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, где каждая функция D_τ определяет движение одной точки M_τ механической системы $\mathcal{M}$. Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — некоторый фиксированный репер в E^3 (неподвижный репер) и пусть

$$D_\tau(t) = O + \sum_{j=1}^{3} x_j^\tau(t)\vec{e}_j, \ \tau \in T. \tag{2.1}$$

Так как свободное твердое тело (т.е. твердое тело на классе всех движений в E^3) имеет шесть степеней свободы, то функции x_j^τ аргумента $t \in J$ могут быть выражены через какие-то шесть скалярных функций $q_1(t), \ldots, q_6(t)$ (см. (1.3)). Мы сделаем это сейчас, и покажем тем самым еще раз, что свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы положения.

Напомним, что под твердым телом мы понимаем подвижный экземпляр пространства или подвижный репер (см. §1). Четыре точки M_0, M_1, M_2, M_3 тела выберем так, чтобы векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$, $\overrightarrow{M_0M_3}$ образовывали ортонормированный базис $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ пространства R^3. Для этого достаточно взять в качестве M_0 любую точку твердого тела и положить $M_k = M_0 + \vec{i}_k$, $k = 1, 2, 3$.

Каждая точка M_τ твердого тела определяется своими аффинными координатами в репере $(M_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$:

$$M_\tau = M_0 + \sum_{j=1}^{3} y_j^\tau \vec{i}_j, \tag{2.2}$$

причем координаты y_j^τ не зависят от времени $t \in J$.

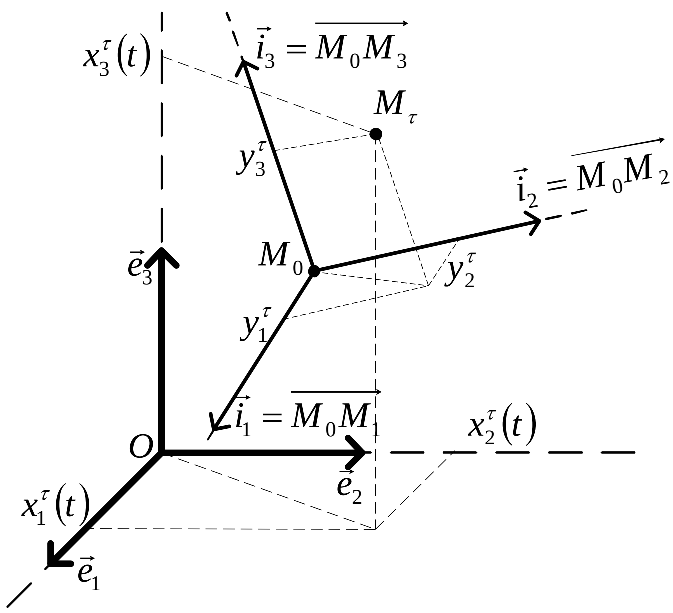


Рисунок 2.1

Формулы (2.1), (2.2) дают представление одной и той же точки M_τ в двух реперах — неподвижном и подвижном (рис. 2.1). Векторы $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, построенные по движущимся точкам M_0, M_1, M_2, M_3, являются функциями времени:

$$\vec{i}_j = \vec{i}_j(t),\ j = 1, 2, 3.$$

Ортонормированные базисы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{i}_1(t), \vec{i}_2(t), \vec{i}_3(t))$ пространства R^3 при любом $t \in J$ связаны равенствами:

$$\vec{i}_k = \sum_{j=1}^{3} p_{k,j}(t)\vec{e}_j,\ k = 1, 2, 3, \tag{2.3}$$

где матрица $P = P(t) = (p_{k,j})$ ортогональна:

$$P^{-1} = P^T,\ \det P = \pm 1. \tag{2.4}$$

Будем считать, что $\det P = 1$. Как мы знаем, в этом случае говорят, что базисы одинаково ориентированы. Если D_{M_0} — движение точки M_0 и

$$D_{M_0}(t) = O + \sum_{j=1}^{3} a_j(t)\vec{e}_j, \tag{2.5}$$

то, в соответствии с формулами (2.10), (2.11) главы 1 получаем:

$$x_j^\tau(t) = a_j(t) + \sum\nolimits_{k=1}^{3} p_{k,j}(t)\, y_k^\tau,\ j = 1, 2, 3, \tag{2.6}$$

$$y_j^\tau = \sum\nolimits_{k=1}^{3} p_{j,k}(x_k^\tau - a_k(t)),\ j = 1, 2, 3. \tag{2.7}$$

Как известно, все элементы $p_{k,j}$ ортогональной матрицы P могут быть выражены через три угла поворота (позже, при рассмотрении движения твердого тела вокруг неподвижной точки, мы выразим эти величины через так называемые углы Эйлера φ, ψ, θ). Если это сделано, то формулы (2.6) дают искомое представление для функций x_j^τ через шесть функций времени $a_1, a_2, a_3, \varphi, \psi, \theta$.

Предположим теперь, что в момент $t_0 \in J$ подвижный репер $(M_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ совпадает с неподвижным репером $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и, при каждом фиксированном $t \in J$, рассмотрим отображение $D : E^3 \to E^3$, сопоставляющее по формуле (2.6) каждой точке $M_\tau(t_0) = O + \sum_{j=1}^{3} y_j^\tau \vec{e}_j$ точку $M_\tau(t) = O + \sum_{j=1}^{3} x_j^\tau \vec{e}_j$. Это отображение, очевидно, является биекцией E^3 на E^3.

Подытожим полученное. Всякое движение твердого тела может быть задано через шесть скалярных функций $a_1, a_2, a_3, \varphi, \psi, \theta$ по формулам (2.6), а значит всякому перемещению соответствует преобразование $D : E^3 \to E^3$, определяемое формулами (2.6). Задавая всевозможные движения (то есть задавая всевозможные функции $a_1, a_2, a_3, \varphi, \psi, \theta$) и фиксируя всевозможные моменты $t \in J$, мы будем получать те или иные перемещения твердого тела (за время от t_0 до t) и соответствующие ему биекции $D : E^3 \to E^3$. Семейство D_3 всех таких биекций оказывается подгруппой группы $s(E^3)$, ее называют группой движений в E^3 (естественней было бы назвать ее группой перемещений в E^3).

Упражнение 2.1. Докажите, что D_3 является подгруппой группы $s(E^3)$.

Указание:

Свойства $id_{E^3} \in \mathrm{D}_3$, $(D_1, D_2 \in \mathrm{D}_3) \Rightarrow (D_1 \circ D_2 \in \mathrm{D}_3)$, $(D \in \mathrm{D}_3) \Rightarrow (D^{-1} \in \mathrm{D}_3)$ геометрически очевидны, если учесть, что тождественное преобразование id_{E^3} пространства E^3 соответствует частному случаю перемещения тела — такому, что начальное и конечное положения каждой его точки совпадают, композиция $D_1 \circ D_2$ соответствует двум последовательным перемещениям, а D^{-1} — обратному перемещению из конечного положения в исходное.

Подгруппы движений

В механике изучают различные подгруппы группы D_3. Мы рассмотрим четыре из них. Вначале уточним обозначения. Символы $x_j^\tau(t), D_\tau(t)$, соответствующие точке M_τ, не всегда удобны и мы используем также очевидные обозначения $x_j^{M_\tau}(t), x_j^{M_0}(t), D_{M_0}(t), \ldots$ (см. (2.5)). Символом $M_0(t)$ будем обозначать образ точки M_0 в ее движении, то есть величину $D_{M_0}(t) = O + \sum_{j=1}^{3} x_j^{M_0} \vec{e}_j$ (см. (2.1)). Будем использовать также ранее введенные символы $\vec{i}_k(t) = \overrightarrow{M_0 M_k}$ для ортов ортонормированного репера $(M_0(t), \vec{i}_1(t), \vec{i}_2(t), \vec{i}_3(t))$, жестко связанного с телом. Напомним, что орты $\vec{i}_k(t), k = 1, 2, 3$ связаны с неподвижными ортами $\vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$ равенствами (2.3), где P — ортогональная матрица (см. (2.4)), и $M_0(t_0) = O$, $\vec{i}_k(t_0) = \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Напомним также, что в формулах (2.5)–(2.7) величины $x_j^{M_0}(t)$ обозначались $a_j(t)$. Перейдем к обсуждению *подгрупп движений.*

Если орты $\vec{i}_k(t), k = 1, 2, 3$ не зависят от времени $t \in J$, то есть если матрица $P(t)$ постоянна, то движение твердого тела называют *поступательным* (это определение, очевидно, эквивалентно тому, которое мы дали в конце §1). Так как $P(t_0) = E$, то $P(t) = E$ при всех $t \in J$, и из равенств (2.6) для поступательного движения получаем формулы:

$$x_j^\tau(t) = a_j(t) + y_j^\tau,\ j = 1, 2, 3,\ \tau \in T. \tag{2.8}$$

Из этих формул следует, что каждое поступательное движение твердого тела может быть задано тремя скалярными функциями. Каждому перемещению за время от t_0 до t в этом движении по формуле (2.8) соответствует биекция $D : E^3 \to E^3$, $(y_1^\tau, y_2^\tau, y_3^\tau) \xmapsto{D} (x_1^\tau(t), x_2^\tau(t), x_3^\tau(t))$. Множеству всевозможных перемещений при всевозможных поступательных движениях твердого тела соответствует некоторое множество D_3^1 таких биекций: будем говорить о нем как о *множестве перемещений твердого тела, соответствующих преобразованиям вида* (2.8).

Упражнение 2.2. Докажите, что множество D_3^1 перемещений твердого тела, соответствующих преобразованиям вида (2.8), является абелевой подгруппой группы D_3.

Подгруппу D_3^1 называют *подгруппой сдвигов*.

Если в пространстве, связанном с твердым телом, существует прямая l, все точки которой имеют неизменные координаты в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ при $t \in J$, то такое движение твердого тела называют *вращением вокруг неподвижной оси* l.

Центр O репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ поместим в некоторую фиксированную точку оси l и орт $\vec{e}_1$ направим вдоль l. Символом $\varphi = \varphi(t)$ обозначим угол между ортами $\vec{e}_2$ и $\vec{i}_2$.

Упражнение 2.3. Покажите, что при этих условиях и обозначениях формулы (2.6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1^\tau(t) \\ x_2^\tau(t) \\ x_3^\tau(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi(t) & \sin\varphi(t) \\ 0 & -\sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^\tau \\ y_2^\tau \\ y_3^\tau \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

По аналогии с множеством D_3^1 введем в рассмотрение множество D_3^2 перемещений твердого тела, соответствующих преобразованиям вида (2.9).

Упражнение 2.4. Докажите, что множество D_3^2 перемещений твердого тела, соответствующих преобразованиям вида (2.9), является абелевой подгруппой группы D_3.

Подгруппу D_3^2 называют *подгруппой вращений вокруг оси.*

Пусть α — плоскость в неподвижном пространстве. Символом $Q(\alpha, t_0)$ обозначим сечение твердого тела плоскостью α в момент $t_0 \in J$. Уточним, что $Q(\alpha, t_0)$ — это плоская фигура, состоящая из точек твердого тела, имеющих неизменные координаты в подвижной системе координат. *Плоским* или *плоско-параллельным движением твердого тела* называют его движение, при котором в неподвижном пространстве существует плоскость α такая, что сечение $Q(\alpha, t)$ принадлежит α при всех $t \in J$. Плоскость α называют *плоскостью параллелизма*. Если начало O неподвижного репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ вместе с ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ поместить в плоскость α, то формулы (2.6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1^\tau(t) \\ x_2^\tau(t) \\ x_3^\tau(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & 0 \\ p_{2,1} & p_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^\tau \\ y_2^\tau \\ y_3^\tau \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Множество D_3^3 перемещений твердого тела, соответствующих преобразованиям (2.10), — подгруппа группы D_3, так как она изоморфна группе D_2.

Если в твердом теле существует точка C, координаты которой неизменны в неподвижном репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ при $t \in J$, то такое движение твердого тела называют *вращением вокруг неподвижной точки* C (это определение, очевидно, эквивалентно тому, которое мы дали в конце §1). Если начало O репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ поместить в точку C, то формула (2.6) запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1^\tau(t) \\ x_2^\tau(t) \\ x_3^\tau(t) \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} y_1^\tau \\ y_2^\tau \\ y_3^\tau \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Упражнение 2.5. Докажите, что множество D_3^4 перемеще-

ний твердого тела, соответствующих преобразованиям вида (2.11), является абелевой подгруппой группы D_3.

D_3^4 называют *подгруппой вращений вокруг неподвижной точки* C.

§3. Поступательное движение твердого тела

Закрепленные и свободные векторы

Напомним понятие закрепленного вектора (см. §1 главы 1). Если A — точка аффинного пространства E^n, а $\vec{a}$ — вектор связанного с ним векторного пространства R^n, то пару $(A, \vec{a})$ называют *вектором* $\vec{a}$, *закрепленным в точке* A (или *приложенным к точке* A). Каждому закрепленному вектору $(A, \vec{a})$ соответствует упорядоченная пара точек $(A, A+\vec{a})$, и каждой упорядоченной паре точек (A, B) соответствует закрепленный вектор $(A, \overrightarrow{AB})$. Поэтому закрепленным вектором называют также упорядоченную пару точек аффинного пространства. Вместо того, чтобы говорить о закрепленном векторе $(A, \overrightarrow{AB})$, будем также говорить о закрепленном векторе $\overrightarrow{AB}$ или (A, B). Заметим однако, что обозначение $\overrightarrow{AB}$ для закрепленного вектора $(A, \overrightarrow{AB})$ может привести к недоразумению — см., например, равенство (3.1). Закрепленный вектор $\overrightarrow{AB}$ обычно изображают на рисунке стрелкой от A к B и называют направленным отрезком. В противоположность названию закрепленный вектор, для векторов из R^n используют название *свободный вектор*. Отличие закрепленных векторов от свободных иллюстрирует рис. 3.1.

Поступательное движение твердого тела

Движение твердого тела называют поступательным, если

$$(\forall t_1, t_2 \in J)\left(\overrightarrow{A(t_1)B(t_1)} = \overrightarrow{A(t_2)B(t_2)}\right) \tag{3.1}$$

для любой пары произвольно выбранных несовпадающих точек A, B этого тела (пространства, связанного с телом). Иначе говоря, движение твердого тела называют *поступательным*, если направленный отрезок, соединяющий любые две несовпадающие точки этого тела, перемещается параллельно самому себе во все время

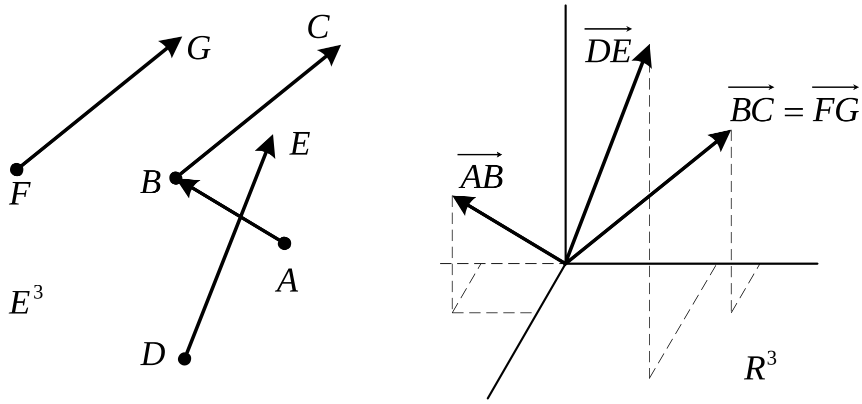


Рисунок 3.1

движения. Это — второе определение поступательного движения твердого тела, первое мы дали в §2. Докажем их эквивалентность. а) Пусть движение тела является поступательным в смысле первого определения. Пусть, как и в §2, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(M_0(t), \vec{i}_1(t), \vec{i}_2(t), \vec{i}_3(t))$ — неподвижный и подвижный репер. Если y_j^A, y_j^B, $j = 1, 2, 3$ — координаты точек A и B в подвижном репере, то

$$A(t) = M_0(t) + \sum_{j=1}^{3} y_j^A \vec{i}_j(t), \quad B(t) = M_0(t) + \sum_{j=1}^{3} y_j^B \vec{i}_j(t), \tag{3.2}$$

или, иначе:

$$\overrightarrow{M_0(t)A(t)} = \sum_{j=1}^{3} y_j^A \vec{i}_j(t), \quad \overrightarrow{M_0(t)B(t)} = \sum_{j=1}^{3} y_j^B \vec{i}_j(t), \tag{3.3}$$

Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$ для любых точек аффинного пространства, то, используя равенства (3.3), получаем:

$$\overrightarrow{A(t)B(t)} = \sum\nolimits_{j=1}^{3} (y_j^B - y_j^A) \vec{i}_j(t). \tag{3.4}$$

Согласно первому определению поступательного движения, векторы $\vec{i}_j(t)$ не зависят от $t \in J$, поэтому и вектор $\overrightarrow{A(t)B(t)}$ не зависит от $t \in J$. В силу произвольности выбора точек A и B, это

означает, что движение твердого тела является поступательным и в смысле второго определения.
б) Если движение тела является поступательным в смысле второго определения, то, в частности, каждый из трех векторов $\vec{i}_j(t) = \overrightarrow{M_0(t)M_j(t)}$, $j = 1,2,3$ является постоянным при $t \in J$, то есть движение поступательно и в смысле первого определения.

Теорема 3.1. Поступательное движение твердого тела обладает следующими свойствами:
$\alpha)$ **положение тела определяется положением любой его точки;**
$\beta)$ **перемещения всех точек тела за время от t_0 до t_1 равны между собой;**
$\gamma)$ **скорости всех точек тела равны между собой;**
$\delta)$ **ускорения всех точек тела равны между собой;**
$\varepsilon)$ **твердое тело на классе поступательных движений имеет три степени свободы.**

Доказательство.

$\alpha)$ Прежде всего отметим, что для того, чтобы идентифицировать точки тела, достаточно задать их координаты в подвижном репере. Положение твердого тела в момент t в неподвижном репере задается семейством $\{(x_1^\tau(t), x_2^\tau(t), x_3^\tau(t))\}_{\tau\in T}$. Если задано положение $(x_1^A(t), x_2^A(t), x_3^A(t))$ одной его точки A, имеющей в подвижном репере координаты (y_1^A, y_2^A, y_3^A), то используя равенства (2.8) для координат точки A, получаем:

$$a_j(t) = x_j^A(t) - y_j^A,\ j = 1,2,3. \tag{3.5}$$

Подставляя выражения $a_j(t)$ в формулу (2.8), находим для любой точки тела искомое выражение ее координат $x_j^\tau(t)$ через известные ее координаты y_j^τ в подвижном репере и известные координаты $x_j^A(t)$ и y_j^A точки A:

$$x_j^\tau(t) = x_j^A(t) - y_j^A + y_j^\tau,\ j = 1,2,3,\ \tau \in T. \tag{3.6}$$

$\beta,\gamma,\delta)$ Согласно определению, движение, скорость и ускорение точки M_τ, имеющей координаты $x_1^\tau(t), x_2^\tau(t), x_3^\tau(t)$ в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, — это вектор-функции $\vec{r}^{\,\tau}(t) = (x_1^\tau(t), x_2^\tau(t), x_3^\tau(t))$,

$\vec{v}^{\,\tau}(t) = \dot{\vec{r}}^{\,\tau}(t)$, $\vec{w}^{\,\tau}(t) = \ddot{\vec{r}}^{\,\tau}(t)$ соответственно. Поэтому из равенств (3.6) получаем (при очевидных обозначениях):

$$\vec{r}^{\,\tau}(t_1) - \vec{r}^{\,\tau}(t) = \vec{r}^{\,A}(t_1) - \vec{r}^{\,A}(t),\ \vec{v}^{\,\tau}(t) = \vec{v}^{\,A}(t),\ \vec{w}^{\,\tau}(t) = \vec{w}^{\,A}(t), \quad (3.7)$$

откуда и следуют свойства β, γ, δ.

Доказанные свойства геометрически очевидны, см. рис. 3.2. ■

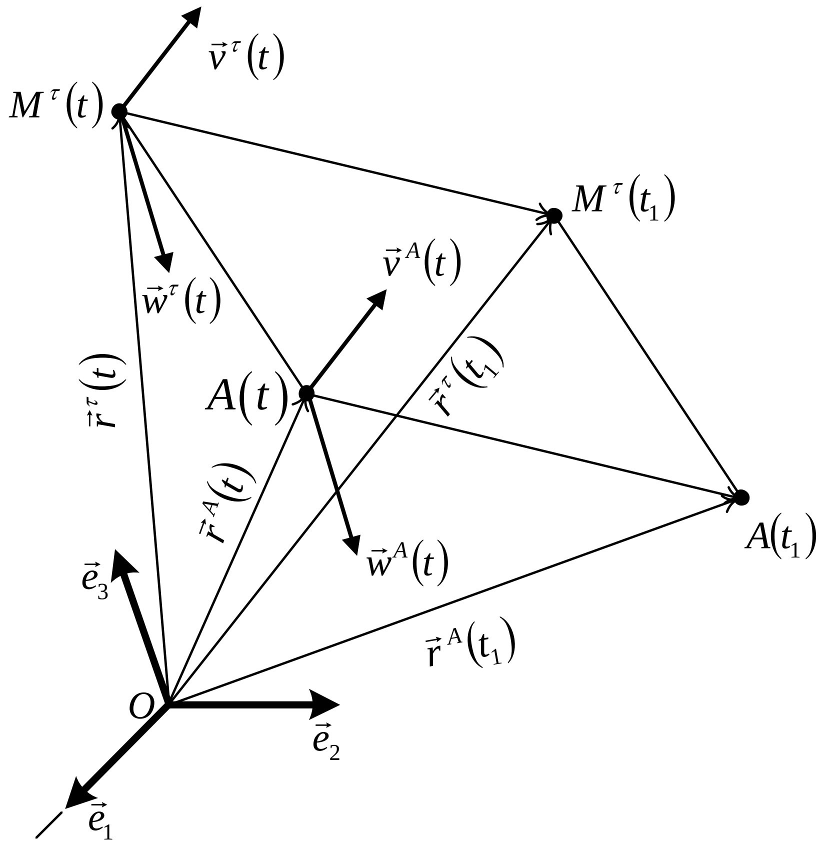


Рисунок 3.2

§4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

В §2 вращением вокруг неподвижной оси мы назвали такое движение твердого тела, для которого в пространстве, связанном с этим телом, существует прямая (ось вращения), все точки которой имеют неизменные координаты в неподвижном репере. Пусть O, O_1 — две различные точки оси вращения. В качестве ортонормированного репера, жестко связанного с телом, возьмем $(O, \vec{i}_1(t), \vec{i}_2(t), \vec{i}_3(t))$, где $\vec{i}_1(t) = \overrightarrow{OO_1}/|\overrightarrow{OO_1}|$. Его можно представить себе как тройку приложенных к точке O единичных взаимно ортогональных и жестко связанных с телом векторов, первый из которых направлен вдоль $\overrightarrow{OO_1}$. За неподвижный репер возьмем $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (O, \vec{i}_1(t_0), \vec{i}_2(t_0), \vec{i}_3(t_0))$, где $t_0 \in J$, а J — промежуток времени, на котором рассматривается движение.

Как мы установили в §2, в этом случае вращению твердого тела вокруг оси соответствуют преобразования координат по формулам (2.9). Если точка M тела имеет координаты y_1, y_2, y_3 и $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ в подвижном и неподвижном реперах соответственно, то из этих формул можно получить равенство $x_2^2(t) + x_3^2(t) = y_2^2 + y_3^2$. Это означает, что траектория любой точки твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси есть окружность с центром на оси вращения, что геометрически очевидно (рис. 4.1).

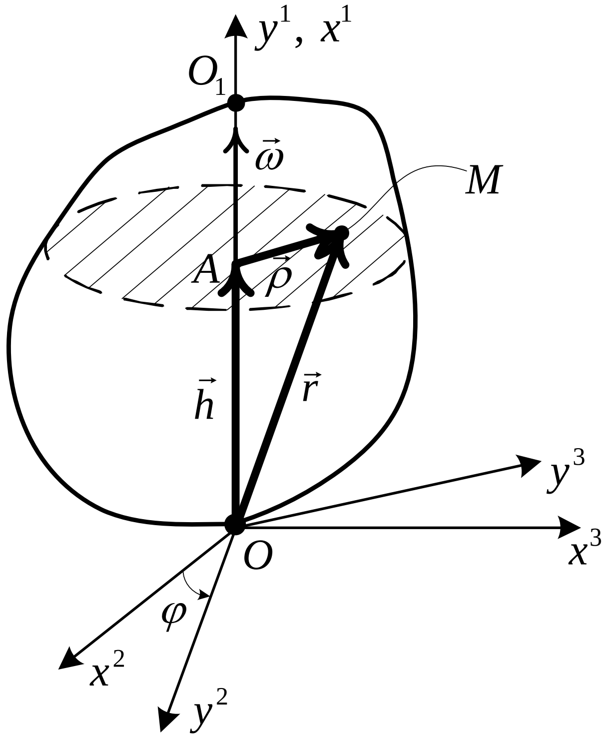


Рисунок 4.1

В §5 главы 3 мы рассмотрели движение точки по окружности. Эти результаты можно использовать и здесь для нахождения скоростей и ускорений точек твердого тела.

Пусть A — точка пересечения оси вращения с плоскостью, перпендикулярной этой оси вращения и проходящей через точку M тела. Пусть $\vec{\varrho} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{h} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ и введем в рассмотрение векторы: скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ точки M, угла поворота $\overrightarrow{\Delta\varphi} = (\Delta\varphi)\vec{i}_1$ и угловой скорости $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{i}_1 = \lim_{\Delta t\to 0}(\overrightarrow{\Delta\varphi}/\Delta t)$.

Теорема 4.1. **В принятых обозначениях истинны формулы:**

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{\Delta\varphi} \times \vec{r} + \vec{o}(\Delta t) \ \textbf{при} \ \Delta t \to 0, \tag{4.1}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \ \textbf{(формула Эйлера)}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Вторая из формул следует из первой, которую мы и докажем. Так как $\Delta s = \varrho\Delta\varphi$, то из формулы $\Delta\vec{r} = (\Delta s)\vec{\tau} + \vec{o}(\Delta s)$ $(\Delta t \to 0)$ (см. (3.7) главы 3) следует, что $\Delta\vec{r} = (\varrho\Delta\varphi)\vec{\tau} + \vec{o}(\Delta s) = \overrightarrow{\Delta\varphi} \times \vec{\varrho} + \vec{o}(\Delta t)$ $(\Delta t \to 0)$. Используя равенства $\vec{r} = \vec{h} + \vec{\varrho}$, $\overrightarrow{\Delta\varphi} \times \vec{h} = \vec{0}$ получаем: $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{\Delta\varphi} \times (\vec{r} - \vec{h}) + \vec{o}(\Delta t) = \overrightarrow{\Delta\varphi} \times \vec{r} + \vec{o}(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$. Что и требовалось. ■

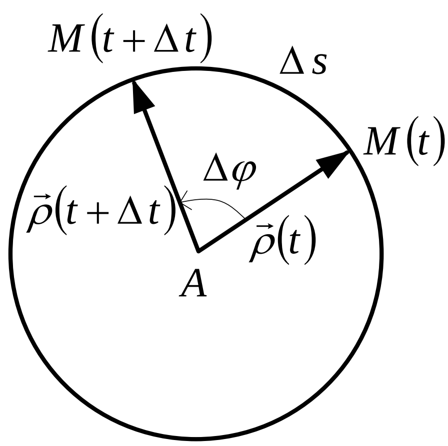


Рисунок 4.2

Заметим, что угловая скорость $\vec{\omega}$ не зависит от выбора точки твердого тела, поэтому она называется *угловой скоростью твердого* *тела* в момент t при его вращении вокруг неподвижной оси.

§5. Плоское движение твердого тела

Преобразование координат в плоском движении

Изменим некоторые обозначения по сравнению с §1. Точку M_τ твердого тела будем обозначать просто M, имея в виду, что это его произвольная точка. Координаты $(x_1^\tau, x_2^\tau, x_3^\tau)$, $(y_1^\tau, y_2^\tau, y_3^\tau)$ в неподвижном репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и подвижном репере $(M_0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ будем обозначать теперь (ξ, η, ζ) и (x, y, z) соответственно. Сами реперы также будем обозначать иначе: $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ и $(M_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Как мы уже говорили в §2, *плоским* или *плоско-параллельным* называют такое движение твердого тела, при котором в неподвижном пространстве существует плоскость α (*плоскость параллелизма*) такая, что сечение $Q(\alpha, t_0)$ (состоящее из точек твердого тела, лежащих в α в момент $t_0 \in J$) принадлежит α при всех $t \in J$ (см. рис. 5.1)

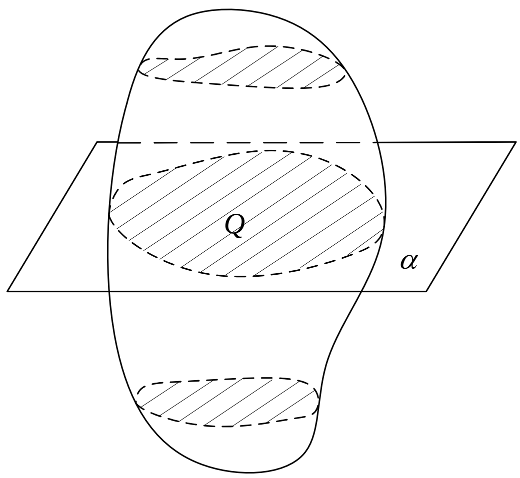


Рисунок 5.1

Начало O неподвижного репера вместе с исходящими из него ортами $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ поместим в эту плоскость. Если, как и в §2, предположить, что

$$\vec{i}(t_0) = \vec{e}_\xi,\ \vec{j}(t_0) = \vec{e}_\eta,\ \vec{k}(t_0) = \vec{e}_\zeta, \tag{5.1}$$

то окажется, что начало $M_0(t)$ подвижной системы и ее орты $\vec{i}(t), \vec{j}(t)$ также лежат в плоскости α. Здесь мы не будем предполагать, что выполнено условие (5.1), а просто поместим начало $M_0(t_0)$ и орты $\vec{i}(t_0), \vec{j}(t_0)$ в плоскость α, тогда они будут оставаться там при всех $t \in J$.

Как следует из формулы (2.10), связь между координатами точки M в подвижном и неподвижном репере следующая:

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & 0 \\ p_{2,1} & p_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Мы видим, что координата ζ остается постоянной во времени, а преобразование координат ξ, η происходит по формулам:

$$\xi = a_1 + p_{1,1}x + p_{1,2}y, \;\; \eta = a_2 + p_{2,1}x + p_{2,2}y. \tag{5.3}$$

Формулы (5.3) дают связь между координатами ξ, η и x, y точки M тела, лежащей в плоскости α.

Таким образом, при изучении плоского движения твердого тела можно ограничиться рассмотрением движения плоской фигуры Q на плоскости α, то есть твердого тела в E^2. Для того, чтобы найти $a_i, p_{i,j}$, получим связь между ξ, η и x, y непосредственно для плоского движения.

Полагая $\vec{\varrho} = \overrightarrow{M_0M}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, получаем $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\varrho}$ (рис. 5.2). Проектируя это равенство на неподвижные оси приходим к искомым соотношениям:

$$\xi = \xi_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi, \;\; \eta = \eta_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi, \tag{5.4}$$

где $(\xi_0, \eta_0) \sim M_0$, а φ — угол между $\vec{e}_\xi$ и $\vec{i}$ (отсчитываемый от $\vec{e}_\xi$).

Из формул (5.4) следует, что координаты ξ, η любой точки M твердого тела вполне определяются положением направленного отрезка $(M_0, M_0 + \vec{i})$. Действительно, если, например, это положение задано координатами концов отрезка, то тем самым заданы и величины ξ_0, η_0, φ. С большей общностью можно сказать, что координаты ξ, η любой точки M твердого тела вполне определяются положением любого направленного отрезка (A, B), принадлежащему этому телу (сечению Q тела плоскостью α), то есть при изучении плоского движения твердого тела можно ограничиться рассмотрением движения любого отрезка (A, B) при $A \neq B$ в пространстве E^2.

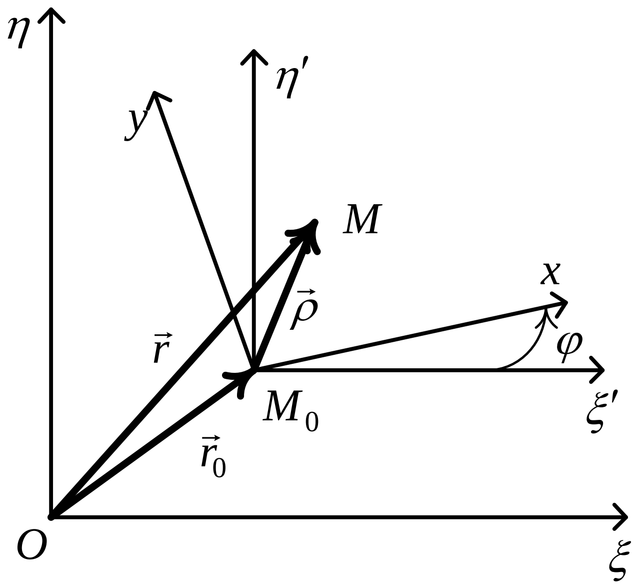


Рисунок 5.2

Две геометрические теоремы о плоском движении

В теоремах настоящего параграфа речь пойдет о перемещениях твердого тела, поэтому вспомним вначале это понятие. В §1 мы сказали, что перемещением механической системы за время от t_1 до t_2 (из положения $\{a_\tau\}_{\tau\in T}$ в положение $\{b_\tau\}_{\tau\in T}$) называют семейство векторов $\{\overrightarrow{D_\tau(t_1), D_\tau(t_2)}\}_{\tau\in T}$ (соответственно, семейство векторов $\{\overrightarrow{a_\tau, b_\tau}\}_{\tau\in T}$). Если воспользоваться понятием закрепленного вектора, то в приведенном определении вместо семейства векторов можно говорить о семействе закрепленных векторов. Кроме того, в §2 мы выяснили, что всякому перемещению механической системы — твердого тела соответствует преобразование $D: E^3 \to E^3$ по формуле (2.6).

Определим композицию перемещений механической системы. Если перемещения — преобразования D^1, D^2, то их композицией $D^1 \circ D^2$ (или $D^2 \circ D^1$) называют суперпозицию этих преобразований. Композицией $\Pi_2 \circ \Pi_1$ перемещений $\Pi_1 = \{\overrightarrow{a_\tau, b_\tau}\}_{\tau\in T}$, $\Pi_2 = \{\overrightarrow{b_\tau, c_\tau}\}_{\tau\in T}$ будем называть также перемещение $\{\overrightarrow{a_\tau, c_\tau}\}_{\tau\in T}$. Нам потребуется два специальных вида плоских перемещений твердого тела, то есть его перемещений в E^2: поступательное перемещение и поворот вокруг точки (полюса). Говорят, что *переме-*

щение твердого тела является поступательным (*поворотом вокруг полюса — точки* C), если из положения $\{a_\tau\}_{\tau\in T}$ в положение $\{b_\tau\}_{\tau\in T}$ оно может перейти, двигаясь поступательно (соответственно, вращаясь вокруг C).

Пусть $\overrightarrow{C_1, C_2}$ — перемещение точки C твердого тела при его движении из положения $\{a_\tau\}_{\tau\in T}$ в положение $\{b_\tau\}_{\tau\in T}$. Тогда поступательное перемещение $\{a_\tau, \overrightarrow{a_\tau + C_1, C_2}\}_{\tau\in T}$ будем называть *поступательным перемещением твердого тела вместе с точкой* C.

Теорема 5.1. (Шаль) Пусть Π — некоторое перемещение твердого тела в E^2 (то есть плоское перемещение). Пусть C — произвольная точка этого тела в E^2 (под телом здесь понимается экземпляр E^2, жестко связанный с телом), а C_1, C_2 — ее начальное и конечное положения в перемещении Π. Тогда:

1. Перемещение Π можно представить в виде композиции

$$\Pi = \Pi_{\textbf{пост}}(C) \circ \Pi_{\textbf{вращ}}(C_1) = \Pi_{\textbf{вращ}}(C_2) \circ \Pi_{\textbf{пост}}(C), \qquad (5.5)$$

где $\Pi_{\textbf{пост}}(C)$ — поступательное перемещение тела вместе с точкой C, а $\Pi_{\textbf{вращ}}(C_i)$ — вращательное перемещение тела вокруг точки C_i;

2. Углы поворота перемещений $\Pi_{\textbf{вращ}}(C_1)$, $\Pi_{\textbf{вращ}}(C_2)$ равны и их общее значение не зависит от выбора полюса C.

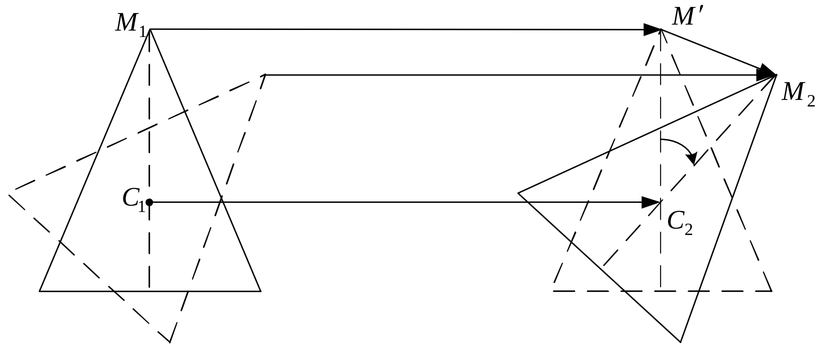
Теорема 5.2. (Эйлер) Любое непоступательное перемещение твердого тела в E^2 есть вращательное перемещение вокруг некоторого полюса C, называемого центром вращения.

Упражнение 5.1. Докажите теоремы 5.1, 5.2.

Обе теоремы геометрически очевидны (рис. 5.3).

Формула Эйлера и ее следствие

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — радиус-вектор произвольной точки плоского сечения твердого тела в неподвижной системе координат. Рассмотрим значение перемещения этой точки за время Δt, то есть величину $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Согласно теореме Шаля, эта величина складывается из $\Delta\vec{r}_A = \vec{r}_A(t + \Delta t) - \vec{r}_A(t)$ — величины



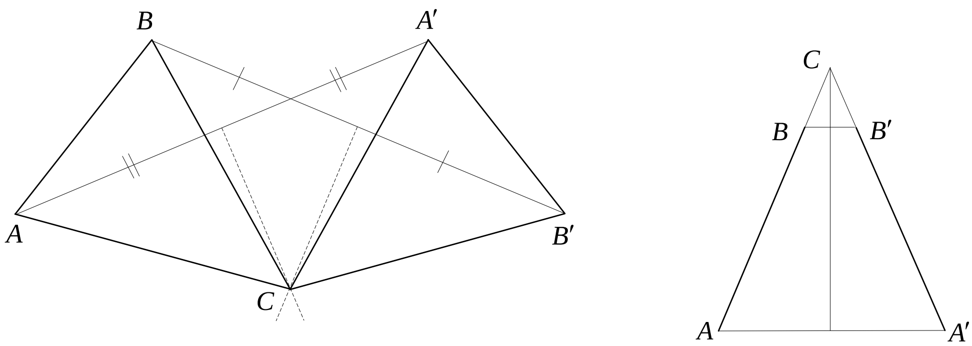


Рисунок 5.3

поступательного перемещения вместе с полюсом A, и $\Delta\vec{r}_{\text{вращ}}$ — величины перемещения вращения вокруг оси, проходящей через полюс A (в его начальном или конечном положении) и перпендикулярной плоскости параллелизма. По формуле (4.1), получаем $\Delta\vec{r}_{\text{вращ}} = \overrightarrow{\Delta\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}_A) + \vec{o}(\Delta t)$ и, следовательно:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_A + \overrightarrow{\Delta\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}_A) + \vec{o}(\Delta t). \tag{5.6}$$

Так как вектор $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ не зависит от выбора полюса A и точки M, то и вектор $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0}(\overrightarrow{\Delta\varphi}/\Delta t) = d\vec{\varphi}(t)/dt$ не зависит от выбора полюса A и точки M. Здесь $\vec{\varphi}(t)$ означает полярный угол, сонаправленный с $\overrightarrow{\Delta\varphi}$. Вектор $\vec{\omega}$ называют угловой скоростью твердого тела при его плоском движении. Его величина равна $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$, а направлен он как и $\overrightarrow{\Delta\varphi}$. Разделив равенство (5.6) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим формулу Эйлера:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A). \tag{5.7}$$

Следствие 5.1. При плоском движении твердого тела, проекции скоростей концов отрезка, расположенного в плоскости параллелизма, на направление этого отрезка равны между собой.

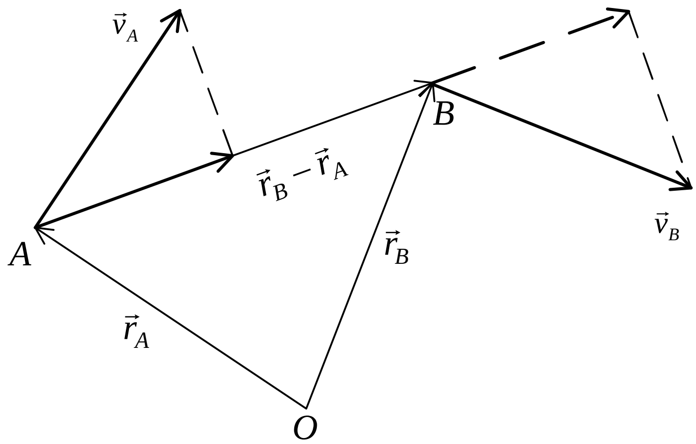


Рисунок 5.4

Доказательство. По формуле Эйлера получаем, что $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$. Так как $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$, и $\vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \perp (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, то равна нулю проекция второго слагаемого справа на направление $\overrightarrow{AB}$. Что и требовалось.

■

Центр скоростей. Центроиды. Теорема Пуансо

Если плоское движение твердого тела является поступательным, то скорости всех его точек равны между собой, и общее значение этих скоростей можно назвать *скоростью поступательного движения* твердого тела. Если эта скорость равна нулю, то движение называют *состоянием покоя*.

Распределение скоростей точек твердого тела дается формулой Эйлера (5.7). Из нее, в частности, следует, что при поступательном движении твердого тела его угловая скорость равна нулю. Как мы сейчас покажем, при непоступательном движении твердого тела одна и только одна точка твердого тела имеет нулевую скорость.

Теорема 5.3. Пусть движение твердого тела является плоскопараллельным, а плоскость Q (подвижное простран-

ство) жестко связана с этим телом и движется в плоскости параллелизма α. Тогда, если в данный момент времени угловая скорость тела не равна нулю (то есть его движение не является поступательным в этот момент), то существует единственная точка C плоскости Q, скорость которой равна нулю в этот момент.

Доказательство. Мы должны показать, что существует единственная точка M плоскости Q такая, что $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{0}$. Если последнее равенство рассмотреть как уравнение относительно $\vec{r}_M$, то при $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ получаем единственное решение $\vec{r}_M - \vec{r}_A = \omega^{-2}\vec{\omega} \times \vec{v}_A$. Что и требовалось доказать. ■

Упражнение 5.2. Пусть $\vec{a}$, $\vec{x}$, $\vec{b} \in E^3$ и $\vec{a} \perp \vec{x}$. Тогда из $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ следует, что $\vec{x} = -a^{-2}\vec{a} \times \vec{b}$.

Точку $C \in Q$ из теоремы 5.3 называют *мгновенным центром скоростей* (или просто *центром скоростей*) в плоском движении твердого тела (в этот момент). Если в формуле Эйлера за полюс взять C, то получим:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_C). \tag{5.8}$$

Формула (5.8) идентична формуле Эйлера для скоростей точек твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через точку $C \in Q$ и перпендикулярной плоскости Q, поэтому центр скоростей C называют также *центром вращения*. Если заданы скорости двух различных точек твердого тела $A, B \in Q$ в его плоскопараллельном непоступательном движении, то мгновенный центр скоростей легко находится геометрически (рис. 5.5).

Из формулы (5.8) следует, что $\vec{v} \perp (\vec{r} - \vec{r}_C)$, то есть скорости точек тела (кроме центра скоростей) перпендикулярны их радиус-векторам, исходящим из мгновенного центра C. Имея это в виду, при известных направлениях скоростей точек A, B, проведем через них прямые l_A, l_B, ортогональные векторам скоростей в этих точках. Эти прямые либо пересекаются, либо нет — возможные варианты разобьем на четыре случая:
(а) прямые l_A, l_B пересекаются в единственной точке — это и будет центр скоростей C;

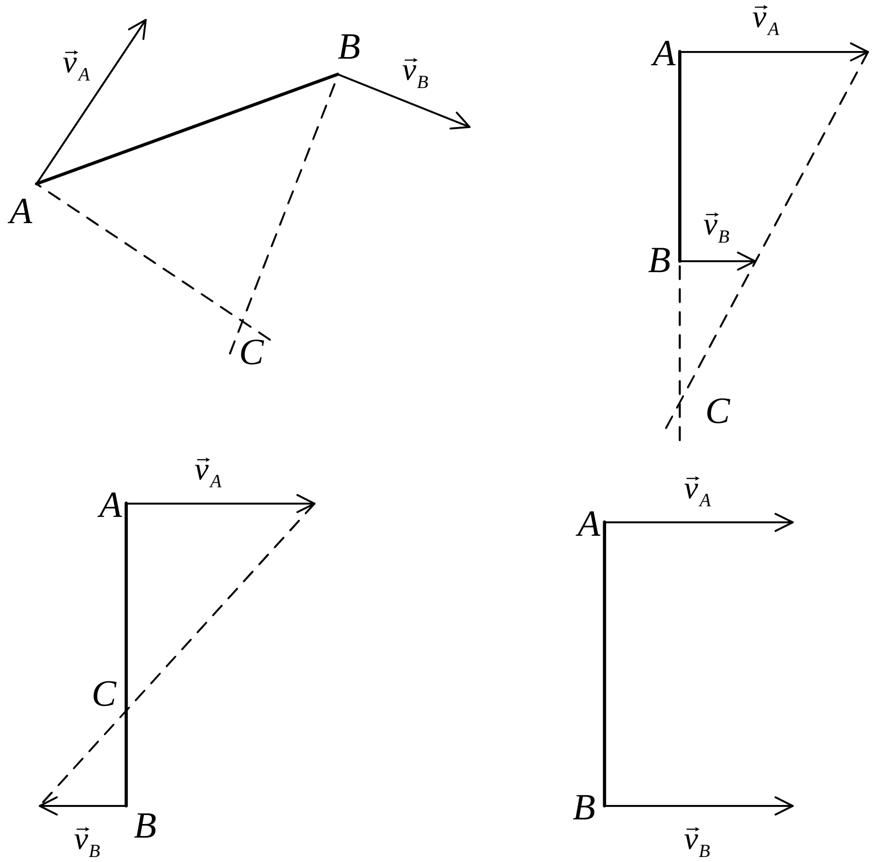


Рисунок 5.5

(б) закрепленные векторы $(A,\vec{v}_A),(B,\vec{v}_B)$ параллельны, направлены в одну сторону и не равны по величине — в этом случае прямые l_A, l_B совпадают; через концы рассматриваемых закрепленных векторов (то есть через точки $A+\vec{v}_A, B+\vec{v}_B$) проведем прямую l, — точка пересечения этой прямой с прямой l_A и будет центром скоростей C;
(в) закрепленные векторы $(A,\vec{v}_A),(B,\vec{v}_B)$ параллельны и направлены в разные стороны — в этом случае прямые l_A, l_B совпадают; через концы рассматриваемых закрепленных векторов (то есть через точки $A+\vec{v}_A, B+\vec{v}_B$) проведем прямую l, — точка пересечения этой прямой с прямой l_A (она лежит на отрезке, соединяющем точки A, B) и будет центром скоростей C;
(г) закрепленные векторы параллельны, направлены в одну сторону и равны по величине — в этом случае движение твердого тела поступательное и для него понятие центра скоростей не определено.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей в неподвижной плоскости α (в подвижной плоскости Q) называют *неподвижной центроидой* (соответственно *подвижной центроидой*). Обе центроиды — некоторые кривые. Если рассмотреть их в неподвижном пространстве (то есть в плоскости α с репером $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta)$), то положение подвижной центроиды будет изменяться с течением времени t, а положение неподвижной центроиды не зависит от t. В каждый момент t эти кривые имеют одну общую точку $C(t)$ — мгновенный центр скоростей.

Теорема 5.4. **(Пуансо) При плоском непоступательном движении твердого тела подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной.**

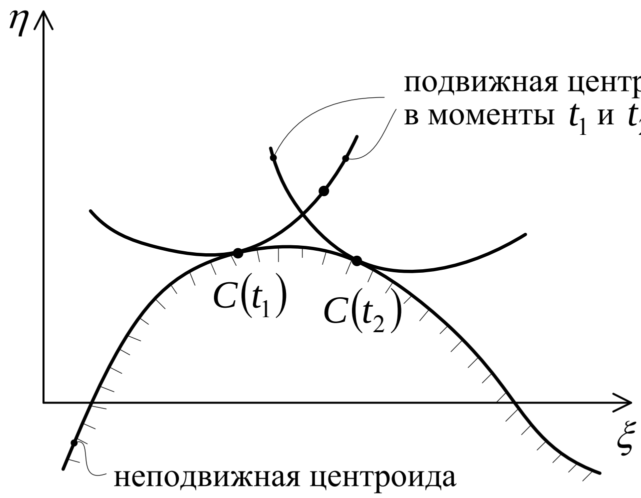


Рисунок 5.6

Пояснение. Мгновенный центр $C(t)$ (в момент t и в достаточно малой своей окрестности — это единственная общая точка центроид) с изменением t перемещается по обеим центроидам со скоростями $\vec{v}(t), \hat{\vec{v}}(t)$. Содержание теоремы Пуансо состоит в том, что $(\forall t \in J)\,(\vec{v}(t) = \hat{\vec{v}}(t))$, где J — промежуток, на котором рассматривается движение твердого тела.

