БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ПРАКТИКУМ

В двух частях

Часть 2

Под редакцией Н. В. Лазаковича

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим специальностям

МИНСК
БГУ
2014

УДК 519.21(075.8)(076.5)
ББК 22.171я73-1
Т34

А в т о р ы:
Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок,
А. Г. Яблонская, О. Л. Яблонский

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра экономической кибернетики и теории вероятностей
Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *Ю. В. Малинковский*);
доктор физико-математических наук, профессор *А. Д. Егоров*

Теория вероятностей. Практикум : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 /
Т34 Н. В. Лазакович [и др.] ; под ред. Н. В. Лазаковича. – Минск : БГУ, 2014. –
175 с.
ISBN 978-985-566-071-3 (ч. 2).

Часть 2 (ч. 1 издана в БГУ в 2011 г.) состоит из трех глав: «Характеристические функции случайных величин и предельные теоремы», «Основы теории случайных процессов», «Элементы математической статистики» и приложений. В каждой главе задачам и заданиям к лабораторной работе предшествует теоретический раздел.

Для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям.

УДК 519.21(075.8)(076.5)
ББК 22.171я73-1

ISBN 978-985-566-071-3 (ч. 2)
ISBN 978-985-518-443-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу практикума положены задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики, выполняемые студентами механико-математического факультета Белорусского государственного университета во втором семестре. Теоретические сведения даны в соответствии с лекционным материалом учебника «Теория вероятностей», авторы Н. В. Лазакович, С. П. Сташулёнок, О. Л. Яблонский, Минск : БГУ, 2013.

Каждая из трех глав второй части (главы 4–6) содержит теоретический раздел, где приведены необходимые определения понятий, формулировки теорем, и лабораторную работу, состоящую из заданий (каждое в 10 вариантах) и задач, разных по степени сложности. Задачи, отмеченные звездочкой, снабжены решениями, которые помещены в конце учебного пособия.

В приложениях даны таблицы основных вероятностных распределений и значений некоторых из них, а также приводятся греческий и латинский алфавиты.

Лабораторные работы можно выполнять как индивидуально, так и группой из двух-трех человек. При решении задач также может быть полезно электронное учебное пособие «Курс теории вероятностей», авторы Н. В. Лазакович, С. П. Сташулёнок, О. Л. Яблонский, Минск : электронная книга БГУ, 2003. URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/10291.

Авторы признательны:

– рецензентам учебного пособия – профессору А. Д. Егорову и кафедре экономической кибернетики и теории вероятностей Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (заведующий кафедрой профессор Ю. В. Малинковский). Их критические замечания и полезные советы способствовали улучшению содержания книги;

– коллегам – сотрудникам кафедры функционального анализа Белорусского государственного университета за неоднократное обсуждение рукописи и сделанные при этом ценные замечания.

Отзывы, пожелания и замечания просим присылать по адресу: кафедра функционального анализа, механико-математический факультет, Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, Минск, 220050, Республика Беларусь.

ГЛАВА 4

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что случайная величина полностью определяется своей функцией распределения (либо плотностью распределения, если она абсолютно непрерывна, либо законом распределения – в дискретном случае). В этой главе введено и изучено еще одно понятие – характеристическая функция случайной величины. В частности, показано, что множества функций распределения и характеристических функций гомеоморфны, т. е. между ними существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. Отметим также, что характеристическая функция есть преобразование Фурье – Стилтьеса функции распределения (преобразование Фурье плотности распределения в абсолютно непрерывном случае). Роль этих преобразований в неслучайном анализе сложно переоценить. Особая эффективность аппарата характеристических функций в теории вероятностей достигается при исследовании предельного поведения сумм независимых случайных величин.

На практике довольно часто встречается ситуация, когда многократно наблюдается «одна и та же» случайная величина, а конечный результат представляет собой сумму наблюдаемых в каждом испытании значений этих величин. Наряду с уже упоминавшимися (в первой части) азартными играми сюда можно отнести повторные замеры одного и того же параметра с последующим усреднением результатов для повышения точности измерений, многократное воздействие однородных причин на некоторый протекающий во времени физический процесс и т. д.

В главе 4 будет дано описание этих явлений с единых вероятностных позиций на основе следующей схемы: имеется последовательность независимых случайных величин, возможно одинаково распределенных, нас будет интересовать поведение суммы первых n членов этой последовательности, в частности среднего арифметического этих членов, если n велико. Оказывается, при больших n среднее арифметическое случайных величин теряет свойство случайности и приближается к среднему арифметическому математических ожиданий. Этот факт называется законом больших чисел.

Уточнение закона больших чисел происходило в двух направлениях. Первое связано с динамикой поведения средних арифметических. К основным результатам этого направления следует отнести усиленный закон больших чисел и закон повторного логарифма. Исходным пунктом второго направления, называемого иногда центральной предельной проблемой, являются уже известные нам теоремы Муавра – Лапласа. Решение центральной предельной проблемы позволило описать класс всех распределений, которые могут выступать в качестве предельных для функций распределения сумм независимых случайных величин в том случае, когда вклад каждого слагаемого бесконечно мал по сравнению с вкладом суммы.

§ 1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть ξ и η – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, с конечными математическими ожиданиями; пусть $\zeta = \xi + i\eta$, где i – мнимая единица. По определению математическое ожидание комплексной случайной величины ζ есть

$$\mathrm{M}\zeta = \mathrm{M}\xi + i\mathrm{M}\eta.$$

Определяемое таким образом математическое ожидание обладает всеми свойствами математического ожидания действительных случайных величин, которые не связаны с упорядоченностью.

Определение 1. Х*арактеристической функцией действительнозначной случайной величины* ξ *называется функция* $f_\xi(t)$ *действительного переменного* t:

$$f_\xi(t) = \mathrm{M}e^{it\xi}.$$

Замечание 1. Характеристическая функция существует для любой действительнозначной случайной величины ξ.

Замечание 2. Из формулы замены переменных в интеграле Лебега имеем

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

т. е. характеристическая функция есть преобразование Фурье – Стилтьеса функции распределения F_ξ случайной величины ξ.

Пусть ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$. В этом случае

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

т. е. характеристическая функция – это преобразование Фурье плотности.

Наконец, если ξ – дискретная случайная величина с законом распределения

$$\begin{aligned} \xi: &\quad x_1, \ \ldots, x_n, \ \ldots, \\ \mathrm{P}: &\quad p_1, \ \ldots, p_n, \ \ldots, \end{aligned}$$

то

$$f_\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itx_n} p_n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Свойства характеристических функций

$1°$. $f_\xi(0) = 1, \ \left|f_\xi(t)\right| \le 1$ *для любого действительного* t.

$2°$. *Характеристическая функция* $f_\xi(t)$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

$3°$. *Если случайные величины* ξ *и* η *связаны следующим образом*:

$$\mathrm{P}(\eta = a\xi + b) = 1, \ a, \ b \in \mathbb{R},$$

то

$$f_\eta(t) = e^{ibt} f_\xi(at).$$

$4°$. *Если случайные величины* $\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n$ *независимы, то для любых* $t \in \mathbb{R}$

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t).$$

$5°$. $\overline{f_\xi(t)} = f_\xi(-t)$, *где* $\overline{f_\xi(t)}$ – *комплексное сопряжение к* $f_\xi(t)$.

$6°$. *Пусть момент n-го порядка* $m_n = \mathrm{M}\,\xi^n$ *конечен, тогда для всех* $k \le n$ *существует производная k-го порядка характеристической функции* $f_\xi^{(k)}(t)$ *и*

$$f_\xi^{(k)}(0) = i^k m_k. \tag{4}$$

Кроме того, имеет место следующее разложение по формуле Тейлора характеристической функции с остаточным членом в форме Пеано:

$$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} m_k + R_n(t), \tag{5}$$

где $R_n(t) = o\left(t^n\right), \ t \to 0$.

$7°$. *Характеристическая функция* $f_\xi(t)$ *является неотрицательно определенной функцией, т. е. для любого* $n \in \mathbb{N}$, *любых действительных чисел* $t_1, \ t_2, \ \ldots, \ t_n$ *и любых комплексных чисел* $z_1, \ z_2, \ \ldots, \ z_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_\xi\left(t_k - t_j\right) z_k \overline{z}_j \ge 0.$$

Теорема (теорема Бохнера – Хинчина). *Если функция $f(t)$ непрерывная, неотрицательно определенная и $f(0)=1$, то она является характеристической функцией некоторой случайной величины.*

Примеры характеристических функций

Пример 1. Характеристическая функция случайной величины Бернулли. Закон распределения ξ имеет вид

$$\begin{array}{lll} \xi: & 0 & 1, \\ \mathrm{P}: & 1-p & p, \qquad 0<p<1. \end{array}$$

Используя равенство (3), получаем

$$f_\xi(t)=e^{it0}(1-p)+e^{it1}p=(1-p)+pe^{it}.$$

Пример 2. Характеристическая функция биномиальной случайной величины. Имеем

$$\mathrm{P}(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=\overline{0,n},$$

поэтому по определению характеристической функции дискретной случайной величины

$$f_\xi(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{itk}\mathrm{P}(\xi=k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{it}p)^k(1-p)^{n-k}=(e^{it}p+1-p)^n.$$

В последнем равенстве использована формула бинома Ньютона.

Пример 3. Характеристическая функция случайной величины Пуассона. Поскольку

$$\mathrm{P}(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ \lambda>0, \ k=0, 1, \ldots,$$

то

$$f_\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{it}\lambda\right)^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}=\exp\left\{e^{it}\lambda-\lambda\right\}=\exp\left\{\lambda\left(e^{it}-1\right)\right\}.$$

Пример 4. Характеристическая функция геометрической случайной величины. Известно, что

$$\mathrm{P}(\xi=k)=p(1-p)^k, \ k=0, 1, \ldots,$$

поэтому

$$f_\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}(1-p)^k p=p\sum_{k=0}^{\infty}\left((1-p)e^{it}\right)^k=p\frac{1}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Пример 5. Характеристическая функция гипергеометрической случайной величины. Имеем

$$\mathrm{P}(\xi=k)=\frac{C_L^k C_{N-L}^{n-k}}{C_N^n}, \ L\le N, \ n\le N, \max(0,n+L-N)\le k\le \min(L,n).$$

В силу этого

$$f_\xi(t) = \sum_{k=\max(0,\, n+L-N)}^{\min(L,n)} e^{itk} \frac{C_L^k C_{N-L}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Пример 6. Характеристическая функция равномерной на отрезке $[a;b]$ случайной величины. Так как плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b], \\ 0, & x \notin [a;b], \end{cases}$$

по определению характеристической функции для абсолютно непрерывных случайных величин (см. (2))

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x)\,dx = \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{it(b-a)}.$$

Если случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1;1]$, то

$$f_\xi(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пример 7. Характеристическая функция нормальной случайной величины с параметрами $(a,\ \sigma^2)$. Рассмотрим сначала случай, когда $a = 0,\ \ \sigma = 1.$ Тогда

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \ x \in \mathbb{R}, \ \text{и} \ f_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по t:

$$f_\xi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx - \frac{x^2}{2}}\,dx \tag{6}$$

(дифференцирование под знаком интеграла по t законно, так как интеграл в равенстве (6) сходится равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$). Интегрируя (6) по частям, получим

$$f_\xi'(t) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -t\, f_\xi(t).$$

Следовательно, $f_\xi(t)$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} f'_\xi(t) = -t\, f_\xi(t), \\ f_\xi(0) = 1. \end{cases}$$

Решая ее, находим $f_\xi(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $(a,\ \sigma^2)$. Рассмотрим случайную величину

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}.$$

Она является нормальной случайной величиной с параметрами $(0,\ 1)$. Следовательно,

$$f_\eta(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}.$$

В силу равенства $\xi = \sigma\eta + a$, по свойству 3° характеристических функций имеем

$$f_\xi(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пример 8. Характеристическая функция показательной с параметром λ ($\lambda > 0$) случайной величины. Поскольку

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

то

$$f_\xi(t) = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{itx - \lambda x} dx = \lambda \left. \frac{e^{x(it-\lambda)}}{it - \lambda} \right|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пример 9. Характеристическая функция случайной величины Коши. Имеем

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$f_\xi(t) = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx.$$

Поскольку $f_\xi(t)$ – четная функция, то достаточно знать ее значения при $t>0.$ Дифференцируя по t обе части последнего равенства, получим

$$f_\xi'(t) = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-x\sin tx}{x^2+a^2}dx. \qquad (7)$$

Из курса математического анализа известно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx = \pi \quad (t>0), \text{ поэтому } a = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx. \qquad (8)$$

Складывая почленно равенства (7) и (8), получим

$$f_\xi'(t) + a = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2}{x^2+a^2}\cdot\frac{\sin tx}{x}dx.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по $t.$ В результате получим $f_\xi''(t) = a^2 f_\xi(t).$ Следовательно, $f_\xi(t) = c_1e^{at} + c_2e^{-at},$ $t>0.$ Поскольку $f_\xi(t)$ – ограниченная функция на $\mathbb{R},$ то $c_1 = 0,$ а из условия $f_\xi(0)=1$ получаем $c_2 = 1.$ Итак, при $t>0$ $f_\xi(t) = e^{-at},$ но учитывая четность этой функции, окончательно имеем $f_\xi(t) = e^{-a|t|},$ $t\in\mathbb{R}.$

Если плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{a}{\pi\left(a^2 + (x-\theta)^2\right)},\ a>0,\ \theta\in\mathbb{R},$$

то $f_\xi(t) = \exp\left(it\theta - a|t|\right)$ – ее характеристическая функция.

Пример 10. Характеристическая функция случайной величины Лапласа. Поскольку

$$p_\xi(x) = \frac{\lambda}{2}\cdot e^{-\lambda|x-a|}, \quad \lambda>0, \quad a\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R},$$

то

$$f_\xi(t) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\cdot e^{-\lambda|x-a|}dx = \frac{\lambda^2\cdot e^{ita}}{t^2+\lambda^2}.$$

Формулы обращения для характеристических функций

Между множеством характеристических функций и множеством функций распределения существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p_\xi(x)$. По определению характеристическая функция

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x)\,dx$$

есть преобразование Фурье плотности. Из курса математического анализа известно, что если $f_\xi \in L^1(\mathbb{R})$, то существует обратное преобразование Фурье, т. е.

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f_\xi(t)\,dt.$$

В общем случае

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF_\xi(x).$$

Из этой формулы следует, что каждой функции распределения соответствует единственная характеристическая функция.

Справедливо и обратное утверждение: характеристическая функция однозначно определяет функцию распределения. При этом можно дать явное представление функции распределения через характеристическую функцию. Выражения, описывающие это представление, называют *формулами обращения для характеристических функций*. Приведем две такие формулы вместе с другими полезными утверждениями.

Лемма 1. *Пусть случайные величины ξ и η независимы, $F(x)$ – функция распределения случайной величины ξ, а η равномерно распределена на отрезке $[a;b]$. Тогда существует плотность распределения $p_{\xi+\eta}$, которая выражается формулой*

$$p_{\xi+\eta}(x) = \frac{F(x-a) - F(x-b)}{b-a}.$$

Лемма 2. *Пусть случайные величины ξ и η независимы и абсолютно непрерывны, причем плотность распределения $p_\xi(x) = p(x)$ – ограниченная функция. Через $p_\theta(x)$ обозначим плотность распределения случай-*

ной величины $\xi+\theta\eta,\ \theta\in\mathbb{R}$. *Тогда в точках непрерывности* $p(x)$ *справедливо равенство*

$$p(x)=\lim_{\theta\to 0}p_\theta(x).$$

Теорема 2 (формула обращения). *Пусть функции* F *и* f *– соответственно функция распределения и характеристическая функция случайной величины* ξ. *Тогда для любых точек непрерывности* $x+l$ *и* $x-l$ (*для* $l>0$) *функции* F *справедливо равенство*

$$F(x+l)-F(x-l)=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)\frac{\sin tl}{t}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}dt .$$

Теорема 3 (формула обращения). *Пусть функции* F *и* f *– соответственно функция распределения и характеристическая функция случайной величины* ξ. *Тогда для любых точек непрерывности* x_1 *и* x_2 ($x_1<x_2$) *функции* F

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)dt.$$

Следствие 1 **(теорема единственности).** *Каждой характеристической функции соответствует единственная функция распределения.*

Из теоремы единственности и определения характеристической функции вытекает существование биекции между множествами функций распределения и характеристических функций.

Следствие 2. *Пусть характеристическая функция* f_ξ *случайной величины* ξ *интегрируема на* $\mathbb{R}$, *тогда существует плотность распределения* p_ξ *и*

$$p_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f_\xi(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Следствие 3. *Пусть* ξ *– целочисленная случайная величина,* $p_k=$ $=\mathrm{P}(\xi=k)$, *тогда*

$$p_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}f_\xi(t)dt,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots,$$

где f_ξ *– характеристическая функция* ξ.

Непрерывность соответствия между множествами функций распределения и характеристических функций

Соответствие между множеством функций распределения и множеством характеристических функций непрерывно, т. е. является гомеоморфизмом. Чтобы говорить о непрерывности на множестве характеристических функций, будем рассматривать топологию поточечной или равномерной на компактах сходимости. На множестве функций распределения будет задействована топология так называемой слабой сходимости.

Определение 3. *Говорят, что последовательность функций распределения* $\{F_n\}$ *слабо сходится к функции* F, *и обозначают*

$$F_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F,$$

если

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

для любых x, *являющихся точками непрерывности функции* F.

Замечание 3. Данным определением мы будем пользоваться и в том случае, когда F не является функцией распределения.

Слабый предел последовательности функций распределения не обязательно является функцией распределения.

Пример 11. Рассмотрим последовательность функций распределения $\{F_n\}$, где

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < n, \\ 1, & x \ge n, \end{cases}$$

тогда $F_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F$, где $F(x) \equiv 0, \ \ x \in \mathbb{R}$.

Замечание 4. Очевидно, что любая последовательность функций распределения слабо сходится к функции Дирихле.

Лемма 3. *Пусть последовательность функций распределения* $\{F_n\}$ *такая, что для любых* $x \in D$, *где множество* D *всюду плотно на* R, $F_n(x) \to F(x)$ *для некоторой функции* F *при* $n \to \infty$, *тогда* $F_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F$.

Лемма 4 (**первая теорема Хелли**). *Из любой последовательности функций распределения можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, причем предельная функция* F *обладает следующими свойствами:*

1) F *– монотонно не убывает*;
2) F *– непрерывна справа*;
3) $0 \le F(x) \le 1$ *для любых* $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 5 (**вторая теорема Хелли**). *Пусть последовательность функций распределения* $\{F_n\}$ *при* $n \to \infty$ *слабо сходится к функции распределения* F. *Тогда для любой непрерывной и ограниченной функции* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF(x).$$

Справедливо утверждение, обратное второй теореме Хелли.

Утверждение. *Если для любой непрерывной и ограниченной функции* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF(x),$$

где $\{F_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ F *– функции распределения, то* $F_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F$.

Теорема 4 (прямая предельная теорема). *Если последовательность функций распределения* $\{F_n\}$ *слабо сходится к функции распределения* F *при* $n \to \infty$, *то последовательность соответствующих характеристических функций* $\{f_n\}$ *сходится поточечно к характеристической функции* f.

Поточечную сходимость последовательности характеристических функций в этой теореме можно заменить равномерной сходимостью на любом компакте из $\mathbb{R}$.

Теорема 5 (обратная предельная теорема). *Пусть последовательность характеристических функций* $\{f_n\}$ *сходится поточечно к функции* f, *непрерывной в точке* 0. *Тогда последовательность соответствующих функций распределения* $\{F_n\}$ *слабо сходится к функции распределения* F *и* f *является характеристической функцией, соответствующей функции распределения* F.

Производящие функции

Для неотрицательных целочисленных случайных величин удобно пользоваться производящими функциями.

Определение 4. *Пусть* ξ *– целочисленная неотрицательная случайная величина. Производящей функцией* φ_ξ *случайной величины* ξ *называется функция комплексного переменного* z, $|z| \le 1$,

$$\varphi_\xi(z) = \mathrm{M}z^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathrm{P}(\xi = k).$$

Поскольку $|e^{it}| = 1,\ t \in \mathbb{R},$ то очевидно равенство $\varphi_\xi\left(e^{it}\right) = f_\xi(t),$ где f_ξ – характеристическая функция случайной величины ξ.

Свойства производящих функций

1°. *Если* $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ *– независимые случайные величины, то*

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(z) = \varphi_{\xi_1}(z)\cdots\varphi_{\xi_n}(z).$$

2°. *Если* $\mathrm{P}(\eta = a\xi + b) = 1,$ *то* $\varphi_\eta(z) = z^b \varphi_{a\xi}(z).$

3°. *Если* φ_ξ *– производящая функция случайной величины* ξ, *то*

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \varphi_\xi^{(k)}(0)\frac{1}{k!}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

4°. *Если* $\mathrm{M}|\xi|^n < \infty,$ *то* $\varphi_\xi^{(n)}(1) = \mathrm{M}\xi(\xi-1)\cdots(\xi-n+1).$

5°. *Пусть* $\xi_1, \xi_2,\ \ldots$ *– последовательность независимых неотрицательных целочисленных одинаково распределенных случайных величин, а* τ *– независимая с ними целочисленная положительная случайная величина и* $\mathrm{M}\tau < \infty$. *Тогда*

$$\varphi_{S_\tau}(z) = \varphi_\tau\left(\varphi_{\xi_1}(z)\right),$$

где $S_\tau = \xi_1 + \ldots + \xi_\tau$ *(это значит* $S_\tau(\omega) = \xi_1(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega),$ *если* $\omega \in \{\tau = n\},$ $n \in \mathbb{N}$).

Пример 12. Производящая функция биномиальной случайной величины. По определению имеем

$$\varphi_\xi(z) = \mathrm{M}z^\xi = \sum_{k=0}^{n} z^k \mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} z^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= (1 - p + pz)^k,\ |z| \le 1.$$

Пример 13. Производящая функция геометрической случайной величины. Поскольку

$$\mathrm{P}(\xi = k) = (1-p)^k\, p, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то

$$\varphi_\xi(z) = \mathrm{M}\, z^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-p)^k\, p = \frac{p}{1-(1-p)z}, \qquad |z| \le 1.$$

Для неотрицательной целочисленной случайной величины ξ справедливо равенство

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} z^{-k-1} \varphi_\xi(z)\, dz, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Решетчатые распределения

Будем говорить, что дискретная случайная величина ξ имеет *решетчатое распределение*, если существуют числа a и h ($h > 0$) такие, что все возможные значения ξ могут быть представлены в виде $a + kh$, $k \in \mathbb{Z}$. Число h называют *шагом распределения*.

Теорема 6. *Для того чтобы случайная величина ξ имела решетчатое распределение, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $t \ne 0$ модуль ее характеристической функции был равен единице.*

Шаг распределения h называется максимальным, если ни при каких $h_1 > h$ нельзя представить все возможные значения ξ в виде $b + kh_1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 7. *Шаг распределения h будет максимальным тогда и только тогда, когда модуль характеристической функции при $0 < t < \frac{2\pi}{h}$ строго меньше единицы и*

$$\left| f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) \right| = 1.$$

Если $|f_\xi(t)| = |f_\xi(\alpha t)| = 1$ для двух различных точек t и αt, где α – иррациональное число, то случайная величина ξ является вырожденной, т. е. существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\mathrm{P}(\xi = a) = 1.$$

Если $|f_\xi(t)| \equiv 1$, то случайная величина ξ – вырожденная.

§ 2. МНОГОМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть $\overline{\xi}=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

Определение 1. *Многомерной характеристической функцией случайного вектора* $\overline{\xi}$ *назовем функцию*

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{t})=\mathrm{M}e^{i(\overline{t},\,\overline{\xi})},$$

где $\overline{t}=(t_1, \ldots, t_n)\in\mathbb{R}^n$, $(\overline{t}, \overline{\xi})=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k\xi_k$.

По аналогии с одномерным случаем отметим также, что:

1) в общем случае многомерная характеристическая функция допускает представление в виде интеграла Лебега – Стилтьеса:

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{t})=\int\limits_{R^n}e^{i(\overline{t},\overline{x})}dF_{\overline{\xi}}(\overline{x}),\;\; \overline{t}\in\mathbb{R}^n,$$

где $F_{\overline{\xi}}$ – функция распределения случайного вектора $\overline{\xi}$;

2) если случайный вектор $\overline{\xi}$ абсолютно непрерывен, то

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{t})=\int\limits_{R^n}e^{i(\overline{t},\,\overline{x})}p_{\overline{\xi}}(\overline{x})d\overline{x},\quad \overline{t}\in\mathbb{R}^n,$$

где $p_{\overline{\xi}}$ – плотность распределения случайного вектора $\overline{\xi}$;

3) если $\overline{\xi}$ дискретен с возможными значениями $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k, \ldots$ из $\mathbb{R}^n$, то

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{t})=\sum_{k=1}^{\infty}e^{i(\overline{t},\,\overline{x}_k)}\mathrm{P}(\overline{\xi}=\overline{x}_k).$$

Свойства многомерных характеристических функций

1°. *При всех* $\overline{t}\in\mathbb{R}^n$ $\left|f_{\overline{\xi}}(\overline{t})\right|\le 1$, $f_{\overline{\xi}}(\overline{0})=1$.

2°. *Многомерная характеристическая функция равномерно непрерывна в* $\mathbb{R}^n$.

3°. *Если* $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_n$ *– независимые случайные векторы, то*

$$f_{\overline{\xi}_1+\ldots+\overline{\xi}_n}(\overline{t}) = \prod_{k=1}^{n} f_{\overline{\xi}_k}(\overline{t}).$$

4°. *Характеристическая функция случайного вектора* $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $m < n$, *равна*

$$f_{(\xi_1, \ldots, \xi_m)}(t_1, \ldots, t_m) = f_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}(t_1, \ldots, t_m, 0, 0, \ldots, 0).$$

5°. $f_{\xi_1+\ldots+\xi_m}(t) = f_{(\xi_1, \ldots, \xi_m)}(t, t, \ldots, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

6°. *Случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *независимы тогда и только тогда, когда*

$$f_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t_k)$$

для всех $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

7°. *Если* $\overline{\eta} = C\overline{\xi}$ *– линейное преобразование*

$$\eta_l = \sum_{k=1}^{n} C_{lk}\xi_k, \ l = \overline{1,m},$$

с матрицей $C = [C_{lk}]$, $l = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$, *то*

$$f_{\overline{\eta}}(\overline{t}) = f_{\overline{\xi}}(C^*\overline{t}),$$

где C^* *– сопряженная к* C *матрица, преобразующая вектор* $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ *по формуле*

$$\sum_{k=1}^{m} C_{lk}t_l, \ l = \overline{1,n}.$$

Замечание 1. Если $m = n$, $\det C \neq 0$ и существует плотность $p_{\overline{\xi}}(\overline{x})$, то существует плотность распределения случайного вектора $\overline{\eta} = C\overline{\xi}$ и

$$p_{\overline{\eta}}(\overline{x}) = \frac{1}{\det C} p_{\overline{\xi}}(C^{-1}\overline{x}).$$

Замечание 2. Из свойств 3° и 7° следует, что если $\overline{\eta} = C\overline{\xi} + b$, то

$$f_{\overline{\eta}}(\overline{t}) = e^{i(\overline{a}, \overline{t})} f_{\overline{\xi}}(C^*\overline{t}), \ \overline{t} \in \mathbb{R}^n.$$

8°. $f_{\overline{\xi}}(-\overline{t}) = \overline{f_{\overline{\xi}}}(\overline{t}) = f_{-\overline{\xi}}(\overline{t})$, $\overline{t} \in \mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение смешанные моменты, положив по определению

$$m_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \mathrm{M}\,\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n},$$

где α_i *– целые неотрицательные числа,* $i = \overline{1, n}$.

9°. *Если конечны все смешанные моменты* $m_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ *с* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = r$, *то*

$$m_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = i^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} f_{\overline{\xi}}(0, \ \ldots, \ 0)}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}}, \qquad \alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \le r,$$

и

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = \sum_{\alpha=0}^{r} i^{\alpha} \sum_{\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \frac{t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} m_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} + R_r(\overline{t}),$$

где $R_r(\overline{t}) = o\left(|t|^r\right)$ *при* $|t| = |t_1| + \ldots + |t_n| \to 0.$

§ 3. МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем говорить, что случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n)$ имеет *нормальное*, или *гауссовское*, *распределение*, если характеристическая функция имеет вид

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = e^{i(\overline{a}, \overline{t}) - \frac{1}{2}(B\overline{t}, \overline{t})}, \quad \overline{t} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $\overline{a} = (a_1, \ \ldots, \ a_n) \in R^n$, а $B = [b_{lk}]$ – симметричная $n \times n$-матрица, неотрицательно определенная, т. е. $(B\overline{t}, \ \overline{t}) \ge 0$ для любых $\overline{t} \in \mathbb{R}^n$. Случайный вектор с характеристической функцией вида (2) называется также $(\overline{a}, B)$-*нормальным случайным вектором.*

Из равенства (1) и свойства 4° многомерной характеристической функции следует, что каждая компонента ξ_k, $k = \overline{1, n}$, нормального случайного вектора $\overline{\xi}$ имеет характеристическую функцию

$$f_{\xi_k}(t) = e^{ita_k - \frac{b_{kk}}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

т. е. нормально распределена с $\mathrm{M}\xi_k = a_k$, $\mathrm{D}\xi_k = b_{kk}$.

Поскольку конечны все $\mathrm{M}\xi_k^2,\ k=\overline{1,n},$ то конечны и смешанные моменты $\mathrm{M}\xi_k\cdots\xi_l,\ k,\ \ldots,\ l=\overline{1,n},$ поэтому по свойству 9° многомерной характеристической функции имеем

$$\operatorname{cov}(\xi_k,\ \xi_l)=\mathrm{M}(\xi_k-a_k)(\xi_l-a_l)=-\frac{\partial^2 f_{\overline{\xi}_0}(\overline{0})}{\partial t_k\partial t_l}=b_{kl},$$

где $\overline{\xi}_0=\overline{\xi}-\overline{a}.$

Таким образом, матрица $B=[b_{lk}]$ – это *ковариационная матрица* случайного вектора $\overline{\xi}=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n).$

Пусть ковариационная матрица B нормального случайного вектора $\overline{\xi}$ диагональна с одинаковыми диагональными элементами $b_{kk}=\sigma^2>0$ и $\mathrm{M}\overline{\xi}=\overline{0}.$ Такое нормальное распределение называется *сферическим*. Плотность $\overline{\xi}$ в этом случае имеет вид

$$p_{\overline{\xi}}(\overline{x})=\frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k^2\right\}. \tag{2}$$

Из сферического нормального распределения получим вид плотностей нескольких стандартных распределений, имеющих большое значение в математической статистике и других приложениях теории вероятностей.

Хи-квадрат распределение (χ^2-распределение).

Рассмотрим случайную величину

$$\chi_n^2=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2,$$

где $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ – независимые нормально распределенные с параметрами $(0,\ 1)$ случайные величины. Плотность распределения случайной величины χ_n^2 имеет вид

$$p_{\chi_n^2}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}, & x\geq 0,\end{cases} \tag{3}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, а плотность случайной величины χ_n:

$$p_{\chi_n}(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x\geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Распределение с плотностью (3) называется *хи-квадрат распределением* (*χ^2-распределением*) *с n степенями свободы*. Плотность (4) при $n=3$ называется *плотностью распределения Максвелла* и в кинетической теории газов дает распределение абсолютной величины скорости частиц.

Распределение Стьюдента. Пусть случайные величины $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и нормально распределены с параметрами $(0,\ 1)$. В статистике часто используют случайную величину

$$\tau_n=\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2}},$$

называемую *отношением Стьюдента*. Распределение случайной величины τ_n, называемое *распределением Стьюдента с n степенями свободы*, имеет следующую плотность

$$s_n(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Заметим, что при $n\to\infty$ плотность $s_n(x)$ сходится к нормальной плотности

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

F-распределение (распределение Фишера). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – независимые нормальные случайные величины с параметрами $(0,\ 1)$. Обозначим

$$F_{mn}=\frac{\frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k^2}{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j^2}.$$

Распределение случайной величины F_{mn} имеет плотность

$$p_{F_{mn}}(x) = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad x \geq 0 \tag{6}$$

($p_{F_{mn}}(x) = 0,$ если $x < 0$)) и называется *F-распределением* (*распределением Фишера*, *F-распределением Фишера*).

§ 4. СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В этом параграфе рассмотрены различные виды сходимости случайных величин и указана связь между ними.

