БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания и упражнения для студентов факультета прикладной математики и информатики

МИНСК
2009

УДК 519.2(076)
ББК 22.171я73
Э456

Утверждено на заседании кафедры
теории вероятностей и математической статистики
факультета прикладной математики и информатики
27 октября 2009 г., протокол № 4

Автор-составитель:
Т. В. Цеховая

Элементы теории вероятностей : Метод. указания и упражнения
Э456 для студентов факультета прикладной математики и информатики /
авт.-сост. Т. В. Цеховая. – Мн. : БГУ, 2009. – 53 с.

Методические указания и упражнения «Элементы теории вероятностей» посвящены изучению отдельных разделов курса «Теория вероятностей и математическая статистика» и содержат задачи, рекомендуемые для решения на лабораторных занятиях. В начале каждой темы приведены необходимые теоретические сведения и примеры решения типовых задач.

Предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики.

УДК 519.2(076)
ББК 22.171я73

© БГУ, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Для студентов факультета прикладная математика и информатика БГУ дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» читается в 4 – 6 семестрах и имеет объем 204 часа, из которых 102 часа – практические занятия. Методические указания и упражнения «Элементы теории вероятностей» соответствуют программе 5 семестра вышеуказанного общего курса.

Методические указания и упражнения состоят из девяти тем, первые семь из которых посвящены разделу «Теория вероятностей», а вторые две – разделу «Математическая статистика»; в конце приводится список сборников задач, которые были использованы для написания настоящего пособия.

Студентам предлагается около 300 задач, имеющих разную степень трудности. В начале каждой темы методических указаний и упражнений приводятся основные определения и формулы. Далее излагаются решения типовых примеров, затем следуют задачи для самостоятельного решения.

Автор выражает глубокую признательность Н. Н. Трушу, П. М. Лаппо и Н. М. Зуеву за ряд ценных советов и замечаний, способствующих улучшению пособия.

1. ФУНКЦИЯ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

Задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Если каждому возможному значению случайной величины $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, соответствует одно возможное значение случайной величины $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, то η называют *функцией случайного аргумента* ξ и записывают $\eta = \varphi(\xi)$.

Если ξ – дискретная случайная величина и функция $\eta = \varphi(\xi)$ строго монотонна, то различным значениям ξ соответствуют различные значения η, причем вероятности соответствующих значений ξ и $\varphi(\xi)$ одинаковы. Другими словами, возможные значения η находят из равенства $y_i = \varphi(x_i)$, где x_i – возможные значения ξ; вероятности возможных значений η находят из равенства $\mathrm{P}\{\eta = y_i\} = \mathrm{P}\{\xi = x_i\}$.

Если же $\eta = \varphi(\xi)$ – немонотонная функция, то различным значениям ξ могут соответствовать одинаковые значения η. В этом случае для отыскания вероятностей возможных значений η следует сложить вероятности тех возможных значений ξ, при которых η принимает одинаковые значения. Другими словами, вероятность повторяющегося значения η равна сумме вероятностей тех возможных значений ξ, при которых η принимает одно и то же значение.

Пусть ξ – случайная величина с абсолютно непрерывной функцией распределения $F_\xi(x), x \in \mathrm{R} = (-\infty, +\infty)$, и плотностью распределения $p_\xi(x), x \in \mathrm{R}$.

Предположим, что случайная величина η связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = \varphi(\xi)$, где $\varphi(x)$ – строго монотонная функция, дифференцируемая на всем промежутке возможных значений аргумента x. Тогда плотность вероятности случайной величины η выражается формулой

$$p_\eta(y) = p_\xi(\psi(y))|\psi'(y)|, \qquad (1)$$

где $\psi(y)$ – функция, обратная по отношению к $\varphi(x)$.

Если функция $\varphi(x)$ в интервале возможных значений ξ не монотонна, но возможно разбить этот интервал на k участков монотонности $\varphi(x)$, то следует найти обратную функцию на каждом из них: $\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_k(y)$, а затем воспользоваться формулой

$$p_\eta(y) = \sum_{i=1}^{k} p_\xi(\psi_i(y))\,|\psi_i{}'(y)|.$$

Замечание. Пусть $y = \varphi(x)$ – непрерывная возрастающая функция, тогда для случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$:

$$F_\eta(y) = \mathrm{P}\{\eta < y\} = \mathrm{P}\{\varphi(\xi) < y\} = \mathrm{P}\{\xi < \varphi^{-1}(y)\} = F_\xi(\varphi^{-1}(y)) = F_\xi(\psi(y)).$$

Если $\varphi(x)$ – дифференцируема, то

$$p_\eta(y) = p_\xi(\psi(y))\psi'(y).$$

Пусть $y = \varphi(x)$ – убывающая функция, тогда

$$F_\eta(y) = 1 - F_\xi(\psi(y)), \qquad p_\eta(y) = -p_\xi(\psi(y))\psi'(y).$$

Пример 1. Пусть задан закон распределения случайной величины ξ:

x_i	-1	1	2
$p_i = \mathrm{P}\{\xi = x_i\}$	0,1	0,3	0,6

Найти закон распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Решение. Случайная величина η принимает значения $y_1 = \varphi(x_1) = (-1)^2 = 1$, $y_2 = \varphi(x_2) = 1^2 = 1$, $y_3 = \varphi(x_3) = 2^2 = 4$, т.е. она принимает два значения: 1 и 4, причем

$$p_1 = \mathrm{P}\{\eta = 1\} = \mathrm{P}\{\xi = -1\} + \mathrm{P}\{\xi = 1\} = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4,$$

$$p_2 = \mathrm{P}\{\eta = 4\} = \mathrm{P}\{\xi = 2\} = 0{,}6.$$

Следовательно, ряд распределения случайной величины η имеет вид

y_j	1	4
$p_j = \mathrm{P}\{\eta = y_j\}$	0,4	0,6

Пример 2. Пусть ξ – случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$, $x \in \mathrm{R}$. Найти плотность распределения функции $\eta = -5\xi + 2$.

Решение. Функция $y = -5x + 2$ монотонно убывает в интервале $(-\infty, +\infty)$. Обратная функция есть $x = (2-y)/5 = \psi(y)$, $\psi'(y) = -1/5$. По формуле (1) имеем

$$p_\eta(y) = p_\xi(\psi(y))|\psi'(y)| = p_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right)\cdot\left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}p_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right), \quad y \in \mathrm{R}.$$

Проиллюстрируем на примере 2 вывод формул для функции и плотности распределения.

$$F_\eta(y) = \mathrm{P}\{\eta < y\} = \mathrm{P}\{-5\xi + 2 < y\} = \mathrm{P}\{\xi > (2-y)/5\} = 1 - \mathrm{P}\{\xi \le (2-y)/5\} =$$

$$= 1 - (\mathrm{P}\{\xi < (2-y)/5\} + \mathrm{P}\{\xi = (2-y)/5\}).$$

Поскольку $\mathrm{P}\{\xi = (2-y)/5\} = 0$, имеем

$$F_\eta(y) = 1 - \mathrm{P}\{\xi < (2-y)/5\} = 1 - F_\xi((2-y)/5).$$

Далее, зная функцию распределения величины η, найдем плотность

$$p_\eta(y) = F_\eta'(y) = \left(1 - F_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right)\right)'_y = -p_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right)\cdot\left(\frac{2-y}{5}\right)'_y = -$$

$$p_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right),$$

т.е. $p_\eta(y) = \dfrac{1}{5}p_\xi\left(\dfrac{2-y}{5}\right)$, $y \in \mathrm{R}$.

Упражнения

1. Пусть задан закон распределения дискретной случайной величины ξ:

x_i	– 1	1	2
p_i	0,1	0,3	0,6

Найти закон распределения случайной величины $\eta = 2\xi + 10$.

2. Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения:

x_i	– 2	– 1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,1	0,05

Найти закон распределения случайной величины $\eta = 2\xi^2 - 3$.

3. Пусть задан закон распределения дискретной случайной величины ξ:

x_i	– 2	– 1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,1	0,05

Найти закон распределения случайной величины $\eta = \sqrt{\xi + 2}$.

4. Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения:

x_i	– 1	1	2
p_i	0,1	0,3	0,6

Найти закон распределения случайной величины $\eta = \sin(\pi\xi/3)$.

5. Пусть задан закон распределения дискретной случайной величины ξ:

x_i	– 1	1	2
p_i	0,1	0,3	0,6

Построить ряд распределения случайной величины $\eta = \cos^2(\pi\xi/2)$.

6. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sqrt{\xi}$.

7. Пусть случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$, $x \in \mathrm{R}$. Предположим, что $\eta = 29\xi - 43$. Найти функцию распределения случайной величины η.

8. Задана функция распределения $F_\xi(x)$, $x \in \mathrm{R}$, случайной величины ξ. Предположим, что $\eta = -(2/3)\xi + 2$. Найти функцию распределения случайной величины η.

9. Задана плотность распределения $p_\xi(x)$, $x \in \mathrm{R}$, случайной величины ξ. Найти функцию и плотность распределения случайной величины $\eta = -7\xi + 4$.

10. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [0, 1]. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = 1 - \xi$.

11. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x) = 1$, $x \in [1, 2]$, и $p_\xi(x) = 0$, $x \notin [1, 2]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2/4$.

12. Случайная величина ξ равномерно распределена на $[-\pi/2, \pi/2]$. Найти распределение $\eta = \sin\xi$.

13. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, \pi/2]$. Найти распределение $\eta = \sin\xi$.

14. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, \pi]$. Найти распределение $\eta = \sin\xi$.

15. В прямоугольной системе координат xOy из точки A(4; 0) наудачу (под произвольным углом t) проведен луч, пересекающий ось Oy. Найти плотность распределения вероятностей ординаты y точки пересечения проведенного луча с осью Oy.

16. Задана плотность распределения случайной величины ξ: $p_\xi(x) = 1/\pi$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$; вне этого интервала $p_\xi(x) = 0$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \mathrm{tg}\xi$.

17. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

18. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1, 2]$. Найти плотность и функцию распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

19. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \cos\xi$.

20. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \cos\xi$.

21. Случайная величина ξ распределена по закону Коши с плотностью $p_\xi(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$. Найти плотность распределения величины $\eta = \xi^3 + 2$.

22. Задана плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ, возможные значения которой заключены в интервале $(0, +\infty)$. Найти плотность распределения случайной величины η, если а) $\eta = e^{-\xi}$; б) $\eta = \ln\xi$.

23. Задана плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ, возможные значения которой заключены в интервале $(0, +\infty)$. Найти плотность распределения случайной величины η, если а) $\eta = \xi^3$; б) $\eta = 1/\xi^2$; в) $\eta = \sqrt{\xi}$.

24. Задана плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ, возможные значения которой заключены в интервале $(-\infty, +\infty)$. Найти плотность распределения случайной величины η, если а) $\eta = \xi^2$; б) $\eta = e^{-\xi^2}$.

25. Задана плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ, возможные значения которой заключены в интервале $(-\infty, +\infty)$. Найти плотность распределения случайной величины η, если а) $\eta = |\xi|$; б) $\eta = \cos\xi$.

26. Задана плотность распределения вероятностей $p_\xi(x)$ случайной величины ξ, возможные значения которой заключены в интервале $(-\infty, +\infty)$. Найти плотность распределения случайной величины η, если а) $\eta = \operatorname{arctg}\xi$; б) $\eta = 1/(1 + \xi^2)$.

27. Острый угол ромба со стороной a подчинен закону равномерного распределения на отрезке $[0, \pi/2]$. Найти плотность распределения площади ромба.

28. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

29. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения величины $\eta = 0{,}5\xi^2$.

30. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 3\xi^3$.

31. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |\xi|$.

32. Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 0{,}25\xi^2$.

33. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид: $p_\xi(x) = 0{,}5\sin x$, $x \in (0, \pi)$; вне этого интервала $p_\xi(x) = 0$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

34. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x) = \cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $p_\xi(x) = 0$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

35. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, и $p_\xi(x) = 0$, $x < 0$. Найти функцию и плотность распределения величины $\eta = 2\xi - 1$.

36. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, и $p_\xi(x) = 0$, $x < 0$. Найти функцию и плотность распределения величины $\eta = \xi^2$.

37. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$, если случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0{,}250, 0{,}375]$.

38. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$, если случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0, 0{,}5]$.

39. Докажите, если величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$, то $\eta = -\ln\xi$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$.

40. Докажите, что если случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, то величина $\eta = (\xi - a)/(b - a)$ равномерно распределена на $[0, 1]$.

2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание (*среднее значение*) дискретной случайной величины ξ, имеющей закон распределения $p_i = \mathrm{P}\{\xi = x_i\}$, $i = \overline{1, N}$, $N \le \infty$, вычисляется как сумма ряда:

$$m_\xi = \mathrm{M}\xi = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i\,, \tag{2}$$

причем ряд в правой части предполагается сходящимся абсолютно (в противном случае случайная величина ξ не имеет математического ожидания).