Геометрическая интерпретация плоского движения твердого тела качением подвижной центроиды по неподвижной имеет техническое применение: если необходимо осуществить какое-то плоское движение твердого тела, то можно изготовить соответствующие этому движению подвижную и неподвижную центроиды (жестко связанные с твердом телом и неподвижным основанием соответственно), и тогда качение без проскальзывания подвижной центроиды по неподвижной придаст твердому телу искомое движение.

Для того, чтобы вывести уравнения центроид, обратимся к формулам (5.4). Дифференцируя их по t, получаем:

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 - (x \sin\varphi + y\cos\varphi)\dot{\varphi}, \ \dot{\eta} = \dot{\eta}_0 + (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\dot{\varphi} \tag{5.9}$$

или

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 - (\eta - \eta_0)\dot{\varphi}, \ \dot{\eta} = \dot{\eta}_0 + (\xi - \xi_0)\dot{\varphi}. \tag{5.10}$$

Формулы (5.10) равносильны векторному равенству:

$$\vec{v} = \vec{v}_{M_0} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{M_0}). \tag{5.11}$$

то есть формуле Эйлера для скорости точки M, когда за полюс принята точка M_0. Уравнение неподвижной центроиды получим из формул (5.10), если положим в них $\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta} = 0$, $\xi = \xi_C$, $\eta = \eta_C$:

$$\xi_C = \xi_0 - \dot{\eta}_0\dot{\varphi}^{-1}, \ \eta_C = \eta_0 + \dot{\xi}_0\dot{\varphi}^{-1}. \tag{5.12}$$

Это — уравнения в параметрическом задании, от параметра t зависят величины ξ_0, η_0, φ.

Уравнение подвижной центроиды получим из формул (5.9), если положим в них $\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta} = 0$, $x = x_C$, $y = y_C$:

$$x_C = (\dot{\xi}_0 \sin\varphi - \dot{\eta}_0\cos\varphi)\dot{\varphi}^{-1}, \ y_C = (\dot{\xi}_0\cos\varphi + \dot{\eta}_0\sin\varphi)\dot{\varphi}^{-1}. \tag{5.13}$$

Упражнение 5.3. **Докажите теорему Пуансо.**

Ускорение точек твердого тела в плоском движении

Дифференцируя формулу Эйлера (5.7) по t, получаем:

$$\vec{w} = \vec{w}_A + \vec{w}_1 + \vec{w}_2, \tag{5.14}$$

где

$$\vec{w}_1 = \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_A), \ \ \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}, \ \ \vec{w}_2 = \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_A), \tag{5.15}$$

Используя формулу Эйлера и равенство $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, приходим к другому, более простому выражению для $\vec{w}_2$:

$$\vec{w}_2 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)) = \vec{\omega}\,(\vec{\omega}\,(\vec{r} - \vec{r}_A)) - \omega^2(\vec{r} - \vec{r}_A), \tag{5.16}$$

Так как $\vec{\omega}\perp(\vec{r}-\vec{r}_A)$ согласно определению $\vec{\omega}$, то получаем:

$$\vec{w}_2 = -\omega^2(\vec{r}-\vec{r}_A), \tag{5.17}$$

Векторы $\vec{\varepsilon}, \vec{w}_1, \vec{w}_2$ называют соответственно *угловым ускорением*, *вращательным ускорением* и *осестремительным ускорением* твердого тела в плоском движении.

Спроектируем равенство (5.14) на неподвижные орты $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ и на подвижные орты $\vec{i}, \vec{j}$:

$$w_\xi = \ddot{\xi}_A - \ddot{\varphi}(\eta-\eta_A) - \dot{\varphi}^2(\xi-\xi_A),\ w_\eta = \ddot{\eta}_A + \ddot{\varphi}(\xi-\xi_A) - \dot{\varphi}^2(\eta-\eta_A), \tag{5.18}$$

$$w_x = w_{A,x} - \ddot{\varphi}y - \dot{\varphi}^2 x,\ w_y = w_{A,y} + \ddot{\varphi}x - \dot{\varphi}^2 y. \tag{5.19}$$

Так как проекции $w_{A,\xi}, w_{A,\eta}$ вектора $\vec{w}_A$ на неподвижные орты равны $\ddot{\xi}_A, \ddot{\eta}_A$, то его проекции $w_{A,x}, w_{A,y}$ на подвижные орты, повернутые относительно неподвижных ортов на угол φ, равны:

$$w_{A,x} = \ddot{\xi}_A\cos\varphi + \ddot{\eta}_A\sin\varphi,\ w_{A,y} = -\ddot{\xi}_A\sin\varphi + \ddot{\eta}_A\cos\varphi. \tag{5.20}$$

Формулы (5.19) запишем также в следующей, комплексной форме:

$$W = W_A + (i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)z,\ W = w_x + iw_y,\ z = x + iy. \tag{5.21}$$

Мгновенным центром ускорений в плоском движении твердого тела называют точку $D(t)$ плоскости Q (подвижного пространства, см. теорему 5.3), ускорение которой в данный момент t равно нулю.

Отметим, что если в качестве полюса A выбрать центр ускорений $D(t)$, то формула (5.14) для данного момента t совпадет с аналогичной формулой для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через $D(t)$ и перпендикулярной плоскости Q. Отметим также, что центр ускорений — понятие менее употребительное, чем центр скоростей.

Теорема 5.5. **Пусть движение твердого тела является плоскопараллельным, а плоскость Q (подвижное пространство — см. теорему 5.3), жестко связана с этим телом и**

движется в плоскости параллелизма α. Пусть используются обозначения (5.21), а φ — угол между подвижными и неподвижными ортами.

Тогда, при $\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4 \neq 0$, существует единственный мгновенный центр ускорений с координатами $z = z_D$, и имеют место формулы:

$$z_D = W_A\cdot(\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4)^{-1}\cdot(\dot{\varphi}^2+i\ddot{\varphi}),\ |\overrightarrow{AD}| = w_A(\varepsilon^2+\omega^4)^{-1/2},\ \operatorname{tg}\psi = \varepsilon\omega^{-2}, \tag{5.22}$$

где $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ — угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\vec{w}_A$, отсчитываемый от последнего (см. рис. 5.7).

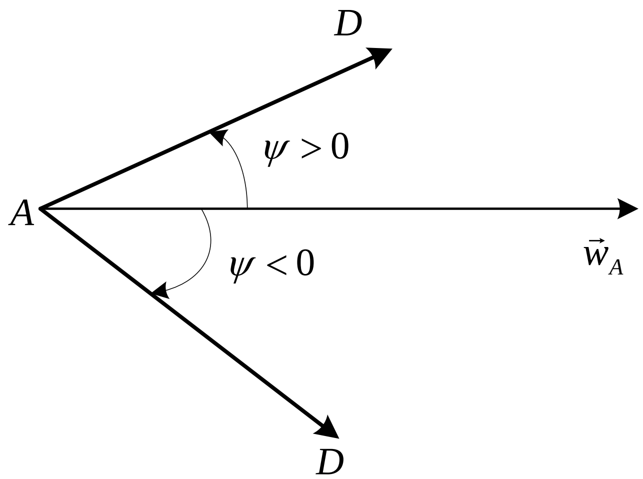


Рисунок 5.7

Доказательство. Полагая $z = z_D$, $W = W_D = 0$ в формуле (5.21), получаем:

$$z_D = W_A/(\dot{\varphi}^2 - i\ddot{\varphi}) = W_A \cdot (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)^{-1} \cdot (\dot{\varphi}^2 + i\ddot{\varphi}), \tag{5.23}$$

то есть первая из формул (5.22) доказана.

Начало подвижного репера поместим в полюс A, а орт $\vec{i}$ сонаправим с $\vec{w}_A$ (рис. 5.8). Тогда $W_A = w_A$ и первая из формул (5.22) примет следующий вид:

$$z_D = w_A(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)^{-1} \cdot (\dot{\varphi}^2 + i\ddot{\varphi}), \tag{5.24}$$

откуда выводим, что

$$|\overrightarrow{AD}| = |z_D| = w_A(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)^{-1/2} = w_A(\varepsilon^2 + \omega^4)^{-1/2}. \tag{5.25}$$

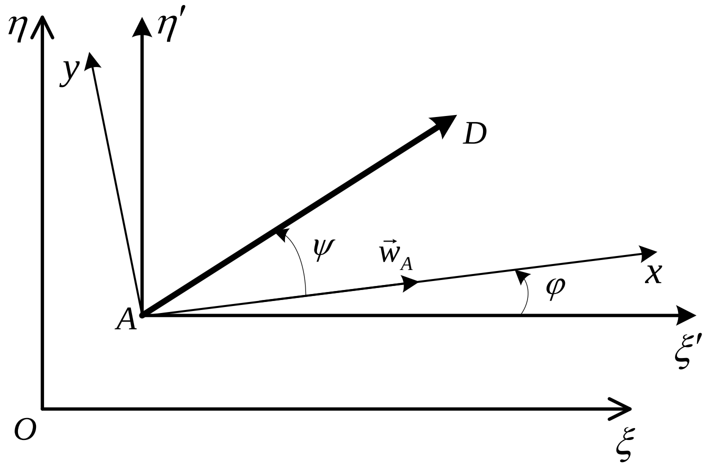


Рисунок 5.8

Так как ψ — аргумент комплексного числа z_D, то получаем:

$$\cos\psi = \dot{\varphi}^2 \cdot (\varepsilon^2 + \omega^4)^{-1/2}, \quad \sin\psi = \ddot{\varphi} \cdot (\varepsilon^2 + \omega^4)^{-1/2}, \tag{5.26}$$

откуда следует последняя формула (5.22). Из неравенства $\cos\psi \geqslant 0$ следует, что $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Что и требовалось доказать. ■

§6. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

Задание движения через углы Эйлера

Координаты произвольной точки M твердого тела в неподвижном и подвижном реперах будем обозначать (ξ, η, ζ) и (x, y, z) соответственно. Начала неподвижного и подвижного реперов поместим в неподвижную точку O твердого тела, и будем использовать для этих реперов обозначения $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ и $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Как следует из формулы (2.11), связь между координатами точки M в подвижной и неподвижной системах следующая:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Как мы знаем, девять величин $p_{i,j}$ связаны шестью известными независимыми соотношениями, поэтому все эти величины можно выразить через какие-то три параметра. В механике наиболее употребительны в качестве таких параметров углы Эйлера. Мы сейчас введем эти углы, а затем выразим через них $p_{i,j}$.

Символом $\Pi(A, \vec{a}, \vec{b})$ будем обозначать плоскость, проходящую через точку A и параллельную векторам $\vec{a}, \vec{b}$ (это обозначение мы уже использовали в §3, главы 3, см. упражнение 3.1). Символом $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ будем обозначать угол между векторами $\vec{a}, \vec{b}$, отсчитываемый от $\vec{a}$ к $\vec{b}$.

Если плоскости $\Pi(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\Pi(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta)$ не параллельны, то существует их пересечение — прямая, ее называют *линией узлов*. Выберем любое из двух направлений на этой прямой и орт этого направления назовем $\vec{m}$. Три угла Эйлера φ, ψ, θ вводятся следующим образом: $\varphi = \angle(\vec{m}, \vec{i}) \in [0, 2\pi]$ — *угол ротации* или *угол собственного вращения*; $\psi = \angle(\vec{e}_\xi, \vec{m}) \in [0, 2\pi]$ — *угол прецессии* и $\theta = \angle(\vec{e}_\zeta, \vec{k}) \in (0, \pi)$ — *угол нутации* (почему нельзя положить $\theta \in [0, \pi]$?).

Для вывода формул $p_{i,j} = p_{i,j}(\varphi, \psi, \theta)$ мы используем, кроме $\vec{m}$, еще два вспомогательных вектора — орты $\vec{m}_1 = \vec{m} \times \vec{e}_\zeta$ и $\vec{m}_2 = \vec{m} \times \vec{k}$.

Так как

$$\begin{gathered} \vec{m}_2 = -\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\varphi\,\vec{j}, \\ \vec{m}_1 = \cos\theta\,\vec{m}_2 + \sin\theta\,\vec{k} = -\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\theta\cos\varphi\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{k}, \\ \vec{m} = \cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}, \end{gathered} \tag{6.2}$$

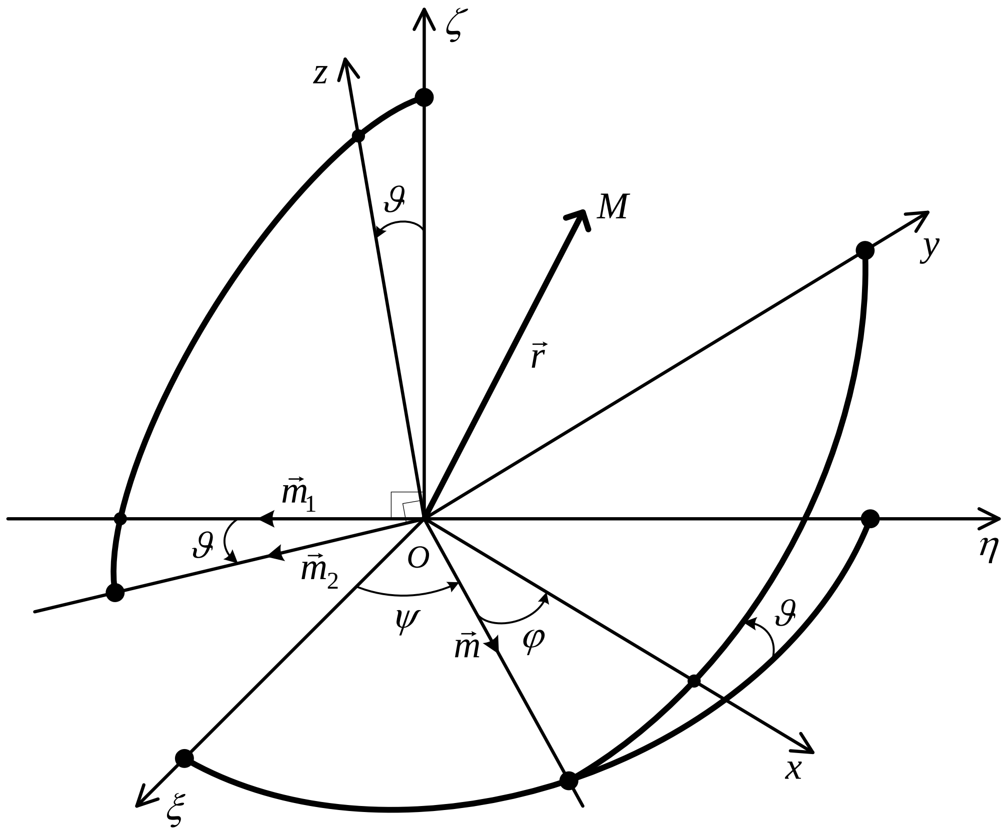


Рисунок 6.1

то

$$
\begin{gathered}
\vec{e}_\xi = \cos\psi\,\vec{m} + \sin\psi\,\vec{m}_1 = \\
= \cos\psi(\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}) + \\
+ \sin\psi(-\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\theta\cos\varphi\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{k}) = \\
= (\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta)\vec{i} + \\
+(-\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta)\vec{j} + \sin\psi\sin\theta\,\vec{k},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\vec{e}_\eta = \sin\psi\,\vec{m} - \cos\psi\,\vec{m}_1 = \\
= \sin\psi(\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}) - \\
- \cos\psi(-\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\theta\cos\varphi\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{k}) = \\
= (\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi)\vec{i} - \\
-(\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\theta\cos\varphi)\vec{j} - \cos\psi\sin\theta\,\vec{k},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\vec{e}_\zeta = -\sin\theta\,\vec{m}_2 + \cos\theta\,\vec{k} = -\sin\theta(-\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\varphi\,\vec{j}) + \cos\theta\,\vec{k} = \\
= \sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}.
\end{gathered} \tag{6.3}
$$

Так как

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \xi\,\vec{e}_\xi + \eta\,\vec{e}_\eta + \zeta\,\vec{e}_\zeta, \tag{6.4}$$

то умножая скалярно (6.4) на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ последовательно получаем:

$$\begin{aligned} x &= (\vec{e}_\xi, \vec{i})\xi + (\vec{e}_\eta, \vec{i})\eta + (\vec{e}_\zeta, \vec{i})\zeta, \\ y &= (\vec{e}_\xi, \vec{j})\xi + (\vec{e}_\eta, \vec{j})\eta + (\vec{e}_\zeta, \vec{j})\zeta, \\ z &= (\vec{e}_\xi, \vec{k})\xi + (\vec{e}_\eta, \vec{k})\eta + (\vec{e}_\zeta, \vec{k})\zeta. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Сопоставляя равенства (6.1) и (6.5) и используя разложения (6.3), приходим к следующим выражениям для $p_{i,j}$:

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= (\vec{e}_\xi, \vec{i}) = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi, \\ p_{2,1} &= (\vec{e}_\xi, \vec{j}) = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi, \\ p_{3,1} &= (\vec{e}_\xi, \vec{k}) = \sin\psi\sin\theta, \\ \\ p_{1,2} &= (\vec{e}_\eta, \vec{i}) = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi, \\ p_{2,2} &= (\vec{e}_\eta, \vec{j}) = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi, \\ p_{3,2} &= (\vec{e}_\eta, \vec{k}) = -\cos\psi\sin\theta, \\ \\ p_{1,3} &= (\vec{e}_\zeta, \vec{i}) = \sin\varphi\sin\theta, \\ p_{2,3} &= (\vec{e}_\zeta, \vec{j}) = \cos\varphi\sin\theta, \\ p_{3,3} &= (\vec{e}_\zeta, \vec{k}) = \cos\theta. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Теорема 6.1. **Пусть**

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$P_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \; P_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Тогда

$$P = P_3(\psi)P_1(\theta)P_3(\varphi). \tag{6.8}$$

Доказательство.

I способ.

Равенство (6.8) проверяется перемножением матриц.

II способ.

Это доказательство проясняет геометрический смысл равенства (6.8). Кроме уже используемых неподвижного и подвижного реперов рассмотрим еще два репера с центром в той же неподвижной точке O. Репер, из которого получается $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ поворотом вокруг $\vec{k}$ на угол φ, назовем $(O,\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$. Репер, из которого получается $(O,\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$ поворотом вокруг $\vec{m}$ на угол θ, назовем $(O,\vec{i}\,'',\vec{j}\,'',\vec{k}\,'')$. Как можно видеть, репер $(O,\vec{e}_\xi,\vec{e}_\eta,\vec{e}_\zeta)$ получается из репера $(O,\vec{i}\,'',\vec{j}\,'',\vec{k}\,'')$ поворотом вокруг $\vec{k}\,''$ на угол ψ.

Если координатами точки M в рассматриваемых четырех реперах $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $(O,\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$, $(O,\vec{i}\,'',\vec{j}\,'',\vec{k}\,'')$, $(O,\vec{e}_\xi,\vec{e}_\eta,\vec{e}_\zeta)$ являются соответственно (x,y,z), (x',y',z'), (x'',y'',z''), (ξ,η,ζ), то получаем следующие их преобразования, соответствующие поворотам на углы φ,θ,ψ:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P_3(\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = P_1(\theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P_3(\psi)\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}\end{gathered} \qquad (6.9)$$

откуда следует, что

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P_3(\psi)P_1(\theta)P_3(\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (6.10)$$

Что и требовалось доказать. ∎

Две геометрические теоремы о движении твердого тела вокруг неподвижной точки

Тождественному преобразованию id_{E^3} пространства E^3 (см. упражнение 2.1) соответствует такое перемещение твердого тела, что начальное и конечное положения каждой его точки совпадают. Это перемещение твердого тела назовем *нулевым*.

Теорема 6.2. **(Эйлер — Даламбер) Для любого ненулевого перемещения Π твердого тела вокруг неподвижной точки существует единственная прямая l (ось вращения) такая, что перемещение Π можно представить как перемещение в результате поворота этого тела вокруг этой оси на некоторый угол α.**

Доказательство. Пусть O — неподвижная точка тела. Будем считать, что в начальном положении подвижный и неподвижный реперы $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ совпадают. Пусть (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) — координаты в неподвижном репере произвольной точки M твердого тела (пространства, связанного с телом) в его начальном и конечном положениях соответственно, а (x, y, z) - координаты этой точки в подвижном репере. Используя формулы (6.1) получаем:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (6.11)$$

где I – единичная матрица, P – ортогональная, $\det P = 1$ и $P \neq I$.

Мы должны показать, что множество точек $M \sim (x, y, z)$, удовлетворяющих равенству $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, то есть равенству

$$(P - I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.12)$$

это множество всех точек некоторой прямой, проходящей через $(0, 0, 0)$.

Эту задачу можно переформулировать так: мы должны доказать, что среди собственных значений λ матрицы P есть значение $\lambda_1 = 1$ и ему соответствует одномерное подпространство собственных векторов. Для того, чтобы сделать это, мы покажем, что $\lambda_1 = 1$ является корнем характеристического полинома $d(\lambda) = \det(P - \lambda I)$ и что кратность этого корня равна единице (при $P \neq I$!).

Действительно, из цепочки равенств

$$
\begin{gathered}
d(1) = \det(P - I) = \det(P^T - I^T) = \det(P^{-1} - I) = \\
= \det(P(P^{-1} - I)) = \det(I - P) = \det(-(P - I)) = \\
= (-1)^3 \det(P - I) = -d(1)
\end{gathered}
\tag{6.13}
$$

следует, что величина $\lambda_1 = 1$ является корнем полинома $d(\lambda)$.

Упражнение 6.1. Доказать, что кратность корня $\lambda_1 = 1$ равна единице.

Что и требовалось доказать. ■

Упражнение 6.2. Найти угол α и прямую l из теоремы 6.2 Эйлера — Даламбера (через элементы матрицы P или углы Эйлера).

Пусть M — произвольная точка твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки O, а $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t + \Delta t)$ — радиус-векторы этой точки в моменты t и $t+\Delta t$. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ — это перемещение точки M за время от t до $t + \Delta t$. В соответствии с теоремой Эйлера – Даламбера, его можно вычислить как перемещение при вращении вокруг некоторой оси на угол $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ (эта векторная величина направлена вдоль упомянутой оси согласно определению угла поворота). Из формулы (4.1) следует, что

$$
\Delta\vec{r} = \overrightarrow{\Delta\varphi} \times \vec{r} + \vec{o}(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0. \tag{6.14}
$$

Если существует вектор

$$
\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} (\overrightarrow{\Delta\varphi}/\Delta t), \tag{6.15}
$$

то прямую, проходящую через неподвижную точку O и параллельную этому вектору, называют *мгновенной осью вращения твердого тела в момент* t, а сам вектор $\vec{\omega}$ — его *мгновенной угловой скоростью в момент* t.

Вектор $\vec{\omega}$ можно рассмотреть как функцию времени t. В отличие от случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, здесь $\vec{\omega}$ с изменением t меняет, вообще говоря, не только свою величину, но и направление (здесь полезно вспомнить также определение $\vec{\omega}$ в случае плоского движения твердого тела — см. §5). Из формулы (6.14) получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta\vec{r}/\Delta t) = \lim_{\Delta t\to 0}(\overrightarrow{\Delta\varphi}/\Delta t)\times\vec{r}, \tag{6.16}$$

то есть

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \tag{6.17}$$

Это — формула Эйлера. Если точка M лежит на оси вращения, то есть $\vec{r} = \alpha\vec{\omega}$, то из (6.17) следует равенство $\vec{v} = \vec{0}$.

Упражнение 6.3. Докажите, что угловую скорость твердого тела с неподвижной точкой можно вычислить по формуле (см. теорему 6.1):

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_\zeta + \dot{\theta}\vec{m} + \dot{\varphi}\vec{k}. \tag{6.18}$$

Геометрическое место мгновенных осей вращения в неподвижном и подвижном реперах называют *неподвижным* и *подвижным аксоидом* соответственно. Аксоиды — конические поверхности с вершиной в неподвижной точке O. Если рассмотреть их в неподвижном пространстве, то положение подвижного аксоида будет меняться с течением времени t, а положение неподвижного аксоида не зависит от времени. В каждый момент t эти поверхности имеют общую прямую — мгновенную ось вращения $l(t)$.

Теорема 6.3. (Пуансо) При движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному.

Пояснение. Мгновенная ось вращения $l(t)$ (в момент t — это общая прямая двух аксоидов) с изменением t перемещается по обоим аксоидам. Пусть $C(t)$ — произвольно выбранная точка прямой $l(t)$, отличная от O. Точка $C(t)$ с течением времени перемещается по некоторым кривым на неподвижном и подвижном аксоидах со скоростями $\vec{v}(t), \hat{\vec{v}}(t)$. Содержание теоремы Пуансо состоит в том, что $(\forall t\in J)(\vec{v}(t) = \hat{\vec{v}}(t))$, где J — промежуток, на котором рассматривается движение твердого тела.

Упражнение 6.4. Докажите теорему 6.3

Проекции угловой скорости тела с неподвижной точкой

Используя разложения ортов $\vec{m}, \vec{e}_\xi$ по $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (см. §6), и проектируя равенство (6.18) на орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, получаем:

$$\begin{gathered}\omega_x = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi,\ \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.\end{gathered} \tag{6.19}$$

Разложения ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ по ортам $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ следующие:

$$\begin{gathered}\vec{i} = p_{1,1}\vec{e}_\xi + p_{1,2}\vec{e}_\eta + p_{1,3}\vec{e}_\zeta, \\ \vec{j} = p_{2,1}\vec{e}_\xi + p_{2,2}\vec{e}_\eta + p_{2,3}\vec{e}_\zeta,\ \vec{k} = p_{3,1}\vec{e}_\xi + p_{3,2}\vec{e}_\eta + p_{3,3}\vec{e}_\zeta.\end{gathered} \tag{6.20}$$

Используя эти формулы, формулы (6.6) для $p_{i,j}$ и разложение орта $\vec{m}$ по $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, получаем разложение орта $\vec{m}$ по ортам $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$. Используя теперь разложения ортов $\vec{m}, \vec{k}$ по $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ и проектируя равенство (6.18) на оси $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$, получаем:

$$\begin{gathered}\omega_\xi = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_\eta = -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi,\ \omega_\zeta = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}.\end{gathered} \tag{6.21}$$

Ускорение точек тела, имеющего неподвижную точку

Дифференцируя формулу Эйлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, получаем:

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{6.22}$$

где $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$. Векторы $\vec{\varepsilon}$, $\vec{w}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, $\vec{w}_2 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ называют *угловым*, *вращательным* и *осестремительным ускорениями тела* соответственно. Теперь мы получим другое выражение для $\vec{w}_2$, тогда станет более понятным и название этого вектора.

Пусть $\vec{r} = \vec{h} + \vec{\varrho}$, где $\vec{h}$ — векторная проекция $\vec{r}$ на мгновенную ось вращения тела. Так как $\vec{h} \parallel \vec{\omega}$, $\vec{\varrho} \perp \vec{\omega}$ то получаем:

$$\vec{w}_2 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{h} + \vec{\varrho})) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = -\omega^2 \vec{\varrho}. \tag{6.23}$$

Итак, равенство (6.22) мы можем записать в следующей форме:

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2,\ \vec{w}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r},\ \vec{w}_2 = -\omega^2 \vec{\varrho}. \tag{6.24}$$

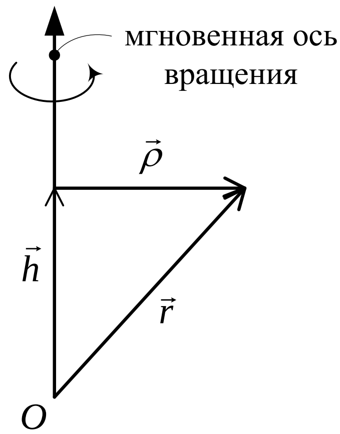


Рисунок 6.2

§7. Угловая скорость, формула Эйлера и движение твердого тела в общем случае

Скорость точек твердого тела в общем случае

Пусть $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — репер, жестко связанный с твердым телом (подвижный репер), а $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ — неподвижный репер. Тогда, если (ξ_0, η_0, ζ_0) — координаты точки O' в неподвижном репере, то связь между координатами произвольной точки M тела в неподвижном и подвижном реперах следующая (см. (2.6)):

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & p_{3,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{3,2} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Как видим, перемещение $\Delta\vec{r}$ точки M складывается из перемещения $\Delta\vec{r}_{O'}$ точки O' и вращательного перемещения $\Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'})$ точки M при повороте тела вокруг O', то есть:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_{O'} + \Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'}), \tag{7.2}$$

где

$$\Delta\vec{r}_{O'} = \vec{v}_{O'}\Delta t + \vec{o}(\Delta t) \text{ при } \Delta t \to 0 \tag{7.3}$$

и (см. (6.14))

$$\Delta(\vec{r} - \vec{r}_{O'}) = \overrightarrow{\Delta\varphi_{O'}} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) \text{ при } \Delta t \to 0. \tag{7.4}$$

Разделив равенство (7.2) на Δt и перейдя при $\Delta t \to 0$ к пределу, получим:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}). \tag{7.5}$$

Здесь $\vec{\omega}_{O'} = \lim_{\Delta t \to 0}(\overrightarrow{\Delta\varphi_{O'}}/\Delta t)$ — мгновенная угловая скорость вращения тела вокруг точки O', а $\vec{v}$ и $\vec{v}_{O'}$ — скорости точек M и O'.

Теорема 7.1. **Вектор $\vec{\omega}_{O'}$ не зависит от выбора полюса — точки O'.**

Доказательство. Пусть B — другой полюс, тогда истинны две формулы:

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B), \tag{7.6}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}), \tag{7.7}$$

откуда получаем:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B). \tag{7.8}$$

Вычитая из равенства (7.5) равенство (7.8), получаем:

$$\vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) - \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}) - \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B) = \vec{0},$$

то есть

$$(\vec{\omega}_{O'} - \vec{\omega}_B) \times (\vec{r} - \vec{r}_B) = \vec{0}. \tag{7.9}$$

Так как это равенство истинно для любого $\vec{r}$, то $\vec{\omega}_{O'} = \vec{\omega}_B$. Что и требовалось. ■

Согласно теореме 7.1 вектор $\vec{\omega}_{O'}$ можно обозначить просто $\vec{\omega}$, — это *угловая скорость твердого тела* в общем случае. Формула (7.5) запишется в следующем виде:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}), \tag{7.10}$$

— это *формула Эйлера* в общем случае.

Следствие 7.1. **Проекции скоростей любых двух различных точек абсолютно твердого тела на направление соединяющего их отрезка равны между собой.**

Ускорение точек твердого тела в общем случае

Дифференцируя формулу Эйлера, получаем:

$$\vec{w} = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_{O'}). \qquad (7.11)$$

Здесь $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ — угловое ускорение твердого тела, $\vec{r}_{O'}$ — радиус-вектор точки O', принятой за полюс, $\vec{v}_{O'}$, $\vec{w}_{O'}$ — скорость и ускорение полюса.

Векторное удаление $\vec{r} - \vec{r}_{O'}$ произвольной точки M тела от полюса можно представить в виде:

$$\vec{r} - \vec{r}_{O'} = \vec{h} + \vec{\varrho}, \qquad (7.12)$$

где $\vec{h} = h\vec{e}_\omega$, $h = (\vec{r} - \vec{r}_{O'})\vec{e}_\omega$, $\vec{e}_\omega = \vec{\omega}\omega^{-1}$, а $\vec{\varrho}$ — векторное удаление мгновенной оси вращения до точки M. Из формулы Эйлера следует, что

$$\vec{v} - \vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) = \vec{\omega} \times \vec{\varrho}. \qquad (7.13)$$

Так как $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = -\omega^2\vec{\varrho}$, то из формулы (7.11) получаем:

$$\vec{w} = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + (-\omega^2\vec{\varrho}). \qquad (7.14)$$

Первое слагаемое справа — ускорение полюса, второе слагаемое называют вращательным ускорением, а третье — осестремительным ускорением.

В заключение настоящего параграфа отметим, что формулы (7.1), (7.10), (7.14) являются важнейшими и наиболее общими в кинематике твердого тела (см. также текст перед §1 главы 4).

ГЛАВА 5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Если рассматривают движение механической системы относительно двух или более декартовых систем координат, то говорят о сложном движении этой системы. Здесь, в §§1 - 4 рассматривается сложное движение точки, а сложное движение твердого тела обсуждается в §5.

§1. Сложное движение точки. Основные понятия

Пусть $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — неподвижный и подвижный реперы. Эти реперы и связанные с ними подвижное и неподвижное пространства называют также *абсолютным* и *относительным* соответственно. Далее мы будем изучать движение некоторой геометрической точки M относительно неподвижного (абсолютного) и подвижного (относительного) реперов.

Как пример можно привести движение искусственного спутника Луны, рассматриваемого упрощенно как точка (рис. 1.1). В этом случае часто в качестве абсолютного и относительного рассматривают реперы жестко связанные с Землей и Луной. Мы найдем связь между движением точки M в неподвижном и подвижном пространстве (то есть, относительно подвижного и неподвижного реперов) в предположении, что известно движение подвижного репера относительно неподвижного.

Для этого, прежде всего, введем ряд определений.

Движение, скорость и ускорение точки M относительно неподвижного (абсолютного) репера называют *абсолютными*, а движение, скорость и ускорение этой точки относительно подвижного (относительного) репера называют *относительными*.

В момент t точка M совпадает с точкой M' подвижного пространства (рассматриваемого как твердое тело). Движение, скорость и ускорение этой точки M' в момент t относительно неподвижного (абсолютного) репера называют *переносными* для точки M в этот момент.

В связи с этими понятиями будем использовать следующие обозначения: $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ — абсолютные радиус-вектор, скорость и ускорение точки, $\vec{\varrho} = \overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_r$, $\vec{w}_r$ — относительные радиус-вектор, скорость и ускорение точки, $\vec{v}_e$, $\vec{w}_e$ — переносные скорость

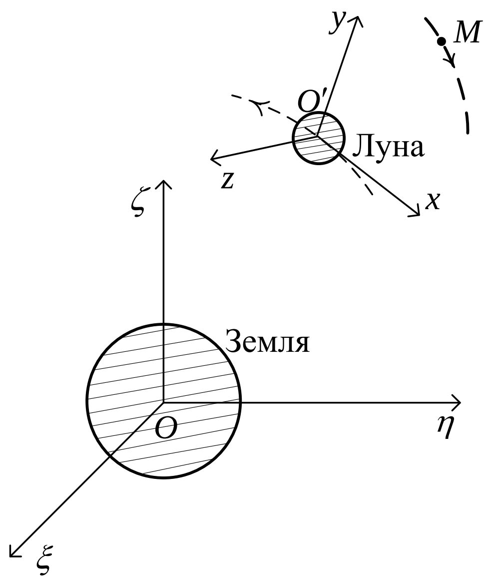


Рисунок 1.1

и ускорение точки. Кроме того, символом $\vec{\omega}$ мы будем обозначать угловую скорость подвижного (относительного) репера относительно неподвижного (абсолютного) репера.

Искомые связи между абсолютными и относительными величинами мы получим в §3, 4, а ближайший §2 является вспомогательным.

§2. Относительная производная

Пусть $\vec{C}$ — вектор-функция аргумента t, причем

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}, \tag{2.1}$$

тогда получаем:

$$\dot{\vec{C}} = \dot{C}_x\vec{i} + \dot{C}_y\vec{j} + \dot{C}_z\vec{k} + C_x\dot{\vec{i}} + C_y\dot{\vec{j}} + C_z\dot{\vec{k}}, \tag{2.2}$$

Производные $\dot{\vec{i}}, \dot{\vec{j}}, \dot{\vec{k}}$ зависят от пространства, в котором они рассматриваются. В частности, в подвижном пространстве они равны нулю.

Теорема 2.1. **(Формулы Пуассона) Пусть подвижный репер $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, жестко связанный с твердым телом, движется**

относительно неподвижного репера $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Тогда производные подвижных ортов в неподвижном репере вычисляются по формулам:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i},\ \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j},\ \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}. \tag{2.3}$$

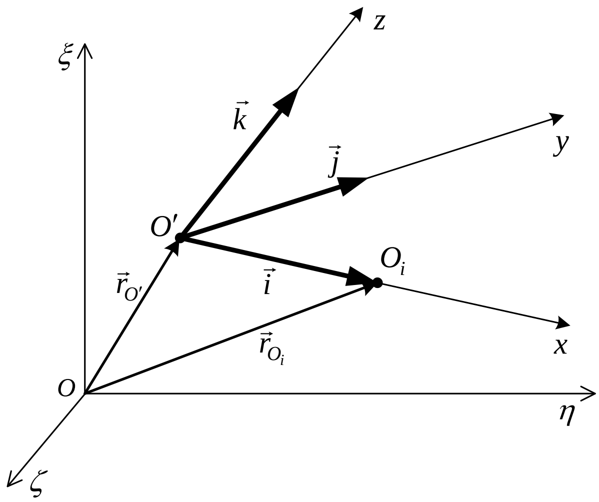


Рисунок 2.1

Доказательство. Мы докажем первую из формул (2.3), остальные доказываются аналогично. Введем обозначения:

$$\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'},\ \vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'},\ \vec{r}_{O_i} = \overrightarrow{O, O' + \vec{i}},\ \vec{v}_{O_i} = \dot{\vec{r}}_{O_i}, \tag{2.4}$$

Так как $\vec{r}_{O_i} = \vec{r}_{O'} + \vec{i}$, то

$$\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_{O'} + d\vec{i}/dt. \tag{2.5}$$

Сопоставляя это равенство с формулой Эйлера

$$\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{O_i} - \vec{r}_{O'}) = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{i}, \tag{2.6}$$

получаем первую из формул (2.3).

Что и требовалось. ■

Производную вектор-функции $\vec{C}$ в подвижном репере $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ обозначим $d'\vec{C}/dt$, ее называют *относительной производной вектор-функции* $\vec{C}$. Производную вектор-функции $\vec{C}$ в неподвижном репере $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ обозначим $d\vec{C}/dt$, ее называют *абсолютной производной вектор-функции* $\vec{C}$.

Теорема 2.2. (Формула относительной производной) Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда относительная и абсолютная производные вектор-функции связаны равенством:

$$d\vec{C}/dt = d'\vec{C}/dt + \vec{\omega} \times \vec{C}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Формулу (2.2) перепишем в новых обозначениях:

$$d\vec{C}/dt = d'\vec{C}/dt + C_x d\vec{i}/dt + C_y d\vec{j}/dt + C_z d\vec{k}/dt. \tag{2.8}$$

Учитывая формулы Пуассона (2.3), получаем:

$$d\vec{C}/dt = d'\vec{C}/dt + \vec{\omega} \times (C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}) = d'\vec{C}/dt + \vec{\omega} \times \vec{C}. \tag{2.9}$$

Что и требовалось. ■

§3. Теорема сложения скоростей в сложном движении точки

Здесь мы воспользуемся обозначениями $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{\varrho} = \overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_r$, $\vec{w}_r$, $\vec{v}_e$, $\vec{w}_e$, $\vec{\omega}$, введенными в §1.

Теорема 3.1. (Формула сложения скоростей) Абсолютная, переносная и относительная скорости движения точки связаны следующим равенством:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как $\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{\varrho}$ (рис. 3.1) то, применяя теорему 2.2, получаем:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{\varrho} + d'\vec{\varrho}/dt. \tag{3.2}$$

По формуле Эйлера сумма первых двух слагаемых справа в равенстве (3.2) равна $\vec{v}_e$ (то есть скорости той точки M' подвижного пространства, с которой в данный момент t совпадает движущаяся точка M). Теперь из того, что $d'\vec{\varrho}/dt = \vec{v}_r$ следует равенство (3.1).

Что и требовалось. ■

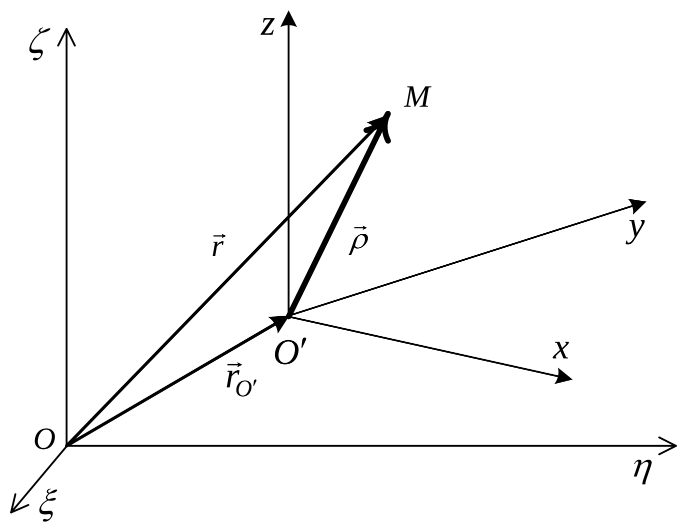


Рисунок 3.1

§4. Теорема сложения ускорений в сложном движении точки

Здесь мы тоже используем обозначения $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{\varrho} = \overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_r$, $\vec{w}_r$, $\vec{v}_e$, $\vec{w}_e$, $\vec{\omega}$, введенные в §1. Кроме того, мы используем обозначение $\vec{w}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, — эту векторную величину называют *ускорением Кориолиса* или *вращательным ускорением* точки в ее сложном движении.

Теорема 4.1. (Формула Кориолиса сложения ускорений) Абсолютное, переносное, относительное и вращательное ускорения в сложном движении точки связаны следующим равенством:

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c. \tag{4.1}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (3.1), получаем:

$$\vec{w} = d\vec{v}/dt = d\vec{v}_e/dt + d\vec{v}_r/dt. \tag{4.2}$$

Из теоремы 2.2 следует, что

$$d\vec{v}_r/dt = d'\vec{v}_r/dt + \vec{\omega} \times \vec{v}_r = \vec{w}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r. \tag{4.3}$$

Пусть $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$ (угловое ускорение подвижного репера). По формуле Эйлера получаем, что $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'})$, поэтому, используя еще раз формулу $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} d\vec{v}_e/dt = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_{O'}) = \\ = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_e - \vec{v}_{O'}) + \vec{\omega} \times \vec{v}_r. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из формулы (7.11) главы 4 следует, что сумма первых трех слагаемых справа в (4.4) равна $\vec{w}_e$, поэтому

$$d\vec{v}_e/dt = \vec{w}_e + \vec{\omega} \times \vec{v}_r. \tag{4.5}$$

Из равенств (4.2), (4.3), (4.5) следует формула Кориолиса (4.1).

Что и требовалось. ■

§5. Теорема о сложении угловых скоростей в сложном движении твердого тела

Рассмотрим $n+1$ репер $(O, \vec{e}_{i,1}, \vec{e}_{i,2}, \vec{e}_{i,3})$, $i \in [1 : n+1]$ с центром в неподвижной точке O твердого тела, и предположим, что первый и последний из этих реперов совпадают с неподвижным и подвижным реперами $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ и $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ соответственно, а подвижный репер жестко связан с движущимся твердым телом.

Пусть при $i \in [1 : n]$ репер $(O, \vec{e}_{i+1,1}, \vec{e}_{i+1,2}, \vec{e}_{i+1,3})$ движется относительно репера $(O, \vec{e}_{i,1}, \vec{e}_{i,2}, \vec{e}_{i,3})$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_i$. В этом случае говорят, что твердое тело совершает одновременное вращение с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_n$ вокруг осей $\vec{\omega}_1/\omega_1, \ldots, \vec{\omega}_n/\omega_n$.

Угловую скорость твердого тела, то есть угловую скорость подвижного репера относительно неподвижного обозначим $\vec{\omega}$.

Теорема 5.1. (Формула сложения угловых скоростей) Если твердое тело совершает одновременное вращение вокруг неподвижной точки с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_n$, то его угловая скорость вычисляется по формуле:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \ldots + \vec{\omega}_n. \tag{5.1}$$

Упражнение 5.1. Докажите теорему 5.1.

Перейти к оглавлению на странице: 256

ЧАСТЬ III. ДИНАМИКА

В кинематике речь шла об описании движений механических систем как функций времени и не рассматривался вопрос, как найти эти функции. В динамике вводят в рассмотрение и изучают уравнения, которым удовлетворяют движения. Это обыкновенные дифференциальные уравнения, их называют уравнениями движения. Уравнение Ньютона изучают в классической механике Ньютона. Здесь, в дополнение к понятиям пространства, тела и движения тел в пространстве, вводится ряд новых понятий и принципов, которые позволяют, в частности, выводить уравнения Ньютона для конкретных механических систем.

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Мы рассмотрим здесь движение одной или нескольких точек (системы точек) в аффинном евклидовом пространстве E^3. Под *системой координат* далее будем понимать это пространство с каким-то определенным его репером. Началом системы координат будем называть начало этого репера, а осями координат — прямые, проходящие через начало и сонаправленные с ортами репера. Так как систему координат можно геометрически отождествить с твердым телом, то можно говорить о движении одних систем координат относительно других.

§1. Принцип детерминированности и уравнение Ньютона

Пусть $\vec{r}_i$, $i \in [1:n]$ — радиус-векторы точек M_i рассматриваемой системы из n точек относительно некоторого репера. Будем использовать также обозначение $\vec{r} = \vec{r}(t) = (\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_n(t))$ для положения этой системы в момент t.

Принцип детерминированности заключается в том, что движение любой такой системы точек однозначно определяется ее положением $\vec{r}(t)$ и скоростью $\dot{\vec{r}}(t)$ в любой момент t. В частности, эти величины определяют и ускорения точек, то есть существует функция $\vec{F}$ аргументов $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ и t такая, что

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \tag{1.1}$$

Это — *уравнение Ньютона*. Предполагается, что $\vec{F}$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши, состоящей из уравнения (1.1) и начальных условий:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}^{\,0}, \; \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}^{\,0}. \tag{1.2}$$

С точки зрения механики Ньютона как математической модели, задание $\vec{F}$ для некоторой механической системы является составной частью определения этой модели.

Перейти к оглавлению на странице: 256

§2. Инерциальные системы координат

Важным понятием классической модели динамики Ньютона является инерциальная система координат. Ее определение включает в себя закон инерции Галилея-Ньютона и принцип относительности Галилея.

Закон инерции Галилея-Ньютона

Опыт показывает, что ускорение тел может вызываться двумя причинами: действием на них других тел и/или свойствами системы координат (в различных системах координат в один и тот же момент тело может иметь различные ускорения).

Закон инерции Галилея-Ньютона состоит в том, что существуют системы координат K, удовлетворяющие свойству:

(a) точка, не подверженная действию других тел, движется относительно системы координат K прямолинейно и равномерно (или, как говорят, *по инерции*)

Любая другая система координат K', движущаяся прямолинейно и равномерно относительно системы координат K, удовлетворяющей свойству (a), также удовлетворяет этому свойству.

В качестве примера отметим, что в классической модели небесной механики Ньютона полагают, что свойству (a) удовлетворяет гелиоцентрическая система координат с осями координат, направленными на неподвижные звезды. Этот факт или даже просто свойство (a) называют *первым законом Ньютона*.

Принцип относительности Галилея

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r}\,' = \vec{r}\,'(t)$ — положение точки M относительно двух реперов $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$. Взаимное положение этих реперов определяется формулами, связывающими их начала O, O' и орты $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$. Сейчас нам понадобятся три такие формулы:

$$O' = O, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}\,'_1 \\ \vec{e}\,'_2 \\ \vec{e}\,'_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$O' = O + \vec{a}, \; \vec{e}\,'_i = \vec{e}_i, \; i = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

$$O' = O + t \cdot \vec{v},\ \vec{e}\,'_i = \vec{e}_i,\ i = 1, 2, 3,\ t \in R, \tag{2.3}$$

где $\vec{a}, \vec{v} \in R^3$ — любые постоянные векторы, а P — любая ортогональная матрица, которую мы рассматривали в главе 4 (кинематика твердого тела). Эти формулы описывают соответственно поворот репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ вокруг своего начала, его сдвиг на вектор $\vec{a}$ и семейство его сдвигов на векторы $t \cdot \vec{v}$ при $t \in R$. Механический смысл формулы (2.3) состоит в том что репер $(O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$, рассматриваемый как твердое тело, движется относительно $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ поступательно и прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{v}$, или, как говорят, прямолинейно и равномерно.

Формулам (2.1), (2.2), (2.3) соответствуют следующие формулы преобразования координат точки M, которые мы запишем в терминах ее радиус-векторов $\vec{r}, \vec{r}\,'$:

$$\vec{r}\,' = P^T \vec{r}, \tag{2.4}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}, \tag{2.5}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - t \cdot \vec{v}, \tag{2.6}$$

Кроме этих преобразований, рассмотрим преобразование сдвига времени t по формуле

$$t' = t - t_0, \tag{2.7}$$

которое имеет смысл выбора нового начала t_0 отсчета времени.

Суперпозиции преобразований (2.4) – (2.7) называют *преобразованиями Галилея*. Множество преобразований Галилея образует группу относительно операции суперпозиции, она называется *группой Галилея* Γ. *Принцип относительности Галилея* состоит в том, что существует система координат K, удовлетворяющая свойству:

(б) правая часть $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ уравнения Ньютона (1.1) в системе координат K инвариантна относительно преобразований группы Γ.

Системы координат K, удовлетворяющие свойствам (а),(б), называют *инерциальными*.