Сходимость почти наверное (с вероятностью единица)

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится почти наверное (с вероятностью единица) к случайной величине* ξ, *и обозначать*

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} \xi,$$

если

$$\mathrm{P}\left(\omega \in \Omega: \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

Утверждение 1. *Последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится почти наверное (с вероятностью единица) к случайной величине* ξ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\omega \in \Omega: \sup_{m \geq n} \left|\xi_m(\omega) - \xi(\omega)\right| \leq \varepsilon\right) = 1.$$

Сходимость по вероятности

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится по вероятности к случайной величине* ξ, *и обозначать*

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi,$$

если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(\omega \in \Omega: \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Утверждение 2. *Если*

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} \xi,$$

то

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi.$$

Если

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi,$$

то существует подпоследовательность $\left\{\xi_{n_k}\right\}$ такая, что

$$\xi_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{п.н.} \xi.$$

Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(\left|\xi_n - \xi_m\right| > \varepsilon\right) \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Слабая сходимость

Определение 3. *Говорят, что последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *слабо сходится к случайной величине* ξ, *и обозначают* $\xi_n \Rightarrow \xi$, *если последовательность функций распределения* F_{ξ_n} *слабо сходится к* F_ξ *при* $n \to \infty$.

Утверждение 3. Если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$, то $\xi_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \xi$.

Утверждение 4. Если $\xi_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \xi$ и $\mathrm{P}(\xi = c) = 1$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$.

Сходимость в среднем порядка *r*

Определение 4. *Говорят, что последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится в среднем порядка* r $(r > 0)$ *к случайной величине* ξ, *и обозначают* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{r} \xi$, *если* $\mathrm{M}\left|\xi_n - \xi\right|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Утверждение 5. *Если* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{r} \xi$, *то* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$.

Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых $\mathrm{M}\xi_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в среднем порядка r тогда и только тогда, когда $\mathrm{M}\left|\xi_n - \xi_m\right|^r \to 0$, $m, n \to \infty$.

Имеют место следующие соотношения между разными видами сходимости случайных величин (см. диаграмму).

$$\boxed{\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi,\ n \to \infty} \Rightarrow \boxed{\xi_n \xrightarrow{P} \xi,\ n \to \infty} \Leftarrow \boxed{\xi_n \xrightarrow{r} \xi,\ n \to \infty}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\xi_n \Rightarrow \xi,\ n \to \infty}$$

Обратные импликации, вообще говоря, не верны.

П р и м е р 1. Пусть $\Omega = [0;1]$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}([0;1])$, P – мера Лебега. Положим

$$A_n^i = \left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right],\ \xi_n^i(\omega) = I_{A_n^i}(\omega),\ i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда последовательность случайных величин

$$\xi_1^1,\ \xi_2^1,\ \xi_2^2,\ \xi_3^1,\ \xi_3^2,\ \xi_3^3,\ \ldots$$

сходится и по вероятности, и в среднем порядка $r > 0$, но не сходится ни в одной точке $\omega \in [0;1]$.

П р и м е р 2. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ такое же, как и в примере 1, а

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n, & 0 \le \omega \le 1/n, \\ 0, & \omega > 1/n. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится почти наверное (и, следовательно, по вероятности и слабо) к нулю, однако для любого $r > 0$

$$\mathrm{M}\,|\,\xi_n\,|^r = e^{nr}/n \to \infty, \quad n \to \infty.$$

П р и м е р 3. Пусть $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, – последовательность независимых случайных величин и $\mathrm{P}(\xi_n = 1) = p_n$, $\mathrm{P}(\xi_n = 0) = 1 - p_n$. Тогда

$$\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \Leftrightarrow p_n \to 0, \quad n \to \infty;$$

$$\xi_n \xrightarrow{r} 0 \Leftrightarrow p_n \to 0, \quad n \to \infty;$$

$$\xi_n \xrightarrow{п.н.} 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.$$

В частности, при $p_n = 1/n$, последовательность $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в среднем порядка r для любого $r > 0$, но не сходится почти наверное.

Сходимость рядов независимых случайных величин

Пусть $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, – последовательность случайных событий на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Обозначим через A^* множество всех тех и только тех элементарных событий, которые принадлежат бесконечному числу множеств A_n:

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Событие A^* заключается в том, что произойдет бесконечно много событий из последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Лемма 1 **(лемма Бореля – Кантелли).** *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty$, *то* $\mathrm{P}(A^*) = 0$. *Если события* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *независимы и* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty$, то $\mathrm{P}(A^*) = 1$.

Следствие. *Если случайные события* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *независимы, то* $\mathrm{P}(A^*)$ *равно* 0 *или* 1 *в зависимости от того, сходится или расходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

Теперь рассмотрим более общий закон «нуля или единицы» Колмогорова. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ определена последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых случайных величин. Определим σ-алгебру $\mathscr{A}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}$, порожденную случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, как σ-алгебру всех событий A, представимых в виде

$$A = \{\omega \in \Omega : (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \in B\}$$

для некоторого борелевского множества $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Аналогично определяются $\mathscr{A}_{\xi_n} \subset \mathscr{A}_{\xi_n\xi_{n+1}} \subset \ldots$. Минимальную σ-алгебру, содержащую $\mathscr{A}_{\xi_n}$, $\mathscr{A}_{\xi_n\xi_{n+1}}$, ... (т. е. σ-алгебру, порожденную $\mathscr{A}_{\xi_n}$, $\mathscr{A}_{\xi_n\xi_{n+1}}$, ...), обозначим $\mathscr{A}_{\xi_n\xi_{n+1}\ldots}$.

Обратимся к последовательность $\mathscr{A}_{\xi_n\xi_{n+1}\ldots}$, $\mathscr{A}_{\xi_{n+1}\xi_{n+2}\ldots}$, ... Она является последовательностью невозрастающих σ-алгебр. Рассмотрим

$$\mathscr{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_{\xi_n\xi_{n+1}\ldots}.$$

Эта σ-алгебра называется остаточной σ-алгеброй последовательности $\{\xi_n(\omega)\}$, $n \in \mathbb{N}$. События $A \in \mathscr{F}$ также называются остаточными. Это название отражает тот факт, что $A \in \mathscr{F}$ независимо с любым числом конечных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и определяется лишь «бесконечно далекими» значениями последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Примерами остаточных событий являются следующие события:

$$\left\{\omega \in \Omega: \text{ последовательность } \left\{\xi_n(\omega)\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится}\right\},$$

$$\left\{\omega \in \Omega: \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) < +\infty\right\}.$$

Теорема 1 (закон «нуля или единицы» Колмогорова). *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *– независимые случайные величины, то всякое остаточное событие* $A \in \mathscr{F}$ *имеет вероятность* $\mathrm{P}(A)$, *равную* 0 *или* 1.

Из этой теоремы следует, что для независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega)$$

либо с вероятностью 1 сходится, либо с вероятностью 1 расходится. То же можно сказать и о самих последовательностях.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

и A – множество тех элементарных исходов ω, где ряд $\sum \xi_n(\omega)$ сходится к конечному пределу. Из закона «0 или 1» Колмогорова следует, что $\mathrm{P}(A) = 0$ или $\mathrm{P}(A) = 1$, т. е. с вероятностью единица ряд $\sum \xi_n(\omega)$ сходится или расходится.

Приведем критерии, позволяющие определять, сходится или расходится ряд из независимых случайных величин.

Лемма 2 (**неравенство Колмогорова**). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные величины, $\mathrm{M}\xi_i = 0$, $\mathrm{P}(|\xi_i| \le c) = 1$, $i = \overline{1, n}$, тогда для любых $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{(c + \varepsilon)^2}{\mathrm{M}S_n^2}. \tag{1}$$

Теорема 2 (теорема Колмогорова – Хинчина). *Пусть* $\mathrm{M}\xi_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

1) *Тогда если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}\xi_n^2 < \infty, \tag{2}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \tag{3}$$

сходится с вероятностью единица.

2) *Если существует* $c \in \mathbb{R}$ *такое, что* $\mathrm{P}\left(\left|\xi_k\right| \le c\right) = 1,\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots$ *(равномерная ограниченность последовательности случайных величин), то верно и обратное: из сходимости с вероятностью единица ряда* (3) *следует условие* (2).

Пример 4. Пусть $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ – последовательность независимых случайных величин Бернулли таких, что

$$\mathrm{P}\left(\xi_n = 1\right) = \mathrm{P}\left(\xi_n = -1\right) = 1/2.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n,$$

где $\left|a_n\right| \le c$ для $n = 1,\ 2,\ \ldots,$ сходится с вероятностью единица тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Теорема 3 (теорема о «двух рядах»). *Для сходимости с вероятностью единица ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *из независимых случайных величин достаточно, чтобы одновременно сходились два ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}\xi_n \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}\xi_n.$$

Если к тому же существует $c < \infty$ *такое, что* $\mathrm{P}\left(\left|\xi_k\right| \le c\right) = 1$ *для всех* $k \in \mathbb{N},$ *то это условие является и необходимым.*

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие сходимости ряда без предположения об ограниченности случайных величин.

Пусть c – некоторая константа и

$$\xi^c = \begin{cases} \xi, & |\xi| \le c, \\ 0, & |\xi| > c. \end{cases}$$

Теорема 4 (теорема Колмогорова о «трех рядах»). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *– последовательность независимых случайных величин. Для сходимости почти наверное ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *необходимо, чтобы для любого* $c > 0$ *сходились ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}\xi_n^c, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}\xi_n^c, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(|\xi_n| \ge c\right),$$

и достаточно, чтобы эти ряды сходились при некотором $c > 0$.

§ 5. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Настоящий параграф посвящен одному из самых замечательных результатов теории вероятностей: при широких условиях суммы большого числа независимых малых случайных слагаемых имеют распределение, близкое к нормальному (гауссовскому). Значение этого результата выходит далеко за рамки теории вероятностей. Он является основой применения нормального распределения при решении многих практических задач.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – произвольное вероятностное пространство, $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – последовательность случайных величин на $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

Определение 1. *Последовательность случайных величин* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *удовлетворяет центральной предельной теореме, если для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - \mathrm{M}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{\sqrt{\mathrm{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}} \le x \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Простейший вариант центральной предельной теоремы, относящийся к суммам одинаково распределенных слагаемых, таков:

Теорема 1. *Пусть случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *независимы, одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания* $\mathrm{M}\xi_n = a$ *и дисперсии* $\mathrm{D}\xi_n = \sigma^2 > 0$, $n \ge 1$, *тогда они удовлетворяют центральной предельной теореме, т. е. для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le x \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x).$$

Пример 1. Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Пусть μ_i – число успехов в i-м испытании, тогда

$$\mathrm{M}\mu_i = p, \quad \mathrm{D}\mu_i = p(1-p), \quad i=\overline{1,n}.$$

Обозначим

$$S_n = \mu_1 + \ldots + \mu_n.$$

По теореме 1 имеем для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x).$$

Это утверждение представляет собой не что иное, как интегральную теорему Муавра – Лапласа.

Пример 2. Ошибки измерения. При измерении некоторой величины a получаем приближенное значение ξ. Сделанная ошибка $\delta = \xi - a$ может быть представлена в виде суммы двух ошибок

$$\delta = (\xi - \mathrm{M}\xi) + (\mathrm{M}\xi - a),$$

первая из которых $\xi - \mathrm{M}\xi$ называется *случайной ошибкой*, а вторая $\mathrm{M}\xi - a$ – *систематической ошибкой*. Хорошие методы измерения не должны иметь систематической ошибки, поэтому далее будем полагать $\mathrm{M}\xi = a$ и, следовательно, $\mathrm{M}\xi - a = 0$. Пусть $\mathrm{D}\delta = \tau^2$. Для уменьшения случайной ошибки δ производят n независимых измерений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и принимают за значение измеряемой величины a среднее арифметическое

$$S_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Какая при этом допускается погрешность? По теореме 1

$$\mathrm{P}\left(\left|S_n - a\right| \le \varepsilon\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n}/a}^{\varepsilon\sqrt{n}/a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Пример 3. Логарифмически нормальное распределение. В антропологии обычно рост или вес человека определенного возраста и пола считают нормальной случайной величиной. Однако во многих случаях с гораздо большим основанием можно считать, что логарифмы этих параметров имеют нормальное распределение. Если случайная величина η такова, что $\xi = \log\eta$ имеет нормальное распределение, то говорят, что η имеет *логарифмически нормальное распределение*, или *логнормальное рас-*

пределение. Логнормальности роста и веса можно дать теоретическое обоснование. Например, вес получается в результате воздействия многих независимых причин, которые воздействуют мультипликативно, т. е.

$$\eta = \eta_1 \cdots \eta_n,$$

где η_i – близкие к единице независимые случайные величины. В этом случае

$$\log \eta = \sum_{i=1}^{n} \log \eta_i$$

и $\log \eta$ в силу теоремы 1 имеет в пределе нормальное распределение.

Пример 4. С помощью центральной предельной теоремы можно доказать и чисто аналитические факты. Например, что

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

В самом деле, пусть S_n – случайная величина Пуассона с параметром n. Тогда

$$\mathrm{P}(S_n \le n) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Но $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где случайные величины $\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n$ – независимые пуассоновские случайные величины, $\mathrm{M}\xi_k = 1$, $k = \overline{1,n}$. По теореме 1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(S_n \le n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}.$$

Центральная предельная теорема имеет место при некоторых условиях и для неодинаково распределенных независимых слагаемых.

Определение 2. Будем говорить, что для последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *выполнено условие Линдеберга*, если для произвольного $\tau > 0$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k|>\tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k$, $a_k = \mathrm{M}\xi_k$, F_k – функция распределения случайной величины ξ_k.

Теорема 2 (теорема Линдеберга). *Если для последовательности независимых случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *выполнено условие Линдеберга, то для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left(\frac{(\xi_1 + \ldots + \xi_n - (a_1 + \ldots + a_n))}{B_n} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x).$$

Следствие 1 (**теорема Ляпунова**). *Если для последовательности независимых случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *существует такое положительное число* δ, *что при* $n \to \infty$

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \to 0 \ (\textit{условие Ляпунова}),$$

то для этой последовательности имеет место центральная предельная теорема.

Иногда теорему Ляпунова формулируют следующим образом: *пусть случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *независимы, имеют конечные*

$$a_k = \mathrm{M}\xi_k, \ b_k^2 = \mathrm{M}(\xi_k - a_k)^2, \ c_k^3 = \mathrm{M}|\xi_k - a_k|^3$$

и

$$\frac{C_n}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где $C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} c_k^3$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. *Тогда они удовлетворяют центральной предельной теореме.* Это утверждение является следствием теоремы 2.

Теорема 1 также есть следствие теоремы Линдеберга.

Определение 3. *Будем говорить, что случайные величины*

$$\xi_{kn} = \frac{\xi_k - a_k}{B_n}, \ \ k = \overline{1,n}, \ \ n \ge 1,$$

пренебрежимо малы (равномерно сходятся к нулю), если для любого $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\max_{k \le n} \mathrm{P}(|\xi_{kn}| > \varepsilon) \to 0. \tag{1}$$

Условие Линдеберга не является необходимым для сходимости распределения

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - a_k\right)/B_n$$

к нормальному $N(0,\ 1)$ распределению. Это показывает следующий пример.

Пример 5. Пусть $\xi_{1n}=\eta$, $\xi_{2n}=0$, …, $\xi_{nn}=0$, η – нормально распределенная случайная величина с параметрами $(0,\ 1)$. Тогда

$$\mathrm{M}\,\xi_{kn}=0, \quad \sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}\xi_{kn}=1, \quad \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_{kn}\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

но условие Линдеберга не выполнено.

Однако если потребовать, чтобы вместе со сходимостью

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_{kn}\le x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

было выполнено условие пренебрежимой малости, то условие Линдеберга становится необходимым.

Теорема 3. *Если последовательность независимых случайных величин* $\{\xi_{kn}\}$ *удовлетворяет условию (1) и для любого* $x\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_{kn}\le x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

то выполнено условие Линдеберга.

Будем говорить, что для последовательности ξ_k, $k\ge 1$, выполняется *условие равномерной малости*, если

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n}\frac{\sigma_k}{B_n}=0, \tag{2}$$

где $\sigma_k=\sqrt{D\xi_k}$.

Теорема 3 будет справедлива, если условие (1) заменить на (2). Кроме того, условие (1) в теореме 3 можно заменить на следующие:

$$\frac{\sigma_n}{B_n}\to 0,\ B_n\to\infty\ (n\to\infty).$$

§ 6. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть на произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ задана последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *Говорят, что последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет закону больших чисел, если*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathrm{M}\xi_1 + \ldots + \mathrm{M}\xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0, \tag{1}$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathrm{M}\xi_1 + \ldots + \mathrm{M}\xi_n}{n} \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теорема 1. *Последовательность случайных величин удовлетворяет закону больших чисел тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{M}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathrm{M}\xi_k) \right)^2}{n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathrm{M}\xi_k) \right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2}$$

Теорема 2 (теорема Маркова). *Если*

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{3}$$

то последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет закону больших чисел.*

Теорема 3 (теорема Чебышева). *Пусть случайные величины* ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *независимы и существует константа* $C > 0$ *такая, что* $\mathrm{D}\xi_n \le C$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда они удовлетворяют закону больших чисел.*

Замечание 1. Для справедливости теоремы достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k = 0, \text{ либо, что то же самое, } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{D}\xi_n = 0.$$

Теорема 3 является следствием теоремы 1.

Теорема 4 (теорема Хинчина). *Пусть случайные величины последовательности* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *независимы, одинаково распределены и имеют конечные* $\mathrm{M}\xi_n = a$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда они удовлетворяют закону больших чисел, т. е.*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} a. \tag{4}$$

Теорема 5 (теорема Бернулли). *Пусть* μ_n *– число успехов в* n *испытаниях схемы Бернулли с вероятностью* p *успеха в каждом испытании, тогда*

$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} p.$$

Определение 2. *Говорят, что последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет усиленному закону больших чисел, если*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathrm{M}\xi_1 + \ldots + \mathrm{M}\xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} 0.$$

Теорема 6 (неравенство Колмогорова). *Если случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *независимы и имеют конечные математические ожидания и дисперсии, то для любого* $\varepsilon > 0$ *всех* $n \in N$ *выполнено*

$$\mathrm{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\left(\xi_i - \mathrm{M}\,\xi_i\right)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}\xi_k.$$

Теорема 7 (теорема Колмогорова). *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *– независимые случайные величины,*

$$\mathrm{M}\,\xi_n = 0,\ \ \mathrm{D}\xi_n = \sigma_n^2,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty.$$

Тогда

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} 0,$$

т. е. для этой последовательности справедлив усиленный закон больших чисел.

Теорема 8 (теорема Колмогорова). *Пусть* $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Для выполнения усиленного закона больших чисел, т. е. для того, чтобы*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} a,$$

необходимо и достаточно существование конечного математического ожидания $\mathrm{M}\,\xi_k = a$, $k \in \mathbb{N}$.

Следствие (**теорема Бореля**). *В n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью p успеха в каждом испытании для числа успехов μ_n имеет место усиленный закон больших чисел, т. е.*

$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} p.$$

Пример 1. Полиномы Бернштейна. Закон больших чисел используется для доказательства известной из курса математического анализа теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

Проводятся независимые испытания, в каждом из которых успех наступает с вероятностью x, а противоположное событие – с вероятностью $1-x$ ($0<x<1$). Пусть μ_n – количество успехов в n испытаниях, $f\in C[a;b]$. Известно, что

$$\mathrm{P}(\mu_n = k) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad k=\overline{0,n},$$

поэтому

$$B_n(x) = \mathrm{M} f\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{5}$$

Многочлен $B_n(x)$ называется *полиномом Бернштейна* для функции $f(x)$.

Теорема 9 (теорема Бернштейна). *Последовательность многочленов*

$$\{B_n(x)\},\ n\in\mathbb{N},$$

определенных равенством (5), *сходится к непрерывной функции f равномерно относительно $x\in[0;1]$.*

Пример 2. Метод Монте-Карло. Вычислим интеграл

$$\int_0^1 g(x)\,dx$$

для некоторой непрерывной функции g. Пусть $\{\xi_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, – последовательность независимых равномерно распределенных на $[0;1]$ случайных величин. Заметим, что

$$\mathrm{M}g(\xi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,p_{\xi_n}(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Можно утверждать, что с вероятностью 1

$$\frac{g(\xi_1)+g(\xi_2)+\ldots+g(\xi_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}g(\xi_n) = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Таким образом, теоремы о законе больших чисел дают теоретическое обоснование алгоритма для приближенного подсчета интегралов

$$\int_0^1 g(x)\,dx.$$

1. Моделируем последовательность $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, независимых равномерно распределенных на отрезке $[0;1]$ случайных величин.

2. Полагаем

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \frac{g(\xi_1)+g(\xi_2)+\ldots+g(\xi_n)}{n}.$$

Описанный метод называется *методом статистических испытаний вычисления интегралов,* или *методом Монте-Карло*. Он особенно эффективен при вычислении интегралов большой кратности.

Пример 3. Применение усиленного закона больших чисел к теории чисел. Пусть $\Omega = [0;1)$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}([0;1))$, P – мера Лебега. Рассмотрим двоичное разложение $\omega = 0,\omega_1\omega_2\ldots$ чисел $\omega \in \Omega$ (с бесконечным количеством нулей) и определим случайные величины $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$, …, полагая $\xi_n(\omega) = \omega_n$. Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $x_1, \ldots, x_n$, принимающих значения 0 или 1,

$$(\omega:\ \xi_1(\omega) = x_1,\ \ldots,\ \xi_n(\omega) = x_n) =$$
$$= \left(\omega:\ \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n}{2^n} \le \omega \le \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right),$$

то вероятность этого события равна $1/2^n$. Из этого вытекает, что $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких, что

$$\mathrm{P}(\xi_n = 0) = \mathrm{P}(\xi_1 = 0) = 1/2,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из усиленного закона больших чисел получаем следующий результат Бореля: *почти все числа полуинтервала* $[0;1)$ *нормальны в том смысле, что с вероятностью единица доля нулей и единиц в их двоичном разложении стремится к* $1/2$, *т. е.*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{\{\xi_k=1\}} \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} \frac{1}{2}.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

(6 часов)

Тема: Характеристические функции и предельные теоремы теории вероятностей

Необходимые понятия и теоремы: характеристические функции и их свойства, формулы обращения, прямая и обратная предельные теоремы, центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых, теорема Линдеберга, теорема Ляпунова, закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, теоремы Маркова, Чебышева, Хинчина, Бернулли, Колмогорова, сходимость рядов из независимых случайных величин.

Литература: [5, с. 149–155, 178–185]; [8, с. 199–272]; [14, с. 29–35, 52–56]; [19, с. 122–190]; [27, с. 129–154, 174–188]; [34, с. 292–316, 342–357, 376–384].

Задание 4.1. Могут ли следующие функции быть характеристическими? Если да, то какие распределения им соответствуют? Если нет, то почему?

1	а) $\cos t$;	б) $1/(1+i\,\vert t\vert)$;	6	а) $1/(1-it)$;	б) $\vert\cos t\vert$;
2	а) $\cos^2 t$;	б) $\exp(-t^6)$;	7	а) $(\sin t)/t$;	б) $\cos(t^2)$;
3	а) $\exp(-t^2)$;	б) $\cos(t\sqrt{t})$;	8	а) $\exp(-\vert t\vert)\cos t$;	б) $1+\sin t$;
4	а) $\exp(-\vert t\vert)$;	б) $1/(1+t^6)$;	9	а) $(\sin^2 t)/t^2$;	б) $\sin t$;
5	а) $1/(1+t^2)$;	б) $\exp(-i\,\vert t\vert)$;	10	а) $\cos^3 t$;	б) $1/(1+t^4)$;

Задание 4.2. Случайная величина η является средним арифметическим n независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным m, и дисперсией, равной d. Найти вероятность того, что η принимает значения в промежутке (k_1, k_2).

1) $n=3200,\ m=1,\ d=2,\ k_1=0{,}95,\ k_2=1{,}05$;

2) $n=1600,\ m=2,\ d=4,\ k_1=1{,}95,\ k_2=2{,}05$;

3) $n=1800,\ m=1,\ d=2,\ k_1=0{,}95,\ k_2=1{,}05$;

4) $n=1200,\ m=2,\ d=3,\ k_1=1{,}95,\ k_2=2{,}05$;

5) $n=1600,\ m=3,\ d=4,\ k_1=2{,}95,\ k_2=3{,}05$;

6) $n=800,\ m=1,\ d=2,\ k_1=0{,}95,\ k_2=1{,}05$;

7) $n=800,\ m=3,\ d=8,\ k_1=2{,}95,\ k_2=3{,}05$;

8) $n=1600,\ m=1,\ d=4,\ k_1=0{,}95,\ k_2=1{,}05$;

9) $n=1000,\ \ m=2,\ d=2,\ k_1=1{,}95,\ k_2=2{,}05;$

10) $n=1200,\ \ m=4,\ d=1,\ k_1=0{,}95,\ k_2=1{,}05.$

Задание 4.3. Пусть $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\ \ n\geq 1$, – независимые одинаково распределенные случайные величины. Найти функции распределения случайных величин $\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $\varsigma_n=\dfrac{\eta_n}{n}$, $\chi_n=\dfrac{\eta_n}{\sqrt{n}}$, $\theta_n=\dfrac{\eta_n-M\eta_n}{\sqrt{n}}$ в том случае, когда ξ_k ($1\ \leq\ k\ \leq\ n$) имеют распределения:

1	Бернулли;	6	Лапласа;
2	Биномиальное;	7	Нормальное;
3	Пуассона;	8	Экспоненциальное;
4	Геометрическое;	9	Равномерное на [0, 1];
5	Гипергеометрическое;	10	Коши.

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}F_{\theta_n}(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}F_{\chi_n}(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}F_{\varsigma_n}(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}F_{\eta_n}(x)$, где $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ.

Задание 4.4. Установить, будут ли выполнены центральная предельная теорема, закон больших чисел, усиленный закон больших чисел для последовательности независимых случайных величин $\xi_n, n\in\mathbb{N}$, с распределениями, задаваемыми следующим образом:

1) $P\left\{\xi_n=\pm 2^n\ \right\}=\dfrac{1}{2}$;

2) $P\{\xi_n=\pm 2^n\}=\dfrac{1}{2^{2n+1}}$, $P\{\xi_n=0\}=1-\dfrac{1}{2^{2n}}$;

3) $P\{\xi_n=\pm n\}=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, $P\{\xi_n=0\}=1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

4) $P\{\xi_n=\pm\sqrt{n}\}=\dfrac{1}{n}$, $P\{\xi_n=0\}=1-\dfrac{2}{n}$;

5) $P\{\xi_n=\pm 1\}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$, $P\{\xi_n=\pm 2\}=\dfrac{1}{2^{n+1}}$;

6) $P\{\xi_n=\pm n\}=\dfrac{1}{2^n}$, $P\{\xi_n=0\}=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$;

7) $P\{\xi_n=\pm\sqrt{n}\}=\dfrac{1}{2n^{\frac{2}{3}}}$, $P\left\{\xi_n=0\right\}=1-\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$;

8) $P\left\{\xi_n=\pm\sqrt{n}\right\}=\dfrac{1}{2n}$, $P\left\{\xi_n=0\right\}=1-\dfrac{1}{n}$;

9) $P\{\xi_n = \pm 1\} = \frac{1}{n}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{2}{n}$;

10) $P\{\xi_n = \pm n\} = \frac{1}{n^2}$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{2}{n^2}$.

Задачи

1. Доказать, что для любой неотрицательно определенной функции $f(t), t \in \mathbb{R}$, верно равенство $\overline{f(t)} = f(-t)$ *и неравенство* $f(0) \geq |f(t)|$.

2. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ при условии, что случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют одинаковое распределение:

ξ_i $(i=1,2)$	0	1	2
p	1/3	1/3	1/3

3. Случайная величина ξ принимает значения 1 и –1 с вероятностью 1/2 каждое. Вычислить ее характеристическую функцию.

4. Доказать, что функция $\cos(t)\cos(3t)$ является характеристической и найти соответствующее распределение вероятностей.

5. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющую Г-распределение с плотностью

$$p(x, \alpha, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx.$

6. Используя аппарат характеристических функций, найти плотность распределения случайной величины

$$\lambda_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

где ξ_i независимы и нормально распределены с параметрами (0, 1).

7*. Доказать, что функция, определяемая равенствами

$$f(t) = 1 - \frac{|t|}{a} \text{ при } |t| \leq a, \quad f(t) = 0 \quad \text{при } |t| > a,$$

где $a > 0$ – константа, является характеристической.

8. Доказать, что функция, определяемая равенствами

$$f(t) = f(-t),\ f(t+2a) = f(t),\ f(t) = \frac{a-t}{a} \text{ при } 0 \le t \le a,$$

где $a > 0$ – константа, является характеристической.

9. Пусть $f(t)$ – характеристическая функция, $f(t) = 0$ при $|t| > a$, где $a > 0$ – константа. Доказать, что $\varphi(t)$, обладающая периодом $2a$ и удовлетворяющая равенству $\varphi(t) = f(t)$ при $|t| \le a$, также является характеристической функцией.

10. Пусть $f(t),\ t \in \mathbb{R},$ является характеристической функцией. Доказать, что следующие функции переменной $t \in \mathbb{R}$ характеристические:

1) $|f(t)|^2$; 2) $\operatorname{Re} f(t)$; 3) $\int\limits_0^1 f(ts)\,ds$; 4) $\exp\{f(t)-1\}$.

11. Доказать, что характеристическая функция вещественна тогда и только тогда, когда она четна.

12. Доказать, что четная характеристическая функция представима в виде

$$f_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\,dF_\xi(x).$$

13. Доказать, что характеристическая функция четна тогда и только тогда, когда соответствующая функция распределения $F(x)$ удовлетворяет соотношению $F(x) = 1 - F(-x-0)$.

14. Доказать, что $f_\xi(t) \ge 1 - \sigma^2 t^2 / 2,$ если характеристическая функция $f(t)$ вещественна, $\mathrm{M}\xi = 0, \mathrm{D}\xi = \sigma^2$.

15. Показать, что для характеристической функции $f(t),\ t \in \mathbb{R},$ имеют место следующие неравенства:

1) $1 - \operatorname{Re} f(2t) \le 4(1 - \operatorname{Re} f(t))$;

2) $1 - |f(2t)|^2 \le 4\left(1 - |f(t)|^2\right)$;

3) $1 - |f(2t)| \le 2\left(1 - |f(t)|^2\right)$;

4) $1 - |f(2t)| \le 4(1 - |f(t)|)$.

16*. Доказать, что для любой вещественной характеристической функции $f(t),\ t \in \mathbb{R},$ справедливо неравенство

$$1 + f(2t) \ge 2[f(t)]^2.$$

17. Пусть $F(x)$ – функция распределения, $f(t)$ – соответствующая характеристическая функция. Доказать, что

$$t^2 \int_{-r}^{r} x^2 dF(x) \le 3|1 - f(t)| \text{ при } |t| \le r.$$

18. Доказать, что если F – функция распределения и f – соответствующая характеристическая функция, то при любом $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-itx} dt = F(x) - F(x-0).$$

19. Доказать, что если F – функция распределения, f – ее характеристическая функция и x_k – абсциссы скачков F, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt = \sum_k \left[F(x_k) - F(x_k - 0)\right]^2.$$

20. Доказать, что характеристическая функция абсолютно непрерывной случайной величины стремится к 0 при $t \to \infty$.

21. Случайные величины ξ_1, ξ_2 и α независимы. Характеристические функции ξ_1 и ξ_2 равны соответственно $f_1(t)$ и $f_2(t)$. $\mathrm{P}(\alpha = 1) = 1 - \mathrm{P}(\alpha = 0) = p \in (0,1)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\eta = \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2$.

22. Пусть ξ и η – независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $f(t)$. Найти характеристическую функцию разности $\xi - \eta$.

23. Доказать, что можно найти такие независимые случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3, что распределения ξ_2 и ξ_3 различны, а функции распределения сумм $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 + \xi_3$ одинаковы.

24. Пусть f_1, f_2, f_3 – характеристические функции и $f_1 f_2 = f_1 f_3$. Следует ли отсюда, что $f_2 = f_3$?

25. Пусть f_1 и f_2 – характеристические функции, $0 \le \theta \le 1$. Показать, что функция $(1-\theta) f_1 + \theta f_2$ является характеристической.

26*. Доказать, что если $\mathrm{M}|\xi| < \infty$, то

$$\mathrm{M}|\xi| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re} f(t)}{t^2} dt,$$

где f – характеристическая функция ξ, а $\operatorname{Re} f$ – вещественная часть функции f. Кроме того,

$$\mathrm{M}|\xi| = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} f'(t)}{t}dt.$$

27. Показать, что из дифференцируемости в нуле характеристической функции случайной величины ξ не следует, что существует $\mathrm{M}\xi$. Для этого рассмотрите распределение

$$\mathrm{P}\{\xi = 2k\} = \mathrm{P}\{\xi = -2k\} = \frac{c}{k^2 \ln k}, k = 2,3,\ldots .$$

28. При каких вещественных α функция

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|^{\alpha}, |t| \le 1, \\ 0, \qquad |t| > 1 \end{cases}$$

является характеристической, а при каких – нет?

29. Доказать, что при сложении независимых случайных величин третьи центральные моменты суммируются, а четвертые – нет.