Дисперсия дискретной случайной величины ξ вычисляется по формуле

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - m_\xi)^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_\xi)^2 p_i = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 p_i - m_\xi^2\,,\ N \le \infty.$$

Математическое ожидание (*среднее значение*) случайной величины ξ с плотностью распределения $p_\xi(x)$ вычисляется как интеграл Римана:

$$m_\xi = \mathrm{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx\,.$$

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно (в противном случае величина ξ не имеет математического ожидания).

Дисперсия случайной величины ξ с плотностью распределения $p_\xi(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - m_\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi)^2 p_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)dx - m_\xi^2\,.$$

Для подсчета математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины η, связанной функциональной зависимостью $\eta = \varphi(\xi)$, можно пользоваться соотношениями:

$$m_\eta = \mathrm{M}\eta = \mathrm{M}\{\varphi(\xi)\} = \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i) p_i\,,$$

$$\mathrm{D}\eta = \mathrm{D}\{\varphi(\xi)\} = \sum_{i=1}^{N} (\varphi(x_i) - m_\eta)^2 p_i = \sum_{i=1}^{N} \varphi^2(x_i) p_i - m_\eta^2\,,\ N \le \infty.$$

Если ξ – случайная величина с плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x)$ и $\eta = \varphi(\xi)$, $\varphi(x)$ – непрерывная функция, то математическое ожидание и дисперсия случайной величины η вычисляются по формулам:

$$m_\eta = \mathrm{M}\eta = \mathrm{M}\{\varphi(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) p_\xi(x)dx\,, \tag{3}$$

$$D\eta = D\{\varphi(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - m_\eta)^2 p_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) p_\xi(x)dx - m_\eta^2 .$$

Пример 3. Дискретная случайная величина ξ имеет закон распределения:

x_i	0	1	2	3
$p_i = P\{\xi = x_i\}$	0,3	0,4	0,2	0,1

Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \cos^2(\pi\xi/2)$.

Решение. Ряд распределения случайной величины η имеет вид

y_j	0	1
$p_j = P\{\eta = y_j\}$	0,5	0,5

Применяя формулу (2), вычислим математическое ожидание случайной величины η.

$$m_\eta = M\eta = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5.$$

Найдем дисперсию:

$$D\eta = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 p_j - m_\eta^2 = 0^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,5 - 0,5^2 = 0,5 - 0,25 = 0,25.$$

Пример 4. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 5]$. Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = (\xi - 1)(3 - \xi)$.

Решение. Для вычисления математического ожидания случайной величины η применим формулу (3). Тогда

$$M\eta = M\{(\xi - 1)(3 - \xi)\} = \int_{-1}^{5} (x-1)(3-x)\frac{1}{6}dx = \frac{1}{6}\int_{-1}^{5}(-x^2 + 4x - 3)dx = -2 .$$

Упражнения

1. Дискретная случайная величина ξ имеет закон распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины $\eta = \sin\{\frac{\pi}{2}\xi\} + 1$.

2. Вероятность изготовления станком бракованной детали равна p. Переналадка станка происходит после выпуска пятой бракованной детали. Найти математическое ожидание числа изготовленных деталей до переналадки.

3. Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых событие А может появиться с вероятностью p. Рассматриваются две случайные величины: ξ – число появления события А, η – число появления противоположного события $\overline{\text{A}}$. Составить таблицу распределения системы; найти $M\xi$ и $M\eta$.

4. Случайная величина ξ подчиняется биномиальному закону распределения с параметрами (n, p). Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = e^{a\xi}$.

5. Сколько раз в среднем необходимо бросить игральную кость до первого появления пятерки?

6. Заданы ряды распределения независимых случайных величин ξ и η:

x_i	– 1	0	1
p_i	0,3	0,5	0,2

y_j	0	1
p_j	0,4	0,6

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = \xi^2\eta^3$.

7. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Вычислить математическое ожидание величины $\eta = 1/(1 + \xi)$.

8. По цели стрельба ведется до n-го попадания. Считая, что выстрелы производятся независимо друг от друга и вероятность попадания при каждом выстреле равна p, найти математическое ожидание расхода снарядов.

9. Случайная величина ξ имеет гамма-распределение с параметрами (λ, p), т.е. $p_\xi(x) = \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(p)$, λ, $p > 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

10. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x) = x + 0{,}5$ в интервале $(0, 1)$; вне этого интервала $p_\xi(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины $\eta = \xi^3$.

11. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x) = 0{,}5\sin x$ в интервале $(0, \pi)$; вне этого интервала $p_\xi(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\eta = \xi^2$.

12. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $p_\xi(x) = \cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $p_\xi(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $\eta = \xi^2$.

13. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x) = 0{,}5\cos x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, и $p_\xi(x) = 0$, $x \notin [-\pi/2, \pi/2]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \sin 2\xi$.

14. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x) = 0{,}5\cos x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, и $p_\xi(x) = 0$, $x \notin (-\pi/2, \pi/2)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины η = $|\sin\xi|$.

15. Случайная величина ξ распределена с постоянной плотностью в интервале (1, 2): $p_\xi(x) = 1$, $x \in (1, 2)$; $p_\xi(x) = 0$, $x \notin (1, 2)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 1/\xi$.

16. Плотность распределения случайной величины ξ задана выражением $p_\xi(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$, и $p_\xi(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = e^{-\xi^3}$.

17. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $p_\xi(x) = e^{-x}$, $x \ge 0$, и $p_\xi(x) = 0$, $x < 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 3\xi + 1$.

18. Величина ξ задана функцией распределения $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^4, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = 1/(\xi + 1)$.

19. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [0, 1]. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 4\xi^3$.

20. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [0, 1]. Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = \sin^2\pi\xi$.

21. Пусть ξ – случайная величина с плотностью распределения Коши, т.е. $p_\xi(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$. Вычислить математическое ожидание $\eta = \min\{|\xi|, 1\}$.

22. Величины ξ и η независимы. Известно, что $P\{\xi = 1\} = P\{\xi = 0\} = 0{,}5$, а случайная величина η имеет плотность распределения $p_\eta(x) = 2x$, $x \in [0, 1]$, и $p_\eta(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2\xi + 3\eta - 2$.

23. Величины ξ и η независимы. Известно, что $P\{\xi = 1\} = P\{\xi = 2\} = 0{,}5$, а случайная величина η имеет плотность распределения $p_\eta(x) = 2x$, $x \in [0, 1]$, и $p_\eta(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi - 3\eta + 2$.

24. Величины ξ и η независимы. Известно, что $P\{\xi = 1\} = P\{\xi = 3\} = 0{,}5$, а случайная величина η имеет плотность распределения $p_\eta(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$, и $p_\eta(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2\xi - 3\eta - 1$.

25. Величины ξ и η независимы. Известно, что $P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 3\} = 0{,}5$, а случайная величина η имеет плотность распределения $p_\eta(x) = 4x^3$, $x \in [0, 1], и $p_\eta(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi - 3\eta + 1$.

26. Имеются независимые случайные величины ξ и η. Величина ξ подчинена нормальному закону распределения с плотностью вероятности $p_\xi(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x+4)^2/50}$. Величина η равномерно распределена на отрезке $[0, 2]$. Найти математическое ожидание случайной величины $\mu = \eta^2 + \xi$.

27. Система двух случайных величин (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми: $y = x$, $y = 0$, $x = 2$. Найти плотность вероятности системы случайных величин (ξ, η); вычислить $M\xi$ и $M\eta$.

28. Плотность вероятности системы двух случайных величин (ξ, η) задана выражением $p_{\xi\eta}(x, y) = (2\sqrt{\pi})^{-1} e^{-(x+1)^2 - |y|}$. Найти математические ожидания и дисперсии одномерных случайных величин ξ и η.

29. Система двух случайных величин (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми: $y = -\dfrac{xb}{a}$, $y = 0$, $x = -a$, где постоянные $a > 0$, $b > 0$. Определить средние значения и ковариацию случайных величин ξ и η.

30. Система двух случайных величин (ξ, η) равномерно распределена в области, ограниченной прямыми: $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 6 - x$. Определить средние значения, дисперсии и ковариацию случайных величин ξ и η.

31. Система двух случайных величин (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми: $x = 0$, $y = 0$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ $(a > 0, b > 0)$. Определить средние значения и дисперсии случайных величин ξ и η.

32. Светящаяся точка, изображающая наблюдаемый объект на круглом экране радиолокатора, одинаково вероятно может занимать на экране любое положение. Диаметр экрана равен D. Найти математическое ожидание расстояния R от светящейся точки до центра экрана.

33. Диаметр круга x измерен приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая диаметр как случайную величину ξ, распределенную равномерно на отрезке $[a, b]$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

34. Ребро куба x измерено приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину ξ, распределенную равномерно на отрезке $[a, b]$, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

35. Правомерно ли следующее рассуждение: "От общежития до университета расстояние ровно 1 км, студент ходит в среднем со скоростью 5 км/ч, следовательно, в среднем на дорогу у него будет уходить 12 мин"?

36. Из партии в N изделий, в которой имеется $T = N\,p$ дефектных, произведен выбор без возвращения n изделий. Определить математическое ожидание и дисперсию числа извлеченных дефектных изделий.

37. Число космических частиц, попадающих на длинную площадку, есть случайная величина μ, подчиненная закону Пуассона с параметром a, каждая из частиц несет энергию ξ, зависящую от случая. Найти среднюю энергию ε, получаемую площадкой в единицу времени.

38. Плотность вероятности системы двух случайных величин (ξ, η) задана выражением $p_{\xi\eta}(x, y) = a \exp\{-(x+1)^2 - |y|\}$, где a – постоянная величина. Требуется: а) найти a; б) написать выражения для плотностей одномерных случайных величин ξ и η; в) установить, являются ли величины ξ и η зависимыми; г) вычислить математические ожидания величин ξ и η.

39. Система трех случайных величин (ξ, η, μ) подчинена закону равномерной плотности распределения внутри цилиндра, основанием которого является круг радиуса r с центром в начале координат, а образующая цилиндра равна h и параллельна оси Oz. Написать выражения для плотностей вероятности системы и отдельных случайных величин, входящих в систему. Вычислить математическое ожидание величины μ.

40. Докажите, что если случайная величина ξ имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, то $M\{|\xi|\} = \sigma\sqrt{2/\pi}$.

3. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

Производящей функцией случайной величины ξ, принимающей целочисленные неотрицательные значения, называется функция комплексной переменной z:

$$\Psi_\xi(z) = M\{z^\xi\} = \sum_{k=0}^{N} z^k P\{\xi = k\}, \;\; |z| \le 1, \;\; N \le \infty. \tag{4}$$

Пример 5. Найти производящую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Бернулли с параметром p.

Решение. Величина ξ дискретна и $P\{\xi = 1\} = p$, $P\{\xi = 0\} = 1 - p = q$. Тогда производящая функция определяется согласно выражению (4):

$$\Psi_\xi(z) = z^0\, P\{\xi = 0\} + z^1\, P\{\xi = 1\} = q + z\,p.$$

Упражнения

1. Производящая функция случайной величины ξ, принимающей целые неотрицательные значения, равна $\Psi_\xi(z)$. Найти производящие функции величин $\xi/2$, 2ξ, $\xi + 2$ и $\xi_1 + \xi_2$, где ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и ξ.

2. Производящая функция целочисленной случайной величины ξ равна $\Psi_\xi(z)$. Найти характеристическую функцию ξ.

3. Пусть ξ и η – случайные величины, причем ξ принимает значения 0 и 1 с вероятностями 1/2 каждое, а η – значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями 1/8, 1/4, 1/2 и 1/8 соответственно. Доказать, что не существует случайной величины ζ, не зависящей от ξ и такой, что $\xi + \zeta = \eta$.

4. Пусть ξ и η – случайные величины, причем ξ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями 1/2, 1/4, 1/4, а η – значения 0, 1, 2, 3, 4 с вероятностями 6/10, 1/10, 1/10, 1/10 и 1/10 соответственно. Доказать, что не существует случайной величины ζ, не зависящей от ξ и такой, что $\xi+\zeta=\eta$.

5. Найти производящую функцию случайной величины, имеющей биномиальный закон распределения с параметрами (n, p).

6. Пусть ξ и η – независимые случайные величины, причем $\xi + \eta$ принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями 1/3 каждое. Доказать, что одна из случайных величин ξ и η имеет вырожденное распределение. (Распределение случайной величины называется вырожденным, если $P\{\xi = a\} = 1$ для некоторого вещественного a).

7. Найти производящую функцию числа ξ_n успехов в n независимых испытаниях, если вероятность успеха в каждом испытании равна p. Используя этот результат, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ_n.

8. Найти производящую функцию случайной величины, имеющей геометрическое распределение с параметром p.

9. Найти распределение, которому соответствует следующая производящая функция $\Psi_\xi(z) = e^{\lambda(z - 1)}$.

10. Найти распределение вероятностей, которому соответствует следующая производящая функция $\Psi_\xi(z) = 1 + \dfrac{1-z}{z}\ln(1-z)$.

11. Найти распределение вероятностей, которому соответствует следующая производящая функция $\Psi_\xi(z) = \dfrac{1}{2(1-z/2)}$.

12. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы элементов за время t соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}9$. Найти производящую функцию случайной величины ξ – числа безотказно работающих элементов.

13. Из двух орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна $p_1 = 0{,}8$; для второго $p_2 = 0{,}9$. Найти производящую функцию случайной величины ξ – числа попаданий в цель.

14. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна $p_1 = 0{,}8$; для второго $p_2 = 0{,}85$; для третьего $p_3 = 0{,}9$. Найти производящую функцию величины ξ – числа попаданий в цель.

15. Четыре элемента вычислительного устройства работают независимо. Вероятность отказа первого элемента за время t равна $p_1 = 0{,}2$; для второго $p_2 = 0{,}25$; третьего $p_3 = 0{,}3$; четвертого $p_4 = 0{,}4$. Найти производящую функцию случайной величины ξ – числа элементов вычислительного устройства, которые отказали.

16. Из двух орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна $p_1 = 0{,}8$; для второго $p_2 = 0{,}9$. Найти производящую функцию случайной величины ξ – числа промахов.

17. Две батареи по три орудия каждая производят залп по цели. Цель будет поражена, если каждая из батарей даст не менее двух попаданий. Вероятности попадания в цель орудиями первой батареи равны 0,4; 0,5; 0,6, второй – 0,5; 0,6; 0,7. Найти производящую функцию случайной величины ξ – числа попаданий, поразивших цель при одном залпе из двух батарей.

18. Пусть $\{\eta_j\}$ – последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин с производящей функцией $P(z)$. Предположим, что N – случайная величина, принимающая значения 0, 1,… и не зависящая от случайной величины η_j. Пусть $q_k = P\{N = k\}$, $q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k z^k$. Найти производящую функцию случайной величины $\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_N$.

19. Случайная величина ν распределена по закону Пуассона с параметром λ и не зависит от результатов испытаний схемы Бернулли с вероятностью успеха p. Обозначим μ_ν число успехов в первых ν испытаниях схемы Бернулли. Найти математическое ожидание и производящую функцию случайной величины μ_ν.

20. Пусть τ – порядковый номер первого из испытаний схемы Бернулли, которое окончилось успехом. Вероятность успеха в каждом испытании равна p. Найти математическое ожидание, дисперсию и производящую функцию случайной величины τ.

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Характеристической функцией случайной величины ξ называется комплекснозначная функция действительной переменной t, задаваемая соотношением

$$f_\xi(t) = \mathrm{M}\{e^{it\xi}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x),$$

$t \in \mathrm{R}$, i – мнимая единица, $F_\xi(x)$ – функция распределения величины ξ.

Замечание. Для практических вычислений удобны формулы:

$$f_\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{itx_k} \mathrm{P}\{\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^{N} e^{itx_k} p_k, \tag{5}$$

если $\xi \in \{x_1, \ldots, x_N\}$ – дискретная случайная величина, $N \le \infty$;

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x) dx,$$

если ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p_\xi(x) = dF_\xi(x)/dx$.

Характеристическая функция случайной величины ξ с плотностью распределения $p_\xi(x)$ есть преобразование Фурье от плотности ее распределения вероятностей; плотность $p_\xi(x)$ выражается через $f_\xi(t)$ обратным преобразованием Фурье:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f_\xi(t) dt, \quad \text{если} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} | f_\xi(t) | \, dt < +\infty.$$

Приведем некоторые свойства характеристической функции.

1. Характеристическая функция $f_\xi(t)$ ограничена на R:

$$|f_\xi(t)| \le f_\xi(0) = 1, \ \forall\ t \in \mathrm{R}.$$

2. Характеристическая функция $f_\xi(t)$ равномерно непрерывна на R.

3. $\overline{f_\xi(t)} = f_\xi(-t) = f_{-\xi}(t)$, $\forall\ t \in \mathrm{R}$. Следовательно, если характеристическая функция действительна, то она четна.

4. При линейном преобразовании $\eta = a + b\xi$, где a, b – произвольные постоянные, характеристическая функция изменяется следующим образом:

$$f_\eta(t) = f_{a+b\xi}(t) = e^{ita} f_\xi(bt).$$

5. Характеристическая функция суммы независимых в совокупности случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ равна произведению их характеристических функций: $f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t)$, $t \in \mathrm{R}$.

6. Пусть для некоторого натурального k существует ограниченный начальный момент k - го порядка: $\mathrm{M}\{|\xi|^k\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^k dF_\xi(x) < +\infty$. Тогда характеристическая функция $f_\xi(t)$ случайной величины ξ непрерывно дифференцируема k раз, причем выполняется следующее соотношение:

$$f_\xi^{(k)}(0) = i^k \mathrm{M}\{\xi^k\},$$

i – мнимая единица.

Теорема 1. Функция распределения $F_\xi(x)$, $x \in \mathrm{R}$, и характеристическая функция $f_\xi(t)$, $t \in \mathrm{R}$, находятся во взаимно однозначном соответствии.

Следствие. Если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей с плотностью распределения $p_\xi(x)$, $x \in \mathrm{R}$, то плотность распределения вероятностей $p_\xi(x)$ и характеристическая функция $f_\xi(t)$, $t \in \mathrm{R}$, находятся во взаимно однозначном соответствии.

Пример 6. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Бернулли с параметром p.

Решение. Величина ξ дискретна и $\mathrm{P}\{\xi = 1\} = p$, $\mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1 - p = q$. Тогда характеристическая функция определяется согласно выражению (5):

$$f_\xi(t) = e^{it\cdot 0}\,\mathrm{P}\{\xi = 0\} + e^{it\cdot 1}\,\mathrm{P}\{\xi = 1\} = q + e^{it} p.$$

Упражнения

1. Найти характеристическую функцию случайной величины, принимающей с одинаковой вероятностью два значения: $\pm a$.

2. Найти характеристическую функцию и по ней математическое ожидание дискретной случайной величины ξ, подчиненной закону распределения Паскаля $\mathrm{P}\{\xi = m\} = a^m/(1+a)^{m+1}$, $a > 0$, $m = 0, 1, \ldots$.

3. Найти характеристическую функцию случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром λ.

4. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $p_\xi(x) = 0{,}5e^{-|x|}$. Определить характеристическую функцию, а по ней найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

5. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение с плотностью $p_\xi(x) = \dfrac{a - |x|}{a^2}$, $|x| < a$; $p_\xi(x) = 0$, $|x| \geq a$.

6. Найти характеристическую функцию случайной величины, имеющей гамма-распределение с параметрами (a, λ).

7. Найти характеристическую функцию случайной величины, имеющей геометрическое распределение с параметром p.

8. Найти характеристическую функцию, а по ней математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[-a, a]$.

9. Найти характеристическую функцию, а по ней математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$.

10. В партии, состоящей из n изделий, m изделий дефектных. Для проверки качества произведена бесповторная выборка r изделий ($m < r < n - m$). Найти характеристическую функцию числа дефектных изделий содержащихся в выборке.

11. Дана плотность распределения случайной величины ξ: $p_\xi(x) = -2x$, $x \in [-1, 0]$; $p_\xi(x) = 0$, $x \notin [-1, 0]$. Найти характеристическую функцию ξ.

12. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина ξ. Найти ее характеристическую функцию, если $\xi(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & 0 \le \omega \le 1/2, \\ 2\omega - 1, & 1/2 < \omega \le 1. \end{cases}$

13. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина ξ. Найти ее характеристическую функцию, если $\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega \le 1/3, \\ 0, & 1/3 < \omega < 2/3, \\ 1, & 2/3 \le \omega \le 1. \end{cases}$

14. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, определена случайная величина ξ. Найти ее характеристическую функцию, если $\xi(\omega) = \ln \omega$, $\xi(0) = 0$.

15. Пусть $f_\xi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Докажите, что существует случайная величина η, характеристическая функция которой равна $e^{-it} f_\xi(t)$. Как связаны между собой математическое ожидание и дисперсия величин ξ и η?

16. Пусть ξ и η – независимые случайные величины; ξ принимает три возможных значения: 0, 1, 2 с вероятностями 1/6, 1/3, 1/2, а η – четыре возможных значения: 0, 1, 2, 3 с вероятностями 1/8, 1/4, 3/8, 1/4. Определить характеристическую функцию случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

17. Найти характеристическую функцию следующего закона распределения: случайная величина принимает значения $0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_n$, … (конечное или счетное множество) с вероятностями p_0, $p_n = p_{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$

18. Найти характеристическую функцию и плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$, где ξ и η – независимые случайные величины, распределенные по показательному закону с параметром a.

19. Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Найти плотность распределения величины $\xi - \eta$.

20. Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Найти плотность распределения величины $2\xi + \eta$.

21. Случайные величины ξ и η независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $p = 1/4$. Найти распределение величины $2\xi + \eta$.

22. Случайные величины ξ и η независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ соответственно. Найти $\mathrm{P}\{\xi + \eta = k\}$, $k = 0, 1, \ldots$

23. Пользуясь выражением $f_\xi(t) = e^{itm - t^2\sigma^2/2}$ для характеристической функции закона нормального распределения с параметрами $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, найти характеристические функции для величин a) $\eta = a\xi + b$; b) $\zeta = \xi - a$.

24. Характеристическая функция случайной величины ξ задана в виде $f_\xi(t) = e^{-a|t|}, a > 0$. Определить плотность вероятности величины ξ.

25. Найти характеристическую функцию числа появлений события A при n независимых испытаниях, если вероятность появления события A от испытания к испытанию меняется и для k-го испытания равна p_k, $k = \overline{1, n}$.

26. Найти характеристическую функцию суммарного числа выпавших очков при 100 бросаниях игральной кости.

27. Найти характеристическую функцию суммарного числа выпавших гербов при 10 бросаниях монеты.

28. Найти характеристическую функцию суммарного числа выпавших шестерок при 20 бросаниях игральной кости.

29. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ с характеристической функцией $f_\xi(t) = \dfrac{\cos t}{1 + t^2}$.

30. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ с характеристической функцией $f_\xi(t) = e^{-t^2} \cos^{10} t$.

31. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ с характеристической функцией $f_\xi(t) = \dfrac{4e^{it}\cos t}{4+t^2}$.

32. Случайные величины ξ_1, ξ_2,… – независимы и имеют показательное распределение с параметром a. Найти $M\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}^k$ при k = 1, 2 и произвольном n = 1, 2,…

33. Пользуясь выражением $f(t) = e^{-t^2\sigma^2/2}$ для характеристической функции центрированной случайной величины, подчиняющейся закону нормального распределения, определить все центральные моменты.

34. Убедиться, что $f(t) = \dfrac{3+\cos t}{4}$ является характеристической функцией. Найти закон распределения, соответствующий этой характеристической функции.

35. Покажите, что $f(t) = (1+3\cos t)/4$ является характеристической функцией. Найти закон распределения, соответствующий этой характеристической функции.

36. Дана характеристическая функция $f(t) = \dfrac{1}{2e^{-it}-1}$. Показать, что она соответствует случайной величине дискретного типа. Найти ряд распределения этой случайной величины.

37. Выяснить, является ли данная функция характеристической: $f(t) = \dfrac{1}{2}e^{it} + \dfrac{1}{4}e^{2it} + \dfrac{1}{2}e^{3it}$.

38. Какое распределение вероятностей имеет сумма $\xi + \eta$ независимых случайных величин ξ и η, если одна из них распределена равномерно на отрезке [– 1, 1], а другая – равномерно на двухэлементном множестве {– 1, 1}?

39. Доказать, что функция $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, |t|<1, \\ 0, |t|\geq 1, \end{cases}$ не является характеристической.

40. Доказать, что функция $e^{-t^2(\pi - \mathrm{arctg}\, t)}$ не является характеристической.

41. Докажите: если хотя бы один из коэффициентов $b_1,\ldots,b_n$ отличен от нуля, то функция $\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)$ не относится к характеристической.

42. Докажите, что при любом $0 < \alpha \le 1$ функция $f(t) = \dfrac{1}{1+|t|^{\alpha}}$ является характеристической.

43. Пусть ξ_1, ξ_2, …– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, ν – случайная величина, не зависящая от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и принимающая целые положительные значения. $\mathrm{P}\{\nu = k\} = p_k$. Пусть $\psi(t)$ – характеристическая функция ξ_1. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi_1 + \ldots + \xi_\nu$.

44. Случайные величины ξ_1, ξ_2 и η независимы; характеристические функции величин ξ_1 и ξ_2 равны $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно. Известно, что $\mathrm{P}\{\eta = 1\} = 1 - \mathrm{P}\{\eta = 0\} = p$. Найти характеристическую функцию случайной величина $\nu = \eta\xi_1 + (1 - \eta)\xi_2$.

45. Найти характеристическую функцию "треугольного" распределения с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} \alpha(1-\alpha\,|x|), & |x| \le 1/\alpha, \\ 0, & |x| > 1/\alpha. \end{cases}$

5. СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Случайной последовательностью $\xi_n = \xi_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, называется счетное параметрическое семейство случайных величин $\xi_1 = \xi_1(\omega)$, $\xi_2 = \xi_2(\omega), \ldots$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

В теории вероятностей существует четыре основных вида сходимости.

Последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, … *сходится* к случайной величине ξ *с вероятностью* 1 (*почти наверное*), если

$$\mathrm{P}\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1.$$

Принято этот вид сходимости кратко обозначать $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}=1}{\to}} \xi$ либо $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} \xi$.

Теорема 2. Если для $\forall\ \varepsilon > 0$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\} < +\infty$, то $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}=1}{\to}} \xi$.

Последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, … *сходится по вероятности* к случайной величине ξ, и этот факт принято обозначать $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} \xi$, если для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Последовательность ξ_1, ξ_2, … *сходится в среднем порядка* r $(0 < r < +\infty)$ к случайной величине ξ, и принято кратко обозначать $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_r} \xi$, если ограничены абсолютные моменты порядка r : $\mathrm{M}\{|\xi_n|^r\} < +\infty$, $\mathrm{M}\{|\xi|^r\} < +\infty$, и выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}\{|\xi_n - \xi|^r\} = 0.$$

Если $r = 2$, то L_2 - сходимость называется *сходимостью в среднем квадратическом* и обозначается $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{ср.\ кв.} \xi$ либо $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\,\xi_n = \xi$.

Пусть ξ_1, ξ_2, … – случайная последовательность, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, ξ – случайная величина, которая может быть определена и на другом вероятностном пространстве. Пусть далее $F_{\xi_n}(x), F_{\xi}(x), x \in \mathrm{R},$ – соответствующие функции распределения, а $C(F_\xi) \subseteq \mathrm{R}$ – множество точек непрерывности $F_\xi(x)$. Говорят, что случайная последовательность $\{\xi_n\}$ *сходится* к случайной величине ξ *по распределению*, и принято кратко обозначать это: $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} \xi$, если имеет место сходимость последовательности функций распределения

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)\,,\ \ x \in C(F_\xi).$$

Справедлива схема соотношения между видами сходимости.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \boxed{\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}=1} \xi} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
\boxed{\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_r} \xi} & \to & \boxed{\begin{array}{c}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{Lq} \xi \\ (q < r)\end{array}} & \to & \boxed{\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi} & \to & \boxed{\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} \xi}
\end{array}$$

Теорема 3. Если случайная последовательность ξ_1, ξ_2, … сходится в смысле каких-нибудь двух из трех видов сходимости: по вероятности, почти наверное, в среднем порядка r, то предельные случайные величины с вероятностью 1 совпадают.

Пример 7. Случайная последовательность ξ_1, ξ_2, … задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ – борелевская σ-алгебра подмножеств из Ω, P – мера Лебега,

$$\xi_n = \xi_n(\omega) = \begin{cases} n^a, & 0 \le \omega \le 1/n, \\ 0, & 1/n < \omega \le 1, \end{cases}$$

$a > 0$ – некоторый параметр. Исследовать сходимость в среднем порядка r последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ к случайной величине $\xi = 0$.

Решение. Вычислим $\mathrm{M}\{\xi_n\}^r = n^{ar} \cdot (\frac{1}{n} - 0) + 0^r \cdot (1 - \frac{1}{n}) = n^{ar-1}$.

Если $a < \frac{1}{r}$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_r} 0$. Если $a \ge \frac{1}{r}$, то L_r - сходимость отсутствует.

Упражнения

1. Пусть множество элементарных событий $\Omega = [0, 1]$. P – мера Лебега. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеет вид: $\xi_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in (1/n, 1], \\ n, & \omega \in [0, 1/n]. \end{cases}$

Проверить три вида сходимости: почти наверное, по вероятности, в среднем порядка p.

2. Последовательность $\xi_n^{(i)}(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ – борелевская σ-алгебра, P – мера Лебега,

$$\xi_n^{(i)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [(i-1)/n,\ i/n], \\ 0, & \omega \notin [(i-1)/n,\ i/n], \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказать сходимость почти наверное, по вероятности, в среднем порядка p.

3. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ. Пусть $g(x)$ – некоторая ограниченная, непрерывная функция. Что можно сказать о сходимости последовательности $\eta_n = g(\xi_n)$?

4. Пусть множество элементарных событий $\Omega = [0, 1]$. P – мера Лебега. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеет вид: $\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n, & \omega \in [0, 1/n], \\ 0, & \omega > 1/n. \end{cases}$

Проверить три вида сходимости: почти наверное, по вероятности, в среднем порядка p.

5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, причем ξ_n принимает значения n^a и 0 с вероятностями $\frac{1}{n}$ и $1 - \frac{1}{n}$ соответственно, $n = 1, 2, \ldots$ Исследовать сходимость последовательности $\{\xi_n\}$ по вероятности и в среднем порядка r в зависимости от выбора a и r.

6. Пусть $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \xi$ и $\eta_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \eta$. Доказать, что для любых действительных чисел a, b и c выполняется $a\xi_n + b\eta_n + c \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} a\xi + b\eta + c$.

7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ – две последовательности положительных случайных величин. Могут ли существовать положительные числа a, b, такие, что $\left(\frac{\xi_n}{\eta_n}\right)^a \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$ и $\left(\frac{\xi_n}{\eta_n}\right)^b \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \infty$.

8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, $\eta_1, \eta_2, \ldots$ – последовательность положительных целочисленных случайных величин, таких, что η_n не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ при любом n. Докажите, что если $\eta_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \infty$ и $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \xi$, то $\xi_{\eta_n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \xi$.

9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, $\eta_1, \eta_2, \ldots$ – последовательность положительных целочисленных случайных величин, таких, что η_n не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ при любом n. Докажите, что если $\eta_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \infty$ и $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} \xi$, то $\xi_{\eta_n} \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} \xi$.

10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин с конечными дисперсиями. Положим $a_n = M\xi_n$, $D\xi_n = \sigma_n^2$. Доказать, что если $a_n \to \infty$ и $\sigma_n^2 = o(a_n{}^2)$ при $n \to \infty$, то $\frac{\xi_n}{a_n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 1$.

11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями, $\eta_n = \xi_1 \times \ldots \times \xi_n$. Доказать, что если $M|\xi_1| = M|\xi_2| = \ldots < 1$, то $\eta_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$.

12. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, $\eta_n = \xi_1 \times \ldots \times \xi_n$. Доказать, что если для некоторого $a > 0$ $M|\xi_1|^a = M|\xi_2|^a = \ldots < 1$, то $n^b\eta_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$ для любого вещественного b.

13. Доказать, что если $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \xi$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$, такое, что при любом натуральном n $P\{|\xi_n| \geq A\} < \varepsilon$.

14. Докажите, что если $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} a \neq 0$, то $\frac{1}{\xi_n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \frac{1}{a}$, $a \in R$.

15. Последовательность ξ_1, $\xi_2,\ldots$ такова, что для всякого $n \in \mathrm{N}$ принимает значения n^{α} и 0 с вероятностями $\dfrac{1}{n^{\beta}}$ и $1-\dfrac{1}{n^{\beta}}$ соответственно, где α и β – положительные числа. Доказать, что $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0$, а при $\beta > 1$ $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}=1}{\to}} 0$.

16. Докажите, что если ξ_1, $\xi_2,\ldots$ – одинаково распределенные случайные величины, то $\dfrac{\xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0$.

17. Доказать, что если $\xi_n - \eta_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0$ и $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} \xi$, то $\eta_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} \xi$.

18. Пусть ξ_1, $\xi_2,\ldots$ и η_1, $\eta_2,\ldots$ – две последовательности случайных величин, такие, что для любого $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}\{|\,\xi_n - \eta_n| \ge \varepsilon\} < +\infty$. Доказать, что если $\eta_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}=1}{\to}} a$, то $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}=1}{\to}} a$.

19. Пусть последовательность случайных величин ξ_1, $\xi_2,\ldots$ сходится в среднем квадратическом к случайной величине ξ, причем $\mathrm{M}|\xi_n| < +\infty$, $n = 1, 2,\ldots$ Доказать, что $\mathrm{M}|\xi| < +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}\xi_n = \mathrm{M}\xi$.

20. Пусть случайная последовательность $\xi_n = -\xi$, $n = 1, 2,\ldots$, причем $\mathrm{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = 0\} = \mathrm{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = 2\} = \dfrac{1}{2}$. Имеет ли место сходимость последовательности $\{\xi_n\}$ к случайной величине ξ в среднем порядка r?

6. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть задана последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, …, имеющих конечное математическое ожидание $\mathrm{M}\xi_k < +\infty$, $k = \overline{1,n}$, $n \in \mathrm{N} = \{1, 2, 3,\ldots\}$.

Последовательность ξ_1, ξ_2, … подчиняется *закону больших чисел* (*ЗБЧ*), если $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0$.

Теорема 4 (достаточное условие Маркова ЗБЧ). Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ определена последовательность как угодно зависимых случайных величин $\xi_k = \xi_k(\omega)$, $k = 1, 2,\ldots$, имеющих конечные математические ожидания и дисперсии. Если выполняется условие $\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то к последовательности $\{\xi_k\}$ применим ЗБЧ.

Теорема 5 (достаточное условие Чебышева ЗБЧ). Если $\xi_k = \xi_k(\omega)$, $k = 1, 2,\ldots$, – последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные математические ожидания и ограниченные дисперсии $\mathrm{D}\xi_k \le c < +\infty$ для любого k, то к последовательности $\{\xi_k\}$ применим ЗБЧ.

Теорема 6 (Бернулли). Если $\xi_k = \xi_k(\omega)$, $k = 1, 2,\ldots$, – последовательность одинаково распределенных попарно независимых случайных величин Бернулли, то ЗБЧ выполняется в виде $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \overset{\mathrm{P}}{\underset{n\to\infty}{\to}} p$.

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ подчиняется *усиленному закону больших чисел* (*УЗБЧ*), если $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k) \overset{\mathrm{P}=1}{\underset{n\to\infty}{\to}} 0$.

Теорема 7 (достаточное условие Колмогорова УЗБЧ). Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ определена последовательность независимых в совокупности случайных величин $\xi_k = \xi_k(\omega)$, $k = 1, 2,\ldots$, имеющих конечные математические ожидания $\mathrm{M}\xi_k = a_k$ и дисперсии $\mathrm{D}\xi_k = \sigma_k^2$. Если сходится ряд Колмогорова $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sigma_k^2}{k^2} < +\infty$, то к последовательности $\{\xi_k\}$ применим УЗБЧ.

Теорема 8 (Колмогорова, УЗБЧ для н.о.р. СВ). Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ определена последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин $\xi_k = \xi_k(\omega)$, $k = 1, 2,\ldots$ Для того чтобы выполнялся УЗБЧ в виде $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \overset{\mathrm{P}=1}{\underset{n\to\infty}{\to}} a$, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\mathrm{M}\xi_1 < +\infty$, причем $\mathrm{M}\xi_1 = a$.

Замечание. Из выполнения УЗБЧ следует выполнение ЗБЧ.

Пример 8. Применим ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ и УЗБЧ, если ряд распределения ξ_n имеет вид

x_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
p_n	$1/(2n)$	$1 - 1/n$	$1/(2n)$

Решение. Проверим подчинение последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ по теореме Маркова. Вычислим два первых начальных момента ξ_n:

$$\mathrm{M}\xi_n = \frac{\sqrt{n}}{2n} + 0\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{\sqrt{n}}{2n} = 0. \quad \mathrm{M}\xi^2{}_n = \frac{n}{2n} + 0\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{n}{2n} = 1.$$

Так как случайные величины независимы, то

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k\} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}\xi_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, учитывая утверждение теоремы 4, последовательность $\{\xi_n\}$ подчиняется ЗБЧ. Заметим, что выполнено достаточное условие Чебышева ЗБЧ (теорема 5).

Поскольку $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{D}\xi_k}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty$, то в силу теоремы 7 последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ подчиняется УЗБЧ.

Упражнения

1. Применима ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ теорема Маркова (Чебышева), если ряд распределения ξ_n имеет вид

x_n	$-\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$
p_n	1/2	1/2

2. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ задана законом распределения

x_n	$-n$	$n+1$
p_n	$(n+1)/(2n+1)$	$n/(2n+1)$

Применима ли к данной последовательности теорема Чебышева?

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения 2^n и -2^n с вероятностями 1/2. Проверить, выполняются ли условия теоремы Маркова и Чебышева для ЗБЧ.

4. Применим ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ, если ряд распределения ξ_n имеет вид

x_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
p_n	1/2	1/2

5. Применим ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ, если ряд распределения ξ_n имеет вид

x_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$

p_n	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

6. Применим ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ, если ряд распределения ξ_n имеет вид

x_n	$-2\sqrt{n}$	0	$2\sqrt{n}$
p_n	$1/(2n)$	$1-1/n$	$1/(2n)$

7. Применим ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ УЗБЧ, если ряд распределения ξ_n имеет вид

x_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p_n	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения $-n$, 0, n с вероятностями 2^{-n}, $1-2^{-n+1}$, 2^{-n} соответственно. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, принимающих каждая по четыре значения: ± 1 с вероятностями $(1-1/2^n)/2$ и $\pm 2^{n/2}$ с вероятностями 2^{-n-1}. Доказать, что эта последовательность подчиняется как обычному, так и усиленному ЗБЧ.