Следствия принципа относительности

Принцип относительности Галилея налагает на правую часть $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ уравнения Ньютона, записанного в инерциальной системе координат, ряд ограничений. Некоторые из них мы здесь рассмотрим.

1. Инвариантность $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ относительно сдвигов времени t означает, что если $\vec{r} = \vec{\varphi}(t)$ — решение уравнения Ньютона (1.1), то при любом $\tau \in R$ его решением будет и $\vec{\varrho} = \vec{\varphi}(t+\tau)$, а это означает, что уравнение (1.1) естественно считать автономным:

$$\ddot{\vec{r}} = \Phi(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \tag{2.8}$$

(это свойство выражают еще словами: *законы механики Ньютона не меняются во времени*).

С другой стороны, это свойство не означает, что механика Ньютона имеет дело только с автономными уравнениями (2.8), неавтономные уравнения возникают, в частности, в результате различных замен переменных в этих автономных уравнениях.

2. Из инвариантности $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ относительно сдвигов $\vec{r}$ на любой постоянный вектор $\vec{a}$ следует, что если $\vec{r}_i = \vec{\varphi}_i(t), i = 1, \ldots, n$ — движение точек $M_1, \ldots, M_n$, удовлетворяющее уравнению Ньютона (1.1), то при любом $\vec{a} \in E^3$ движение $\vec{\varrho}_i = \vec{\varphi}_i(t) + \vec{a}$, $i = 1, \ldots, n$ также является решением уравнения (1.1) (это свойство выражают еще словами: *пространство однородно*). Отсюда следует, что величина $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ может быть записана как функция величин $\vec{r}_j - \vec{r}_k$, $j, k = 1, \ldots, n$ вместо величин $\vec{r}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

3. Из инвариантности $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ относительно преобразований вида (2.6) (эти преобразования не изменяют векторы $\ddot{\vec{r}}_i$ и $\vec{r}_j - \vec{r}_k$, а ко всем векторам $\dot{\vec{r}}_i$ добавляют постоянный вектор $\vec{v}$) следует, что величина $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ может быть записана как функция величин $\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k$, $j, k = 1, \ldots, n$ вместо величин $\dot{\vec{r}}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Итак, в инерциальной системе координат уравнение Ньютона, определяющее движение n точек, может быть записано в виде:

$$\ddot{\vec{r}}_i = f_i\left(\{\vec{r}_j - \vec{r}_k\}, \{\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k\}\right), \; i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

4. Инвариантность $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ относительно преобразований вида (2.4) выражают словами: *пространство изотропно*. Это свойство можно проверить для конкретных моделей уравнений Ньютона. С другой стороны, изотропность всегда можно иметь в виду

при конструировании конкретных моделей.

§3. Сила и масса. Второй и третий законы Ньютона

Рассмотрим движение точки в E^3 в некоторой фиксированной инерциальной системе координат.

Для этого запишем для нее уравнение движения Ньютона

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\mathcal{F}},\ \vec{r}, \vec{\mathcal{F}} \in R^3 \tag{3.1}$$

и начальные условия

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0,\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0. \tag{3.2}$$

Если бы мы знали функцию $\vec{\mathcal{F}}$, и она удовлетворяла бы условиям существования и единственности решения задачи Коши (3.1), (3.2), то можно было бы как-то найти или исследовать решение этой задачи, то есть движение точки. Для того, чтобы построить функцию $\vec{\mathcal{F}}$, вводят понятия *массы* и *силы*.

В кинематике мы изучали движение точек и тел (твердых тел). И точка, и твердое тело — математические абстракции, принятые в моделях теоретической механики. Так как в настоящем параграфе мы рассматриваем движение точки и собираемся ввести понятия массы и силы, то должны будем говорить о *массе точки* и о *силе, действующей на точку*. С другой стороны, реальные тела в природе не являются ни твердыми телами, ни точками, поэтому при введении понятий массы точки и силы, действующей на точку, мы будем обосновывать эти абстрактные понятия ссылками на свойства реальных тел в природе.

Как мы знаем, в инерциальной системе координат всякое ускорение тела вызывается действием на него других тел. Опыт показывает, что это действие имеет характер *взаимодействия*, и это положение принимается как один из постулатов механики Ньютона. В качестве меры механического взаимодействия тел вводится понятие силы, а именно постулируется, что сила $\vec{F}$, действующая на точку, — это вектор, одинаково направленный с ускорением точки $\vec{w} = \ddot{\vec{r}}$, которое вызывается этой силой.

Силы в механике подразделяют на *контактные* (силы давления, трения,...) и *полевые* (гравитационные, электромагнитные,...).

Такое разделение носит условный характер, — возникающие при контакте тел силы также обусловлены полями частиц, составляющих эти тела. Вопрос о природе сил взаимодействия не рассматривается в механике.

Статический способ измерения силы, действующей на точку, заключается в уравновешении ее действием на ту же точку определенным образом деформированной пружины-эталона, служащей *эталоном силы*. Если в результате совместного действия этих сил точка покоится в одной из инерциальных систем координат, то постулируется, что измеряемая сила равна по модулю эталону силы и направлена противоположно ей. Располагая несколько эталонов под различными углами, можно уравновесить (то есть измерить) любую силу (в принципе). Этим способом показывается, что сила действительно вектор.

Опыт показывает, что ускорения, приобретаемые одним и тем же телом под действием разных сил, пропорциональны этим силам, измеренным статическим способом. Это приводит к динамическому способу сравнения сил, основанному на равенстве:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{w_1}{w_2}. \tag{3.3}$$

Опыт показывает, что при любой силе отношение F/w для данного тела (точки) остается постоянным, а для разных тел это отношение, вообще говоря, различно. Оказывается, таким образом, что величина F/w характеризует некоторое свойство, присущее телу (точке). Это свойство называют *инертностью*. Для количественной характеристики инертности вводят новую величину — массу m, пропорциональную F/w. Способ сравнения масс может быть основан на равенстве:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w_2}{w_1}. \tag{3.4}$$

Опыт показывает, что масса обладает следующими свойствами:

– она *аддитивна*, то есть масса составного тела равна сумме масс его частей;

– она *постоянна*, то есть не изменяется со временем.

Точку, снабженную массой, называют *материальной точкой*. Иногда мы будем называть ее просто точкой. Конечную или бесконечную систему точек, снабженных массами называют *механической* или *материальной системой*. Обобщая результаты опытов, можно сформулировать второй и третий законы Ньютона.

Второй закон Ньютона

Ускорение материальной точки в инерциальной системе координат прямо пропорционально действующей на нее силе и обратно пропорционально ее массе.

При соответствующем выборе единиц измерения получаем:

$$m\vec{w} = \vec{F}, \tag{3.5}$$

то есть в уравнении (3.1) следует положить $\vec{\mathcal{F}} = \vec{F}/m$.

Третий закон Ньютона

Всякое действие материальных точек друг на друга имеет характер взаимодействия. Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей точки.

Если силы, упомянутые в этом законе, обозначить $\vec{F}_{1,2}$, $\vec{F}_{2,1}$ то получим формулу:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}. \tag{3.6}$$

§4. Законы сил

Как мы установили, построение функции $\vec{\mathcal{F}}$ в уравнении (3.1) может быть сведено, согласно второму закону Ньютона, к определению силы $\vec{F}$, действующей на точку.

Здесь мы приводим некоторые найденные опытным путем функции $\vec{F}$, описывающие тот или иной класс взаимодействий.

Закон всемирного тяготения

Пусть M_1, M_2 — две материальные точки, имеющие массы m_1, m_2 и пусть используются обозначения $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $r = |\vec{r}|$.

Закон всемирного тяготения состоит в том, что точки притягиваются друг к другу с силами $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ ($\vec{F}_{1,2}$ — сила, с которой точка M_2 притягивает точку M_1), которые могут быть вычислены по формуле:

$$\vec{F}_{1,2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \tag{4.1}$$

где γ — положительная постоянная, которую называют всемирной гравитационной постоянной.

Кулоновская сила

Пусть M_1, M_2 — две частицы, имеющие заряды q_1, q_2 и пусть используются обозначения $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $r = |\vec{r}|$. Закон Кулона состоит в том, что точки с разноименными зарядами притягиваются друг к другу, а точки с одноименными зарядами отталкиваются друг от друга с силами $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ ($\vec{F}_{1,2}$ — сила, с которой точка M_2 притягивает или отталкивает точку M_1), которые могут быть вычислены по формуле:

$$\vec{F}_{1,2} = \pm k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \tag{4.2}$$

где k — положительная постоянная, причем знак плюс соответствует случаю притягивающихся точек (то есть случаю разноименных зарядов).

Сила Лоренца

На точку с зарядом q (заряженную частицу), движущуюся в электромагнитном поле со скоростью $\vec{v}$, действует сила

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H}), \tag{4.3}$$

где $\vec{E}, \vec{H}$ — напряженность электрического и магнитного полей, а c — величина скорости света в пустоте.

Рассмотренные три вида сил называют *фундаментальными* (к фундаментальным относят также *ядерные силы*). Опыт показывает, что фундаментальные силы лежат в основе и всех других известных сил. В случае сил, непосредственно не сводящихся к фундаментальным, вводят экспериментально полученные приближенные законы сил, которые в принципе могли бы быть получены из фундаментальных. Мы рассмотрим ряд таких законов.

Однородная сила тяжести

У поверхности Земли силу действующую на материальную точку массы m называют *силой тяжести* и вычисляют по формуле:

$$\vec{F} = m\vec{g}, \tag{4.4}$$

где $\vec{g}$ — постоянный вектор, называемый ускорением свободного падения. В отличие от силы тяжести, действующей на тело (материальную точку), вес $\vec{P}$ — это сила, с которой тело действует на опору или подвес, неподвижные относительно этого тела. Если, например, тело с опорой (подвесом) неподвижны относительно Земли, то вес тела и сила тяжести, действующая на это тело, совпадают. В противном случае, $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{w})$, где $\vec{w}$ — ускорение тела с опорой (подвесом) относительно Земли.

Упругая сила (Закон Гука)

Так называют силу $\vec{F}$, пропорциональную отклонению $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ частицы (точки M) от положения равновесия O. Она задается следующей формулой:

$$\vec{F} = -\chi\vec{r}, \tag{4.5}$$

где χ — постоянная, зависящая от контекста рассматриваемой конкретной задачи.

Сила трения скольжения

Так называют силу $\vec{F}$, возникающую при скольжении тела по поверхности другого тела. Она задается формулой

$$\vec{F} = -fN\frac{\vec{v}}{v}, \tag{4.6}$$

где f — положительная постоянная (коэффициент трения скольжения), зависящая от природы соприкасающихся поверхностей, N — величина силы нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу, а $\vec{v}$ — скорость движения тела по поверхности другого тела.

Сила сопротивления среды

Так называют силу $\vec{F}$, действующую на тело в его поступательном прямолинейном движении в газе или жидкости. Она задается формулой

$$\vec{F} = -k\vec{v}, \tag{4.7}$$

где k — положительная постоянная (коэффициент сопротивления среды), зависящая от среды и тела, а $\vec{v}$ — скорость движения тела относительно среды.

Силу $\vec{F}$, действующую на тело в его поступательном движении (не обязательно прямолинейном), задают формулой

$$\vec{F} = -kS\vec{v}, \tag{4.8}$$

где S — площадь фигуры (проекции тела на плоскость перпендикулярную $\vec{v}$).

§5. Две задачи динамики

Первая задача динамики (*обратная задача*) заключается в построении уравнений движения механических систем, состоящих из материальных точек и/или твердых тел, по заданным их движениям и/или свойствам движений в E^3 (но, надо отметить, не обязательно в инерциальной системе координат). Законы сил, приведенные в §4 получены в результате решения подобных задач. В частности, *задача Ньютона*, результатом решения которой явился закон всемирного тяготения, состоит в определении силы, под действием которой планеты (материальные точки) совершают движения вокруг Солнца (материальной точки), удовлетворяющие следующим свойствам (*законам Кеплера*):
– орбиты (траектории движения) планет являются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце;
– секторные скорости планет постоянны (если Φ — фокус эллипса, в котором расположено Солнце, а $\vec{r}(t) = \overrightarrow{\Phi M(t)}$ — радиус-вектор планеты $M(t)$ в момент $t > t_0$, то ее *секторной скоростью* называют вектор $\vec{\Sigma}(t) = \vec{l} \cdot \dot{S}(t)$, где $S(t)$ — площадь фигуры, лежащей в плоскости эллипса между векторами $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$ и дугой $\overset{\frown}{M(t_0)M(t)}$ эллипса, а единичный вектор $\vec{l}$, ортогональный плоскости эллипса, равен $\Big(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\Big) \,/\, \Big|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\Big|$;
– квадраты периодов движения планет по своим эллипсам пропорциональны кубам больших полуосей этих эллипсов.

Обратные задачи динамики составляют специальный раздел аналитической динамики.

Вторая задача динамики (*прямая задача*) состоит в определении движений механической системы по известным силам. Применительно к случаю механической системы, состоящей из одной материальной точки, эта задача состоит в нахождении ее движения $\vec{r}(t)$ по известной действующей на нее силе $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ и сводится к решению задачи Коши:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \tag{5.1}$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0,\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0. \tag{5.2}$$

Задача (5.1), (5.2) (и, тем более, аналогичные задачи для более сложных механических систем), как правило, не разрешается в виде суперпозиции элементарных и других специальных функций математического анализа, поэтому для ее решения применяют приближенные методы (численные и аналитические), а для исследования свойств решений используют качественные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

§6. Уравнения движения механической системы

Здесь термином механическая или материальная система мы называем конечное множество материальных точек.

Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называют *внутренними силами*. Силы, действующие на материальные точки системы, вызванные материальными объектами, не входящими в состав рассматриваемой механической системы, называют *внешними силами*. Геометрическую сумму всех внешних (внутренних) сил, действующих на материальную точку, называют *главным вектором внешних (внутренних) сил, действующих на эту точку*. Главные векторы внешних и внутренних сил, действующих на материальную точку M_j, обозначим символами $\vec{F}_j$ и $\vec{F}'_j$ соответственно, а массу этой точки обозначим m_j.

Выписывая для всех точек механической системы уравнение Ньютона (5.1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m_j\ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, t) + \vec{F}'_j(\vec{r}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, t), \tag{6.1}$$

которые называют *уравнениями движения механической системы*.

Эти уравнения определяют движение механической системы в пространстве E^3, но, как уже отмечалось в §5, не обязательно в инерциальной системе координат. Хотя существование инерциальных систем координат и рассмотрение движений относительно них и составляет важнейшую часть механики Ньютона, это никак не исключает возможности и полезности изучения движений в других реперах, перемещающихся ускоренно относительно инерциальной системы. Например, движение Солнечной системы можно рассматривать в инерциальной системе координат, связанной с "неподвижными"звездами и, с другой стороны, движение спутника Земли естественно рассмотреть относительно репера с началом в "центре"Земли. От записи уравнения (6.1) относительно одного репера можно перейти к его записи относительно другого репера при помощи соответствующей замены переменных.

С другой стороны, очевидно, что не всякая замена переменных в (6.1) сохранит такой вид этих уравнений. В этой связи отметим, что когда говорят об уравнениях Ньютона, то имеют в виду именно уравнения (6.1), описывающие движение механической системы в пространстве E^3, но не обязательно в инерциальной системе координат. Как в случае инерциальной, так и в случае неинерциальной системы координат, запись уравнений движения механической системы в виде (6.1) предполагает выполнение второго и третьего закона Ньютона. Это предположение является неотъемлемой составной частью механики Ньютона.

Ради экономии места, далее вместо громоздких обозначений $\vec{F}_j(\vec{r}_1,\ldots,\dot{\vec{r}}_1,\ldots,t)$, $\vec{F}'_j(\vec{r}_1,\ldots,\dot{\vec{r}}_1,\ldots,t)$ мы часто будем использовать обозначения $\vec{F}_j$, $\vec{F}'_j$ соответственно.

§7. Теорема об изменении главного вектора количества движения

Кроме обозначений §6, введем в рассмотрение векторы

$$\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j,\ \vec{F}' = \sum_j \vec{F}'_j,\ \vec{Q} = \sum_j m_j\vec{v}_j, \tag{7.1}$$

где $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$ — скорость точки M_j. Эти векторы называют *глав-*

ным вектором внешних сил, *главным вектором внутренних сил* и *главным вектором количества движения механической системы* соответственно.

Согласно третьему закону Ньютона, любой внутренней силе механической системы отвечает другая внутренняя сила, уравновешивающая первую, поэтому $\vec{F}' = \vec{0}$.

Теорема 7.1. Если использовать обозначения (7.1), то истинны формулы:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F},\ d\vec{Q} = \vec{F}dt,\ \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt. \tag{7.2}$$

Доказательство. Ясно, что в (7.2) представлены три равносильных варианта записи одной и той же формулы, а первую из формул мы получим, если просуммируем уравнения (6.1) по всем j и учтем, что $\vec{F}' = \vec{0}$.

Что и требовалось. ■

Векторы $\vec{F}dt$, $\int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$ называют *элементарным импульсом силы* и *импульсом силы* (на промежутке $[t_0, t]$) соответственно, поэтому теорему 7.1 можно сформулировать в любом из следующих вариантов:

– производная главного вектора количества движения механической системы равна главному вектору сил;

– дифференциал главного вектора количества движения механической системы равен элементарному импульсу силы;

– приращение главного вектора количества движения механической системы равно импульсу силы.

§8. Уравнение движения центра инерции

Центр масс (или *центр инерции*) — это точка C, радиус-вектор $\vec{r}_C$ которой (относительно некоторой точки O) определяется формулой:

$$m\vec{r}_C = \sum_j m_j\vec{r}_j,\ m = \sum_j m_j, \tag{8.1}$$

где $\vec{r}_j$ — радиус-вектор точки M_j относительно точки O.

Дифференцируя первое из равенств (8.1) по t, получаем:

$$m\dot{\vec{r}}_C = \vec{Q}. \tag{8.2}$$

Дифференцируя (8.2) по t и учитывая теорему 7.1, приходим к уравнению:

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \vec{F}. \tag{8.3}$$

Этот результат формулируют обычно в виде теоремы.

Теорема 8.1. Центр масс механической системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой m, равной сумме масс всех точек системы, под действием силы, равной сумме сил, действующих на эти точки.

Так как $m\ddot{\vec{r}}_C = \dot{\vec{Q}}$, то теоремы 7.1 и 8.1 — разные формы одного и того же утверждения.

Следствие 8.1. Если сумма всех сил, действующих на точки механической системы, равна нулю, то ее центр масс движется прямолинейно и равномерно.

§9. Кинетический момент относительно неподвижной точки и теорема о его изменении

Если O, M — точки аффинного пространства и $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, то закрепленный вектор $\mu_O(M, \vec{G}) = (O, \vec{r} \times \vec{G})$ называют моментом закрепленного вектора $(M, \vec{G})$ относительно точки O. Ради краткости, этот вектор записывают также $\vec{r} \times \vec{G}$ и называют моментом вектора $\vec{G}$, предполагая, что точки O, M известны по умолчанию.

Как и ранее, символами $\vec{r}_j = \overrightarrow{OM_j}$, $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$, m_j обозначим радиус-вектор, скорость и массу материальной точки M_j, а символами $\vec{F}'_j$ и $\vec{F}_j$ — главные векторы внутренних и внешних сил, действующих на точку M_j (см. §6).

Векторы

$$\vec{\mathcal{M}}' = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}'_j,\ \vec{\mathcal{M}} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j,\ \vec{\mathcal{K}} = \sum_j \vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j \tag{9.1}$$

называют *главным моментом* соответственно *внутренних сил*, *внешних сил* и *количества движения механической системы* (относительно неподвижной точки O). Последний вектор называют также *кинетическим моментом механической системы* (относительно неподвижной точки O).

Теорема 9.1. $\vec{\mathcal{M}}' = \vec{0}$.

Доказательство. Действительно, так как

$$\vec{F}'_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}'_{j,i}, \ \ \vec{F}'_{j,i} = -\vec{F}'_{i,j},$$

где $\vec{F}'_{j,i}$ — сила действия точки M_i на M_j, и

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}'_{i,j} = \vec{0},$$

то получаем:

$$\vec{\mathcal{M}}' = \sum\nolimits_j \vec{r}_j \times \vec{F}'_j = \sum\nolimits_j \left(\vec{r}_j \times \sum\nolimits_{i \neq j} \vec{F}'_{j,i} \right) =$$

$$= \sum\nolimits_{i,j,\ i \neq j} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}'_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}'_{j,i} \right) =$$

$$= \sum\nolimits_{i,j,\ i \neq j} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}'_{i,j} - \vec{r}_j \times \vec{F}'_{i,j} \right) = \sum\nolimits_{i,j,\ i \neq j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}'_{i,j} = \vec{0}. \tag{9.2}$$

Что и требовалось. ■

Теорема 9.2. **(Об изменении кинетического момента) Производная кинетического момента механической системы относительно неподвижной точки равна главному моменту внешних сил относительно той же точки, то есть:**

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{M}}, \tag{9.3}$$

где $\vec{\mathcal{K}}, \vec{\mathcal{M}}$ определяются по формулам (9.1).

Доказательство. Рассмотрим дифференциальные уравнения Ньютона движения механической системы (см. (6.1)):

$$m_j \frac{d}{dt}\vec{v}_j = \vec{F}_j + \vec{F}'_j. \tag{9.4}$$

Умножая j - ое уравнение (9.4) слева векторно на $\vec{r}_j$ и суммируя полученные равенства по всем j, приходим к равенству:

$$\sum_j \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}(m_j\vec{v}_j) = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j. \tag{9.5}$$

Дифференцируя $\vec{\mathcal{K}}$ по t и используя равенства (9.5) и

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_j = \vec{v}_j, \ \frac{d}{dt}(\vec{r}_j \times \vec{v}_j) = \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}\vec{v}_j, \tag{9.6}$$

приходим к равенству (9.3).

Что и требовалось. ■

§10. Движение точки в центральном поле сил

Движение в E^3 механической системы, состоящей из одной материальной точки M массы m, определяется действующей на нее внешней силой, а также ее начальным положением и скоростью. Пусть соответствующее уравнение Ньютона автономно:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}), \tag{10.1}$$

тогда в каждый момент времени t сила $\vec{F}$ однозначно определяется положением $\vec{r}$ точки M в этот момент (то есть является вектор-функцией ее радиус-вектора или координат). В этом случае вектор-функцию $\vec{F}$ называют *силовым полем* и говорят, что точка M движется в *поле сил* $\vec{F}$ (или *в силовом поле* $\vec{F}$). Силовое поле $\vec{F}$ определено в некоторой области $D \subset E^3$, которая может совпадать или нет с пространством E^3.

Отметим, что введенное так силовое поле называют также *стационарным силовым полем* с тем чтобы отличать его от *нестационарного силового поля* $\vec{F}(\vec{r}, t)$. Мы далее будем говорить о силовом поле имея в виду стационарное силовое поле. Случай нестационарного силового поля мы рассмотрим только в §3 главы 10 (обобщенный потенциал и уравнения Лагранжа II рода).

Поле сил называют *центральным* в области $D \subset E^3$, если существует такая точка $O \subset E^3$ (*центр сил*), что на материальную точку единичной массы, помещенную в любую точку $M \in D$ действует сила, направленная вдоль прямой, проходящей через точки O и M. Часто при определении центрального поля предполагают еще, что величина силы зависит только от $r = |\overrightarrow{OM}|$. Мы также будем считать это последнее условие выполненным.

Запишем уравнение Ньютона (10.1) для случая движения материальной точки M массы m в центральном поле сил в системе координат с началом в центре сил O:

$$m\ddot{\vec{r}} = \delta \cdot \Phi(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{10.2}$$

при

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM},\ r = |\vec{r}|,\ \Phi(r) = |\vec{F}(\vec{r})|,\ \delta = \pm 1. \tag{10.3}$$

Законы сил, дающих примеры центральных силовых полей, мы рассмотрели в §4. Выпишем для этих примеров уравнения вида (10.2).

Уравнения Ньютона для двух гравитирующих точек

Рассмотрим в инерциальной системе координат с началом O движение материальных точек M_0, M под действием сил их взаимного притяжения по закону всемирного тяготения. Пусть m_0, m — массы этих точек и используются обозначения:

$$\vec{r}^{\,0} = \overrightarrow{OM_0},\ \vec{r} = \overrightarrow{OM},\ \vec{\varrho} = \overrightarrow{M_0M},\ r^0 = |\vec{r}^{\,0}|,\ r = |\vec{r}|,\ \varrho = |\,\vec{\varrho}\,|. \tag{10.4}$$

В соответствии со вторым законом Ньютона и законом всемирного тяготения, получаем:

$$\ddot{\vec{r}}^{\,0} = \gamma \frac{m}{\varrho^3}\vec{\varrho},\ \ \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{m_0}{\varrho^3}\vec{\varrho}, \tag{10.5}$$

где γ — всемирная гравитационная постоянная. Вычитая первое из этих уравнений из второго, приходим к искомому уравнению движения точки M в центральном силовом поле с центром силы в точке M_0:

$$m\ddot{\vec{\varrho}} = -\frac{\gamma^*}{\varrho^2} \cdot \frac{\vec{\varrho}}{\varrho} \tag{10.6}$$

при

$$\gamma^* = \gamma m \cdot (m_0 + m). \tag{10.7}$$

Уравнения Ньютона для двух электрических зарядов

Рассмотрим в инерциальной системе координат с началом O движение материальных точек M_0, M под действием сил их взаимного притяжения или отталкивания по закону Кулона. Пусть m_0, m и q_0, q — массы и заряды этих точек и используются обозначения:

$$\vec{r}^{\,0} = \overrightarrow{OM_0},\ \vec{r} = \overrightarrow{OM},\ \vec{\varrho} = \overrightarrow{M_0M},\ r^0 = |\vec{r}^{\,0}|,\ r = |\,\vec{r}\,|,\ \varrho = |\,\vec{\varrho}\,|. \quad (10.8)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона и законом Кулона, получаем:

$$\ddot{\vec{r}}^{\,0} = \pm k\frac{q_0 q}{m_0\varrho^3}\vec{\varrho},\quad \ddot{\vec{r}} = \mp k\frac{q_0 q}{m\varrho^3}\vec{\varrho}, \quad (10.9)$$

где k — положительная постоянная. Вычитая первое из этих уравнений из второго, приходим к искомому уравнению движения точки M в центральном силовом поле с центром силы в M_0:

$$m\ddot{\vec{\varrho}} = \mp\frac{k^*}{\varrho^2}\cdot\frac{\vec{\varrho}}{\varrho} \quad (10.10)$$

при

$$k^* = km\cdot(m^{-1} - m_0^{-1})\cdot q_0\cdot q, \quad (10.11)$$

где k — положительная постоянная, причем знак минус в (10.9) соответствует случаю притягивающихся точек (то есть случаю разноименных зарядов).

Уравнения Ньютона для точки в поле силы Гука

Рассмотрим движение материальной точки M массы m относительно системы координат с началом O под действием силы Гука, задаваемой формулой $\vec{F} = -\chi\vec{r}$, где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, а χ — постоянная, зависящая от контекста конкретной задачи. В соответствии со вторым законом Ньютона и формулой для силы Гука, получаем искомое уравнение движения точки M в центральном силовом поле с центром силы в точке равновесия O:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\chi r\cdot\frac{\vec{r}}{r}. \quad (10.12)$$

Теперь мы обратимся к уравнению (10.2) и применим теорему об изменении кинетического момента (теорему 9.2) к случаю движения материальной точки в центральном поле.

При движении материальной точки в центральном поле, главный момент внешних сил относительно центра сил O равен нулю, поэтому из теоремы 9.2 следует, что

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3). \tag{10.13}$$

Функцию $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ называют интегралом площадей, а постоянный вектор $\vec{c}$ и его компоненты c_1, c_2, c_3 — постоянными площадей. Если x, y, z — координаты радиус-вектора $\vec{r}$, то векторное равенство (10.13) можно записать в виде следующих трех скалярных равенств:

$$y\dot{z} - \dot{y}z = c_1, \; z\dot{x} - \dot{z}x = c_2, \; x\dot{y} - \dot{x}y = c_3. \tag{10.14}$$

Умножая эти три равенства на x, y, z соответственно и складывая полученные так равенства, приходим к следующему уравнению неподвижной плоскости, называемой *плоскостью Лапласа*:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0. \tag{10.15}$$

Это означает, что если $\vec{c} \neq \vec{0}$, то движение точки происходит в плоскости Лапласа (10.15), проходящей через центр сил O.

Упражнение 10.1. Рассмотрите случай $\vec{c} = \vec{0}$.

Геометрическая интерпретация интеграла площадей, которую мы сейчас рассмотрим (см. ниже теорему 10.1), показывает, что в задаче о движении материальной точки в центральном поле сил наличие этого интеграла является обобщением закона Кеплера о постоянстве секторной скорости планеты, рассматриваемой как материальная точка (см. §5).

Если $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$ — радиус-вектор точки $M(t)$ в момент $t > t_0$, то ее *секторной скоростью* называют вектор $\vec{\Sigma}(t) = \dot{S}(t) \cdot \vec{l}$, где $S(t)$ — площадь фигуры, лежащей в плоскости Лапласа (10.15) между векторами $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$, и дугой $\overset{\frown}{M(t_0)M(t)}$ траектории этой точки, а единичный вектор $\vec{l}$, ортогональный плоскости (10.15), равен $\left(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right) / \left|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right|$.

Теорема 10.1. **Пусть материальная точка $M(t)$ массы m движется в центральном поле сил с центром сил $O \in E^3$ и пусть $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$ — радиус-вектор этой точки. Тогда, если $\vec{\Sigma}(t)$ — секторная скорость точки $M(t)$, то:**

$$\vec{\Sigma}(t) = \frac{1}{2}\left(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right) = \frac{1}{2} \cdot \vec{c}, \tag{10.16}$$

где $\vec{c}$ — постоянная площадей в равенстве (10.13).

Доказательство. Так как второе из равенств в (10.16) совпадает с равенством (10.13), то нам остается доказать первое из них.

Пусть $h > 0$ и используются обозначения:

$$\Delta_h \vec{r}(t) = \vec{r}(t+h) - \vec{r}(t),\ \Delta_h S(t) = S(t+h) - S(t). \tag{10.17}$$

Так как

$$\begin{gathered} \Delta_h S(t) = \tfrac{1}{2}\,|\vec{r}(t) \times \Delta_h \vec{r}(t)| + o(h)(h \to 0), \\ \vec{l} = \left(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right) / \left|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right|. \end{gathered} \tag{10.18}$$

то

$$\begin{gathered} \dot{S}(t) = \lim_{h \to 0} \tfrac{\Delta_h S(t)}{h} = \tfrac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right|, \\ \vec{\Sigma}(t) = \dot{S}(t) \cdot \vec{l} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right). \end{gathered} \tag{10.19}$$

Что и требовалось доказать. ■

§11. Изменение кинетического момента, вычисляемого относительно подвижного полюса

Нам потребуется вспомнить здесь некоторые старые обозначения и ввести ряд новых. Из старых обозначений нам потребуются те, которые использовались в §10, а также радиус-вектор центра масс системы $\vec{r}_c = m^{-1} \sum_j m_j \vec{r}_j$, $m = \sum_j m_j$ и главный вектор ее количества движения $\vec{Q} = \sum_j m_j \vec{v}_j$. Символами $\vec{r}_A, \vec{v}_A, \vec{w}_A$ обозначим радиус-вектор, скорость и ускорение некоторой точки $A = A(t) \in E^3$, движущейся относительно некоторого репера с началом в точке O, и введем в рассмотрение величины:

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_A) \times \vec{F}_j,\ \vec{\mathcal{K}}_A = \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_A) \times m_j(\vec{v}_j - \vec{v}_A), \tag{11.1}$$

вектор-функции $\vec{\mathcal{M}}_A$, $\vec{\mathcal{K}}_A$ называют *главным моментом* соответственно *внешних сил* и *количества движения механической системы* относительно подвижного полюса A. Последний вектор называют также *кинетическим моментом механической системы* относительно подвижного полюса A.

Теорема 11.1. **(Об изменении кинетического момента) Производная кинетического момента механической системы относительно подвижного полюса A и ее главный момент внешних сил относительно того же полюса связаны равенством:**

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}}_A + m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{w}_A = \vec{\mathcal{M}}_A, \tag{11.2}$$

где $\vec{\mathcal{M}}_A, \vec{\mathcal{K}}_A$ определяются по формулам (11.1), $\vec{r}_c$ — радиус-вектор центра масс системы, а $\vec{r}_A, \vec{w}_A$ — радиус-вектор и ускорение полюса A.

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{K}}_A = \vec{\mathcal{K}} - \textstyle\sum_j m_j\vec{r}_j \times \vec{v}_A - \vec{r}_A \times \sum_j m_j(\vec{v}_j - \vec{v}_A) = \\ = \vec{\mathcal{K}} - \vec{r}_A \times \vec{Q} - m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{v}_A,\end{aligned} \tag{11.3}$$

то, подставляя

$$\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{K}}_A + \vec{r}_A \times \vec{Q} + m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{v}_A \tag{11.4}$$

в равенство $\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{M}}$ (см. (9.3)), получаем:

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}}_A = \vec{\mathcal{M}} - \vec{v}_A \times \vec{Q} - \vec{r}_A \times \dot{\vec{Q}} - m\vec{v}_c \times \vec{v}_A - m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{w}_A. \tag{11.5}$$

Используя здесь формулы $\vec{\mathcal{M}} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j$, $\dot{\vec{Q}} = \sum_j \vec{F}_j$, $m\vec{v}_c = \vec{Q}$, получаем равенство (11.2).

Что и требовалось доказать. ■

Следствие 11.1. **Если при любом t полюс $A = A(t)$ совпадает с центром масс системы или движется прямолинейно и равномерно, то равенство (11.2) становится таким же по форме, как равенство (9.3).**

Упражнение 11.1. Докажите, что

$$\vec{\mathcal{K}}_c = \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) \times m_j \vec{v}_j. \tag{11.6}$$

Указание: При любом векторе $\vec{P}$, не зависящем от j, истинно равенство

$$\sum_j m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) \times \vec{P} = \vec{0}. \tag{11.7}$$

§12. Работа силы и изменение кинетической энергии материальной точки

Рассмотрим уравнение движения в E^3 материальной точки M массы m, на которую действует сила $\vec{F}$:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \tag{12.1}$$

Пусть $v = |\vec{v}|$, а $T = mv^2/2$ — *кинетическая энергия* материальной точки M. Умножая уравнение (12.1) скалярно на $d\vec{r}$, получаем равенство:

$$dT = \vec{F}d\vec{r}. \tag{12.2}$$

Мы получили, что дифференциал кинетической энергии материальной точки равен *элементарной работе* главного вектора сил, приложенных к этой точке. Равенство (12.2) называют *теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме.*

Вместо равенства (12.2), записанного в терминах бесконечно малых величин, можно получить равенство относительно конечных величин, умножив скалярно равенство (12.1) на $\vec{v}$ или разделив равенство (12.2) на dt:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}\vec{v}. \tag{12.3}$$

Пусть $M_0 = M(t_0)$, $M = M(t)$ при $t > t_0$, а $\overset{\frown}{M_0M}$ — дуга траектории между этими положениями рассматриваемой материальной точки. Символами X, Y, Z обозначим координаты вектора $\vec{F}$ в рассматриваемом репере (их называют *компонентами силы* $\vec{F}$ в этом репере).

Считая траекторию точки и силу на траектории кусочно-гладкими и взяв криволинейный интеграл от равенства (12.2) по дуге $\overset{\frown}{M_0M}$, получаем:

$$T - T_0 = A,\ A = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} \vec{F}d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} (Xdx + Ydy + Zdz), \tag{12.4}$$

где $T_0 = T\,|_{t=t_0}$. Величину A называют *работой по перемещению материальной точки* под действием силы $\vec{F}$ из точки M_0 в точку M вдоль дуги $\overset{\frown}{M_0M}$.

Если задать дугу $\overset{\frown}{M_0M}$ в параметрической форме, то есть если $\vec{r}$ задать как функцию какого-то параметра, то работу можно записать как определенный интеграл по этому параметру. В качестве параметра обычно используют время t или естественную координату s. Выпишем соответствующие формулы:

$$A = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\vec{v}dt,\ A = \int_{s_0}^{s} \vec{F}\vec{\tau}ds = \int_{s_0}^{s} F\cos\angle(\vec{F},\vec{v})ds, \tag{12.5}$$

где $F = |\vec{F}|$, а $\vec{\tau} = \vec{v}/v$.

Первая из этих формул получается, например, интегрированием равенства (12.3) по t от t_0 до t, а вторую можно получить из первой заменой t на s с учетом формул $ds/dt = v$, $d\vec{r}/ds = \vec{\tau}$ (см. §1 главы 3). Еще проще вторую формулу можно получить из (12.4) заменив $d\vec{r}$ на $\vec{\tau}ds$, а интеграл по дуге на определенный интеграл по s от s_0 до s.

Производную

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v} \tag{12.6}$$

называют *мощностью* и говорят, что мощность характеризует интенсивность выполнения работы A силой $\vec{F}$. Используя понятие мощности и равенство (12.3) можно сказать, что *производная кинетической энергии материальной точки равна мощности работы, выполняемой главным вектором сил, действующих на эту точку.* Это еще одна формулировка теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки.

§13. Условия потенциальности силового поля

Рассмотрим движение в E^3 относительно репера $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ материальной точки M массы m в поле сил $\vec{F}(\vec{r})$ (см. §10) при $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(x,y,z) \in D$, где D — область (открытое связное множество) в R^3.

Если существует скалярная функция U аргументов x, y, z, удовлетворяющая в D условию

$$dU = \vec{F} d\vec{r}, \tag{13.1}$$

то поле сил $\vec{F}(\vec{r})$ называют *потенциальным* в области D. Функцию U (определенную с точностью до аддитивной постоянной) называют при этом *силовой функцией* или *силовым потенциалом* или *потенциалом поля* $\vec{F}(\vec{r})$.

Если $\vec{F}(\vec{r}) = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$, то есть если X, Y, Z — компоненты силы $\vec{F}$, то условие (13.1) можно записать иначе:

$$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = dU(x,y,z). \tag{13.2}$$

Условие (13.2) (как и (13.1)) равносильно формулам:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\ Y = \frac{\partial U}{\partial y},\ Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{13.3}$$

которые можно записать и иначе:

$$\vec{F} = grad\, U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \tag{13.4}$$

Необходимым и достаточным условием потенциальности силового поля $\vec{F}(\vec{r})$ является равенство

$$rot\, \vec{F} = \vec{0}. \tag{13.5}$$

Напомним, как можно вычислить $rot\, \vec{F}$:

$$rot\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{13.6}$$

Пусть A — работа по перемещению материальной точки в потенциальном поле силы $\vec{F}$ из точки M_0 в точку M вдоль дуги $\overset{\frown}{M_0M}$ (см. (12.4)). Тогда получаем:

$$A = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} dU = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0), \tag{13.7}$$

где x_0, y_0, z_0 и x, y, z координаты точек M_0, M в репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, — это означает, что работа A зависит только от конечных точек дуги траектории и не зависит от выбора дуги, соединяющей эти точки. В частности, равна нулю работа по перемещению материальной точки в потенциальном поле по любому замкнутому контуру из какой-то точки в эту же точку.

Множество точек $M \in E^3$ с координатами x, y, z, удовлетворяющее равенству $U(x, y, z) = C$, называют *эквипотенциальной поверхностью*. Обозначим эту поверхность U_C. Работа по перемещению материальной точки в потенциальном поле из произвольной точки поверхности U_{C_1} в произвольную точку поверхности U_{C_2} равна разности $C_2 - C_1$.

Важным следствием потенциальности силового поля является интеграл механической энергии: если поле $\vec{F}(\vec{r})$ имеет потенциал U, то из формул (13.1), (12.2) получаем равенство:

$$T - U = h, \tag{13.8}$$

где h — произвольная постоянная. Функцию $T-U$ называют *интегралом механической энергии*, а постоянную h называют *постоянной механической энергии*. Величину $\Pi = -U$ называют *потенциальной энергией* или *потенциальной функцией* материальной точки.

Пример 13.1. Рассмотрим два примера потенциальных силовых полей и один пример непотенциальной силы.

Поле силы тяжести

В этом случае (см. §4) сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку M массы m равна $m\vec{g}$. Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ориентированы так, что $\vec{k} = -g^{-1}\vec{g}$, $g = |\vec{g}|$, то получаем:

$$\vec{F} = -mg\vec{k}, \ \vec{F} d\vec{r} = -mg\, dz = d(C_1 - mgz). \tag{13.9}$$

Как видим, рассматриваемая сила потенциальна и, так как потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной, можно положить

$$U = -mgz, \, \Pi = mgz. \tag{13.10}$$

Интеграл энергии тогда будет равен

$$(mv^2/2) + mgz. \tag{13.11}$$

Центральное поле сил

В этом случае (см. §4) сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку M массы m равна $\delta \cdot \Phi(r) r^{-1} \vec{r}$, где $r = |\vec{r}|$, $\delta = \pm 1$, а Φ — некоторая функция аргумента r. Так как $\vec{r} d\vec{r} = \frac{1}{2} dr^2 = r\, dr$, то

$$\vec{F} d\vec{r} = \delta \Phi(r) r^{-1} \vec{r} d\vec{r} = d(\delta \int \Phi(r)\, dr), \tag{13.12}$$

это означает, что центральное поле сил является потенциальным, причем

$$U = \delta \int \Phi(r)\, dr,\ \Pi = -\delta \int \Phi(r)\, dr. \tag{13.13}$$

Интеграл энергии тогда будет равен величине

$$(mv^2/2) - \delta \int \Phi(r)\, dr. \tag{13.14}$$

Сила сопротивления среды

При изучении движения твердого тела массы m в газе или жидкости используют модель движения материальной точки M массы m, на которую действует сила $\vec{F} = -k\vec{v}$ (сопротивление среды — см. §4), где k — положительная постоянная (коэффициент сопротивления среды), зависящая от среды и тела, а $\vec{v}$ — скорость движения точки относительно среды. Так как эта сила зависит от скорости точки, то мы не можем говорить о силовом поле $\vec{F}(\vec{r})$, а значит и о его потенциальности и об интеграле механической энергии $T - U$. Поэтому, для того, чтобы в этом примере получить какой-то полезный результат об изменении кинетической энергии, вернемся к равенству (12.2) (то есть к теореме

Перейти к оглавлению на странице: 256

об изменении кинетической энергии материальной точки). Непосредственным вычислением получаем равенство

$$dT = \vec{F} d\vec{r} = -k\vec{v}\, d\vec{r} = -k\vec{v}\vec{v}\, dt = -kv^2\, dt, \tag{13.15}$$

то есть

$$dT/dt = -k\, v^2. \tag{13.16}$$

Это означает, что сила сопротивления среды вызывает рассеяние кинетической энергии движущейся материальной точки, — это пример *диссипативных сил*. В отличие от них, потенциальные силы являются примером *консервативных сил*.

§14. Кинетическая энергия системы и теорема Кенига

Рассмотрим движение относительно репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в E^3 механической системы из конечного числа точек M_j, имеющих массы m_j и суммарную массу $m = \sum_j m_j$.

Пусть $\vec{r}_j, \vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$, $v_j = |\vec{v}_j|$ — положение, скорость и величина скорости точки M_j, а $\vec{r}_c = m^{-1} \sum_j m_j \vec{r}_j$, $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$, $v_c = |\vec{v}_c|$ — положение, скорость и величина скорости центра масс C системы.

Кинетической энергией механической системы (в рассматриваемом репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) называют сумму кинетических энергий составляющих механическую систему материальных точек, то есть величину

$$T = \sum_j T_j, \; T_j = m_j {v_j}^2/2. \tag{14.1}$$

В репере $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, движущемся поступательно вместе с центром масс C (относительно $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$), кинетическая энергия системы равна

$$T_c = \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{v}_c)^2/2. \tag{14.2}$$

Теорема 14.1. (Кениг) Величины T, T_c связаны равенством

$$T = T_c + m v_c^2/2. \tag{14.3}$$

Доказательство. Так как

$$\sum_j (m_j\vec{v}_j - m_j\vec{v}_c) = \sum_j m_j\vec{v}_j - \sum_j m_j\vec{v}_c = \sum_j m_j\vec{v}_j - m\vec{v}_c = \vec{0}, \quad (14.4)$$

то получаем:

$$\begin{gathered} T = \tfrac{1}{2}\sum_j m_j\left((\vec{v}_j - \vec{v}_c) + \vec{v}_c\right)^2 = \\ = T_c + \sum_j (m_j\vec{v}_j - m_j\vec{v}_c)\vec{v}_c + \tfrac{1}{2}mv_c^2 = T_c + \tfrac{1}{2}mv_c^2. \end{gathered} \quad (14.5)$$

Что и требовалось доказать. ■

§15. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Здесь мы обобщим результаты §12 на случай механической системы из нескольких материальных точек и затем рассмотрим движение этой системы в предположении, что все силы имеют потенциал (см. §13).

Рассмотрим движение относительно репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в E^3 механической системы из конечного числа точек M_j, имеющих массы m_j и, как и в предыдущем пункте, обозначим символами $\vec{r}_j$, $\vec{v}_j$, v_j, T_j, положение, скорость, величину скорости и кинетическую энергию точки M_j, а символом T — кинетическую энергию всей механической системы.

Главные векторы внешних и внутренних сил, действующих на материальную точку M_j, обозначим символами $\vec{F}_j$ и $\vec{F}'_j$ соответственно (см. §6), а символами X_j, Y_j, Z_j, X'_j, Y'_j, Z'_j обозначим координаты этих векторов в рассматриваемом репере. Кроме того, при $t > t_0$, будем использовать обозначения $M_{j,0} = M_j(t_0)$, $M_j = M_j(t)$, а символом $\overset{\frown}{M_{j,0}M_j}$ обозначим дугу траектории между этими положениями материальной точки M_j.

Обратимся к дифференциальным уравнениям Ньютона движения механической системы (см. (6.1)):

$$m_j \frac{d}{dt}\vec{v}_j = \vec{F}_j + \vec{F}'_j. \quad (15.1)$$

Используя эти уравнения по отдельности, для каждой точки M_j можно получить равенства, аналогичные равенствам (12.2) –

(12.6). Суммируя каждое из них по всем j получаем:

$$dT = \delta A + \delta' A, \quad \delta A = \sum_j \vec{F}_j\, d\vec{r}_j, \quad \delta' A = \sum_j \vec{F}'_j\, d\vec{r}_j, \tag{15.2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_j \vec{F}_j \vec{v}_j + \sum_j \vec{F}'_j\, \vec{v}_j, \tag{15.3}$$

$$T - T_0 = A + A',$$

$$A = \sum_j A_j,\ A_j = \int\limits_{M_{j,0}\overset{\frown}{\ }M_j} \vec{F}_j d\,\vec{r}_j = \int\limits_{M_{j,0}\overset{\frown}{\ }M_j} (X_j\, dx_j + Y_j\, dy_j + Z_j\, dz_j),$$

$$A' = \sum_j A'_j,\ A'_j = \int\limits_{M_{j,0}\overset{\frown}{\ }M_j} \vec{F}'_j d\,\vec{r}_j = \int\limits_{M_{j,0}\overset{\frown}{\ }M_j} \big(X'_j\, dx_j + Y'_j\, dy_j + Z'_j\, dz_j\big), \tag{15.4}$$

$$A_j = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}_j\, \vec{v}_j\, dt,\ A_j = \int\limits_{S_{j,0}}^{S_j} \vec{F}_j \vec{\tau}_j ds_j = \int\limits_{S_{j,0}}^{S_j} F_j \cos\angle(\vec{F}_j, \vec{v}_j)\, ds_j,$$

$$A'_j = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}'_j\, \vec{v}_j\, dt,\ A'_j = \int\limits_{S_{j,0}}^{S_j} \vec{F}'_j\, \vec{\tau}_j ds_j = \int\limits_{S_{j,0}}^{S_j} F'_j \cos\angle(\vec{F}'_j, \vec{v}_j)\, ds_j, \tag{15.5}$$

$$N = \frac{dA}{dt} + \frac{dA'}{dt} = \sum_j \vec{F}_j \vec{v}_j + \sum_j \vec{F}'_j\, \vec{v}_j. \tag{15.6}$$

Обсудим эти равенства. Величина δA (величина $\delta' A$) равна сумме элементарных работ главных векторов внешних (внутренних) сил, приложенных к точкам механической системы. Равенство (15.2) называют *теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме*. Первое из равенств (15.4) называют *теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в конечной (интегральной) форме.*

Величину N называют *мощностью* и говорят, что мощность характеризует интенсивность выполнения работы $A + A'$ внутренними и внешними силами, действующими на точки механической системы. Используя понятие мощности и равенство (15.3) можно сказать, что *производная кинетической энергии механической системы равна мощности работы, выполняемой главными векторами внешних и внутренних сил, действующих на все точки этой системы*. Это еще одна формулировка теоремы об изменении кинетической энергии механической системы.

Формулы (15.5) дают возможность вычислять работы через определенные интегралы по времени и естественным координатам (каждая точка M_j имеет свою естественную координату s_j).

Теперь предположим, что существует вещественнозначная функция V такая, что

$$\sum_j \vec{F}_j d\,\vec{r}_j + \sum_j \vec{F}'_j d\,\vec{r}_j = dV, \tag{15.7}$$

тогда из формулы (15.2) получаем:

$$T - V = h, \tag{15.8}$$

где h — произвольная постоянная.

Функцию $T-V$ называют *интегралом механической энергии*, а постоянную h называют *постоянной механической энергии*. Величину $\Pi = -V$ называют *потенциальной энергией* механической системы.