30. Закон распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется *устойчивым*, если для любых $a_1 > 0$, $b_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 > 0$, $b_2 \in \mathbb{R}$ найдутся такие $a_3 > 0$, $b_3 \in \mathbb{R}$, что

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(a_3x + b_3),$$

где $*$ – операция свертки.

Выяснить, какие из нижеприведенных законов принадлежат к устойчивому типу:

1) биномиальное распределение;
2) равномерное на отрезке $[a; b]$ распределение;
3) нормальное распределение;
4) экспоненциальное распределение;
5) распределение Пуассона.

31*. Распределение случайной величины ξ называют решетчатым с шагом решетки h, если существует a такое, что

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(\xi = a + kh) = 1 .$$

Доказать, что случайная величина ξ с характеристической функцией $f(t)$ имеет решетчатое распределение с шагом h тогда и только тогда, когда $|f(2\pi/h)| = 1$.

32. Для неотрицательной целочисленной случайной величины ξ с производящей функцией $\varphi_{\xi}(z)$ найти производящие функции случайных величин $\xi + n$ и $n\xi$, где n – целое неотрицательное число.

33. Найти распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

1) $(1+z)^2/4$;

2) $p(1-qz)^{-1}$, $p,q>0, p+q=1$;

3) $\exp(\lambda(z-1))$, $\lambda>0$;

4) $(p+qz)^n$, $p,q>0, p+q=1$;

5) $\dfrac{2e}{e^2-1}\operatorname{ch} z$;

6) $1+\dfrac{1-z}{z}\ln(1-z)$.

34*. Доказать, что функция $\varphi(z)=|z|$ не может быть производящей функцией вероятностного распределения.

35. Пусть ξ,η – независимые случайные величины, причем $\xi+\eta$ принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями 1/3 каждое. Доказать, что одна из величин ξ,η тривиальна.

36. Пусть $\xi_1,\xi_2,...$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $F(x)$ – функция распределения ξ_1, и пусть η – положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\xi_1,\xi_2,...$ и имеющая производящую функцию $\varphi(z)$. Доказать, что функция распределения случайной величины $\max\{\xi_1,...,\xi_\eta\}$ равна $\varphi(F(x))$.

37. Доказать, что из равенства

$$f_{(\xi,\,\eta)}(t,\,t)=f_\xi(t)\,f_\eta(t),\ t\in\mathbb{R},$$

не следует независимость случайных величин ξ и η. Здесь $f_{(\xi,\,\eta)}$ – характеристическая функция двумерной случайной величины.

38. Пусть $f_\xi(t)$ – характеристическая функция n-мерной случайной величины, $A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ – линейное отображение. Доказать, что $f_\xi(A(t))$ – характеристическая функция m-мерной случайной величины и найти распределение этой случайной величины.

39. Пусть $F(x)$ – функция распределения с характеристической функцией $f(t)$. Найти n-мерную функцию распределения $G(x_1,...,x_n)$, соответствующую характеристической функции $g(t_1,\,...,t_n)=f(t_1+...+t_n)$.

40*. Доказать, что если $\xi_n\to\xi$ почти наверное и $\mathrm{M}|\xi_n-\eta|^p\to 0$ для некоторого $p>0$, то $\mathrm{P}(\xi=\eta)=1$.

41. Пусть $\xi_1,\xi_2,...$ – последовательность случайных величин такая, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathrm{M}|\xi_n|^p<\infty$ для некоторого $p>0$. Доказать, что $\xi_n\to 0$ почти наверное.

42. Пусть последовательность функций распределения $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, слабо сходится к непрерывной функции распределения F. Показать, что эта сходимость равномерна.

43. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых нормально распределенных случайных величин,

$$\mathrm{M}\xi_k = 0,\ \ k \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{D}\xi_1 = 1,\ \ \mathrm{D}\xi_k = 2^{k-2},\ \ k \geq 2.$$

Показать, что в этом случае условие Линдеберга не выполнено, но в то же время справедлива центральная предельная теорема.

44. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathrm{M}\xi_1 = 0$, $\mathrm{M}\xi_1^2 = 1$. Доказать, что

$$\max\left(\frac{|\xi_1|}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{|\xi_n|}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0,\ \ n \to \infty.$$

45. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин. Доказать, что случайные величины $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\xi_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\xi_n$ являются вырожденными.

46. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Доказать, что с вероятностью единица произойдет конечное число событий $A_n = \left(|\xi_n| \geq \sqrt{n}\right)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{D}\xi_1$ конечна.

47. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин,

$$\mathrm{P}\left(\xi_n = 0\right) = 1 - 1/n,\ \ \mathrm{P}\left(\xi_n = 1\right) = 1/n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что эта последовательность сходится в среднем порядка $r > 0$, но не сходится почти наверное.

48. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин,

$$\mathrm{P}\left(\xi_n = 0\right) = 1 - 1/n,\ \ \mathrm{P}\left(\xi_n = n^{2/r}\right) = 1/n,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ r > 0.$$

Показать, что эта последовательность сходится по вероятности, но не сходится в среднем порядка r.

49. Пусть $\xi_n = a_n \eta$, где числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, а $\mathrm{M}|\eta|^r = \infty$, $r > 0$. Доказать, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится почти наверное, но не сходится в среднем порядка r.

50. Пусть $\xi_n = n^2 \xi \exp(-n\xi)$, $n \in \mathbb{N}$, где ξ – экспоненциальная случайная величина. Показать, что $\xi_n \to 0$ при $n \to \infty$ поточечно, но $\mathrm{M}\xi_n$ не сходится к нулю при $n \to \infty$.

51. Пусть $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, где ξ_j – независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathrm{M}\xi_j = 0$, $\mathrm{D}\xi_j = 1$, $j = \overline{1,n}$. Доказать, что последовательность $\{S_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится слабо, но не сходится в среднем порядка 2.

52. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Вытекает ли из сходимости $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ сходимость $\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} 0$?

53. Доказать, что если ряд из независимых случайных величин сходится почти наверное к постоянной, то каждый член ряда есть почти наверное постоянная.

54. Доказать, что ряд из независимых случайных величин сходится почти наверное тогда и только тогда, когда он сходится по вероятности.

55. Дана последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, распределенных но нормальному закону с параметрами $(0, \sigma_n^2)$. Найти предельный закон распределения $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ при $n \to \infty$, если $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 = \sigma^2 < \infty$.

56. Пусть ξ_1, ξ_2, … – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n \le x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

57. Пусть $P_n = \max_{0 \le k \le n} \mathrm{P}\{\mu_n = k\}$, где μ_n – число успехов в схеме Бернулли, для которой вероятность успеха в каждом независимом испытании равна p. Найти $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot P_n$.

58. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с ненулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями, $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$. Найти $\mathrm{D}\xi_i$, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\eta_n}{\sqrt{n}} > 1\right\} = \frac{1}{3}.$$

59. Случайные величины $\xi_k, k = 1, 2, ...$ независимы, причем случайные величины ξ_k с четными номерами k имеют распределение Бернулли с параметром p, $0 < p < 1$, а с нечетными номерами – нормальное распределение $N(\alpha, \sigma^2)$, $\alpha \neq 0$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} F_{\eta_n}(x), \eta_n = \frac{\alpha \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k}}.$$

60. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин с конечными дисперсиями $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$. Доказать, что для любых конечных вещественных чисел a и b

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{a \le \eta_n \le b\} = 0.$$

61. Пусть заданы m последовательностей случайных величин $\xi_n^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., m$, $\xi_n^{(k)} \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi^{(k)}$, $n \to \infty$, а $\Phi(x_1, x_2, ..., x_m)$ – непрерывная функция аргументов $x_1, x_2, ..., x_m$, определенная на $\mathbb{R}^m$. Доказать, что

$$\Phi\left(\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, ..., \xi_n^{(m)}\right) \xrightarrow{\mathrm{P}} \Phi\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, ..., \xi^{(m)}\right), \ n \to \infty.$$

62. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке [0, 1] случайных величин. Доказать, что

$$\eta_n = \left(e^n \prod_{k=1}^{n} \xi_k\right) \xrightarrow{\mathrm{P}} 1, \ n \to \infty.$$

63. Пусть $\left\{\xi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $M\xi_n = \alpha$, $D\xi_n = \sigma^2$, $P\left\{\omega \middle| \xi_1(\omega) = 0\right\} = 0$. Доказать, что последовательность случайных величин

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

сходится по вероятности и вычислить предел.

64. Доказать, что радиус сходимости r степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \xi_n z^n$, где $\{\xi_n\}$ – независимые случайные величины, есть почти наверное постоянная.

65. Пусть $\left\{\xi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Доказать, что если

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M \frac{\xi_n^2}{1 + |\xi_n|} < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \xi_n$ сходится почти наверное.

66. Доказать, что условие Линдеберга выполнено для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией.

67. Доказать, что если для последовательности случайных величин выполнено условие Ляпунова, то выполнено и условие Линдеберга.

68. Дисперсия каждой из 4500 независимых одинаково распределенных случайных величин равна 5. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более чем на 0,04.

69. Оценить снизу вероятность того, что при 1000 бросаниях монеты число μ выпадений герба будет заключено между 450 и 550.

70*. Случайная величина ξ_λ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что при $\lambda \to \infty$ случайная величина $\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ асимптотически нормальна с параметрами (0,1).

71. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, ..., \xi_n, ...,$ равномерно распределенных на отрезке $\left[-a_n, a_n\right]$. Применима ли к данной последовательности центральная предельная теорема, если $a_n \geq c > 0,\ n = 1, 2, ...$?

72. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием, единичной дисперсией и абсолютно интегрируемой характеристической функцией. Пусть $p_n(x)$ – плотность распределения случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{\sqrt{n}}.$$

Доказать, что равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

73. Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Доказать, что следующие величины асимптотически нормальны:

1) $\eta_n = \sqrt{n} \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2}$; 2) $\eta_n = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2}}$.

74. На отрезке $[0; 1]$ наудачу выбирается число ξ и разлагается в десятичную дробь:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n(\xi)}{10^n}.$$

Доказать, что при надлежащей нормировке $l_1(\xi) + \ldots + l_n(\xi)$ при $n \to \infty$ слабо сходится к нормальной случайной величине.

75. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ независимы, $\mathrm{D}\xi_n = n^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Применим ли к данной последовательности закон больших чисел, усиленный закон больших чисел?

76. Пусть $\xi_n, n \geq 1,$ – последовательность случайных величин, такая, что ξ_n может зависеть только от ξ_{n-1} и ξ_{n+1}, но не зависит от всех других ξ_k.

Выполняется ли для нее закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, если $D\xi_n \le c < \infty$, $n = 1, 2, ...$?

77*. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, для которой выполняется закон больших чисел. Обязан ли выполняться закон больших чисел для последовательности $|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots$?

78. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин таких, что $M|\xi_i - M\xi_i| \le C$, $i = 1, 2\ldots$, где C – постоянная, и пусть $a_1, a_2, \ldots$ – последовательность вещественных чисел, стремящаяся к нулю. Доказать, что для последовательности $a_1\xi_1, a_2\xi_2, \ldots$ выполняется закон больших чисел.

79*. Независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ могут принимать только по два равновероятных значения α_1 и $-\alpha_1$, $2\alpha_2$ и $-2\alpha_2, ..., n\alpha_n$ и $-n\alpha_n, ...$; $\alpha_n \ge \alpha > 0$, $n = 1, 2...$ Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

80. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ называется эквивалентной последовательности случайных величин $\eta_1, \eta_2, ... \eta_n, ...$, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\omega : \xi_n(\omega) \ne \eta_n(\omega)\right).$$

Доказать, что если при всех $n \in \mathbb{N}$ случайные величины ξ_n и η_n имеют одинаковые математические ожидания и закон больших чисел применим к одной из двух эквивалентных последовательностей, то он применим и к другой.

81. Пусть $\{f(m)\}$, $m \in \mathbb{N}$, – произвольная последовательность действительных чисел, $v_n(\ldots)$ – частота всех натуральных чисел $m \le n$, подчиненных условиям, которые записаны в скобках,

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m), \quad D_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(f(m) - M_n\right)^2,$$

$\psi(n)$ – произвольная неограниченно возрастающая при $n \to \infty$ функция. Доказать аналог закона больших чисел:

$$\nu_n\left(\left|f(m) - M_n\right| \le \psi(n)\sqrt{D_n}\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

82. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение. Доказать, что если последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяет условию

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \mathrm{D}\xi_n > 0,$$

то усиленный закон больших чисел для нее не выполняется.

ГЛАВА 5

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Ранее рассматривались конечные либо счетные семейства случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве. В этом параграфе семейство случайных величин может быть континуальным.

Определение 1. *Случайным процессом называется семейство случайных величин* $\xi = \{\xi(t), t \in T\} = \{\xi(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$, *заданных на одном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *и зависящих от параметра* t, *принимающего значения из некоторого множества* T.

Пример 1. Последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются случайными процессами, для которых $T = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}$. То же самое справедливо и относительно сумм $S_1, S_2, \ldots$ слагаемых $\xi_1, \xi_2, \ldots$.

Процессы, у которых множество T можно отождествить со всей последовательностью $\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ или с ее частью, обычно называются *процессами с дискретным временем* или *случайными последовательностями*.

Пример 2. Если T совпадает с некоторым числовым интервалом $T = [a; b]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, то семейство $\{\xi(t),\ t \in T\}$ называют *процессом с непрерывным временем*. Интерпретация параметра t как времени, конечно, не обязательна. Она возникла исторически, поскольку в большинстве естественнонаучных задач, которые привели к появлению понятия случайного процесса, параметр t был временем, а значение $\xi(t)$ – тем, что наблюдалось в момент времени t.

Как случайный процесс можно рассматривать, например, движение молекулы газа во времени, уровень воды в водохранилище, колебание крыла самолета и др. Процессом с непрерывным временем является случайная функция

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin kt \cdot \frac{\xi_k}{2^k},\ \ t \in [0, 2\pi],$$

где случайные величины ξ_k независимы и одинаково распределены.

Если в некотором случайном процессе $\{\xi(t), t\in T\}$ зафиксировать $\omega\in\Omega$, то получим функцию $\xi(t), t\in T$, которую будем называть *выборочной функцией* или *траекторией процесса*. Через X обозначим множество функций $x(t)$, $t\in T$, в котором лежат траектории случайного процесса. Пусть далее $\mathscr{B}_X^T$ – σ-алгебра подмножеств из X, порожденная множествами вида

$$C=\{x\in X:\ x(t_1)\in B_1,\ ...,\ x(t_n)\in B_n\} \tag{1}$$

для любых $n\in\mathbb{N}$, любых $t_1,...,t_n$ из T и любых борелевских множеств $B_1,...,B_n$ из $\mathbb{R}$. Множества вида (1) называются *цилиндрическими*.

Случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t\in T$, $\omega\in\Omega$ можно трактовать как измеримое отображение $(\Omega,\mathscr{A})$ в $\left(X,\mathscr{B}_X^T\right)$. Это отображение индуцирует распределение P_ξ на измеримом пространстве $\left(X,\mathscr{B}_X^T\right)$, определяемое равенством

$$\mathrm{P}_\xi(B)=\mathrm{P}\left(\xi^{-1}(B)\right),\ \forall B\in\mathscr{B}_X^T.$$

Тройка $\left(X,\mathscr{B}_X^T,\mathrm{P}_\xi\right)$ называется *выборочным вероятностным пространством*. В этом пространстве элементарный исход ω отождествляется с траекторией процесса, а мера P_ξ называется *распределением процесса* ξ.

Если, рассматривая процесс $\{\xi(t), t\in T\}$, фиксировать значения времени $t_1,...,t_n$, то мы получим многомерную случайную величину $\left(\xi(t_1),...,\xi(t_n)\right)$. Распределения таких величин называют *конечномерными распределениями* процесса.

Пример 3. В качестве пространства X в теории случайных процессов чаще других рассматриваются следующие пространства функций:

1) пространство всех функций на $T\subset\mathbb{R}$:

$$X=\mathbb{R}^T=\prod_{t\in T}\mathbb{R}_t,$$

где $\mathbb{R}_t=(-\infty,+\infty)$. Это пространство обычно рассматривают в паре с σ-алгеброй $\mathscr{B}_X^T$;

2) пространство всех непрерывных на T функций:

$$X=C(T).$$

В этом пространстве σ-алгебра $\mathscr{B}_C^T$ совпадает с σ-алгеброй $\mathscr{B}\left(C(T)\right)$ – борелевской σ-алгеброй, порожденной множествами, открытыми относительно равномерной метрики:

$$\rho(x,y)=\sup_{t\in T}\left|y(t)-x(t)\right|,\ x,y\in C(T);$$

3) пространство $D(T)$ функций, у которых в каждой точке $t\in T$ существуют пределы $x(t-0)$ и $x(t+0)$ и значение функции $x(t)$ совпадает с одним из них. Если $T=[a,b]$, то предполагается также, что $x(a)=x(a+0)$, $x(b)=x(b-0)$. Через $D_+(T)$ $(D_-(T))$ будем обозначать подпространство функций из $D(T)$ непрерывных справа (слева). В качестве σ-алгебры подмножеств $D(T)$ будем рассматривать $\mathscr{B}_D^T$.

Следующее определение эквивалентно определению 1.

Определение 2. *Пусть X – заданное пространство функций и $\mathscr{G}$ есть σ-алгебра его подмножеств, содержащая σ-алгебру $\mathscr{B}_X^T$. Случайным процессом $\xi=\{\xi(t,\omega),t\in T\}$ называется измеримое по ω отображение $\overline{\xi}$ из $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ в $(X,\mathscr{G},\mathrm{P}_\xi)$, т. е. каждому ω ставится в соответствие траектория $\overline{\xi}(\omega)=\xi(\cdot,\omega)$ так, что $\overline{\xi}^{-1}(C)\in\mathscr{A}$ для любого $C\in\mathscr{G}$.*

Замечание 1. Условие $\mathscr{B}_X^T\subset\mathscr{G}$ нужно для того, чтобы были определены вероятности цилиндрических множеств и, в частности, $\mathrm{P}(\xi(t)\in B)$, $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, означающие, что $\xi(t)$ – случайные величины для всех $t\in T$.

До сих пор неявно предполагалось, что случайный процесс задан и нам известно, что его траектории лежат в некотором пространстве функций. Однако это бывает очень редко. Чаще процесс пытаются описать теми или иными сведениями о его распределении. Можно задавать, например, *конечномерные распределения*, т. е. вероятности $\mathrm{P}(C)$ множеств C вида (1).

Определим функции $\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)$ «многих переменных» $B_1,\ldots,B_n$ из $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ для любых $t_1,\ldots,t_n$ из T, положив

$$\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)=P\{x\in X:\ x(t_1)\in B_1,\ \ldots,\ x(t_n)\in B_n\}.$$

Функции $\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)$ являются вероятностями на $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)=\mathrm{P}_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(B_{i_1},\ldots,B_{i_n})$$

при любой перестановке $(i_1,\ldots,i_n)$ множества $(1,\ldots,n)$ и, кроме того,

$$\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(B_1,\ldots,B_n,\mathbb{R})=\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n).$$

Совокупность функций $\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)$, обладающих перечисленными свойствами, называется семейством *согласованных конечномерных распределений*.

Таким образом, для каждого процесса можно построить семейство согласованных конечномерных распределений. Оказывается справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1 (теорема Колмогорова о согласованных конечномерных распределениях). *Для любого семейства согласованных конечномерных распределений* $\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)$ *существует случайный процесс* $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ *на* T *такой, что функции* $\mathrm{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1,\ldots,B_n)$ *являются его конечномерными распределениями.*

Из этой теоремы следует, что задание согласованных конечномерных распределений однозначно определяет распределение процесса на $\left(\mathbb{R}^T,\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}\right)$. Эту теорему можно рассматривать как теорему существования случайного процесса в $\left(\mathbb{R}^T,\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}\right)$ с заданными конечномерными распределениями.

Замечание 2. Пространство $\left(\mathbb{R}^T,\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}\right)$ не очень удобно для изучения случайных процессов, так как далеко не все часто употребляемые в анализе соотношения для функций порождают множества, которые принадлежат σ-алгебре $\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}$. Множество $\left\{\sup\limits_{t\in T}\xi(t)<C\right\}$, например, может и не быть событием, так как мы знаем его лишь в виде пересечения несчетного числа измеримых множеств $\bigcap\limits_{t\in T}(\xi(t)<C)$, если T – интервал числовой оси.

Имеет место и другое неудобство – распределение P_ξ на $\left(\mathbb{R}^T,\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}\right)$ не определяет однозначно свойств траекторий ξ. Этот факт связан с тем, что пространство $\mathbb{R}^T$ и принадлежность цилиндрическому множеству вида (1) не несут в себе никакой информации о поведении $x(t)$ в точках t, отличных от $t_1,\ldots,t_n$.

Случайные процессы $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ и $\eta=\{\eta(t),t\in T\}$ будем называть *стохастически эквивалентными*, если $\mathrm{P}(\xi(t)=\eta(t))=1$ для всех $t\in T$. Процесс η при этом называют *модификацией* ξ. Легко видеть, что если процессы стохастически эквивалентны, то их конечномерные распределения совпадают, но не наоборот. Что касается траекторий, то они у стохастически эквивалентных процессов могут быть различными.

Пример 4. Пусть $T=[0;1]$, τ – абсолютно непрерывная случайная величина, $0<\tau<1$. Положим $\xi(t)\equiv 0$, $\eta(t)=0$, если $t\neq\tau$, $\eta(t)=1$, если $t=\tau$. Тогда

$$\mathrm{P}(\xi(t)\neq\eta(t))=\mathrm{P}(\tau=t)=0$$

для любых $t\in T$, т. е. ξ и η стохастически эквивалентны.

В связи с замечанием 2 отметим также, что

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in T}\xi(t)\le\frac{1}{2}\right)=1,\ \mathrm{P}\left(\sup_{t\in T}\eta(t)\le\frac{1}{2}\right)=0.$$

На приведенном примере 4 легко понять, что множество всех непрерывных функций $C(T)$, множество $\left\{\sup_{t\in T}\xi(t)\le x\right\}$ и многие другие не принадлежат $\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}$.

Для произвольных множеств A из $\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}$ принадлежность $x\in A$, грубо говоря, может определять значения функции x не более чем в счетном числе точек. Чтобы задать всю траекторию процесса, недостаточно задать распределение на $\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}$; эту σ-алгебру необходимо расширять.

Простейший способ преодоления этих трудностей состоит в том, чтобы задавать процессы в пространствах $C(T)$ или $D(T)$, если это возможно. Если ξ и η эквивалентны на $\left(\mathbb{R}^T,\mathscr{B}^T_{\mathbb{R}^T}\right)$ и η рассматривается на $\left(C(T),\mathscr{B}^T_C\right)$, то мы тем самым построили процесс η – *непрерывную модификацию* ξ.

Чтобы осуществить это построение, надо уметь выяснять по распределению процесса ξ, существует для него непрерывная модификация η или нет (все приведенные выше рассуждения аналогично переносятся на $D(T)$).

Очень простой критерий существования непрерывной модификации, принадлежащий Колмогорову, основан на знании лишь двумерных распределений ξ.

Теорема 2 (теорема Колмогорова). *Пусть* $\xi=\{\xi(t),t\in[0;1]\}$ *– случайный процесс на* $[0;1]$. *Если при всех* $t,t+h$ *из отрезка* $[0;1]$

$$\mathrm{M}\left|\xi(t+h)-\xi(t)\right|^a\le C|h|^{1+b} \tag{2}$$

при каких-нибудь $a>0, b>0, C>0,$ *то* ξ *имеет непрерывную модификацию.*

П р и м е р 5. Допустим, что случайный процесс $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ имеет вид

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k \varphi_k(t),$$

где φ_k, $k = \overline{1,r}$, удовлетворяют условию Гёльдера

$$|\varphi_k(t+h) - \varphi_k(t)| \le C|h|^\alpha, \ \alpha > 0,$$

и при некотором $l > 1/\alpha$

$$\mathrm{M}|\xi_k|^l < \infty, \ k = \overline{1,r}.$$

Тогда (непрерывный) процесс ξ удовлетворяет условию (2).

Критерий существования модификации, принадлежащей пространству $D(T)$, формулируется сложнее и связан с более слабыми условиями на процесс. Ограничимся лишь формулировкой следующего утверждения.

Теорема 3 (теорема Колмогорова – Ченцова). *Если при некоторых* $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $b > 0$, $C > 0$ *и при всех* $t - h_1 \le t \le t + h_2$ *из отрезка* $[0;1]$

$$\mathrm{M}|\xi(t) - \xi(t-h_1)|^\alpha |\xi(t+h_2) - \xi(t)|^\beta \le Ch^{1+b}, \ h = h_1 + h_2, \tag{3}$$

то существует модификация $\xi = \{\xi(t), t \in [0;1]\}$ *из* $D(0;1)$.

П р и м е р 6. Пусть γ – равномерно распределенная на $[0;1]$ случайная величина, $\xi(t) = 0$ при $t < \gamma$, $\xi(t) = 1$ при $t \ge \gamma$. Тогда

$$\mathrm{M}|\xi(t+h) - \xi(t)|^l = \mathrm{P}(\gamma \in (t, t+h)) = h.$$

Здесь условие (2) не выполнено, хотя

$$\xi(t+h) - \xi(t) \xrightarrow[h \to 0]{\mathrm{P}} 0.$$

Условие (3) выполнено, так как

$$\mathrm{M}|\xi(t) - \xi(t-h_1)||\xi(t+h_2) - \xi(t)| = 0.$$

В общем случае, когда не располагают данными для построения процесса из пространств $C(T)$ или $D(T)$, опираются на понятие сепарабельности процесса.

О п р е д е л е н и е 3. *Случайный процесс* $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ *называется сепарабельным, если существует счетное всюду плотное в* T *множество* S *такое, что*

$$\mathrm{P}\left(\overline{\lim_{u\to t,\, u\in S}}\,\xi(u)\ge\xi(t)\ge\underline{\lim_{u\to t,\, u\in S}}\,\xi(u),\forall t\in T\right)=1. \quad (4)$$

Замечание 3. Условие (4) эквивалентно тому, что для любого интервала $I\subset T$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{u\in I\cap S}\xi(u)=\sup_{u\in I}\xi(u);\ \inf_{u\in I\cap S}\xi(u)=\inf_{u\in I}\xi(u)\right)=1.$$

Известно, что *любой случайный процесс имеет сепарабельную модификацию.*

Можно также отметить, что для сепарабельных процессов такие множества, как множество всех неубывающих функций, множества $C(T)$, $D(T)$, являются событиями. Процессы из $C(T)$, $D(T)$ автоматически будут сепарабельными.

Определение 4. *Случайный процесс* $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ *называется стохастически непрерывным, если при всех* t, $t+h\in T$, $h\to 0$

$$\xi(t+h)-\xi(t)\xrightarrow{\mathrm{P}}0.$$

Ясно, что все процессы с непрерывными траекториями являются стохастически непрерывными. Но не только. Разрывный процесс из примера 6 также будет стохастически непрерывным.

Случайный процесс $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ *называется непрерывным в среднем порядка* $r>0$ (*в среднеквадратичном при* $r=2$), *если для любых* t, $t+h\in T$ *при* $h\to 0$

$$\mathrm{M}\left|\xi(t+h)-\xi(t)\right|^r\to 0.$$

Разрывный процесс из примера 6 будет непрерывным в среднем любого порядка.

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Одним из важнейших классов случайных процессов является класс случайных процессов с независимыми приращениями. К этому классу принадлежат, например, процесс броуновского движения, пуассоновский случайный процесс и др.

Определение 1. *Случайный процесс* $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ *называется процессом с независимыми приращениями, если для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и для всех* $t_0 < t_1 < ... < t_n$ *из* T *случайные величины* $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, ..., $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ *являются независимыми.*

Замечание 1. Так как случайный вектор $(\xi(t_1), ..., \xi(t_n))$ получается невырожденным линейным преобразованием из вектора $(\xi(t_1) - \xi(t_0), ..., \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}))$, то для того чтобы задать конечномерные распределения случайного процесса с независимыми приращениями, достаточно задать распределение процесса в одной точке $\xi(t)$ и распределения приращений $\xi(s) - \xi(t)$ при $s > t$.

Пусть $T = [0; \infty)$. Случайный процесс $\xi(t)$ называется *однородным*, если распределение величины $\xi(t+h) - \xi(t)$, $t \in T$, $h \geq 0$, не зависит от t.

В дальнейшем для простоты везде будем считать, что $\xi(0) = 0$.

Определение 2. *Распределение случайной величины* ξ *называется безгранично делимым, если при любом* $n \in \mathbb{N}$ *величину* ξ *можно представить в виде суммы независимых одинаково распределенных случайных величин*: $\xi = \xi_{1,n} + ... + \xi_{n,n}$.

Если $f(t), t \in \mathbb{R}$ есть характеристическая функция ξ, то определение 2 эквивалентно тому, что $f^{1/n}$ при любом n является характеристической функцией.

Для однородного процесса с независимыми приращениями $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ распределение $\xi(t)$ при всех $t \in T$ безгранично делимо, так как $\xi(t) = \xi_{1,n} + ... + \xi_{n,n}$, где $\xi_{k,n} = \xi(kt/n) - \xi((k-1)t/n)$ независимы и одинаково распределены.

Введем *характеристическую функцию однородного процесса* $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ *с независимыми приращениями*:

$$\varphi(t, z) = M \exp\{iz \cdot \xi(t)\}, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. 1) *Пусть* $\{\xi(t), t \geq 0\}$ *– стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями. Тогда* $\varphi(t,z) = (\varphi(1,z))^t$ *и* $\varphi(1,z) \neq 0$ *при всех* $z \in \mathbb{R}$.

2) *Пусть* $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{R}$ *– характеристическая функция безгранично делимого распределения. Тогда существует случайный процесс* $\{\xi(t), t \geq 0\}$, *удовлетворяющий условиям 1), и такой, что* $Me^{iz\xi(1)} = \varphi(z)$.

Теорема 2. *Однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями* $\{\xi(t), t \geq 0\}$ *имеет модификацию из пространства* $D(T)$.

Пример 1. Случайный процесс броуновского движения. Рассмотрим частицу, которая движется в некоторой среде (жидкости или газе) под влиянием взаимодействий с частицами среды. Если среда однородна, то движение частицы из каждой точки среды в любой момент будет одинаковым в вероятностном смысле, т. е. смещение частицы $\xi(t+h)-\xi(t)$ за время h не должно зависеть ни от поведения до момента t, ни от момента t. Независимость движения после момента t от скорости в момент t противоречит, на первый взгляд, законам механики, однако на самом деле за очень малое время скорость так часто меняет свою величину, а движение – направление, что частица успевает «забыть» значение скорости в исходный момент времени. Очевидно также, что траектория двигающейся частицы $\xi(t)$ – непрерывная функция t. На основании приведенных соображений непрерывный процесс с независимыми приращениями называется *процессом броуновского движения*. Мы рассмотрим однородное во времени броуновское движение, т. е. однородный непрерывный процесс с независимыми приращениями.

Определение 3. *Процессом броуновского движения (винеровским процессом) называется однородный случайный процесс с независимыми приращениями* $\{\xi(t), t \geq 0\}$, *для которого распределение случайной величины* $\xi(1)$ *нормально.*

Другими словами, это процесс, для которого характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(t, z) = \exp\left\{iazt - \frac{1}{2}b^2z^2t\right\}$$

для некоторых $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$. Последнее равенство означает, что приращения $\xi(t+h)-\xi(t)$ распределены нормально с параметрами $\left(ah, b^2h\right)$. Все совместные распределения $\xi(t_1), ..., \xi(t_k)$ также будут нормальными.

Числа a и b называются соответственно *коэффициентами сноса* и *диффузии*. Случайный процесс с параметрами $a = 0$ и $b = 1$ назовем *стандартным процессом броуновского движения* (*стандартным винеровским процессом*).

Теорема 3. *Процесс броуновского движения имеет непрерывную модификацию.*

Стандартный процесс броуновского движения с непрерывными траекториями будем обозначать $W = \{W(t),\, t \ge 0\}$.

Процесс $W^*(t) = W(ct)/\sqrt{c}$ при любом $c > 0$ снова является стандартным процессом броуновского движения.

Отметим теперь, что с вероятностью 1 траектории процесса броуновского движения не дифференцируемы ни в одной точке.

Теорема 4 (закон повторного логарифма). *Пусть* $W = \{W(t), t \ge 0\}$ – *стандартный процесс броуновского движения. Тогда*

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{t\to+\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1 \right) = 1,$$

$$\mathrm{P}\left(\liminf_{t\to+\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1 \right) = 1.$$

Теорема 5 (локальный закон повторного логарифма). *Пусть* $W = \{W(t), t \ge 0\}$ *– стандартный процесс броуновского движения. Тогда*

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{t\to 0} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t^{-1}}} = 1 \right) = 1,$$

$$\mathrm{P}\left(\liminf_{t\to 0} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t^{-1}}} = -1 \right) = 1.$$

Рассмотрим теперь еще один важный случайный процесс.