10. Применима ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ теорема Маркова, если ряд распределения величин ξ_n имеет вид

x_n	$-5n$	0	$5n$
p_n	$1/2^n$	$1-1/2^{n-1}$	$1/2^n$

11. Выяснить, применима ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ теорема Чебышева, если ряд распределения ξ_n имеет вид

x_n	$-3n$	0	$3n$
p_n	$(2^n n^2)^{-1}$	$1-(2^{n-1} n^2)^{-1}$	$(2^n n^2)^{-1}$

12. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин такая, что $P\{\xi_n = -a_n\} = P\{\xi_n = a_n\} = \dfrac{1}{2}$, где $a_n = \sqrt{n}$, если n – точный квадрат; $a_n = 2^{-n}$ – в остальных случаях. Применимы ли к данной последовательности ЗБЧ и УЗБЧ?

13. Докажите, что для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ УЗБЧ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется ЗБЧ. Ряд распределения ξ_n имеет вид

x_n	$-n^{\alpha}$	n^{α}
p_n	1/2	1/2

14. Пусть ξ_1, ξ_2, … – последовательность некоррелированных случайных величин, т.е. $\mathrm{cov}\{\xi_i, \xi_j\} = 0$, $i \neq j$. Дисперсия $\mathrm{D}\xi_n \le C = \mathrm{const}$. Подчиняется ли эта последовательность ЗБЧ и УЗБЧ?

15. Пусть ξ_1, ξ_2, … – последовательность случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями, причем $\mathrm{cov}\{\xi_i, \xi_j\} \le 0$, $i \neq j$. Доказать, что к этой последовательности применим ЗБЧ.

16. Пусть ξ_1, ξ_2, … – последовательность случайных величин с конечными дисперсиями и пусть коэффициент корреляции величин ξ_i и ξ_j не превосходит $g(|j-i|)$, где $g(k) \ge 0$. Доказать, что если

$$[g(0) + \ldots + g(n-1)][\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2] = o(n^2) \text{ при } n \to \infty,$$

то к последовательности $\{\xi_n\}$ применим ЗБЧ.

17. Пусть ξ_1, ξ_2, … – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, a_1, a_2,… – равномерно ограниченная последовательность неотрицательных чисел. Можно ли утверждать, что если ЗБЧ выполняется для ξ_n, $n \in \mathrm{N}$, то он выполняется и для η_n, где $\eta_n = a_n\xi_n$?

18. Пусть ξ_1, ξ_2, … – последовательность случайных величин такая, что ξ_n принимает значения $-n$, $-(n-1)$, …, -1, 0, 1, …, $n-1$, n, причем

$$P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \ldots + \frac{1}{n^3}\right); \quad P\{|\xi_n| = n\} = \frac{1}{3n^3}.$$

Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

19. Пусть ξ_1, ξ_2, … – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием a, $\eta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$. Доказать, что к последовательности $\{\eta_n\}$ применим УЗБЧ.

20. Пусть ξ_1, ξ_2, … – последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[a, b]$ случайных величин. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

21. Случайная величина ξ_n имеет "треугольное" распределение, т.е. ее плотность

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a_n,\ x > a_n, \\ (a_n + x)/a_n^2, & -a_n < x \le 0, \\ (a_n - x)/a_n^2, & 0 < x \le a_n, \end{cases} \qquad \text{причем } a_n = n^{\delta}, \delta < 1/2.$$

Применим ли к последовательности независимых величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ?

22. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ образована независимыми случайными величинами, имеющими нормальное распределение с $\mathrm{M}\xi_k = 0$ и дисперсией

$D\xi_k = Ck^a$, $C > 0$, $a \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Описать множество тех значений a, при которых последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяет ЗБЧ.

23. Случайные величины ξ_n, $n \in \mathrm{N}$, – независимы и равномерно распределены на отрезках $[a_n, b_n]$ соответственно, причем $b_n - a_n = b_{n-1} - a_{n-1} + \dfrac{c}{n^{0,5+\alpha}}$, где c, α – положительные постоянные. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

24. Применим ли к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ЗБЧ, если $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = n^a$, где $n \in \mathrm{N}$, постоянная $a < 1$?

25. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин с $D\xi_n = n^{3/4} + n^{1/2}$. Удовлетворяет ли эта последовательность ЗБЧ?

26. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих распределение $P\{\xi_n = n\} = 1/n^2$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - 1/n^2$. Удовлетворяет ли указанная последовательность ЗБЧ?

27. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин с плотностью $p(x) = \begin{cases} n^{-1/4}, x \in [0, n^{1/4}], \\ 0, x \notin [0, n^{1/4}]. \end{cases}$ Удовлетворяет ли УЗБЧ указанная последовательность?

28. Пусть ξ_n, $n \in \mathrm{N}$, – последовательность независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону $N(0, \sqrt{n}\,)$. Удовлетворяет ли ЗБЧ последовательность $\eta_n = \xi_n - 2\xi_{n+1}$?

29. Пусть ξ_n, $n \in \mathrm{N}$, – последовательность независимых случайных величин, причем $P\{\xi_n = \pm\ n^{0,5(1-1/\varphi(n))}\} = 0,5$, где неограниченно возрастающая функция $\varphi(n) = o(\ln n)$, т.е. $\dfrac{\varphi(n)}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Применим ли к этой последовательности ЗБЧ?

30. Докажите, что если для каждой из последовательностей $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ ЗБЧ выполняется, то он выполняется и для перемежающейся последовательности $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3, \ldots$

7. НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

Теорема 9. Если $y = g(x) \geq 0$ – неотрицательная неубывающая борелевская функция, определенная на интервале $[0, +\infty)$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ и любой случайной величины ξ справедливо:

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{g(|\xi|)\}}{g(\varepsilon)}.$$

Следствие. Для любой случайной величины ξ, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, имеют место неравенства:

$$\mathrm{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{M}\{|\xi|\}}{\varepsilon}, \qquad \mathrm{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{M}\xi^2}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 10 (неравенство Чебышева относительно дисперсии). Для любой случайной величины ξ, имеющей конечные математическое ожидание $\mathrm{M}\xi$ и дисперсию $\mathrm{D}\xi$, и $\forall\ \varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\mathrm{P}\{|\xi - \mathrm{M}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}. \qquad (6)$$

Отметим, что неравенство Чебышева (6) можно записать в другой форме:

$$\mathrm{P}\{|\xi - \mathrm{M}\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

В частности, для случайной величины ξ, имеющей биномиальный закон распределения с математическим ожиданием $\mathrm{M}\xi = np$ и дисперсией $\mathrm{D}\xi = npq$, $q = 1 - p$, оно принимает вид

$$\mathrm{P}\{|\xi - np| \geq \varepsilon\} \leq \frac{npq}{\varepsilon^2}.$$

Пример 9. Дискретная случайная величина ξ задана рядом распределения

x_n	0,3	0,6
p_n	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|\xi - \mathrm{M}\xi| < 0{,}2$.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию величины ξ:

$$\mathrm{M}\xi = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}54;$$

$$\mathrm{D}\xi = 0{,}3^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}8 - 0{,}54^2 = 0{,}0144.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме: $\mathrm{P}\{|\xi - \mathrm{M}\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \dfrac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}$.

Подставляя $\mathrm{M}\xi = 0{,}54$; $\mathrm{D}\xi = 0{,}0144$; $\varepsilon = 0{,}2$, окончательно получаем

$$\mathrm{P}\{|\xi - 0{,}54| < 0{,}2\} \geq 1 - 0{,}0144/0{,}04 = 0{,}64.$$

Упражнения

1. Средний вес клубня картофеля равен 120 г. Оценить вероятность того, что наугад взятый клубень картофеля весит менее 360 г.

2. Оценить вероятность того, что при 3600 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений шести очков будет не меньше 900.

3. Средний расход воды в населенном пункте составляет 50 000 л воды в день. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте реальный дневной расход воды не превышает утроенного среднего расхода.

4. Случайная величина ξ имеет дисперсию $D\xi = 0{,}001$. Оценить вероятность того, что случайная величина ξ отличается от математического ожидания $M\xi$ не менее чем на 0,1.

5. Случайная величина ξ имеет дисперсию $D\xi = 0{,}004$. Оценить вероятность того, что величина ξ отличается от математического ожидания $M\xi$ не менее чем на 0,2.

6. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших окажется от 700 включительно до 800.

7. Вероятность производства нестандартной детали в некоторых технологических условиях равна 0,1. Оценить вероятность того, что число нестандартных деталей среди 10 000 будет заключено в границах от 950 включительно до 1050.

8. Вероятность наступления некоторого события А в каждом из 1500 испытаний равна 0,2. Оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений события А от математического ожидания будет не менее 40.

9. В рассматриваемом технологическом процессе в среднем 75% изделий имеет допуск $\pm$ 5%. Оценить вероятность того, что среди 2000 изделий к допуску $\pm$ 5% относится от 1450 включительно до 1550 изделий.

10. Известно, что 75% всей продукции, производимой заводом, высшего сорта. Оценить вероятность того, что число изделий высшего сорта среди 100 000 изготовленных будет отличаться от математического ожидания этого числа менее чем на 1000 шт.

11. Для определения средней продолжительности работы радиолампы из партии выбирают наугад 150 шт. Оценить снизу вероятность того, что средняя продолжительность работы 150 отобранных радиоламп отличается от средней продолжительности работы радиоламп всей партии по абсолютной величине меньше чем на 5 часов, если известно, что среднеквадратическое отклонение продолжительности работы ламп не превышает 6 часов.

12. Суточный расход воды в населенном пункте является случайной величиной, среднеквадратическое отклонение которой равно 10 000 л. Оценить вероятность того, что расход воды в этом населенном пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине не менее чем на 25 000 л.

13. Оценить вероятность того, что в течение ближайшего дня потребность в воде в населенном пункте превысит или будет равной 150 000 л, если среднесуточная потребность в ней составляет 50 000 л.

14. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года в данной местности осадков составляет 60 см. Оценить вероятность того, что в этой местности осадков выпадает не менее 180 см.

15. Среднее число солнечных дней для данной местности равно 90. Оценить вероятность того, что в течение года в этой местности будет менее 240 солнечных дней.

16. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 12000 кВт·ч. Оценить вероятность того, что потребление электроэнергии в этом населенном пункте в течение данных суток будет равным или превзойдет 50 000 кВт·ч.

17. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20000 кВт·ч, а среднеквадратичное отклонение – 200 кВт·ч. Какого потребление электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96?

18. При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 15 штук из 100 оказывается с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 400 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли менее чем на 0,05.

19. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой равно 50 мм. Среднеквадратическое отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины детали от ее среднего значения по абсолютной величине будет менее 0,4 мм.

20. При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 15 штук из 100 оказывается с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 400 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли менее чем на 0,02.

21. Определить необходимое число опытов, которое нужно провести, чтобы отклонение частоты появления события А от вероятности его появления в отдельном опыте, равной 0,75, было менее по абсолютной величине 0,05 с вероятностью 0,96.

22. Вероятность изготовления нестандартной радиолампы равна 0,04. Какое наименьшее число радиоламп следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,88 можно было утверждать, что доля нестандартных радиоламп будет отличаться от вероятности изготовления нестандартной лампы по абсолютной величине менее чем на 0,02?

23. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно 16 км/ч. Оценить вероятность того, что в этом пункте скорость ветра (при одном наблюдении) будет менее чем 80 км/ч.

24. Случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M\xi = 1$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma_\xi = 0{,}2$. Оценить вероятность неравенства $0{,}5 < \xi < 1{,}5$.

25. Среднеквадратическое отклонение ошибки измерения курса самолета $\sigma = 2$ градуса. Считая математическое ожидание ошибки измерения равным нулю, оценить вероятность того, что ошибка при данном измерении курса самолета будет не менее 5 градусов.

26. Математическое ожидание скорости ветра на данной высоте равно 25 км/ч, среднеквадратическое отклонение равно 4,5 км/ч. Какие скорости ветра можно ожидать на этой высоте с вероятностью, не меньшей 0,9?

27. Оценить вероятность того, что частота появления герба при 100 бросаниях монеты отклонится от вероятности менее чем на 0,1.

28. Вероятность появления события А в одном опыте равна 0,5. Можно ли с вероятностью, большей 0,97, утверждать, что число появлений события А в 1000 независимых опытах будет в пределах от 400 включительно до 600?

29. Глубина моря измеряется прибором, не имеющим систематической ошибки. Среднеквадратическое отклонение измерений не превосходит 15 м. Сколько нужно сделать независимых измерений, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a (глубины моря) по модулю меньше, чем на 5 м?

30. Вероятность наличия опечатки на одной странице рукописи равна 0,2. Оценить вероятность того, что в рукописи, содержащей 400 страниц, частость появления опечатки отличается от соответствующей вероятности по модулю меньше, чем 0,05.

31. Оценить вероятность того, что при бросании 10 игральных костей сумма очков отклонится от математического ожидания меньше, чем на 8.