Условие (15.7) выполнено, в частности, если все внешние силы $\vec{F}_j$ и внутренние силы $\vec{F}'_j$ потенциальны, то есть при любом j существуют вещественнозначные функции U_j, U'_j такие, что истинны равенства $\vec{F}_j\, d\,\vec{r}_j = dU_j$, $\vec{F}'_j\, d\,\vec{r}_j = dU'_j$. В этом случае можно положить $V = U + U'$ при $U = \sum_j U_j$, $U' = \sum_j U'_j$.

§16. Движение точки в центральном поле сил (продолжение)

Здесь мы продолжим рассмотрение движения материальной точки M массы m в центральном поле сил $\vec{F}(\vec{r})$ относительно репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в пространстве E^3. В §§10, 13 мы рассмотрели такой случай и получили следующие результаты:

(a) Движение точки M удовлетворяет уравнению Ньютона:

$$m\ddot{\vec{r}} = \delta \cdot \Phi(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{16.1}$$

где

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM},\ r = |\vec{r}|\,,\ \Phi(r) = \left|\vec{F}(\vec{r})\right|,\ \delta = \pm 1. \tag{16.2}$$

(b) Функция $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ является первым интегралом уравнения (16.1) (интегралом площадей), то есть она удовлетворяет равенству:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3), \tag{16.3}$$

где $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — вектор, постоянный на каждом решении уравнения (16.1). Если x, y, z — координаты радиус-вектора $\vec{r}$, то векторное равенство (16.3) можно записать в виде следующих трех скалярных равенств:

$$y\dot{z} - \dot{y}z = c_1,\ z\dot{x} - \dot{z}x = c_2,\ x\dot{y} - \dot{x}y = c_3, \tag{16.4}$$

из которых следует, что если $\vec{c} \neq \vec{0}$, то движение точки происходит в плоскости Лапласа $c_1x + c_2y + c_3z = 0$, проходящей через центр сил O. Геометрическая интерпретация интеграла площадей дается теоремой 10.1.

(c) Центральное поле сил является потенциальным, причем потенциал и потенциальная энергия задаются формулами

$$U(x, y, z) = \Gamma(r) = \pm \int \Phi(r)\,dr,\ \Pi(x, y, z) = -\Gamma(r), \tag{16.5}$$

а функция $(mv^2/2) - \Gamma(r)$ является первым интегралом уравнения (16.1) (интегралом энергии), то есть она удовлетворяет равенству

$$(mv^2/2) - \Gamma(r) = h, \tag{16.6}$$

где $v = |\vec{v}|\,,\ \vec{v} = \dot{\vec{r}}$, а величина h постоянна на каждом решении уравнения (16.1).

Эти результаты позволяют найти решение уравнения Ньютона (16.1) и описать возможные траектории точки в рассматриваемом случае ее движения в центральном поле сил.

Репер $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = c\vec{k} \tag{16.7}$$

при $c = |\vec{c}|$ (это означает, что мы полагаем $\vec{k} = \vec{c}/c$). В этом случае плоскость Лапласа ортогональна вектору $\vec{k}$, а множество точек этой плоскости можно описать формулой $z = 0$.

Движение точки M рассмотрим в плоскости Лапласа в цилиндрических координатах r, φ, z при $z = 0$. Так как в этих координатах $\vec{r} = r\vec{\tau}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{\tau}_r + r\dot{\varphi}\vec{\tau}_\varphi$ (см. (1.12), главы 3), то $\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = r\vec{\tau}_r\times(\dot{r}\vec{\tau}_r + r\dot{\varphi}\vec{\tau}_\varphi) = r^2\dot{\varphi}\,(\vec{\tau}_r\times\vec{\tau}_\varphi)$. Тогда, так как $\vec{\tau}_r\times\vec{\tau}_\varphi = \pm\vec{k}$, то из формулы (16.3) получаем равенство

$$r^2\dot{\varphi} = \sigma, \tag{16.8}$$

где постоянная σ равна $|\vec{c}|$ или $-|\vec{c}|$ в зависимости от знака величины $\dot{\varphi}$. Функцию $r^2\dot{\varphi}$ также называют *интегралом площадей*.

Так как проекция ускорения точки $\ddot{\vec{r}}$ на направление $\vec{\tau}_r = \vec{r}/r$ полярного радиуса равна $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ (см. (2.13) главы 3), то проектируя уравнение Ньютона (16.1) на это направление, получаем:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - \Psi(r) = 0,\ \ \Psi(r) = \Phi(r)\cdot\delta/m. \tag{16.9}$$

Используя здесь равенство (16.8), приходим к следующему уравнению относительно r:

$$\ddot{r} - \sigma^2 r^{-3} - \Psi(r) = 0. \tag{16.10}$$

Для нахождения $r(t)$, $\varphi(t)$ можно сначала решить это уравнение, а затем решить уравнение (16.8) относительно $\varphi(t)$. Отметим, что оба этих уравнения разрешимы в квадратурах.

Рассмотрим теперь важный частный случай движения материальной точки в центральном поле силы Ньютона. В этом случае функция Ψ задается формулой (см. (10.6)):

$$\Psi(r) = -\chi^2 r^{-2},\ \chi^2 = \gamma(m_0 + m). \tag{16.11}$$

Мы не будем заниматься решением соответствующего уравнения Ньютона во всех необходимых для практических расчетов подробностях, а изучим только, по каким траекториям (орбитам) может двигаться материальная точка в таком поле сил.

Если $\sigma = 0$, то из равенства (16.8) следует $\dot{\varphi} = 0$, а это означает, что движение рассматриваемой материальной точки M является прямолинейным.

Пусть теперь $\sigma \neq 0$. От уравнения (16.10) перейдем к уравнению для величины $\varrho = r^{-1}$ как функции полярного угла φ. Используя для этого равенство (16.8), получаем:

$$\begin{gathered} \dot{r} = \tfrac{d}{dt}\varrho^{-1} = -\varrho^{-2}\dot{\varphi}\tfrac{d\varrho}{d\varphi} = -\sigma\tfrac{d\varrho}{d\varphi}, \\ \ddot{r} = -\sigma\tfrac{d}{dt}\tfrac{d\varrho}{d\varphi} = -\sigma\dot{\varphi}\tfrac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = -\sigma^2\varrho^2\tfrac{d^2\varrho}{d\varphi^2}. \end{gathered} \tag{16.12}$$

Подставляя $\Psi(r) = -\chi^2 r^{-2}$, $r = \varrho^{-1}$ и полученное выражение для $\ddot{r}$ в уравнение (16.10) и учитывая, что $\sigma^2\varrho^{-2} > 0$, получаем:

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \varrho - \chi^2\sigma^{-2} = 0. \tag{16.13}$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$\varrho = B\cos(\varphi - \alpha) + \chi^2\sigma^{-2}, \tag{16.14}$$

где B, α — произвольные постоянные. Поэтому получаем:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}, \tag{16.15}$$

где $p = \sigma^2\chi^{-2}$, $e = Bp$, $f = \varphi - \alpha$.

Как известно из аналитической геометрии, равенство (16.15) задает *уравнение конического сечения* в полярных координатах. Начало координат O (центр сил) есть *фокус конического сечения*. Величины $p \in (0, +\infty)$ и $e \in [0, +\infty)$ называют *параметром* и *эксцентриситетом* конического сечения, а f — *истинной аномалией*. Истинная аномалия — это угловое удаление материальной точки от ближайшей к притягивающему центру точки P траектории (*орбиты*), которую называют *перицентром орбиты*. Наиболее удаленную от притягивающего центра точку A орбиты (если такая точка существует) называют *апоцентром орбиты*.

Как известно, кроме уравнений прямых (которые нас сейчас не интересуют, так как прямолинейное движение в рассматриваемой задаче возможно только при $\sigma = 0$), уравнение (16.15) описывает три типа конических сечений при $0 \leqslant e < 1$ (эллипс), $e = 1$ (парабола) и $e > 1$ (гипербола). Эта классификация орбит по величине эксцентриситета неудобна с практической точки зрения в случае, если определять тип орбиты необходимо по известным начальным данным (координатам и скоростям точки в некотором репере). Предпочтительнее в этом случае классификация по постоянной энергии

$$h = (mv^2/2) - m\chi^2 r^{-1}, \tag{16.16}$$

так как она легко вычисляется по начальным данным.

Теорема 16.1. **Условия $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$ эквивалентны условиям $h < 0$, $h = 0$, $h > 0$ соответственно.**

Доказательство. Следует из равенства

$$h = -m\chi^2 p^{-1}(1 - e^2)/2, \tag{16.17}$$

которое мы сейчас докажем.

Из равенства (16.15) получаем:

$$\varrho = r^{-1} = p^{-1}(1 + e\cos f), \ \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{d\varrho}{df} = -ep^{-1}\sin f. \tag{16.18}$$

Если $v = \left|\dot{\vec{r}}\right|$, то $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ (см. (1.13) главы 3), поэтому, используя первую из формул (16.12), формулу (16.18) и равенство $p = \sigma^2\chi^{-2}$, получаем:

$$v^2 = \sigma^2\left((d\varrho/d\varphi)^2 + \varrho^2\right) = \chi^2 p^{-1}(1 + 2e\cos f + e^2). \tag{16.19}$$

Используя в (16.16) первое из равенств (16.18) и равенство (16.19), получаем равенство (16.17).

Что и требовалось доказать. ■

Упражнение 16.1. **(см. [3], §9 главы 1) Исследуйте, по каким орбитам может двигаться материальная точка в поле силы Кулона и в поле силы Гука (см. §10).**

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 7. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§1. Масса и плотность. Геометрия масс

Чтобы начать изучение динамики твердого тела, прежде всего мы должны дать определение *модели твердого тела*, которую будем использовать в этом разделе механики.

Рассмотрим сплошную связную неизменяемую механическую систему (см. §1 главы 4) и жестко связанное с ней подвижное пространство с репером $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, и пусть D — область в подвижном пространстве, занимаемая этой механической системой.

Любую точку M области D можно задать ее радиус-вектором $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ или, что то же, ее координатами x, y, z. Будем говорить, что на рассматриваемой механической системе задано *распределение масс* (или *плотность*), если в области D задана некоторая скалярная неотрицательная функция μ. Значение плотности в точке M будем обозначать $\mu(M)$, $\mu(\vec{r})$ или $\mu(x, y, z)$.

Твердым телом будем называть сплошную связную неизменяемую механическую систему с заданным распределением масс на ней. Плотность твердого тела не зависит от времени.

Мы рассмотрели понятие твердого тела для случая, когда механическая система занимает область в E^3. Совершенно аналогично это понятие можно ввести для случаев, когда механическая система занимает область в E^2 или E^1, а также для случаев, когда все ее точки лежат на поверхности или кривой.

Моменты

В предположении, что плотность тела μ непрерывна в занимаемой им области D, введем в рассмотрение величины:

$$J(i,j,k) = \iiint\limits_D \mu(x,y,z)\, x^i y^j z^k \, dx\, dy\, dz, \;\; i,j,k \in [0:+\infty), \qquad (1.1)$$

которые называют моментами порядка $\alpha = i + j + k$.

Момент нулевого порядка $m = \iiint_D \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ называют *массой твердого тела*. Шесть величин

$$\begin{gathered} J_{xx} = J(0,2,0) + J(0,0,2),\ J_{yy} = J(2,0,0) + J(0,0,2), \\ J_{zz} = J(0,2,0) + J(2,0,0), \\ J_{yz} = J(0,1,1),\ J_{zx} = J(1,0,1),\ J_{xy} = J(1,1,0) \end{gathered} \tag{1.2}$$

имеют специальные названия: первые три называют *осевыми моментами инерции твердого тела*, а остальные три — *произведениями инерции* или *центробежными моментами инерции твердого тела*. Кроме массы тела и шести его моментов инерции, еще одну важную величину используют для характеристики распределения масс твердого тела — его *центр масс* C.

Радиус-вектор $\vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k}$ этой точки подвижного пространства определяется равенством:

$$\vec{r}_C = m^{-1} \iiint\limits_D \mu(x,y,z)\,\vec{r}\,dx\,dy\,dz, \tag{1.3}$$

то есть $x_C = m^{-1}J(1,0,0)$, $y_C = m^{-1}J(0,1,0)$, $z_C = m^{-1}J(0,0,1)$.

Отметим, что все десять введенных скалярных характеристик твердого тела так или иначе выражаются через моменты нулевого, первого и второго порядков. Их можно назвать *геометрическими характеристиками*, так как они зависят только от распределения масс и не меняются во времени.

Другие геометрические характеристики, которые мы далее рассмотрим, — это момент инерции относительно оси, радиус инерции, тензор инерции и эллипсоид инерции — все они определяются через уже введенные десять геометрических характеристик и также являются геометрическими характеристиками. В §2 мы рассмотрим и динамические характеристики твердого тела.

Момент инерции относительно оси

Моментом инерции материальной точки относительно оси l называют величину mh^2, где m — масса точки, а h — ее расстояние до оси l. *Моментом инерции твердого тела относительно оси* l называют величину $J_l = \iiint_D h^2(x,y,z)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, где D — область подвижного пространства, занимаемая телом, μ — плотность тела, а h — расстояние от точки $M \in D$ с координатами x, y, z до оси l. Прямые в подвижном пространстве, проходящие через точки O и $O+\vec{i}$, O и $O+\vec{j}$, O и $O+\vec{k}$ (оси координат без заданного направления) обозначим l_x, l_y, l_z соответственно. Если за l взять l_x, l_y, l_z, то для h^2 получим y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2, — это означает, что осевые моменты инерции J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — являются моментами инерции относительно осей l_x, l_y, l_z.

Для того, чтобы момент инерции материальной точки массы m относительно оси l был равен моменту инерции твердого тела той же массы относительно той же оси, эта точка должна находиться на расстоянии $d_l = \sqrt{J_l/m}$ от l. Величину d_l называют *радиусом инерции твердого тела относительно оси* l.

Следующие две теоремы служат основным средством вычисления момента инерции твердого тела относительно оси.

Теорема 1.1. **(Гюйгенс – Штейнер) Пусть l_C — ось, проходящая через центр масс C твердого тела параллельно оси l на расстоянии d от нее. Тогда**

$$J_l = md^2 + J_{l_C}, \tag{1.4}$$

где J_l, J_{l_C} — моменты инерции твердого тела относительно осей l и l_C, а m — масса этого тела.

Упражнение 1.1. **Докажите теорему 1.1 (см. [2], с.134).**

Теорема 1.2. **Пусть l — ось, проходящая через начало O репера $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, а α, β, γ — ее направляющие косинусы в этом репере. Тогда**

$$J_l = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2(J_{yz}\beta\gamma + J_{zx}\gamma\alpha + J_{xy}\alpha\beta), \tag{1.5}$$

где J_l — момент инерции твердого тела относительно оси l, а J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} — осевые и центробежные моменты инерции этого тела (см. (1.2)).

Упражнение 1.2. **Докажите теорему 1.2 (см. [2], с.136).**

Тензор инерции

Положим $J_{xy}=J_{yx}$, $J_{yz}=J_{zy}$, $J_{zx}=J_{xz}$ и рассмотрим матрицу квадратичной формы (1.5):

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Если $\vec{l}$ — единичный вектор вдоль оси l, то равенство (1.5) можно переписать в виде:

$$J_l = \vec{l} \cdot J\vec{l}, \tag{1.7}$$

— это следует из равенств:

$$\begin{gathered} \vec{l} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}, \\ J\vec{l} = (J_{xx}\alpha - J_{xy}\beta - J_{xz}\gamma)\vec{i} + (-J_{yx}\alpha + J_{yy}\beta - J_{yz}\gamma)\vec{j} + \\ +(-J_{zx}\alpha - J_{zy}\beta + J_{zz}\gamma)\vec{k}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Кроме репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рассмотрим также репер $(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, полученный из первого в результате поворота в подвижном точечном пространстве, то есть полученный ортогональным преобразованием базиса в соответствующем векторном пространстве R^3:

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

(см. (2.3) главы 4). Элементы матрицы J в новом базисе, вообще говоря, будут другими.

Упражнение 1.3. Найдите формулы преобразования элементов матрицы J при переходе к новому базису по формуле (1.9).

Преобразования элементов матрицы J, соответствующие всевозможным преобразованиям базисов по формулам (1.9), оказываются тензорными. Тем самым, таблица J в заданном базисе вместе с формулами ее преобразования к любому другому базису задает тензор (§2 главы 14). Этот тензор второго ранга называют *тензором инерции твердого тела для точки O*.

При заданном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, матрица J является матрицей некоторого линейного оператора в R^3, его называют *оператором инерции твердого тела* в этом репере.

Эллипсоид инерции

При фиксированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, рассмотрим пучок всех прямых (осей), проходящих через точку O. Относительно каждой оси l пучка данное твердое тело имеет свой момент инерции J_l. Картину распределения момента инерции твердого тела в зависимости от выбора оси пучка дает *эллипсоид инерции*.

На каждой из осей l пучка выберем точку M с координатами x, y, z такую, что ее расстояние до точки O равно $1/\sqrt{J_l}$, то есть $r = \left|\overrightarrow{OM}\right| = 1/\sqrt{J_l}$. В этом случае $x = r\alpha$, $y = r\beta$, $z = r\gamma$, где, как и ранее, α, β, γ — направляющие косинусы оси l. Учитывая эти формулы в равенстве (1.5), получаем уравнение эллипсоида

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2(J_{yz}yz + J_{zx}zx + J_{xy}xy) = 1, \qquad (1.10)$$

его называют *эллипсоидом инерции твердого тела* для точки O.

Если M — точка на этом эллипсоиде, то момент инерции твердого тела относительно оси l, проходящей через эту точку и начало O репера, равен величине $1/\left|\overrightarrow{OM}\right|$.

Будем наименьшей (наибольшей) из главных осей эллипсоида инерции называть ту его главную ось, которой соответствует наименьший (наибольший) из его главных диаметров. Тогда можно сказать, что наименьший момент инерции тело имеет относительно наибольшей оси его эллипсоида инерции, а наибольший — относительно наименьшей оси этого эллипсоида.

Главные оси эллипсоида (1.10) называют *главными осями инерции твердого тела* для точки O. Если орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ репера направлены по главным осям эллипсоида инерции, то центробежные моменты инерции равны нулю, а осевые моменты инерции равны моментам инерции относительно главных осей, — их называют *главными моментами инерции твердого тела* для точки O. В этом репере уравнение эллипсоида принимает канонический вид:

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 = 1. \qquad (1.11)$$

Если начало O этого репера совпадает с центром масс C твердого тела, то эллипсоид инерции называют его *центральным эллипсоидом инерции*, его главные оси называют *главными центральными осями инерции, а величины* J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — его *главными центральными моментами инерции.*

§2. Основные законы динамики твердого тела

Идея твердого тела как сплошной связной неизменяемой механической системы с заданным распределением масс на ней позволяет представить себе интуитивно такое твердое тело как механическую систему из достаточно большого числа N материальных точек M, расстояния между которыми не меняются во времени. С другой стороны, такая механическая система является частным случаем общей механической системы из конечного числа материальных точек, для которой в главе 6 мы доказали ряд теорем: о движении центра масс, об изменении главного вектора количества движения, об изменении кинетического момента и об изменении кинетической энергии.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать движение твердого тела в предположении, что для него истинны аналогичные утверждения, которые мы будем называть основными законами динамики твердого тела. Ниже мы сформулируем эти законы, но предварительно мы введем в рассмотрение ряд необходимых для этого величин (количество движения твердого тела, его кинетическую энергию и т.д.), — они являются естественным обобщением соответствующих величин для механических систем из конечного числа материальных точек.

Динамические характеристики твердого тела

Основные динамические характеристики твердого тела те же, что у механической системы из нескольких материальных точек — количество движения, кинетический момент (момент количества движения) и кинетическая энергия. Учитывая, что под твердым телом понимают сплошную связную неизменяемую механическую систему с заданным распределением масс на ней, для него эти характеристики вводятся аналогичными формулами, в которых конечные суммы по материальным точкам заменяются соответствующими интегралами по области, занимаемой телом, с учетом распределения масс в этой области.

Пусть $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ — неподвижный репер, $(M_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — подвижный репер, жестко связанный с твердым телом, а ξ, η, ζ и x, y, z — координаты точки M твердого тела в этих реперах. Символами $\vec{r}$, $\vec{v}$, $v = |\vec{v}|$ будем обозначать радиус-вектор, скорость и величину скорости этой точки твердого тела в неподвижном репере, а символами $\vec{r}_A$, $\vec{v}_A$ — радиус-вектор и скорость некоторой точки A (полюса) в этом же репере.

Если $\mu = \mu(x, y, z)$ — распределение масс твердого тела, то его *количество движения* $\vec{Q}$, *кинетический момент* $\vec{\mathcal{K}}_A$ *относительно полюса* A *и кинетическую энергию* T *твердого тела* определяют формулами:

$$\vec{Q} = \iiint\limits_D \mu(x, y, z)\, \vec{v}\, dx\, dy\, dz, \tag{2.1}$$

$$\vec{\mathcal{K}}_A = \iiint\limits_D \mu(x, y, z)\, (\vec{r} - \vec{r}_A) \times (\vec{v} - \vec{v}_A)\, dx\, dy\, dz, \tag{2.2}$$

$$T = \frac{1}{2} \iiint\limits_D \mu(x, y, z)\, v^2 dx\, dy\, dz. \tag{2.3}$$

Так как подынтегральные выражения в этих формулах зависят от скоростей точек твердого тела, а распределение скоростей этих точек дается формулой Эйлера (см. (7.10) главы 4), то используя эту формулу можно преобразовать выражения для величин $\vec{Q}, \vec{\mathcal{K}}_A, T$.

В качестве примера мы получим сейчас формулу для кинетического момента твердого тела относительно его неподвижной точки, — она понадобится нам далее.

Кинетический момент $\vec{\mathcal{K}}_O$ твердого тела относительно неподвижной точки O твердого тела согласно (2.2) равен:

$$\vec{\mathcal{K}}_O = \iiint\limits_D \mu(x, y, z)\, (\vec{r} \times \vec{v})\, dx\, dy\, dz, \tag{2.4}$$

поэтому, используя формулу Эйлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ и формулу двойного векторного произведения $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{r}\vec{\omega})\, \vec{r}$, получаем:

$$\begin{gathered} \vec{\mathcal{K}}_O = \iiint\limits_D \mu(x, y, z)\, (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))\, dx\, dy\, dz = \\ = \left(\iiint\limits_D \mu(x, y, z)\, r^2\, dx\, dy\, dz \right) \vec{\omega} - \iiint\limits_D \mu(x, y, z)\, (\vec{r}, \vec{\omega}) \vec{r}\, dx\, dy\, dz\,. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Пусть $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и $\mathcal{K}_x$, $\mathcal{K}_y$, $\mathcal{K}_z$ — координаты векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\mathcal{K}}_O$ в подвижном репере. Тогда, проектируя вектор $\vec{\mathcal{K}}_O$ на орты подвижного репера, получаем:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_x \\ \mathcal{K}_y \\ \mathcal{K}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

то есть

$$\vec{\mathcal{K}}_O = J\vec{\omega}, \tag{2.7}$$

где J — оператор инерции (см.§1).

В главных осях инерции для точки O матрица оператора J диагональна, и мы получаем:

$$\mathcal{K}_x = J_{xx}\omega_x,\ \mathcal{K}_y = J_{yy}\omega_y,\ \mathcal{K}_z = J_{zz}\omega_z. \tag{2.8}$$

Упражнение 2.1. Покажите, что аналогичные равенства (2.6) – (2.8) верны и для кинетического момента $\vec{\mathcal{K}}_A$ относительно точки A, принадлежащей твердому телу (пространству, связанному с этим телом).

Главные векторы и моменты сил, действующих на твердое тело. Работа сил, действующих на твердое тело

Задание главного вектора сил и главного момента сил является составной частью задания модели динамики твердого тела (как и задание сил в модели динамики механической системы из конечного числа материальных точек). Для фактического решения этой задачи можно использовать рассмотренное выше интуитивное представление твердого тела механической системой из достаточно большого числа N материальных точек, расстояния между которыми не меняются во времени. На точки этой системы в данный момент времени действуют какие-то силы. Зная эти силы, через них можно вычислить главный вектор сил и главный момент сил системы как суммы по всем точкам системы главных векторов сил, приложенных к этим точкам, и главных моментов этих сил. Если эти конечные суммы имеют предел при $N \to \infty$, то эти предельные величины и принимают за главный вектор сил и главный момент сил, действующих на твердое тело. На этом же пути получают и величину работы всех сил, действующих на твердое тело. Вообще же, задача вычисления главного вектора сил, главного момента сил и работы сил, действующих на твердое тело, требует отдельного рассмотрения. Здесь мы этим заниматься не будем.

Основные законы динамики твердого тела

Как мы говорили в начале настоящего параграфа, утверждения, аналогичные теоремам о движении центра масс, об изменении главного вектора количества движения, об изменении кинетического момента и об изменении кинетической энергии, в динамике твердого тела предполагаются исходными положениями этой теории и называются *основными законами динамики твердого тела.* В настоящем пункте мы приводим их формулировки.

Закон (теорема) о движении центра масс твердого тела состоит в том, что

$$m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}, \tag{2.9}$$

где $\vec{r}_c$ — радиус-вектор центра масс твердого тела, m — его масса, а $\vec{F}$ — главный вектор действующих на него сил.

Иначе говоря, центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе этого твердого тела, под действием силы, равной главному вектору действующих на него сил.

Закон (теорема) об изменении главного вектора количества движения твердого тела состоит в том, что

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F},\ d\vec{Q} = \vec{F}dt,\ \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt, \tag{2.10}$$

где $\vec{Q}$ — количество движения твердого тела, $\vec{Q}_0 = \vec{Q}\,|_{t=t_0}$, а $\vec{F}$ — главный вектор сил, действующих на твердое тело.

Закон (теорема) об изменении кинетического момента твердого тела состоит в том, что производная кинетического момента $\vec{\mathcal{K}}_A$ этого тела относительно подвижного полюса A и главный момент $\vec{\mathcal{M}}_A$ действующих на тело внешних сил относительно того же полюса связаны равенством:

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}}_A + m\left(\vec{r}_c - \vec{r}_A\right) \times \vec{w}_A = \vec{\mathcal{M}}_A, \tag{2.11}$$

где $\vec{r}_c$ — радиус-вектор центра масс тела, $\vec{r}_A$, $\vec{w}_A$ — радиус-вектор и ускорение полюса A, а m — масса тела.

Закон (теорема) об изменении кинетической энергии твердого тела состоит в том, что

$$T - T_0 = \mathcal{A}. \tag{2.12}$$

где T — кинетическая энергия твердого тела в момент времени t, $T_0 = T|_{t=t_0}$, а $\mathcal{A}$ — работа всех сил, действующих на тело, на промежутке времени $[t_0, t]$.

§3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

Динамические уравнения Эйлера

Теорема об изменении кинетического момента $\vec{\mathcal{K}}_O$ твердого тела относительно его неподвижной точки O под действием сил, главный момент которых относительно этой же точки равен $\vec{\mathcal{M}}_O$, выражается равенством:

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O. \tag{3.1}$$

По формуле относительной производной (§2 главы 5), получаем:

$$\frac{d'}{dt}\vec{\mathcal{K}}_O + \vec{\omega} \times \vec{\mathcal{K}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O, \tag{3.2}$$

где $\vec{\omega}$ — угловая скорость твердого тела.

Пусть орты подвижного репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, жестко связанного с телом, направлены по главным осям инерции этого тела, и пусть $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, $\mathcal{K}_x, \mathcal{K}_y, \mathcal{K}_z$ и M_x, M_y, M_z — координаты векторов $\vec{\omega}$, $\vec{\mathcal{K}}_O$ и $\vec{\mathcal{M}}_O$ в подвижном репере.

Так как в рассматриваемом случае $\mathcal{K}_x = J_{xx}\omega_x$, $\mathcal{K}_y = J_{yy}\omega_y$, $\mathcal{K}_z = J_{zz}\omega_z$ (см. (2.8)), а относительная производная $d'\vec{\mathcal{K}}_O/dt$ — это производная в подвижном репере, то $d'\vec{\mathcal{K}}_O/dt = J_{xx}\dot{\omega}_x\vec{i} + J_{yy}\dot{\omega}_y\vec{j} + J_{zz}\dot{\omega}_z\vec{k}$. Поэтому, проектируя равенство (3.2) на подвижные орты, получаем:

$$\begin{aligned}
J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{zz} - J_{yy})\omega_y\omega_z &= M_x, \\
J_{yy}\dot{\omega}_y + (J_{xx} - J_{zz})\omega_x\omega_z &= M_y, \\
J_{zz}\dot{\omega}_z + (J_{yy} - J_{xx})\omega_x\omega_y &= M_z,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

— это динамические уравнения Эйлера.

Кинематические уравнения Эйлера

Величины M_x, M_y, M_z могут быть функциями не только времени и неизвестных ω_x, ω_y, ω_z уравнений (3.3), но также и других переменных. В частности, этими другими переменными могут быть углы Эйлера φ, ψ, ϑ. Для того, чтобы интегрировать в таких случаях уравнения (3.3), их необходимо дополнить какими-то уравнениями относительно всех тех переменных, от которых величины M_x, M_y, M_z зависят.

Дифференциальные уравнения относительно углов Эйлера мы уже вывели (см. (6.19) главы 4):

$$\omega_x = \dot\psi\sin\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta\cos\varphi,\ \omega_y = \dot\psi\cos\varphi\sin\vartheta - \dot\vartheta\sin\varphi,\ \omega_z = \dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi, \tag{3.4}$$

— их называют *кинематическими уравнениями Эйлера.*

§4. Уравнения движения свободного твердого тела

Движение твердого тела рассмотрим в репере $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, а с самим телом свяжем подвижный репер $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, где C — центр масс твердого тела, а орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по его главным центральным осям инерции.

Пусть $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, $\mathcal{K}_x, \mathcal{K}_y, \mathcal{K}_z$ и M_x, M_y, M_z — координаты векторов $\vec\omega$, $\vec{\mathcal{K}}_C$ и $\vec{\mathcal{M}}_C$ в подвижном репере $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (в §3 это были координаты векторов $\vec\omega$, $\vec{\mathcal{K}}_O$ и $\vec{\mathcal{M}}_O$ в другом подвижном репере — $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$). Опираясь на упражнение 2.1 и действуя как в §3, можно вывести *динамические уравнения Эйлера* для рассматриваемого общего (называемого *свободным*) случая движения твердого тела:

$$\begin{aligned} J_{xx}\dot\omega_x + (J_{zz} - J_{yy})\omega_y\omega_z &= M_x, \\ J_{yy}\dot\omega_y + (J_{xx} - J_{zz})\omega_x\omega_z &= M_y, \\ J_{zz}\dot\omega_z + (J_{yy} - J_{xx})\omega_x\omega_y &= M_z. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Как и в §3, к этим динамическим уравнениям Эйлера можно добавить *кинематические уравнения Эйлера*:

$$\omega_x = \dot\psi\sin\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta\cos\varphi,\ \omega_y = \dot\psi\cos\varphi\sin\vartheta - \dot\vartheta\sin\varphi,\ \omega_z = \dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi. \tag{4.2}$$

Хотя уравнения (4.1), (4.2) по виду полностью идентичны уравнениям (3.3), (3.4), входящие в них параметры J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, величины M_x, M_y, M_z и переменные $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, φ, ψ, ϑ имеют различный смысл.

Для определения положения и скоростей точек твердого тела в неподвижном репере кроме величин $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, φ, ψ, ϑ достаточно знать радиус-вектор $\vec{r}_c$ и скорость $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$ центра масс тела C. Эти величины нам дает теорема о движении центра масс твердого тела состоящая в том, что (см. (2.9)):

$$m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}, \tag{4.3}$$

где m — масса твердого тела, а $\vec{F}$ — главный вектор действующих на него сил.

Уравнения (4.1), (4.2), (4.3) называют *уравнениями движения свободного твердого тела*. Если величины M_x, M_y, M_z и $\vec{F}$ могут быть выражены как функции переменных $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \varphi$, ψ, ϑ, $\vec{r}_c$, $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$ и, возможно, их производных и каких-то параметров (то есть, не зависящих от времени величин), то эти обыкновенные дифференциальные уравнения, вообще говоря, образуют замкнутую систему. Если это не так, то есть если упомянутые величины зависят от каких-то дополнительных переменных, то для решения уравнений (4.1), (4.2), (4.3) к ним придется добавить какие-то уравнения относительно этих дополнительных переменных и т. д.

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 8. ДИНАМИКА ТОЧКИ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Практика показывает, что динамика таких объектов, как ракета, реактивный самолет, катящийся снежный ком, движущаяся капля при испарении или конденсации паров на ее поверхности и т.п. хорошо описывается моделью точки или тела переменной массы. *Материальной точкой переменной массы* будем называть геометрическую точку, снабженную массой, величина которой зависит от времени. *Телом переменной массы* естественно называть твердое тело, плотность которого есть функция не только координат, но и времени. Далее мы ограничимся рассмотрением динамики точки с переменной массой. Для того, чтобы сформулировать основное уравнение модели Мещерского динамики точки переменной массы, материальную точку переменной массы заменяют на малом временном промежутке механической системой из конечного числа материальных точек и применяют к ней теорему об изменении главного вектора количества движения.

§1. Уравнение Мещерского

Рассмотрим на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ механическую систему, образованную частицами, из которых состоит материальная точка в момент времени t, и частицами, которые присоединяются к этой точке за этот промежуток времени. Будем использовать следующие обозначения:

$m(t)$ – масса материальной точки в момент t,

Δm_1 – суммарная масса всех присоединившихся частиц за время от t до $t + \Delta t$,

Δm_2 – суммарная масса всех отделившихся частиц за время от t до $t + \Delta t$,

$\vec{v}(t)$ – скорость материальной точки в момент t,

$\vec{u}_1(t)$ – скорость центра масс всех присоединившихся частиц в момент t,

$\vec{u}_2(t)$ – скорость центра масс всех отделившихся частиц в момент t.

Если $\vec{Q}(t)$ — главный вектор количества движения рассматриваемой системы, то

$$\begin{gathered}\vec{Q}(t) = m(t)\vec{v}(t) + \Delta m_1 \vec{u}_1(t),\\ \vec{Q}(t+\Delta t) = m(t+\Delta t)\vec{v}(t+\Delta t) + \Delta m_2 \vec{u}_2(t+\Delta t)\end{gathered} \tag{1.1}$$

и по теореме об изменении главного вектора количества движения получаем:

$$\frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = \vec{F}(t), \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{Q}(t+\Delta t) - \vec{Q}(t)}{\Delta t} = \vec{F}(t), \tag{1.2}$$

где $\vec{F}(t)$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе.

Текущую массу точки переменной массы обычно представляют в виде $m(t) = m_0 + m_1(t) - m_2(t)$, где $m_0 = m(t_0)$, t_0 — некоторый фиксированный момент времени, $m_1(t)$ — суммарная масса частиц, присоединившихся к этой точке за время от t_0 до t, а $m_2(t)$ — суммарная масса частиц, отделившихся от нее за то же время.

Используя в (1.2) равенства (1.1), приходим к *уравнению Мещерского* движения материальной точки переменной массы:

$$m(t)\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{R}(t), \tag{1.3}$$

где

$$\begin{gathered}\vec{R}(t) = \tfrac{dm_1(t)}{dt}\,\vec{u}_1^r(t) - \tfrac{dm_2(t)}{dt}\,\vec{u}_2^r(t),\\ \vec{u}_1^r(t) = \vec{u}_1(t) - \vec{v}(t), \; \vec{u}_2^r(t) = \vec{u}_2(t) - \vec{v}(t).\end{gathered} \tag{1.4}$$

Величины $\vec{u}_1^r(t)$, $\vec{u}_2^r(t)$ — это *относительные скорости центров масс присоединяющихся и отделяющихся частиц в момент* t, а величину $\vec{R}(t)$ называют *реактивной силой.*

Теперь мы рассмотрим шесть простых частных случаев уравнения Мещерского.

(a) Если отделяющихся от точки переменной массы частиц нет, то $m_2(t) = 0$, $m(t) = m_0 + m_1(t)$. Полагая в (1.3) $\vec{u}^r(t) = \vec{u}_1^r(t)$, в этом случае получаем уравнение:

$$m(t)\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) + \frac{dm(t)}{dt}\,\vec{u}^r(t). \tag{1.5}$$

(b) Если присоединяющихся к точке переменной массы частиц нет, то $m_1(t) = 0\,, m(t) = m_0 - m_2(t)$. Полагая в (1.3) $\vec{u}^r(t) = \vec{u}_2^r(t)$, и в этом случае получаем уравнение (1.5).

(c) Если $\vec{u}_1^r(t) = \vec{u}_2^r(t)$, то, полагая $\vec{u}^r(t) = \vec{u}_1^r(t) = \vec{u}_2^r(t)$, и в этом случае приходим к уравнению (1.5).

(d) Если $m(t) = m_0\,, dm_1(t)/dt = dm_2(t)/dt$ на рассматриваемом промежутке времени, то уравнение Мещерского можно записать в виде:

$$m\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) + \frac{dm_1(t)}{dt}\,\left(\vec{u}_1^r(t) - \vec{u}_2^r(t)\right). \tag{1.6}$$

(e) Если $\vec{u}_1(t) = \vec{u}_2(t) = \vec{0}$ на рассматриваемом промежутке времени, то уравнение Мещерского можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\,(m(t)\vec{v}(t)) = \vec{F}(t)\,. \tag{1.7}$$

(f) Если $\vec{u}_1^r(t) = \vec{u}_2^r(t) = \vec{0}$ на рассматриваемом промежутке времени, то $\vec{R} = \vec{0}$ на этом промежутке, а уравнение Мещерского по форме совпадает с уравнением движения точки постоянной массы:

$$m(t)\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t). \tag{1.8}$$

§2. Две задачи Циолковского

Первая задача

Реактивную силу (см. (1.4)), возникающую в результате истечения некоторого вещества из сопел ракеты, называют *тягой*. Рассмотрим движение ракеты в космическом пространстве при условии, что тяга ракеты значительно превосходит остальные действующие на нее силы (силы сопротивления среды, силы гравитационного притяжения и т.д.). В этом случае целесообразно в качестве первого приближения рассмотреть такую модель динамики ракеты, в которой все действующие на ракету силы, кроме тяги, равны нулю, а сама ракета принимается за точку переменной массы.

Относительную скорость выброса частиц из сопел ракеты запишем в виде $\vec{u}^r(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t) = -u^r\vec{i}$, где $\vec{i}$ — орт вектора тяги, и будем предполагать, что u^r и $\vec{i}$ не зависят от времени. В этих условиях, первая задача Циолковского состоит в том, чтобы по заданному изменению массы ракеты за время от t_0 до t найти приращение ее скорости за это же время.

Так как в этой задаче движение точки переменной массы естественно отнести к случаю (b), §1, то оно определяется уравнением

$$m(t)\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{dm(t)}{dt}\,u^r\,\vec{i}, \tag{2.1}$$

или

$$d\,\vec{v} = -\,u^r\frac{dm}{m}\,\vec{i}. \tag{2.2}$$

Интегрируя это равенство в пределах от t_0 до t получаем:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \left(u^r\,\ln\frac{m(t_0)}{m(t)}\right)\vec{i}, \tag{2.3}$$

— это *формула Циолковского*.

Вторая задача

Рассмотрим движение ракеты вертикально вверх в однородном поле силы тяжести планеты, например, Земли. В этом случае целесообразно в качестве первого приближения рассмотреть такую модель динамики ракеты, в которой на нее действует тяга, направленная вертикально вверх и однородная сила тяжести, направленная вертикально вниз, а сама ракета принимается за точку переменной массы.

Относительную скорость выброса частиц из сопел ракеты запишем в виде $\vec{u}^r(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t) = -u^r\vec{i}$, где $\vec{i}$ — орт вертикали, и будем предполагать, что u^r не зависит от времени. Закон изменения массы ракеты как функции времени считаем заданным формулой

$$m(t) = m(0)\,\exp(-\alpha t), \tag{2.4}$$

где положительная величина α не зависит от времени. Символом $s(t)$ будем обозначать путь, пройденный ракетой (точкой переменной массы) за время t при $s(t_0) = 0$.

В этих условиях, вторая задача Циолковского состоит в том, чтобы найти закон изменения $s(t)$ по заданным величинам $\alpha, m(t_0)$ и начальному значению $v(t_0)$ величины ее скорости.

Как и в первой задаче, здесь движение точки переменной массы относится к случаю (b), §1, поэтому оно определяется уравнением

$$m(t)\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m(t)\vec{g} + \frac{dm(t)}{dt}\,\vec{u}^r, \tag{2.5}$$

где $\vec{g}$ — ускорение свободного падения в данном однородном поле силы тяжести, направленное вертикально вниз. Проектируя это уравнение на орт вертикали $\vec{i}$, получаем:

$$m(t)\,\frac{dv(t)}{dt} = -m(t)g - \frac{dm(t)}{dt}\,u^r. \tag{2.6}$$

Используя обозначение $q = \alpha u^r/g$ и равенство $dm/m = -\alpha dt$, из этого уравнения находим ускорение, скорость и путь точки $(t_0 = 0)$:

$$\frac{dv(t)}{dt} = (q-1)\,g,\ v(t) = (q-1)\,gt + v(0),\ s(t) = (q-1)\frac{gt^2}{2} + v(0)\,t. \tag{2.7}$$

Упражнение 2.1. ***Активным* называют участок траектории от ее начальной точки до точки, которой ракета достигнет в момент полного выгорания горючего. Считая известными массу m^1 ракеты без топлива, ее массу $m(0)$ при $t = 0$, постоянную α и величину $v(0)$ начальной скорости ракеты, найти конечный момент t^1 активного участка траектории ракеты и длину s^1 этого участка.**

Ответ: $t^1 = \frac{\beta}{\alpha},\ s^1 = \frac{1}{2}\,\frac{(q-1)g\beta^2}{\alpha^2} + v(0)\,\frac{\beta}{\alpha}$ **при** $\beta = \ln\frac{m(0)}{m^1}$**.**

Перейти к оглавлению на странице: 256

ЧАСТЬ IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

В этой части изучается стесненное связями движение конечного числа материальных точек. В трех ее главах рассматриваются три базовые темы: общее уравнение механики, уравнения Лагранжа и уравнения Гамильтона.

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 9. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ МЕХАНИКИ

Мы будем рассматривать здесь механическую систему из конечного числа материальных точек M_j массы m_j, $j \in [1:N]$. Символом $\vec{r}_j$ будем обозначать радиус-вектор точки M_j в некотором репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Кроме того, мы будем использовать обозначение $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{3N}) \in R^{3N}$, где $x_{3j-2}, x_{3j-1}, x_{3j}$ — координаты радиус-вектора $\vec{r}_j = x_{3j-2}\vec{e}_1 + x_{3j-1}\vec{e}_2 + x_{3j}\vec{e}_3$, $j \in [1:N]$.

§1. Связи, реакции. Обобщенные координаты

Связями называют условия, которые налагают ограничения на движение механической системы. Эти условия математически выражают в виде равенств или неравенств, связывающих между собой координаты, скорости точек системы и время, а возможно и другие величины, например, ускорения точек.

Связи, как правило, осуществляются в виде тел, стесняющих свободное движение точек системы. В отличие от *свободного*, движение системы, стесненное связями, называют *несвободным*.

Если бы механическую систему не стесняли связи (то есть если бы механическая система была свободной), то под действием заданных сил она, вообще говоря, двигалась бы с другим ускорением, чем при наличии связей. Это означает, что связи действуют на точки системы как некоторые силы, которые принято называть *реакциями связей*. В отличие от них, заданные силы называют *активными силами*.

Связи классифицируют по тем или иным свойствам изображающих их уравнений. В этой классификации легко сориентироваться по следующей таблице:

Уравнение связи	Наименование связи
$f(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) > 0 \; (<, \geqslant, \leqslant)$	– *односторонняя, неудерживающая*
$f(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = 0$	– *двусторонняя, удерживающая*
$f(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = 0 \; (>, <, \geqslant, \leqslant)$	– *нестационарная, реономная*
$f(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = 0 \; (>, <, \geqslant, \leqslant)$	– *стационарная, склерономная*
$f(\vec{x}, t) = 0 \; (>, <, \geqslant, \leqslant)$	– *геометрическая, голономная*
$f(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = 0 \; (>, <, \geqslant, \leqslant)$	– *кинематическая, неголономная*

С голономными связями мы уже имели дело в кинематике

((1.4), глава 4). Механическую систему, движение которой стеснено только голономными связями, называют *голономной*, в противном случае — *неголономной*. Далее мы, как правило, будем рассматривать механические системы с голономными связями, выраженными уравнениями в виде равенств.

Пусть на механическую систему наложены голономные связи, выражаемые равенствами:

$$f(\vec{x}, t) = 0, \tag{1.1}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_m) \in C^2(\mathcal{M} \times (t_1, t_2))$, $t_1 < t_2$, а $\mathcal{M}$ — область в R^{3N}. При этом мы не исключаем, вообще говоря, что на эту систему могут быть наложены и другие связи, как голономные, так и неголономные. Связи (1.1) считаем независимыми в $\mathcal{M}$, а точнее, предполагаем, что ранг матрицы Якоби $(\partial f_i / \partial x_k)$ равен m при $\vec{x} \in \mathcal{M}$, $t \in (t_1, t_2)$.

Пусть $s = 3N - m$, а $\mathcal{B}$ — область в R^s. Если задана вектор-функция $\vec{\xi}(q, t) = (\xi_1(q, t), \ldots, \xi_{3N}(q, t))$ аргументов $q = (q_1, \ldots, q_s) \in \mathcal{B}$, $t \in (t_1, t_2)$, дважды непрерывно дифференцируемая на множестве $\mathcal{B} \times (t_1, t_2)$ и удовлетворяющая там равенству $f(\vec{\xi}(q, t), t) = 0$, то переменные $q = (q_1, \ldots, q_s)$ называют *лагранжевыми* или *обобщенными координатами*.

Если $q = (q_1, \ldots, q_s)$ — обобщенные координаты, то векторы $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{3N})$, $\vec{r}_j$ можно выразить через них:

$$\vec{x} = \vec{x}(q, t), \ \vec{r}_j = \vec{r}_j(q, t), \ j \in [1 : N], \tag{1.2}$$

— эти функции удовлетворяют связям (1.1). Если движение механической системы стеснено только связями (1.1), то обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$ можно считать независимыми величинами. В этом случае, s — число степеней свободы положения механической системы и, при $(q, t) \in \mathcal{B} \times (t_1, t_2)$, ранг матрицы Якоби $(\partial x_\nu / \partial q_p)$ равен s. Действительно, так как эта матрица имеет размеры $(3N - m) \times 3N$, то ее ранг k удовлетворяет неравенству $k \leqslant 3N - m$. С другой стороны, по теореме о неявных функциях, функции $x_1, \ldots, x_{3N}$ должны удовлетворять $3N - k$ независимым уравнениям. Так как рассматриваемая механическая система стеснена только m связями (1.1), то $3N - k \leqslant m$, то есть $k \geqslant 3N - m = s$.

Таким образом, из элементов матрицы Якоби $(\partial x_\nu/\partial q_p)$ можно составить матрицу s-го порядка с ненулевым определителем, а тогда обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$ можно выразить в виде дважды непрерывно дифференцируемых функций декартовых координат. Из равенств (1.2) получаем следующие формулы:

$$\begin{gathered}\dot{x}_\nu = \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial\, x_\nu}{\partial\, q_p}\, \dot{q}_p + \frac{\partial\, x_\nu}{\partial\, t}, \\ \vec{v}_j = \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial\, \vec{r}_j}{\partial\, q_p}\, \dot{q}_p + \frac{\partial\, \vec{r}_j}{\partial\, t}, \quad \nu \in [1:3N],\ j \in [1:N].\end{gathered} \tag{1.3}$$

§2. Изохронные вариации

Введем в рассмотрение понятия истинного и виртуального перемещения. *Истинным перемещением механической системы* мы будем называть ее перемещение $\Delta\vec{x}$ за время от t до $t+\Delta t$. Естественно, что эту величину мы будем обозначать также $\Delta\vec{r}_j$, $j \in [1:N]$. Соответственно, истинное перемещение за бесконечно малый промежуток времени dt есть бесконечно малое перемещение $d\,\vec{x}$, которое мы обозначаем также $d\vec{r}_j$, $j \in [1:N]$.

Если на механическую систему наложены стесняющие ее движение связи, то в каждый момент t о них естественно судить по совокупности возможных перемещений при этом неизменном значении t, совместимых с уравнениями связей, так как эта совокупность зависит только от положения системы в данный момент и от связей. Любое совместимое со связями бесконечно малое перемещение, которое может быть сообщено механической системе при неизменном t, называют *виртуальным перемещением* этой системы в этот момент. Виртуальное перемещение механической системы будем обозначать $\delta\vec{x}$ и $\delta\vec{r}_j$, $j \in [1:N]$.

Иначе говоря, виртуальное перемещение в момент t это допустимая вариация движения при неизменном этом значении t (*изохронная вариация*), причем “допустимая ”— означает совместимая с уравнениями связей, стесняющих движение системы. При наличии связей вариации координат не независимы: если система стеснена голономными связями (см. (1.1))

$$f(\vec{x},t) = 0, \tag{2.1}$$

а $\delta\vec{x}$ — виртуальное перемещение, то наряду с $\vec{x}$ этому равенству должна удовлетворять и величина $\vec{x}+\delta\vec{x}$. Так как

$$f(\vec{x}+\delta\vec{x},t) = \sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu + \ldots, \tag{2.2}$$

то получаем равенство

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu = 0, \tag{2.3}$$

с точностью до бесконечно малых высших порядков.