Определение 4. *Процессом Пуассона* (*пуассоновским процессом*) *называется однородный случайный процесс с независимыми приращениями* $\Pi = \{\Pi(t), t \ge 0\}$, *если* $\Pi(t) - \Pi(0)$ *имеет распределение Пуассона.*

Положим $\Pi(0) = 0$. Если $\Pi(1)$ имеет распределение Пуассона с параметром (интенсивностью) μ, то $\Pi(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром μt.

Значениями $\Pi(t)$ при каждом $t \ge 0$ могут являться только целые неотрицательные числа. Кроме того, для процесса Пуассона Π существует модификация с траекториями, являющимися кусочно-постоянными непрерывными справа функциями со скачками, равными единице.

Можно построить и более общую модель скачкообразного однородного процесса с независимыми приращениями. Рассмотрим произвольную, не зависящую от процесса Π последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ с характеристической функцией $f(z)$, $z \in \mathbb{R}$. Построим теперь новый процесс $\zeta(t)$, $t \geq 0$ следующим образом:

$$\zeta(t) = \zeta_1 + \ldots + \zeta_{\Pi(t)}. \tag{2}$$

Он равен сумме случайного числа случайных величин.

Его характеристическая функция равна

$$M\mathrm{e}^{iz\zeta(t)} = e^{\mu t(f(z)-1)}. \tag{3}$$

Определение 5. *Процесс* $\zeta = \{\zeta(t), t \geq 0\}$, *определенный формулой* (2) *или характеристической функцией* (3), *называется обобщенным процессом Пуассона.*

Это снова есть однородный процесс с независимыми приращениями. В формуле (3) μ определяет интенсивность скачков процесса ζ, а f – их распределение. Если к процессу ζ добавить неслучайный снос at, то процесс $\tilde{\zeta}(t) = \zeta(t) + at$ также будет процессом с независимыми приращениями с характеристической функцией $M\mathrm{e}^{iz\tilde{\zeta}(t)} = e^{t(iza + \mu(f(z)-1))}$. Если на том же вероятностном пространстве задан независимый от $\tilde{\zeta}$ стандартный процесс броуновского движения W, то процесс $\tilde{\zeta}(t) + W(t)$ будет однородным процессом с независимыми приращениями с характеристической функцией $e^{t\left(iza - \frac{z^2}{2} + \mu(f(z)-1)\right)}$.

Отметим, что этими примерами далеко не исчерпывается весь класс процессов с независимыми приращениями.

Теорема 6. *Для стохастически непрерывного однородного случайного процесса* $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ *с независимыми приращениями существуют такие* $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ *и непрерывная в нуле неубывающая функция ограниченной вариации* $\overline{G}$ *на* $\mathbb{R}$, *что*

$$\varphi(t, z) = \exp\left\{t\left(iaz - \frac{1}{2}bz^2 + \int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\overline{G}(x)\right)\right\}. \tag{4}$$

Замечание 2. Пусть

$$G(x) = \overline{G}(x) + b\varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x) = 0$ при $x < 0$, $\varepsilon(x) = 1$ при $x > 0$. Доопределив функцию

$$\left(e^{izx}-1-\frac{izx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}$$

в точке $x=0$ по непрерывности значением $-z^2/2$, соотношение (4) можно записать так:

$$\varphi(t,z)=\exp\left(t\left(iaz+\int\limits_R\left(e^{ixz}-1-\frac{izx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)\right)\right). \qquad (5)$$

Сделаем несколько замечаний о структуре процесса ξ и его связи с представлением (5). Функция G в (5) определяет *спектральную меру процесса* по формуле $G(A)=\int\limits_A dG(x)$.

1) Процессу броуновского движения соответствует спектральная мера, сосредоточенная в точке 0. Если $G(\{0\})=b^2$, то $\xi(1)$ имеет нормальное распределение с параметрами $\left(0,b^2\right)$.

2) Обобщенному случайному процессу Пуассона соответствует мера G такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^2}dG(x)<\infty$. Тогда $G(\{0\})=b=0$ и равенство (5) можно переписать в виде

$$\varphi(t,z)=\exp\left(t\left(ia_1z+\int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{ixz}-1\right)d\tilde{G}(x)\right)\right),$$

где $\tilde{G}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)$ и $a_1=a-\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{dG(x)}{x}$.

§ 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим случайные процессы, которые принимают комплексные значения, причем

$$M|\xi(t)|^2<\infty,\ \forall t\in T.$$

Значения процесса $\xi(t)$ в момент времени t интерпретируются как элементы пространства $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_2(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$. С этой точки зрения процесс ξ можно рассматривать как некоторую кривую в пространстве $\mathscr{L}(\xi)$.

Определение 1. *Функция*

$$B_\xi(t,s)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}=\left(\xi(t),\ \overline{\xi(s)}\right),\ t,s\in T,$$

называется ковариацией случайного процесса $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$.

Утверждение 1. *Ковариация случайного процесса* $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ *обладает следующими свойствами*:

1) $B_\xi(t,t)=M\left|\xi(t)\right|^2\geq 0,\ t\in T;\ \ B_\xi(t,s)=\overline{B_\xi(s,t)},\ t,s\in T;$

2) $\left|B_\xi(t,s)\right|^2\leq B_\xi(t,t)B_\xi(s,s),\ t,s\in T;$

3) B_ξ *– положительно определенная функция, т. е. для любых комплексных чисел* $c_1,\ldots,c_n$ *и любых* $t_1,\ldots,t_n\in T$

$$\sum_{k,r=1}^{n}c_k\overline{c}_rB_\xi(t_k,t_r)\geq 0.$$

Определение 2. *Корреляционной функцией случайного процесса* $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ *называют функцию*

$$R_\xi(t,s)=M\left(\xi(t)-M\xi(t)\right)\overline{\left(\xi(t)-M\xi(t)\right)}.$$

Определение 3. *Случайный процесс* $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ *называют*:

а) *непрерывным в среднеквадратическом в точке* t, *если*

$$\underset{|h|\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,\xi(t+h)=\xi(t),$$

т. е. $\lim\limits_{|h|\to 0}\mathrm{M}\left|\xi(t+h)-\xi(t)\right|^2=0;$

б) *дифференцируемым в среднеквадратическом в точке* t, *если существует предел*

$$\underset{|h|\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}=\xi'(t).$$

Если процесс непрерывен (дифференцируем) в среднеквадратическом в каждой точке $t\in T$, то его называют *непрерывным* (*дифференцируемым*) *в среднеквадратическом случайным процессом.*

Определение 4. *Взаимной ковариацией* (*корреляционной функцией*) *двух процессов* $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ *и* $\eta=\{\eta(t),t\in T\}$ *называют функцию*

$$B_{\xi\eta}(t,s)=M\xi(t)\overline{\eta(s)}\ \ \left(R_{\xi\eta}(t,s)=M\left(\xi(t)-M\xi(t)\right)\overline{\left(\eta(t)-M\eta(t)\right)}\right).$$

Определение 5. *Случайный процесс* $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ *называют процессом с ортогональными приращениями, если для любых* $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$ *из* T

$$M(\xi(t_4) - \xi(t_3))\overline{(\xi(t_2) - \xi(t_1))} = 0.$$

Если $\xi_1(t) = \xi(t) - M\xi(t)$ – процесс с ортогональными приращениями, то случайный процесс $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ называют *процессом с некоррелированными приращениями.*

Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ – процесс с ортогональными приращениями и $\xi(t_0) \equiv 0$ для некоторого $t_0 \in T$. Тогда для ковариации $B_\xi(t, s)$, $t \ge t_0$, $s \ge t_0$ справедливо следующее равенство:

$$B_\xi(t, s) = B(\min(t, s)), \text{ где } B(t) = B_\xi(t, t) = M|\xi(t)|^2.$$

Заметим, что функция $B(t)$ монотонно не убывает.

Замечание 1. Процесс с ортогональными приращениями $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ будет непрерывным в среднеквадратическом тогда и только тогда, когда непрерывна функция $B(t), t \in T$. Кроме того, процесс ξ в среднеквадратическом дифференцируем в точке t тогда и только тогда, когда $B'(t) = 0$, так что, вообще говоря, процесс с ортогональными приращениями не дифференцируем в среднеквадратическом.

Определение 6. *Интегралом*

$$\int_a^b \xi(t)\,dt \tag{1}$$

от процесса $\xi = \{\xi(t), t \in T = [a; b]\}$ *называют предел в среднеквадратическом при* $\lambda \to 0$ *интегральных сумм*

$$S'_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_k) \cdot \Delta t_k ,$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,\ \Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ \lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta t_k$.

Замечание 2. Из определения и свойств ковариации случайного процесса непосредственно вытекают следующие утверждения:

1) *для существования интеграла* (1) *достаточно, чтобы функция* $B_\xi(t, s)$ *была интегрируема по Риману на квадрате* $a \le s, t \le b$;

2) $M\left[\int\limits_a^b \xi(t)\,dt\right]^2 = \int\limits_a^b\int\limits_a^b B_\xi(t,s)\,dt\,ds;$

3) *если*

$$\eta(t) = \int\limits_a^t \xi(u)\,du,\ t \in T, \tag{2}$$

то

$$B_\eta(t,s) = \int\limits_a^t\int\limits_a^s B_\xi(u,v)\,du\,dv.$$

Утверждение 2. *Пусть* $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ *и* $\eta = \{\eta(t), t \in T\}$ *– случайные процессы, связанные соотношением* (2). *Тогда в каждой точке* $t \in T$, *в которой функция* $B_\xi(t,t)$ *непрерывна, процесс* η *дифференцируем в среднеквадратическом и* $\eta'(t) = \xi(t)$.

Введем интеграл

$$\mathcal{I}(f) = \int\limits_a^b f(t)\,d\xi(t),$$

где f – неслучайная функция; $\xi = \{\xi(t), t \in T = [a;b]\}$ – процесс с ортогональными приращениями.

Для любых c, d $(a \le c < d < b)$ положим по определению

$$F(c,d) = M|\xi(d) - \xi(c)|^2.$$

Эта функция аддитивна, т. е. если $c_1 < c_2 < c_3$, то $F(c_1,c_3) = F(c_1,c_2) + F(c_2,c_3)$. Процесс ξ может быть выбран непрерывным справа в среднеквадратическом, тогда и функция $F(c,d)$ будет непрерывна по каждому из своих аргументов. Доопределим процесс ξ на всю числовую прямую $\mathbb{R}$, положив $\xi(t) = \xi(a+)$ при $t \le a$ и $\xi(t) = \xi(b-)$ при $t \ge b$. Будем считать, что функция $F(c,d)$ конечна на каждом конечном интервале. Кроме того, вместо $F(c,d)$ будем писать $F(c,d]$.

По непрерывной справа аддитивной функции $F(a,b]$ можно построить на $\mathbb{R}$ конечную или σ-конечную меру $F(\cdot)$, определенную на пополнении σ-алгебры борелевских множеств на $\mathbb{R}$ и совпадающую с $F(a,b]$ на полуинтервалах $(a,b]$.

Назовем функцию $f(t)$ *простой*, если

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k I_{\Delta_k}(t),$$

где $c_k \in \mathbb{R}$, а $\Delta_k = (a_k, b_k]$, $k = \overline{1,n}$, не пересекаются, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ – множество, вне которого $f(t) \equiv 0$.

Положим по определению

$$\mathscr{I}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left[\xi(b_k) - \xi(a_k)\right]. \tag{3}$$

Оно корректно, причем

$$M\mathscr{I}(f_1)\overline{\mathscr{I}(f_2)} = \sum_{k=1}^{n} c_k^1 \overline{c_k^2} F(a_k, b_k]. \tag{4}$$

Равенство (4) можно записать следующим образом:

$$M\mathscr{I}(f_1)\overline{\mathscr{I}(f_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\overline{f_2(t)}\, dF(t). \tag{5}$$

Обозначим через $\mathscr{L}_0^{\Delta\xi}$ множество всех случайных величин вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left[\xi(b_k) - \xi(a_k)\right], -\infty < a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \ldots < b_n < \infty,$$

а через $\mathscr{L}_0$ – множество всех простых функций на $\mathbb{R}$. Пространство $\mathscr{L}_0^{\Delta\xi}$ – линейное подпространство $\mathscr{L}^2$. Обозначим его замыкание в $\mathscr{L}^2$ через $\mathscr{L}_2^{\Delta\xi}$; оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\xi, \eta) = M\xi\overline{\eta}$.

Кроме того, рассмотрим замыкание линейного пространства $\mathscr{L}_0$ по норме

$$\|f\|_F = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dF(t)\right)^{1/2},$$

обозначим его $\mathscr{L}_2^F$. Как известно, $\mathscr{L}_2^F$ состоит из всех $\mathscr{B}_F$-измеримых функций $f(t)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dF(t) < \infty ,$$

где $\mathscr{B}_F$ – пополнение относительно меры F борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, является гильбертовым пространством. Формула (3) устанавливает линейное соответствие между $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{L}_0^{\Delta\xi}$. Оно взаимно однозначно, при этом

$$M\left|\mathscr{I}(f_1) - \mathscr{I}(f_2)\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t) - f_2(t)|^2 \, dF(t) . \qquad (6)$$

Соответствие $f \to \mathscr{I}(f)$ по формуле (6) изометрично. Следовательно, его можно по непрерывности продолжить до взаимно однозначного отображения $\mathscr{L}_2^F$ в $\mathscr{L}_2^{\Delta\xi}$. Возьмем произвольную функцию $f \in \mathscr{L}_2^F$ и рассмотрим последовательность $f_n \in \mathscr{L}_0$ такую, что при $n \to \infty$

$$\|f - f_n\|_F \to 0 .$$

Тогда последовательность f_n фундаментальна в $\mathscr{L}_2^F$ и такой же будет последовательность $\eta_n = \mathscr{I}(f_n)$ в $\mathscr{L}_2^{\Delta\xi}$. Положим

$$\mathscr{I}(f) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \mathscr{I}(f_n) .$$

Этот предел не зависит от выбора последовательностей f_n .

Определение 7. *Случайную величину* $\mathscr{I}(f)$ *, где* $f \in \mathscr{L}_2^F$ *, называют стохастическим интегралом и обозначают*

$$\mathscr{I}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, d\xi(t). \qquad (7)$$

Утверждение 3. *Стохастический интеграл* (7) *обладает следующими свойствами*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{(a,b]}(t) \, d\xi(t) = \xi(b) - \xi(a) \;\; \textit{для всех } a < b ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) \, d\xi(t) = \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \, d\xi(t) + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \, d\xi(t) , \;\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R};$$

$$M\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)d\xi(t)\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)d\xi(t)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\overline{f_2(t)}dF(t), \quad f_1, f_2 \in \mathscr{L}_2^F;$$

если $f, f_n \in \mathscr{L}_2^F$ *и* $\|f - f_n\|_F \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\mathscr{I}(f_n) = \mathscr{I}(f).$$

§ 4. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Важный класс случайных процессов образуют *стационарные случайные процессы*. Так называют процессы, теоретико-вероятностные характеристики которых не меняются со временем. Можно еще сказать, что стационарные процессы протекают в не изменяющихся со временем условиях. Более точно это означает следующее.

Определение 1. *Случайный процесс* $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ *называется стационарным* (*стационарным в узком смысле*), *если для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и любых* $t, t_1, \ldots, t_n$ *таких, что* $t + t_k \in T$, *совместное распределение случайных величин* $\xi(t+t_1), \ldots, \xi(t+t_n)$ *не зависит от* t.

В тех задачах, где имеют значение только моменты первого и второго порядков рассматриваемых процессов, условие стационарности можно ослабить.

Определение 2. *Случайный процесс* $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ *называют слабо стационарным* (*стационарным в широком смысле, стационарным второго порядка*) *процессом, если*

$$M\xi(t) = m = \text{const}, \; M(\xi(t) - m)\overline{(\xi(s) - m)} = R(t - s).$$

Функцию R *называют корреляционной функцией процесса* ξ.

Пример 1. Колебания со случайными параметрами. Во многих вопросах теории колебания рассматривают процессы вида

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{iu_k t}, \quad t \in T. \tag{1}$$

Совокупность частот $u_k, k = \overline{1,n}$, рассматриваемых как множество точек на $\mathbb{R}$, называют *спектром колебания процесса* ξ.

Введем некоторые термины, используемые при физической интерпретации случайных процессов. *Энергией*, переносимой случайным процессом ξ в течение промежутка времени (t_1, t_2), называется величина

$$\int_{t_1}^{t_2} |\xi(t)|^2 \, dt,$$

а *средней мощностью* случайного процесса – предел

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |\xi(t)|^2 \, dt,$$

если он существует.

Нетрудно вычислить среднюю мощность, переносимую случайным процессом (1). Имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\xi(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sum_{k,r=1}^{n} \gamma_k \overline{\gamma}_r e^{it(u_k - u_r)} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2 + \sum_{\substack{k,r=1 \\ k\neq r}}^{n} \gamma_k \overline{\gamma}_r \frac{\sin T(u_k - u_r)}{T(u_k - u_r)} \xrightarrow[T\to\infty]{} \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2 .$$

В дальнейшем будем считать комплексные амплитуды γ_k случайными величинами. Тогда ξ – случайный комплекснозначный процесс.

Найти распределение ξ по известным распределениям γ_k сложно, но вычислить моменты первых двух порядков нетрудно. Пусть

$$M\gamma_k = 0,\ M\gamma_k \overline{\gamma}_r = 0,\ k \neq r,\ M|\gamma_k|^2 = c_k^2, \tag{2}$$

тогда

$$M\xi(t) = 0,\ R(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 e^{iu_k(t_1 - t_2)} .$$

Таким образом,

$$R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2),$$

где

$$R(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 e^{iu_k t}. \tag{3}$$

Следовательно, при выполнении условий (2) ξ – стационарный в широком смысле случайный процесс, и его корреляционная функция задается формулой (3). Эту формулу называют *спектральным представлением корреляционной функции*. Она определяет спектр случайного процесса, т. е.

совокупность частот u_k, $k=\overline{1,n}$, гармонических колебаний, составляющих процесс ξ, и математические ожидания c_k^2 средних мощностей.

Назовем спектральной функцией $F(u)$, $u\in\mathbb{R}$, процесса (1) функцию

$$F(u)=\sum_{\substack{k\\ u_k\le u}} c_k^2 .$$

С помощью спектральной функции корреляционная функция запишется в виде

$$R(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut}dF(u) . \tag{4}$$

Пример 2. Пусть $F(x), x\in\mathbb{R}$, – произвольная монотонно неубывающая непрерывная справа функция, $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=\sigma^2>0$. Введем случайную величину ξ с функцией распределения $\frac{1}{\sigma^2}F(x)$ и определим случайный процесс

$$\xi(t)=\sigma\exp\{i(t\xi+\varphi)\},$$

где φ – равномерно распределенная на $[0;2\pi]$ случайная величина, независимая с ξ. Тогда

$$M\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\sigma e^{i(tu+\tau)}\frac{1}{\sigma^2}dF(u)\frac{d\tau}{2\pi}=0,$$

$$R(t_1,t_2)=M\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1-t_2)u}\frac{1}{\sigma^2}dF(u)=R(t_1-t_2),$$

где $R(t)$ имеет вид (4).

Теорема 1 (теорема Хинчина). *Для того чтобы функция $R(t)$ была корреляционной функцией непрерывного в среднеквадратическом слабо стационарного процесса необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление* (4)*, где F – ограниченная монотонно неубывающая непрерывная справа функция.*

Замечание 1. Функция $F(u)$, $u\in\mathbb{R}$, в формуле (4) определяется через функцию $R(t)$ однозначно.

Определение 3. *Функцию $F(u)$, $u\in\mathbb{R}$, из формулы* (4) *называют спектральной функцией слабо стационарного процесса.*

Если $F(u)$, $u \in \mathbb{R}$, *– абсолютно непрерывная функция, т. е.*

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(v)\,dv,$$

то функцию $f(u)$, $u \in \mathbb{R}$, *называют спектральной плотностью процесса.*

Замечание 2. Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(t)|\,dt < \infty,$$

то

$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} R(t)\,dt,$$

т. е. спектральная плотность совпадает с обратным преобразованием Фурье корреляционной функции.

Замечание 3. Понятие стационарности и слабой стационарности можно очевидным образом применить и к последовательности случайных величин.

Так, последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называют *слабо стационарной*, если

$$M\xi_k = m, \quad M(\xi_{k+n} - m)\overline{(\xi_k - m)} = R_n, \; k = 1, 2, \ldots; \; n = 1, 2, \ldots .$$

В этом случае последовательность чисел $R_n, n \geq 1,$ называют *корреляционной функцией* исходной последовательности. Несложно показать, что

$$R_n = \int_0^{2\pi} e^{inu}\,dF(u),$$

где F – непрерывная справа монотонно неубывающая ограниченная функция. Ее называют *спектральной функцией*, а ее производную (если она существует) – *спектральной плотностью* исходной последовательности.

Теорема 2. *Пусть* $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *– слабо стационарный случайный процесс со спектральной функцией* $F(u)$, $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M}\xi(t) \equiv 0$. *Тогда существует процесс с ортогональными приращениями* $\varsigma = \{\varsigma(u), u \in \mathbb{R}\}$ *такой, что*

$$M|\varsigma(u)|^2 = F(u), \; u \in \mathbb{R},$$

и

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,d\varsigma(u). \tag{5}$$

Формулу (5) называют *спектральным разложением (спектральным представлением)* процесса ξ, а функцию $\varsigma(u,v)=\varsigma(v)-\varsigma(u)$, $u<v$, – *стохастической спектральной мерой* процесса ξ.

§ 5. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Основной идеей в определении таких процессов является свойство независимости «будущего» процесса от его «прошлого», если фиксировано «настоящее».

Пусть $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ – вероятностное пространство, на котором задан случайный процесс $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$, $T\subset\mathbb{R}$, принимающий значения в измеримом пространстве $(X,\mathscr{B}_X)$, которое называется *фазовым пространством*, или *пространством состояний*. Будем считать, что $(X,\mathscr{B}_X)$ – борелевское пространство, т. е. изоморфное борелевскому подмножеству $\mathbb{R}$ с борелевской сигма-алгеброй.

Обозначим

$$\mathscr{F}_t=\sigma\{\xi(u);u\le t\},\mathscr{F}_{[t,\infty)}=\sigma\{\xi(u);u\ge t\},$$

так что величина $\xi(u)$ измерима относительно $\mathscr{F}_t$ при $u\le t$ и относительно $\mathscr{F}_{[t,\infty)}$ при $u\ge t$, σ-алгебра $\sigma\{\mathscr{F}_t,\mathscr{F}_{[t,\infty)}\}$ может совпадать с $\mathscr{A}$.

Определение 1. *Случайный процесс* $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$, $T\subset\mathbb{R}$, *называется марковским, если для любых* $t\in T$, $A\in\mathscr{F}_t$, $B\in\mathscr{F}_{[t,\infty)}$

$$\mathrm{P}\big(AB\,|\,\xi(t)\big)=\mathrm{P}\big(A\,|\,\xi(t)\big)\cdot\mathrm{P}\big(B\,|\,\xi(t)\big). \tag{1}$$

Приведем еще одно эквивалентное определение марковского процесса.

Определение 2. *Случайный процесс* $\xi=\{\xi(t),t\in T\}$ *называется марковским, если для любой ограниченной* $\mathscr{B}_X$*-измеримой функции* f, *любого* $n\ge1$ *и всех* $t_1<t_2<\ldots<t_n\le t$

$$\mathrm{M}\big(f(\xi(t))\,|\,\xi(t_1),...,\xi(t_n)\big)=\mathrm{M}\big(f(\xi(t))\,|\,\xi(t_n)\big). \tag{2}$$

Введем *переходную функцию*, играющую ключевую роль при построении марковских процессов.

Определение 3. *Функция* $P(s,t,x,B)$, *заданная для* $s\le t$, $(s,t\in T$, $x\in X$, $B\in\mathscr{B}_X)$, *называется переходной функцией на измеримом пространстве* $(X,\mathscr{B}_X)$, *если она удовлетворяет следующим условиям*:

1) $P(s, x, t, B)$ *как функция от* B *есть распределение вероятностей при каждых* $s \le t$, $x \in X$;

2) $P(s, x, t, B)$ *измерима по* x *при каждых* $s \le t$ *и* $B \in \mathscr{B}_X$;

3) $I_B(x)$ *при* $s \in T$, $x \in X$, $B \in \mathscr{B}_X$;

4) *при* $s < u < t$ *и при всех* x, B *из* $\mathscr{B}_X$ *справедливо уравнение Колмогорова – Чепмена*

$$P(s, x, t, B) = \int_X P(s, x, u, dy) \cdot P(u, y, t, B). \tag{3}$$

Говорят, что марковский процесс $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ со значениями в $(X, \mathscr{B}_X)$ *обладает переходной функцией* $P(s, t, x, B)$, если для всех $s \le t$ ($s, t \in T$), $B \in \mathscr{B}_X$

$$P(s, \xi(s), t, B) = \mathrm{P}(\xi(t) \in B \mid \xi(s)) \text{ п. н.}$$

или, что то же самое, $P(s, x, t, B) = \mathrm{P}(\xi(t) \in B \mid \xi(s) = x)$ почти всюду по вероятностной мере порожденной случайной величиной $\xi(s)$.

Для произвольных марковских процессов имеет место только ослабленный вариант равенства (3), справедливых не для всех $x \in X$, а лишь для почти всех $x \in X$ (по вероятностной мере порожденной случайной величиной $\xi(s)$). Отметим, что вопрос о существовании у марковского процесса переходной функции не является тривиальным.

По переходной функции $P(s, x, t, B)$ можно построить марковский процесс ξ с начальным условием $\xi(0) = a$ с данной переходной функцией. Его конечномерные распределения задаются формулой

$$\mathrm{P}(\xi(t_1) \in dy_1, ..., \xi(t_n) \in dy_n) =$$

$$= P(0, a, t_1, dy_1) \cdot P(t_1, y_1, t_2, dy_2) \cdots P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n). \tag{4}$$

Определение 4. Марковский процесс $\xi(t)$, $t \in T$, называется *однородным*, если его переходная функция $P(s, x, t, B)$ при любых $x \in X$, $B \in \mathscr{B}_X$, зависит лишь от разности $t - s$:

$$P(s, x, t, B) = P(t - s, x, B).$$

Это есть вероятность за время $t - s$ попасть из x в B.

Заметим, что изучение неоднородных марковских процессов может быть в принципе сведено к изучению однородных за счет расширения фазового пространства.

Рассмотрим теперь марковский процесс с дискретным (т. е. не более чем счетным) фазовым пространством.

Определение 5. *Марковский процесс с дискретным фазовым пространством называется цепью Маркова или марковской цепью (как в случае дискретного, так и в случае непрерывного времени).*

Обозначим элементы фазового пространства числами $1,2,\ldots,$ Их можно интерпретировать как состояния процесса, описываемого цепью Маркова.

Переходными вероятностями цепи Маркова $\xi(t)$, $t\in T$, называются функции

$$p_{ij}(s,t)=\mathrm{P}\big(\xi(t)=j\,|\,\xi(s)=i\big),\text{ где } s\le t\ \ (s,t\in T),\ i,\ j=1,2,\ldots .$$

Переходные вероятности удовлетворяют следующим условиям:

1) $p_{ij}(s,t)\ge 0$ для всех $s\le t$, $s,t\in T$, $i,j=1,2,\ldots$;

2) $\sum\limits_j p_{ij}(s,t)=1$ для любых $s\le t$, $s,t\in T$ и $i=1,2,\ldots$;

3) $p_{ij}(s,s)=\delta_{ij}$ для всех $s\in T$, $i,j=1,2,\ldots,$ где $\delta_{ij}=0$, если $i\ne j$ и $\delta_{ii}=1$.

4) для всех $s<u<t,$ $i,j=1,2,\ldots$ верно равенство

$$p_{ij}(s,t)=\sum_k p_{ik}(s,t)\,p_{kj}(s,t).$$

Переходная функция для цепей Маркова задается формулой

$$P(s,i,t,B)=\sum_{j\in B}p_{ij}(s,t)\text{, где } s\le t\ \ (s,t\in T),\ i=1,2,\ldots,\ B\subset\mathbb{N}.$$

Однородность марковской цепи означает, что $p_{ij}(s,t)$ при каждых $i,j=1,2,\ldots$ зависят только от разности $t-s$ и $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t-s)$.

Пусть $P(t)$ – матрица, состоящая из элементов $p_{ij}(t)$, $i,j=1,2,\ldots$. Тогда равенство (4) примет вид $P(s+t)=P(s)P(t)$, кроме того, $P(0)=I$ – единичная матрица.

Рассмотрим теперь цепи Маркова с дискретным временем, т. е. $T\subset\{0,1,2,\ldots\}$ и $X=\{1,2,\ldots\}$. Тогда в однородном случае переходные вероятности за n шагов, т. е. $p_{ij}(n)$, являются элементами n-й степени матрицы переходных вероятностей за один шаг, $P(n)=P^n$, где $P=P(1)$. Кроме переходных вероятностей задается *начальное распределение* вероятностей $p_i^0 = \mathrm{P}\big(\xi(0) = i\big)$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\sum_i p_i^0 = 1$.

Через $p_j(n) = \mathrm{P}\big(\xi(n) = j\big)$ обозначим вероятность того, что система на n-м шаге будет находиться в состоянии j. Тогда, положив $p(n) = \big(p_j(n)\big)_{j=1,2,\ldots}$, имеем $p(n) = \left(P^T\right)^n p(0)$.

Состояние $i \in X$ называется *несущественным*, если из него с положительной вероятностью можно за конечное число шагов выйти, но нельзя в него вернуться, т. е. существуют такие m и $j \in X$, что $p_{ij}(m) > 0$, но $p_{ji}(n) = 0$ для всех n.

Выделим из множества X все несущественные состояния. Тогда множество оставшихся *существенных* состояний такое, что цепь Маркова, попавшая в него, никогда из этого множества не выйдет.

Состояние $j \in X$ называется *достижимым* из состояния $i \in X$ (обозначается $i \to j$), если существует такой номер $m \ge 0$, что $p_{ij}(m) > 0$. Состояния i и j называются *сообщающимися* (обозначается $i \leftrightarrow j$), если j достижимо из i и i достижимо из j.

Отношение «$\leftrightarrow$» является отношением эквивалентности, поэтому множество существенных состояний разбивается на подмножества $X_1, X_2, \ldots$, состоящие из сообщающихся состояний, причем переходы между разными множествами невозможны. Эти множества называются *классами* или *неразложимыми классами* существенных сообщающихся состояний. Если имеется только один класс, т. е. все состояния сообщающиеся, то такая цепь Маркова называется неразложимой.

Используя предыдущие понятия, матрицу переходных вероятностей можно привести к следующему виду:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_k & 0 \\ B_1 & B_2 & \ldots & B_k & C \end{pmatrix},$$

где P_j – матрица переходных вероятностей внутри j-го неразложимого класса; B_i – матрица переходных вероятностей из несущественных состояний в i-й класс; C – матрица переходных вероятностей для несущественных состояний.

Говорят, что состояние $j \in X$ имеет *период* $d = d(j)$, если d – наибольший общий делитель чисел n таких, что $p_{jj}(n) > 0$ (если $p_{jj}(n) = 0$ для всех $n \geq 1$, то полагаем $d = 0$). Для сообщающихся состояний периоды равны. Поэтому все состояния одного неразложимого класса X имеют один и тот же период, который называется периодом этого класса, $d = d(X)$.

Если $d(j) = 1$ ($d(X) = 1$), то состояние j (класс X) называется апериодическим.

Состояние $j \in X$ называется возвратным, если с вероятностью 1 цепь Маркова, выходящая из этого состояния, на каком-то шаге вернется в состояние j. Остальные состояния – невозвратные. Сообщающиеся состояния являются возвратными или нет одновременно.

Утверждение. *Состояние i возвратно тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty .$$

Цепь Маркова называется *эргодической*, если для всех состояний $i, j \in X$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j > 0, \ \sum_j p_j = 1 .$$

Вероятности p_j образуют *предельное распределение* цепи Маркова.

Распределение вероятностей $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$, $\sum_j \pi_j = 1$ называется *стационарным распределением* цепи Маркова, если

$$\pi_i = \sum_j \pi_j p_{ji} , \ j = 1, 2, \ldots .$$

Отметим, что предельное распределение эргодической цепи Маркова является стационарным.

Теорема. *Однородная цепь Маркова с конечным числом состояний является эргодической тогда и только тогда, когда существует номер* n_0 *такой, что* $p_{ij}(n) > 0$ *для всех* $i, j \in X$ *и* $n > n_0$.

Кроме того, однородная цепь Маркова с конечным числом состояний эргодическая, если и только если, она неразложима и апериодична. Кроме того, в ней все состояния возвратны.