32. Стрелок попадает при выстреле в мишень в десятку с вероятностью 0,5, в девятку – 0,3; в восьмерку – 0,1; в семерку – 0,1. Стрелок сделал 100 выстрелов. Оценить вероятность того, что он набрал не менее 940 очков.

33. Приживаются в среднем 70% числа посаженных саженцев. Сколько нужно посадить саженцев, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9 ожидать, что отклонение числа прижившихся саженцев от их математического ожидания не превышало по модулю 40?

34. Доказать, что для всякой случайной величины ξ с конечной дисперсией $P\{|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi}\} \geq 8/9$.

35. Пусть μ_n – число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании. Докажите, что для всякого $\alpha > 0$

$$P\{|\mu_n - np| \ge \alpha\sqrt{npq}\} \le 1/\alpha^2.$$

8. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ И МЕТОДЫ ИХ НАХОЖДЕНИЯ

Будем говорить, что $X = (x_1,\ldots, x_n)$ образует *случайную выборку* объема n из некоторого распределения $F(x, \theta)$, $x \in R$, θ – параметр распределения, $\theta \in \Theta \subseteq R^m$, $m \in N$, если все наблюдения $x_1,\ldots, x_n$ независимы в совокупности и одинаково распределены.

В силу определения случайной выборки справедлива следующая формула для ее совместной функции распределения: $F(X, \theta) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i, \theta)$.

Предположим далее, что вид функции $F(X, \theta)$ известен, а θ – некоторый неизвестный параметр распределения.

Задача статистического оценивания параметра θ заключается в том, чтобы по наблюдаемой выборке X построить такое $\tilde{\theta} = T(X) = T(x_1,\ldots, x_n)$, которое в вероятностном смысле близко к θ. При этом $\tilde{\theta}$ называется *точечной статистической оценкой* неизвестного параметра θ, а функция $T(X)$ – *статистикой*.

Очевидно, что *оценка* $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ есть значение некоторой функции, зависящей от элементов выборки $x_1,\ldots, x_n$.

Вероятностный смысл близости оценки $\tilde{\theta} = T(X)$ к истинному значению θ определяется следующими тремя требованиями, предъявляемыми к статистике $T(X)$.

1. *Состоятельность оценки*. Статистическая оценка $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ называется *состоятельной*, если, каково бы ни было истинное значение $\theta \in \Theta$, имеет место сходимость $\tilde{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$.

Если для произвольного $\theta \in \Theta$ имеет место сходимость $\tilde{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{P=1} \theta$, то оценка $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ называется *сильно состоятельной.*

2. *Несмещенность оценки*. Оценка $\tilde{\theta}$ параметра θ называется *несмещенной*, если $M\tilde{\theta} = \theta$, каковы бы ни были истинное значение $\theta \in \Theta$ и объем выборки n.

Если $M\tilde{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ для произвольного $\theta \in \Theta$, то оценка $\tilde{\theta}$ называется *асимптотически несмещенной*.

Величина $M\{\tilde{\theta} - \theta\} = M\tilde{\theta} - \theta$ называется *смещением* оценки $\tilde{\theta}$.

3. *Эффективность оценки.* В математической статистике в качестве оценки точности рассматривается *вариация* оценки: $V(\tilde{\theta}) = M(\tilde{\theta} - \theta)^2$.

Оценка $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ называется *эффективной*, если при каждом n она имеет наименьшую вариацию.

Известно, что *выборочное среднее* $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ есть несмещенная и состоятельная оценка для математического ожидания Mξ.

Смещенной оценкой дисперсии Dξ служит *выборочная дисперсия* $S_n{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2$.

Исправленная выборочная дисперсия $s_n{}^2 = nS_n^2/(n-1)$ является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии Dξ.

Пусть имеется выборка $X = (x_1, \ldots, x_n)$ с совместной плотностью распределения $p(X, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$, где $x_i \in$ R, $\theta \in$ R, параметр θ неизвестен.

Количество информации по Фишеру о неизвестном параметре θ, $\theta \in$ R, *содержащейся в отдельном выборочном значении* x_j, $j = \overline{1, n}$, вычисляется по формуле:

$$i = -\,\mathrm{M}\frac{\partial^2 \ln p(x_j, \theta)}{\partial\theta^2}.$$

Количество информации по Фишеру о неизвестном параметре θ, $\theta \in$ R, *содержащейся во всей выборке* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ объема n вычисляется по формуле:

$$I = \mathrm{M}\left(\frac{\partial \ln p(X, \theta)}{\partial\theta}\right)^2 = -\,\mathrm{M}\frac{\partial^2 \ln p(X, \theta)}{\partial\theta^2}.$$

Заметим, что $I = ni$.

Теорема 11 (критерий эффективности несмещенной оценки). Для того, чтобы в условиях регулярности несмещенная оценка $\tilde{\theta} = T(X) \in$ R была эффективной, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $A(\theta) > 0$, что справедливо соотношение

$$\frac{\partial \ln p(X, \theta)}{\partial\theta} \overset{п.н.}{=} A(\theta)(\tilde{\theta} - \theta) = I(\tilde{\theta} - \theta),$$

$\theta \in$ R, $A(\theta)$ – некоторый коэффициент, зависящий от неизвестного параметра θ. При этом $V(\tilde{\theta}) = D\tilde{\theta} = 1/A(\theta) = 1/I$, где I – количество информации по Фишеру.

Статистика, которая позволяет осуществить сжатие данных t = t(X) так, чтобы построенная на ее основе оценка была бы так же точна, как и $\tilde{\theta}$, называется *достаточной* для параметра θ.

Теорема 12 (критерий факторизации). Статистика t = t(X) является достаточной тогда и только тогда, когда совместная плотность распределения выборки $p(X, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$ представима в виде

$$p(X, \theta) = g(t, \theta) \cdot k(X),$$

где $k(X) \geq 0$ зависит только от выборки X, но не зависит от параметра θ, а $g(t, \theta) \geq 0$ зависит от θ, но зависимость от выборки X имеет место только через статистику t(X).

При фиксированной выборке X плотность распределения вероятностей $p(X, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq R^m$, $m \in N$, является функцией параметра θ. Эта функция называется *функцией правдоподобия* и обозначается $L(\theta)$. *Функцией логарифмического правдоподобия* называется $\ln L(\theta)$ и обозначается $l(\theta)$.

Метод максимального правдоподобия основан на следующем интуитивном представлении: в большей части случаев в эксперименте наблюдается то значение вектора X, при котором плотность распределения вероятностей близка к максимальному значению. Если $L(\theta^{**}) > L(\theta^{*})$, то для данной выборки X значение параметра $\theta = \theta^{**}$ более правдоподобно, чем θ^{*}.

Другими словами, в качестве оценки $\tilde{\theta}$ параметра θ выбирается такое значение параметра θ, при котором функция правдоподобия принимает максимальное значение, т.е.

$$L(\tilde{\theta}) = \max_{\theta} L(\theta) \qquad \text{или} \qquad \tilde{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\theta).$$

Во многих случаях вместо функции $p(X, \theta)$ рассматривают функцию $\ln p(X,\theta)$, достигающую максимума в тех же точках, что и $p(X,\theta)$. Тогда

$$\tilde{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta) = \arg \max_{\theta} l(\theta),$$

$\tilde{\theta}$ – *оценка максимального правдоподобия*. Далее будем предполагать, что функция $L(\theta)$ (или $l(\theta)$) дважды непрерывно дифференцируема.

Известно, если k-ый абсолютный момент конечен $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \, dF(x) < +\infty$, то выборочный момент k-го порядка $\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k$ сходится *почти наверное* к теоретическому моменту k-го порядка, т.е. $\alpha_k \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}=1}{\to}} \nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$.

Метод моментов основывается на интуитивном представлении о том, что моменты выборки приблизительно равны теоретическим моментам.

Оценки $\tilde{\theta}_k, k = \overline{1, m}$, параметров θ_k находятся приравниванием первых k теоретических моментов соответствующим моментам выборки и решением полученных уравнений $\nu_k = \alpha_k$, $k = \overline{1, m}$. Построенная оценка $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, ..., \tilde{\theta}_m)$ называется *оценкой по методу моментов*.

Отметим, что с ростом n полученная система трудно разрешима.

Замечание. Если выборка X получена из дискретного распределения вероятностей, то вместо плотности распределения необходимо везде использовать соответствующие вероятности.

Пример 10. Найти методом максимального правдоподобия по выборке $X = (x_1, \ldots, x_n)$ из распределения Пуассона точечную оценку неизвестного параметра λ этого распределения.

Решение. В данном случае $\mathrm{P}\{\xi = k\} = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$. Поэтому

$$p(x_i, \theta) = \mathrm{P}\{\xi = x_i, \theta\} = \theta^{x_i} e^{-\theta} / x_i!, \ x_i \in \mathrm{N}.$$

Составим функцию правдоподобия для дискретной случайной величины ξ:

$$L(\theta) = \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} e^{-\theta} \cdot \ldots \cdot \frac{\theta^{x_n}}{x_n!} e^{-\theta} = e^{-\theta n} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \frac{1}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!}.$$

Тогда $l(\theta) = \ln L(\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\theta - \ln(x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!)$ и

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = -n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Уравнение правдоподобия имеет вид:

$$\left.\left(-n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = 0 .$$

Отсюда находим $\tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$. А так как $\left.\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = -\frac{1}{\tilde{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0$, то оценка $\tilde{\theta} = \overline{x}$ является оценкой максимального правдоподобия.

Упражнения

1. Задана выборка $X = (x_1,\dots, x_n)$ из равномерного распределения на отрезке $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. Построить оценку параметра θ по методу моментов.

2. Задана выборка $X = (x_1,\dots, x_n)$ из равномерного распределения на отрезке $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. Найти оценку максимального правдоподобия для неизвестного параметра θ.

3. Пусть $X = (x_1,\dots, x_n)$ – выборка из смещенного показательного распределения с плотностью $p(x, \beta) = \begin{cases} e^{\beta - x}, x \ge \beta, \\ 0, x < \beta. \end{cases}$ Для параметра $\beta \in R$ построить оценку максимального правдоподобия. Исследовать полученную оценку на несмещенность и состоятельность. Найти несмещенную оценку параметра β.

4. Задана выборка $X = (x_1,\dots, x_n)$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Сравнить оценки а) $2\overline{x}$; б) $x_{(n)} = \max\{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$; в) $x_{(n)} \dfrac{n+1}{n}$ неизвестного параметра θ в среднеквадратическом смысле (найти математическое ожидание, дисперсию и вариацию оценок).

5. Пусть $X = (x_1,\dots, x_n)$ – выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Сравнить оценки $\theta^*_{k,n} = x_{(n)} \dfrac{n+k}{n}$, где $x_{(n)} = \max\{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \dots$, неизвестного параметра θ в среднеквадратическом смысле (найти математическое ожидание, дисперсию и вариацию оценок).

6. Пусть $X = (x_1,\dots, x_n)$ – выборка из смещенного показательного распределения с плотностью $p(x, \beta) = \begin{cases} e^{\beta - x}, x \ge \beta, \\ 0, x < \beta. \end{cases}$ Сравнить в среднеквадратическом смысле оценки а) $\overline{x} - 1$; б) $x_{(1)} = \min\{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$; в) $x_{(1)} - 1/n$ параметра $\beta \in R$ (найти математическое ожидание, дисперсию и вариацию оценок).

7. Задана выборка $X = (x_1,\dots, x_n)$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, $\theta > 0$. С помощью неравенства Чебышева доказать состоятельность следующих оценок параметра θ: а) $2\overline{x}$; б) $x_{(n)} = \max\{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$.

8. Задана выборка X объема n из распределения $p(x,\lambda) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $x \ge 0$. Найти а) эффективную оценку для параметра λ; б) количество информации по Фишеру; в) нижнюю границу дисперсии несмещенной оценки; г) количество информации, содержащееся в одном элементе выборки.

9. Имеется выборка $X = (x_1,\ldots, x_n)$ объема n из распределения с плотностью $p(x, a, \sigma) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\dfrac{(g(x)-a)^2}{2\sigma^2}\}$, где $g(x)$ – некоторая дифференцируемая на R функция. Параметр a этого распределения известен; с помощью выборки требуется оценить параметр σ^2. Найти a) эффективную оценку для неизвестного параметра σ^2; b) количество информации по Фишеру; c) нижнюю границу дисперсии несмещенной оценки; d) количество информации, содержащееся в одном элементе выборки.

10. Рассматривается выборка объема n, компоненты которой независимы и имеют плотность распределения Коши $p(x,\theta) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+(x-\theta)^2}$.

Существует ли эффективная оценка для неизвестного параметра θ? Найти a) количество информации по Фишеру; b) нижнюю границу дисперсии несмещенной оценки; c) количество информации, содержащееся в одном элементе выборки.