Так как

$$f(\vec{x}+d\,\vec{x},t+d\,t) = \sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\,dx_\nu + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \ldots, \tag{2.4}$$

то для истинного перемещения получаем другое равенство:

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\,dx_\nu + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt = 0, \tag{2.5}$$

истинное также с точностью до бесконечно малых высших порядков. Как видим, в случае стационарности связей истинное перемещение является одним из виртуальных перемещений.

Понятие виртуальных перемещений или вариаций обобщенных координат вводятся так же, как и в случае декартовых координат: *виртуальным перемещением механической системы в обобщенных координатах* в момент t называют любое бесконечно малое изменение обобщенных координат при неизменном этом значении t, совместимое с наложенными связями ((2.1) и, возможно, другими).

Из формул (1.2) получаем:

$$\delta x_\nu = \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\,\delta q_p,\ \delta\vec{r}_j = \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p}\,\delta q_p,\ \nu \in [1:3N],\ j \in [1:N]. \tag{2.6}$$

Если механическая система не стеснена другими связями, кроме (2.1), то из способа введения обобщенных координат и открытости $\mathcal{B}$ (область в R^s) следует, что изохронные вариации $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$ независимы.

§3. Идеальные связи. Общее уравнение механики и принцип возможных перемещений

Главный вектор, действующих на точку M_j сил реакций связи обозначим $\vec{R}_j$. Величину $\sum_{j=1}^N \vec{R}_j \cdot \delta\vec{r}_j$ называют *виртуальной работой сил реакций связи*. Если она равна нулю, то связи называют *идеальными*. Об идеальных связях говорят, что они не препятствуют движению механической системы, совместимому со связями.

Рассмотрим дифференциальные уравнения Ньютона движения механической системы:

$$m_j \frac{d}{dt}\vec{v}_j = \vec{F}_j + \vec{R}_j, \tag{3.1}$$

где $\vec{F}_j$ и $\vec{R}_j$ — главные векторы внешних и внутренних активных сил и сил реакций, действующих на материальную точку M_j массы m_j.

Будем предполагать, что все стесняющие рассматриваемую механическую систему связи являются идеальными. Умножая j-ое уравнение (3.1) скалярно на $\delta\vec{r}_j$ и суммируя полученные равенства по всем j, получаем:

$$\sum_{j=1}^N \left(m_j \frac{d}{dt}\vec{v}_j - \vec{F}_j \right) \cdot \delta\vec{r}_j = 0, \tag{3.2}$$

— это *общее уравнение механики в декартовых координатах*(*уравнение Даламбера - Лагранжа*). Входящие в (3.2) величины $m_j\, d\vec{v}_j/dt$, взятые с обратным знаком, называют *силами инерции*, а само это уравнение формулируют как равенство нулю в любой момент времени суммы элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях.

Если механическая система находится в положении равновесия в данном репере, то есть скорости всех точек равны нулю, то

$d\vec{v}_j/dt = 0\,,\ j \in [1:N]$. В этом случае получаем:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \cdot \delta\vec{r}_j = 0, \tag{3.3}$$

то есть, *сумма всех виртуальных работ активных сил равна нулю*, — это *необходимые условия равновесия в данном репере механической системы, стесненной только голономными идеальными связями*. На самом деле имеют место более сильные результаты, один из которых мы сформулируем здесь без доказательства.

Теорема 3.1. (Принцип возможных перемещений) Пусть при $t \in (t_1, t_2)$ механическая система стеснена только стационарными голономными идеальными связями в виде равенств. Тогда условие (3.3), то есть равенство нулю суммы всех виртуальных работ действующих на систему активных сил, является необходимым и достаточным условием равновесия этой системы в рассматриваемом репере.

Равенство (3.3) называют *общим уравнением статики*.

§4. Общее уравнение механики в лагранжевых координатах

Общее уравнение механики в декартовых координатах (3.2) мы преобразуем здесь при помощи формул (1.2), (1.3), (2.6) и тождества:

$$\frac{d\vec{v}_j}{dt}\frac{\partial\,\vec{r}_j}{\partial\,q_p} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_j\frac{\partial\,\vec{r}_j}{\partial\,q_p}\right) - \vec{v}_j\frac{d}{dt}\frac{\partial\,\vec{r}_j}{\partial\,q_p}. \tag{4.1}$$

Используя формулу (2.6), получаем:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(m_j\frac{d}{dt}\vec{v}_j - \vec{F}_j\right)\sum_{p=1}^{s}\frac{\partial\,\vec{r}_j}{\partial\,q_p}\,\delta q_p = 0. \tag{4.2}$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$\frac{\partial\,\vec{r}_j}{\partial\,q_p} = \frac{\partial\,\vec{v}_j}{\partial\,\dot{q}_p}. \tag{4.3}$$

Сравнивая равенство

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_k \partial q_p}\, \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t\, \partial q_p} \tag{4.4}$$

с равенством

$$\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_p} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_k \partial q_p}\, \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t\, \partial q_p}, \tag{4.5}$$

полученным дифференцированием формулы (1.3) и переменой местами индексов k, p, приходим к равенству:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_p}. \tag{4.6}$$

Используя формулы (4.1), (4.3), (4.6), выводим равенство:

$$\frac{d\vec{v}_j}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_j \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_p}\right) - \vec{v}_j \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_p}. \tag{4.7}$$

Умножая это равенство на m_j и суммируя по всем $j = 1, \ldots, N$, получаем:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\,\vec{v}_j}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_p} - \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_p} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial T}{\partial q_p}, \tag{4.8}$$

где $T = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \vec{v}_j/2 = \sum_{j=1}^{N} m_j v_j^2/2$.

Из равенств (4.2), (4.8) следует равенство

$$\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial T}{\partial q_p} - Q_p\right)\delta q_p = 0, \tag{4.9}$$

где величина Q_p, определяемая равенством

$$Q_p = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p} \tag{4.10}$$

(при очевидных обозначениях X_ν), называется *обобщенной силой*, отвечающей обобщенной координате q_p. Равенство (4.9) называют *общим уравнением механики* или *уравнением Даламбера - Лагранжа* в обобщенных координатах. Отметим, что в этом уравнении вариации δq_p независимы, если на рассматриваемую механическую систему наложены только связи (1.1), и могут быть зависимыми, если на нее наложены и другие связи.

Если все силы, действующие на точки механической системы имеют потенциал (см. §13 главы 6), то компоненты X_ν этих сил можно вычислить по формуле:

$$X_\nu = -\frac{\partial \Pi(\vec{x})}{\partial\, x_\nu}, \quad \nu \in [1:3N], \tag{4.11}$$

где $\Pi(\vec{x})$ — потенциальная энергия этой системы.

Из равенств (4.10), (4.11) получаем:

$$Q_p = -\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial \Pi(\vec{x})}{\partial\, x_\nu} \frac{\partial\, x_\nu}{\partial\, q_p} = -\frac{\partial \Pi(\vec{x}(q,t))}{\partial q_p}. \tag{4.12}$$

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 10. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

§1. Уравнения Лагранжа II рода, их инвариантность

Как и в предыдущих разделах, мы будем рассматривать здесь механическую систему из N материальных точек M_j массы m_j, $j \in [1:N]$ и будем пользоваться аналогичными обозначениями. Все стесняющие движение системы связи предполагаем независимыми, голономными и идеальными. Символом s будем обозначать ее число степеней свободы положения, а символами $q_1, \ldots, q_s$ — независимые обобщенные координаты, определяющие положение системы. Так как $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$ независимы, то в общем уравнении механики (4.9) главы 9 можно положить $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \ldots = \delta q_s = 0$, затем $\delta q_2 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_s = 0$ и т.д. Это приводит к системе из s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \quad i \in [1:s], \tag{1.1}$$

которые называют *уравнениями Лагранжа второго рода*. Общий порядок системы (1.1) равен $2s$. Равенства (1.1) задают уравнения Лагранжа второго рода алгоритмически. Чтобы для конкретной механической системы выписать их явно, необходимо получить кинетическую энергию T и обобщенные силы Q_i, $i \in [1:s]$ как функции аргументов $q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t$ и подставить их в левую часть уравнений (1.1), произведя там необходимые дифференцирования.

Если все силы, действующие на точки механической системы имеют потенциал, то обобщенные силы можно вычислить по формуле (4.12) главы 9:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi(\vec{x}(q,t))}{\partial q_i}, \quad i \in [1:s], \tag{1.2}$$

где $\Pi(\vec{x})$ — потенциальная энергия этой системы. Вводя в рассмотрение *функцию Лагранжа* (или *кинетический потенциал*)

$$L = T - \Pi \tag{1.3}$$

и учитывая, что $\partial\Pi(\vec{x}(q,t))/\partial\dot{q}_i = 0$, уравнения (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\,\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial\,q_i} = 0, \quad i \in [1:s]. \tag{1.4}$$

Как видим, для того, чтобы выписать уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил, достаточно составить для данной механической системы величину L как функцию аргументов $q_1,\ldots,q_s,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s,t$ и подставить их в левую часть уравнений (1.4), произведя там необходимые дифференцирования.

Из способа вывода уравнений (1.1) и (1.4) следует, что они не изменяют своего алгоритмического вида при замене одних обобщенных координат на другие. Более специальным свойством является инвариантность уравнений Лагранжа относительно каких-то преобразований. Говорят, что *уравнения Лагранжа второго рода* (1.4) *(или* (1.1)*) инвариантны относительно какого-то класса преобразований*, если каждое преобразование этого класса не изменяет функцию Лагранжа L (соответственно, кинетическую энергию T и обобщенные силы Q_i, $i \in [1:s]$).

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки в центральном силовом поле. Как мы знаем, сила, действующая на точку, имеет потенциал, причем (см. (13.13), глава 6):

$$L = T - \Pi = (mv^2/2) \pm \int \Phi(r)dr, \tag{1.5}$$

где v — модуль скорости точки, а r — ее расстояние от центра сил. Так как $v = |\vec{v}|$ и $r = |\vec{r}|$, то эти величины не изменяются при поворотах репера, то есть при ортогональных преобразованиях базиса этого репера. Поэтому уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение материальной точки в центральном поле сил инвариантны относительно класса ортогональных преобразований координат (то есть преобразований координат, соответствующих поворотам репера).

§2. Разрешимость уравнений Лагранжа II рода относительно старших производных

Обыкновенные дифференциальные уравнения удобно исследовать и решать приближенно в том случае, когда они разрешены относительно старших производных. Мы покажем, что уравнения Лагранжа второго рода (1.1), (1.4) разрешимы относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_s$. Достаточно ограничиться рассмотрением уравнений (1.1), так как они более общие.

Рассмотрим кинетическую энергию механической системы в декартовых координатах:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j^2. \tag{2.1}$$

Из второго равенства (1.3) главы 9 получаем:

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} \right) \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} \right) = \\ = T_2 + T_1 + T_0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered} T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{s} a_{i,k} \dot{q}_i \dot{q}_k, \\ a_{i,k} = a_{k,i} = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$T_1 = \sum_{p=1}^{s} a_p \dot{q}_p, \; a_p = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}, \; T_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} \right)^2. \tag{2.4}$$

Учитывая формулы (2.2), (2.3), (2.4), уравнения Лагранжа (1.1) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{s} a_{i,k} \ddot{q}_k = B_i, \; i \in [1 : s], \tag{2.5}$$

где величины B_i не зависят от обобщенных ускорений $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_s$. Отсюда следует, что для доказательства разрешимости уравнений Лагранжа второго рода относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_s$ достаточно доказать, что

$$\det A \neq 0, \quad A = (a_{i,k})\big|_{i,k=1}^{s}. \tag{2.6}$$

При $u = (u_1, \ldots, u_s)$, рассмотрим квадратичную форму

$$T_2(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{s} a_{i,k} u_i u_k, \tag{2.7}$$

и применим к ней *критерий Сильвестра* — для положительной определенности этой формы необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$a_{1,1} > 0, \ \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} > 0, \ \ldots, \ \det A > 0. \tag{2.8}$$

Таким образом, если доказать положительную определенность квадратичной формы T_2, то тем самым будет доказано, в частности, и неравенство (2.6). Так как (см. (2.3))

$$T_2(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} u_i \right)^2, \tag{2.9}$$

то $T_2(u) \geqslant 0$ при любых u, и нам остается доказать, что $T_2(u) = 0$ только в случае $u = 0$. Докажем это от противного. Пусть при некотором $u \neq 0$ выполнено равенство $T_2(u) = 0$. Тогда при таком u должны обратиться в ноль все суммы в скобках в равенстве (2.9), то есть

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} u_i = 0, \ j \in [1 : N], \tag{2.10}$$

или

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_{3j-2}}{\partial q_i} u_i = 0, \ \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_{3j-1}}{\partial q_i} u_i = 0, \ \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_{3j}}{\partial q_i} u_i = 0, \ j \in [1 : N]. \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что столбцы матрицы $(\partial x_\nu/\partial q_p)$ линейно зависимы, а тогда ее ранг должен быть меньше s, в то время, как в конце §1 главы 9 мы доказали, что он равен s. Что и требовалось.

§3. Обобщенный потенциал и уравнения Лагранжа II рода

Как мы установили в §1, уравнения Лагранжа (1.1) можно переписать в виде (1.4) в случае, если все силы, действующие на точки механической системы, имеют потенциал. В этом случае мы воспользовались формулой (1.2) (см. (4.12) главы 9) и ввели функцию Лагранжа L по формуле (1.3), что и позволило нам перейти от (1.1) к (1.4). Этот результат можно усилить, введя понятие *обобщенного потенциала* — так называют функцию U обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, связанную с обобщенными силами

$$Q_p = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}$$

(см. (4.10) главы 9) равенствами:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = -Q_i, \quad i \in [1:s], \tag{3.1}$$

если такая функция существует.

Складывая эти уравнения с уравнениями (1.1) при каждом $i \in [1:s]$, получаем уравнения того же вида, что и (1.4):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i \in [1:s], \tag{3.2}$$

где $L = T + U$, а U — обобщенный потенциал. Уравнения (3.2) будем называть уравнениями Лагранжа II рода для случая обобщенного потенциала.

Если обобщенный потенциал не зависит явно от обобщенных скоростей, то он является обычным потенциалом. Если обобщенный потенциал зависит от обобщенных скоростей линейно, то квадратичная по обобщенным скоростям часть функции совпадает с квадратичной по обобщенным скоростям частью кинетической энергии, поэтому в этом случае доказательство разрешимости уравнений

Лагранжа (1.4) относительно обобщенных ускорений подходит и для уравнений (3.2).

Пример 3.1. **В §4 главы 6 мы рассмотрели (в качестве одного из примеров сил) силу Лоренца $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{C}\vec{v}\times\vec{H}\right)$, действующую на точку с зарядом q (заряженную частицу), движущуюся со скоростью $\vec{v}$ в электромагнитном поле, характеризуемом напряженностями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электрического и магнитного полей соответственно. Кроме того, в теории поля принимается (см. [12]), что**

$$\vec{E} = -grad\,\Phi - \frac{1}{C}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\ \vec{H} = rot\,\vec{A}, \tag{3.3}$$

где Φ и $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ — скалярная и векторная функции координат x, y, z точки и времени t. Можно показать, что сила Лоренца имеет обобщенный потенциал (см.[10], §11 главы 2):

$$U = -q\,\Phi + \frac{q}{C}\,\vec{v}\vec{A}. \tag{3.4}$$

Упражнение 3.1. **Проверьте, что функция (3.4) действительно удовлетворяет условию (3.1).**

§4. Уравнения Лагранжа I рода и реакции идеальных связей

Пусть механическая система состоит из N материальных точек. Введем обозначения:

$x_{3j-2},\ x_{3j-1},\ x_{3j}$ – координаты j-ой точки;

$X_{3j-2},\ X_{3j-1},\ X_{3j}$ – проекции главного вектора внутренних и внешних активных сил действующих на j-ую точку;

$R_{3j-2},\ R_{3j-1},\ R_{3j}$ – проекции главного вектора реакций связей, действующих на j-ую точку;

$m_{3j-2} = m_{3j-1} = m_{3j}$ – масса j-ой точки.

В этих обозначениях уравнения Ньютона (3.1) главы 9 имеют вид:

$$m_j\ddot{x}_j = X_j + R_j, \quad j = 1,\, 2, \ldots, 3N. \tag{4.1}$$

Предположим, что движение системы ограничено следующими независимыми связями

$$f_i\,(x,t) = 0, \quad i = 1,\, 2, \ldots, k, \tag{4.2}$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{3N} a_{pj}\dot{x}_j + a_p = 0, \quad p = 1,\, 2, \ldots,\, r, \tag{4.3}$$

где a_{pj} и a_p — функции аргументов $x = (x_1, \ldots, x_{3N})$ и t. Отметим, что равенства (4.1), (4.2), (4.3) образуют систему $3N + k + r$ уравнений относительно $6N$ неизвестных x_j, R_j.

Предположим, что все связи идеальные. Тогда мы можем воспользоваться общим уравнением механики (3.2) главы 9. В принятых обозначениях оно имеет вид:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{3N} (m_j\ddot{x}_j - X_j)\,\delta x_j = 0. \tag{4.4}$$

Вариации δx_j не являются независимыми, голономные связи налагают на них следующие условия:

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial\, f_i}{\partial\, x_j}\,\delta x_j = 0, \quad i = 1,\, 2, \ldots, k. \tag{4.5}$$

Упражнение 4.1. Доказать, что неголономные связи накладывают на вариации δx_j следующие условия:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{3N} a_{pj}\,\delta x_j = 0, \quad p = 1,\, 2, \ldots, r. \tag{4.6}$$

Из уравнений (4.5) и (4.6) $k+r$ вариаций δx_j можно выразить через остальные $3N-k-r$, которые можно считать независимыми.

После подстановки выражений зависимых вариаций через независимые в уравнение (4.4) оно становится линейной комбинацией независимых вариаций. Приравнивая нулю последовательно все независимые вариации, кроме одной, получим уравнения движения.

Такой способ использования общего уравнения механики для получения уравнения движения механической системы со связями является естественным и применяется как в теории, так и при решении практических задач. С другой стороны, в общем случае исключение зависимых вариаций можно выполнять более удобным способом – методом множителей Лагранжа.

Введем в рассмотрение $k + r$ дополнительных переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — функций времени t (множители Лагранжа).

Умножая i-ое уравнение (4.5) при $i = 1, \ldots, k$ на λ_i и p-ое уравнение (4.6) на μ_p при $p = 1, \ldots, r$ и вычитая все $k + r$ полученных равенств из уравнения (4.4) получаем уравнение:

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - X_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{p=1}^{r} \mu_p \, a_{pj} \right) \delta x_j = 0. \qquad (4.7)$$

Выберем $k + r$ величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_r$ так, чтобы множители при $k + r$ зависимых вариациях δx_j обратились в ноль. Тогда и множители при остальных независимых вариациях также должны быть равны нулю.

Так мы получим $3N$ уравнений

$$m_j \ddot{x}_j = X_j + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^{r} \mu_p \, a_{pj}, \quad j = 1, \ldots, 3N. \qquad (4.8)$$

Уравнения (4.2), (4.3), (4.8) образуют систему из $k + r + 3N$ уравнений относительно $k + r + 3N$ неизвестных $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t)$, $\mu_1(t), \ldots, \mu_r(t)$, $x_1(t), \ldots, x_{3N}(t)$. Это *уравнения Лагранжа первого рода*.

Из (4.1), (4.8) следует, что

$$R_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^{r} \mu_p \, a_{pj}, \quad j = 1, \ldots, 3N, \qquad (4.9)$$

— эти равенства определяют реакции связей при условии их идеальности.

Полученные уравнения не самые удобные для определения величин $x_1, \ldots, x_{3N}$, их основная ценность в том, что если величины $x_1, \ldots, x_{3N}$ уже найдены (при помощи каких-либо других средств), то с помощью уравнений Лагранжа первого рода легко определяются реакции идеальных связей.

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 11. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ

§1. Вывод канонических уравнений

Преобразование Лежандра

В связи с уравнениями Лагранжа (1.4) главы 10 введем в рассмотрение величины

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i \in [1:s], \tag{1.1}$$

которые называют *импульсами* или *обобщенными импульсами*.

Как мы знаем, система уравнений Лагранжа состоит из s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, \ldots, q_s$. Существует бесконечно много способов сведения ее к системе из $2s$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого вместо s переменных вводят $2s$ каких-то новых переменных. В частности, к s переменным $q_1, \ldots, q_s$ можно добавить еще s дополнительных переменных. Мы так и поступили, введя дополнительные переменные $p_1, \ldots, p_s$. Как мы увидим, уравнения относительно переменных $q_1, \ldots, q_s$, $p_1, \ldots, p_s$ имеют удобную симметричную форму так называемых *канонических* или *гамильтоновых уравнений*, для которых развита содержательная математическая теория.

Так как $L = T - \Pi$, а потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s$, то истинно равенство:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}, \quad i, k \in [1:s]. \tag{1.2}$$

Так как

$$\det \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) \Big|_{i,k=1}^{s} \neq 0, \tag{1.3}$$

то равенства (1.1) можно разрешить относительно величин $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s$:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t), \quad i \in [1:s], \quad q = (q_1, \ldots, q_s), \quad p = (p_1, \ldots, p_s). \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H(q,p,t) = \sum\nolimits_{k=1}^{s} p_k\, \dot q_k(q,p,t) - L(q, \dot q(q,p,t), t), \tag{1.5}$$

которую называют *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*. Используя формулы (1.1), (1.5), получаем равенства:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot q_i + \sum_{k=1}^{s} \left(p_k \frac{\partial \dot q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{\partial \dot q_k}{\partial p_i} \right) = \dot q_i, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{s} \left(p_k \frac{\partial \dot q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{\partial \dot q_k}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} \left(p_k \frac{\partial \dot q_k}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{\partial \dot q_k}{\partial t} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.8}$$

при $i \in [1:s]$.

Из уравнений (1.4) главы 10 и формул (1.1) и (1.7) выводим, что

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i \in [1:s], \tag{1.9}$$

и, присоединяя сюда равенства (1.6), получаем искомые *канонические* или *гамильтоновы уравнения*:

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i \in [1:s]. \tag{1.10}$$

Переход от уравнений Лагранжа II рода к уравнениям (1.10) при помощи введения обобщенных импульсов (1.1) и функции Гамильтона (1.5) называют *преобразованием Лежандра*.

Равенства (1.10) задают канонические уравнения алгоритмически (вспомним, что так же алгоритмически задавались и уравнения Лагранжа второго рода равенствами (1.1) и (1.4) главы 10). Чтобы выписать канонические уравнения для данной механической системы, необходимо составить для нее по формуле (1.5) гамильтониан $H(q,p,t)$ и подставить эту функцию в правую часть уравнений (1.10), произведя там необходимые дифференцирования.

Преобразование Дирака

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_i = f_i\left(q_1, \ldots, q_n, t\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.11}$$

или, в векторной форме:

$$\dot{q} = f(q, t), \tag{1.12}$$

при $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

Преобразование Дирака произвольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.11) состоит в том, что в дополнение к “координатам” $q = (q_1, \ldots, q_n)$ вводятся в рассмотрение “импульсы” $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и гамильтониан H по формуле:

$$H(q, p, t) = f \cdot p = \sum\nolimits_{i=1}^{n} f_i(q, t) \cdot p_i. \tag{1.13}$$

Это приводит к гамильтоновой системе:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(q, t), \; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -f_q' \cdot p = -\sum_{j=1}^{n} (f_j)'_{q_i} \cdot p_j. \tag{1.14}$$

§2. Первые интегралы канонических уравнений

Интеграл механической энергии

Используя канонические уравнения (1.10), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Как видим, если гамильтониан явно от t не зависит, то он является первым интегралом канонических уравнений, то есть

$$H(q, p) = h, \tag{2.2}$$

на любом решении q, p этих уравнений, причем величина h не меняется со временем, — ее называют постоянной механической энергии.

Используя формулы (см. (1.1), (1.5) и (1.3), (2.2) главы 10)

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t), \tag{2.3}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \ i \in [1:s], \ L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi \tag{2.4}$$

и легко проверяемое равенство

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1, \tag{2.5}$$

получаем интеграл механической энергии в форме *Якоби-Остроградского*:

$$H = T_2 - T_0 + \Pi. \tag{2.6}$$

Если соотношения (1.1) главы 9, при помощи которых введены лагранжевы координаты $q = (q_1, \ldots, q_s)$, стационарны, то из формул (2.3), (2.4) главы 10 получаем, что $T_1 = T_0 = 0$, $T_2 = T$, и тогда интеграл механической энергии принимает вид:

$$H = T + \Pi. \tag{2.7}$$

Циклические координаты и отвечающие им первые интегралы

Пусть функция Лагранжа $L = L(q, \dot{q}, t)$ не зависит явно от координат $q_1, \ldots, q_\sigma$ при $\sigma < s$. Такие координаты называются *циклическими*, а остальные $s - \sigma$ координат $q_{\sigma+1}, \ldots, q_s$ называются тогда *позиционными*.

Из формулы (1.7) следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_\nu} = 0, \ \nu \in [1:\sigma], \tag{2.8}$$

а тогда из канонических уравнений (1.10), получаем:

$$p_\nu = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_\nu} = c_\nu, \quad \nu \in [1:\sigma], \tag{2.9}$$

где все величины c_ν не меняются со временем, а это означает, что функции $p_\nu = \partial L(q,\dot q,t)/\partial \dot q_\nu$, $\nu \in [1:\sigma]$ являются первыми интегралами канонической системы. Говорят, что p_ν — *первый интеграл, отвечающий циклической координате* q_ν.

Для позиционных координат можно выписать следующую замкнутую систему канонических уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\,q_i = \frac{\partial}{\partial\,p_i}\,H(q_{\sigma+1},\dots,q_s,c_1,\dots,c_\sigma,p_{\sigma+1},\dots,p_s),\\ &\frac{d}{dt}\,p_i = -\frac{\partial}{\partial\,q_i}\,H(q_{\sigma+1},\dots,q_s,c_1,\dots,c_\sigma,p_{\sigma+1},\dots,p_s),\\ &\qquad\qquad i \in [\sigma+1:s]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Если позиционные координаты $q_{\sigma+1},\dots,q_s$ найдены, то, подставив их в равенства (2.9), можно найти циклические координаты. Действительно, из критерия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы $T_2(u)$ (см. (2.7), (2.8) главы 10) следует, в частности, что истинно неравенство

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\,\dot q_i \partial\,\dot q_k}\right)\Bigg|_{i,k=1}^{\sigma} > 0, \tag{2.11}$$

которое является достаточным условием разрешимости равенств (2.9) относительно величин $\dot q_1,\dots,\dot q_\sigma$.

Таким образом, наличие одной циклической координаты позволяет, в принципе, понизить порядок канонических уравнений на две единицы.

Метод Пуассона построения первых интегралов

Скобки Пуассона

Пусть f, g — скалярные дважды непрерывно дифференцируемые функции канонических аргументов $q = (q_1,\dots,q_n)$, $p = (p_1,\dots,p_n)$ и времени t.

Положим

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\,f}{\partial\,q_i}\,\frac{\partial\,g}{\partial\,p_i} - \frac{\partial\,f}{\partial\,p_i}\,\frac{\partial\,g}{\partial\,q_i}\right). \tag{2.12}$$

Величина $\{f,g\}$ носит название *скобки Пуассона* функций f, g. Она удовлетворяет следующим свойствам:

(а) $\{f, g\} = -\{g, f\}, \; \{f, f\} = 0;$

(б) если $c = const$, то $\{f, c\} = \{c, f\} = 0;$

(в) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}, \; \{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\};$

(г) $\dfrac{\partial}{\partial t}\{\varphi, \psi\} = \left\{\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right\} + \left\{\varphi, \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right\};$

(д) $\{f, q_k\} = -\dfrac{\partial f}{\partial p_k}, \; \{f, p_k\} = \dfrac{\partial f}{\partial q_k};$

(е) $\{q_i, q_k\} = 0, \; \{p_i, p_k\} = 0, \; \{q_i, p_k\} = \pm 1;$

(ж) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ — *тождество Пуассона.*

Упражнение 2.1. **Доказать свойства (а)–(е).**

Доказательство. Докажем свойство (ж). Как следует из определения, скобка Пуассона $\{f, g\}$ есть билинейная однородная функция производных первого порядка от f и g. Тогда ясно, что левая часть тождества Пуассона есть линейная однородная функция производных второго порядка от f, g, h, то есть каждый член тождества должен содержать одну из этих производных второго порядка. Тождество будет доказано, если мы покажем, что оно не содержит ни одной производной от f, g, h второго порядка. В силу симметрии тождества по f, g, h, достаточно доказать, что оно не содержит вторые производные от одной из функций f, g или h, например от f.

Соберем в тождестве все члены, содержащие вторые производные от f. Они содержатся только во второй и третьей скобках. Введем обозначения

$$D_1(\varphi) = \{g, \varphi\}, \; D_2(\varphi) = \{h, \varphi\}, \tag{2.13}$$

— тем самым мы вводим в рассмотрение два линейных дифференциальных оператора

$$D_1 = \sum_{k=1}^{2n} \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \; D_2 = \sum_{k=1}^{2n} \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{2.14}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_{2n}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, а $\xi_k = \xi_k(x)$, $\eta_k = \eta_k(x)$ — некоторые функции своих аргументов.

Используя обозначения (2.13) получаем

$$\begin{gathered}\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=\{g,\{h,f\}\}-\{h,\{g,f\}\}= \\ = D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1D_2 - D_2D_1)(f)\end{gathered} \tag{2.15}$$

Так как

$$\begin{aligned} D_1D_2 &= \sum_{k,l} \xi_k\eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l} + \sum_{k,l}\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}, \\ D_2D_1 &= \sum_{k,l} \eta_k\xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l} + \sum_{k,l}\eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

то

$$D = D_1D_2 - D_2D_1 = \sum_{k,l}\left(\xi_k\frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}. \tag{2.17}$$

Таким образом, D — линейный оператор, содержащий только однократные дифференцирования и, следовательно, левая часть тождества не содержит вторых производных от f.

Что и требовалось. ∎

Теорема Пуассона

Скобки Пуассона мы ввели формально. Выясним, откуда они берутся, как связаны с системой Гамильтона. Рассмотрим уравнения Гамильтона:

$$\dot q = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p},\ \dot p = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q}, \tag{2.18}$$

где $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$.

Пусть $f = f(q,p,t)$ — скалярная функция от q, p и t. Вычислим ее полную производную по t:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot p_k\right). \tag{2.19}$$

Используя здесь (2.18), получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \tag{2.20}$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $f(q, p, t)$ была первым интегралом уравнений (2.18):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \equiv 0. \tag{2.21}$$

Пуассон предложил метод, позволяющий (к сожалению не всегда) по двум известным интегралам гамильтоновых уравнений строить третий.

Теорема 2.1. **(Теорема Пуассона) Пусть $\varphi(q, p, t)$, $\psi(q, p, t)$ — первые интегралы канонической системы (2.18). Тогда функция $f = \{\varphi, \psi\}$ также будет интегралом этой системы или $f \equiv const$.**

Доказательство. Если φ, ψ — первые интегралы уравнений (2.18), то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\} = 0, \ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \{\psi, H\} = 0. \tag{2.22}$$

Выпишем тождество Пуассона для H, φ, ψ:

$$\{H, \{\varphi, \psi\}\} + \{\varphi, \{\psi, H\}\} + \{\psi, \{H, \varphi\}\} = 0, \tag{2.23}$$

Из (2.22) следует, что

$$\{H, \varphi\} = -\{\varphi, H\} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \ \{\psi, H\} = -\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{2.24}$$

Подставляя эти скобки в тождество (2.23), получаем последовательно:

$$\begin{gathered}
\{H, \{\varphi, \psi\}\} + \{\varphi, -\tfrac{\partial \psi}{\partial t}\} + \left\{\psi, \tfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right\} = 0, \\
\{\{\varphi, \psi\}, H\} + \left\{\varphi, \tfrac{\partial \psi}{\partial t}\right\} + \left\{\tfrac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right\} = 0, \\
\tfrac{\partial \{\varphi, \psi\}}{\partial t} + \{\{\varphi, \psi\}, H\} = 0, \\
\tfrac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0,
\end{gathered} \tag{2.25}$$

то есть f — первый интеграл системы (2.18).

Что и требовалось. ■

Построение интеграла в стационарном случае

Если $H = H(q,p)$, то, как мы знаем, $H(q,p)$ — первый интеграл системы (2.18) (интеграл энергии, см. (2.2)). Предположим, что $\varphi(q,p,t)$ еще один интеграл этих уравнений. Тогда по теореме Пуассона функция

$$f = \{\varphi, H\} \tag{2.26}$$

тоже будет интегралом этой системы.

Из равенства

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\} = 0, \tag{2.27}$$

следует, что

$$f = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{2.28}$$

Таким образом, мы доказали следующий результат:

Теорема 2.2. Если $H = H(q,p)$, $\varphi(q,p,t)$ — первый интеграл системы (2.18), а функции $\frac{\partial^m\varphi}{\partial t^m}$ при $m = 1,\dots,k$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то они также будут интегралами этой системы (или постоянными).

Упражнение 2.2. Примените теорему Пуассона в задаче о движении точки в центральном поле.

§3. Метод Якоби решения канонических уравнений

Полный интеграл

Равенство

$$\mathcal{F}(x,z,p) = 0, \tag{3.1}$$

где $x = (x_1,\dots,x_n)$, $p = (p_1,\dots,p_n)$, $p_j = \partial z/\partial x_j$, $j \in [1:n]$, рассмотрим как уравнение относительно неизвестной вещественнозначной функции z от n независимых вещественных аргументов $x_1,\dots,x_n$. Его называют уравнением в частных производных первого порядка.

Пусть D — область в R^n. Любая функция z аргумента x, которая обращает равенство (3.1) в тождество при $x \in D$, называется *интегралом* или *частным интегралом уравнения* (3.1) в области D. *Полным интегралом уравнения* (3.1) *в области* D называют такое его n-параметрическое семейство интегралов

$$z = z(x, a), \quad x \in D, \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \in A \subset R^n, \tag{3.2}$$

что $z, z'_{x_j} \in C^1(D \times A)$, $j \in [1:n]$, а из равенств

$$z = z(x, a),\ p_1 = z'_{x_1}(x, a), \ldots, p_n = z'_{x_n}(x, a) \tag{3.3}$$

исключением параметров $a_1, \ldots, a_n$ можно получить уравнение (3.1).

Отметим, что из этого определения не следует, что, во-первых, полный интеграл определяется уравнением (3.1) однозначно, и, во вторых, что из полного интеграла может быть получен любой частный интеграл в D. Если функция $\mathcal{F}$ не зависит явно от z, то полный интеграл может быть рассмотрен в виде $z(x, a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_n$. Если функция $\mathcal{F}$ не зависит явно от неизвестной z и переменных $x_1, \ldots, x_k$, $k < n$, то можно положить

$$z = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j + \zeta(x_{k+1}, \ldots, x_n), \tag{3.4}$$

тогда

$$p_j = a_j,\ j \in [1:k],\ p_{k+j} = \partial\zeta/\partial x_{k+j},\ j \in [1:n-k], \tag{3.5}$$

и уравнение (3.1) преобразуется к уравнению вида

$$\Phi(x_{k+1}, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k, \partial\zeta/\partial x_{k+1}, \ldots, \partial\zeta/\partial x_n) = 0, \tag{3.6}$$

имеющему полный интеграл вида

$$\zeta(x_{k+1}, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_n, \tag{3.7}$$

откуда следует, что

$$z = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j + \zeta(x_{k+1}, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_n \tag{3.8}$$

— полный интеграл уравнения (3.1).

Уравнение Гамильтона-Якоби

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$dx_1/P_1 = \ldots = dx_n/P_n = -dp_1/X_1 = \ldots = -dp_n/X_n, \tag{3.9}$$

где $P_j = \partial\mathcal{F}/\partial p_j$, $X_j = \partial\mathcal{F}/\partial x_j$, $j \in [1:n]$, называют *уравнениями характеристик для уравнения в частных производных первого порядка* вида:

$$\mathcal{F}(x,p) = 0. \tag{3.10}$$

Записав канонические уравнения в симметричной форме

$$\frac{dq_1}{\partial H/\partial p_1} = \ldots = \frac{dq_n}{\partial H/\partial p_n} = -\frac{dp_1}{\partial H/\partial q_1} = \ldots = -\frac{dp_n}{\partial H/\partial q_n} = \frac{dt}{1}, \tag{3.11}$$

можно видеть, что это система уравнений характеристик для уравнения в частных производных вида (3.10):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1,\ldots,q_n,\partial S/\partial q_1,\ldots,\partial S/\partial q_n,t) = 0. \tag{3.12}$$

Равенство (3.12) называют *уравнением Гамильтона-Якоби*. Неизвестную функцию S аргументов $q_1,\ldots,q_n$ и t называют *главной функцией Гамильтона*. Так как левая часть уравнения (3.12) не зависит от S, то его полный интеграл можно записать в виде:

$$S = S(t,q_1,\ldots,q_n,a_1,\ldots,a_n) + a_{n+1}. \tag{3.13}$$

Метод Якоби

Метод Якоби решения канонических уравнений (1.10) основан на предположении, что известен некоторый полный интеграл (3.13) уравнения (3.12).

Теорема 3.1. **(Якоби) Если $D \subset R^{2n+1}$ — область, а $S(t,q,a) \in C^2(D)$ — полный интеграл вида (3.13) уравнения (3.12), удовлетворяющий условию**

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_k}\right)\Bigg|_{i,k=1}^{n} \neq 0, \quad (t,q,a) \in D, \tag{3.14}$$

то существует такая область $D' \subset D \times R^n$, что равенства

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \; b = \frac{\partial S}{\partial a}, \; (t, q, a, b) \in D' \tag{3.15}$$

представляют собой $2n$ независимых интегралов канонических уравнений (1.10), где $b = (b_1, \ldots, b_n)$, как и $a = (a_1, \ldots, a_n)$, произвольные постоянные.

Доказательство. Если

$$(t_0, q_0, a_0) \in D, \; p_0 = \left.\frac{\partial S}{\partial q}\right|_{(t,q,a)=(t_0,q_0,a_0)}, \; b_0 = \left.\frac{\partial S}{\partial a}\right|_{(t,q,a)=(t_0,q_0,a_0)},$$

то по теореме о неявных функциях, из условия (3.14) следует, что в некоторой окрестности точки (t_0, q_0, a_0, b_0) равенства (3.15) однозначно определяют дважды непрерывно дифференцируемые функции p, q аргументов t, a, b. Нам остается доказать, что эти p, q, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют каноническим уравнениям.

Подставим удовлетворяющую равенствам (3.15) функцию q во вторую группу этих равенств и полученные тождества $b_i = \partial S / \partial a_i$, $i \in [1:n]$ продифференцируем по t:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_i} \frac{d q_k}{dt} = 0, \quad i \in [1:n]. \tag{3.16}$$

С другой стороны, подставляя полный интеграл S (см. (3.13)) в уравнение Гамильтона-Якоби (3.12) и дифференцируя полученное тождество по a_i, приходим к равенствам:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial(\partial S/\partial q_k)} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \, \partial a_i} = 0, \quad i \in [1:n]. \tag{3.17}$$

Вычитая равенства (3.17) из соответствующих равенств (3.16) и учитывая равенства (3.15), получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \, \partial a_i} \left(\frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = 0, \quad i \in [1:n], \tag{3.18}$$

а из этих равенств и условия (3.14) следует, что функции p, q, удовлетворяющие равенствам (3.15) удовлетворяют первой группе канонических уравнений. Подставим теперь удовлетворяющую равенствам (3.15) функцию q в первую группу этих равенств и полученные тождества $p_i = \partial S/\partial q_i$, $i \in [1 : n]$ продифференцируем по t:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial q_k}\, \frac{dq_k}{dt}, \quad i \in [1 : n]. \tag{3.19}$$

С другой стороны, подставляя полный интеграл S (см.(3.13)) в уравнение Гамильтона-Якоби (3.12) и дифференцируя полученное тождество по q_i, приходим к равенствам:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial(\partial S/\partial q_k)}\, \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_i} = 0, \quad i \in [1 : n]. \tag{3.20}$$

Вычитая равенства (3.20) из соответствующих равенств (3.19) и учитывая уже доказанные равенства первой группы канонических уравнений, получаем, что функции p, q (удовлетворяющие равенствам (3.15)) удовлетворяют второй группе канонических уравнений.

Что и требовалось. ■

§4. Решение задачи о движении точки в центральном поле методом Якоби

Здесь, на примере этой задачи, имеющей многочисленные и важные приложения в таких, например, разделах науки, как астрономия, физика и биология, мы обсудим схему решения уравнений движения механической системы методом Якоби. Для этого мы последовательно выпишем для нее уравнения Лагранжа второго рода, канонические уравнения, уравнение Гамильтона-Якоби, а затем рассмотрим систему равенств метода Якоби, дающих общий интеграл канонических уравнений, то есть общее решение уравнений движения точки в центральном поле.

Уравнения Лагранжа второго рода

Различные аспекты задачи о движении точки в центральном поле мы рассмотрели в §§10, 13, 16 главы 6.

Сила, действующая на материальную точку M массы m в центральном поле сил в системе координат с началом в центре сил O задается формулой

$$\vec{F} = \delta \cdot \Phi(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{4.1}$$

а соответствующее уравнение Ньютона имеет вид (см. (10.2) гл. 6)

$$m\ddot{\vec{r}} = \delta \cdot \Phi(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{4.2}$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $r = |\vec{r}|$, $\delta = \pm 1$, а $\Phi(r)$ — модуль силы, действующей на рассматриваемую материальную точку.

Напомним, что законы сил, дающих примеры центральных силовых полей, мы рассмотрели в §4 главы 6, а в §10 главы 6 мы выписали для них соответствующие величины $\delta \cdot \Phi(r)$.

Центральное поле сил является потенциальным, причем потенциал и потенциальная энергия задаются формулами (§13 гл. 6)

$$U(x, y, z) = \Gamma(r) = \delta \cdot \int \Phi(r) dr, \quad \Pi(x, y, z) = -\Gamma(r), \tag{4.3}$$

а тогда функция Лагранжа вычисляется по формуле:

$$L = T - \Pi = \frac{m\,v^2}{2} + \Gamma(r). \tag{4.4}$$

Так как рассматриваемая механическая система не стеснена связями, то в качестве обобщенных координат можно использовать декартовы и любые криволинейные координаты. Мы далее используем декартовы и сферические координаты.

Уравнения Лагранжа в декартовых координатах

Если в качестве обобщенных координат использовать декартовы координаты $q = (q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, то

$$\begin{gathered} r = |q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \\ v = |\dot q| = \sqrt{\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \dot q_3^2},\ L = m\,|\dot q|^2\,/2 + \Gamma(|q|). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Если в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\,\dot q} - \frac{\partial L}{\partial\,q} = 0 \tag{4.6}$$

подставить выражение L по формуле (4.5) и произвести все дифференцирования слева, то в результате получим уравнения Ньютона (4.2).

Уравнения Лагранжа в сферических координатах

Введем в рассмотрение в качестве обобщенных координат точки M ее сферические координаты $q = (q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, \vartheta)$, задаваемые формулами $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$. Пользуясь формулами (1.2), (1.5) главы 3, последовательно получаем, что

$$\begin{gathered} H_r = 1,\ H_\varphi = r\sin\vartheta,\ H_\vartheta = r, \\ v_r = \dot r,\ v_\varphi = r\sin\vartheta\,\dot\varphi,\ v_\vartheta = r\dot\vartheta, \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$L = T - \Pi = m\,(\dot r^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 + r^2\dot\vartheta^2)/2 + \Gamma(r). \tag{4.8}$$

Упражнение 4.1. Выпишите уравнение Лагранжа в сферических координатах для рассматриваемой задачи, подставив функцию Лагранжа в (4.6).

Канонические уравнения

Канонические уравнения относительно декартовых переменных

Для того, чтобы получить канонические уравнения для рассматриваемой задачи, введем импульсы $p = (p_1, p_2, p_3)$ и гамильтониан H по формулам (см. (1.1), (1.4), (1.5) и (4.4), (4.5)):

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = m\dot q, \quad \dot q(q,p,t) = \frac{p}{m}, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} H(q,p,t) &= p\dot q(q,p,t) - L(q, \dot q(q,p,t), t) = \\ &= p^2/m - L(q, p/m, t) = p^2/2m - \Gamma(|q|). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Если в канонические уравнения

$$\dot q = \partial H/\partial p, \quad \dot p = -\partial H/\partial q \tag{4.11}$$

подставить H по формуле (4.10) и произвести справа дифференцирования, то в результате получим уравнения:

$$\dot q = \frac{p}{m}, \quad \dot p = \delta \cdot \Phi\left(|q|\right) \cdot \frac{q}{|q|}. \tag{4.12}$$

Эти же уравнения получаются непосредственно из уравнений Ньютона (см. (4.2)), если использовать замену переменных $q = (x, y, z)$, $p = (m\dot x, m\dot y, m\dot z)$.

Канонические уравнения относительно сферических переменных

Используя формулу (4.8) для функции L в сферических переменных, введем импульсы $p = (p_r, p_\varphi, p_\vartheta)$, соответствующие координатам $q = (r, \varphi, \vartheta)$, и гамильтониан $H(q,p,t)$:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r, \ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\dot\varphi r^2 \sin^2\vartheta, \ p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} = m\dot\vartheta r^2, \tag{4.13}$$

$$\dot r(q,p,t) = \frac{p_r}{m}, \ \dot\varphi(q,p,t) = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\vartheta}, \ \dot\vartheta(q,p,t) = \frac{p_\vartheta}{mr^2}, \tag{4.14}$$

$$H(q,p,t) = p\dot q(q,p,t) - L(q,\dot q(q,p,t),t) =$$
$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{p_\vartheta^2}{r^2}\right) - \Gamma(r). \tag{4.15}$$

Упражнение 4.2. Выпишите канонические уравнения в сферических переменных для рассматриваемой задачи, подставив функцию Гамильтона в равенства (4.11).

Уравнение Гамильтона-Якоби в декартовых и сферических переменных

Для рассматриваемой задачи о движении материальной точки в центральном поле уравнение Гамильтона-Якоби в декартовых переменных (см. (3.12) и (4.10)) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\sum_{k=1}^{3}(\partial S/\partial q_k)^2\right) - \Gamma\left(\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}\right) = 0, \tag{4.16}$$

где $\Gamma(r) = \delta\cdot\int\Phi(r)\,dr$ (см. (4.3)).

Используя формулу (4.15), в случае сферических переменных получаем другое уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\vartheta}\right)^2\right) - \Gamma(r) = 0. \tag{4.17}$$

Общий интеграл уравнений движения

Так как уравнение Гамильтона - Якоби (4.17) явно от t и φ не зависит, то его полный интеграл будем искать в виде:

$$S = a_1 t + a_2\varphi + Z(r,\vartheta). \tag{4.18}$$

Подставляя (4.18) в (4.17), получаем:

$$a_1 + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 + \frac{a_2^2}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\vartheta}\right)^2\right) - \Gamma(r) = 0. \tag{4.19}$$

Функцию Z будем искать в виде

$$Z(r,\vartheta) = Z_1(r) + Z_2(\vartheta), \tag{4.20}$$

что, после подстановки (4.20) в (4.19) дает равенство:

$$a_1 + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dZ_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{a_2^2}{\sin^2\vartheta} + \left(\frac{dZ_2}{d\vartheta}\right)^2\right)\right) - \Gamma(r) = 0. \tag{4.21}$$

Полагая здесь

$$\frac{a_2^2}{\sin^2\vartheta} + \left(\frac{dZ_2}{d\vartheta}\right)^2 = a_3^2, \tag{4.22}$$

получаем:

$$a_1 + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dZ_1}{dr}\right)^2 + \frac{a_3^2}{r^2}\right) - \Gamma(r) = 0. \tag{4.23}$$

Система (4.22), (4.23) решается в квадратурах:

$$Z_1 = e_1 \int \sqrt{2m\left(\Gamma(r) - a_1\right) - \frac{a_3^2}{r^2}}\, dr, \quad e_1 = \pm 1, \tag{4.24}$$

$$Z_2 = e_2 \int \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta, \quad e_2 = \pm 1. \tag{4.25}$$

Согласно (4.18), (4.20), мы получили:

$$S = a_1 t + a_2\varphi + e_1 \int \sqrt{2m\left(\Gamma(r) - a_1\right) - \frac{a_3^2}{r^2}}\, dr + e_2 \int \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta. \tag{4.26}$$

Упражнение 4.3. Покажите, что функция (4.26) удовлетворяет условиям теоремы Якоби и примените эту теорему для нахождения общего интеграла уравнений движения материальной точки в центральном поле.

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 12. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Утверждение, высказанное в терминах вариаций и/или экстремумов величин, так или иначе зависящих от движения механической системы, называют вариационным принципом механики, если его можно положить в основу некоторого раздела механики в том смысле, например, что из него, как следствие, могут быть получены те или иные уравнения движения. В некоторых случаях конкретный вариационный принцип, по сравнению с упомянутыми уравнениями движения, интересен тем, что может использоваться для исследования или нахождения движений более общего класса механических (и/ или иных) систем. В других случаях, он может быть просто более удобным инструментом исследования и/или решения данной механической системы. В целом, множество вариационных принципов механики представляет собой мощный инструментарий, применяемый для составления различных уравнений движения механических систем и исследования свойств движений, причем не только в задачах классической механики, но (при соответствующем обобщении) и в задачах механики сплошных сред, в термодинамике, электродинамике, квантовой механике, теории относительности и т.д. В разработку этого инструментария за более чем трехсотлетний период свой вклад внесли Ферма, Мопертюи, Кениг, Эйлер, Даламбер, Лагранж, Гамильтон, Остроградский, Гаусс, Герц, Гельмгольц, Якоби и другие ученые.