§ 6. ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Определение. *Однородный марковский процесс* $\xi = \{\xi(t), t \ge 0\}$ *в* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ *с переходной функцией* $P(t, x, B)$ *называется диффузионным, если для всех* $x \in \mathbb{R}$:

1) $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{1}{\Delta} \int\limits_R (y-x) \cdot P(\Delta, x, dy) = a(x)$;

2) $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{1}{\Delta} \int\limits_R (y-x)^2 \cdot P(\Delta, x, dy) = b^2(x)$;

3) *при каких-нибудь* $\delta > 0$, $c < \infty$ *и всех достаточно малых* $\Delta > 0$

$$\int\limits_R |y-x|^{2+\delta} P(\Delta, x, dy) < c \cdot \Delta^{1+\frac{\delta}{2}}.$$

Обозначим $\Delta\xi(t) = \xi(t+\Delta) - \xi(t)$. Тогда приведенные условия можно записать в виде

$$\mathrm{M}\big(\Delta\xi(t) \big| \xi(t) = x\big) \sim \Delta \cdot a(x),$$

$$\mathrm{M}\Big(\big(\Delta\xi(t)\big)^2 \Big| \xi(t) = x\Big) \sim \Delta \cdot b^2(x),$$

$$\mathrm{M}\Big(\big|\Delta\xi(t)\big|^{2+\delta} \Big| \xi(t) = x\Big) \sim c \cdot \Delta^{1+\frac{\delta}{2}}.$$

Коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ называют соответственно *коэффициентами сноса* и *диффузии*. Условие 3) есть некий аналог условия Ляпунова. Его можно заменить на условие

3а) $\mathrm{M}\Big(\big(\Delta\xi(t)\big)^2; \big|\xi(t)\big| > \varepsilon\Big) = o(\Delta)$ *при любом* $\varepsilon > 0$, $t \ge 0$.

Из условия 3) и теоремы Колмогорова непосредственно вытекает, что диффузионный процесс ξ можно рассматривать как процесс с непрерывными траекториями.

Пример 1. Стандартный процесс броуновского движения W является диффузионным процессом, так как для него

$$P(t, x, B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_B e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy,$$

$$\mathrm{M}\big(\Delta W(t)\big) = 0, \ \mathrm{M}\big|\Delta W(t)\big|^2 = \Delta, \ \mathrm{M}\big|\Delta W(t)\big|^4 = 3\Delta^2.$$

Отметим, что распределение диффузионного процесса однозначно определяется коэффициентами сноса и диффузии. Это доказывает следующая теорема.

Теорема 1 (обратное уравнение Колмогорова). *Если переходные вероятности* $P(t, x, B)$ *диффузионного процесса дважды непрерывно дифференцируемы по* x, *то они дифференцируемы по* t *и удовлетворяют уравнению*

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,x,B) = a(x)\frac{\partial P}{\partial x}(t,x,B) + \frac{b^2(x)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x,B) \tag{1}$$

и начальному условию $P(0, x, B) = I_B(x)$.

З а м е ч а н и е 1. Условия теоремы на гладкость переходных функций P на самом деле могут быть доказаны в предположении непрерывности a и b и условий $b > 0$, $|a| \le c \cdot (|x|+1)$, $b^2 \le c \cdot (|x|+1)$.

З а м е ч а н и е 2. Из теории дифференциальных уравнений известно, что при широких предположениях о коэффициентах a и b и при $B = (-\infty, z]$, $z \in \mathbb{R}$ задача Коши (1) имеет единственное решение P, бесконечное число раз дифференцируемое по t, x и z. Отсюда, в частности, следует, что $P(t,x,B)$ имеет плотность $p(t,x,z)$, являющуюся фундаментальным решением (1).

З а м е ч а н и е 3. Вместе с $P(t, x, B)$ уравнению (1) будет удовлетворять функция

$$u(t, x) = \int_R \varphi(z) \cdot P(t, x, dz)$$

для любой функции φ с конечным носителем, обладающей необходимыми производными.

В теореме 1 рассматривается приращение времени, предшествующее основному интервалу. В связи с этим уравнение (1) называется *обратным уравнением Колмогорова*. Для формулировки *прямого уравнения Колмогорова* предположим, что переходная функция $P(t, x, B)$ является абсолютно непрерывной, т. е. допускает представление

$$P(t, x, B) = \int_B p(t, x, y)dy, \forall B \in \mathscr{B}(R).$$

Функция $p(t, x, y)$ называется *переходной плотностью*.

Теорема 2 (прямое уравнение Колмогорова). *Пусть переходная плотность* $p(t, x, y)$ *такова, что существуют непрерывные производные*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y) \cdot p(t, x, y)\right], \ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b^2(y) \cdot p(t, x, y)\right].$$

Тогда $p(t, x, y)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\cdot p(t, x, y)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b^2(y)\cdot p(t, x, y)\right].$$

Пример 2. *Процесс Орнштейна – Уленбека.* Пусть

$$\xi(t) = x e^{at} + \sigma e^{at} W\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right), \; t \ge 0,$$

где W – стандартный процесс броуновского движения. Этот процесс является однородным диффузионным процессом с переходной плотностью

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(y - x e^{at}\right)^2}{2\sigma^2 t}\right\},$$

где

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(e^{2at} - 1\right).$$

Несложно убедиться в том, что переходная плотность удовлетворяет прямому и обратному уравнениям Колмогорова с коэффициентами $a(x) = ax$, $b(x) = \sigma^2 = \text{const}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5
(6 часов)

Тема: Основные понятия теории случайных процессов

Необходимые понятия и теоремы: случайный процесс; конечномерные распределения; траектория процесса; эквивалентные процессы и модификация; случайный процесс Пуассона; случайный процесс броуновского движения; ковариация и корреляционная функция случайного процесса; непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайного процесса в среднеквадратическом; стохастический интеграл от неслучайных функций; стационарные (в широком смысле) случайные процессы; спектральная функция и спектральная плотность стационарного процесса; марковские случайные процессы; переходная функция; цепи Маркова; переходные вероятности; классификация состояний цепи Маркова; эргодические цепи Маркова; случайный процесс со стационарными распределениями; диффузионные процессы; прямое и обратное уравнения Колмогорова.

Литература: [5, с. 270–292, 321–345]; [8, с. 109–125, 238–338]; [14, с. 109–136, 179–194]; [19, с. 191–244]; [27, с. 77–84]; [34, с. 121–144, 390–457].

Задание 5.1. Пусть ξ_1, ξ_2 и τ – независимые случайные величины, причем ξ_1 и ξ_2 имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$, а τ имеет показательный закон распределения с параметром λ, H – функция Хевисайда, т. е. $H(t) = 1$, если $t \geq 0$ и $H(t) = 0$, если $t < 0$. Случайный процесс $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ имеет вид, указанный в таблице.

№ п/п	$\eta(t)$	λ
1	$\eta(t) = a\xi_1 t + b\xi_2 \cos t + cH(t-\tau)$	1
2	$\eta(t) = a\xi_1 t^2 + b\xi_2 \sin t + cH(t-\tau)$	1,5
3	$\eta(t) = a\xi_1 e^t + b\xi_2 \left(t^2 + t + 3\right) + cH(t-\tau)$	0,5
4	$\eta(t) = a\xi_1 \sin t + b\xi_2 e^{-t} + cH(t-\tau)$	2
5	$\eta(t) = a\xi_1 \sqrt{t} + b\xi_2 e^{-t} \cos t + cH(t-\tau)$	2,5
6	$\eta(t) = a\xi_1 t \sin\frac{1}{t} + b\xi_2 t + cH(t-\tau)$	3
7	$\eta(t) = a\xi_1 \frac{1}{1+t^2} + b\xi_2 t + cH(t-\tau)$	4,5
8	$\eta(t) = a\xi_1 e^{-t^2} + b\xi_2 t^3 + cH(t-\tau)$	3,5
9	$\eta(t) = a\xi_1 (t-3)^2 + b\xi_2 \ln(t+1) + cH(t-\tau)$	4
10	$\eta(t) = a\xi_1 t \ln t + b\xi_2 \cos\sqrt{t} + cH(t-\tau)$	5

При каких значениях числовых параметров a, b и c данный процесс будет стохастически непрерывным, обладать непрерывными траекториями, непрерывным или дифференцируемым в среднеквадратическом? Найти его корреляционную функцию и двумерные распределения.

Задание 5.2. Дана матрица P переходных вероятностей однородной цепи Маркова с дискретным временем.

1	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

3	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

1) Найти несущественные состояния и неразложимые классы этой цепи. Вычислите периоды всех состояний.

2) Найти возвратные состояния и стационарное распределение вероятностей.

3) Выяснить, будет ли данная цепь эргодической. Если да, то найдите ее предельные вероятности.

4) Найти распределение вероятностей данной цепи Маркова с равномерным начальным распределением после трех шагов.

Задачи

1. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ – стационарный гауссовский процесс, т. е. процесс все конечномерные распределения которого гауссовские, с математическим ожиданием m и ковариационной функцией $r(\tau)$. Выпишите выражения для одномерной и двухмерной плотностей этого процесса.

2. Произведем независимое от пуассоновского процесса $\Pi = \{\Pi(t), t \geq 0\}$ бросание монеты и определим случайный процесс $\eta = \{\eta(t), t \geq 0\}$ следующим образом: если монета выпадает гербом, положим $\eta(t)=(-1)^{\Pi(t)}$, а если решкой, то $\eta(t)=(-1)^{\Pi(t)+1}$. Найти конечномерные распределения процесса η.

3. Найти математические ожидания и корреляционные функции случайных процессов Пуассона и броуновского движения.

4. Доказать, что однородный процесс с независимыми приращениями на отрезке является стохастически непрерывным.

5. Доказать, что сумма независимых случайных процессов с независимыми приращениями также является процессом с независимыми приращениями.

6. Пусть $\xi=\{\xi(t), t\geq 0\}$ – случайный процесс с независимыми приращениями. Доказать, что если для некоторых $t_2>t_1$ и некоторой постоянной $a\in\mathbb{R}$ верно $\mathrm{P}\{\xi(t_2)-\xi(t_1)=a\}=1$, то для любой пары чисел u_1 и u_2 такой, что $t_1\leq u_1\leq u_2\leq t_2$, существует постоянная $b\in\mathbb{R}$ такая, что $P\{\xi(u_2)-\xi(u_1)=b\}=1$.

7. Пусть $\varphi(t,z)$ – характеристическая функция однородного стохастического процесса с независимыми приращениями. Доказать, что $\varphi(t,z)$ непрерывна как функция t для всех $z\in\mathbb{R}$.

8. Пусть $\xi=\{\xi(t), t\geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями, $\varphi(t,z)$ – его характеристическая функция. Доказать, что если $\varphi(t,z)$ непрерывна по t в точке t_0 для всех $z\in\mathbb{R}$, то процесс ξ является стохастически непрерывным в точке t_0.

9. Пусть $\xi=\{\xi(t), t\geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями, $\varphi(t,z)$ – его характеристическая функция. Доказать, что $z|\varphi(t,z)|$ не возрастает как функция t для всех $z\in\mathbb{R}$.

10. Пусть $\xi=\{\xi(t), t\geq 0\}$ – однородный случайный процесс с независимыми приращениями, $\xi(0)=0$, а $\varphi(t,z)$ – его характеристическая функция. Доказать, что для любых t и s верно равенство $\varphi(t+s,z)=\varphi(t,z)\varphi(s,z)$.

11. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные величины, $t_1<\ldots<t_n$ – точки из интервала $[a,b]$. Определим процесс $\xi=\{\xi(t), t\geq 0\}$ как $\xi(t)=\sum\limits_{t_k<t}\xi_k$. Доказать, что ξ – процесс с независимыми приращениями.

12. Пусть $\xi=\{\xi(t), t\geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями. Доказать, что если $\xi(t_0)$ имеет абсолютно непрерывное распределение при некотором t_0, то $\xi(t)$ имеет абсолютно непрерывное распределение при любом $t \geq t_0$.

13. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями. Доказать, что функция $\mathrm{D}\{\xi(t)\}$ не убывает по t.

14. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями. Доказать, что если функция $\mathrm{D}\{\xi(t)\}$ непрерывна, то ξ стохастически непрерывен.

15. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями, η – некоторая случайная величина, определенная на том же вероятностном пространстве. Будет ли процесс $\varsigma(t) = \xi(t) + \eta$, $t \geq 0$, процессом с независимыми приращениями?

16. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ – однородный невырожденный процесс с независимыми приращениями. Доказать, что для любого $t > 0$ и любого $A > 0$ верно $\mathrm{P}\{|\xi(t)| > A\} > 0$.

17*. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями. Доказать, что если $\mathrm{P}\{\xi(t_0) = \mathrm{const}\} = 1$ при некотором t_0, то $\mathrm{P}\{\xi(t) = \mathrm{const}\} = 1$ для $t \leq t_0$.

18*. Доказать, что любой случайный процесс с независимыми приращениями является марковским случайным процессом.

19. Доказать, что если случайный процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $W(0) = 0$ п. н.;

2) для любых $0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины

$$W(t_1),\ W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

независимы;

3) для любых $t > s$

$$W(t) - W(s) \in N(0, t - s),$$

то он является стандартным процессом броуновского движения.

20. Найти конечномерные распределения стандартного процесса броуновского движения.

21*. Доказать, что процесс броуновского движения не дифференцируем по вероятности.

22. Доказать, что процесс броуновского движения является марковским. Найти его переходную функцию.

23. Пусть $W^{(1)}(t)$ и $W^{(2)}(t)$, $t \ge 0$, – независимые процессы броуновского движения. Доказать, что $\frac{1}{\sqrt{2}}(W^{(1)}(t) + W^{(2)}(t)), t \ge 0$, также является процессом броуновского движения.

24. Пусть $W = \{W(t), t \ge 0\}$ – стандартный процесс броуновского движения. Доказать, что следующие процессы также будут процессами броуновского движения:

1) $W^{(1)}(t) = \begin{cases} 0, t = 0, \\ tW(1/t), t > 0; \end{cases}$

2) $W^{(2)}(t) = \sqrt{c}W(t/c), t \ge 0, c = \text{const} > 0;$

3) $W^{(3)}(t) = \begin{cases} W(t), t \le T, \\ 2W(T) - W(t), t > T. \end{cases}$

25. Пусть $W = \{W(t), t \in T\}$, $T = [0; a]$ – процесс броуновского движения, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a$ – разбиение отрезка T. Доказать, что для любого положительного числа A

$$P\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left|W(t_{i+1}) - W(t_i)\right| > A\right) \to 1$$

при $n \to \infty$ и $\max\limits_{0 \le i \le n-1} (t_{i+1} - t_i) \to 0.$

26*. Пусть $W = \{W(t), t \ge 0\}$ – стандартный процесс броуновского движения и c – некоторое положительное число. Показать, что если $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = c$, то

$$\mathrm{M}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2 - c\right)^2 \to 0$$

при $n \to \infty$ и $\max\limits_{0 \le i \le n-1} (t_{i+1} - t_i) \to 0.$

27. Пусть $W = \{W(t), t \ge 0\}$ – стандартный процесс броуновского движения. Найти совместную плотность распределения величин $W(u)$ и $W(v)$, $0 < u < v < 1$, при условии, что $W(1) = 0$.

28. Пусть $W = \{W(t), t \ge 0\}$ – стандартный процесс броуновского движения. Найти ковариацию величин $W(u)$ и $W(v)$ $0 < u < v < 1$ при условии, что $W(1) = 0.$

29. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ – стандартный процесс броуновского движения. Найти корреляционную функцию процесса $W^{(0)}(t) = W(t) - tW(1)$, рассматриваемого на отрезке $0 \leq t \leq 1$ (условный винеровский процесс).

30. Пусть $W^{(0)} = \{W^{(0)}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ – условный винеровский процесс, определенный в предыдущей задаче. Доказать, что процесс $W(t) = $ $= (1+t)W^{(0)}\left(\dfrac{t}{(1+t)}\right), t \geq 0,$ – стандартный процесс броуновского движения.

31. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ – стандартный процесс броуновского движения. Найти условную плотность величины $W(t), t_1 < t < t_2$, при условии, что $W(t_1) = A,\ W(t_2) = B.$

32. Пусть $\tau(z),\ z > 0,$ – случайный момент времени, при котором стандартный процесс броуновского движения впервые принимает значение z, т. е. $\tau(z) = \inf\{t > 0 : W(t) = z\}$. Найти плотность распределения $\tau(z)$. Показать, что математическое ожидание $\tau(z)$ бесконечно.

33. Показать, что распределение случайной величины $\tau(z)$, определенной в предыдущей задаче, совпадает с распределением случайной величины $z^2\tau(1)$.

34. Выяснить, являются ли дифференцируемыми в среднеквадратическом процессы Пуассона и броуновского движения. Доказать, что они являются однородными марковскими процессами.

35. Доказать, что если для случайного процесса $\Pi = \{\Pi(t), t \geq 0\}$ выполнены следующие условия:

1) $\Pi(0) = 0$ п. н.;

2) для любых $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$ случайные величины $\Pi(t_1)$, $\Pi(t_2) - \Pi(t_1), \ldots, \Pi(t_n) - \Pi(t_{n-1})$ независимы;

3) для любых $t > 1$

$$P\left(\Pi(t) - \Pi(1) = k\right) = \frac{\left[\lambda(t-1)\right]^k}{k!} e^{-\lambda(t-1)},\ \ \lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

то $\Pi(t)$ – однородный случайный процесс Пуассона.

36*. Пусть $\Pi = \{\Pi(t), t \geq 0\}$, – пуассоновский процесс. Показать, что в смысле сходимости по вероятности:

1) процесс $\Pi(t),\ t \geq 0$, непрерывен;

2) существует производная $\Pi'(t)$ и $\Pi'(t) = 0$ п. н.

37. Пусть все траектории пуассоновского процесса непрерывны справа. Доказать, что тогда почти все траектории – неубывающие целочисленные функции, возрастающие только скачками величины 1.

38. Доказать, что сумма независимых пуассоновских процессов является пуассоновским процессом.

39. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ – стационарный в широком смысле случайный процесс с корреляционной функцией

$$K(t) = \left(1 + |t| + \frac{t^2}{3}\right) \cdot e^{-|t|}.$$

Сколько раз он дифференцируем в среднем квадратическом?

40. Найти корреляционную функцию случайного процесса

$$\xi(t) = \alpha_1 \cdot f_1(t) + \ldots + \alpha_n \cdot f_n(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f_1, \ldots, f_n$ – произвольные числовые функции, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – независимые случайные величины с дисперсиями $d_1, \ldots, d_n$.

41. Пусть A, η и φ – случайные величины, причем A, η – неотрицательны и имеют произвольное совместное распределение, а φ не зависит от них и имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\eta \cdot t + \varphi), \ t \in \mathbb{R}.$$

Доказать, что его конечномерные распределения не меняются при любом сдвиге времени, т. е. он является стационарным в узком смысле случайным процессом.

42. Найти спектральное представление случайного процесса ξ из предыдущей задачи.

43. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ – стационарный случайный процесс с математическим ожиданием m и спектральной плотностью $f(\lambda)$; $\eta(t) = \xi(t) \cdot \cos(ct + \varphi)$, где c – константа, а φ – независимая от ξ случайная величина, равномерно распределенная на $[0; 2\pi]$. Записать спектральное представление для η и найти соответствующую спектральную функцию.

44*. Доказать, что:

1) для непрерывности в среднеквадратическом процессе ξ в точке t необходимо и достаточно, чтобы

$$B_\xi(t', t') - B_\xi(t', t) - B_\xi(t, t') + B_\xi(t, t) \to 0$$

при $t' \to t$;

2) для среднеквадратической дифференцируемости процесса ξ в точке t необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{t'\to t, t''\to t} \frac{B_\xi(t',t'') - B_\xi(t',t) - B_\xi(t,t'') + B_\xi(t,t)}{(t'-t)(t''-t)} = \left.\frac{\partial^2 B_\xi(t,s)}{\partial t \partial s}\right|_{s=t}.$$

45. Известно, что $\mathrm{M}\{\xi(t)\} = 2t+1$; $B(t,s) = e^{-(s-t)^2}$; $\eta(t) = \dfrac{d\xi(t)}{dt}$, $t \in \mathbb{R}$. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию процесса η.

46. Доказать, что случайный процесс $\xi(t) = e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$, $t \ge 0$, где α и ω – положительные постоянные, а φ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 2\pi]$, дифференцируем в среднеквадратичном при всех $t > 0$.

47. Будут ли непрерывны и дифференцируемы стационарные процессы, имеющие ковариационные функции:

1) $De^{-\alpha|\tau|}\cos b\tau$, $D > 0$, $\alpha \ge 0$, $b \ge 0$;

2) $De^{-\alpha|\tau|}(\cos b\tau + \dfrac{a}{b}\sin b|\tau|)$?

48. Пусть $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ – независимые случайные процессы такие, что $\mathrm{M}\{\xi^{(i)}(t)\} = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, а $r_1(t,s), \ldots, r_n(t,s)$ – соответствующие ковариационные функции. Найти ковариационную функцию процесса $\xi^{(1)} + \ldots + \xi^{(n)}$.

49. Пусть ξ – гауссовская случайная величина со средним $m \in \mathbb{R}$ и дисперсией $\sigma^2 > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Найти ковариационную функцию процесса $\xi(t) = \xi t + b$, $t \ge 0$.

50. Пусть $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$, $t \in T$, – два независимых случайных процесса с ковариационными функциями $r_1(t,s)$ и $r_2(t,s)$ соответственно. Найти ковариационную функцию процесса $\eta(t) = \xi^{(1)}(t)\xi^{(2)}(t)$, $t \in T$.

51*. Случайный процесс $\xi(t) = \eta$, $t \in T$, где η представляет собой случайную величину, $\mathrm{M}\eta = a$ и $\mathrm{D}\eta = \sigma^2$. Найти $\mathrm{M}\{\xi(t)\}$, $\mathrm{D}\{\xi(t)\}$, ковариационную функцию процесса ξ. Определить, является ли этот процесс стационарным.

52. Пусть φ – случайная величина с плотностью $p_\varphi(x) = \cos x$, при $0 \le x \le \pi/2$; α и ω – положительные постоянные. Построим случайный процесс $\xi(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$, $t \in \mathbb{R}$. Будет ли этот процесс стационарным?

53. Гауссовский стационарный процесс $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ имеет математическое ожидание $m = 5$ и ковариационную функцию $r(\tau) = e^{-2|\tau|}(\cos 2\tau + \sin 2|\tau|)$. Найти:

1) одномерную плотность процесса $\eta(t) = \dfrac{d\xi(t)}{dt}$;

2) вероятность того, что $|\eta(t)| < \sqrt{3}$.

54. Доказать, что следующие функции являются положительно определенными:

1) $r_1(t,s) = \min(t,s) - ts, \quad t,s \in [0,1]$;

2) $r_2(t,s) = e^{-|t-s|}, \quad t,s \in \mathbb{R}$.

55. Пусть $\varphi_1(t), ..., \varphi_2(t)$ – произвольные действительные функции, $C_1, ..., C_n$ – неотрицательные числа. Доказать, что функция

$$r(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)$$

является ковариационной функцией некоторого случайного процесса.

56. Случайный процесс $\xi = \{\xi(t), t \ge 0\}$ строится следующим образом. В точке $t = 0$ он случайным образом с одинаковой вероятностью принимает одно из значений +1 или –1, остается постоянным до точки $t = 1$, в которой снова равновероятно и независимо от предыдущих значений принимает одно из значений +1 или –1 и сохраняет его до точки $t = 2$ и т. д. Определить математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию процесса ξ. Является ли он стационарным в широком смысле?

57. Случайный процесс $\xi = \{\xi(t), t \ge 0\}$ строится так же, как и в предыдущей задаче, с той лишь разницей, что точки, в которых происходит «розыгрыш» нового значения, не закреплены на оси времени, а занимают на ней случайное положение, сохраняя между собой постоянное расстояние, равное единице. Распределение первого момента «розыгрыша» – равномерное на $[0,1]$. Найти $\mathrm{M}\{\xi(t)\}$, $\mathrm{D}\{\xi(t)\}$, ковариационную функцию этого процесса. Определить, является ли $\xi(t)$ стационарным в широком смысле.

58. Доказать, что если $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ – стационарный в широком смысле случайный процесс, то его дисперсия $\mathrm{D}\{\xi(t)\} = 2\int_0^\infty f(\lambda)d\lambda$, $t \ge 0$, при условии что последний интеграл существует.

59. Найти спектральные плотности, соответствующие ковариационным функциям $\tau_0, \sigma > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$:

1) $r(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{\tau_0}, & |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0; \end{cases}$

2) $r(\tau) = e^{-|\tau|} \cos \beta\tau;$

3) $r(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|};$

4) $r(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|);$

5) $r(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(\cos \beta\tau + \dfrac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau|).$

60. Случайный процесс $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ имеет спектральную плотность, равную нулю вне промежутка $[\lambda_1, \lambda_2]$ и постоянную на этом промежутке. Найти коэффициент корреляции между $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

61. Случайный процесс $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \dfrac{a^2}{a^2 + \lambda^2}$. Найти его ковариационную функцию.

62. Будут ли дифференцируемы в среднеквадратическом случайные процессы, имеющие следующие спектральные плотности:

1) $f(\lambda) = \dfrac{a^2}{b^2 + \lambda^2}$;

2) $f(\lambda) = \sum\limits_j \dfrac{a_j^{\,2}}{b_j^{\,2} + \lambda^2}$.

63*. *Процесс Пуассона.* Пусть некоторая физическая система может находиться в одном из счетного множества состояний E_0, E_1, E_2, ..., причем в любой момент времени t она может сменить свое состояние, перейдя в другое, с номером, на единицу большим. Если Δt достаточно мало, то вероятность перехода системы за промежуток времени $(t,\ t + \Delta t)$ из состояния E_n в E_{n+1} равна $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, где λ – положительная постоянная. Составить систему дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс. Решив ее, найти вероятность $p_n(t)$ $(n = 1, 2, ...)$ того, что система в момент времени t окажется в состоянии E_n, если известно, что в начальный момент $t_0 = 0$ система находится в состоянии E_0.

64. *Процесс Юла*. В области G имеются частицы, способные размножаться (путем деления или иначе) и остающиеся в этой области в дальнейшем. За малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ каждая частица с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ производит новую независимо от остальных частиц.

1. Составить систему дифференциальных уравнений, определяющих этот процесс.

2. Решить эту систему.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию распределения, определяемого этой системой.

65. *Процесс чистой гибели*. В области G в начальный момент времени $t=0$ находилось k частиц. Независимо друг от друга частицы могут исчезать из этой области, причем каждая за малый промежуток времени Δt может исчезнуть с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Новые частицы в области появиться не могут.

1. Найти дифференциальные уравнения, описывающие этот процесс.

2. Найти вероятность $p_n(t)$ – решения этих уравнений.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию числа частиц в области G к моменту t.

66. *Процесс Пойа*. В области G появляются некоторые частицы и в дальнейшем остаются в этой области. Если к моменту t в области имелось n частиц, то вероятность (условная) увеличения их числа на единицу за малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ равна

$$\frac{1+an}{1+at}\cdot\Delta t + o(\Delta t),$$

где a – некоторая положительная постоянная. Вероятность увеличения числа частиц за то же время на две или более равна $o(\Delta t)$.

1. Составить дифференциальные уравнения, определяющие этот процесс (т. е. вероятность $p_n(t)$ того, что к моменту t в области G будет n частиц).

2. Найти явные выражения $p_n(t)$.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию числа частиц в области.

67. *Процесс размножения и гибели*. В области G имеются однородные частицы (например, бактерии), которые могут порождать такие же новые частицы, например посредством деления на две, а также могут погибать (исчезать). Если Δt мало, то вероятность для каждой частицы (независимо от наличия и поведения остальных частиц) породить одну новую равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность погибнуть – $\mu\Delta t + o(\Delta t)$, где λ и μ – некоторые положительные постоянные.

1. Составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих этот процесс.

2. При условии, что $p_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ – решение этой системы, т. е. вероятность того, что к моменту t в области G окажется n частиц, составить дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяет *производящая функция этих вероятностей*, т. е. функция

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cdot x^n.$$

3. Считая, что в начальный момент $t = 0$ в области G находилась одна частица, решить это дифференциальное уравнение и найти явное выражение производящей функции $F(x,t)$.

68. Найти переходную функцию для процесса $\xi(t) = W(-t),\ -\infty < t \le 0.$

69. Пусть $\xi_0, \xi_1, ...$ – последовательность независимых, одинаково распределенных целочисленных случайных величин. Доказать, что она образует цепь Маркова. Найти матрицу вероятностей перехода за n шагов.

70. Частица совершает случайное блуждание в плоскости по целочисленным точкам (i, j) таким, что $0 \le i, j \le n.$ Из любой внутренней точки указанного квадрата частица с равными вероятностями, независимо от ее предыдущего движения, переходит в одну из соседних (по вертикали или горизонтали) точек. При выходе на границу квадрата частица далее:

1) движется по границе квадрата, ориентированного по часовой стрелке;

2) возвращается в ту точку, из которой она вышла на границу;

3) выбирает случайным образом направление на границе и движется по границе в выбранном направлении.

Определить для каждого из указанных случаев, будет ли последовательность положений, занимаемых частицей, цепью Маркова.

71. В условиях предыдущей задачи частица из каждой внутренней точки с равной вероятностью может переходить в одну из соседних (по горизонтали, вертикали или диагонали). Будет ли последовательность положений частицы цепью Маркова для каждого из трех указанных условий движения после выхода на границу?

72. В начальный момент времени в урне n_0 белых и m_0 черных шаров. Через каждую единицу времени из урны по схеме выбора без возвращения извлекают один шар. Пусть n_k – число белых, а m_k – число черных шаров в урне в момент времени k. Какие из указанных ниже последовательностей образуют цепь Маркова, а какие – нет:

1) n_k; 4) пара (n_k, m_k);

2) $n_k - m_k$; 5) $n_k - m_k + 1/(n_k + m_k + 2)$?

3) $n_k + m_k$;

73. Пусть случайные величины $\xi_0, ..., \xi_n$ образуют цепь Маркова. Доказать, что случайные величины $\eta_0, ..., \eta_n$, где $\eta_i = \xi_{n-i}$ также образуют цепь Маркова. Образуют ли цепь Маркова случайные величины $\varsigma_0, ..., \varsigma_n$, где $\varsigma_0, ..., \varsigma_n$ – произвольная перестановка $\xi_0, ..., \xi_n$?

74. Пусть $\xi_0, \xi_1, ...$ – последовательность независимых случайных величин. Образует ли цепь Маркова последовательность $\xi_0 + \xi_1$, $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, …?

75. Пусть $\xi_0, \xi_1, ...$ – последовательность случайных величин, образующих цепь Маркова. Образует ли цепь Маркова последовательность $\xi_0 + \xi_1$, $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_2 + \xi_3$, …?

76. Дана цепь Маркова с конечным числом состояний. Пусть ξ_i – состояние цепи на i-м шаге. Будет ли цепью Маркова последовательность $\eta_0, \eta_1, ...$, где

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \xi_i = 1; \\ 0, & \xi_i \neq 1? \end{cases}$$

77. Пусть $\xi_0, \xi_1, ...$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения –1 и +1 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. Положим:

$$1)\ \eta_n = \xi_n \xi_{n+1};\ 2)\ \eta_n = \max \xi_i, 0 \le i \le n;\ 3)\ \eta_n = \prod_{i=0}^{n} \xi_i .$$

Будет ли последовательность $\eta_0, \eta_1, ...$ цепью Маркова?

78. Пусть $\xi_0, \xi_1, ...$ – последовательность независимых целочисленных случайных величин, причем $\mathrm{P}\{\xi_n = k\} = p_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$. Положим $\eta_n = \xi_0 + ... + \xi_n$. Доказать, что последовательность $\eta_0, \eta_1, ...$ образует цепь Маркова. Найти соответствующую матрицу вероятностей перехода за один шаг.

79. Пусть $\xi_0, \xi_1, ...$ и $\eta_0, \eta_1, ...$ – две цепи Маркова. Будет ли цепью Маркова последовательность $\xi_0 + \eta_0, \xi_1 + \eta_1, ...$?

80. Пусть $\xi_0, \xi_1, ...$ – независимые случайные величины с дискретными распределениями, $f_0, f_1, ...$ – некоторые функции. Доказать, что последовательность случайных величин $\eta_0, \eta_1, ...$, где $\eta_k = f_k(\eta_{k-1}, \xi_k)$ для $k = 1, 2, ...$ и $\eta_0 = f_0(\xi_0)$, образуют цепь Маркова.

81. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

$0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1$. Доказать, что если $\alpha + \beta > 0$, матрица вероятностей перехода за n шагов равна

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$$

и найти предел P^n при $n \to \infty$.

82. Человек либо ходит на работу пешком, либо приезжает на автомобиле. Если он идет пешком, то вероятность, что на следующий день поедет на автомобиле, равна 0,6. Если едет на автомобиле, то вероятность поехать на следующий день на автомобиле равна 0,7. Составить матрицу вероятностей переходов для его ежедневных способов попадания на работу. Если он идет пешком в понедельник, то какова вероятность, что он поедет на автомобиле:

1) в среду;

2) в среду и пятницу;

3) в пятницу;

4) в следующий вторник;

5) в понедельник шестью неделями позже?