11. Имеется выборка $X = (x_1,\ldots, x_n)$ из распределения с плотностью $p(x, a, \sigma) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\dfrac{(g(x)-a)^2}{2\sigma^2}\}$, где $g(x)$ – некоторая дифференцируемая на R функция. Параметр σ этого распределения известен; с помощью выборки требуется оценить параметр a. Найти a) эффективную оценку для неизвестного параметра a; b) количество информации по Фишеру; c) нижнюю границу дисперсии несмещенной оценки; d) количество информации, содержащееся в одном элементе выборки.

12. Имеется выборка $X = (x_1,\ldots, x_n)$ из генеральной совокупности, распределенной по закону *хи*-квадрат с неизвестным параметром α, т.е. $p(x, \alpha, p) = \dfrac{\alpha^p x^{p-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(p)}, x > 0$. Существует ли эффективная оценка для неизвестного параметра α? Найти a) с помощью метода максимального правдоподобия оценку параметра α; b) нижнюю границу для выборочной дисперсии несмещенной оценки.

13. Имеется выборка $X = (x_1,\ldots, x_n)$ из распределения с плотностью $p(x,a,\sigma) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\dfrac{(g(x)-a)^2}{2\sigma^2}\}$, где $g(x)$ – некоторая дифференцируемая на R функция. Параметр a этого распределения известен. С помощью выборки требуется оценить параметр σ. Существует ли эффективная оценка для неизвестного параметра σ? Найти нижнюю границу для выборочной дисперсии несмещенной оценки.

14. Указать в случае существования достаточную статистику для распределения вероятностей с плотностью $p(x,\theta) = x^{\theta-1}e^{-x} / \Gamma(\theta)$, $x>0$.

15. Задана выборка $X = (x_1,\dots, x_n)$ из лог-нормального распределения с плотностью вероятностей $p(x,\theta_1,\theta_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\exp(-\dfrac{1}{2\theta_2}(\ln x-\theta_1)^2)\dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

Найти a) эффективную оценку для неизвестного параметра θ_1; b) нижнюю границу для выборочной дисперсии несмещенной оценки θ_1; c) количество информации, содержащееся в одном элементе выборки.

16. Осуществлены две серии из n_1 и n_2 независимых испытаний, причем в первой серии событие A произошло m_1 раз, а во второй серии – m_2 раза. Найти оценку методом максимального правдоподобия для неизвестной вероятности p события A в каждом испытании, считая эту вероятность одной и той же постоянной в обеих сериях.

17. Уровни воды в реке по отношению к номиналу измерялись в течение 44 весенних паводков; данные измерений приведены в следующей таблице:

Уровень (в см)	[0, 24)	[24, 48)	[48, 72)	[72, 96)	[96, 120)	[120, 144)	[144, 168)	[168, 192)	[192, 216)	[216, 240)	≥240
Число случаев	0	1	3	6	7	6	5	4	8	4	0

Считая, что высота уровня ξ распределена по закону *хи*-квадрат с плотностью $p(x,k,a) = k^{a+1}x^a e^{-kx} / \Gamma(a+1)$, $x \ge 0$, с помощью метода моментов найти оценки параметров a и k этого распределения.

18. При нейтронной бомбардировке ядер урана начинается расщепление ядра, при котором ядро урана распадается на две части различного рода; в камере Вильсона это явление обнаруживается в виде двух траекторий, исходящих из одной точки. Эти траектории вскоре разделяются на несколько ветвей, получающихся от столкновения частиц с молекулами газа в камере. Обозначим через ξ число ветвей в одной из этих траекторий. Можно показать, что эта случайная величина имеет так называемое "двойное" распределение Пуассона, т.е. $P\{\xi = k\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$, $k = 0, 1, 2,\dots$, λ_1, λ_2 – некоторые положительные постоянные ($\lambda_1 < \lambda_2$). Наблюдались траектории 327 частиц, количества ветвей в них указаны в следующей таблице:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_k	28	47	81	67	53	24	13	8	3	2	1

(n_k – число траекторий, имевших k ветвей). Основываясь на этих эмпирических данных, с помощью метода моментов найти оценки параметров λ_1 и λ_2.

19. Из распределения с плотностью $p(x,\ \theta)\ =\ \dfrac{e^{-|x|}}{2(1-e^{-\theta})},\ |x| \le \theta$, извлечена выборка X объема n. Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.

20. Задана выборка $X = (x_1,\ldots,\ x_n)$ из распределения Коши с плотностью $p(x,\theta) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+(x-\theta)^2}$. Пусть имеется какая-нибудь состоятельная и несмещенная оценка m параметра θ. Указать нижнюю границу объема выборки n для того, чтобы дисперсия этой оценки не превосходила 0,01.

21. Пусть $X = (x_1,\ldots,\ x_n)$ – выборка из показательного распределения с параметром λ. Найти оценку максимального правдоподобия для неизвестного параметра λ. Вычислить математическое ожидание и дисперсию оценки.

22. Задана выборка $X = (x_1,\ldots,\ x_n)$ из нормального $N(0,\ \sigma^2)$ распределения вероятностей, $p(x,\ \sigma^2)\ =\ (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp(-x^2/2\sigma^2)$. Найти а) эффективную оценку для данного параметра σ^2; б) количество информации по Фишеру; в) нижнюю границу для выборочной дисперсии несмещенной оценки; г) количество информации, содержащееся в одном элементе выборки.

23. Имеется выборка X объема n из генеральной совокупности, распределенной по закону *хи*-квадрат с неизвестным параметром α, т.е. с плотностью $p(x,\ \alpha,\ p)\ =\ \alpha^p x^{p-1} e^{-\alpha x}/\Gamma(p),\ x > 0$. Найти с помощью метода максимального правдоподобия оценку параметра α.

24. Указать в случае существования достаточную статистику для распределения Пуассона с неизвестным параметром λ.

25. Задана выборка X из нормального распределения вероятностей $N(a,\ \sigma^2)$ с плотностью $p(x,\ a,\ \sigma^2)\ =\ (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp(-(x-a)^2/2\sigma^2)$. Найти оценку максимального правдоподобия для неизвестного параметра $\theta = \sigma^2$.

26. Указать в случае существования достаточную статистику для нормального распределения $N(\theta,\ 1)$ с плотностью распределения вероятностей $p(x,\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{(x-\theta)^2}{2})$.

27. Задана выборка $X = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ из распределения с плотностью $p(X,\lambda) = \lambda\, e^{-\lambda x},\ x \ge 0,\ \lambda > 0$. Найти оценку максимального правдоподобия для неизвестного параметра λ.

28. Задана выборка X из нормального распределения $N(\theta,\ \sigma^2)$ с плотностью вероятностей $p(x,\ \theta,\ \sigma^2)\ = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp(-(x-\theta)^2/2\sigma^2)$. Найти оценку максимального правдоподобия для неизвестного параметра θ.

29. Выборка $X = (x_1, \ldots, x_n)$ извлечена из распределения Лапласа с плотностью $p(x, \alpha, \mu) = (2\alpha)^{-1} \exp\{-|x-\mu|/\alpha\}$, $x \in$ R. Параметр μ этого распределения известен. Найти оценку максимального правдоподобия для неизвестного параметра α.

30. Задана выборка $X = (x_1, \ldots, x_n)$ из распределения Бернулли с неизвестным параметром p. Существует ли эффективная оценка для неизвестного параметра p? Найти методом моментов и методом максимального правдоподобия оценку неизвестного параметра, исследовать ее на несмещенность и состоятельность.

31. Случайная величина ξ (число нестандартных изделий в партии изделий) распределена по закону Пуассона. Ниже приведено распределение нестандартных изделий в n = 200 партиях (в первой строке указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке указана частота n_i – число партий, содержащих x_i нестандартных изделий):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона.

32. Найти методом моментов по выборке $X = (x_1, \ldots, x_n)$ точечную оценку неизвестного параметра p биномиального распределения.

33. Случайная величина ξ (число появлений события А в m независимых испытаниях) подчинена биномиальному закону распределения с неизвестным параметром p. Ниже приведено эмпирическое распределение числа появлений события в 10 опытах по пять испытаний в каждом (в первой строке указано число x_i появлений события А в одном опыте; во второй строке указана частота n_i – количество опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события А):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	5	2	1	1	1

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра p биномиального распределения.

34. Случайная величина ξ (время работы элемента) имеет показательное распределение с неизвестным параметром λ. Ниже приведено эмпирическое распределение среднего времени работы n = 200 элементов (в первой строке указано среднее время x_i работы элемента в часах; во второй строке указана частота n_i – количество элементов, проработавших в среднем x_i часов):

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	133	45	15	4	2	1

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения.

35. Найти методом моментов по выборке $X = (x_1,\dots, x_n)$ точечные оценки неизвестных параметров λ_1 и λ_2 "двойного" распределения Пуассона, т.е. $P\{\xi = k\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$, $k = 0, 1, 2,\dots$, λ_1, λ_2 – положительные постоянные, причем $\lambda_1 < \lambda_2$.

9. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Задача интервального оценивания заключается в построении по данным выборки $X = (x_1,\dots, x_n)$ числового интервала $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ можно сказать, что внутри интервала находится точное значение оцениваемого параметра распределения θ.

Интервал $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$, накрывающий с вероятностью γ истинное значение параметра θ, называется *доверительным интервалом*, а вероятность γ – *надежностью оценки* (*доверительной вероятностью*); $\gamma = 1 - \varepsilon$, где ε – *доверительный уровень* (*уровень значимости*), $0 < \varepsilon < 0{,}5$.

Построим доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Доверительная вероятность γ – задана. Рассмотрим выборку $X = (x_1,\dots, x_n)$ из нормального $N(a, \sigma^2)$ распределения.

1. Пусть параметр a неизвестен, дисперсия σ^2 – известна.

Интервальной оценкой с надежностью γ математического ожидания a по выборочной средней $\overline{x}$ при известной дисперсии σ^2 генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{7}$$

где $z_\gamma \sigma / \sqrt{n} = \delta$ – точность оценки; n – объем выборки; z_γ – значение аргумента функции Лапласа $\Phi_0(z)$ (см. приложение 1), при котором $\Phi_0(z_\gamma) = \gamma/2$.

2. Пусть параметры a и σ^2 неизвестны.

Интервальной оценкой с надежностью γ математического ожидания a по выборочной средней $\overline{x}$ при неизвестной дисперсии σ^2 генеральной совокупности (и объеме выборки $n < 30$) служит доверительный интервал

$$\overline{x} - t_\gamma \frac{s_n}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma \frac{s_n}{\sqrt{n}},$$

где s_n – исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение; n – объем выборки; t_γ – квантиль уровня $1 - \gamma = \varepsilon$ распределения Стьюдента (см. приложение 2), который определяется в зависимости от надежности γ и числа степеней свободы $k = n - 1$.

3. Пусть параметр σ^2 неизвестен.

Интервальной оценкой с надежностью γ дисперсии σ^2 по исправленной выборочной дисперсии $s_n{}^2$ служит доверительный интервал

$$\frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{n-1,2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{n-1,1}},$$

где $s_n{}^2 = nS_n^2/(n-1)$ – исправленная выборочная дисперсия; n – объем выборки; $\chi^2_{n-1,1}$ и $\chi^2_{n-1,2}$ определяются в зависимости от числа степеней свободы $k = n - 1$ с помощью таблицы (см. приложение 3) из равенств

$$P(\chi^2_{n-1,2}) = (1-\gamma)/2, \qquad P(\chi^2_{n-1,1}) = (1+\gamma)/2.$$

Доверительный интервал и доверительная вероятность среднеквадратического отклонения определяются из равенства

$$\mathrm{P}\{\frac{s_n\sqrt{n-1}}{\chi_{n-1,2}} < \sigma < \frac{s_n\sqrt{n-1}}{\chi_{n-1,1}}\} = \gamma.$$

Пример 11. Машина, которая упаковывает сахар, долгое время обеспечивала нормальное распределение веса в наполняемых пакетах. Стандартное отклонение веса равнялось ± 2,5 г. Был установлен новый размер упаковок. Для контроля произвели случайную выборку 20 новых пакетов. Средний вес пакетов в выборке $\bar{x}$ =1002 г. Найти доверительный интервал для среднего веса упаковки в генеральной совокупности с вероятностью 99%.

Решение. Из условия задачи известно, что $n = 20$; $\gamma = 0,99$; $\sigma = 2,5$.

Поскольку $\Phi_0(z_\gamma) = \gamma/2 = 1,99/2 = 0,995$, то по таблице приложения 1 находим $z_\gamma = 2,576$. Тогда, применяя (7), имеем

$$1002 - 2,576(2,5/\sqrt{20}) < a < 1002 + 2,576(2,5/\sqrt{20}).$$

Таким образом, доверительный интервал для среднего веса упаковки равен 1002 ± 1,44 г.

Упражнения

1. Каков должен быть минимальный объем выборки n для того, чтобы с надежностью 0,98 точность оценки математического ожидания a совокупности с помощью выборочного среднего была 0,2, если среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 1,5$?

2. Произведено 16 измерений начальной скорости снаряда. По результатам измерений найдена выборочная дисперсия $S_n{}^2 = 2,8688$ м^2/с^2.

Вычислить доверительный интервал для дисперсии начальной скорости снаряда с надежностью 0,96.