В формулировках вариационных принципов механики обычно опираются на понятия истинного и кинематически возможного движения и перемещения — *кинематически возможными* называют любые движения и перемещения механической системы (рассматриваемые в рамках кинематики), удовлетворяющие наложенным на нее связям, а *истинными* называют те из кинематически возможных движений и перемещений, которые механическая система совершает под действием приложенных к ней сил.

Вариационные принципы механики обычно разделяют на два подкласса — дифференциальные и интегральные. *Дифференциальные принципы механики* обычно формулируют в терминах вариаций механических величин (движения, скорости и т.п.) в форме, устанавливающей, чем истинное движение механической системы отличается от (или выделяется из) кинематически возможных движений в каждый рассматриваемый момент времени. *Интегральные принципы механики* постулируют отличие истинного движения механической системы от прочих ее кинематически возможных движений на некотором промежутке времени так, что это реальное движение должно доставлять экстремум некоторому интегральному функционалу, в качестве которого обычно выступает некоторая физическая величина, зависящая от кинематических и динамических характеристик рассматриваемой системы.

Вариационные принципы — не самый простой раздел механики. Мы ограничимся рассмотрением двух дифференциальных (§1, 2) и двух интегральных (§4, 5) принципов механики — они сравнительно просты и часто используются в приложениях.

§1. Дифференциальный принцип Даламбера-Лагранжа в декартовых переменных

Принцип Даламбера-Лагранжа непосредственно связан с общим уравнением механики (уравнением Даламбера - Лагранжа), поэтому, прежде, чем его формулировать, рассмотрим здесь это уравнение (см. (3.2), глава 9)

$$\sum_{j=1}^{N}\left(m_j\frac{d}{dt}\vec{v}_j-\vec{F}_j\right)\cdot\delta\vec{r}_j=0 \tag{1.1}$$

и напомним связанные с ним обозначения и предположения.

Рассматривается механическая система из конечного числа материальных точек M_j массы m_j, $j\in[1:N]$. Символом $\vec{r}_j$ обозначается радиус-вектор точки M_j в некотором репере $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Символами $\vec{F}_j$ и $\vec{R}_j$ обозначаются главные векторы внешних и внутренних активных сил и сил реакций связей, действующих на материальную точку M_j. Символом $\delta\vec{r}_j$ обозначается (изохронная) вариация вектора $\vec{r}_j$, совместимая с этими связями. Предполагается, что все стесняющие рассматриваемую механическую систему связи выражены равенствами и являются голономными и идеальными. Напомним, что связи называют идеальными, если равна нулю величина $\sum_{j=1}^{N}\vec{R}_j\cdot\delta\vec{r}_j$ — виртуальная работа сил реакций связи. Напомним, наконец, что величину $-m_j\frac{d}{dt}\vec{v}_j$, называют силой инерции, действующей на точку M_j.

Принцип Даламбера-Лагранжа. *Истинные движения механической системы с голономными идеальными связями, выраженными равенствами, принадлежат тому подмножеству множества всех кинематически возможных движений, для которых сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции на любом кинематически возможном перемещении системы равна нулю в каждый момент времени.*

Как мы знаем, равенство (1.1), выражающее этот принцип в форме уравнения, называется общим уравнением механики. Ранее, в главе 9, при сделанных предположениях, мы вывели (это было несложно) его из уравнений движения Ньютона, а в главе 10 из уравнения (1.1) мы вывели уравнения движения Лагранжа второго рода.

§2. Дифференциальный принцип Даламбера-Лагранжа в канонических переменных

Вариации скоростей. Вариации канонических переменных

Рассмотрим голономную механическую систему. Вариацией декартовой скорости j-ой точки системы в момент t называют бесконечно малую

$$\delta\,\vec{v}_j = \vec{v}_j'(t) - \vec{v}_j(t) = \frac{d\,\vec{r}_j'}{d\,t} - \frac{d\,\vec{r}_j}{d\,t}\,, \tag{2.1}$$

где $\vec{r}_j'$ — кинематически возможные движения (“близкие к $\vec{r}_j$”).

Символами $x_1, \ldots, x_{3N}$ обозначим, как обычно, координаты точек системы. Тогда получаем

$$\delta\,\dot{x}_\nu = \dot{x}_\nu' - \dot{x}_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, 3N. \tag{2.2}$$

Так как $\delta\,x_\nu = x_\nu' - x_\nu$, то

$$\frac{d}{d\,t}\,\delta\,x_\nu = \dot{x}_\nu' - \dot{x}_\nu, \tag{2.3}$$

и, следовательно,

$$\delta\,\dot{x}_\nu = \frac{d}{d\,t}\,\delta\,x_\nu, \quad \delta\,\vec{v}_j = \frac{d}{d\,t}\,\delta\,\vec{r}_j \tag{2.4}$$

то есть операторы дифференцирования и вариации перестановочны.

Рассмотрим величину $\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{s} (\partial\, \vec{r}_j / \partial\, q_i)\, \dot{q}_i + (\partial\, \vec{r}_j / \partial\, t)$ как функцию лагранжевых координат $q_1, \ldots, q_s$ и скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s$ и вычислим ее вариацию в момент t как функцию вариаций $\delta\, q_i$ и $\delta\, \dot{q}_i$:

$$\delta\, \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\, \vec{r}_j}{\partial\, q_i}\, \delta\, \dot{q}_i + \sum_{i,k=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial\, q_k\, \partial\, q_i}\, \dot{q}_i\, \delta\, q_k + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial\, q_k\, \partial\, t}\, \delta\, q_k. \qquad (2.5)$$

Дифференцируя равенство

$$\delta\, \vec{r}_j = \sum_{i=1}^{s} (\partial\, \vec{r}_j / \partial\, q_i)\, \delta\, q_i$$

по t, получаем:

$$\frac{d}{d\,t} \delta\, \vec{r}_j = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\, \vec{r}_j}{\partial\, q_i} \frac{d}{d\,t}\, \delta\, q_i + \\ + \sum_{i,k=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial\, q_k\, \partial\, q_i}\, \dot{q}_k\, \delta\, q_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial\, t\, \partial\, q_i}\, \delta\, q_i. \qquad (2.6)$$

Вычтем (2.6) из (2.5): слева получим нуль в силу (2.4), справа сократятся вторые и третьи суммы и, следовательно, можно приравнять нулю оставшуюся сумму:

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\, \vec{r}_j}{\partial\, q_i} (\delta\, \dot{q}_i - \frac{d}{d\,t}\, \delta\, q_i) = 0 \qquad (2.7)$$

(в координатах: $\sum_{i=1}^{s} (\partial\, x_\nu / \partial\, q_i)(\delta\, \dot{q}_i - d(\delta\, q_i)/dt) = 0)$. Уравнения (2.7) — линейные однородные относительно величин $\delta\, \dot{q}_i - d(\delta\, q_i)/dt$, причем $rank\ (\partial\, x_\nu / \partial\, q_i) = s$ (см. §1 главы 9). Поэтому $\delta\, \dot{q}_i - d(\delta\, q_i)/dt = 0, \quad i = 1, ..., s$, то есть:

$$\delta\, \dot{q}_i = \frac{d}{d\,t}\, \delta\, q_i, \quad i = 1, ..., s. \qquad (2.8)$$

Величины $\delta\, q_i$ — независимы. Из (2.8) следует, что вариации $\delta\, \dot{q}_i$ не являются независимыми от $\delta\, q_i$ как функции времени. С другой стороны , в любой момент $t=\tilde{t}$ значения $\delta\, q_i$ и $\delta\, \dot{q}_i$ можно рассматривать как независимые величины. Действительно, пусть требуется, чтобы $\delta\, q_i = \alpha_i, \quad \delta\, \dot{q}_i = \beta_i$ при $t=\tilde{t}$. Этого можно добиться, если в качестве вариаций $\delta\, q_i$ на промежутке $t \in (t_1, t_2)$ взять $\varphi_i(t)$ такую, что $\varphi_i(\tilde{t}) = \alpha_i, \quad \dot{\varphi}_i(\tilde{t}) = \beta_i$.

Рассмотрим вариации канонических переменных. Вариации импульсов можно вычислить, варьируя равенства $p_i = \partial\, L/\partial\, \dot{q}_i$ (см. (1.1) главы 11):

$$\delta\, p_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 L}{\partial\, q_k\ \partial\, \dot{q}_i}\, \delta\, q_k + \frac{\partial^2 L}{\partial\, \dot{q}_k\ \partial\, \dot{q}_i}\, \delta\, \dot{q}_k \tag{2.9}$$

Как мы отмечали, функции времени $\delta\, \dot{q}_k$ зависят от функций времени $\delta\, q_k$. Поэтому вариации импульсов как функции времени зависят от $\delta\, q_k$. С другой стороны, мы обнаружили, что точечные вариации (то есть значения вариаций при $t=\tilde{t}$) могут рассматриваться как независимые. Поэтому из (2.9) получаем, что при любом $t=\tilde{t}$ значения вариаций $\delta\, q_i$ и $\delta\, p_i$ можно выбирать независимо.

Принцип Даламбера-Лагранжа в канонических переменных

Будем использовать обозначения:

$$\begin{gathered} q = (q_1, ..., q_s), \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_s), \quad p = (p_1, ..., p_s), \\ \frac{\partial}{\partial\, q} = \left(\frac{\partial}{\partial\, q_1}, ..., \frac{\partial}{\partial\, q_s}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\, \dot{q}} = \left(\frac{\partial}{\partial\, \dot{q}_1}, ..., \frac{\partial}{\partial\, \dot{q}_s}\right), \\ \frac{\partial}{\partial\, p} = \left(\frac{\partial}{\partial\, p_1}, ..., \frac{\partial}{\partial\, p_s}\right), \quad \delta\, q = (\delta\, q_1, ..., \delta\, q_s), \\ \delta\, p = (\delta\, p_1, ..., \delta\, p_s). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Пусть все активные силы, действующие на механическую систему, потенциальны. В этом случае общее уравнение механики в лагранжевых координатах можно записать в следующей форме:

$$\left(\frac{d}{d\,t}\frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{q}} - \frac{\partial\, L}{\partial\, q}\right)\delta\, q = 0. \tag{2.11}$$

Дифференцируя $(\partial L/\partial \dot{q})\,\delta q$ по t и используя формулу (2.8), получаем:

$$\left(\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q = \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta \dot{q}. \tag{2.12}$$

Подставим (2.12) в (2.11):

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\right) = \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta \dot{q}, \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{d\,t}\,(p\delta\, q) = \delta\, L \tag{2.14}$$

— это общее уравнение механики в канонических переменных для случая, когда активные силы, действующие на механическую систему, потенциальны.

Принцип Даламбера - Лагранжа. *Если все активные силы, действующие на механическую систему потенциальны, а ее движения стеснены только голономными идеальными связями, выраженными равенствами, то ее истинные движения принадлежат тому подмножеству множества всех кинематически возможных движений, для которых в каждый момент времени выполняется равенство (2.14).*

Из уравнения (2.14) можно получить уравнения Лагранжа II рода, а из них и гамильтоновы уравнения (см. §1 главы 10 и §1 главы 11). Получим все же гамильтоновы уравнения непосредственно из уравнения (2.14). Варьируя равенство $L = p\,\dot{q} - H$ (см. (1.5) главы 11), получаем:

$$\delta\, L = p\,\delta\,\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q}\,\delta\, q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta\, p. \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15) в (2.14) получаем:

$$\frac{d}{d\,t}\,(p\,\delta\, q) = p\,\delta\,\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q}\,\delta\, q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta\, p, \tag{2.16}$$

$$\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta\, p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta\, q = 0. \tag{2.17}$$

При каждом фиксированном t вариации $\delta q_1, ..., \delta q_s, \delta p_1, ..., \delta p_s$ можно выбирать независимо, поэтому из (2.17) следуют канонические уравнения.

§3. Функционал и функция действия

Здесь вводятся в рассмотрение понятия действия как функционала, зависящего от движения (*функционал действия*), и как функции многих скалярных переменных — начальных и конечных значений времени и движения (*функция действия*), даются определения изохронной и полной вариации функционала действия и выводится связь между ними. Кроме того, доказывается важное для теории и приложений утверждение о том , что функция действия удовлетворяет уравнению Гамильтона - Якоби (точнее, является семейством его решений). Изохронная вариация функционала действия используется в принципе наименьшего действия Гамильтона (см. §4), а полная вариация этого функционала — в принципе наименьшего действия Эйлера - Лагранжа (см. §5).

Изохронная вариация функционала действия

Величину

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L\,(q'(t), \dot{q}'(t), t)\, dt, \tag{3.1}$$

где L — функция Лагранжа механической системы, а $q'(t) = (q'_1(t), ..., q'_s(t))$, — любое кинематически возможное движение (в обобщенных координатах), называют действием. Действие рассмотрим здесь как функционал, заданный на множестве допустимых (кинематически возможных) движений $q'(t)$. Величины t_1, t_2 будем считать параметрами, причем $t_* < t_1 < t_2 < t^*$, а $[t_*, t^*]$ — промежуток, на котором определено движение $q'(t)$.

Вариации координат, скоростей и функций от них (при фиксированном времени t), которые мы до сих пор рассматривали, называют изохронными. Бесконечно малую величину

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,(q', \dot{q}', t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L\,(q, \dot{q}, t)\, dt, \tag{3.2}$$

рассматриваемую как функцию (функционал) от $q'(t)$, называют изохронной вариацией функционала действия. Очевидно, что

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta\, L\,dt, \tag{3.3}$$

причем, как обычно, равенство между бесконечно малыми понимается как равенство с точностью до бесконечно малых высшего порядка. Используя дифференциальный принцип (2.14), получаем:

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = (p\,\delta\,q)\big|_{t_1}^{t_2}. \tag{3.4}$$

Полная вариация функционала действия

Бесконечно малые величины (при $\Delta t \to 0$, $q' \to q$, $\dot{q}' \to \dot{q}$)

$$\Delta q = q'(t+\Delta t) - q(t), \quad \Delta\dot{q} = \dot{q}'(t+\Delta t) - \dot{q}(t) \tag{3.5}$$

называют полными вариациями координат и скоростей. Аналогично определяется полная вариация $\Delta\Phi$ функции Φ от $q, \dot{q}, t$:

$$\Delta\Phi\,(q, \dot{q}, t) = \Phi\,(q'(t+\Delta t), \dot{q}'(t+\Delta t), t+\Delta t) - \Phi\,(q, \dot{q}, t), \tag{3.6}$$

причем, как и выше, предполагается, что $q'(t) = (q_1'(t), ..., q_s'(t))$ — кинематически возможное движение.

Получим формулы, связывающие полную и изохронную вариации:

$$\begin{gathered} \Delta q = q'(t+\Delta t) - q(t+\Delta t) + q(t+\Delta t) - q(t) = \\ = \delta\ q|_{t+\Delta t} + \dot{q}(t)\,\Delta t. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Так как $\delta\,\dot{q} = \frac{d}{d\,t}\,\delta\,q$ (см.(2.8)), то

$$\delta\ q|_{t+\Delta t} = \delta\ q|_t + \Delta t \frac{d}{d\,t}\,\delta\ q|_t = \delta\ q|_t + \delta\ \dot{q}|_t\,\Delta t. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.7) и отбрасывая члены второго порядка малости (второй член в (3.8)) получаем искомую формулу:

$$\Delta q = \delta\,q + \dot{q}\Delta t. \tag{3.9}$$

Аналогично получаем:

$$\Delta\dot q = \delta\,\dot q + \ddot q\Delta t. \tag{3.10}$$

Используя (3.9), (3.10) и формулы

$$\Delta\Phi = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,q}\Delta q + \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\dot q}\Delta\dot q + \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t}\Delta t, \quad \delta\,\Phi = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,q}\delta q + \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\dot q}\delta\dot q, \tag{3.11}$$

приходим к равенству:

$$\Delta\Phi = \delta\,\Phi + \dot\Phi\Delta t, \tag{3.12}$$

где использовано обозначение $\dot\Phi = d\Phi\,(q(t),\dot q(t),t)/dt$.

Бесконечно малую величину (при $\Delta t_1, \Delta t_2 \to 0,\ \ q' \to q,\ \ \dot q' \to \dot q$)

$$\Delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int\limits_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L\,(q',\dot q',t)\,dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,(q,\dot q,t)\,dt \tag{3.13}$$

называют полной вариацией функционала действия.

Теперь мы хотим получить формулу, связывающую полную и изохронную вариации функционала действия. Тогда, используя уже полученную формулу для изохронной вариации (3.4), мы сможем получить аналогичную формулу для полной вариации.

Используя обозначения

$$L_i = L(q(t_i),\dot q(t_i),t_i), \quad i = 1,2 \tag{3.14}$$

и учитывая, что $\Delta t_1, \Delta t_2 \to 0,\ \ q' \to q,\ \ \dot q' \to \dot q$, последовательно получаем:

$$\begin{gathered}
\Delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}[L\,(q',\dot q',t)\ - L\,(q,\dot q,t)]dt - \\
- \int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} L\,(q',\dot q',t)\,dt + \int\limits_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} L\,(q',\dot q',t)\,dt = \\
= \int\limits_{t_1}^{t_2}\delta\,L\,dt - L\,(q'(t_1),\dot q'(t_1),t_1)\Delta t_1 + L\,(q'(t_2),\dot q'(t_2),t_2)\Delta t_2\,, \\
\Delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt - L_1\Delta t_1 + L_2\Delta t_2\,.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Используя (3.4), находим, что

$$\Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = (p\,\delta q + L\,\Delta t\,)\big|_{t_1}^{t_2}\,. \tag{3.16}$$

Учитывая (3.9) и формулу $H = p\,\dot q - L$ приходим к искомой формуле для полной вариации функционала действия:

$$\Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = (p\,\Delta q - H\,\Delta t\,)\big|_{t_1}^{t_2}\,. \tag{3.17}$$

Функция действия — семейство решений уравнения Гамильтона-Якоби

Пусть q — решение уравнений движения рассматриваемой механической системы. Введем в рассмотрение величину:

$$W = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,(q, \dot q, t)\,dt \tag{3.18}$$

— она совпадает с интегралом действия (3.1) при $q' = q$, то есть может рассматриваться как функционал действия на множестве истинных движений механической системы. С другой стороны, полагая, что решение q уравнений движения вполне определяется начальным $q^1 = q(t_1)$ и конечным $q^2 = q(t_2)$ положениями, можно рассматривать величину W как функцию $W(q^1, q^2, t_1, t_2)$ параметров q^1, q^2, t_1, t_2, — мы будем называть ее тогда функцией действия. Как и ранее, полагаем, что $t_* < t_1 < t_2 < t^*$, где $[t_*, t^*]$ — промежуток, на котором определено движение $q(t)$. Будем предполагать далее, что функция $W(q^1, q^2, t_1, t_2)$ определена в некотором открытом односвязном множестве (то есть области) $D_W \subset R^{2s+1}$.

Из определения функции действия $W(q^1, q^2, t_1, t_2)$ получаем, что

$$\Delta t = dt, \quad \Delta q = dq, \quad \Delta W = dW, \tag{3.19}$$

поэтому формулу (3.17) можно переписать в следующем виде:

$$dW(q^1, q^2, t_1, t_2) = (p\,dq - H\,dt)\big|_{t_1}^{t_2} \tag{3.20}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial W}{\partial q^2} = p^2 = p|_{t=t_2}\,, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t_2} = -H(q^2, p^2, t_2), \tag{3.22}$$

Подставляя (3.21) в (3.22) получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial t_2} + H(q^2, \frac{\partial W}{\partial q^2}, t_2) = 0 \tag{3.23}$$

Мы доказали, что функция $W(q^1, q^2, t_1, t_2)$ задает $s+1$-параметрическое семейство решений уравнения Гамильтона - Якоби по переменным q^2, t_2 при таких значениях параметров $q^1 = (q_1^1, ..., q_s^1), t_1$, что $(q^1, q^2, t_1, t_2) \in D_W$ (напомним, что выше символом D_W мы обозначили область определения функции действия $W(q^1, q^2, t_1, t_2)$ — см. (3.18)).

§4. Интегральный принцип наименьшего действия при изохронном варьировании (Принцип Гамильтона)

Пусть $q = (q_1, ..., q_s)$ — лагранжевы координаты голономной механической системы, имеющей s степеней свободы и находящейся под действием только потенциальных сил. Если (t_1, t_2) — произвольный временной промежуток и

$$\delta\ q_i|_{t_1} = \delta\ q_i|_{t_2} = 0, \quad i = 1, ..., s, \tag{4.1}$$

то равенство (3.4) принимает следующий вид:

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0. \tag{4.2}$$

Принцип Гамильтона. *Пусть все действующие на механическую систему активные силы потенциальны, а ее движения стеснены только голономными идеальными связями, выраженными равенствами. Тогда истинные движения этой системы,* *удовлетворяющие условиям* (4.1)*, принадлежат тому подмножеству множества всех кинематически возможных ее движений, для которых выполнено равенство* (4.2)*.*

Заметим, что этот принцип Гамильтон сформулировал и обосновал для случая стационарных связей (в приведенной формулировке предполагается, что связи могут быть и нестационарными), а на случай нестационарных связей его обобщил Остроградский.

Принцип Гамильтона (для рассматриваемого класса механических систем) означает, что среди всех кинематически возможных движений с заданными начальным и конечным положением истинное движение (но не обязательно только оно) таково, что вычисленная для него изохронная вариация действия равна нулю (иначе: "действие на истинном движении имеет стационарное значение по Гамильтону").

Чтобы сформулированное утверждение можно было считать принципом, следует показать, что его можно положить в основу некоторого раздела механики (в данном случае, механики голономных систем с идеальными связями, находящихся под действием только потенциальных сил). Покажем, что из (4.2) следуют уравнения Лагранжа второго рода. Так как

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q \qquad (4.3)$$

и $\delta \dot q = d(\delta q)/dt$ (см. (2.8)), то

$$\delta W = \delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\,dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}. \qquad (4.4)$$

Используя здесь (4.1), (4.2), получаем:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q\right\}dt = 0. \qquad (4.5)$$

Методом "от противного" покажем, что подынтегральное выражение в (4.5) равно нулю при любом $t \in (t_1, t_2)$. Пусть при некотором $t = t' \in (t_1, t_2)$ истинно неравенство $\left\{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q\right\} >$

0 (<0). Тогда существует такой промежуток $(\tau_1, \tau_2) \subset (t_1, t_2)$ (при $t' \in (\tau_1, \tau_2)$), что $t \in (\tau_1, \tau_2) \Rightarrow \left(\frac{d}{d\,t}\frac{\partial\,L}{\partial\,\dot q} - \frac{\partial\,L}{\partial\,q}\right)\delta\,q > 0$.

Из принципа Гамильтона для случая интервала (t_1, t_2) следует очевидно аналогичное утверждение с заменой этого интервала на любой его подынтервал. В качестве такого подынтервала возьмем (τ_1, τ_2), а в качестве вариаций координат — величины $(\tau_2 - t)\,(t - \tau_1)\,\delta\,q$, обращающиеся в ноль при $t = \tau_1$, $t = \tau_2$. Тогда, по аналогии с (4.5), получим

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\frac{d}{d\,t}\frac{\partial\,L}{\partial\,\dot q} - \frac{\partial\,L}{\partial\,q}\right)(\tau_2 - t)\,(t - \tau_1)\,\delta\,q\,dt = 0, \tag{4.6}$$

но этого не может быть, так как подынтегральная функция больше нуля (меньше нуля) при $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Таким образом,

$$\left(\frac{d}{d\,t}\frac{\partial\,L}{\partial\,\dot q} - \frac{\partial\,L}{\partial\,q}\right)\delta\,q = 0, \quad t \in (\tau_1, \tau_2), \tag{4.7}$$

и уравнения Лагранжа второго рода следуют из независимости вариаций $\delta\,q_i$.

§5. Интегральный принцип наименьшего действия при изоэнергетическом варьировании (Принцип Эйлера-Лагранжа)

Как и в предыдущих разделах, рассмотрим голономную механическую систему с идеальными связями, имеющую s степеней свободы и находящуюся под действием только потенциальных сил. Пусть, кроме того, лагранжевы координаты $q_1, \ldots, q_s$ этой системы связаны с ее декартовыми координатами стационарными соотношениями и пусть $\partial\,H/\partial\,t = 0$, где H — гамильтониан. Как мы показали ((2.7), глава 11), в этом случае функция $H = T + \Pi$ аргументов $q_1, \ldots, q_s, \dot q_1, \ldots, \dot q_s$ есть первый интеграл уравнений движения, то есть

$$T + \Pi = h, \tag{5.1}$$

где величина h (постоянная энергии) принимает свое значение для каждого конкретного движения системы. Из этого следует также, что

$$L = T - \Pi = 2T - h. \tag{5.2}$$

В настоящем разделе мы будем иметь дело с полными вариациями координат, времени и функционалов (см. §3). В качестве этих вариаций можно, вообще говоря, рассматривать произвольные вариации, совместимые со связями, наложенными на систему (кинематически возможные вариации). Мы поступим по-другому: среди кинематически возможных вариаций выделим для дальнейшего рассмотрения только те, которые соответствуют выполнению равенства (5.1) , из которого следует, что

$$\Delta h = \frac{\partial h}{\partial \dot{q}} \Delta \dot{q} + \frac{\partial h}{\partial q} \Delta q = 0, \tag{5.3}$$

где $h = H = T + \Pi$ рассматривается как функция аргументов $q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s$. Это условие можно удовлетворить бесконечным числом способов. Мы будем считать вариации Δq независимыми, а Δt выберем так, чтобы удовлетворялось условие (5.3) (искомая формула для Δt, к которой мы придем, — (5.11)).

Используя формулы

$$\Delta q = \delta\, q + \dot{q} \Delta t, \quad \Delta \dot{q} = \delta\, \dot{q} + \ddot{q} \Delta t, \tag{5.4}$$

(см. (3.9), (3.10)), получаем:

$$\frac{d}{dt} \Delta q = \frac{d}{dt}\, \delta\, q + \ddot{q}\, \Delta t + \dot{q} \frac{d}{dt}\, \Delta t = \Delta \dot{q} + \dot{q} \frac{d}{dt} \Delta t, \tag{5.5}$$

$$\Delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\, \Delta q - \dot{q} \frac{d}{dt} \Delta t \tag{5.6}$$

Подставляя (5.6) в (5.3) приходим к равенству:

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \Delta q + \frac{\partial h}{\partial q} \Delta q = \frac{\partial h}{\partial \dot{q}} \dot{q} \frac{d}{dt} \Delta t. \tag{5.7}$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}} = 0, \quad T = T_2, \tag{5.8}$$

где T_2 квадратичная форма по $\dot{q}_i$, откуда следует, что

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{q}}\dot{q} = \frac{\partial (T+\Pi)}{\partial \dot{q}}\dot{q} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T_2 = 2T. \tag{5.9}$$

Тогда из (5.7) выводим формулу:

$$\frac{d}{dt}\Delta t = \frac{1}{2\,T}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\Delta q + \frac{\partial h}{\partial q}\Delta q\right). \tag{5.10}$$

Интегрируя это равенство в пределах от t_1 до t получаем:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \int\limits_{t_1}^{t} \frac{1}{2\,T}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\Delta q + \frac{\partial h}{\partial q}\Delta q\right) dt, \tag{5.11}$$

где Δq_i — независимые вариации координат (функции времени), Δt_1 — независимая точечная вариация (значение Δt при $t = t_1$).

Теперь перейдем к получению принципа Эйлера-Лагранжа. В общих чертах, он формулируется как принцип наименьшего действия в терминах полных вариаций и с учетом равенства (5.11).

Обратимся к формуле для полной вариации функционала действия:

$$\Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = (p\,\Delta q - H\,\Delta t\,)\big|_{t_1}^{t_2}\;, \tag{5.12}$$

(см. (3.17)). Величины t_1, t_2, как и ранее, считаем параметрами, удовлетворяющими условиям $t_* < t_1 < t_2 < t^*$, где $[t_*, t^*]$ — промежуток, на котором определено кинематически возможное движение $q'(t)$. Принимая также условия

$$\Delta t_1 = 0, \quad \Delta\, q\big|_{t_1, t_2} = 0, \tag{5.13}$$

получаем, что

$$\Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = -h\,\Delta t_2. \tag{5.14}$$

Кроме того, из (5.2) следует, что

$$\Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} 2\,T\,dt - h\,\Delta t_2, \tag{5.15}$$

поэтому

$$\Delta \int\limits_{t_1}^{t_2} 2\,T\,dt = 0 \tag{5.16}$$

(полная вариация *действия по Лагранжу* равна нулю) для любого промежутка $(t_1, t_2) \subset [t_*, t^*]$. Для того, чтобы сформулировать принцип Эйлера-Лагранжа, нам остается принять, что при вычислении полной вариации действия по Лагранжу величина Δt_2 определяется по формуле (5.11) при $t = t_2$ и $\Delta t_1 = 0$, - в этом случае (при учете также и (5.13)) оказывается, что действие по Лагранжу, а значит и равенство (5.16) не зависят явно от Δt_1 и Δt_2.

Принцип Эйлера-Лагранжа. *Пусть все действующие на механическую систему активные силы потенциальны, ее движение стеснено только голономными идеальными связями, выраженными равенствами, лагранжевы координаты* $q_1, ..., q_s$ *системы связаны с ее декартовыми координатами стационарными соотношениями, а ее гамильтониан не зависит от времени явно. Тогда истинные движения этой системы, удовлетворяющие условиям* (5.13), *принадлежат тому подмножеству множества всех кинематически возможных ее движений, для которых выполнено равенство* (5.16) *с учетом того, что*

$$\Delta t_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2\,T} \left(\frac{\partial\, h}{\partial\, \dot{q}} \frac{d}{dt} \Delta q + \frac{\partial\, h}{\partial\, q} \Delta q \right) dt. \tag{5.17}$$

Иначе говоря, *принцип Эйлера-Лагранжа* (для рассматриваемого класса механических систем) означает, что среди всех кинематически возможных движений данной механической системы, удовлетворяющих условиям (5.13), истинное движение таково, что для него полная вариация действия по Лагранжу равна нулю (“действие на истинном движении стационарно по Лагранжу”), причем при вычислении вариации действия по Лагранжу величина Δt_2 находится по формуле (5.17).

Перейти к оглавлению на странице: 256

ЧАСТЬ V. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой части в двух главах-очерках напоминаются стандартные сведения об алгебраических структурах, пространствах и тензорах.

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 13. СТРУКТУРЫ И ПРОСТРАНСТВА

§1. Группы, кольца, поля

Здесь мы напомним начальные сведения из теории групп, а также определения кольца и поля.

Бинарной алгебраической операцией или *законом композиции на множестве* X называют отображение $\tau : X \times X \to X$. Вместо $\tau(a, b)$ пишут $a \,\tau\, b$, например $a * b$, $a \circ b$, $a + b$, $a \cdot b$ (или $a\, b$). В последних двух случаях говорят соответственно о *сумме* и *произведении* элементов a и b, то есть законы композиции $+$ и $\cdot$ называют суммой и произведением. Если $*$ — закон композиции на X, то пару $(X, *)$ называют *алгебраической системой* или *алгебраической структурой*. Чаще говорят просто об алгебраической системе X. Если $X_1 \supset X_2$ и $(X_1, *)$ — алгебраическая система, то алгебраическую систему $(X_2, *|_{X_2})$ обычно обозначают упрощенно $(X_2, *)$.

Если $(\forall a, b, c \in X)\,(a * (b * c) = (a * b) * c)$, то закон $*$ называется *ассоциативным*. Если закон композиции $*$ ассоциативен, то алгебраическую систему $(X, *)$ называют *полугруппой*.

Элемент $e \in X$ называется *единичным* или *нейтральным* относительно закона композиции $*$, если $(\forall x \in X)\,(e * x = x * e = x)$. В алгебраической системе не может быть более одного единичного элемента. Полугруппу с единицей называют *моноидом*. Элемент a моноида $(X, *, e)$ называют *обратимым*, если $(\exists b \in X)\,(a * b = b * a = e)$. Элемент b такой, что $a * b = b * a = e$, обозначают a^{-1} и называют обратным к элементу a. Моноид, все элементы которого обратимы называют *группой*.

Закон композиции $*$ называется *коммутативным* в том случае, когда $(\forall a, b \in X)\,(a * b = b * a)$. Группу с коммутативным законом композиции называют *абелевой* (или *коммутативной*) *группой*. Для абелевых групп закон композиции часто (но не всегда) называют сложением и обозначают $+$ или каким-нибудь иным знаком суммы. В этом случае нейтральный элемент называют нулем и обозначают 0, а обратный элемент называют *противоположным* и вместо a^{-1} используют обозначение $-a$. Сумма $b + (-a)$ называется тогда разностью и обозначается $b - a$.

Если $(G, *)$ (или просто G) — группа, e — ее единица и выполнены условия $H \subset G$, $e \in H$, $(h_1, h_2 \in H) \Rightarrow (h_1 * h_2 \in H)$, $(h \in H) \Rightarrow (h^{-1} \in H)$, то $(H, *|_H)$ (или просто H) называется *подгруппой группы* G.

Важнейшие для нас примеры групп — *группы преобразований*. Пусть $s(\Omega)$ — множество всех биективных отображений $f : \Omega \to \Omega$. На этом множестве в качестве закона композиции задают суперпозицию отображений, то есть в качестве закона композиции τ берут отображение $\tau : s(\Omega) \times s(\Omega) \to s(\Omega)$ такое, что $(\forall f, \varphi \in s(\Omega))$ $(\tau(f, \varphi) = f \circ \varphi)$, $(\forall x \in \Omega)$ $((f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)))$. Оказывается, что $s(\Omega)$ с таким законом композиции — группа, причем ее единицей является тождественное отображение, то есть отображение $id_\Omega : \Omega \to \Omega$ такое, что $(\forall x \in \Omega)$ $(id_\Omega(x) = x)$.

Если X — непустое множество и выполнены условия

(k1) $(X, +)$ — абелева группа;

(k2) $(X, \cdot)$ — полугруппа;

(k3) $(\forall a, b, c \in X)$ $((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,\ c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b)$,

то тройка $(X, +, \cdot)$ называется *кольцом*, причем ради краткости часто говорят просто о кольце X. Группу $(X, +)$ называют *аддитивной группой кольца* $(X, +, \cdot)$, а полугруппу $(X, \cdot)$ — его *мультипликативной полугруппой*. Если полугруппа $(X, \cdot)$ — моноид (то есть она имеет единицу), то $(X, +, \cdot)$ называют *кольцом с единицей*. Иногда наличие единицы включают в определение кольца. С другой стороны, иногда в определение кольца не включают даже свойство k2.

Пусть $X_1 \subset X$. Тогда если $(X_1, +)$ и $(X_1, \cdot)$ являются соответственно подгруппой аддитивной группы $(X, +)$ и подполугруппой мультипликативной полугруппы $(X_1, \cdot)$ кольца $(X, +, \cdot)$, то $(X_1, +, \cdot)$ называют *подкольцом* этого кольца. Нейтральные (единичные) элементы аддитивной группы кольца и его мультипликативной полугруппы принято обозначать символами $\emptyset$ (ноль) и 1 (единица) соответственно. Элемент a кольца X с единицей называется *обратимым* или *делителем единицы*, если существует элемент a^{-1} (называемый *обратным* к a), для которого истинны равенства $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$. Можно показать, что обратимые элементы кольца X с единицей составляют группу по умножению, которую мы обозначим $U(X)$.

Если $(\forall a, b \in X)\,(a \cdot b = b \cdot a)$, то кольцо X называют *коммутативным.* Если в коммутативном кольце X выполняется неравенство $1 \neq \emptyset$, и каждый не равный $\emptyset$ элемент обратим, то это кольцо называют полем, а группу $U(X)$ называют *мультипликативной группой поля* X. Элементы поля обычно называют *скалярами*. *Подполем* X_1 поля X называют подкольцо в X, которое само является полем, и в этом случае говорят также, что поле X является *расширением своего подполя* X_1.

Если Z, Q — множества целых и рациональных чисел, а сложение и умножение на этих множествах обозначается одними и теми же символами $+$ и $\cdot$, то $(Z, +, \cdot)$, $(Q, +, \cdot)$ — это стандартные примеры колец, и о них принято говорить как о кольце Z целых чисел и кольце Q рациональных чисел соответственно. Если R, C — множества вещественных и комплексных чисел, а сложение и умножение на этих множествах обозначается одними и теми же символами $+$ и $\cdot$, то $(R, +, \cdot)$, $(C, +, \cdot)$ — это стандартные примеры полей, и о них принято говорить как о поле R вещественных и поле C комплексных чисел соответственно.

§2. Векторные пространства

Пусть $(\Lambda, +, \cdot)$ — поле с операциями сложения $+ : \Lambda \times \Lambda \to \Lambda$ и умножения $\cdot\, : \Lambda \times \Lambda \to \Lambda$, а $\emptyset$ и 1 — его ноль и единица. Говорят, что непустое множество V наделено структурой *векторного пространства* (или является векторным пространством) над полем Λ, если заданы функции $\oplus : V \times V \to V$ и $\circ : \Lambda \times V \to V$, называемые сложением векторов и умножением вектора на скаляр, и выполнены следующие условия:

(v1) $(V, \oplus)$ — абелева группа;

(v2) при любых $a, b \in \Lambda, \quad x, y \in V$ — истинны равенства:

$$\begin{gathered} a \circ (x \oplus y) = a \circ x \oplus a \circ y, \\ (a + b) \circ x = a \circ x \oplus b \circ x, \\ a \circ (b \circ x) = (a \cdot b) \circ x, \\ 1 \circ x = x. \end{gathered}$$

Пусть $(V_1, \oplus_1, \circ_1)$, $(V_2, \oplus_2, \circ_2)$ — векторные пространства над полем Λ. Функция $F : V_1 \to V_2$, называется *гомоморфизмом* этих пространств, если

$$F(x \oplus_1 y) = F(x) \oplus_2 F(y), \quad F(a \circ_1 x) = a \circ_2 F(x)$$

при любых $x, y \in V_1$, $a \in \Lambda$. Взаимно однозначный гомоморфизм называют *изоморфизмом*. Если существует гомоморфизм (изоморфизм) между пространствами $(V_1, \oplus_1, \circ_1)$ и $(V_2, \oplus_2, \circ_2)$, то они называются *гомоморфными* (*изоморфными*). Если не интересоваться никакими свойствами пространств, кроме тех, которые связаны с операциями сложения и умножения на скаляр, то все изоморфные пространства естественно отождествить. Можно сказать, что векторное пространство определяется с точностью до изоморфизма, или что векторное пространство – это класс изоморфных пространств.

В наиболее востребованных в приложениях случаях полей $\Lambda = R$ и $\Lambda = C$ пространство V над полем Λ называют *вещественным* и *комплексным векторным пространством* соответственно.

Простейшим примером векторного пространства над полем Λ является само поле Λ. Это означает, что всякое поле Λ можно наделить структурой векторного пространства над этим же полем или над его подполем K, используя заданные законы сложения и умножения поля Λ также и как сложение векторов и умножение векторов на скаляры. В этом смысле, множество C комплексных чисел можно рассматривать как векторное пространство над полем C или над полем R вещественных чисел, а множество R вещественных чисел – как векторное пространство над полем R.

Элементы векторного пространства называют векторами или точками. Ради упрощения записи, при любых $a, b \in \Lambda$, $x, y \in V$ вместо $a \cdot b$, $a \circ x$, $x \oplus y$ мы будем в дальнейшем писать $ab, ax, x+y$ соответственно. Нейтральный элемент группы $(V, \oplus)$ обозначим 0 (не путать с нулем $\varnothing$ поля Λ), и для любого $x \in V$, обратный к нему элемент будем обозначать $-x$. Кроме того, символом $y - x$ будем обозначать величину $y + (-1)x$. С учетом этих упрощенных и более привычных обозначений, свойства (v1), (v2) означают, что при любых $a, b \in \Lambda$, $x, y, z \in V$ истинны равенства

$$(x + y) + z = x + (y + z), \tag{2.1}$$

Перейти к оглавлению на странице: 256

$$x + y = y + x, \tag{2.2}$$

$$x + 0 = x, \tag{2.3}$$

$$x - x = 0, \tag{2.4}$$

$$a(x + y) = ax + ay, \tag{2.5}$$

$$(a + b)x = ax + bx, \tag{2.6}$$

$$a(bx) = (ab)x, \tag{2.7}$$

$$1x = x, \tag{2.8}$$

а также их следствия, например,

$$\emptyset x = 0, \quad a0 = 0, \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} ax = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \text{ если } a \neq \emptyset \text{ и} \\ ax = 0 \;\Rightarrow\; a = \emptyset, \text{ если } x \neq 0, \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} ax = ay \;\Rightarrow\; x = y, \text{ если } a \neq \emptyset \text{ и} \\ ax = bx \;\Rightarrow\; a = b, \text{если } x \neq 0. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Множество $V_1 \subset V$, которое является векторным пространством относительно тех же операций сложения векторов и умножения векторов на скаляры (а точнее – их сужений), называют *подпространством* векторного пространства V. Непустое подмножество $\mathcal{L}$ векторного пространства V называют *линейным множеством* или *линейным многообразием* в этом пространстве, если при любых $a, b \in \Lambda$ из $x, y \in \mathcal{L}$ следует $ax + by \in \mathcal{L}$.

Линейное многообразие в векторном пространстве является его подпространством, и, с другой стороны, любое подпространство векторного пространства является в нем линейным многообразием. Пересечение любого множества линейных многообразий в векторном пространстве является линейным многообразием этого пространства, то есть его подпространством. Рассмотрим последовательно еще три стандартные операции конструирования векторных пространств.

Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — векторные пространства над полем Λ. Произведение $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} T_k = T_1 \times \ldots \times T_k$ множеств $T_1, \ldots, T_k$ можно наделить структурой векторного пространства над тем же полем Λ, если при любых $x_1, y_1 \in T_1, \ldots, x_k, y_k \in T_k$ и любом $a \in \Lambda$ определить сумму векторов $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} T_k$ и произведение вектора на скаляр как $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k)$, $ax = (ax_1, \ldots, ax_k)$. Так определенное векторное пространство $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} T_k$ называют произведением векторных пространств $T_1, \ldots, T_k$. Если $T_1 = \ldots = T_k = T$, то для этого произведения векторных пространств используют обозначение T^k.

Множество $T_1 + T_2 = \{x \in V \,|x = x_1 + x_2,\ x_1 \in T_1,\ x_2 \in T_2\}$ называют *алгебраической суммой* двух подмножеств T_1 и T_2 векторного пространства V. Функция, сопоставляющая двум подмножествам векторного пространства их алгебраическую сумму, является ассоциативной, то есть для любых подмножеств T_1, T_2, T_3 этого пространства истинно равенство $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$. Это позволяет ввести понятие алгебраической суммы $\mathop{+}\limits_{i=1}^{k} T_i = T_1 + \ldots + T_k$ подмножеств $T_1, \ldots, T_k$ векторного пространства.

Алгебраическая сумма $T_1 + \ldots + T_k$ линейных многообразий $T_1, \ldots, T_k$ векторного пространства V является линейным многообразием в этом пространстве. Говорят, что *векторное пространство V является прямой суммой $\mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{k} T_i = T_1 \oplus \ldots \oplus T_k$ своих линейных многообразий $T_1, \ldots, T_k$*, если $V = T_1 + \ldots + T_k$ и если условия $u_1 \in T_1, \ldots, u_k \in T_k$, $u_1 + \ldots + u_k = 0$ выполняются только при $u_1 = \ldots = u_k = 0$. Оказывается, что векторное пространство V является прямой суммой $\mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{k} T_i$ своих линейных многообразий $T_1, \ldots, T_k$ тогда и только тогда, когда любой вектор $x \in V$ единственным образом представим в виде суммы $x = x_1 + \ldots + x_k$, где $x_1 \in T_1, \ldots, x_k \in T_k$.

Пусть x и T — вектор и линейное многообразие векторного пространства V над полем Λ. Классом смежности по линейному многообразию T называют множество $x + T = \{x\} + T$. Любые два класса смежности $x + T$, $y + T$ либо совпадают, либо их пересечение – пустое множество. Множество $V/T = \{X \,|X = x + T,\ x \in V\}$ можно наделить структурой векторного пространства над тем же полем Λ, если при любых x, $y \in V$ и любом $a \in \Lambda$ определить сумму векторов $X = x + T \in V/T$ и $Y = y + T \in V/T$ и произведение вектора X на скаляр a формулами $X+Y=\{x+y\}+T, aX=ax+T$. Так определенное векторное пространство также обозначают V/T и называют фактор-пространством векторного пространства V по линейному многообразию T.

Пользуясь свойствами векторного пространства V над полем Λ, по индукции можно определить вектор $a_1x_1+\ldots+a_kx_k \in V$, называемый *линейной комбинацией векторов* $x_1,\ldots,x_k$ с коэффициентами $a_1,\ldots,a_k \in \Lambda$. Пусть T — непустое подмножество векторного пространства V над полем Λ. Множество $\mathcal{L}(T)$ всех линейных комбинаций векторов из T с коэффициентами из Λ называют *линейной оболочкой, натянутой на* T или просто *линейной оболочкой множества* T. Линейная оболочка $\mathcal{L}(T)$ является пересечением всех линейных многообразий в V, содержащих T.

Множество векторов $x_1,\ldots,x_k \in V$ называется *линейно независимым* (или еще говорят, что эти векторы линейно независимы), если равенство $a_1x_1+\ldots+a_kx_k=0$ не выполняется ни при каких коэффициентах $a_1,\ldots,a_k \in \Lambda$, кроме $a_1=\ldots=a_k=\emptyset$. В противном случае, оно называется *линейно зависимым*. Бесконечное множество векторов называется *линейно независимым*, если любое его конечное подмножество линейно независимо. Размерностью $\dim V$ векторного пространства V называют максимальное число его линейно независимых векторов. Если размерность $n=\dim V$ конечна, то пространство V называют *конечномерным* (n*– мерным*), а иначе – *бесконечномерным*. Приведем основные формулы, связывающие размерности рассмотренных выше векторных пространств.

Если T_1 и T_2 — линейные многообразия векторного пространства, то

$$\dim(T_1+T_2)+\dim(T_1\cap T_2)=\dim T_1+\dim T_2.$$

Размерность $co\dim T$ векторного пространства V/T называют *коразмерностью* или *дефектом* линейного многообразия T относительно векторного пространства V. Истинно равенство $\dim T+co\dim T=\dim V$. Если $V=T_1\oplus T_2$, то $\dim T_2=co\dim T_1$. Более того, если $V=T_1\oplus\ldots\oplus T_k$, то имеет место равенство $\dim V=\dim T_1+\ldots+\dim T_k$.

Линейно независимое множество X векторного пространства V называется *алгебраическим базисом* этого пространства (или просто его *базисом*), если $\mathcal{L}(X)=V$.

Каждый вектор векторного пространства V может быть представлен линейной комбинацией элементов его базиса, причем для каждого базиса это представление единственно.

Любой базис n–мерного векторного пространства V состоит ровно из n векторов. Если $\{x_k\}_{k=1}^n$ — базис этого пространства, то его обычно записывают в виде упорядоченного набора $(x_1, \ldots, x_n)$, считая тем самым различными два по разному упорядоченных алгебраических базиса. Для любого $x \in V$ существует единственный упорядоченный набор коэффициентов $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda$ такой, что $x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$. Такое представление называют *разложением вектора x по базису* (или в базисе) $(x_1, \ldots, x_n)$. Коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ называются координатами (компонентами) вектора x в этом базисе.

Пусть $(x'_1, \ldots, x'_n)$ и $(x''_1, \ldots, x''_n)$ — два базиса векторного пространства V над полем Λ. Каждый вектор x''_i можно разложить по другому базису $(x'_1, \ldots, x'_n)$: $x''_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x'_j$, $i \in [1:n]$. Относительно этих формул будем далее говорить, что базис $(x''_1, \ldots, x''_n)$ связан с базисом $(x'_1, \ldots, x'_n)$ матрицей $A = (a_{i,j})$ (тогда базис $(x'_1, \ldots, x'_n)$ связан с базисом $(x''_1, \ldots, x''_n)$ матрицей A^{-1}). Если базис $(x''_1, \ldots, x''_n)$ связан с базисом $(x'_1, \ldots, x'_n)$ матрицей A, а $(a''_1, \ldots, a''_n)$ и $(a'_1, \ldots, a'_n)$ — координаты некоторого вектора $x \in V$ в этих базисах, то несложно вывести, что координаты вектора x в двух базисах связаны равенствами $a'_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} a''_j$, $i \in [1:n]$.

Исходя из того, что любые два базиса одного конечномерного векторного пространства всегда связаны матрицей с ненулевым определителем, можно ввести важные понятия *ориентации базисов* и самого *пространства*. Для этого, прежде всего, введем в рассмотрение множество $\mathcal{B}$ всех базисов рассматриваемого векторного пространства V. Несложно показать, что $\mathcal{B}$ можно представить как объединение двух непересекающихся множеств $\mathcal{B}^+$ и $\mathcal{B}^-$ так, что:

(a) любые два базиса из $\mathcal{B}^+$ связаны матрицей с положительным определителем и любые два базиса из $\mathcal{B}^-$ также связаны матрицей с положительным определителем;

(b) любой базис из $\mathcal{B}^+$ связан с любым базисом из $\mathcal{B}^-$ матрицей с отрицательным определителем;

(c) такое представление единственно с точностью до перестановки $\mathcal{B}^+$ с $\mathcal{B}^-$.