Ответить на перечисленные вопросы, если в понедельник он идет пешком или едет на автомобиле.

83. Мышь передвигается между двумя соседними комнатами A и B без какого-либо риска. Если она покинет комнату A через наружную дверь, то ее поймает кошка. Если покинет комнату B через наружную дверь – попадает в мышеловку.

Вначале мышь в комнате B. Каждую минуту она передвигается, не оставаясь в одной комнате: из комнаты A в комнату B – с вероятностью 3/4 , из комнаты B в комнату A – с вероятностью 7/8. Найти:

1) вероятность, что поймана кошкой;

2) вероятность, что мышь попала в мышеловку;

3) среднее значение и дисперсию числа минут, оставшихся у мыши до гибели.

84. Могут ли все состояния цепи Маркова быть несущественными, если:

1) цепь Маркова имеет конечное число состояний;

2) число состояний счетное?

85. Указать все пары сообщающихся состояний для цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг:

$$1)\ P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2)\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

За сколько шагов из первого состояния можно попасть в третье?

86. Цепь Маркова имеет N состояний. Доказать, что:

1) если j-е состояние достижимо из i-го $(i \neq j)$, то оно может быть достигнуто меньше, чем за N шагов;

2) если $p_{ii}(n)>0$ для некоторых n, то возвращение может произойти за N или менее шагов.

87. Будет ли цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг периодической, если:

1) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; 3) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

Для периодических цепей указать период d.

88. Выделить циклические подклассы $C_0, C_1, ..., C_{d-1}$ множества состояний периодических цепей Маркова в пунктах 1) и 2) предыдущей задачи. Для этого взять произвольное состояние k, выделить множество C_0 состояний, которые достижимы из k за d шагов, затем множество состояний C_1, достижимых из состояний k за $d+1$ шаг, и т. д. Показать, что эволюция состояний марковской цепи происходит следующим образом:

$$C_0 \to C_1 \to C_2 \to ... \to C_d \to C_0 \to C_1 \to ... .$$

89. Указать возвратные и невозвратные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

90. Пусть цепь Маркова имеет периодические состояния. Доказать, что она не является эргодической.

91. Доказать, что цепь Маркова, имеющая по крайней мере два несообщающихся состояния, не является эргодической.

92. Доказать, что если цепь Маркова имеет по крайней мере одно несущественное состояние, то она является эргодической.

93. Показать, что у неэргодической марковской цепи может существовать стационарное распределение, причем единственное.

94. Доказать, что все состояния цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P возвратные, если:

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$;

3) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$;

4) $P = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & 1/n & \dots & 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 1/n & 0 & \dots & 1/n & 0 & 1/n \\ 1/n & 0 & 1/n & \dots & 0 & 1/n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1/n & 0 & \dots & 1/n & 0 & 1/n \\ 1/n & 0 & 1/n & \dots & 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 1/n & 0 & \dots & 1/n & 0 & 1/n \end{pmatrix}$, матрица $2n \times 2n$.

95. Имеется цепь Маркова со счетным числом состояний и матрицей вероятностей перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_2 & 0 & 1-p_2 & 0 & 0 & \dots \\ p_3 & 0 & 0 & 1-p_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Доказать, что если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится, то все состояния этой цепи возвратны, в противном случае – невозвратны.

96. Доказать, что для конечной цепи Маркова всегда существует стационарное распределение.

97. Пусть цепь Маркова имеет два состояния. Доказать, что имеет место один из трех случаев:

1) цепь эргодична; 2) состояния не сообщаются; 3) цепь периодическая.

98. Доказать, что любая цепь Маркова с конечным числом состояний имеет по крайней мере одно возвратное состояние.

99. Доказать, что для конечной цепи Маркова состояние возвратно тогда и только тогда, когда оно существенно. Показать, что это неверно для цепей со счетным числом состояний.

100. Эргодическая цепь Маркова с двумя состояниями имеет предельные вероятности p и $q = 1 - p$. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг.

101. Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$?

102. Матрица вероятностей перехода P и начальное распределение $p^{(0)}$ цепи Маркова ξ_n имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 3/12 & 2/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 2/12 \\ 1/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 4/12 & 2/12 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix};$$

$$p^{(0)} = (1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Найти:

1) несущественные состояния;

2) математическое ожидание времени τ до выхода из множества несущественных состояний;

3) вероятности $P^{(\alpha)}$, $P^{(\beta)}$ попадания в классы состояний $\alpha = \{3;4\}$, $\beta = \{5;6\}$;

4) предельное распределение, т. е. величины $\pi_k = \lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = k\}$.

103. Два автомобиля сдаются в аренду по одной и той же цене. Эти автомобили имеют следующие матрицы вероятностей перехода, соответствующие состояниям: 1 – работает хорошо и 2 – требует регулировки:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Какую из машин следует арендовать?

104. По двум урнам разложено N черных и N белых шаров так, что каждая урна содержит N шаров. Число черных шаров в первой урне в момент $n = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим ξ_n. В каждый целочисленный момент времени случайно выбирают по одному шару из каждой урны и меняют их местами. Показать, что последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ является цепью Маркова со стационарным распределением

$$\pi_k = (C_N^k)^2 / C_{2N}^N, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

105. Компания по прокату автомобилей выдает их напрокат в трех аэропортах: 1, 2 и 3. Клиенты возвращают автомобили в эти аэропорты в соответствии с матрицей вероятностей перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

1. Вычислить стационарные вероятности.

2. Компания планирует построить ремонтную станцию в одном из аэропортов. Какой их них вы порекомендовали бы? Почему?

106. В городе М каждый житель имеет одну из трех профессий: A, B и C. Дети отцов, имеющих профессии A, B, C, наследуют профессии отцов с вероятностями 3/5, 2/3, 1/4 соответственно и выбирают другую профессию из двух оставшихся с равными вероятностями. Найти:

1) распределение по профессии в следующем поколении, если в данном поколении профессию A имеют 20 % жителей, B – 30 %, C – 50 %;

2) предельное распределение по профессиям, когда число поколений растет;

3) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

107. Цепь Маркова имеет следующую матрицу вероятностей перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} \\ p_{m-1} & p_0 & p_1 & \cdots & p_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_0 \end{pmatrix},$$

где $0 < p_0 < 1, \sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1.$ Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\xi_n = i\} = \frac{1}{m}, \; i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

ГЛАВА 6

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ВВЕДЕНИЕ

Математическая статистика – это раздел математики, который базируется на понятиях и методах теории вероятностей.

Математические модели случайных явлений, изучаемых в теории вероятностей, основываются на понятии вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Однако на практике при изучении конкретного эксперимента вероятность P редко бывает известна полностью. Часто можно априори утверждать лишь то, что P является элементом некоторого заданного класса (семейства) вероятностей $\mathscr{P}$. Если задан класс $\mathscr{P}$, то говорят, что имеется *статистическая модель*, и понимают под этим набор $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$. Итак, статистическая модель описывает такие ситуации, когда в вероятностной модели изучаемого эксперимента имеется та или иная неопределенность в задании вероятности P, и задача математической статистики состоит в том, чтобы уменьшить эту неопределенность, используя информацию, содержащуюся в статистических данных. В большинстве случаев исходные статистические данные – результат наблюдения некоторой конечной совокупности случайных величин $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, характеризующей исход изучаемого эксперимента. Обычно в этих случаях говорят, что эксперимент состоит в проведении n испытаний, в которых результат i-го испытания описывается случайной величиной X_i, $i = \overline{1,n}$. Совокупность наблюдаемых случайных величин $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *выборкой*, сами величины X_i, $i = \overline{1,n}$, – *элементами выборки*, а их число n – *объемом выборки*. *Реализации выборки* X будем обозначать соответствующими строчными буквами $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество всех возможных значений $\mathscr{X} = \{X\}$ выборки X называется *выборочным пространством*. Далее предполагается, что статистическая модель определяется выборочным пространством $\mathscr{X}$ и семейством функций распределения $\mathscr{F}$, которому принадлежит неизвестная функция распределения $F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выборки X.

Если компоненты выборки X независимы и все распределены так же, как и некоторая случайная величина ξ, говорят, что рассматривается *выборка из распределения случайной величины* ξ. Этот случай соответствует эксперименту, в котором проводятся повторные независимые наблюдения над случайной величиной ξ (распределение ξ обозначается символом $\mathscr{L}(\xi)$). Здесь

$$F_{X_i}(x_i) = F_\xi(x_i), \quad i = \overline{1,n}, \quad F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_\xi(x_1) \cdots F_\xi(x_n).$$

В приложениях математической статистики предположения о независимости и одинаковой распределенности компонент X не всегда выполняются. В конце этой главы в § 5 рассмотрен важный случай таких ситуаций, которые описываются линейной регрессионной моделью.

Иногда множество возможных значений ξ с функцией распределения F_ξ называют *генеральной совокупностью*. Статистическая модель для повторных независимых наблюдений обозначается кратко в виде $\mathscr{F} = \{F_\xi\}$, т. е. указывается лишь класс допустимых функций распределения исходной случайной величины ξ. Если функции распределения из класса $\mathscr{F}$ заданы с точностью до значений некоторого параметра θ (скалярного или векторного) с множеством возможных значений Θ, то такая модель обозначается $\mathscr{F} = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ и называется *параметрической*. Модель $\mathscr{F} = \{F_\xi\}$ называется *абсолютно непрерывной* или *дискретной*, если таковыми соответственно являются все составляющие класс $\mathscr{F}$ функции распределения. Мы будем рассматривать только модели этих двух типов, которые наиболее распространены в приложениях.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ВЫБОРОЧНОЙ ТЕОРИИ

Вариационный ряд, эмпирическая функция распределения, гистограмма, полигон частот

Пусть $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – выборка объема n из распределения $\mathscr{L}(\xi)$, т. е. элементы выборки независимы и распределены так, как и случайная величина ξ, а $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – наблюдавшееся значение X. Каждой реализации $\vec{x}$ выборки X можно поставить в соответствие упорядоченную последовательность

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)},$$

где $x_{(1)} = \min(x_1, \ldots, x_n)$, $x_{(2)}$ – второе по величине значение среди $x_1, \ldots, x_n$ и т. д., $x_{(n)} = \max(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим через $X_{(k)}$ случайную величину, которая для каждой реализации $\vec{x}$ выборки X принимает значение $x_{(k)}$, $k=\overline{1,n}$. Так по выборке X определяют новую последовательность случайных величин $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$, называемых *порядковыми статистиками* выборки; при этом $X_{(k)}$ – *k-я порядковая статистика*, а $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ – *экстремальные значения выборки.*

Последовательность случайных величин

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ \ldots \ \le X_{(n)}$$

называют *вариационным рядом* выборки.

Определим для каждого действительного x случайную величину $\mu_n(x)=\left|\left\{j : X_j \le x\right\}\right|$, где через $|A|$ обозначено число элементов конечного множества A. Функция

$$F_n(x)=\frac{\mu_n(x)}{n}$$

называется *эмпирической функцией распределения* (соответствующей выборке X). Функцию распределения $F(x)$ наблюдаемой случайной величины ξ в этом случае называют иногда *теоретической функцией распределения.*

Теорема 1 (теорема Гливенко). *Пусть $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из распределения $\mathscr{L}(\xi)$, и $F(x)$ – соответствующая теоретическая функция распределения. Тогда*

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x)-F(x)\right|=0\right)=1.$$

Введем статистический аналог характеристической функции – *выборочную характеристическую функцию*:

$$f_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{itX_k}.$$

Существуют и другие способы наглядного представления статистических данных. Одним из них является построение гистограммы. В этом случае область значений наблюдаемой случайной величины ξ разбивают на равные интервалы и для заданной реализации $\vec{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ выборки X из $\mathscr{L}(\xi)$ подсчитывают число координат x_i, попавших в соответствующие интервалы; на каждом интервале, как на основании, строят прямоугольник с высотой ν/nh, где h – длина интервала, ν – число выборочных точек в данном интервале. Получаемую при этом фигуру называют *гистограммой*. Верхнюю границу гистограммы можно рассматривать как статистический аналог плотности распределения наблюдаемой случайной величины (применяется только для абсолютно непрерывных случайных величин).

В методе гистограмм неизвестная плотность распределения приближается кусочно-постоянным графиком. Если плотность достаточно гладкая, то значительно лучше ее можно приблизить кусочно-линейными графиками. Поэтому более точная методика основана на построении полигона частот. *Полигон частот* – это ломаная, соединяющая ординаты, соответствующие соседним средним точкам интервалов гистограммы.

Выборочные характеристики

Пусть $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – выборка из распределения $\mathscr{L}(\xi)$, а $F(x)$ и $F_n(x)$ – соответственно теоретическая и эмпирическая функции распределения. Точно так же, как функции $F(x)$ ставят в соответствие $F_n(x)$, теоретической числовой характеристике

$$G=\int g(x)dF(x)$$

можно поставить в соответствие ее статистический аналог $G_n=G_n(X)$, вычисляемый по формуле

$$G_n=\int_R g(x)dF_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i).$$

Если $g(x)=x^k$, то G_n – *выборочный момент k-го порядка*, который будем обозначать A_{nk}:

$$A_{nk}=A_{nk}(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k. \qquad (1)$$

При $k=1$ величину A_{nk} называют *выборочным средним* и обозначают символом $\overline{X}_n$ (или $\overline{X}$):

$$\overline{X}=\overline{X}_n=A_{n1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Значения случайных величин A_{nk} и $\overline{X}$ для заданной реализации $\vec{x}$ выборки X будем обозначать соответствующими строчными буквами a_{nk} и $\overline{x}$. Аналогично *выборочным центральным моментом k-го порядка* называют случайную величину

$$M_{nk}=M_{nk}(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k.$$

При $k=2$ величину M_{nk} называют *выборочной дисперсией* и обозначают символом S_n^2 (или S^2):

$$S^2 = M_{n2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Значения случайных величин M_{nk} и S^2 для заданной реализации $\vec{x}$ выборки X будем обозначать соответствующими строчными буквами m_{nk} и s^2.

Аналогично вводят *выборочные абсолютные моменты, выборочные семиинварианты* и т. д.

При исследовании свойств графика плотности распределения непрерывной случайной величины ξ часто рассматривают такие характеристики, как *коэффициенты асимметрии* γ_1 и *эксцесса* γ_2, определяемые по формулам

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3,$$

где $\mu_k = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^k$.

Если график плотности распределения симметричен, то $\gamma_1 = 0$ и по значению γ_1 судят о степени отклонения от симметрии. Аналогично для нормального распределения $\gamma_2 = 0$, поэтому о кривых плотности распределения с $\gamma_2 = 0$ говорят, что они имеют нормальный эксцесс.

Если задана выборка $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из абсолютно непрерывного распределения $\mathscr{L}(\xi)$, то *выборочные коэффициенты асимметрии* Γ_{n1} и *эксцесса* Γ_{n2} определяются по формулам

$$\Gamma_{n1} = \frac{M_{n3}}{S^3}, \qquad \Gamma_{n2} = \frac{M_{n4}}{S^4} - 3.$$

Из очевидных соотношений

$$\mathrm{M}A_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}X_i^k = \mathrm{M}\xi^k = \alpha_k, \tag{2}$$

на основании теоремы Колмогорова об усиленном законе больших чисел следует, что

$$A_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \alpha_k.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для любых выборочных характеристик, которые имеют вид непрерывных функций от конечного числа величин A_{nk}.

Будем говорить, что случайная величина η_n *асимптотически нормальна с параметрами* μ_n *и* σ_n^2 (или *асимптотически нормальна* $N\left(\mu_n,\ \sigma_n^2\right)$), если

$$\mathscr{L}\left(\frac{\eta_n-\mu_n}{\sigma_n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}N(0,1),$$

т. е. случайная величина $\left(\eta_n-\mu_n\right)/\sigma_n$ слабо сходится к стандартной нормальной случайной величине.

Теорема 2. *Выборочный момент* A_{nk} *асимптотически нормален*

$$N\left(\alpha_k,\ \frac{\alpha_{2k}-\alpha_k^2}{n}\right).$$

Для центральных выборочных моментов также можно доказать утверждение об их асимптотической нормальности. Так, например, для выборочной дисперсии S_n^2 при $n\to\infty$ имеет место соотношение

$$\mathscr{L}\left(S_n^2\right)-N\left(\mu_2,\ \frac{\mu_4-\mu_2^2}{n}\right)\to 0,$$

где $\mu_k=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^k$.

Для $p\in(0,1)$ *p-квантилью* ζ_p распределения $\mathscr{L}(\xi)$ с функцией распределеления F называется число

$$\zeta_p=\sup\{\zeta|F(\zeta)<p\}=\inf\{\zeta|F(\zeta)\geq p\}.$$

Замечание 1. Если функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ непрерывна и строго монотонна, то p-квантилью ζ_p распределения $\mathscr{L}(\xi)$ является корень уравнения

$$F\left(\zeta_p\right)=p. \tag{3}$$

В случае, когда функция распределения непрерывна и не является строго монотонной, при некоторых p уравнению (3) удовлетворяют многие значения ζ (наполняющие целый интервал). Тогда в качестве ζ_p берут минимальное из значений ζ, удовлетворяющих (3).

Выборочной p-квантилью $Z_{n,p}$ будем называть порядковую статистику

$$Z_{n,p}=\begin{cases}X_{([np]+1)} & \text{при } np \text{ дробном,}\\ X_{(np)} & \text{при } np \text{ целом.}\end{cases}$$

Ясно, что $Z_{n,p}$ – это элемент выборки, левее которого находится доля

$$\frac{[np]}{n} \le p$$

наблюдений, при этом $Z_{n,p}$ – порядковая статистика с максимальным номером, обладающая этим свойством. Следовательно, $Z_{n,p}$ можно рассматривать как статистический аналог ζ_p.

Величина $\zeta_{\frac{1}{2}}$ называется *медианой* распределения $\mathscr{L}(\xi)$, а $Z_{n,\frac{1}{2}}$ – *выборочной медианой*.

Теорема 3. *Пусть функция распределения* $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *непрерывна и уравнение* $F(x) = p$, $p \in (0, 1)$, *имеет единственное решение* $x = \zeta_p$. *Тогда для почти всех* $\omega \in \Omega$

$$Z_{n,p}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \zeta_p.$$

Если, кроме того, функция F *дифференцируема в точке* ζ_p *и* $F'(\zeta_p) > 0$, *то случайная величина* $Z_{n,p}(\omega) - \zeta_p$ *асимптотически нормальна с параметрами*

$$\left(0,\ \frac{p(1-p)}{n\left[F'(\zeta_p)\right]}\right).$$

Если случайная величина ξ абсолютно непрерывна, то значения x, в которых плотность $p_\xi(x)$ достигает своего максимального значения, называются *модами*. Если ξ – дискретная случайная величина и $\mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i$, то ее *модами* называются те значения x_j, для которых $\mathrm{P}(\xi = x_j) = \max\limits_i p_i$.

§ 2. ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Статистические оценки и требования к ним

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – выборка из распределения $\mathscr{L}(\xi) \in \mathscr{F} = \{F(x, \theta),\ \theta \in \Theta\}$. Задача этого пункта может быть сформулирована так: используя статистическую информацию, содержащуюся в выборке X, сделать статистические выводы об истинном значении θ^0 неизвестного параметра θ, т. е. оценить точку θ^0 заданного параметрического пространства Θ.

Статистикой называется любая борелевская функция $T(X)$, зависящая лишь от выборки X.

При *точечном оценивании* ищут статистику $T(X)$, значение которой при заданной реализации $\vec{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ выборки X принимают за приближенное значение параметра θ^0. В этом случае говорят, что *статистика* $T(X)$ *оценивает* θ или что *статистика* $T(X)$ *есть оценка* θ.

Ясно, что для оценивания θ можно использовать различные оценки и чтобы выбрать лучшую из них, надо иметь критерий сравнения качества оценок.

Любая оценка $T=T(X)$ – это случайная величина, поэтому общим требованием к построению оценок является концентрация (в том или ином смысле) распределения T около истинного значения оцениваемого параметра. Предположим, что θ – скалярный параметр. Статистика $T(X)$ называется *несмещенной оценкой* для параметра θ, если для любого $\theta\in\Theta$

$$\mathrm{M}_\theta T(X)=\theta.$$

Чтобы отразить зависимость закона распределения выборки и всех ее характеристик от параметра θ здесь и далее будем писать $\mathrm{M}_\theta T(X)$ вместо $\mathrm{M}T(X)$, а $\mathrm{D}_\theta T(X)$ вместо $\mathrm{D}T(X)$.

Величину

$$\mathrm{M}_\theta\left(T(X)-\theta\right)^2=\mathrm{D}_\theta T(X)+b^2(\theta),$$

где $b(\theta)=\mathrm{M}_\theta\left(T(X)-\theta\right)$, называют *средним квадратом ошибки*, или *среднеквадратической ошибкой* оценки T, а $b(\theta)$ – *смещением* оценки T. Если для любого $\theta\in\Theta$ $b(\theta)\to 0$ при $n\to\infty$, то статистика T называется *асимптотически несмещенной оценкой* для параметра θ.

Аналогично статистика $T=T(X)$ является *несмещенной оценкой* для $\tau(\theta)$ ($\tau:\ \Theta\to\mathbb{R}$), если для любого $\theta\in\Theta$

$$\mathrm{M}_\theta T(x)=\tau(\theta).$$

Оценка $T(X)$ называется *состоятельной* (*сильно состоятельной*) оценкой для параметра $\theta\in\Theta$, если при $n\to\infty$ $T(X)\to\theta$ по вероятности (почти наверное).

Пусть требуется оценить заданную параметрическую функцию $\tau=\tau(\theta)$ в модели $\mathscr{F}=\left\{F(x,\theta),\ \theta\in\Theta\right\}$ по статистической информации, доставляемой соответствующей выборкой $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Обозначим через $\mathscr{T}_\tau$ класс всех несмещенных оценок T параметрической функции $\tau(\theta)$ таких, что $\mathrm{D}_\theta T = \mathrm{M}_\theta \left(T - \tau(\theta)\right)^2 < \infty$ для любых $\theta \in \Theta$.

Оценка $\tau^* \in \mathscr{T}_\tau$, для которой при любых $\theta \in \Theta$ выполняется условие

$$\mathrm{D}_\theta \tau^* = \inf_{T \in \mathscr{T}_\tau} \mathrm{D}_\theta T,$$

называется *оптимальной*.

Пусть $f(x, \theta)$ – плотность распределения наблюдаемой случайной величины ξ (или вероятность в дискретном случае).

Функция $L(\vec{x}; \theta) = f(x_1, \theta) \cdots f(x_n, \theta)$, рассматриваемая при фиксированном $\vec{x} \in \mathscr{X}$ как функция параметра $\theta \in \Theta$, называется *функцией правдоподобия*.

Предположим, что $L(\vec{x}; \theta) > 0$ для любых $\theta \in \Theta$, $\vec{x} \in \mathscr{X}$ и дифференцируема по θ. Случайная величина

$$U(X; \theta) = \frac{\partial \ln\left(L(X; \theta)\right)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln\left(f(X_i, \theta)\right)}{\partial \theta}, \quad \theta \in \Theta,$$

называется *вкладом* (или *функцией вклада*) выборки X. В дальнейшем предполагается $0 < \mathrm{M}_\theta U^2(X; \theta) < \infty$ для любых $\theta \in \Theta$.

В последующем неоднократно придется дифференцировать по θ интегралы от функций на выборочном пространстве, а также предполагать, что при этом можно менять порядок интегрирования и дифференцирования. Модели, для которых все перечисленные условия выполняются, обычно называют кратко – *регулярными*. Точные аналитические условия, обеспечивающие регулярность модели, известны из математического анализа и вид их определяется в каждом конкретном случае. Отметим, в частности, общее необходимое условие, состоящее в том, что выборочное пространство не должно зависеть от неизвестного параметра θ.

Известно, что для регулярных моделей $\mathrm{M}_\theta U(X; \theta) = 0$ для любых $\theta \in \Theta$.

Функция

$$i_n(\theta) = D_\theta U(X; \theta) = \mathrm{M}_\theta U^2(X; \theta)$$

называется *функцией информации Фишера* или просто *информацией Фишера* о параметре θ, содержащейся в выборке X. Величину

$$i(\theta) = i_1(\theta) = \mathrm{M}_\theta \left(\frac{\partial \ln\left(f(X_1; \theta)\right)}{\partial \theta} \right)^2$$

называют также *количеством (фишеровской) информации, содержащейся в одном наблюдении*. Очевидно, что $i_n(\theta) = ni(\theta)$.

Теорема 1 (неравенство Рао – Крамера). *Пусть функция* $\tau(\theta)$ *дифференцируема, тогда для любой оценки* $T = T(X) \in \mathscr{T}_\tau$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{D}_\theta T \geq \frac{\left[\tau'(\theta)\right]^2}{ni(\theta)}, \quad \theta \in \Theta.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда T *– линейная функция вклада выборки, т. е.*

$$T(X) - \tau(\theta) = a(\theta)\, U(X; \theta),$$

где $a : \Theta \to \mathbb{R}$ *– некоторая борелевская функция.*

Если существует оценка $T^* \in \mathscr{T}_\tau$, для которой нижняя граница Рао – Крамера достигается, то ее называют *эффективной*. Очевидно, что эффективная оценка является оптимальной.

Достаточные статистики

Основная идея достаточных статистик заключается в следующем. Пусть имеется выборка $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ объема *n*. Величина n может быть очень большой и поэтому будет большим объем экспериментальных данных. Возникает необходимость привести эти данные в более компактный вид без потери информации, содержащейся в выборке, т. е. найти такие статистики $T_1 = T_1(X), \ldots, T_k = T_k(X)$, чтобы k было меньше *n*, и которые давали бы такую же информацию о неизвестном исследуемом параметре, как и выборка *X*. Такие функции $T = (T_1, \ldots, T_k)$ будем называть *достаточными статистиками*. Достаточные статистики наименьшей размерности называются *минимальными достаточными статистиками*. Сама выборка *X*, естественно, является достаточной статистикой.

Статистика $T = T(X)$ называется *достаточной* для модели $\mathscr{F} = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ (или достаточной для параметра θ, когда ясно, о какой модели идет речь), если условная плотность распределения (или вероятность в дискретном случае) $L(\vec{x} \mid t; \theta)$ случайного вектора $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ при условии $T(X) = t$, $t \in \mathbb{R}^k$, не зависит от параметра θ.

Теорема 2 (критерий факторизации). *Для того чтобы статистика* $T(X)$ *была достаточной для* θ, *необходимо и достаточно, чтобы функция правдоподобия* $L(\vec{x};\theta)$ *имела вид*

$$L(\vec{x};\theta)=g\big(T(\vec{x});\theta\big)h(\vec{x}), \tag{1}$$

где $g(t,\theta)$, $t\in\mathbb{R}^k$, $\theta\in\Theta$, *и* $h(\vec{x})$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, *– некоторые неотрицательные функции, борелевские соответственно по переменным* t *и* $\vec{x}$.

Достаточная статистика $T=T(X)$ называется *полной*, если для любой функции $\varphi(t)$ из того, что $\mathrm{M}_\theta\varphi(T)=0$ для любых $\theta\in\Theta$, следует $\varphi(t)\equiv 0$ на всем множестве значений статистики T.

Замечание 1. Пусть в рассматриваемой модели $\mathscr{F}$ существует полная достаточная статистика T и требуется оценить заданную параметрическую функцию $\tau(\theta)$, тогда:

1) если нет несмещенных оценок вида $H(T)$ (H – некоторая функция), то класс $\mathscr{T}_\tau$ несмещенных оценок пуст;

2) оптимальная оценка (когда она существует) всегда является функцией, зависящей от T;

3) оптимальную оценку τ^* можно искать по формуле $\tau^*=H(T)=$ $=\mathrm{M}_\theta(T_1\,|\,T)$ исходя из любой несмещенной оценки T_1 функции $\tau(\theta)$.

Методы оценивания неизвестных параметров

1. Метод максимального правдоподобия

Метод был предложен Р. Фишером. Изложим суть этого метода.

Пусть имеется выборка $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из распределения $\mathscr{L}(\xi)\in\mathscr{F}=\{F(x,\theta),\ \theta\in\Theta\}$ и $L(\vec{x};\theta)$ – функция правдоподобия для реализации $\vec{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ выборки X. *Оценкой максимального правдоподобия* $\hat\theta$ параметра θ называется такая точка параметрического множества Θ, в которой функция правдоподобия $L(\vec{x};\theta)$ при заданном $\vec{x}\in\mathscr{X}$ достигает максимума, т. е.

$$L(\vec{x};\hat\theta)=\sup_{\theta\in\Theta} L(\vec{x};\theta).$$

Если для каждого $\vec{x}$ из выборочного пространства $\mathscr{X}$ максимум $L(\vec{x};\theta)$ достигается во внутренней точке Θ и $L(\vec{x};\theta)$ дифференцируема по θ, то оценка максимального правдоподобия $\hat\theta$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial L(\vec{x};\theta)}{\partial\theta}=0,$$

или

$$\frac{\partial \ln\left(L(\vec{x};\theta)\right)}{\partial\theta}=0. \tag{2}$$

Если $\vec{\theta}$ – векторный параметр: $\vec{\theta}=(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_n)$, то это уравнение заменяется системой

$$\frac{\partial \ln L\left(\vec{x};\vec{\theta}\right)}{\partial\theta_i}=0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) называются *уравнениями правдоподобия*.

Замечание 2. Отметим свойства оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$, которые справедливы при выполнении некоторых условий регулярности:

1) если существует эффективная оценка $T(X)$ для скалярного параметра θ, то $\hat{\theta}=T(X)$;

2) если имеется достаточная статистика $T=T(X)$ и оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ существует и единственна, то $\hat{\theta}$ является функцией от T;

3) $\hat{\theta}$ является сильно состоятельной оценкой параметра θ, т. е.

$\hat{\theta}\xrightarrow[n\to\infty]{п.н.}\theta, \quad \theta\in\Theta;$

4) $\hat{\theta}$ является асимптотически несмещенной оценкой, т. е. ее смещение при $n\to\infty$ стремится к 0;

5) $\hat{\theta}$ является асимптотически эффективной оценкой, т. е. в пределе при $n\to\infty$ – эффективная оценка.

2. Метод моментов

Исторически первым общим методом точечного оценивания неизвестных параметров является предложенный К. Пирсоном метод моментов.

Пусть $X=(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ – выборка из распределения $\mathscr{L}(\xi)\in\mathscr{F}$, $\mathscr{F}=\left\{F(x;\vec{\theta}),\ \vec{\theta}\in\Theta\right\}$, где $\vec{\theta}=(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_r)$ и $\Theta\subseteq\mathbb{R}^r$. Предположим, что у наблюдаемой случайной величины ξ существуют первые r моментов $\alpha_k=\mathrm{M}\xi^k$, $k=\overline{1,r}$. Они являются функциями от неизвестных параметров $\vec{\theta}:\alpha_k=\alpha_k\left(\vec{\theta}\right)$. Рассмотрим соответствующие выборочные моменты A_{nk}

(см. (1), §1, гл. 6). Пусть a_{nk} – значения этих величин для наблюдавшейся реализации $\vec{x}$ выборки X. Тогда метод моментов состоит в приравнивании значений a_{nk} и теоретических моментов:

$$\alpha_k\left(\vec{\theta}\right) = a_{nk}, \quad k = \overline{1,r}. \tag{4}$$

Решая эти уравнения относительно $\theta_1, \ldots, \theta_r$, получаем значения оценок параметров по методу моментов.

Использование начальных моментов не обязательно, можно использовать также центральные, абсолютные моменты и т. п.

Замечание 3. Метод моментов при определенных условиях приводит к состоятельным оценкам, при этом уравнения (4) во многих случаях просты и их решение не связано с большими вычислительными трудностями. Отметим, однако, что метод моментов неприменим, когда теоретические моменты нужного порядка не существуют. Кроме того, оценки метода моментов, вообще говоря, не эффективны, поэтому их часто используют только в качестве первых приближений.

Интервальное оценивание

Пусть θ – скалярный параметр. При интервальном оценивании ищут две такие статистики $T_1 = T_1(X)$ и $T_2 = T_2(X)$, что $T_1 < T_2$, для которых при заданном $\gamma \in (0;1)$ выполняется условие

$$P_\theta\left(T_1(X) < \theta < T_2(X)\right) \geq \gamma$$

для любого $\theta \in \Theta$.

В этом случае интервал $\left(T_1(X); T_2(X)\right)$ называют γ-*доверительным интервалом* (для θ), число γ – *доверительным уровнем* или *доверительной вероятностью*, $T_1(X)$ и $T_2(X)$ – *нижней* и *верхней* границами соответственно.

На практике обычно используют значения доверительного уровня γ из небольшого набора заранее выбранных, достаточно близких к единице значений, например $\gamma = 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}99$ и т. д. (при этом $\gamma \neq 1$).