3. При взвешивании груза получены следующие данные: 129; 125; 130; 122; 135; 125; 120; 130; 127. Определить среднеквадратическую ошибку взвешивания и построить для нее доверительный интервал с надежностью 0,8.

4. В ОТК были измерены диаметры 200 валиков из партии, изготовленной одним станком-автоматом. Выборочное среднее $\bar{x} = 4{,}3$ мк. Оценить с надежностью 0,99 точность, с которой выборочное среднее аппроксимирует математическое ожидание случайных уклонений диаметра валика от его номинального размера, если дисперсия равна 92,25 мк^2.

5. Из большой партии электролампочек было отобрано в случайном порядке 400 штук для определения средней продолжительности горения. Выборочная средняя продолжительность горения лампочки оказалась равной 1220 ч. Найти с вероятностью 0,9973 среднюю продолжительность горения лампочки во всей партии, если среднеквадратическое отклонение продолжительности горения равно 35 ч.

6. При сверлении отверстий одним и тем же сверлом и последующем измерении диаметров получено 80 значений. Выборочное среднее диаметра $\bar{x} = 40{,}35$ мм. Найти точность оценки математического ожидания генеральной совокупности с надежностью 0,9973, если среднеквадратическое отклонение $\sigma = 0{,}043$ мм.

7. Считая, что выборка объема $n = 200$ с выборочным средним $\bar{x} = 2{,}484$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}144$ извлечена из нормальной генеральной совокупности. Найти вероятность того, что ошибка оценки математического ожидания m генеральной совокупности посредством выборочного среднего не превосходит по абсолютной величине 0,015.

8. При сверлении отверстий одним и тем же сверлом и последующем измерении диаметров получено 80 значений. Выборочное среднее диаметра $\bar{x} = 40{,}35$ мм. Найти точность оценки математического ожидания генеральной совокупности с надежностью 0,95, если среднеквадратическое отклонение $\sigma = 0{,}043$ мм.

9. Из партии однотипных высокоомных сопротивлений отобрано для контроля 10 штук. Измерения дали следующие отклонения от номинала (в килоомах):

№ сопротивления	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Наблюденное значение	1	3	-2	2	4	2	5	3	-2	4

Найти выборочные среднее и исправленную выборочную дисперсию отклонения фактической величины сопротивления от номинала в этой партии и определить точность оценки математического ожидания этим выборочным средним с надежностью 0,95.

10. Имеется выборка объема 12 из некоторой генеральной совокупности:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Значение	- 0,5	1,2	0	0,8	1,2	- 0,4	0,2	- 0,2	1,5	0,6	- 0,4	1

Найти выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию и указать точность оценки математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95.

11. С помощью выборки объема $n = 20$ с выборочной дисперсией $S_n^{\,2} = 0{,}0117$ найти доверительный интервал для неизвестного среднеквадратического отклонения совокупности с доверительной вероятностью 0,9.

12. С помощью выборки объема $n = 20$ с выборочным средним $\bar{x} = 4{,}47$ и выборочной дисперсией $S_n^{\,2} = 0{,}0117$ оценить точность математического ожидания m посредством среднего $\bar{x}$ с надежностью 0,99.

13. С помощью выборки объема $n = 20$ с выборочным средним $\bar{x} = 4{,}47$ и выборочной дисперсией $S_n^{\,2} = 0{,}0117$ оценить точность математического ожидания m посредством среднего $\bar{x}$ с надежностью 0,95.

14. С помощью выборки объема $n = 20$ с выборочным средним $\bar{x} = 4{,}47$ и выборочной дисперсией $S_n^{\,2} = 0{,}0117$ оценить точность математического ожидания m посредством среднего $\bar{x}$ с надежностью 0,9.

15. По нормально распределенной выборке объемом $n = 30$ с выборочным средним $\bar{x} = 0{,}5$ и исправленной выборочной дисперсией $s_n^{\,2} = 1$ построить доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95.

16. В заданных условиях была проверена сила анодного тока 300 однотипных радиоламп, причем у 60 из них она оказалась выше гарантированной паспортом. Найти с надежностью 0,95 границы интервала, содержащего долю таких радиоламп среди всех радиоламп данного типа.

17. Из большой партии некоторых изделий отобрано наугад для контроля 500 штук, причем среди них оказалось 20 неудовлетворяющих стандарту (брак). Найти с доверительным уровнем 0,05 интервал, содержащий процент брака во всей партии.

18. У 500 однотипных радиоламп была в заданных условиях проверена сила анодного тока, причем у 150 из них она оказалась выше гарантированной паспортом. Найти с коэффициентом доверия 0,95 интервал, содержащий долю таких радиоламп среди всех радиоламп данного типа.

19. По результатам пяти измерений определена исправленная выборочная дисперсия s_n^2 = 9 м^2. Определить надежность того, что неизвестное значение дисперсии находится в пределах (4,5; 13,5).

20. По результатам 10 измерений определено исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение s_n = 3 м. Оценить надежность того, что истинное значение среднеквадратического отклонения находится в пределах (2 м, 4 м).

21. Имеется выборка объема n = 15 из некоторой генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
значение	1,2	0,8	-0,5	0,1	-0,4	0,6	1,1	0,2	-1,2	0,7	-0,3	1	-0,8	0,2	0,3

Найти выборочное среднее и исправленную выборочную дисперсию. Указать точность оценки математического ожидания с надежностью 0,95.

22. По результатам пяти пусков ракет определены расстояние до средней точки падения 1285 км и приближенное значение среднеквадратического отклонения 1000 м. Найти вероятность того, что истинное значение центра рассеивания находится в пределах от 1283 до 1287 км, а истинное значение среднеквадратического отклонения – в пределах 850 м до 1250 м.

23. Среднеквадратическая ошибка высотомера σ = 15 м. Сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с надежностью 0,99 ошибка средней высоты была больше – 30 м, если ошибки высотомеров нормальны, а систематические ошибки отсутствуют?

24. В качестве оценки расстояния до навигационного знака принимают среднее арифметическое результатов независимых измерений расстояния n дальномерами. Измерения не содержат систематической ошибки, а случайные ошибки распределены нормально со среднеквадратическим отклонением 10 м. Сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении дальности навигационного знака с вероятностью 0,9 не превышала 15 м?

25. На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены несмещенные оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения их срока службы, которые оказались равными $\bar{x}$ = 3000 часов и s_n = 20 часов. Считая, что срок службы каждой лампы является нормальной случайной величиной, определить доверительные интервалы для математического ожидания и среднеквадратического отклонения при доверительной вероятности 0,9.

26. На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены несмещенные оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения их срока службы, которые оказались равными $\bar{x}$ = 3000 часов и s_n = 20 часов. Срок службы каждой лампы является нормальной случайной величиной. С какой вероятностью можно утверждать, что абсолютное значение ошибки определения $\overline{x}$ не превзойдет 10 часов, а ошибка в определении σ будет меньше 2 часов?

27. В результате проверки 400 лампочек 40 штук оказалось бракованными. Найти доверительный интервал уровня 0,99 для вероятности брака.

28. Производитель автомобильных шин заинтересован в получении оценки средней износоустойчивости шин одной особой модели. Он провел случайную выборку объемом n = 10 шин и подверг их специальному испытанию. Средняя износоустойчивость по данным выборки оказалась равной $\overline{x}$ = 22500 миль, исправленное выборочное среднеквадратическое отклонения s_n = 3000 миль. Найти доверительный интервал с вероятностью 99% для средней износоустойчивости всего выпуска шин этого типа. Предполагается, что генеральная совокупность нормальная.

29. Произведено 5 независимых наблюдений над случайной величиной ξ, имеющей нормальное распределение N(a, 20). Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25$, $x_2 = 34$, $x_3 = -20$, $x_4 = 10$, $x_5 = 21$. Найти оценку для математического ожидания a, а так же построить 95%-й доверительный интервал.

30. Произведено 5 независимых наблюдений над случайной величиной ξ, имеющей нормальное распределение N(a, σ^2). Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25$, $x_2 = 34$, $x_3 = -20$, $x_4 = 10$, $x_5 = 21$. Построить 95%-й доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a.

31. Для оценки параметра нормального распределенной случайной величины ξ была сделана выборка объема в 30 единиц и вычислено исправленное среднеквадратическое отклонение s_n = 1,5. Найти доверительный интервал, покрывающий σ с надежностью γ = 0,90.

32. Произведено 16 измерений начальной скорости снаряда. По результатам измерений найдены оценки математического ожидания $\overline{x}$ = 1235,5 м/с и выборочной дисперсии S_n^2 = 2,8688 м²/с². Вычислить доверительный интервал для математического ожидания начальной скорости с надежностью 0,9.

33. Среднеквадратическая ошибка метода измерений σ = 12 м. Какова вероятность того, что ошибка среднего арифметического из 16 результатов измерений отличается от неизвестного значения не более чем на 6 м?

34. По результатам двадцати измерений определены выборочное среднее $\overline{x}$ = 115м и исправленная выборочная дисперсия s_n^2 = 4 м². Оценить точность оценки дисперсии с надежностью 0,96.

35. Среднее значение расстояния до ориентира, полученное по четырем независимым испытаниям, равно 2250 м. Среднеквадратическая ошибка измерения σ = 40 м, систематическая ошибка отсутствует. Найти с надежностью 95% доверительный интервал для измеряемой величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей.– М.: Высшая школа, 2000.– 366 с.
2. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.– М.: Высшее образование, 2006.– 476 с.
3. *Гурский Е.И.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике.– Мн.: Высшая школа, 1984.– 223 с.
4. *Гусак А. А., Бричикова Е. А.* Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач.– Мн.: ТетраСистемс, 2000.– 288 с.
5. *Кочетков Е. С., Смерчинская С. О.* Теория вероятностей в задачах и упражнениях.– М.: Высшее образование, 2006.– 476 с.
6. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие.– М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986.– 328 с.
7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. / Под редакцией А. А. Свешникова.– М.: Наука, 1970.– 656 с.
8. *Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М.* Сборник задач по теории вероятностей.– М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.– 223 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

***Приложение* 1**

Значения функции Лапласа $\Phi_0(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-t^2/2}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0004	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0556	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0792	0832	0871	0909	0948	0987	1025	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1949	1985	2019	2054	2088	2126	2156	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2453	2485	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3105	3123
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3364	3389
1,0	0,341	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3707	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3961	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4250	4265	4278	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4544
1,7	4554	4563	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4685	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4755	4761	4767
2,0	0,477	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4825	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4954	4956	4957	4958	4959	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

3,0	0,49865	3,1	0,49903	3,2	0,49931	3,3	0,49952
3,4	0.49966	3,5	0,49977	3,6	0,49984	3,7	0,49989
3,8	0,49993	3,9	0.49995	4,0	0,499968	5,0	0,4999999

Приложение 2

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n-1) = t(\gamma, k)$

	γ			
k	0,90	0,95	0,98	0,99
1	6,31	12,71	31,8	63,7
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,77	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,943	2,45	3,14	4,71
7	1,895	2,36	3,00	3,50
8	1,860	2,31	2,90	3,36
9	1,833	2,26	2,82	3,25
10	1,812	2,23	2,76	3,17
12	1,782	2,18	2,68	3,06
14	1,761	2,14	2,62	2,98
16	1,746	2,12	2,58	2,92
18	1,734	2,10	2,55	2,88
20	1,725	2,09	2,53	2,84
22	1,717	2,07	2,51	2,82
24	1,711	2,06	2,49	2,80
30	1,697	2,04	2,46	2,75
40	1,684	2,02	2,42	2,70
60	1,671	2,00	2,39	2,66
120	1,658	1,980	2,36	2,62
∞	1,645	1,960	2,33	2,58

Приложение **3**

Таблица значений χ^2 в зависимости от γ и k

	γ					
k	0,01	0,02	0,05	0,95	0,98	0,99
1	6,64	5,41	3,84	0,004	0,001	0,000
2	9,21	7,82	5,99	0,103	0,040	0,020
3	11,34	9,84	7,82	0,352	0,185	0,115
4	13,28	11,67	9,49	0,711	0,429	0,297
5	15,09	13,39	11,07	1,145	0,752	0,554
6	16,81	15,03	12,59	1,635	1,134	0,872
7	18,48	16,62	14,07	2,17	1,564	1,239
8	20,10	18,17	15,51	2,73	2,03	1,646
9	21,07	19,68	16,92	3,32	2,53	2,09
10	23,20	21,2	18,31	3,94	3,06	2,56
12	26,2	24,1	21,0	5,23	4,18	3,57
14	29,1	26,9	23,7	6,57	5,37	4,66
16	32,0	29,6	26,3	7,96	6,61	5,81
18	34,8	32,3	28,9	9,39	7,91	7,02
20	37,6	35,0	31,4	10,85	9,24	8,26
22	40,3	37,7	33,9	12,34	10,60	9,54
24	43,0	40,3	36,4	13,85	11,99	10,86
26	45,6	42,9	38,9	15,38	13,41	12,20
28	48,3	45,4	41,3	16,93	14,85	13,56
30	50,9	48,0	43,8	18,49	16,31	14,95

СОДЕРЖАНИЕ