

Будем рассматривать уравнение диффузии в кольце

$$\partial_t u = D \partial_{xx} u + F(u(x, t), t), \quad x \in [0; 2\pi]$$

Будем искать для $t \in [0; T]$ решение $u(x, t)$, отвечающее следующим граничным и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0; 2\pi]$$

$$u(0, t) = u(2\pi, t); \quad \partial_x u(0, t) = \partial_x u(2\pi, t), \quad t \in [0; T]$$

Программа принимает на вход следующие параметры:

D – коэффициент диффузии

N – количество узлов сетки по x для численного метода

dt – шаг по времени, с которым будет двигаться программа

NT – количество шагов по времени, которые будет выполнять программа

2 π -периодичность функции будет следовать из периодичности начальной функции u_0 и периодичности функции правой части F . В качестве стартовой функции и правой части для теста можно использовать функции, описанные ниже. В дальнейшем я попрошу изменять эту функцию.

$$u_0 = \sin(5x)$$

$$F(u(x, t), t) = \sin(0.1 * u(x, t) + t)$$

В качестве бонусного упражнения можете настроить ввод функции пользователем.

Также у пользователя должна быть возможность выбирать вид отображения: анимация профиля волны или тепловая карта. Соответственно, после указания параметров пользователь должен запустить расчет кнопкой "Run" и наслаждаться результатом.

Аппроксимация задачи

Для аппроксимации исходной задачи будем использовать неявную симметричную разностную схему. Зададим пространственную сетку

$$x_n = nh, \quad n = \overline{0, N}, \quad h = \frac{2\pi}{N},$$

где N – количество узлов сетки, h – шаг пространственной переменной. Определим сеточную функцию

$$u = (u_0, u_1 \dots u_N), \quad u_n = u(x_n), \quad n = \overline{0, N}$$

в каждый момент времени $t \in [0; T]$. Выберем шаг по времени τ , тогда

$$t_m = m\tau, \quad m = \overline{0, M}, \quad M = \frac{T}{\tau},$$

$$u^m = u(x, m\tau), \quad u_n^m = u(nh, m\tau).$$

Дух

аппроксимируем сеточным оператором L_n

$$L_n u^m = D \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}.$$

Введем систему сеточных функций, которые будут составлять ортонормированный базис и являться собственными функциями оператора L_n :

$$e_k(j) = \frac{1}{2\pi} e^{ikjh}, \quad k = \overline{0, N},$$

тогда собственные значения оператора L_n имеют вид

$$\lambda_k = \frac{4D}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{4}\right).$$

Для аппроксимации правой части используем выражение:

$$F_n^m = F(u_n^m, \tau m)$$

Используя введенные обозначения, запишем неявную симметричную разностную схему для исходного уравнения:

$$\begin{cases} \frac{u_n^m - u_n^{m-1}}{\tau} + L_n \left(\frac{u_n^m + u_n^{m-1}}{2} \right) = \frac{F_n^m + F_n^{m-1}}{2}, \quad m = \overline{0, M}, n = \overline{0, N} \\ u_0^m = u_N^m = \frac{u_1^m + u_{N-1}^m}{2}, \\ u_n^0 = u_0(xn), \quad n = \overline{0, N}. \end{cases} \quad (1)$$

Метод Фурье

Уравнение будем решать методом итерации. Пусть $u^{(s)}$ – s-ое приближение на текущем временном слое m . В качестве начального (нулевого) приближения возьмем решение на предыдущем временном слое $u^{(0)} = u^{m-1}$. Правую часть переобозначим следующим образом $F^{(s)} = F(u_n^{(s)}, P)$. Перепишем схему с учетом этих обозначений:

$$\left(E + \frac{\tau}{2} L_n u^{(s)} \right) = \left(E + \frac{\tau}{2} L_n \right) u^{m-1} + \tau \frac{F_n^{(s-1)} + F_n^{m-1}}{2}, \quad n = \overline{0, N}.$$

Для решения этих уравнений применим метод Фурье. Решение – сеточную функцию u будем искать в виде

$$u^m(x_n) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k^m e_k(x_n).$$

для Python нужна нумерация $[-N/2, N/2]$

Рассмотрим метод Фурье для s-ой итерации. Умножим обе части равенства скалярно на e_p , $p = \overline{0, N}$:

$$\left\langle \left(E + \frac{\tau}{2} L_n \right) \sum_{k=0}^N \hat{u}_k^{(s)} e_k, e_p \right\rangle = \left\langle \left(E + \frac{\tau}{2} L_n \right) \sum_{k=0}^N \hat{u}_k^{m-1} e_k, e_p \right\rangle + \tau \left\langle \frac{F_n^{(s-1)} + F_n^{m-1}}{2}, e_p \right\rangle.$$

Используя это и обозначив $\phi_l^m = \langle F_n^{(s-1)} + F_n^{m-1}, e_l \rangle$, получаем

$$\left(1 + \frac{\tau}{2} \lambda_l \right) \hat{u}_l^{(s)} = \left(1 - \frac{\tau}{2} \lambda_l \right) \hat{u}_l^m + \frac{\tau}{2} \phi_l^m.$$

Таким образом, получаем коэффициенты Фурье для искомой функции:

$$\hat{u}_l^{(s)} = \frac{(2 - \tau \lambda_l) \hat{u}_l^{m-1} + \tau \phi_l^m}{2 + \tau \lambda_l}.$$

Вам нужно провр. только эту формулу