Аналогично определяется доверительный интервал для отдельной компоненты (например, θ_1) в случае многомерного параметра $\vec{\theta}$:

$$P_{\vec{\theta}}\left(T_1(X) < \theta_1 < T_2(X)\right) \geq \gamma$$

для любого $\vec{\theta} \in \Theta$, а также доверительный интервал для скалярной параметрической функции $\tau(\theta)$ (θ может быть как скаляром, так и вектором):

$$\mathrm{P}_\theta\left(T_1(X) < \tau(\theta) < T_2(X)\right) \geq \gamma$$

для любого $\theta \in \Theta$.

Общий прием, с помощью которого в ряде случаев можно построить доверительный интервал, состоит в следующем: пусть модель $\mathscr{F}$ абсолютно непрерывна и существует случайная величина $G(X,\ \theta)$ такая, что:

1) распределение $G(X, \theta)$ не зависит от θ;

2) при каждом $\vec{x} \in \mathscr{X}$ функция $G(\vec{x},\ \theta)$ непрерывна и строго монотонна по θ.

Такую случайную величину называют *центральной статистикой* (для θ). Аналогично определяется центральная статистика для отдельной компоненты в случае многомерного параметра $\vec{\theta}$, а также для скалярной параметрической функции. Далее будем рассматривать для краткости лишь случай скалярного параметра θ.

Пусть для модели $\mathscr{F}$ построена центральная статистика $G(X,\ \theta)$ и $f_G(g)$ – ее плотность распределения. Функция $f_G(g)$ от параметра θ не зависит (условие 1), поэтому для любого $\gamma \in (0; 1)$ можно выбрать величины $g_1 < G(\vec{x},\ \theta) < g_2$ (вообще говоря, многими способами; в некоторых моделях единственность выбора обеспечивается требованием минимальности длины отрезка $[g_1; g_2]$) так, чтобы

$$\mathrm{P}_\theta\left(g_1 < G(X,\ \theta) < g_2\right) = \int\limits_{g_1}^{g_2} f_G(g)\, dg = \gamma. \tag{5}$$

Определим теперь при каждом $\vec{x} \in \mathscr{X}$ числа $T_1(\vec{x})$ и $T_2(\vec{x})$, где $T_1(\vec{x}) < T_2(\vec{x})$, как решения относительно θ уравнений $G(\vec{x},\ \theta) = g_1$, $G(\vec{x},\ \theta) = g_2$ (однозначность определения этих чисел обеспечивается условием 2). Тогда неравенства $g_1 < G(\vec{x},\ \theta) < g_2$ эквивалентны неравенствам $T_1(\vec{x}) < \theta < T_2(\vec{x})$ и, следовательно, (5) можно переписать в виде

$$\mathrm{P}_\theta\left(T_1(X) < \theta < T_2(X)\right) = \gamma$$

для любого $\theta \in \Theta$. Таким образом, построенный интервал $\left(T_1(\vec{x});\ T_2(\vec{x})\right)$ является γ-доверительным интервалом для θ.

З а м е ч а н и е 4. Пусть по выборке

$$X = (X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$$

требуется построить доверительные интервалы для μ и σ^2 в модели $N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$. Применяя предложенную выше методику, получим:

1) если μ известно, а требуется оценить σ^2, то промежуток

$$\left(\zeta^{-1}_{\frac{1+\gamma}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2;\ \zeta^{-1}_{\frac{1-\gamma}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right)$$

является γ-доверительным интервалом для σ^2; здесь ζ_γ – γ-квантиль распределения χ^2_n (χ^2_n – хи-квадрат распределение с n степенями свободы);

2) если σ^2 известно, то

$$\left(\overline{X}-\sigma\frac{\zeta_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}};\ \overline{X}+\sigma\frac{\zeta_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

есть γ-доверительный интервал для μ; здесь ζ_γ – γ-квантиль распределения $N(0,1)$, где $N(0,1)$ – нормальное распределение с параметрами $(0,\ 1)$;

3) если оба параметра μ и σ^2 неизвестны, то

$$\left(\overline{X}-\zeta_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}};\ \overline{X}+\zeta_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)$$

является γ-доверительным интервалом для μ, здесь ζ_γ – γ-квантиль t_{n-1}- распределения (t_{n-1}- распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы), S^2 – выборочная дисперсия, а

$$\left(\frac{nS^2}{\zeta_{\frac{1+\gamma}{2}}};\ \frac{nS^2}{\zeta_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right)$$

есть γ-доверительный интервал для σ^2, здесь ζ_γ – γ-квантиль распределения χ^2_{n-1}.

З а м е ч а н и е 5. Значения γ-квантилей нормального распределения, распределений Стьюдента и хи-квадрат протабулированы (см. прил. 3, 5, 6).

§ 3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Понятие статистической гипотезы и статистического критерия

Статистической гипотезой называют любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин. Если для исследуемого явления (процесса, ситуации и т. д.) сформулирована та или иная гипотеза (обычно ее называют *основной* или *нулевой гипотезой* и обозначают символом H_0), то задача состоит в том, чтобы сформулировать такое правило, которое бы позволило по результатам соответствующих наблюдений принять или отклонить эту гипотезу. Правило, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается, называется *статистическим критерием* проверки гипотезы H_0.

В некоторых случаях формулируется только одна гипотеза и необходимо проверить, согласуются ли имеющиеся статистические данные с этой гипотезой или же они ее опровергают. Соответствующие статистические критерии называют *критериями согласия*. Если гипотеза H_0 однозначно фиксирует распределение наблюдений, то ее называют *простой*, в противном случае – *сложной*.

Суть общего метода построения критериев согласия состоит в следующем. Пусть о распределении случайной величины $X = \left(X_1, X_2, \ldots, \ X_n\right)$ описывающей результат изучаемого эксперимента, сформулирована некоторая гипотеза H_0. Чтобы построить критерий проверки этой гипотезы, надо найти такую статистику $T = T\left(X\right)$, характеризующую отклонение эмпирических данных от соответствующих (гипотезе H_0) гипотетических значений (обычно такие статистики неотрицательны), распределение которой в случае справедливости H_0 можно было бы определить. Предположим, что такая статистика и ее распределение при гипотезе H_0 найдены. Пусть $\mathscr{T} = \left\{t : \ t = T\left(\vec{x}\right), \vec{x} \in \mathscr{X}\right\}$. Определим для фиксированного заранее достаточно малого числа $\alpha > 0$ подмножество $\mathscr{T}_{1\alpha} \subset \mathscr{T}$ так, чтобы

$$\mathrm{P}\left(T\left(X\right) \in \mathscr{T}_{1\alpha} \middle| H_0\right) \leq \alpha. \tag{1}$$

Тогда правило гипотезы H_0 можно сформулировать следующим образом. Пусть $\vec{x}$ – наблюдавшаяся реализация случайного вектора X и $t = T\left(\vec{x}\right)$. *Если* $t \in \mathscr{T}_{1\alpha}$, *гипотеза* H_0 *должна быть отвергнута как противоречащая статистическим данным, если* $t \notin \mathscr{T}_{1\alpha}$, *то нет оснований отказываться от принятой гипотезы.*

В описанной методике T называют *статистикой критерия*, $\mathscr{T}_{1\alpha}$ – *критической областью* для гипотезы H_0, число α – *уровнем значимости* критерия (в конкретных случаях величину α выбирают равной 0,1; 0,05; 0,01 и т. д.).

Для проверки одной и той же гипотезы H_0 можно строить различные критерии согласия, основываясь на разных статистиках $T(X)$, и чтобы выбрать в конкретной ситуации тот или иной критерий, надо иметь принципы сравнения различных критериев.

Любое распределение F наблюдаемой случайной величины X, которое может оказаться истинным, но отличающееся от распределения при гипотезе H_0, называют *альтернативным распределением* или *альтернативой*. Совокупность всех альтернативных распределений называют *альтернативной гипотезой* и обозначают H_1. Величину

$$W(F) = W(\mathscr{T}_{1\alpha}, F) = \mathrm{P}\left(T(X) \in \mathscr{T}_{1\alpha} \middle| F - \textit{истинно}\right)$$

называют *функцией мощности критерия*. Для распределения $F \in H_0$ в силу (1) справедливо неравенство $W(F) \le \alpha$ для любого F.

Если $F \in H_1$, то значение $W(F)$ называют *мощностью критерия при альтернативе F*.

В терминах функции $W(F)$ можно сказать, что критерий тем лучше («тем мощнее»), чем больше его мощность при альтернативах.

Проверка гипотезы о виде распределения

Пусть $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – выборка из распределения $\mathscr{L}(\xi)$ с неизвестной функцией распределения $F_\xi(x)$, $x \in R$, о которой выдвинута гипотеза

$$H_0: F_\xi(x) = F(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

1. Критерий согласия Колмогорова применяют в тех случаях, когда функция распределения $F(x)$ непрерывна. Статистика критерия имеет вид

$$D_n = D_n(X) = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left| F_n(x) - F(x) \right|. \tag{2}$$

В этом случае

$$\mathrm{P}\left(D_n \in \mathscr{T}_{1\alpha} \mid H_0\right) = \mathrm{P}\left(\sqrt{n}\ D_n \ge \lambda_\alpha \mid H_0\right) \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha,$$

где $K(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\sqrt{n}\, D_n \le t\right) = \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2t^2}$.

При заданном уровне значимости α число λ_α определяют из соотношения $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$ (значения функции K протабулированы [3]).

Правило проверки гипотезы H_0 формулируется (при $n \geq 20$) следующим образом: *если наблюдавшееся значение* $t = D_n(\vec{x})$ *статистики* (2) *удовлетворяет неравенству* $t\sqrt{n} \geq \lambda_\alpha$, *то гипотезу* H_0 *отвергают; в противном случае считают, что статистические данные не противоречат гипотезе.*

2. Критерий согласия χ^2 К. Пирсона можно использовать для любых распределений, в том числе и многомерных. Чтобы им воспользоваться, выборочные данные предварительно группируют следующим образом. Разбивают множество $\mathscr{E}$ возможных значений наблюдаемой случайной величины ξ на N непересекающихся подмножеств $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_N$. Пусть $v = (v_1, \ldots, v_N)$ – вектор частот попадания выборочных точек в соответствующие интервалы группировки $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_N$ $(v_1 + \ldots + v_N = n)$ и $p^0 = \left(p_1^0, \ldots, p_N^0\right)$, где $p_j^0 = \mathrm{P}\left(\xi \in \mathscr{E}_j \mid H_0\right)$, $j = \overline{1, N}$.

В качестве статистики выбирают величину

$$X_n^2 = X_n^2(\nu) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\nu_j - np_j^0\right)^2}{np_j^0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\nu_j^2}{np_j^0} - n, \tag{3}$$

а критическую область задают в виде $\mathscr{T}_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$. Точное распределение $\mathscr{L}\left(X_n^2 \mid H_0\right)$ неудобно для вычисления критической границы t_α.

Лемма. *Если* $0 < p_j^0 < 1$, $j = \overline{1, N}$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathscr{L}\left(X_n^2 \mid H_0\right) \to \chi_{N-1}^2.$$

Учитывая лемму, на практике с хорошим приближением уже при $n \geq 50$, $v_j \geq 5$ можно использовать распределение χ_{N-1}^2. Действительно, в этом случае

$$\mathrm{P}\left(X_n^2 \in \mathscr{T}_{1\alpha} \mid H_0\right) = \mathrm{P}\left(X_n^2 \geq \chi_{1-\alpha, N-1}^2 \mid H_0\right) \approx \int_{\chi_{1-\alpha,N-1}^2}^{\infty} k_{N-1}(x)\,dx = \alpha.$$

Здесь $k_{N-1}(x)$ – плотность распределения χ_{N-1}^2.

Таким образом, критерий согласия χ^2 формулируется в следующем виде: *пусть заданы уровень значимости* α *и объем выборки* n, *и наблюдав-*

шиеся значения $h=(h_1,\dots,h_N)$ *вектора частот* $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_N)$ *удовлетворяют условиям:* $|h|=h_1+\dots+h_N\ge 50,\ h_j\ge 5,\ j=\overline{1,N},$ *тогда, если наблюдавшиеся значения* $t=X_n^2(h)$ *статистики* (3) *удовлетворяют неравенству* $t\ge\chi^2_{1-\alpha,N-1}$, *то гипотезу* H_0 *отвергают; в противном случае* H_0 *не противоречит результатам испытаний.*

3. Проверка гипотезы однородности. Пусть $X=(X_1, X_2,\dots,X_n)$ – выборка из распределения $\mathscr{L}(\xi)$ с неизвестной функцией распределения $F_1(x)$, а $Y=(Y_1, Y_2,\dots,Y_m)$ – выборка из распределения $\mathscr{L}(\eta)$ с неизвестной функцией распределения $F_2(x)$. Требуется проверить гипотезу однородности

$$H_0: F_1(x)\equiv F_2(x),\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Критерий однородности Смирнова применяют в случае непрерывных распределений. Этот критерий основан на статистике

$$D_{nm}=\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F_{1n}(x)-F_{2m}(x)\right|,$$

где $F_{1n}(x)$ и $F_{2m}(x)$ – эмпирические функции распределения, построенные по выборкам X и Y соответственно.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 . *Если теоретическая функция распределения* $F(x)$ *непрерывна, то*

$$\lim_{n,m\to\infty}\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\ D_{nm}\le t\right)=K(t),$$

где $K(t)=\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j\,e^{-2j^2t^2}$.

В этом случае имеем

$$\mathrm{P}\left(D_{nm}\in\mathscr{T}_{1\alpha}\,|\,H_0\right)=\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\ D_{nm}\ge\lambda_\alpha\,|\,H_0\right)\approx 1-K(\lambda_\alpha)=\alpha.$$

Сформулируем критерий однородности Смирнова: *если объем выборок достаточно велик, то, вычислив по выборочным данным значение* t *статистики* D_{nm}, *принимают решение отвергнуть гипотезу* H_0 *в том и только в том случае, когда*

$$t\ge\lambda_\alpha\sqrt{\frac{n+m}{nm}}.$$

4. Проверка гипотезы независимости. Пусть $((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ – выборка из двумерного распределения $\mathscr{L}(\xi = (\xi_1, \xi_2))$ с неизвестной функцией распределения $F_\xi(x, y)$, для которой требуется проверить гипотезу

$$H_0: F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y).$$

Критерий независимости χ^2. Эту методику применяют для дискретных моделей с конечным числом исходов, поэтому будем считать, что случайная величина ξ_1 принимает конечное число s некоторых значений $a_1, \ldots, a_s$, а ξ_2 – k значений $b_1, \ldots, b_k$. Если исходная модель имеет другую структуру, то множество значений ξ_1 разбивается на s интервалов $\mathscr{E}_1^{(1)}, \ldots, \mathscr{E}_s^{(1)}$, множество значений ξ_2 – на k интервалов $\mathscr{E}_1^{(2)}, \ldots, \mathscr{E}_k^{(2)}$.

Обозначим через ν_{ij} число наблюдений пары (a_i, b_j) (число элементов выборки, принадлежащих прямоугольнику $\mathscr{E}_i^{(1)} \times \mathscr{E}_j^{(2)}$, если данные группируются) так, что

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij} = n.$$

В качестве статистики возьмем

$$\hat{X}_n^2 = n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij} - \nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n\right)^2}{\nu_{i\cdot}\ \nu_{\cdot j}}, \tag{4}$$

где

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij}, \ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} \nu_{ij}.$$

Оказывается, что при $n \to \infty$ $\mathscr{L}\left(\hat{X}_n^2 \mid H_0\right) \to \chi^2_{(s-1)(k-1)}$.

Поэтому при достаточно больших n можно использовать следующее правило проверки гипотезы: *гипотезу* H_0 *отвергают тогда и только тогда, когда вычисленное по фактическим данным значение* t *статистики* (4) *удовлетворяет неравенству*

$$t \geq \chi^2_{1-\alpha,\,(s-1)(k-1)}.$$

§ 4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

Понятие параметрической гипотезы. Критерии проверки гипотез

Пусть класс допустимых распределений наблюдаемой случайной величины ξ имеет вид $\mathscr{F} = \left\{F(x, \theta),\ \theta \in \Theta,\ \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\right\}$. *Параметрическая гипотеза* задается указанием некоторого подмножества $\Theta_0 \subseteq \Theta$, элементом которого является, по предположению, неизвестная параметрическая точка θ. Записывается это так:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0.$$

Альтернативная гипотеза имеет вид

$$H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0;$$

точки $\theta \in \Theta_1$ называются *альтернативами*. Если множество $\Theta_0\left(\Theta_1\right)$ состоит из одной точки, то гипотезу H_0 (альтернативу H_1) называют *простой*, в противном случае – *сложной*.

Пусть $X = \left(X_1, \ldots, X_n\right)$ – выборка из распределения $\mathscr{L}(\xi) \in \mathscr{F}$, о котором сформулирована некоторая гипотеза $H_0 : \theta \in \Theta_0$. Требуется выяснить, верна или нет гипотеза H_0, т. е. надо построить критерий, который позволял бы для каждой реализации $\vec{x}$ выборки X принять гипотезу H_0 или отклонить ее. Тем самым каждому критерию соответствует разбиение выборочного пространства $\mathscr{X}$ на два подмножества $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{X}_1$ $\left(\mathscr{X}_0 \cap \mathscr{X}_1 = \varnothing,\ \mathscr{X}_0 \cup \mathscr{X}_1 = \mathscr{X}\right)$, где $\mathscr{X}_0$ состоит из точек x, для которых H_0 принимается, а $\mathscr{X}_1$ – из точек, для которых H_0 отвергается. Множество $\mathscr{X}_0$ называют *областью принятия гипотезы* H_0, а $\mathscr{X}_1$ – *критической областью*. Критерий, определяемый критической областью $\mathscr{X}_1$, часто для краткости называют *критерием* $\mathscr{X}_1$.

В процессе проверки гипотезы H_0 можно прийти к правильному решению или совершить *ошибку первого рода* – отклонить H_0, когда она верна, или *ошибку второго рода* – принять H_0, когда она ложна. Вероятности этих ошибок можно выразить через функцию мощности $W(\theta)$ критерия $\mathscr{X}_1$:

$$W(\theta) = W\left(\mathscr{X}_1, \theta\right) = \mathrm{P}_\theta\left(X \in \mathscr{X}_1\right), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

а именно: вероятности ошибок первого и второго рода равны соответственно $W(\theta)$, $\theta \in \Theta_0$ и $1 - W(\theta), \theta \in \Theta_1$.

Желательно провести проверку гипотезы так, чтобы свести к минимуму вероятности обоих типов ошибок. Однако при данном числе испытаний n в общем случае невозможно ни при каком выборе $\mathscr{X}_1$ одновременно сделать обе эти вероятности как угодно малыми. Рациональный способ выбора критической области можно сформулировать следующим образом: *при заданном числе испытаний n устанавливается граница для вероятности ошибки первого рода и при этом выбирается та критическая область* $\mathscr{X}_1$, *для которой вероятность ошибки второго рода минимальна,* т. е. выбирается число α между 0 и 1 (обычно для α выбирают одно из следующих стандартных значений: 0,005; 0,01; 0,05 и т. д.) и налагается условие

$$W(\theta) \le \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0; \tag{1}$$

при этом желательно сделать максимальной (за счет выбора $\mathscr{X}_1$)

$$W(\theta),\ \forall \theta \in \Theta_1.$$

Величину α в (1) называют *уровнем значимости*, а тот факт, что критерий $\mathscr{X}_1$ имеет уровень значимости α, часто подчеркивают обозначением $\mathscr{X}_{1\alpha}$.

Пусть $\mathscr{X}_{1\alpha}$ и $\mathscr{X}_{1\alpha}^*$ – два критерия одного и того же уровня значимости α для гипотезы H_0. Если

$$W\left(\mathscr{X}_{1\alpha}^*, \theta\right) \le W\left(\mathscr{X}_{1\alpha}, \theta\right),\ \forall \theta \in \Theta_0, \tag{2}$$

$$W\left(\mathscr{X}_{1\alpha}^*, \theta\right) \ge W\left(\mathscr{X}_{1\alpha}, \theta\right),\ \forall \theta \in \Theta_1, \tag{3}$$

причем строгое неравенство в (3) имеет место хотя бы при одном значении θ, то говорят, что критерий $\mathscr{X}_{1\alpha}^*$ *равномерно мощнее* критерия $\mathscr{X}_{1\alpha}$. Если соотношения (2) и (3) выполняются для любого критерия $\mathscr{X}_{1\alpha}$, то $\mathscr{X}_{1\alpha}^*$ называют *равномерно наиболее мощным критерием*. В случае, когда гипотеза H_1 простая, используют термин *наиболее мощный критерий.*

Обычно критическая область задается с помощью некоторой статистики $T(X)$ и, как правило, имеет следующий вид:

$$\mathscr{X}_1 = \left\{\vec{x} : T(\vec{x}) \ge c\right\}, \text{ или } \mathscr{X}_1 = \left\{\vec{x} : T(\vec{x}) \le c\right\}, \text{ или } \mathscr{X}_1 = \left\{\vec{x} : \left|T(\vec{x})\right| \ge c\right\};$$

функцию $T(X)$ называют в этом случае *статистикой критерия*.

Выбор из двух простых гипотез. Критерий Неймана – Пирсона

Пусть $\Theta = \left\{\theta_0, \theta_1\right\}$, $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$, т. е. допустимыми распределениями случайной величины ξ являются только два: $F_0\left(x\right) = F\left(x, \theta_0\right)$ и

$F_1(x) = F(x, \theta_1)$. Требуется по выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения $\mathscr{L}(\xi)$ определить, какое из этих двух распределений истинно.

Предположим, что уровень значимости α выбран, распределения F_0 и F_1 абсолютно непрерывны и соответствующие плотности $f_0(x)$ и $f_1(x)$ удовлетворяют условию $f_j(x) > 0,\ j = 0{,}1$.

Рассмотрим *статистику отношения правдоподобия*

$$l(X) = \frac{L(X;\ \theta_1)}{L(X;\ \theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f_1(X_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_0(X_i)}$$

и определим функцию $\psi(c) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(l(X) \geq c\right)$. Будем предполагать, что существует такое $c = c(\alpha)$, что $\psi(c) = \alpha$.

Теорема (**теорема Неймана – Пирсона**). *При сделанных предположениях существует наиболее мощный критерий проверки гипотезы* H_0. *Этот критерий задается критической областью*

$$\mathscr{X}^*_{1\alpha} = \left\{\vec{x} : l(\vec{x}) \geq c\right\},$$

где критическая граница c *определяется из условия* $\psi(c) = \alpha$.

Построенный критерий проверки гипотезы H_0 называют *критерием Неймана – Пирсона*.

Соответствующие рассуждения можно провести и для дискретных распределений.

§ 5. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В приложениях математической статистики предположения о независимости и одинаковой распределенности компонент X_i не всегда выполняются. Здесь рассмотрен важный случай таких ситуаций, которые описываются в терминах *линейной регрессионной модели*.

Пусть

$$X = A\theta + \varepsilon, \quad \mathrm{M}\varepsilon = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(\varepsilon) = \mathrm{M}(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n, \tag{2}$$

где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$ – неизвестный параметр; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – случайный вектор ошибок наблюдения, $\mathrm{D}X_i = \mathrm{D}\varepsilon_i = \sigma^2 > 0$, $i = \overline{1,n}$; I_n – единичная матрица порядка $n \times n$, матрица A порядка $n \times s$ считается известной. Если выполняются условия (1) и (2), то говорят, что имеет место *модель линейной регрессии*.

Метод наименьших квадратов состоит в нахождении $\hat{\theta}$ из условия

$$\min_{\theta}\left(\varepsilon\varepsilon^T\right) = \min_{\theta}\left|x - A\theta\right|^2 = \left|x - A\hat{\theta}\right|^2,$$

где $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{R}^n$.

Такая оценка $\hat{\theta}$ называется *оценкой методом наименьших квадратов*.

Чаще всего задачи регрессионного анализа решают в предположении, что наблюдения подчиняются нормальному закону распределения; в этом случае к условиям (1) и (2) добавляют третье:

$$\mathscr{L}(\varepsilon) = N\left(\theta, \sigma^2 I_n\right). \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (3) (условие (2) вытекает из (3), то говорят о *нормальной регрессии*.

Для нормальной модели оценки наименьших квадратов коэффициентов регрессии $\theta_1, \ldots, \theta_s$ совпадают с оценками максимального правдоподобия этих параметров, что несложно видеть, учитывая вид функции правдоподобия. В общем случае метод наименьших квадратов не совпадает с методом максимального правдоподобия.

Оценка для θ методом наименьших квадратов имеет вид

$$\hat{\theta} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T X, \tag{4}$$

она несмещенная.

По определению матрица вариаций $\hat{\theta}$ равна

$$V = \mathrm{M}\left(\hat{\theta} - \theta\right)\left(\hat{\theta} - \theta\right)^T = \sigma^2\left(A^T A\right)^{-1}. \tag{5}$$

На самом деле значение σ^2 изначально неизвестно и его приходится оценивать по результатам измерений. Найдем несмещенную оценку σ^2.

Минимальное значение величины R равно

$$R_{\min} = \left(X - A\hat{\theta}\right)^T\left(X - A\hat{\theta}\right),$$

где $\hat{\theta}$ – оценка параметра θ, полученная методом наименьших квадратов. Учитывая (1) и (4), имеем

$$R_{\min} = \varepsilon^T \left(I_n - A\left(A^T A\right)^{-1} A^T \right)^2 \varepsilon,$$

$$\mathrm{M}\left(R_{\min}\right) = \sigma^2 (n - s).$$

Сейчас можем привести несмещенную оценку для σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{R_{\min}}{n - s}$$

и для матрицы вариаций (см. (5))

$$\hat{V} = \left(A^T A\right)^{-1} \frac{R_{\min}}{n - s}.$$

Оптимальные свойства оценок по методу наименьших квадратов утверждает

Теорема. *Оценки по методу наименьших квадратов имеют наименьшую дисперсию в классе линейных несмещенных оценок.*

Пример. Пусть (ξ, η) – двумерная случайная величина, например ξ и η – сигналы на входе и выходе некоторого устройства. Во многих случаях бывает важно уметь представить одну из величин, например η, как функцию $g(\xi)$ другой. Точное представление $\eta = g(\xi)$, как правило, невозможно, поэтому возникает задача о возможности приближенного представления $\eta \approx g(\xi)$. Итак, требуется найти среди всех функций $g(\xi)$ случайной величины ξ такую, которая являлась бы *наилучшим приближением случайной величины* η. Фразе «наилучшее приближение» следует придать точный смысл, что можно сделать различными способами. Самым удобным и общепринятым является приближение по методу наименьших квадратов. По определению будем считать, что случайная величина $g(\xi)$ является наилучшим приближением случайной величины η в смысле метода наименьших квадратов, если $M(\eta - g(\xi))^2$ принимает наименьшее возможное значение, при этом величина $g(\xi)$ называется *средней квадратической регрессией величины* η *на величину* ξ.

Ограничимся нахождением линейной средней квадратической регрессии величины η на величину ξ, т. е. случаем, когда $g(\xi) = a + b\xi$. Пусть $m_1 = M\xi$, $\sigma_1^2 = D\xi$, $m_2 = M\eta$, $\sigma_2^2 = D\eta$, $\rho(\xi, \eta) = \rho$, $\Phi(a, b) = M(\eta - a - b\xi)^2$.

Найдем такие a и b, при которых функция $\Phi(a, b)$ принимает наименьшее из возможных значений. Таким образом,

$$g(\xi) = m_2 - \rho(\sigma_2/\sigma_1)(\xi - m_1) \text{ –}$$

линейная регрессия величины η *на величину* ξ. Отметим, что прямая, определяемая уравнением

$$(y - m_2)/\sigma_2 = \rho(x - m_1)/\sigma_1,$$

называется *прямой линейной регрессии величины* η *на величину* ξ.

Аналогично можно найти *линейную регрессию величины* ξ *на величину* η:

$$h(\eta) = m_1 - \rho(\sigma_1/\sigma_2)(\eta - m_2)$$

и *прямую линейной регрессии величины* ξ *на величину* η:

$$(y - m_2)/\sigma_2 = (1/\rho)(x - m_1)/\sigma_1.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6

(10 часов)

Тема: Элементы математической статистики

Необходимые понятия и теоремы: вариационный ряд выборки; гистограмма; полигон частот; выборочные характеристики; распределения χ^2, Стьюдента, Фишера; несмещенная оценка; состоятельная оценка; достаточная статистика; методы моментов и максимального правдоподобия; доверительный интервал и доверительная вероятность; статистическая проверка гипотез; критерии согласия; параметрическая гипотеза; линейная регрессионная модель; метод наименьших квадратов; выборочный коэффициент корреляции.

Литература: [8, с. 127–196]; [12, с. 13–95, 102–136]; [14, с. 234–266, 299–301]; [15, с. 15–31, 51–69, 198–216]; [19, с. 245–291]; [27, с. 189–194, 206–211, 213–236].

Задание 6.1. Дана реализация выборки

1)

–2,82	3,36	2,10	5,99	5,48	0,83	2,41	4,97	–0,72	2,98
2,03	5,46	2,65	0,39	2,71	1,46	0,23	1,79	1,70	1,33
1,88	–0,73	2,50	4,09	1,34	4,82	4,55	1,46	–0,00	5,23
1,69	–2,27	3,01	1,20	0,98	2,06	5,53	4,01	1,60	1,73
–0,32	1,03	6,36	–0,75	4,02	–2,27	1,21	–0,32	0,39	1,65

2)

1,10	–5,38	3,11	5,10	3,01	1,95	1,25	4,23	–4,96	1,91
2,57	4,94	7,45	–1,51	–1,22	–2,83	9,10	1,93	5,37	–3,61
1,03	4,93	0,65	5,94	–1,00	0,58	3,41	3,13	–0,69	0,56
4,20	–4,07	5,00	3,56	–1,07	0,16	3,93	5,37	6,00	0,10
4,06	5,69	6,19	4,79	3,41	0,45	2,41	0,43	0,51	6,83

3)

–5,22	–9,28	–2,54	–4,76	–1,18	–2,78	–5,89	–6,87	–3,01	1,70
–4,59	–1,59	–6,16	2,83	–3,59	2,29	–2,20	–0,37	–5,14	–0,72
–2,22	–1,97	1,00	1,67	–1,79	–2,74	–4,49	–0,67	4,68	–5,87
–1,38	–5,34	–4,17	–4,14	–2,58	–0,35	–2,24	1,57	1,37	–2,05
0,88	–2,16	–11,60	–5,74	–4,86	–2,23	–4,14	–0,79	–2,54	–4,65

4)

7,86	0,84	1,92	–1,74	1,68	4,23	4,44	8,02	3,15	–0,31
3,87	–0,66	5,86	–1,86	2,15	0,41	–2,50	5,44	–3,09	3,51
4,49	–0,43	–0,01	–1,80	4,90	–0,49	1,44	0,65	0,72	–0,79
0,79	0,05	3,30	–4,60	2,23	–2,83	1,69	0,48	3,50	–1,53
–0,99	0,48	–4,09	2,25	–2,54	–1,65	1,32	–1,99	0,53	0,25

5)

4,36	1,61	6,76	1,38	3,97	4,48	3,17	3,17	0,96	5,52
3,76	8,16	1,57	3,14	1,69	–0,10	5,15	3,31	3,77	3,45
2,98	3,65	2,42	3,30	0,79	5,02	1,76	3,09	3,29	4,83
2,20	3,90	4,85	0,94	3,86	4,03	1,53	4,34	0,93	3,64
–0,05	6,71	1,75	4,37	6,37	5,56	4,58	2,41	2,75	1,62

6)

3,01	4,29	–0,04	4,09	8,26	6,67	2,95	2,89	7,20	2,97
4,05	7,99	2,27	4,02	7,44	1,10	7,50	7,74	4,10	3,54
5,14	6,72	7,35	5,42	3,72	1,53	–0,31	2,05	2,36	1,93
6,81	2,84	2,69	0,51	2,63	0,55	4,81	6,25	5,36	–0,09
6,32	5,00	8,05	4,41	7,00	1,10	4,71	3,78	5,13	5,47

7)

–4,17	–1,97	–8,13	–3,08	–6,06	–1,95	–0,37	–9,69	–2,80	–7,16
–5,39	–5,10	1,59	–4,29	–8,88	–4,92	2,36	–5,12	–7,49	–11,50
2,18	–3,40	–7,26	–3,73	–6,47	–5,62	3,08	–2,06	–1,85	–1,29
–1,46	3,83	–6,22	–0,61	–5,87	–5,09	–8,70	–0,83	0,99	–1,72
–3,75	–3,01	–6,03	–0,05	–5,29	–3,21	2,05	–9,93	0,47	–5,16

8)

3,22	2,58	3,03	2,00	2,53	2,61	1,87	4,41	4,48	3,10
4,99	1,82	3,30	2,93	1,16	4,12	2,10	2,47	4,16	2,14
2,89	1,94	3,29	2,98	3,75	2,51	3,17	4,43	2,83	3,56
4,36	1,64	2,74	4,13	5,13	2,44	2,51	3,97	2,86	2,96
2,99	2,77	2,43	2,24	4,34	3,05	2,53	2,25	3,64	3,45

9)

–4,35	–2,36	–2,85	–3,46	–4,78	–3,64	–4,38	–3,12	–4,86	–4,27
–2,77	–2,42	–0,91	–2,34	–3,54	–2,82	–4,02	–2,27	–4,20	–2,56
–3,04	–3,71	–3,48	–2,32	–3,47	–1,83	–3,61	–3,19	–2,94	–4,59
–1,74	–2,74	–2,05	–1,49	–2,45	–3,83	–1,40	–1,65	–3,58	–2,54
–3,22	–3,89	–1,57	–3,48	–2,51	–3,09	–3,80	–3,59	–3,69	–4,10

10)

4,56	2,91	8,44	–2,43	7,68	2,78	1,94	0,67	3,33	4,76
0,37	0,23	2,17	1,28	8,53	–1,58	3,89	–1,09	7,93	0,04
2,84	11,70	1,48	4,09	4,74	7,98	–0,45	4,16	2,98	3,55
0,18	–0,24	9,67	1,09	3,44	2,09	4,53	9,06	4,51	3,58
–0,91	5,63	5,15	5,83	5,63	5,47	4,41	–1,25	8,70	–0,67

1. Сгруппировать выборочные данные.