Если такое разделение $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}^+$ и $\mathcal{B}^-$ произведено (то есть если $\mathcal{B}^+$ и $\mathcal{B}^-$ конкретизированы), то говорят, что на векторном пространстве V задана *ориентация* (одна из двух возможных). При этом, базисы из $\mathcal{B}^+$ называют *положительно ориентированными* или *правыми*, а базисы из $\mathcal{B}^-$ называют *отрицательно ориентированными* или *левыми*. Для задания ориентации достаточно любой конкретный базис отнести к $\mathcal{B}^+$ или $\mathcal{B}^-$, то есть объявить его правым или левым, — тогда все базисы, связанные с ним матрицей с положительным определителем, будут иметь ту же ориентацию, а все остальные базисы будут иметь противоположную ориентацию.

Пусть теперь V — вещественное или комплексное векторное пространство. Множество

$$L(x,y) = \{z \in V \,|z = ax + (1-a)y,\ a \in [0,1]\,\}$$

называют *отрезком, соединяющим точки* $x, y \in V$. Множество $T \subset V$ называют *выпуклым*, если из $x, y \in T$ следует $L(x,y) \subset T$. При условии $a_1, \ldots, a_k \in [0,+\infty)$ и $a_1 + \ldots + a_k = 1$, вектор $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k \in V$ называют выпуклой комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_k$ с коэффициентами $a_1, \ldots, a_k \in \Lambda$. Множество $\mathcal{V}(T)$ всех выпуклых комбинаций векторов из T называют *выпуклой оболочкой, натянутой на* T или просто *выпуклой оболочкой* T. Выпуклая оболочка $\mathcal{V}(T)$ является пересечением всех выпуклых множеств в V, содержащих T.

§3. Метрические пространства

Говорят, что множество M наделено структурой *метрического пространства*, или что на M задана *метрика*, если определена функция $\varrho : M \times M \to [0, +\infty)$, называемая *расстоянием* и обладающая следующими свойствами:

(m1) $(\forall x, y \in M)\,((\varrho(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = y))$ — свойство диагонали;

(m2) $(\forall x, y \in M)\,(\varrho(x,y) = \varrho(y,x))$ — свойство симметрии;

(m3) $(\forall x, y, z \in M)\,(\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y))$ — неравенство треугольника.

Пара (M, ϱ) называется *метрическим пространством*, но обычно говорят о метрическом пространстве M. Элементы множества M называют также *точками* этого метрического пространства.

Кроме расстояния $\varrho(x, y)$ между элементами x, y метрического пространства M используют и понятие *расстояния* $\varrho(A, C)$ *между подмножествами* A, C *множества* M. При этом полагают, что

$$\varrho(A, C) = \inf \{ u |\, u = \varrho(x, y),\ x \in A,\ y \in C \}.$$

Если $A = \{x\}$, то есть если A состоит из одного элемента x, то расстояние $\varrho(A, C)$ обозначают также $\varrho(x, C)$.

Пусть M — метрическое пространство и $x^0 \in M$, $b \geqslant 0$. Множества $\mathcal{O}_b(x^0) = \big\{ x \in M \mid \varrho(x, x^0) < b \big\}$, $\bar{\mathcal{O}}_b(x^0) = \big\{ x \in M \mid \varrho(x, x^0) \leqslant b \big\}$ называют *открытым и замкнутым шаром* или *открытым и замкнутым параллелепипедом* соответственно. Точка x^0 называется *центром шара* (параллелепипеда), а величина b — *радиусом шара*. Множество A называется *ограниченным*, если оно является подмножеством некоторого шара конечного радиуса.

Точка x^0 метрического пространства M называется *внутренней для множества* $K \subset M$, если она принадлежит ему вместе с некоторым открытым шаром с центром в этой точке. Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*. Всякое открытое множество метрического пространства M, содержащее множество $K \subset M$, называется *открытой окрестностью* этого множества. Множество $N \subset M$ называется окрестностью множества $K \subset M$, если оно содержит его открытую окрестность. В частности, если множество K состоит из одной точки $x^0 \in M$, то говорят об окрестности и открытой окрестности этой точки. В качестве окрестности точки x^0 чаще всего рассматривают открытый шар с центром в этой точке.

Точку $x^0 \in M$ называют *предельной точкой* множества K, если в любой ее окрестности есть точка $x \in K$, отличная от x^0. Точку $x^0 \in M$ называют *граничной* для множества K, если в любой ее окрестности есть как точки, принадлежащие K, так и точки, принадлежащие $M \backslash K$. Множество всех граничных точек множества K называют его *границей* и обозначают обычно Γ_K или ∂K.

Если множество содержит все свои предельные точки, то оно называется *замкнутым*. Если K' — множество всех предельных точек множества K, то множество $[K] = K \cup K'$ называют *замыканием* множества K.

Говорят, что множества A и C покрывают множество K, если $(A \cup C) \supset K$. Подмножество K метрического пространства M называется *связным*, если его нельзя покрыть никакими двумя открытыми непересекающимися подмножествами множества M. Открытое связное множество называют *областью*, а замкнутое связное множество называют *континуумом*. Если K — область, то $K \cup \Gamma_K$ — называют *замкнутой областью*. Множество K называют *компактным*, если любое его бесконечное подмножество имеет предельную точку, принадлежащую M.

Рассмотрим теперь некоторые понятия, связанные с предельным переходом в метрическом пространстве M. Пусть Z — множество целых чисел, а множество $Z_1 \subset Z$ ограничено снизу. Всякая функция $\pi : Z_1 \to M$ называется *последовательностью* в M. Если множество Z_1 конечно, то последовательность называется *конечной*, иначе – *бесконечной*. Обычно для последовательности используют одно из обозначений $\{x^k\}_{Z_1}, \{x^k\}, x^k, x_k$ и т.п. Всякое сужение функции $\pi : Z_1 \to M$, то есть всякая функция $\pi : Z_2 \to M$ при $Z_2 \subset Z_1$ называется ее *подпоследовательностью*. Последовательность называется *ограниченной*, если множество $\{x^k \mid k \in Z_1\}$ ограничено. Символом $\pi(M)$ будем обозначать множество всех последовательностей в M.

Говорят, что при $k \to +\infty$ последовательность $\{x^k\} \in \pi(M)$ *сходится к точке* $x^0 \in M$, и записывают это в виде $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k = x^0$ или $x^k \to x^0$, если $\lim\limits_{k \to +\infty} \varrho(x^k, x^0) = 0$.

Определение компактности, приведенное выше, в терминах последовательностей оказывается эквивалентным следующему: множество метрического пространства называется *компактным*, если у любой его бесконечной последовательности существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке этого пространства. Если компактно множество M, то пространство M называется *компактным*.

Множество K называется *всюду плотным* в M, если $[K] = M$, или, что то же, если для любой точки $x \in M$ существует сходящаяся к ней последовательность $\{x^k\} \in \pi(K)$. Метрическое пространство называют *сепарабельным*, если у него существует счетное всюду плотное подмножество. Всякое подмножество сепарабельного метрического пространства само является сепарабельным метрическим пространством. Если у метрического пространства существует всюду плотное сепарабельное подмножество, то оно сепарабельно.

Последовательность $\{x^k\} \in \pi(M)$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \varrho(x^n, x^m) = 0$. Метрическое пространство M называется *полным*, если любая его фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу множества M.

Пополнением $\bar{M}$ *метрического пространства* M называется полное метрическое пространство, содержащее M как всюду плотное свое подмножество. Теорема, принадлежащая Ф.Хаусдорфу, утверждает, что это пополнение всегда существует. Мы сформулируем эту теорему в следующем разделе для случая нормированных пространств.

§4. Банаховы, гильбертовы и евклидовы пространства

Говорят, что векторное пространство V наделено структурой *нормированного пространства*, если на V определена функция $\mathcal{N} : V \to [0, +\infty)$ такая, что при любых $x, y \in V$, $a \in \Lambda$ она удовлетворяет следующим условиям:

(n1) $(\mathcal{N}(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$;

(n2) $\mathcal{N}(ax) = |a|\,\mathcal{N}(x)$, $\mathcal{N}(x+y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Эта функция называется *нормой* и, кроме $\mathcal{N}(x)$, для нее используют обозначения $|x|, \|x\|$ и другие. Пара $(V, \mathcal{N})$ называется *нормированным векторным пространством*, но обычно говорят о *нормированном пространстве* V.

Пусть V_1, V_2 — векторные пространства, а $(V_1, \mathcal{N}_1)$, $(V_2, \mathcal{N}_2)$ — векторные нормированные пространства. Изоморфизм $F : V_1 \to V_2$ называется *изометрическим*, если $\mathcal{N}_2(F(x)) = \mathcal{N}_1(x)$. Нормированные пространства V_1, V_2 называются *изометрически изоморфными*, если существует изометрический изоморфизм между ними.

Все изометрически изоморфные нормированные пространства естественно отождествить. Можно сказать, что нормированное пространство определяется с точностью до изометрического изоморфизма.

Нормированное пространство V наделяют структурой метрического пространства, полагая $\varrho(x, y) = \mathcal{N}(x-y)$ для любых векторов $x, y \in V$. Когда говорят о каких-либо метрических понятиях в нормированных пространствах (расстояние, окрестность, шар, сходимость и т.д), то имеют в виду это расстояние.

Подпространством нормированного пространства V называют его замкнутое векторное подпространство (то есть его замкнутое линейное многообразие).

Полное нормированное пространство называют *банаховым пространством*. Всякое подпространство банахового пространства (то есть, его замкнутое векторное подпространство) является банаховым.

Пополнением нормированного пространства V называется банахово пространство, содержащее V как всюду плотное свое подмножество. Как мы уже говорили в разделе о метрических пространствах, пополнение любого метрического, а значит и нормированного пространства всегда существует. Прежде, чем сформулировать соответствующую теорему, принадлежащую Ф.Хаусдорфу, мы введем некоторые необходимые для этого понятия.

Пусть V — нормированное пространство, а Φ — множество всех фундаментальных последовательностей элементов из V. На множестве Φ вводят отношение эквивалентности $\sim$, полагая, что

$$\left(\left\{x^k\right\} \sim \left\{\hat{x}^k\right\}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k\to+\infty} \mathcal{N}(x^k - \hat{x}^k) = 0\right)$$

для любых $\left\{x^k\right\}, \left\{\hat{x}^k\right\} \in \Phi$. Тем самым Φ оказывается объединением непересекающихся своих подмножеств – классов эквивалентности, эквивалентных между собой последовательностей. Множество этих классов обозначим $\bar{V}$.

Можно проверить, что для любых $a_1, a_2 \in \Lambda$, $Q_1, Q_2 \in \bar{V}$ существует единственный класс $Q \in \bar{V}$ такой, что из $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$ следует равенство

$$\{q \in \Phi \mid q \sim (a_1 q_1 + a_2 q_2)\} = Q.$$

Поэтому для того, чтобы наделить множество $\bar{V}$ структурой векторного пространства, при любых $a_1, a_2 \in \Lambda$, $Q_1, Q_2 \in \bar{V}$ полагают $a_1 q_1 + a_2 q_2 = Q$. Кроме того, для любого $Q \in \bar{V}$ норму определяют по формуле

$$\mathcal{N}(Q) = \lim_{k \to +\infty} \mathcal{N}(x^k),$$

где $\{x^k\} \in Q$ (величина этого предела не зависит от выбора последовательности в классе Q). Полученное векторное нормированное пространство будем также обозначать $\bar{V}$.

Последовательность $\{x^k\} \in \Phi$ называется *стационарной*, если все ее члены, начиная с некоторого k, равны между собой.

Теорема 4.1. (Теорема Хаусдорфа)

1. Пусть V — векторное нормированное пространство, $\bar{V}$ — векторное нормированное пространство классов эквивалентных последовательностей, а $\bar{V}_1$ — линейное многообразие в $\bar{V}$ классов эквивалентности, содержащих стационарные последовательности.

Тогда $\bar{V}$ банахово, а $\bar{V}_1$ плотно в $\bar{V}$ и изометрически изоморфно V.

2. Пусть V — банахово пространство, а V_1 — плотное в V линейное многообразие, рассматриваемое как нормированное пространство с той же нормой.

Тогда пополнение V_1 изометрически изоморфно V.

Другими словами, пополнение нормированного пространства единственно с точностью до изометрического изоморфизма.

Существует стандартный способ построения по данному банаховому пространству V новых банаховых пространств. Для этого фактор-пространство V/T векторного нормированного пространства V по тому или иному его линейному многообразию T наделяют структурой нормированного пространства, вводя норму $\mathcal{N}(X) = \inf \{\mathcal{N}(x+u) \mid x \in X,\, u \in T\}$ для любого $X \in V/T$. Полученное векторное нормированное пространство обозначают тем же символом V/T и называют фактор-пространством нормированного пространства V по его линейному многообразию T. Если V банахово, то и V/T оказывается банаховым.

Перейти к оглавлению на странице: 256

Пусть H — векторное пространство над полем Λ при $\Lambda = C$, или $\Lambda = R$. Говорят, что H наделено структурой *предгильбертова пространства над* Λ, если задана функция $s : H \times H \to \Lambda$, называемая *скалярным произведением* и удовлетворяющая условиям:

(g1) $s(x,x) \geqslant 0,\ (s(x,x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$,

(g2) $s(a_1 x + a_2 y,\ z) = a_1 s(x,\ z) + a_2 s(y,\ z),\ s(x,y) = \bar{s}(y,x)$,

при любых $x, y, z \in H$, $a_1, a_2 \in \Lambda$ (черта над s — комплексное сопряжение).

Предгильбертовым пространством называют пару (H, s), но обычно говорят о пространстве H. При $\Lambda = C$, $\Lambda = R$ оно называется комплексным и вещественным соответственно. Помимо $s(x,y)$, для скалярного произведения используют обозначения (x,y), $\langle x,y \rangle$, xy и другие.

Отношения ортогональности векторов $x, y \in H$, вектора $x \in H$ и множества $H_1 \subset H$ и двух множеств $H_1, H_2 \subset H$, обозначаемые символом $\perp$, определяются естественным образом:

(go1) $(x \perp y) \Leftrightarrow (\langle x,y \rangle = 0)$;

(go2) $(x \perp H_1) \Leftrightarrow ((\forall y \in H_1)(x \perp y))$;

(go3) $(H_1 \perp H_2) \Leftrightarrow ((\forall x_1 \in H_1)\,(\forall x_2 \in H_2)\,(x_1 \perp x_2))$.

Аннулятором множества $\mathcal{L} \subset H$ называют $\mathcal{L}^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp \mathcal{L}\}$.

Так как функция $+\sqrt{\langle x,x \rangle}$ удовлетворяет всем свойствам нормы, то H можно наделить структурой нормированного пространства, поэтому говорят, что предгильбертово пространство является частным случаем нормированного пространства. Для нормы $+\sqrt{\langle x,x \rangle}$ предгильбертова пространства принято использовать обозначение $\|x\|$. Для того, чтобы нормированное пространство V было предгильбертовым (то есть, $(\forall x \in V)(\mathcal{N}(x) = +\sqrt{s(x,x)})$, где s — некоторое скалярное произведение на V), необходимо и достаточно, чтобы для любых двух его элементов x, y было истинным равенство

(gn1) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$, которое, в частности, отражает известную теорему из планиметрии о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Из аксиом (g1), (g2) можно вывести, что:

(g3) $\langle x,\, a_1 y + a_2 z\rangle = \bar{a}_1 \langle x, y\rangle + \bar{a}_2 \langle x, z\rangle$,

(g4) $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ (*неравенство Буняковского-Шварца*),

(g5) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}$ (*теорема косинусов*),

(g6) $(x \perp y) \Rightarrow \left(\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (*теорема Пифагора*)

при любых $x, y, z \in H,\ a_1, a_2 \in \Lambda$,

(g7) $(x \perp \mathcal{L}) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathcal{L})\ (\|x\| \leqslant \|x-y\|)$, где $\mathcal{L}$ — подпространство H.

Из неравенства (g4) следует, что в вещественном предгильбертовом пространстве H можно ввести понятие угла φ между векторами $x, y \in H$ при помощи формул $\cos\varphi = \langle x, y\rangle \,/\, (\|x\| \cdot \|y\|)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Если предгильбертово пространство H полно относительно нормы $+\sqrt{\langle x, x\rangle}$, то его называют *гильбертовым пространством.* Иногда при определении гильбертова пространства предполагают его сепарабельность, так как в приложениях чаще всего используют сепарабельные гильбертовы пространства.

Подпространство гильбертова пространства является гильбертовым пространством. Подпространство сепарабельного гильбертова пространства является сепарабельным гильбертовым пространством. Аннулятор $\mathcal{L}^\perp$ подпространства $\mathcal{L}$ гильбертова пространства H является гильбертовым пространством, причем $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp = \{0\}$. Говорят, что подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^\perp$ являются *ортогональными дополнениями друг друга.* Оказывается, что любой вектор $x \in H$ единственным образом представим в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathcal{L}, x_2 \in \mathcal{L}^\perp$, а это означает, что $H = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$, то есть H равно алгебраической сумме своих линейных многообразий (векторных подпространств) $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^\perp$. В этом случае говорят, что гильбертово пространство H разлагается в *ортогональную сумму своих подпространств* $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^\perp$.

Пусть $\mathcal{U}$ — выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве H. Тогда для любого $x \in H$ существует единственный элемент $u_x \in \mathcal{U}$ такой, что $\|x - u_x\| = \varrho(x, \mathcal{U})$, — этот элемент называют *проекцией* x на $\mathcal{U}$. В частности, это утверждение применимо в случае, если $\mathcal{U}$ — векторное замкнутое подпространство, так как векторное подпространство – выпуклое множество.

Пусть I — множество (индексов). Семейство $\{g_i\}_{i\in I}$ ненулевых элементов предгильбертова пространства H называют *ортогональной системой*, если условия $g_i \perp g_j$ выполнены для любых индексов $i, j \in I$ при $i \neq j$. Семейство $\{e_i\}_{i\in I}$ элементов предгильбертова пространства H называют *ортонормальной* (или *ортонормированной*) *системой*, если условия $\|e_i\| = 1$ и $e_i \perp e_j$ выполнены для любых $i, j \in I$ при $i \neq j$. Если $\{g_i\}_{i\in I}$ — ортогональная система, то $\{g_i \,/\, \|g_i\|\}_{i\in I}$ — ортонормальная система. В случае, если множество I счетно, естественно считать его упорядоченным, а ортогональную или ортонормальную систему $\{g_i\}_{i\in I}$ называть также и *ортогональной* или *ортонормальной последовательностью*.

Множество векторов любой ортогональной системы линейно независимо. С другой стороны, из любой последовательности $\{f_i\}_{i\in[1:+\infty\}}$, множество элементов которой линейно независимо, можно построить ортонормальную последовательность $\{g_i\}_{i\in[1:+\infty\}}$ при $g_i = \sum_{k=1}^{i} a_{i,k} f_k$, $a_{i,i} \neq 0$ и $f_i = \sum_{k=1}^{i} b_{i,k} g_k$, $b_{i,i} \neq 0$, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \Lambda$, пользуясь *ортогонализацией Шмидта*, описание которой можно найти, например, в [14].

Любая ортогональная система сепарабельного гильбертового пространства является ортогональной последовательностью, то есть состоит не более, чем из счетного множества векторов.

Если $\{e_i\}$ — ортонормальная последовательность в предгильбертовом пространстве H, то числа $c_i(x) = \langle x, e_i \rangle$ называются *коэффициентами Фурье* элемента $x \in H$ по этой системе.

Величины $c_i(x)$ по любой ортонормальной системе предгильбертова пространства H удовлетворяют *неравенству Бесселя*

$$\text{(g8)} \quad (\forall x \in H) \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |c_i(x)|^2 \leqslant \|x\|^2 \right).$$

Ортонормальную последовательность $\{e_i\}_{i\in[1:+\infty)}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H называют *полной*, если не существует, кроме нуля, другого элемента этого же пространства, ортогонального всем e_i, $i \in [1:+\infty)$.

Для полной ортонормальной системы $\{e_i\}_{i\in[1:+\infty)}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H неравенство Бесселя переходит в *равенство Парсеваля*

$$\text{(g9)}\quad (\forall x \in H)\ \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |c_i(x)|^2 = \|x\|^2\right),$$

которое является необходимым и достаточным условием полноты этой системы в этом пространстве. Полную упорядоченную ортонормальную систему $\{e_i\}_{i\in[1:+\infty)}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H называют еще *базисом* или *ортонормальным базисом* этого пространства (в отличие от *алгебраического базиса* векторного пространства H), так как:

$$\text{(g10)}\quad (\forall x \in H)\ \left(\lim_{k\to+\infty} \left\|\sum_{i=1}^{k} c_i(x)e_i - x\right\| = 0\right),$$

или, в равносильной записи:

$$\text{(g11)}\quad (\forall x \in H)\ \left(x = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i(x)e_i\right).$$

Важно, что в любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортогональный базис (а значит и бесконечно много таких базисов). Возможность разложения векторов по этим базисам и измерения углов между векторами (в вещественных гильбертовых пространствах) позволяет использовать в работе с ними геометрические идеи, основанные на аналогиях со случаем трехмерного пространства элементарной геометрии. Во многом по этим причинам сепарабельные гильбертовы пространства, особенно вещественные, так полезны и популярны в приложениях.

Наиболее простой случай гильбертовых пространств – конечномерные гильбертовы пространства. Вещественные конечномерные гильбертовы пространства называют *евклидовыми*, а комплексные – *унитарными пространствами*. Важно (и очевидно), что любое конечномерное предгильбертово пространство является сепарабельным и полным, то есть гильбертовым – евклидовым или унитарным.

Сепарабельные гильбертовы пространства одинаковой размерности изометрически изоморфны.

Перейти к оглавлению на странице: 256

§5. Пространства R^n

Символом R^n обозначают множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел. Это множество вместе с различными определенными на нем структурами называют пространством R^n. В этом смысле его можно рассматривать как группу, кольцо, поле и векторное пространство, как метрическое, нормированное, евклидово пространство и т.д. Естественно, что из этих пространств наиболее богатым по содержанию и востребованным в приложениях является евклидово пространство R^n, тем более, что его всегда можно рассмотреть и как любое из названных выше пространств R^n.

Для того, чтобы наделить множество R^n структурой евклидова пространства полагают

$$ax = (ax_1, \ldots, ax_n),\ x^1 + x^2 = (x_1^1 + x_1^2, \ldots, x_n^1 + x_n^2),$$

$$\langle x^1, x^2 \rangle = x_1^1 x_1^2 + \ldots + x_n^1 x_n^2$$

для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, $x^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2) \in R^n$, $a \in R$.

Размерность евклидова пространства R^n равна n. Простейший пример базиса этого пространства образует упорядоченный набор $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ из n единичных векторов $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Любое евклидово пространство H размерности n изометрически изоморфно евклидову пространству R^n. Если $(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n)$ — какой-нибудь базис в H, то этот изоморфизм $f : H \to R^n$ можно задать формулой

$$(\forall h \in H)\ (h = h_1\vec{g}_1 + \ldots + h_n\vec{g}_n \Rightarrow f(h) = (h_1, \ldots, h_n) \in R^n).$$

ГЛАВА 14. ТЕНЗОРЫ

§1. Сопряженные пространства

Пусть V — векторное пространство над полем K. Само поле K рассмотрим как векторное пространство над полем K или каким-либо его подполем Λ (например, векторное пространство C над полем R или Q или векторное пространство R над полем Q и т.п.). Пусть, ради определенности, $\Lambda = K$.

Отображение $f : V \to K$ векторного пространства V в векторное пространство K называют *линейной функцией* или *линейным функционалом* на V, если $(\forall x, x_1, x_2 \in V)\,(\forall a \in K)$ $(f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),\ f(ax) = a\,f(x))$.

Множество V^* линейных функционалов на V наделим структурой векторного пространства над полем K, полагая

$$(\forall f, f_1, f_2 \in V^*)\,(\forall x \in V)\,(\forall a \in K)$$

$$((f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),\ (af)(x) = af(x))\,.$$

Векторное пространство V^* называют *дуальным, двойственным или сопряженным* к V. При рассмотрении одновременно пространств V и V^* иногда используют специальную терминологию. Элементы из V называют *контравариантными векторами*, а элементы из V^* – *ковариантными векторами*. Часто элементы из V называют просто *векторами*, а элементы из V^* — *ковекторами*. Векторы одинаковой природы (то есть либо два или более вектора, либо два или более ковектора) называют *когредиентными*, а векторы разной природы – *контрагредиентными*. При рассмотрении сумм используют сокращения: символами $a^i b_i$, $a_i b^i$ обозначают соответственно суммы $\sum_{i=1}^{n} a^i b_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i b^i$ и, аналогично, символом $\varphi_j(a^i)\,\psi_k(b_i)$ обозначают сумму $\sum_{i=1}^{n} \varphi_j(a^i)\,\psi_k(b_i)$ и т.п.

Пусть векторное пространство V имеет конечную размерность n и пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — некоторый его базис. Символом e^i обозначим такой элемент пространства V^* (то есть такой линейный функционал на V), что $(\forall x \in V)\ \left(e^i(x) = x^i\right)$, где $x = x^i e_i$. Это означает, что функционал e^i сопоставляет каждому вектору x пространства V его i-ую координату x^i в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Так как

$e^i(x) = e^i(x^j e_j) = x^j e^i(e_j)$, то можно дать следующее равносильное описание функционала e^i:

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, \ i = j; \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$$

Это равенство называют *условием сопряженности* (или *двойственности*, или *дуальности*) *базисов*, что согласуется со следующей теоремой.

Теорема 1.1. (о базисе сопряженного пространства) Последовательность $(e^1, \ldots, e^n)$ — базис пространства V^*.

Следствие 1.1. $\dim V^* = \dim V$.

Замечание 1.1. **Базис $(e^1, \ldots, e^n)$ называют *дуальным, двойственным* или *сопряженным* базису $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V.**

Доказательство. Докажем линейную независимость элементов $e^1, \ldots, e^n$. Пусть $\alpha_i e^i = 0 \in V^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Тогда, при любом $j \in [1 : n]$, истинны равенства $(\alpha_i e^i)(e_j) = 0 \in V$, то есть $\alpha_i(e^i(e_j)) = 0 \in V$, а это означает, что $\alpha_i \delta^i_j = \alpha_j = 0 \in K$.

Чтобы доказать, что $(e^1, \ldots, e^n)$ — базис, покажем, что любой функционал $\chi \in V^*$ имеет разложение $\chi = \chi(e_i)\, e^i$. Введем в рассмотрение обозначение $\Delta = \chi - \chi(e_i)\, e^i$. Мы должны показать, что $\Delta = 0 \in V^*$, а для этого достаточно показать, что $(\forall i \in [1 : n])\, (\Delta(e_i) = 0 \in V)$, так как

$$(\forall x \in V)\ \big(\Delta(x) = 0 \Leftrightarrow \Delta(x^i e_i) = 0 \Leftrightarrow x^i \Delta(e_i) = 0\big).$$

При любом $j \in [1 : n]$ получаем:

$$\Delta(e_j) = \chi(e_j) - \chi(e_i)\, e^i(e_j) = \chi(e_j) - \chi(e_j) = 0 \in V$$

так как $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Что и требовалось. ∎

Итак, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ — базис в V^* и мы показали, что если $l = l_i e^i \in V^*$ $(l_i \in K)$, то $l_i = l\,(e^i)$. Пусть $\{e'_i\}$ — еще один базис в V, связанный с $\{e_i\}$ формулами

$$e'_i = \alpha^j_i e_j, \tag{1.1}$$

и используется обозначение

$$A = \left\| \alpha_i^j \right\| = \begin{pmatrix} \alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n \\ \dots \\ \alpha_n^1, \dots, \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A \neq 0$, то

$$e_j = {\alpha'}^i_j e'_i, \tag{1.2}$$

при $\left\| {\alpha'}^i_j \right\| = A' = A^{-1}$. Отметим еще, что если V евклидово, а базисы ортонормированы, то матрица A ортогональна, то есть $A' = A^{-1} = A^T$.

Элементы каждого из дуальных базисов разложим по другому базису:

$$e'^i = \beta_j^i e^j \quad \left(\beta_j^i \in K\right), \tag{1.3}$$

$$e^j = {\beta'}^j_i e'^i \quad \left({\beta'}^j_i \in K\right). \tag{1.4}$$

Найдем β_j^i, ${\beta'}^j_i$: для этого используем условие дуальности: $e'^i\left({e'}_j\right) = \delta_j^i$. Расписывая его левую часть при помощи (1.1) и (1.3), получим связь между базисами:

$$\beta_k^i e^k \left(\alpha_j^m e_m\right) = \beta_k^i \alpha_j^m e^k\left(e_m\right) = \delta_j^i \text{ (т.к. } e^k\left(e_m\right) = \delta_m^k) \Rightarrow$$

$$\left(\beta_k^i \delta_m^k\right) \alpha_j^m = \delta_j^i (\text{т.к. } \left(\beta_k^i \delta_m^k\right) = \beta_m^i) \Rightarrow \beta_m^i \alpha_j^m = \delta_j^i \Rightarrow$$

$$\left\|\beta_m^i\right\| = \left\|\alpha_j^m\right\|^{-1} \Rightarrow \beta_m^i = {\alpha'}^i_m,\ {\beta'}^i_m = \alpha_m^i \Rightarrow$$

$$e'^i = {\alpha'}^i_j e^j, \tag{1.5}$$

$$e^j = \alpha_i^j e'^i. \tag{1.6}$$

Теперь получим связь между координатами вектора из V в двух базисах, а также между координатами ковектора из V^* в двух дуальных базисах.

Пусть $x \in V$, $l \in V^*$, а x^i, x'^i и l_i, l'_i — их координаты в $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$ и $\{e^i\}$, $\left\{e'^i\right\}$ соответственно. Тогда при помощи цепочки импликаций выводим:

$$\begin{matrix} x^i e_i = x'^i e'_i \\ l_i e^i = l'_i e'^i \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x^i e_i = x'^i \alpha_i^j e_j = \left(x'^i \alpha_i^j\right) e_j \\ l_i e^i = l'_i \alpha'^i_j e^j = \left(l'_i \alpha'^i_j\right) e^j \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x^k = x'^i \alpha_i^k \\ l_k = l'_i \alpha'^i_k \end{matrix} \tag{1.7}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} x^i \alpha'^j_i e'_j = x'^i e'_i \\ l_i \alpha_j^i e'^j = l'_i e'^i \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x'^k = x^i \alpha'^k_i \\ l'_k = l_i \alpha_k^i \end{matrix} \tag{1.8}$$

§2. Два определения тензора и их эквивалентность

Первое определение тензора

Полилинейную (т.е. линейную по каждому аргументу) функцию $T\ :\ \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{m} \to R^1$ называют k раз *ковариантным*, m раз *контравариантным* тензором или тензором *валентности* $k+m$. Про такой тензор говорят, что он смешанный типа $(k,\, m)$. Тензор типа $(0,\, m)$ называют просто *контравариантным*, а типа $(k,\, 0)$ — *ковариантным*.

Координатное представление и второе определение тензора

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — базисы векторного пространства V, а $\{e^1, \ldots, e^n\}$, $\left\{e'^1, \ldots, e'^n\right\}$ — базисы (дуальные исходным) сопряженного векторного пространства V^*. Напомним, что $e^i \in V^*$ определяются как линейные функционалы на V такие, что $(\forall x \in V)$ $\left(e^i(x) = x^i\right)$, где $x = x^i e_i$ (равносильное описание $e^i(e_j) = \delta^i_j$). Пусть $x \in V$ (вектор), $l \in V^*$ (ковектор), а x^i, x'^i и l_i, l'_i — их координаты в базисах $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$ и $\{e^i\}$, $\left\{e'^i\right\}$ соответственно.

В §1 были рассмотрены следующие формулы, связывающие эти базисы и координаты (см. (1.1), (1.2), (1.5)-(1.8)):

$$\begin{gathered}(\mathrm{t1}) e'_k = e_i\alpha^i_k, \quad (\mathrm{t2}) e_k = e'_i{\alpha'}^i_k, \quad (\mathrm{t3}) {e'}^k = e^i{\alpha'}^k_i, \quad (\mathrm{t4}) e^k = {e'}^i\alpha^k_i, \\ (\mathrm{t5}) {x'}^k = x^i{\alpha'}^k_i, \quad (\mathrm{t6}) x^k = {x'}^i\alpha^k_i, \quad (\mathrm{t7}) l'_k = l_i\alpha^i_k, \quad (\mathrm{t8}) l_k = l'_i{\alpha'}^i_k.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь какая-то из формул (t1) и (t2) считается исходной связью между базисами, остальные получены из нее. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^1_1, \ldots, \alpha^n_1 \\ \cdots \\ \alpha^1_n, \ldots, \alpha^n_n \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} {\alpha'}^1_1, \ldots, {\alpha'}^n_1 \\ \cdots \\ {\alpha'}^1_n, \ldots, {\alpha'}^n_n \end{pmatrix}$$

взаимно обратны.

Ради простоты рассмотрим тензор типа (2, 1):

$$T\left(x,\, y,\, l\right) = T\left(x^i e_i,\, y^j e_j,\, l_k e^k\right) = x^i y^j\, l_k T\left(e_i,\, e_j,\, e^k\right). \tag{2.2}$$

и обозначим $T\left(e_i,\, e_j,\, e^k\right)$, как $T^k_{i\,j}$. Система величин $T^k_{i\,j}$ такова, что каждая из них зависит от:
— выбора тензора (полилинейной функции T);
— выбора базиса $\{e_i\}$ в V;
— выбора номеров у векторов основного базиса $\{e_i\}$ и ковекторов дуального базиса $\left\{e^i\right\}$ (он перенумерован так же, как исходный).

Эти величины $T^k_{i\,j}$ называют *координатами* тензора (или его *компонентами*) в базисе $\{e_i\}$. Перейдем к новому базису, используя формулы связи (2.1):

$$T\left(x,\, y,\, l\right) = T\left(x^i e_i,\, y^j e_j,\, l_k e^k\right) = T\left({x'}^i {e'}_i,\, {y'}^j {e'}_j,\, {l'}_k {e'}^k\right), \tag{2.3}$$

$$x^i\, y^j\, l_k\, T\left(e_i,\, e_j,\, e^k\right) = {x'}^i\, {y'}^j\, {l'}_k\, T\left(e'_i,\, e'_j,\, {e'}^k\right). \tag{2.4}$$

Получим связь $T^k_{i\,j} = T\left(e_i,\, e_j,\, e^k\right)$ с ${T'}^k_{i\,j} = T\left(e'_i,\, e'_j,\, {e'}^k\right)$:

$$\begin{gathered}{T'}^k_{i\,j} = T\left(e'_i,\, e'_j,\, {e'}^k\right) = \\ = T\left(e_m\alpha^m_i,\, e_p\alpha^p_j,\, e^q{\alpha'}^k_q\right) = \alpha^m_i\alpha^p_j{\alpha'}^k_q T\left(e_m,\, e_p,\, e^q\right),\end{gathered} \tag{2.5}$$

то есть
$$T'^{k}_{i\,j} = \alpha^m_i \alpha^p_j \alpha'^k_q T^q_{m\,p}. \tag{2.6}$$

Совершенно аналогично получаем:

$$T'^{j_1 j_2 \dots j_m}_{i_1 i_2 \dots i_k} = \alpha^{p_1}_{i_1} \dots \alpha^{p_k}_{i_k} \alpha'^{j_1}_{q_1} \dots \alpha'^{j_m}_{q_m} T^{q_1 \dots q_m}_{p_1 \dots p_k}. \tag{2.7}$$

Теперь можно дать другое определение тензора: говорят, что задан тензор типа $(k,\, m)$, если в каждом базисе задан (упорядоченный) набор из n^{k+m} чисел, причем любые два набора (в базисе $\{e_i\}$ и в базисе $\{e'_i\}$) связаны формулами (2.7).

Равносильность двух определений тензора

(а) Пусть дан тензор в первом определении – как полилинейное отображение, тогда, как мы показали, каждой системе координат (базису $\{e_i\}$) можно сопоставить набор $T^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$, изменяющийся при переходе к другому базису по формулам (2.7), то есть дан тензор во втором определении.

(б) Обратно, пусть даны наборы чисел в базисах, согласованные по (2.7).

В каком-то базисе с набором $T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_k}$ строим полилинейное отображение T (тензор в первом определении) по формулам

$$T\,(x, y, \dots ; l, \dots) = x^{i_1} y^{i_2} \dots l_{j_1} \dots T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_k}. \tag{2.8}$$

Остается показать, что если мы проделаем то же в другом базисе $\{e'_i\}$ с другим набором $T'^{j_1 j_2 \dots j_m}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (связанным с первым формулами (2.7)), то придем к тому же полилинейному отображению. Действительно, пусть аналогично предыдущему в базисе $\{e'_i\}$ определено полилинейное отображение T_1 такое, что

$$T_1\,(x, y, \dots ; l, \dots) = x'^{i_1} y'^{i_2} \dots l'_{j_1} \dots T'^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_k}, \tag{2.9}$$

тогда используя (2.7) и (2.1) получаем:

$$T_1\,(x, y, \dots ; l, \dots) =$$

$$= x'^{i_1} y'^{i_2} \dots l'_{j_1} \dots \alpha^{p_1}_{i_1} \dots \alpha^{p_k}_{i_k} \alpha'^{j_1}_{q_1} \dots \alpha'^{j_m}_{q_m} T^{q_1 \dots q_m}_{p_1 \dots p_k} = \tag{2.10}$$

$$= x^{p_1} y^{p_2} \dots l_{q_1} \dots T^{q_1 \dots q_m}_{p_1 \dots p_k} = T\,(x, y, \dots ; l, \dots)\,.$$

§3. Примеры тензоров

(а) *Ковектор*, рассматриваемый как линейный функционал на V, есть тензор типа $(1,\,0)$, то есть T_i.

(б) *Вектор*, рассматриваемый как линейный функционал на V^*, есть тензор типа $(0,\,1)$, то есть T^j.

(в) *Спаривание* (естественное или каноническое) между V^* и V — так называют билинейное отображение $V^* \times V \xrightarrow{s} K$ (поле, рассматривается как векторное пространство, например, $K = R^1$) такое, что $(\forall l \in V^*,\ x \in V)$ $\left(s\,(l,\,x) \overset{def}{=} l\,(x)\right)$. Величину $s\,(l,\,x)$ обозначают $\langle l,\,x\rangle$ — это что-то вроде скалярного произведения, но аргументы здесь из разных пространств.

Свойства: билинейность, невырожденность, то есть

$$(\forall x \in V)\ \ (\langle l,\,x\rangle = 0) \Rightarrow l = 0 \in V^*$$

$$(\forall l \in V^*)\ \ (\langle l,\,x\rangle = 0) \Rightarrow x = 0 \in V$$

Спаривание, рассматриваемое как билинейная функция ковектора и вектора есть тензор типа $(1,\,1)$, то есть T_i^j.

(г) Линейный оператор $L : R^n \to R^n$, тензор T_i^j — это матрица оператора в данном базисе, закон (2.7) для нее (переход матрицы оператора от базиса к базису) известен из алгебры.

Тензор T (любого типа) называют *симметричным по* $x,\,y$ (соответственно, *кососимметричным по* $x,\,y$), если $T\,(\ldots,x,\ldots,y,\ldots) = T\,(\ldots,y,\ldots,x,\ldots)$ (соответственно, $T\,(\ldots,x,\ldots,y,\ldots) = -T\,(\ldots,y,\ldots,x,\ldots)$). В частности, дважды ковариантный тензор $T_{i\,j}$ симметричен, если $T_{i\,j} = T_{j\,i}$ и кососимметричен, если $T_{i\,j} = -T_{j\,i}$.

§4. Алгебраические операции над тензорами

Сложение и умножение на число

Сложение определено для тензоров одинакового типа. Пусть T, Q — $(k,\, m)$– тензоры; α, β — числа, тогда $(k,\, m)$ тензор $\alpha T+\beta Q$ определяется как билинейная функция такая, что

$$\begin{gathered}(\alpha T+\beta Q)\;(x,\, y, \ldots ;\, l, \ldots)= \\ =\alpha T\,(x,\, y, \ldots ;\, l, \ldots)+\beta Q\,(x,\, y, \ldots ;\, l, \ldots)\,.\end{gathered}\tag{4.1}$$

Эквивалентное определение:

$$\begin{gathered}T=T_{i_1\ldots i_k}^{j_1\cdots j_m}, \quad Q=Q_{i_1\ldots i_k}^{j_1\cdots j_m} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (\alpha T+\beta Q)_{i_1\ldots i_k}^{j_1\cdots j_m}=\alpha\, T_{i_1\ldots i_k}^{j_1\cdots j_m}+\beta\, Q_{i_1\ldots i_k}^{j_1\cdots j_m}\,.\end{gathered}\tag{4.2}$$

Умножение

Оно определяется для любых двух тензоров. Если используется первое определение тензора (полилинейная функция), то следует оговорить, что аргументы первого тензора независимы от аргументов второго (при втором определении никаких аргументов нет, так что и оговаривать нечего). Если T, Q — $(p,\, q)$ и $(r,\, s)$ - тензоры, то

$$\begin{gathered}(T\,Q)\;(x, \ldots ;\, l, \ldots ;\, \xi, \ldots ;\lambda, \ldots)= \\ =T\,(x,\, \ldots ;\, l, \ldots)\;\; Q\,(\xi, \ldots ;\lambda, \ldots)\,.\end{gathered}\tag{4.3}$$

Так определенная функция $T\,Q$ очевидно полилинейна, то есть является $(p+r, q+s)$ - тензором.

Пусть $T=T_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q}$, $Q=Q_{k_1\ldots k_r}^{m_1\ldots m_s}$, тогда

$$\begin{gathered}(TQ)\;(x, \ldots ;\, l, \ldots ;\, \xi, \ldots ;\lambda, \ldots)= \\ =T\left(x^{i_1} e_{i_1},\, \ldots ;\, l_{j_1} e^{j_1}, \ldots\right)\; Q\left(\xi^{k_1} e_{k_1},\, \ldots ;\, \lambda_{m_1} e^{m_1}, \ldots\right)= \\ =x^{i_1}\cdot\, \ldots \cdot\, l_{j_1}\cdot \ldots \cdot \xi^{k_1}\cdot\, \ldots \cdot\, \lambda_{m_1}\cdot \ldots T_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q}\, Q_{k_1\ldots k_r}^{m_1\ldots m_s},\end{gathered}\tag{4.4}$$

то есть

$$T\,Q=T_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q}\cdot\, Q_{k_1\ldots k_r}^{m_1\ldots m_s}.\tag{4.5}$$

Свертка

Пусть T — $(k,\, m)$–тензор, а $T\,(\ldots,x,y,\ldots;\ldots,\xi,\eta,\ldots)$ — его значение $(\ldots,x,y,\ldots$ — векторы; $\ldots,\xi,\eta,\ldots$ — ковекторы). Пусть a — постоянный вектор, а α — постоянный ковектор, тогда $T\,(\ldots,a,y,\ldots;\ldots,\alpha,\eta,\ldots)$ определяет $(k-1,\, m-1)$ – тензор (в полилинейной функции T два аргумента x - вектор и ξ - ковектор заменены на постоянные a и α). Сумма $S = T\left(\ldots,e_i,y,\ldots;\ldots,e^i,\eta,\ldots\right)$ есть полилинейная функция остальных аргументов, то есть $(k-1,\, m-1)$ - тензор. Этот тензор не зависит от выбора базиса при его построении. Действительно, если $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ — дуальные базисы, а $\{e'_i\}$, $\{e'^i\}$ — другие дуальные базисы, то

$$
\begin{aligned}
&T\left(\ldots,e'_i,y,\ldots;\ldots,e'^i,\eta,\ldots\right) = \\
&= \alpha_i^k \alpha'^i_m T\,(\ldots,e_k,y,\ldots;\ldots,e^m,\eta,\ldots) = \\
&= \delta_m^k T\,(\ldots,e_k,y,\ldots;\ldots,e^m,\eta,\ldots) = \\
&= T\,(\ldots,e_k,y,\ldots;\ldots,e^k,\eta,\ldots)\,.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Тензор S называется *сверткой тензора* T *по аргументам* $x,\,\xi$. Очевидно, свертка определена по любой паре контрагредиентных (то есть разноименных – вектор-ковектор) аргументов. Процесс свертывания можно продолжать до тех пор, пока остаются в получающемся тензоре пары контрагредиентных аргументов. Если число когредиентных и контрагредиентных аргументов исходного тензора T одинаковы, то свертка по всем парам даст число, называемое *следом тензора* T. О свертывании двух тензоров говорят, когда свертывается их произведение по аргументам, каждое из которых входит в один из сомножителей.

Если $T = T_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_m}$, а S — его свертка по p-му вектору и q-му ковектору, то

$$
S = S_{i_1\ldots i_{p-1} i_{p+1}\ldots}^{j_1\ldots j_{q-1} j_{q+1}\ldots} = T_{i_1\ldots i_{p-1}\,k\,i_{p+1}\ldots}^{j_1\ldots j_{q-1}\,k\,j_{q+1}\ldots} \tag{4.7}
$$

Действительно,

$$S = T\left(\ldots, x, \ldots, \underbrace{e_k}_{p}, \ldots; \ldots, \xi, \ldots, \underbrace{e^k}_{q}, \ldots\right) =$$

$$= T\left(\ldots, x^i e_i, \ldots, \underbrace{e_k}_{p}, \ldots; \ldots, \xi^j e_j, \ldots, \underbrace{e^k}_{q}, \ldots\right) =$$

$$= \ldots x^i \ldots \xi^j \ldots \; T\left(\ldots, e_i, \ldots, \underbrace{e_k}_{p}, \ldots; \ldots, e_j, \ldots, \underbrace{e^k}_{q}, \ldots\right) =$$

$$= \ldots x^i \ldots \xi^j \ldots \; T^{\ldots \overbrace{k}^{q} \ldots}_{\ldots \underbrace{k}_{p} \ldots} \tag{4.8}$$

Перейти к оглавлению на странице: 256

ЧАСТЬ VI. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ

Перейти к оглавлению на странице: 256

ГЛАВА 15. ПРОВЕРОЧНЫЕ ВОПРОСЫ

§1. Экзаменационные вопросы

1. Аффинные евклидовы пространства.
2. Аффинные координаты и преобразования.
3. Криволинейные системы координат.
4. Локальные базисы криволинейных координат.
5. Коэффициенты Ламе. Проекции скорости точки на оси криволинейной системы координат.
6. Проекции ускорения точки на оси ортогональной криволинейной системы координат.
7. Натуральный триэдр. Проекции ускорения точки на оси натурального триэдра.
8. Определение кривизны траектории точки по движению.
9. Движение точки по прямой и по окружности.
10. Движение механической системы. Твердое тело. Число степеней свободы положения.
11. Группа движений аффинного евклидова пространства.
12. Поступательное движение твердого тела.
13. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.
14. Плоское движение твердого тела. Преобразование координат.
15. Две геометрические теоремы о плоском движении.
16. Формула Эйлера. Следствие.
17. Центр скоростей. Центроиды. Теорема Пуансо.

Перейти к оглавлению на странице: 256

18. Ускорение точек твердого тела в плоском движении.
19. Задание движения твердого тела через углы Эйлера.
20. Две геометрические теоремы о движении твердого тела вокруг неподвижной точки.
21. Проекции угловой скорости тела с неподвижной точкой.
22. Ускорение точек тела с неподвижной точкой.
23. Скорость точек твердого тела в общем случае.
24. Ускорение точек твердого тела в общем случае.
25. Сложное движение точки, основные понятия.
26. Теорема сложения скоростей в сложном движении точки.
27. Теорема сложения ускорений в сложном движении точки.
28. Теорема о сложении угловых скоростей твердого тела.
29. Принцип детерминированности и уравнение Ньютона.
30. Инерциальные системы координат.
31. Сила и масса. Второй и третий законы Ньютона.
32. Законы сил.
33. Две задачи динамики.
34. Уравнения движения механической системы.
35. Теорема об изменении главного вектора количества движения.
36. Уравнение движения центра инерции.
37. Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки.
38. Движение точки в центральном поле сил. Уравнения движения точки в центральных полях сил Ньютона, Кулона и Гука.

39. Интеграл площадей уравнения движения в центральном поле и его геометрическая интерпретация.
40. Теорема об изменении кинетического момента относительно подвижного полюса.
41. Работа силы и изменение кинетической энергии материальной точки.
42. Условия потенциальности силового поля. Примеры.
43. Кинетическая энергия системы и теорема Кенига.
44. Теорема об изменении кинетической энергии системы.
45. Решение уравнений движения точки в центральном поле.
46. Классификация траекторий движения в центральном поле силы Ньютона.
47. Масса и плотность твердого тела. Геометрия масс.
48. Динамические характеристики твердого тела.
49. Основные законы динамики твердого тела.
50. Динамические и кинематические уравнения Эйлера.
51. Уравнения движения свободного твердого тела.
52. Уравнение Мещерского движения точки переменной массы.
53. Две задачи Циолковского.
54. Связи, реакции, обобщенные координаты.
55. Изохронные вариации.
56. Идеальные связи. Общее уравнение механики и принцип возможных перемещений.
57. Общее уравнение механики в лагранжевых координатах.
58. Уравнения Лагранжа II рода, их инвариантность.

59. Разрешимость уравнений Лагранжа II рода относительно старших производных.

60. Обобщенный потенциал.

61. Уравнения Лагранжа I рода.

62. Вывод канонических уравнений.

63. Канонические уравнения и интеграл механической энергии.

64. Циклические координаты и отвечающие им первые интегралы.

65. Скобки Пуассона и их свойства.

66. Метод Пуассона построения первых интегралов.

67. Полный интеграл уравнений в частных производных первого порядка. Уравнение Гамильтона-Якоби.

68. Метод Якоби решения канонических уравнений.

69. Вывод уравнения Гамильтона-Якоби в задаче о движении точки в центральном силовом поле.

70. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в задаче о движении точки в центральном силовом поле.

71. Дифференциальный принцип Даламбера - Лагранжа в декартовых переменных.

72. Дифференциальный принцип Даламбера - Лагранжа в канонических переменных.

73. Изохронная и полная вариации функционала действия.

74. Функция действия — семейство решений уравнений Гамильтона - Якоби.

75. Интегральный принцип наименьшего действия при изохронном варьировании.

Перейти к оглавлению на странице: 256

76. Интегральный принцип наименьшего действия при изоэнергетическом варьировании.

§2. Тесты

1. Два репера аффинного пространства связаны матрицей A. Какое из условий (а),(б),(в) является необходимым и достаточным для того, чтобы эти базисы были одинаково ориентированы?

   (а) $\exists A^{-1}$,

   (б) $\det A > 0$,

   (в) $\det A < 0$.

2. Ортонормальный репер жестко связан с движущимся в аффинном пространстве твердым телом. Два положения этого репера, соответствующие некоторым двум положениям тела, связаны матрицей A. Какое из утверждений (а),(б),(в) является истинным?

   (а) $\det A = -1$,

   (б) $\det A = 0$,

   (в) $\det A = +1$.

3. Какой из вариантов реперов (а),(б),(в) имеет ту же ориентацию, что и репер $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

   (а) $(O_1, -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k})$,

   (б) $(O, \vec{j} \times \vec{i}, \vec{k} \times \vec{j}, \vec{i} \times \vec{k})$,

   (в) $(O_1, \vec{i} \times \vec{j}, \vec{j} \times \vec{k}, \vec{k} \times \vec{i})$.

4. Пусть J — матрица Якоби отображения, задающего криволинейную систему координат в R^3. Какое из условий (а),(б),(в) обеспечивает линейную независимость векторов, образующих локальные базисы этой криволинейной системы координат?

   (а) $\det J > 0$,

(б) $\det J = 0$,

(в) $\det J \leqslant 0$.

5. Как изменятся направление нормали и ориентация натурального базиса, если точка будет двигаться по той же траектории в обратном направлении?

   (а) не изменятся,

   (б) изменятся на противоположные,

   (в) изменится только ориентация базиса.

6. Как изменятся направления нормали и бинормали натурального базиса, если точка будет двигаться по той же траектории в обратном направлении?

   (а) не изменятся,

   (б) изменятся на противоположные,

   (в) изменится только направление бинормали.

7. Какой из наборов (а),(б),(в) координатных кривых, проходящих через точку M пространства R^3 соответствует цилиндрической системе координат?

   (а) луч прямой,окружность,прямая,

   (б) луч прямой,окружность,окружность,

   (в) прямая, прямая, прямая.

8. Декартовы координаты x, y, z точек связаны с их криволинейными координатами ξ, η, ζ формулами $x = \xi^2$, $y = 2\eta^2$, $z = -3\zeta^2$. Частями каких кривых являются координатные линии соответствующей криволинейной системы координат?

   (а) прямых,

   (б) эллипсов,

   (в) гипербол.

9. Декартовы координаты x, y, z точек относительно репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ связаны с их криволинейными координатами ξ, η, ζ при $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\zeta < 0$ формулами $x = \xi^2$, $y = \eta^2$, $z = -\zeta^2$. Какая из троек (а),(б),(в) является локальным базисом соответствующей криволинейной системы координат?

   (а) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
   (б) $(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$,
   (в) $(-\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$.

10. В репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ точка имеет координаты $(1, 2, 3)$. Какие у нее координаты в репере $(O, \vec{j} \times \vec{i}, \vec{k} \times \vec{j}, \vec{i} \times \vec{k})$?

   (а) $(1, 2, 3)$,
   (б) $(-3, -1, -2)$,
   (в) $(2, 6, 3)$.

11. Движение точки относительно декартовой системы $Oxyz$ определяется формулами $x = -a_1 \sin c_1 t + b_1 \cos c_1 t$, $y = a_2 \sin c_2 t - b_2 \cos c_2 t$,$z = c_3 t^2$, где a_i, b_i, c_i — вещественные постоянные, а $t \in R$ — время. Чему равна величина ее ускорения?

   (а) $\sqrt{a_1 c_1^2 x^2 + a_2 c_2^2 y^2 + 4c_3^2}$,
   (б) $\sqrt{c_1^4 x^2 + c_2^4 y^2 + 4c_3^2}$,
   (в) $\sqrt{c_1 x^2 + c_2 y^2 + 4c_3^2}$.

12. Движение точки относительно декартовой системы $Oxyz$ определяется формулами $x = a \sin bt + c$, $y = a \cos bt - d$, $z = -1$, где $a > 0$, $b > 0, c, d$ — вещественные постоянные, а $t \in R$ — время. Чему равна кривизна ее траектории?

   (а) $1/a$,
   (б) b/a,
   (в) $1/b$.

13. Какова траектория точки, если ее радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ удовлетворяет условиям: $\dot{\vec{r}} = \vec{r}$, $\vec{r}(0) \neq \vec{0}$?

(а) луч прямой,

(б) прямая,

(в) точка.

14. Точка O' движущегося поступательно твердого тела описала окружность с центром в неподвижной точке O . Какой при этом путь по сравнению с точкой O' прошла точка M тела, находившаяся в начальный момент вне этой окружности?

    (а) меньший,

    (б) такой же,

    (в) больший.

15. Твердое тело — равносторонний треугольник ABC движется в проходящей через его три вершины неподвижной плоскости так, что $\vec{v}_A = \overrightarrow{CB}$, $\vec{v}_B = \overrightarrow{AC}$. Чему равна скорость $\vec{v}_C$ вершины C?

    (а) $\overrightarrow{AB}$,

    (б) $\overrightarrow{BA}$,

    (в) $\overrightarrow{0}$.

16. Плоский диск катится по прямой. Каково уравнение кривой на диске, все точки которой имеют одинаковую по величине скорость?

    (а) отрезки параболы с центром в точке касания,

    (б) отрезки окружности с центром в точке касания,

    (в) отрезки эллипса с центром в центре диска.

17. Центр катящегося по прямой диска движется равномерно. По некоторому диаметру этого диска движется точка с постоянной по величине скоростью (со сменой направления движения на концах диаметра). Чему должно быть равно отношение величины скорости центра диска к величине скорости точки по диаметру, чтобы после полного оборота диска точка прошла полный диаметр?

(а) $1/\pi$,

(б) 1,

(в) π.

18. Центр катящегося по дороге (не обязательно прямолинейной) колеса движется с постоянной по величине скоростью. По некоторому диаметру этого колеса движется точка также с постоянной по величине скоростью (со сменой направления движения на концах диаметра). Чему должно быть равно отношение величины скорости центра колеса к величине скорости точки по диаметру, чтобы после k полных оборотов колеса точка прошла путь равный m диаметров?

(а) $m\pi/k$,

(б) k/m,

(в) $k\pi/m$.

19. Центр твердого тела–шара движется с угловой скоростью $\vec{\omega}$ по окружности так, что ближайшей к центру этой окружности точкой тела всегда остается точка W. Чему равна проекция угловой скорости твердого тела на вектор $\vec{\omega}$?

(а) $-\vec{\omega}$,

(б) $\overrightarrow{0}$,

(в) $\vec{\omega}$.

20. Три не лежащие на одной прямой положения точки, движущейся в центральном силовом поле в трехмерном пространстве, определяются своими радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Какому из условий удовлетворяет радиус-вектор любого положения $\vec{r}$ этой точки?

(а) $(\vec{r}-\vec{r}_1)\times[(\vec{r}-\vec{r}_2)\times(\vec{r}-\vec{r}_3)]=\vec{0}$,

(б) $(\vec{r}-\vec{r}_j)\times[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times(\vec{r}_2-\vec{r}_3)]=\vec{0},\ \ j=1,2,3$,

(в) $(\vec{r}-\vec{r}_j)\cdot[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times(\vec{r}_2-\vec{r}_3)]=\vec{0},\ \ j=1,2,3$.

Перейти к оглавлению на странице: 256

21. Материальная точка массы m движется под действием постоянной силы $\vec{F}$. Ее положения в моменты $t = 0$ и $t = 1$ определяются своими радиус-векторами $\vec{r}_0, \vec{r}_1$. Чему равен радиус-вектор ее положения при $t = 2$?

    (а) $2\vec{r}_1 - \vec{r}_0 + \vec{F}/m$,

    (б) $2\vec{r}_1 - \vec{r}_0 - \vec{F}/m$,

    (в) $2\vec{r}_0 - \vec{r}_1 + \vec{F}/m$.

22. Материальные точки с массами $m_1, ..., m_N$ движутся все с одним и тем же постоянным ускорением $\vec{w}$, а радиус-вектор $\vec{r}_c(t)$ их центра масс удовлетворяет условиям $\vec{r}_c(0) = \vec{0}, \dot{\vec{r}}_c(0) = \vec{0}$. Чему равен радиус-вектор $\vec{r}_c(t)$?

    (а) $\vec{r}_c(t) = \frac{1/m_1 + ... + 1/m_N}{2(m_1 + ... + m_N)}\, t^2\, \vec{w}$,

    (б) $\vec{0}$,

    (в) $\vec{r}_c(t) = \frac{1}{2}\, t^2\, \vec{w}$.

23. Как связаны между собой утверждения, что силовое поле потенциальное и что оно центральное?

    (а) центральное поле потенциально,

    (б) потенциальное поле центрально,

    (в) никак не связаны.

24. Как связаны между собой теорема об изменении главного вектора количества движения механической системы и теорема о движении ее центра масс?

    (а) это две формулировки одного и того же утверждения,

    (б) из первой следует вторая, но не наоборот,

    (в) из второй следует первая, но не наоборот.

25. Какое число независимых первых интегралов можно получить как следствие теорем об изменении количества движения, момента количества движения и кинетической энергии механической системы из $n \geqslant 2$ материальных точек, движущихся под действием взаимного притяжения по закону Ньютона?

(а) 7,
(б) 9,
(в) 10.

26. Как зависят уравнения Лагранжа II рода от обобщенных ускорений?

(а) линейно,
(б) квадратично,
(в) не зависит.

27. Какое из преобразований приводит систему уравнений Лагранжа II рода к системе уравнений Гамильтона того же порядка?

(а) Галилея,
(б) Лежандра,
(в) Дирака.

28. Каким должно быть силовое поле, чтобы к уравнениям Лагранжа II рода можно было применить преобразование Лежандра?

(а) однородным,
(б) центральным,
(в) потенциальным.

29. На сколько единиц можно понизить порядок системы уравнений движения механической системы, если ее функция Лагранжа не зависит от k обобщенных координат?

(а) $k-1$,
(б) k,
(в) $2k$.

30. Какой механический смысл имеет функция Гамильтона H, не зависящая явно от времени?

(а) H – интеграл механической энергии,

(б) H – потенциальная энергия,

(в) H – решение уравнения Гамильтона-Якоби.

31. Что позволяет найти теорема Якоби?

(а) общее решение уравнений Гамильтона,

(б) общее решение уравнения Гамильтона-Якоби,

(в) полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

32. Сколько степеней свободы в пространственном движении имеет система из четырех стержней, связанных в четырехугольник четырьмя сферическими шарнирами?

(а) 6,

(б) 8,

(в) 10.

33. Почему в системе углов Эйлера φ (угол ротации), ψ (угол прецессии), θ (угол нутации) для последнего недопустимы значения 0 и π?

(а) при этих значениях θ получается $\varphi = \psi = 0$,

(б) при этих значениях θ получается $\varphi = \psi = \pi$,

(в) при этих значениях θ не определена линия узлов.

34. Какова траектория центра масс однородного шарового слоя, движущегося в центральном силовом поле Ньютона, если его радиус-вектор и скорость в начальный момент времени равны нулю?

(а) прямая,

(б) эллипс,

(в) точка.

35. Чему равна величина угловой скорости однородного шара, движущегося в центральном силовом поле Ньютона, если в начальный момент времени она равна 1?

(а) 1,

(б) $|t - t_0|$,

(в) для определения этой величины приведенных данных недостаточно.

36. Стержень AB, закрепленный сферическим шарниром в точке A и имеющий шарик, прикрепленный к нему в точке B, можно рассмотреть как твердое тело AB или как сферический математический маятник длины $|AB|$. Чему равно число степеней свободы это тела S_1 и маятника S_2?

(а) $S_1 = 3$, $S_2 = 3$;

(б) $S_1 = 3$, $S_2 = 2$;

(в) $S_1 = 2$, $S_2 = 2$.

§3. Упражнения

В этом параграфе приводятся решения некоторых упражнений.

Упражнение 1.2 главы 1.

Выпишем все требуемые формулы с учетом следующих обозначений $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$, $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$, $\vec{c} = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} + z_c\vec{k}$.

(1) Скалярное произведение: $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

(2) Векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}.$$

(3) Двойное векторное произведение:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}.$$

(4) Смешанное произведение:

$$\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

(5) Угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{{x_a}^2 + {y_a}^2 + {z_a}^2} \cdot \sqrt{{x_b}^2 + {y_b}^2 + {z_b}^2}}.$$

(6) Проекция $\vec{a}$ на $\vec{b}$: $Pr_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{{x_b}^2 + {y_b}^2 + {z_b}^2}}$.

Упражнение 1.4 главы 1.

Выпишем последовательно требуемые уравнения (Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Изд. Наука, 1968).

Кривые второго порядка (конические сечения) определяются уравнениями второй степени относительно декартовых прямоугольных координат. Общее уравнение второй степени относительно x, y имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{3.1}$$

Для любого уравнения (3.1) три величины

$$I = a_{11} + a_{22},\ D = A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

являются инвариантами, которые определяют свойства кривой второго порядка, не зависящие от ее положения на плоскости.

Используя инварианты I, D, A и величину

$$A' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{3.3}$$

классификацию конических сечений можно записать в виде таблицы:

КЛАССИФИКАЦИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ			
		невырожденные конические сечения $A \neq 0$	вырожденные (распадающиеся) конические сечения $A = 0$
центральные конические сечения $D \neq 0$	$A/I < 0$, $D > 0$	вещественный эллипс (окружность, если $I^2 = 4D$ или $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$)	
	$A/I > 0$, $D > 0$	мнимый эллипс (ни одной вещественной точки)	
	$A/I = 0$, $D > 0$		вещественная точка пересечения двух мнимых прямых (эллипс, выродившийся в точку)
	$D < 0$	гипербола	пара вещественных пересекающихся прямых (выродившаяся гипербола)
конические сечения без центра или с неопределенным центром $D = 0$	$A' > 0$	парабола	пара мнимых параллельных прямых (ни одной вещественной точки)
	$A' < 0$		пара вещественных параллельных прямых
	$A' = 0$		одна вещественная прямая (пара совпавших прямых)

Уравнение (3.1) любой невырожденной прямой второго порядка ($A \neq 0$) может быть приведено к следующему каноническому виду, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ — корни характеристического уравнения $\lambda^2 - I\lambda + D = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ (\text{эллипс}),\\ &a^2=-\frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D}=-\frac{A}{\lambda_1{\lambda_2}^2},\ b^2=-\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D}=-\frac{A}{\lambda_2{\lambda_1}^2}; \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ (\text{гипербола}),\\ &a^2=-\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D}=-\frac{A}{\lambda_2{\lambda_1}^2},\ b^2=\frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D}=\frac{A}{\lambda_1{\lambda_2}^2}; \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &y^2=2px \ \ (\text{парабола}),\\ &p=\frac{1}{I}\sqrt{-\frac{A}{I}}=\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{A}{\lambda_1}}>0,\ \lambda_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Уравнения вырожденных кривых второго порядка приводятся к виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \ (\text{точка}),$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \ (\text{пересекающиеся прямые}),$$

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \ (\text{параллельные прямые}),$$

$$x^2=0 \ (\text{одна вещественная прямая}).$$

Поверхности второго порядка (квадрики) определяются уравнениями второй степени относительно декартовых прямоугольных координат. Общее уравнение второй степени относительно x, y, z имеет вид

$$\begin{gathered} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+\\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Для любого уравнения (3.7) четыре величины

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$D = A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \; A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

являются инвариантами, которые определяют свойства поверхности, не зависящие от ее положения в пространстве.

Классификацию поверхностей второго порядка, основанную на их инвариантах запишем в виде отдельных таблиц для невырожденных и вырожденных поверхностей с учетом обозначений (где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе A):

$$A' = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}, \quad A''' = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},$$

$$A'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \tag{3.9}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Канонический вид уравнений невырожденных поверхностей можно выписать с помощью параметров a^2, b^2, c^2, p и q по инвариантам A, D, J и I уравнения (3.7) и корням характеристического уравнения $\lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - D = 0$.

Вещественный эллипсоид имеет каноническое уравнение вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ &\text{где } a^2 = -\frac{1}{\lambda_3}\frac{1}{D}, \; b^2 = -\frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D}, \; c^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D}, \\ &\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0, \; D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Перейти к оглавлению на странице: 256

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА				
Невырожденные поверхности $A \neq 0$				
		$A > 0$		$A < 0$
		$A'I > 0,\ J > 0$	$A'I \leqslant 0$ и (или) $J \leqslant 0$	
центральные поверхности $D \neq 0$	$DI > 0,$ $J > 0$	мнимый эллипсоид (ни одной вещественной точки)		вещественный эллипсоид
	$DI \leqslant 0$ и (или) $J \leqslant 0$		однополостный гиперболоид	двуполостный гиперболоид
нецентральные поверхности $D = 0$	$J > 0$			эллиптический параболоид (параболоид вращения, если $I^2 = 4J$)
	$J < 0$		гиперболический параболоид	

Однополостный гиперболоид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ &\text{где } a^2 = -\frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D},\ b^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D},\ c^2 = \frac{1}{\lambda_3}\frac{A}{D}, \\ &\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0 > \lambda_3,\ D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Двуполостный гиперболоид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ &\text{где } a^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{A}{D},\ b^2 = \frac{1}{\lambda_3}\frac{A}{D},\ c^2 = \frac{1}{\lambda_2}\frac{A}{D}, \\ &\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3,\ D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Перейти к оглавлению на странице: 256

Эллиптический параболоид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\\ &\text{где } p=\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{A}{J}},\ q=\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{A}{J}},\\ &\lambda_1\geqslant\lambda_2>\lambda_3=0,\ J=\lambda_1\lambda_2. \end{aligned}\right\}\tag{3.13}$$

<table>
<tr><td colspan="4">КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА</td></tr>
<tr><td colspan="4">Вырожденные поверхности $A=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Конусы и цилиндры $A'\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$A'I>0,\ J>0$</td><td>$A'I\leqslant 0$ и (или) $J\leqslant 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">центральные поверхности $D\neq 0$</td><td>$DI>0$, $J>0$</td><td>точка (вещественная вершина мнимого конуса; эллипсоид, выродившийся в точку)</td><td></td></tr>
<tr><td>$DI\leqslant 0$ и (или) $J\leqslant 0$</td><td></td><td>вещественный конус</td></tr>
<tr><td rowspan="3">нецентральные поверхности $D=0$</td><td>$J>0$</td><td>мнимый эллиптический цилиндр (ни одной вещественной точки)</td><td>вещественный эллиптический цилиндр (круговой цилиндр, если $I^2=4J$)</td></tr>
<tr><td>$J<0$</td><td></td><td>гиперболический цилиндр</td></tr>
<tr><td>$J=0$ $I\neq 0$</td><td></td><td>параболический цилиндр</td></tr>
</table>

Гиперболический параболоид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\\ &\text{где } p=\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{A}{J}},\ q=-\frac{1}{\lambda_3}\sqrt{-\frac{A}{J}},\\ &\lambda_1>\lambda_2=0>\lambda_3,\ J=\lambda_1\lambda_3. \end{aligned}\right\}\tag{3.14}$$

Перейти к оглавлению на странице: 256

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА				
Вырожденные поверхности $A = 0$				
		Пары плоскостей $A' = 0$		
		$A'' > 0$	$A'' < 0$	$A'' = 0$, $A''' \neq 0$
нецентральные поверхности $D = 0$	$J > 0$	пара мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой		
	$J < 0$		пара пересекающихся вещественных плоскостей	
	$J = 0$ $I \neq 0$	пара мнимых параллельных плоскостей	пара вещественных параллельных плоскостей	пара совпадающих вещественных плоскостей (одна плоскость)

Уравнения вырожденных поверхностей приводятся к следующему каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ (точка)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ (вещественный конус; круговой, если } a^2 = b^2\text{)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (эллиптический цилиндр; круговой, если } a^2 = b^2\text{)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (гиперболический цилиндр)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (прямая)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (пара пересекающихся плоскостей)},$$

$$y^2 = 2px \text{ (параболический цилиндр)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (пара параллельных плоскостей)},$$

$x^2 = 0$ (одна вещественная плоскость).

Упражнение 5.1 главы 3.

(1) Траектория: $z = 0,\ r = a\, e^{b\varphi/c}$

(2) Скорость: воспользуемся формулами полученными в примере 1.1 главы 3, тогда

$$v = \sqrt{\dot r^2 + (r\dot\varphi)^2 + \dot z^2} = a\, e^{bt}\sqrt{b^2 + c^2},$$

$$\cos\angle(\vec v, \vec\tau_r) = \dot r v^{-1} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

$$\cos\angle(\vec v, \vec\tau_z) = \dot z v^{-1} = 0,$$

$$\cos\angle(\vec v, \vec\tau_\varphi) = r\dot\varphi v^{-1} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

(3) Ускорение: воспользуемся формулами полученными в примере 2.1 главы 3, тогда

$$w = \sqrt{(\ddot r - r\dot\varphi^2)^2 + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)^2 + \ddot z^2} = a\, e^{bt}(b^2 + c^2),$$

$$\cos\angle(\vec w, \vec\tau_r) = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2},$$

$$\cos\angle(\vec w, \vec\tau_z) = 0,$$

$$\cos\angle(\vec w, \vec\tau_\varphi) = \frac{2bc}{b^2 + c^2}.$$

(4) Радиус кривизны траектории, как функция от r: воспользуемся (4.2), (4.3), (4.5) и получим

$$w_\tau = \dot v = ab\, e^{bt}\sqrt{b^2 + c^2},$$

$$\varrho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - {w_\tau}^2}} = \frac{r\sqrt{b^2 + c^2}}{c^2}.$$

(5) Радиус кривизны траектории, как функция от s:

$$\varrho = \frac{b\,s}{c^2}.$$

Упражнение 2.3 главы 4.

Три, три.

Упражнение 2.3 главы 4.

Указание: воспользоваться рисунком 3.1.

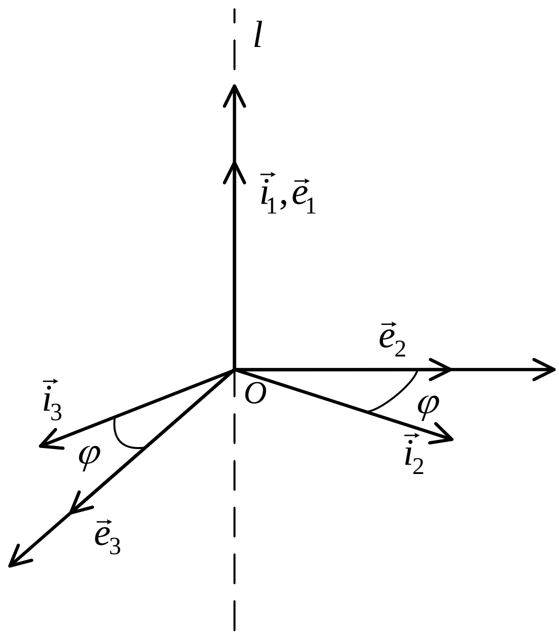


Рисунок 3.1

Упражнение 5.2 главы 4.

Так как $\vec{a}\times\vec{a}\times\vec{x} = \vec{a}(\vec{a},\vec{x}) - \vec{x}(\vec{a},\vec{a}) = -a^2\vec{x}$, то умножая векторно исходное равенство $\vec{a}\times\vec{x} = \vec{b}$ слева на $\vec{a}$ получаем искомую формулу для $\vec{x}$.

Упражнение 5.3 главы 4.

Докажите теорему Пуансо, пользуясь следующей схемой:

Шаг 1. Если α — угол между касательной неподвижной центроиды и ортом $\vec{e}_\xi$, а β — угол между касательной подвижной центроиды и ортом $\vec{i}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \dot{\eta}_C/\dot{\xi}_C$, $\operatorname{tg}\beta = \dot{y}_C/\dot{x}_C$ откуда можно вывести, что $\beta = \alpha - \varphi$, то есть угол наклона касательной подвижной центроиды к орту $\vec{e}_\xi$ равен α и тогда касательные к центроидам совпадают.

Шаг 2. Если $v(t), \hat{v}(t)$ — величины скоростей перемещения точки $C(t)$ (мгновенного центра скоростей) по центроидам, то можно показать, что $v^2 = \dot{\xi}_C^2 + \dot{\eta}_C^2$, $\hat{v}^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$, откуда, после несложных преобразований, получим, что $v = \hat{v}$.

Упражнение 6.3 главы 4.

Из теоремы 6.1 и формулы (4.1) главы 4 следует, что

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 = \overrightarrow{\Delta\psi} \times \vec{r} + \overrightarrow{\Delta\theta} \times \vec{r} + \overrightarrow{\Delta\varphi} \times \vec{r} + \vec{o}(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0,$$

где $\overrightarrow{\Delta\psi} = (\Delta\psi)\vec{e}_\zeta$, $\overrightarrow{\Delta\theta} = (\Delta\theta)\vec{m}$, $\overrightarrow{\Delta\varphi} = (\Delta\varphi)\vec{k}$.

Разделив полученное равенство на Δt и перейдя к пределу (при $\Delta t \to 0$), получим

$$\vec{v} = \dot{\vec{\psi}} \times \vec{r} + \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r} + \dot{\vec{\varphi}} \times \vec{r} = (\dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}) \times \vec{r} =$$

$$= (\dot{\psi}\vec{e}_\zeta + \dot{\theta}\vec{m} + \dot{\varphi}\vec{k}) \times \vec{r}$$

откуда следует равенство $\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_\zeta + \dot{\theta}\vec{m} + \dot{\varphi}\vec{k}$ верное для всех $\vec{r}$.

Упражнение 11.1 главы 6.

Формула (11.7) главы 6 следует из того, что

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j}.$$

По формуле (11.1) (определение главного вектора количества движения механической системы относительно полюса C) с учетом (11.7) главы 6 получим:

$$\vec{\mathcal{K}}_c = \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) \times m_j(\vec{v}_j - \vec{v}_c) =$$

$$= \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) \times m_j\vec{v}_j - \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) \times m_j\vec{v}_c = \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_c) \times m_j\vec{v}_j.$$

Упражнение 2.1 главы 8.

Из формулы (2.4) главы 8 можно получить момент t^1, в который закончится топливо, т.е. масса ракеты будет равна m^1:

$$t^1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{m(0)}{m^1}.$$

Далее с помощью формулы (2.7) главы 8 найдем длину активного участка траектории ракеты:

$$s^1 = (q-1)\frac{g\beta^2}{2\alpha^2} + v(0)\,\frac{\beta}{\alpha},\ \beta = \ln\frac{m(0)}{m^1}.$$

Упражнение 4.1 главы 11.

$$\ddot{r} - r(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \delta\cdot\Phi(r) = 0,\ \ 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta) = 0.$$

Упражнение 4.2 главы 11.

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m},\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\vartheta},\ \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2},$$

$$\dot{p_r} = \frac{p_\varphi^2 + p_\vartheta^2}{mr^3\sin^2\vartheta} - \delta\cdot\Phi(r),\ \dot{p_\varphi} = 0,\ \dot{p_\vartheta} = \frac{p_\varphi^2\cos\vartheta}{mr^2\sin^3\vartheta}.$$

Перейти к оглавлению на странице: 256

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Часть I. — М.: Изд. Наука, 1965.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Часть II. — М.: Изд. Наука, 1966.
3. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. — М.: Изд. Высшая школа, 2000.
4. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. — М.: Изд. Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
5. *Кирпичников С.Н., Новоселов В.С.* Математические аспекты кинематики твердого тела. — Л.: Изд. ЛГУ, 1986.
6. *Королев В.С., Новоселов В.С.* Аналитическая динамика управляемой системы. — СПб.: Изд. ООП НИИХ СПбГУ, 2002.
7. *Новоселов В.С.* Статистические модели механики. — СПб.: Изд. СПбГУ, 1999.
8. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. — Л.: Изд: 1969.
9. *Новоселов В.С.* Вариационные методы в механике. — Л.: Изд. ЛГУ, 1966.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — М.: Изд. ФИЗМАТЛИТ, 2001.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Изд. Наука, 1988.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Изд. Наука, 1988.
13. *Арнольд В.И.* Математические основы классической механики. — М.: Изд. Наука, 1974.
14. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Изд. Наука, 1977.
15. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. — СПб.: Изд. Лань, 2004.
16. *Шварц Л.* Анализ, т.т.1,2. — М.: Изд. Мир, 1972.

17. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Изд. Наука, 2004.
18. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах, т.т.1,2. — М.: Изд. Мир, 1990.
19. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. — М.: Изд. Наука, 1981.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бесселя неравенство, 205
Буняковского-Шварца неравенство, 204

Галилея
 группа, 86
 преобразования, 86
 принцип относительности, 86
Галилея-Ньютона закон инерции, 85
Гамильтона
 принцип, 182
 уравнения, 154
 функция, 155
 функция главная, 164
Гамильтона-Якоби уравнение, 164, 170
Гука
 закон, 92
 сила, 101
Гюйгенса-Штейнера теорема, 121

Даламбера - Лагранжа уравнение, 141, 144
Даламбера-Лагранжа
 принцип, 173, 174, 177
 уравнение, 173
Дирака преобразование, 156

Кенига теорема, 111
Кеплера законы, 93
Кориолиса
 ускорение, 81
 формула, 81
Коши последовательность, 200
Кулона
 закон, 91, 101
 сила, 91

Лагранжа
 множители, 152
 уравнение, 168
 уравнение второго рода, 145, 149
 уравнение первого рода, 152
 функция, 145
Ламе коэффициенты, 20
Лапласа плоскость, 102
Лежандра преобразование, 155
Лоренца сила, 91, 150

Мещерского уравнение, 132

Ньютона
 задача, 93
 закон второй, 90
 закон первый, 85
 закон третий, 90
 уравнение, 84
 уравнения, 95

Парсеваля равенство, 206
Пифагора теорема, 204
Пуансо теорема, 61, 72
Пуассона
 метод, 158
 скобки, 158
 теорема, 161

- тождество, 159
- формулы, 78

Сильвестра критерий, 148

Фурье коэффициенты, 205

Хаусдорфа теорема, 200, 202

Циолковского
- задача вторая, 135
- задача первая, 134
- формула, 134

Шаля
- соотношение, 5
- теорема, 56

Эйлера
- теорема, 56
- углы, 66
- уравнения динамические, 129
- уравнения динамические в общем случае, 129
- уравнения кинематические, 129
- формула, 57, 72
- формула в общем случае, 75

Эйлера-Даламбера теорема, 70

Эйлера-Лагранжа принцип, 187

Якоби
- метод, 164, 167
- теорема, 164

аксоид, 72
- неподвижный, 72
- подвижный, 72

аннулятор множества, 203

аномалия истинная, 117

апоцентр, 117

базис, 8, 9, 195, 206
- двойственный, 209
- дуальный, 209
- естественный, 26
- левый, 197
- локальный, 16
- натуральный, 26
- ортогональный, 16
- ортонормальный, 206
- отрицательно ориентированный, 197
- положительно ориентированный, 197
- правый, 197
- сопряженный, 209

вариация изохронная, 139, 178

вариация полная, 179

вектор, 5, 192, 208
- внешних сил главный, 96
- внутренних сил главный, 96
- всех сил главный, 94
- закрепленный, 6
- закрепленный в точке, 6, 47
- количества движения главный, 96
- приложенный к точке, 6, 47
- свободный, 6, 47
- угла поворота, 33

векторы
- ковариантные, 208
- когредиентные, 208

контравариантные, 208
контрагредиентные, 208
вращение
вокруг неподвижной оси, 45, 50
вокруг неподвижной точки, 46
вокруг точки, 38
равномерное, 33
равнопеременное, 33

гамильтониан, 155, 156, 169
гомоморфизм, 192
граница множества, 198
группа, 41, 189
Галилея, 86
абелева, 41, 189
кольца аддитивная , 190
коммутативная, 41, 189
перемещений, 44
поля мультипликатива, 191
преобразований, 41, 190

движение
истинное, 172
кинематически возможное, 172
абсолютное точки, 77
в цилиндрических координатах, 33
механической системы, 19
несвободное, 137
относительное точки, 77
переносное точки, 77
плоско-параллельное, 46, 53
плоское, 46, 53
по инерции, 85
по окружности, 31
поступательное, 38, 45, 47
прямолинейное, 30
прямолинейное равномерное, 31
прямолинейное равнопеременное, 31
свободное, 137
системы, 35
сложное, 77
точки, 19, 20
точки в силовом поле, 99
точки в центральном поле, 167
делитель единицы, 190
дефект, 195
диффеоморфизм, 13
долгота, 40

задача
Ньютона, 93
Циолковского вторая, 135
Циолковского первая, 134
динамики вторая, 94
динамики первая, 93
обратная, 93
прямая, 94
закон
Гука, 92
Кулона, 91, 101
Ньютона второй, 90
Ньютона первый, 85
Ньютона третий, 90
ассоциативный, 40, 189
всемирного тяготения,

90, 100
инерции Галилея-Ньютона, 85
коммутативный, 41, 189
композиции, 40
композиции на множестве, 189
законы
Кеплера, 93
сил, 90
замена координат, 13
замыкание множества, 199
изоморфизм, 192
изометрический, 200
импульс
обобщенный, 154, 169
силы, 96
силы элементарный, 96
инертность, 89
интеграл
канонических уравнений первый, 156
канонической системы уравнений первый, 158
механической энергии, 109, 114, 157
механической энергии в форме Якоби-Остроградского, 157
площадей, 102, 116
полный, 163, 164, 170
частный, 163
энергии, 110
класс движения, 35
ковектор, 208, 214
количество движения, 125
кольцо, 190
с единицей, 190
коммутативное, 191
рациональных чисел, 191
целых чисел, 191
комбинация векторов линейная, 195
композиция перемещений механической системы, 55
континуум, 199
координата естественная, 28
координаты
аффинные, 8
вектора, 196
географические, 40
лагранжевы, 138
обобщенные, 138, 168
позиционные, 157
тензора, 212
циклические, 157
коразмерность, 195
коэффициент
сопротивления среды, 93
трения скольжения, 92
коэффициенты
Ламе, 20
Фурье, 205
кривизна траектории, 28
критерий Сильвестра, 148
линии координатные, 16
линия узлов, 66
масса, 89
твердого тела, 120
метод
Пуассона, 158

Якоби, 164, 167
кинематический, 29
метрика, 197
многообразие
линейное, 193
множества диффеоморфные, 13
множество
всюду плотное, 199
выпуклое, 197
замкнутое, 199
компактное, 199
линейно зависимое, 195
линейно независимое, 195
линейное, 193
ограниченное, 198
множители Лагранжа, 152
момент
вектора, 97
внешних сил главный, 97, 104
внутренних сил главный, 97
закрепленного вектора относительно точки, 97
инерции
главный центральный, 123
материальной точки относительно оси, 120
твердого тела главный, 123
твердого тела осевой, 120
твердого тела относительно оси, 120
твердого тела центробежный, 120
кинетический, 98, 104, 125
количества движения, 97
количества движения главный, 104
нулевого порядка, 119
моноид, 41, 189
мощность, 107, 113

начало репера, 8
неравенство
Бесселя, 205
Буняковского-Шварца, 204
норма, 200

область, 199
замкнутая, 199
оболочка
выпуклая, 197
линейная множества, 195
оператор
инерции, 122
операция алгебраическая бинарная, 40, 189
орбита, 93, 117
ориентация, 196
аффинного базиса, 9
аффинной системы координат, 9
репера, 9
оси
инерции главные центральные, 123
координат, 9
ось
вращения, 50

вращения мгновенная, 71
инерции твердого тела главная, 123
отношение ортогональности векторов, 203
отображение гладкое, 13
отрезок, 197
перемещение, 35
истинное, 172
кинематически возможное, 172
виртуальное, 139, 140
истинное, 139
нулевое, 70
поступательное, 56
перицентр, 117
плоскость
Лапласа, 102
параллелизма, 46, 53
соприкасающаяся, 26
плотность, 119
поверхности координатные, 15
поверхность эквипотенциальная, 109
подгруппа, 41, 190
вращений вокруг неподвижной точки, 47
вращений вокруг оси, 46
сдвигов, 45
подкольцо, 190
подмножество связное, 199
подполе, 191
подпоследовательность, 199
подпространство, 193
нормированного пространства, 201
поле, 191
вещественных чисел, 191
комплексных чисел, 191
сил центральное, 99, 110
силовое, 99
силовое стационарное, 99
силы тяжести, 109
положение системы, 35
полугруппа, 40, 189
мультипликативная, 190
пополнение
метрического пространства, 200
нормированного пространства, 201
последовательность, 199
Коши, 200
бесконечная, 199
конечная, 199
ограниченная, 199
ортогональная, 205
ортонормальная, 205
стационарная, 202
фундаментальная, 200
постоянная
всемирная гравитационная, 91
механической энергии, 109, 114, 157
площадей, 102
потенциал, 109, 110
кинетический, 145
обобщенный, 149
поля, 108
силовой, 108
преобразование
Дирака, 156
Лежандра, 155

преобразования Галилея, 86
принцип
Гамильтона, 182
Даламбера-Лагранжа, 173, 174, 177
Эйлера-Лагранжа, 187
механики вариационный, 172
механики дифференциальный, 172
механики интегральный, 173
возможных перемещений, 142
детерминированности, 84
относительности Галилея, 86
проекция, 205
произведение, 189
векторных пространств, 194
скалярное, 203
произведения инерции, 120
производная
абсолютная, 80
относительная, 79
пространство
афинное, 5
аффинное евклидово, 7
банахово, 201
бесконечномерное, 195
векторное, 191
вещественное векторное, 192
гильбертово, 204, 206
двойственное, 208
дуальное, 208
евклидово точечное, 7
изотропное, 87
компактное, 199
комплексное векторное, 192
конечномерное, 195
метрическое, 198
метрическое полное, 200
метрическое сепарабельное, 200
неподвижное, 37
нормированное векторное, 200
однородное, 87
подвижное, 37
предгильбертово, 203
сопряженное, 208
унитарное, 206
прямая, 6
направленная, 6
работа, 107, 108
виртуальная сил реакций связи, 141
элементарная, 106
равенство Парсеваля, 206
радиус
инерции, 121
кривизны траектории, 28
сферический, 40
шара, 198
размерность
аффинного пространства, 6
векторного пространства, 195
распределение масс, 119
расстояние, 198
евклидово, 7

реакция связи, 137, 152
репер, 8
  абсолютный, 77
  неподвижный, 37
  относительный, 77
  подвижный, 37
свертка тензора, 216
связь, 137
  геометрическая, 137
  голономная, 36, 137
  двусторонняя, 137
  идеальная, 141
  кинематическая, 137
  неголономная, 137
  нестационарная, 137
  неудерживающая, 137
  односторонняя, 137
  реономная, 137
  склерономная, 137
  стационарная, 137
  удерживающая, 137
сила, 88
  Гука, 101
  Кулона, 91
  Лоренца, 91, 150
  активная, 137
  внешняя, 94
  внутренняя, 94
  инерции, 141
  контактная, 88
  нормального давления, 92
  обобщенная, 143
  полевая, 88
  реактивная, 132
  сопротивления среды, 92, 110
  трения скольжения, 92
  тяжести, 92
  упругости, 92
  фундаментальная, 91
  ядерная, 91
силы
  диссипативные, 111
  консервативные, 111
система
  алгебраическая, 40, 189
  голономная, 138
  материальная, 90
  механическая, 19, 35, 90
  механическая неизменяемая на классе движений, 35
  неголономная, 138
  ортогональная, 205
  ортонормальная, 205
  ортонормированная, 205
система координат
  аффинная, 9
  гелиоцентрическая, 85
  декартова, 10
  естественная, 26
  инерцильная, 86
  криволинейная, 12
  ортогональная, 16
  цилиндрическая, 21
скаляр, 191
скобки Пуассона, 158
скорость, 19
  абсолютная точки, 77
  обобщенная точки, 20
  относительная точки, 77
  перносная точки, 77
  поступательного движения, 58

секторная, 93, 102
угловая, 33, 57, 75
мгновенная, 71
угловая средняя, 33
угловая твердого тела, 53
след тензора, 216
соотношение Шаля, 5
состояние покоя, 58
способ статический, 89
среда сплошная связная, 35
степень свободы, 36
структура алгебраическая, 40, 189
сумма алгебраическая, 194
сходимость последовательности к точке, 199

тело
абсолютно твердое, 35
переменной массы, 131
твердое, 35, 119
тензор, 211
инерции, 122
ковариантный, 211
контравариантный, 211
кососимметричный, 214
симметричный, 214
теорема
Гюйгенса-Штейнера, 121
Кенига, 111
Пифагора, 204
Пуансо, 61, 72
Пуассона, 161
Хаусдорфа, 200, 202
Шаля, 56
Эйлера, 56
Эйлера-Даламбера, 70
Якоби, 164
косинусов, 204
о базисе сопряженного пространства, 209
о движении центра масс, 127
об изменении кинетического момента, 98, 104, 127
об изменении кинетической энергии, 106, 107, 113, 128
об изменении количества движения, 127
сложения скоростей, 80
сложения ускорений, 81
тождество Пуассона, 159
точка
аффинного пространства, 5
граничная, 198
материальная, 90
переменной массы, 131
предельная множества, 198
точки линейно-независимые, 9
траектория, 19
точки в криволинейных координатах, 20
тяга, 133

углы Эйлера, 66
угол
между векторами, 31
между прямыми, 31
нутации, 66
поворота, 31
прецессии, 66

ротации, 66
смежности, 28
собственного вращения, 66
уравнение
Даламбера-Лагранжа, 173
механики общее, 141, 144, 177
Гамильтона-Якоби, 164, 170
Даламбера - Лагранжа, 141, 144
Лагранжа, 168
Лагранжа I рода, 152
Лагранжа II рода, 145, 149
Мещерского, 132
Ньютона, 84
для двух гравитирующих точек, 100
для двух электрических зарядов, 101
для точки в поле силы Гука, 101
движения центра инерции, 97
конического сечения, 117
статики общее, 142
уравнения
Гамильтона, 154, 155
Ньютона, 95
Эйлера динамические, 129
Эйлера динамические в общем случае, 129
Эйлера кинематические, 129
движения механической системы, 95
движения свободного твердого тела, 130
канонические, 154, 155, 169
характеристик, 164
центроид, 62
ускорение, 19
Кориолиса, 81
абсолютное точки, 77
бинормальное, 27
вращательное, 63, 73, 81
касательное, 27
нормальное, 27
обобщенное точки, 20
осестремительное, 63, 73
относительное точки, 77
переносное точки, 77
свободного падения, 92
угловое, 33, 63, 73
условие
двойственноти базисов, 209
дуальности базисов, 209
сопряженности базисов, 209

фокус конического сечения, 117
формула
Кориолиса, 81
Циолковского, 134
Эйлера, 57, 72
в общем случае, 75
относительной производной, 80
сложения скоростей, 80

сложения угловых скоростей, 82
сложения ускорений, 81
формулы
Пуассона, 78
функционал действия, 178
функционал линейный, 208
функция
действия, 178
Гамильтона, 155
Гамильтона главная, 164
Лагранжа, 145
линейная, 208
потенциальная, 109
силовая, 108
характеристика геометрическая, 120
центр
вращения, 56, 59
инерции, 96
масс, 96, 120
сил, 99
скоростей, 59
скоростей мгновенный, 59
ускорений мгновенный, 63
шара, 198
центроида, 61
неподвижная, 61
подвижная, 61
число степеней свободы, 36
шар
замкнутый, 198
открытый, 198
широта, 40
эксцентриситет, 117
элемент
единичный, 41, 189
нейтральный, 41, 189, 192
обратимый, 189, 190
обратный, 41, 190
противоположный, 189
эллипсоид инерции, 123
центральный, 123
энергия
кинетическая, 111, 125
материальной точки, 106
потенциальная, 109, 114
эталон силы, 89
якобиан, 12

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ **2**

ЧАСТЬ I. ПРОСТРАНСТВА И КООРДИНАТЫ **4**

Глава 1. Аффинные пространства **5**

§ 1. Аффинные евклидовы пространства 5

§ 2. Аффинные координаты и преобразования 8

Глава 2. Криволинейные координаты **12**

§ 1. Криволинейные системы координат 12

§ 2. Локальные базисы 14

ЧАСТЬ II. КИНЕМАТИКА **18**

Глава 3. Кинематика точки **19**

§ 1. Коэффициенты Ламе. Проекции скорости точки на оси криволинейной системы координат 19

§ 2. Проекции ускорения точки на оси ортогональной криволинейной системы координат 22

§ 3. Описание движения точки в естественных координатах . 24

§ 4. Определение кривизны траектории точки по движению . 29

§ 5. Два примера движения точки 30

Глава 4. Кинематика твердого тела **34**

§ 1. Движение механической системы. Твердое тело. Число степеней свободы положения. Аффинное пространство и координаты, связанные с твердым телом 34

§ 2. Группа движений аффинного евклидова пространства . . 40

§ 3. Поступательное движение твердого тела 47

§ 4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 50

§ 5. Плоское движение твердого тела 53

§ 6. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки 65

§ 7. Угловая скорость, формула Эйлера и движение твердого тела в общем случае 74

Глава 5. Сложное движение **77**

§ 1. Сложное движение точки. Основные понятия 77

§ 2. Относительная производная 78
§ 3. Теорема сложения скоростей в сложном движении точки 80
§ 4. Теорема сложения ускорений в сложном движении точки 81
§ 5. Теорема о сложении угловых скоростей в сложном движении твердого тела 82
ЧАСТЬ III. ДИНАМИКА 83
Глава 6. Уравнения движения и основные законы динамики механической системы 84
§ 1. Принцип детерминированности и уравнение Ньютона . . . 84
§ 2. Инерциальные системы координат 85
§ 3. Сила и масса. Второй и третий законы Ньютона 88
§ 4. Законы сил 90
§ 5. Две задачи динамики 93
§ 6. Уравнения движения механической системы 94
§ 7. Теорема об изменении главного вектора количества движения 95
§ 8. Уравнение движения центра инерции 96
§ 9. Кинетический момент относительно неподвижной точки и теорема о его изменении 97
§10. Движение точки в центральном поле сил 99
§11. Изменение кинетического момента, вычисляемого относительно подвижного полюса 103
§12. Работа силы и изменение кинетической энергии материальной точки 106
§13. Условия потенциальности силового поля 107
§14. Кинетическая энергия системы и теорема Кенига 111
§15. Теорема об изменении кинетической энергии системы . . . 112
§16. Движение точки в центральном поле сил (продолжение). 114
Глава 7. Динамика твердого тела 119
§ 1. Масса и плотность. Геометрия масс 119
§ 2. Основные законы динамики твердого тела 124

§ 3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки 128
§ 4. Уравнения движения свободного твердого тела 129
Глава 8. Динамика точки с переменной массой 131
§ 1. Уравнение Мещерского 131
§ 2. Две задачи Циолковского 133
ЧАСТЬ IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА 136
Глава 9. Общее уравнение механики 137
§ 1. Связи, реакции. Обобщенные координаты 137
§ 2. Изохронные вариации 139
§ 3. Идеальные связи. Общее уравнение механики и принцип возможных перемещений 141
§ 4. Общее уравнение механики в лагранжевых координатах . 142
Глава 10. Уравнения Лагранжа 145
§ 1. Уравнения Лагранжа II рода, их инвариантность 145
§ 2. Разрешимость уравнений Лагранжа II рода относительно старших производных 147
§ 3. Обобщенный потенциал и уравнения Лагранжа II рода . . 149
§ 4. Уравнения Лагранжа I рода и реакции идеальных связей 150
Глава 11. Канонические уравнения механики 154
§ 1. Вывод канонических уравнений 154
§ 2. Первые интегралы канонических уравнений 156
§ 3. Метод Якоби решения канонических уравнений 162
§ 4. Решение задачи о движении точки в центральном поле методом Якоби 167
Глава 12. Вариационные принципы механики 172
§ 1. Дифференциальный принцип Даламбера-Лагранжа в декартовых переменных 173
§ 2. Дифференциальный принцип Даламбера-Лагранжа в канонических переменных 174
§ 3. Функционал и функция действия 178
§ 4. Интегральный принцип наименьшего действия при изохронном варьировании (Принцип Гамильтона) 182

§ 5. Интегральный принцип наименьшего действия при изоэнергетическом варьировании (Принцип Эйлера-Лагранжа) . . . 184
ЧАСТЬ V. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ . . . 188
Глава 13. Структуры и пространства . . . 189
§ 1. Группы, кольца, поля . . . 189
§ 2. Векторные пространства . . . 191
§ 3. Метрические пространства . . . 197
§ 4. Банаховы, гильбертовы и евклидовы пространства . . . 200
§ 5. Пространства R^n . . . 207
Глава 14. Тензоры . . . 208
§ 1. Сопряженные пространства . . . 208
§ 2. Два определения тензора и их эквивалентность . . . 211
§ 3. Примеры тензоров . . . 214
§ 4. Алгебраические операции над тензорами . . . 215
ЧАСТЬ VI. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ . . . 218
Глава 15. Проверочные вопросы . . . 219
§ 1. Экзаменационные вопросы . . . 219
§ 2. Тесты . . . 223
§ 3. Упражнения . . . 231
Литература . . . 243
Предметный указатель . . . 245