Указание. Группировку выборочных данных проводят в следующей последовательности:

а) строят вариационный ряд данной реализации

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)};$$

б) по вариационному ряду, используя правило Старджеса, находят оптимальную величину интервала Δt:

$$\Delta t = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{1 + \log_2 n};$$

в) составляют первую таблицу по следующей форме:

№ п/п	Границы интервала		Середина интервала t_i	Частота n_i	Частость $n_i^{\text{o}} = \frac{n_i}{n}$
	Начало $t_i^н$	Конец t_i^k			
1					
⋮					
N					

г) объединяя соседние интервалы так, чтобы для любого $i = \overline{1, N}$ $n_i \ge 5$, приходят ко второй таблице:

№ п/п	Границы интервала		Середина интервала t_i^*	Частота n_i^*	Частость n_i^{o*}
	Начало $t_i^{н*}$	Конец t_i^{k*}			
1					
$\vdots$					
N^*					

2. Найти a и σ^2 по формулам:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N^*} t_i^* n_i^*;$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N^*}\left(t_i^* - a\right)^2 n_i^*.$$

Выяснить, как согласуются a и σ^2, соответственно, с выборочным средним и выборочной дисперсией.

3. Построить на одном чертеже гистограмму, полигон частот и плотность распределения

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

4. Найти доверительные интервалы для среднего и дисперсии в модели $N(a,\sigma^2)$, если доверительная вероятность равна 0,95.

5. Проверить гипотезу о нормальном распределении выборки.

Задание 6.2. 1. Найти достаточную статистику для:

1) θ в модели $R(0,\theta)$;
2) $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ в модели $R(\theta_1, \theta_2)$;
3) θ в модели $\varepsilon(\theta)$;
4) θ в модели $Bi\,(1,\theta)$;
5) θ в модели $\Pi(\theta)$;
6) θ в модели $N(\theta,\sigma^2)$;
7) θ в модели $N(\mu,\theta^2)$;
8) $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ в модели $N(\theta_1,\theta_2^2)$;
9) θ в модели $R(\theta,\theta+1)$;
10) θ в модели $EE(\theta,1)$.

2. Методом моментов и методом максимального правдоподобия оценить неизвестный параметр θ (векторный или скалярный) в этих моделях.

3. Выяснить, являются ли полученные оценки несмещенными, состоятельными, сильно состоятельными, оптимальными, эффективными.

Задание 6.3. Поступающие в университет абитуриенты разбиты на два потока по 300 человек в каждом, итоги экзамена по одному и тому же предмету на каждом потоке оказались следующими:

№ п/п	1-й поток				2-й поток			
	«2»	«3»	«4»	«5»	«2»	«3»	«4»	«5»
1	33	43	80	144	39	35	72	154
2	32	44	79	145	40	34	73	153
3	35	42	79	144	37	36	73	154
4	34	44	81	141	41	36	73	151
5	36	42	78	144	32	40	71	157
6	31	42	79	148	39	35	72	154
7	33	42	79	146	39	34	71	156
8	32	42	82	144	40	36	70	154
9	31	45	78	146	37	37	74	152
10	30	44	80	146	38	38	72	152

Можно ли считать оба потока однородными (на уровне значимости 0,05)?

Задание 6.4. Вопрос, на который можно было ответить «да» или «нет», задавался мужчинам и женщинам. Результат опроса представлен в следующих таблицах сопряженности. Проверить, зависит ли ответ от пола опрашиваемого (уровень значимости взять равным 0,05).

1	*Да*	*Нет*	**2**	*Да*	*Нет*	**3**	*Да*	*Нет*	**4**	*Да*	*Нет*	**5**	*Да*	*Нет*
М	18	30	*М*	17	31	*М*	16	32	*М*	19	29	*М*	20	28
Ж	79	173	*Ж*	78	174	*Ж*	77	175	*Ж*	80	172	*Ж*	78	174
6	*Да*	*Нет*	**7**	*Да*	*Нет*	**8**	*Да*	*Нет*	**9**	*Да*	*Нет*	**10**	*Да*	*Нет*
М	17	31	*М*	16	32	*М*	19	29	*М*	18	30	*М*	17	31
Ж	80	172	*Ж*	81	171	*Ж*	78	174	*Ж*	80	172	*Ж*	79	173

Задание 6.5. Пусть зависимость признака y от признака x характеризуется таблицей:

№ п/п	i	1	2	3	4	5	6	7
	x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
1	y_i	2,6	–0,3	–2	–2,3	–1,5	0,7	3,2
2	y_i	2,5	–0,8	–1,9	–2,5	–1,4	0,1	3,2
3	y_i	2,2	–0,4	–1,8	–2	–1,2	0,2	2
4	y_i	1,8	–1,8	–2,2	–2,4	–1,6	1,2	2,4
5	y_i	2,4	–1,6	–2,0	–2,8	–1,4	0,8	2,2
6	y_i	2,0	–1,2	–2,0	–2,6	–1,6	1,4	2,8
7	y_i	2,8	–0,4	–1,8	–2,2	–1,6	0,8	3,0
8	y_i	3,0	–0,2	–1,6	–2,0	–1,4	0,6	2,8
9	y_i	1,3	–3,7	–1,2	–5,6	–2,7	4,4	2,1
10	y_i	–2,3	–2,8	–1,9	–3,2	1,4	–0,3	–1,5

Предполагая, что справедлива зависимость

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ,$$

определить оценки коэффициентов a_k и оценки среднеквадратичных отклонений: σ отдельного измерения и σ_{a_k} коэффициентов a_k. Установить доверительные интервалы для a_k и σ при доверительной вероятности 0,95.

Задачи

1. Дана выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения пуассоновской случайной величины ξ с неизвестным параметром θ. Какие из перечисленных ниже функций являются статистиками?

1) $\min(X_1, \ldots, X_n)$; 5) $\sum_{k=1}^{n} X_k$; 8) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \theta$;

2) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$; 6) $(X_1, \ldots, X_n)$; 9) $\sum_{k=1}^{n}(X_k - \theta)X_k$;

3) $\left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$; 7) 2014; 10) $(2014, 2015)$.

4) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$;

2. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – выборка из распределения F. Доказать, что для любых вещественных y и $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ справедливо равенство

$P\left(F_n(y)=\frac{k}{n}\right)=C_n^k F^k(y)(1-F(y))^{n-k}$. Найти: 1) $MF_n(x)$; 2) $DF_n(x)$, где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения.

3. Пусть $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X=(X_1,...,X_n)$ объема *n*. Пусть a – положительное вещественное число. Является ли эмпирической функцией распределения функция $F_n(ax)$? Если «да», то какой выборке она соответствует?

4. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ – выборка из показательного распределения с параметром 3. Найти распределение выборки $Y=(Y_1,...,Y_n)$, где $Y_i=1-e^{-3X_i}$.

5. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ – выборка из распределения F_θ. Являются ли достаточными статистиками для параметра θ сама выборка, ее вариационный ряд?

6. По выборке $X=(X_1,...,X_n)$ требуется оценить параметр θ равномерного распределения на $[0,\theta]$. Доказать, что $T=X_{(n)}$ – достаточная статистика для параметра θ. Выяснить, является ли она полной достаточной статистикой.

7. Рассматривается модель сдвига-масштаба $F\left(\frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}\right)$ показательного закона с функцией распределения $F(x)=1-e^{-x}$ для $x>0$ и $F(x)=0$ для $x\le 0$. Найти достаточную статистику для параметра (θ_1,θ_2) этой модели.

8. Для выборки $X=(X_1,...,X_n)$ из закона Бернулли с неизвестной вероятностью «успеха» θ улучшить ее оценку X_1 с помощью достаточной статистики $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

9. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[\theta-1,\theta+1]$, $\theta>0$.

10. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[-\theta,\theta]$, $\theta>0$.

11. Пусть $X=(X_1,...,X_n)$ – выборка из пуассоновского распределения с параметром θ. Доказать, что для параметрической функции $\tau(\theta)=\frac{1}{\theta}$ не существует несмещенных оценок.

12. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ – выборка из пуассоновского распределения с параметром $\ln\theta$. Является ли статистика $e^{\overline{X}}$ несмещенной оценкой параметра θ? Будет ли она состоятельной?

13. Доказать полноту статистики $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ для выборки из пуассоновского распределения с параметром θ.

14. Доказать формулу для ковариации выборочных моментов A_{nk} и A_{ns}: $\operatorname{cov}\left(A_{nk}, A_{ns}\right) = \left(\alpha_{k+s} - \alpha_k\alpha_s\right)/n$, где α_m – теоретический момент порядка m.

15. Цена на некоторый товар в 15 торговых точках составила: 422, 419, 426, 420, 426, 423, 432, 428, 438, 434, 411, 417, 414, 441, 420. Построить график эмпирической функции распределения, гистограмму и полигон частот; в предположении гауссовской модели данных построить несмещенные оценки математического ожидания (средней цены) μ и дисперсии цены σ^2.

16. Найти плотность распределения χ^2 с n степенями свободы.

17. Найти плотность распределения Фишера со степенями свободы m и n.

18. Найти плотность распределения Стьюдента с m степенями свободы.

19. Уровень воды в реке по отношению к номиналу измеряется в течение 44 весенних паводков, данные измерений приведены в следующей таблице:

Уровень в см Число случаев	0–24 0	25–49 1	50–74 3	75–99 6	100–124 7	125–149 6
Уровень в см Число случаев	150–174 5	175–199 4	200–299 8	300–399 4	>400 0	–

1. Построить гистограмму, полигон частот и найти эмпирическую функцию распределения уровня воды ξ в реке.

2. Вычислить выборочное среднее и дисперсию, а также выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса.

3. Принимая во внимание то, что $p_\xi\left(x\right) = \dfrac{k^{\alpha+1}x^\alpha e^{-kx}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} I_{\{x>0\}}$, $k = 0{,}024$, $\alpha = 3$, найти ε из условия $\mathrm{P}\left\{\left|\overline{X} - \mu\right| \le \varepsilon\right\} = 0{,}95$ и сравнить с ε отклонение выборочного среднего от теоретического μ.

20. Вывести следующие формулы для выборочных моментов k-го порядка A_{nk} и выборочной дисперсии S^2:

$$\mathrm{M}\,A_{nk} = \mathrm{M}\xi^k = \alpha_k\,,\ \mathrm{M}S^2 = \frac{n-1}{n}\mu_2\,,$$

$$\mathrm{D}S^2 = \frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\mu_2^2\right),$$

$$\mathrm{cov}\left(\overline{X}, S^2\right) = \frac{n-1}{n^2}\mu_3,$$

где

$$\mu_k = \mathrm{M}(\xi - \alpha_1)^k\,.$$

21. В основе алгоритма моделирования значений случайной величины с пуассоновским распределением $\Pi(\lambda)$ лежит следующий факт: если U_i, $i = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ – независимые случайные величины с равномерным на отрезке $[0,1]$ распределением и

$$\xi = \max\left\{k : \prod_{i=0}^{k} U_i \ge e^{-\lambda}\right\},$$

то ξ имеет пуассоновское распределение $\Pi(\lambda)$. Доказать этот факт.

22. В ходе маркетинговых исследований автомобильного рынка для анализа экономичности двигателей была зарегистрирована случайная выборка 12 автомобилей одного класса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	18,2	19,5	20,7	17,8	19,3	20,5	17,8	19,9	20,3	18,6	19,0	20,8

Здесь x_i – показатель экономичности i-го автомобиля (расстояние, преодолеваемое этим автомобилем при использовании 1 галлона бензина). Используя гауссовскую модель выборки $N(\theta_1, \theta_2)$, методом максимального правдоподобия построить несмещеннные оценки параметров θ_1 (средняя экономичность автомобиля) и θ_2 (дисперсия экономичности автомобиля). Выяснить, являются ли оценки состоятельными и эффективными.

23. Отдел приемочного контроля комплектующих изделий использует следующую методику оценки доли θ дефектных изделий: в большой партии изделий наудачу вскрывается 10 ящиков, изделия наудачу извлекаются по одному и тестируются до обнаружения первого дефектного изделия. Результаты произведенного контроля представлены в таблице:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	21	25	17	22	19	23	27	16	20	24

Здесь x_i – число годных изделий, извлеченных из i-го ящика до обнаружения первого дефектного изделия. Используя модель выборки из геометрического распределения, найти минимальную достаточную статистику, найти оценку максимального правдоподобия и исследовать ее свойства.

24. При выборочной проверке каждого из 10 малых предприятий налоговой инспекцией не было обнаружено ни одного нарушения налогового законодательства. Построить 80, 90 и 99 %-ный доверительные интервалы для доли нарушителей налогового законодательства, используя биномиальную модель распределения для числа нарушителей.

25. Из 30 созданных малых предприятий 8 прекратили свое существование в течение года. Определить интервальную оценку вероятности выживаемости малого предприятия (доверительный уровень 0,95) в предположении, что процесс гибели малых предприятий описывается схемой независимых испытаний Бернулли.

26. При проведении маркетинговых исследований возникла необходимость определения средней цены на некоторый товар по результатам $x_1, x_2, ..., x_n$ наблюдений за ценой в течение n месяцев. В предположении гауссовской модели (плотность распределения случайной величины x_i есть нормальное распределение с параметрами (θ, 25)) определить, сколько нужно выполнить наблюдений n, чтобы оценить θ с ошибкой не более 5 при доверительной вероятности 0,95.

27. Владелец ресторана хотел бы знать с вероятностью 0,95, в каких пределах заключена сумма денег, которую посетитель платит за заказ. Случайная выборка объема $n = 36$ обладает выборочным средним 6,5 и выборочным стандартным отклонением 3.

1. Какой должна быть по объему выборка, чтобы абсолютное отклонение средней суммы денег от выборочной средней не превышало 10 % с вероятностью 0,95?

2. Найти доверительный интервал с уровнем доверия 0,99.

28. Число посетителей коммерческого банка в течение рабочего дня является случайной величиной с распределением Пуассона $\Pi(\theta)$, где $\theta > 0$ – неизвестное среднее число посетителей. Данные о числе посетителей в каждый из n дней представлены выборкой $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$. По заданному доверительному уровню $\varepsilon \in (0,1)$ построить доверительный интервал для θ.

29. Пусть некоторая фирма, занимающаяся продажей цветов, реализовала в первые $n = 5$ дней своей деятельности $x_1, x_2, ..., x_5$ цветов:

i	1	2	3	4	5
x_i	125	89	136	72	104

Чтобы продавать только свежие цветы, директор фирмы желает по имеющимся данным спроса за n дней оценить спрос X_{n+1} на следующий (n+1)-й день с помощью 95 %-ного доверительного интервала. Показать, используя гауссовскую модель, что с вероятностью 0,95 спрос X_{n+1} лежит в интервале

$$\left(\bar{X}-t_{n-1}(0{,}975)S\sqrt{(n+1)/n},\ \bar{X}+t_{n-1}(0{,}975)S\sqrt{(n+1)/n}\right),$$

где $\bar{X}$ – выборочное среднее; S^2 – выборочная дисперсия (несмещенная оценка, см. задачу 31^*); $t_n(p)$ – квантиль уровня p для распределения Стьюдента с n степенями свободы.

30*. Проверить, являются ли выборочные моменты k-го порядка A_{nk} несмещенными, состоятельными (сильно состоятельными) оценками для теоретических моментов k-го порядка $\alpha_k = \mathrm{M}\xi^k$, $k=1,\ 2,\ \ldots$.

31*. Является ли несмещенной оценкой дисперсии выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2,$$

где случайные величины $X_1,\ \ldots,\ X_n$ независимы и имеют то же распределение, что и исследуемая случайная величина ξ? В случае, если оценка не является несмещенной, изменить величину S^2 так, чтобы оценка стала несмещенной.

32*. Пусть $X=\left(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\right)$ – выборка из распределения Коши с плотностью

$$f(x,\ \theta)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2},\ \ x\in\mathbb{R},\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Проверить, является ли выборочное среднее $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ состоятельной оценкой параметра θ.

33*. Пусть $X=\left(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\right)$ – выборка из распределения Коши с плотностью

$$f(x,\ \theta)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2},\ \ x\in\mathbb{R},\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Является ли оценка $Z_{n,\frac{1}{2}}$ сильно состоятельной оценкой для параметра θ?

34*. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}, \quad x\in\mathbb{R},\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Найти значение количества информации Фишера, содержащейся в выборке из распределения Коши.

35*. Пусть исследуемая случайная величина ξ – экспоненциальная случайная величина с параметром $\lambda=\frac{1}{\theta}>0.$ Найти минимальную достаточную статистику для параметра θ.

36*. Пусть ξ – нормальная случайная величина с неизвестными параметрами $a=\theta_1,\ \sigma^2=\theta_2^2.$ Найти минимальную достаточную статистику для $\theta=(\theta_1,\theta_2)$.

37*. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[\theta_1;\theta_2]$. Найти минимальную достаточную статистику параметра (θ_1,θ_2).

38*. Основываясь на следующем представлении производящей функции статистики T_n – числа инверсий в повторной случайной выборке объема n :

$$\Phi_n(z)\equiv \mathrm{M}z^{T_n}=\frac{1}{n!}\prod_{r=1}^{n-1}(1+z+\dots z^r),$$

доказать, что $\mathscr{L}(T_n)\sim N\left(\frac{n(n-1)}{4},\frac{n^3}{36}\right)$ при $n\to\infty.$

39*. По выборке $X=(X_1,\dots,X_n)$ из распределения $\mathscr{L}(\xi)$ построить несмещенную оценку его характеристической функции. Рассмотреть эмпирическую характеристическую функцию.

40*. Доказать, что $T_n(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$ – несмещенная состоятельная оценка параметра θ в модели $N(\mu,\theta^2)$ с известным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией θ^2 .

41*. Оценивается параметр θ равномерного распределения $R(0,\theta)$ по выборке $X=(X_1,\dots,X_n)$. Убедиться в том, что обе статистики $T_1=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ и $T_2=(n+1)X_{(1)}$ несмещенные. Какая из них предпочтительнее?

42*. Доказать, что $\mathscr{L}\left(\frac{\chi_n^2-n}{\sqrt{2n}}\right)\to N(0,1)$ при $n\to\infty$. Установить формулу $\mathrm{M}\left(\chi_n^2\right)^k = n(n+2)\ldots(n+2(k-1)),\ \ k=1,2,\ldots$.

43. Из конечной генеральной совокупности $(X_1,\ldots,X_N)$ берутся последовательно две бесповторные выборки $\left(x_1,\ldots,x_{n_1}\right)$ и $\left(y_1,\ldots,y_{n_2}\right)$, $n_1+n_2\le N.$ Найти ковариацию и коэффициент корреляции между выборочными средними $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

44. Найти математическое ожидание выборочной дисперсии для бесповторной выборки объема n из конечной генеральной совокупности $(X_1,\ldots,X_N)$.

45. Вычислить математическое ожидание и дисперсию k-й порядковой статистики для выборки объема n из равномерного на $[0;a]$ распределения.

46. Имеется выборка $(X_1,\ldots,X_N)$. По гипотезе H_0 все X_i равномерно распределены на $[0;2]$, по гипотезе H_1 – на $[1;3]$. Построить критерий с наименьшей величиной $\max(\alpha,\beta)$, где α и β – вероятности ошибок 1-го и 2-го рода.

47. Случайная величина ξ подчиняется биномиальному закону распределения. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии этого распределения, считая параметр p известным.

48. По независимым выборкам $\left(X_1,\ldots,X_{n_1}\right)$ и $\left(Y_1,\ldots,Y_{n_2}\right)$ из двух нормальных распределений с параметрами (a_1,σ_1) и (a_2,σ_2) соответственно построить доверительный интервал с доверительной вероятностью α для разности a_1-a_2, если σ_1 и σ_2 известны.

49. Пусть x есть число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха θ в каждом испытании. Показать, что статистика

$$T(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{(k)}}{n^{(k)}}$$

является эффективной оценкой для параметрической функции $\tau_1(\theta)= = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots + a_n\theta^n.$ Здесь $x^{(k)}=x(x-1)\cdots(x-k+1)$. Доказать, что не существует несмещенной оценки для $\tau_2(\theta)=\theta^N$ $(N>n)$.

50. Пусть $X=(X_1,\ldots,X_n)$ – выборка из распределения Пуассона с неизвестным параметром θ. Показать, что статистика

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{k=0}^{x} a_k \frac{x^{(k)}}{n^k},$$

где $x = X_1 + \ldots + X_n$, $x^{(k)} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$, – эффективная оценка для $\tau_1(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots$. Доказать, что для $\tau_2(\theta) = 1/\theta$ не существует несмещенной оценки.

51. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – выборка из равномерного на $[0; \theta]$ распределения, $\hat{\theta}_n$ – оценка максимального правдоподобия параметра θ. Доказать, что $\hat{\theta}_n$ – состоятельная оценка и

$$\mathrm{M}_\theta \hat{\theta}_n = \frac{n}{n+1}\theta, \ \mathrm{D}_\theta \hat{\theta}_n = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2, \ \ \theta > 0.$$

52. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – выборка из нормального распределения с параметрами $(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$. Показать, что статистика

$$T(X) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} - 1$$

является состоятельной оценкой неизвестного параметра θ.

53. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – выборка из равномерного распределения на $[0; \theta]$ и $T(X) = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Доказать, что $\left(T(X); T(X)\varepsilon^{-1/n}\right)$ есть доверительный интервал параметра θ уровня ε $(0 < \varepsilon < 1)$.

54. Предположим, что наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ представляются в виде

$$x_k = \theta_0 + \theta_1 t_k + \varepsilon_k, \ k = \overline{1, n},$$

где $t_k = k$, $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ – неизвестный параметр; случайные ошибки наблюдения $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ независимы и нормально распределены с параметрами $(0, \sigma^2)$. Пусть $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$ – оценка параметра θ, полученная методом наименьших квадратов. Доказать, что

$$\mathrm{D}\hat{\theta}_0 = \frac{4}{n}\left[1 + \frac{3}{2(n-1)}\right]\sigma^2, \ \ \mathrm{D}\hat{\theta}_1 = \frac{12}{n(n^2-1)}\sigma^2.$$

55. Бытует мнение, что при рождении ребенка вероятность мальчика такая же, как и девочки. Примем это за гипотезу. Для ее проверки имеется огромный статистический материал. Воспользуемся данными по Швейцарии с 1871 по 1900 г. За этот период там родилось $n = 2\,644\,757$ человек и среди них $n_1 = 1\,359\,671$ мальчиков и $n_2 = 1\,285\,086$ девочек. Согласуется ли гипотеза о равновероятности рождения мальчика и девочки с этими числами?

56. Среди 300 человек, поступивших в высшее учебное заведение, 97 имели оценку «5» в школе и 48 получили «5» на вступительных экзаменах по тому же предмету, причем лишь 18 имели «5» и в школе, и на экзаменах. С уровнем значимости 0,1 проверить гипотезу о независимости оценок «5» в школе и на вступительных экзаменах.

57. В следующей таблице приведены данные об урожайности пшеницы на 8 опытных участках одинакового размера:

Номер участка	1	2	3	4	5	6	7	8
Урожайность, ц/га	26,5	25,2	28,9	30,1	32,3	29,3	26,1	25,0

Предполагая, что урожайность – нормально распределенная случайная величина, требуется:

1) проверить гипотезу $H_0 : \mu = 28$ ц/га против альтернативы $H_1 : \mu = 30$ ц/га, $\varepsilon = 0{,}1$;

2) определить мощность критерия проверки гипотезы H_0;

3) построить график зависимости мощности – кривую $W = W(\mu)$ (кривую эффективности) критерия.

58. Четверо студентов проходят серию из трех тестов, результаты которых следующие:

Студент \ Тест	1	2	3
1	12	12	13
2	9	12	12
3	10	11	11
4	10	11	12

Можно ли на уровне значимости 0,05 считать, что студенты имеют одинаковые знания по трем тестовым предметам?

59. Фирма осуществляет массовое производство некоторого изделия, и известно, что 96 % продукции оказывается годной. Появление дефектных изделий в процессе производства – случайное событие, поэтому отдел контроля качества фирмы проводит выборочную проверку. Известно, что замена негодного изделия годным и его пересылка обходится в \$ 60, отправка годного изделия – \$ 20. Как выбрать критическое значение x показателя качества, чтобы полные расходы фирмы были минимальными?

60. Муниципалитет интересуется долей граждан, имеющих телевизор. Пусть по выборке из 500 человек оказалось, что 46 % владели телевизорами. Можно ли с вероятностью 0,95 считать, что гипотеза о 50 %-ном владении телевизорами является приемлемой (не отвергается)?

61. В течение 10 часов регистрировали прибытие автомашин на заправку к бензоколонке. Данные приведены в таблице, где в первой строке указан часовой интервал времени суток, во второй – число машин, прибывших в данном интервале:

$a_{i-1} - a_i$	8–9	9–10	10–11	11–12	12–13	13–14	1415	15–16	16–17	17–18
m_i	12	40	22	16	28	6	11	33	18	14

Проверить на уровне значимости 0,01 гипотезу о том, что время прибытия машин распределено равномерно.

62. При скрещивании двух типов кукурузы во втором поколении обнаружено 4 различных типа растений. Простая менделевская модель предсказывает появление этих четырех типов с вероятностями: 9/16, 3/16, 3/16 и 1/16. В результате наблюдений над 1301 растением получены частоты: $\nu_1 = 773$, $\nu_2 = 231$, $\nu_3 = 238$, $\nu_4 = 59$. При каком уровне значимости ε критерий χ^2 Пирсона подтверждает менделевскую модель?

63. Для проверки подлинности рукописей, писем К. К. Снодграсса, приписываемых М. Твену, Ч. С. Гринегар произвел подсчет числа слов длиной в $k = 1, 2, 3, \ldots 12$ букв в произведениях М. Твена и в письмах К. К. Снодграсса. Выяснилось, что слова из 2, 3 и 4 букв встречаются в произведениях М. Твена с частотами (вероятностями):

k	2	3	4	остальные
Вероятности p_k	0,177	0,232	0,191	0,400

В 13 175 словах рукописей писем К. К. Снодграсса слова тех же длин встречаются со следующими частотами:

k	2	3	4	остальные
Абсолютные частоты	2685	2752	2302	5436

С помощью критерия Пирсона на уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что письма К. К. Снодграсса представляют собой случайную выборку из произведений М.Твена.

64. Для анализа влияния витамина на профилактику простудных заболеваний 200 человек случайным образом были разделены на две равные группы. Одной группе давали витамин, другой (контрольной) – «пустышку», но всем пациентам было сказано, что им дают витамин. Результаты приведены в таблице:

Результат / Группа	Меньше простудных заболеваний	Больше простудных заболеваний	Без изменений
Контрольная	39	21	40
Принимавшая витамины	51	20	29
Сумма	90	41	69

С помощью критерия χ^2 Пирсона на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о независимости простудных заболеваний от приема витамина.

65. В следующей таблице приведены данные об урожайности кукурузы и риса в различных странах (в ц/га). На уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу о том, что средняя урожайность риса и кукурузы одинакова.

Страна	Урожайность	
	Рис	Кукуруза
Колумбия	11,2	19,5
Израиль	40,4	9,7
Аргентина	17,7	33,6
Чили	20,7	26,9
Мексика	9,4	22,5
Тайвань	17,5	32,1
Египет	24,0	52,3
Япония	25,9	50,5

66*. В десятичной записи числа π среди первых 10 002 знаков после запятой цифры 0, 1, …, 9 встречаются соответственно 968, 1026, 1021, 974, 1014, 1046, 1021, 970, 948, 1014 раз. Можно ли при уровне значимости 0,05 считать эти цифры случайными? При каком уровне значимости эта гипотеза отвергается?

67*. Среди 2020 семей, имеющих двоих детей, 527 семей, в которых два мальчика, и 476 – две девочки (в остальных 1017 семьях дети разного пола). Можно ли при уровне значимости 0,05 считать, что количество мальчиков в семье с двумя детьми – биномиальная случайная величина?

68*. При $n = 4000$ независимых испытаний события A_1, A_2, A_3, составляющие полную группу, осуществились соответственно 1905, 1015 и 1080 раз. Согласуются ли эти данные при уровне значимости 0,05 с гипотезой $H_0 : p_1 = 1/2,\ p_2 = p_3 = 1/4,$ где $p_i = \mathrm{P}(A_i)$?

69*. Во время эпидемии гриппа среди 2000 контролируемых индивидуумов одно заболевание наблюдалось у 181 человека, дважды болели лишь 9 человек. У остальных 1810 человек заболевания не было. Согласуются ли при уровне значимости 0,05 эти данные с гипотезой, согласно которой число заболеваний отдельного индивидуума в течение эпидемии – биномиальная случайная величина?

70*. При проведении $n = 2608$ опытов по наблюдению числа α-частиц (ξ), излучаемых радиоактивным веществом за определенный период времени (7,5 с) получены следующие данные (h_i – число опытов, для которых число частиц $\xi = i,\ \ i = 0, 1, ...$):

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	≥ 12	*Всего*
h_i	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	2	$n = 2608$

Проверить гипотезу $H_0 : \mathscr{L}(\xi) = \Pi(\theta)$, где θ – неизвестный параметр (уровень значимости принять равным 0,05) .

71*. Поступающие в институт абитуриенты разбиты на два потока по 300 человек в каждом. Итоги экзамена по одному и тому же предмету на каждом потоке оказались следующими: на первом потоке баллы 2, 3, 4 и 5 получили соответственно 33, 43, 80 и 144 человека; соответствующие данные для второго потока таковы: 39, 35, 72, 154. Можно ли при уровне значимости 0,05 считать оба потока однородными?

72*. Проверить гипотезу независимости для следующей таблицы сопряженности двух признаков (уровень значимости принять равным 0,05):

ξ_1	ξ_2			Σ
	b_1	b_2	b_3	
a_1	3009	2832	3008	8849
a_2	3047	3051	2997	9095
a_3	2974	3038	3018	9030
Σ	9030	8921	9023	26974

73*. Каждый из $n = 6800$ индивидуумов классифицировался по двум признакам: цвету глаз (ξ_1) и цвету волос (ξ_2), при этом для ξ_1 было определено 3 категории a_1, a_2, a_3, а для ξ_2 – 4 категории b_1, b_2, b_3, b_4. Данные эксперимента приведены в следующей таблице:

ξ_1	ξ_2				Σ
	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	1768	807	189	47	2811
a_2	946	1387	746	53	3132
a_3	115	438	288	16	857
Σ	2829	2632	1223	116	6800

Проверить гипотезу H_0 о независимости этих признаков.

74*. В следующей таблице приведены 818 случаев, классифицированных по двум признакам: наличию прививки против холеры (признак A) и отсутствию заболевания (признак B):

	B	$\bar{B}$	Σ
A	276	3	279
$\bar{A}$	473	66	539
Σ	749	69	818

Проверить гипотезу H_0 о независимости признаков A и B (уровень значимости принять равным 0,005).

75*. Можно ли при уровне значимости 0,001 считать, что последовательность чисел 1,05; 1,12; 1,37; 1,50; 1,51; 1,73; 1,85; 1,98 является реализацией случайного вектора, все 8 компонент которого независимые одинаково распределенные случайные величины?

76*. В опытах наблюдалась неотрицательная непрерывная случайная величина ξ. Ее значения (упорядоченные по величине и округленные с точностью до 0,01) для $n = 50$ опытов оказались равными: 0,01 0,01 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,25 0,29 0,42 0,46 0,47 0,47 0,56 0,59 0,67 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 1,00 1,01 1,01 1,02 1,03 1,05 1,32 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,35 2,46 2,46 2,50 3,73 4,07 6,03. Группируя данные по $N = 4$ равновероятным (при гипотезе H_0) интервалам, проверить гипотезу $H_0 : F_\xi(x) = 1 - e^{-x}$, если $x \geq 0$, и $F_\xi(x) = 0$, если $x < 0$ (уровень значимости принять равным 0,1).

77. Себестоимость y (в долларах) одного экземпляра книги в зависимости от тиража x (в тыс. экземпляров) характеризуется статистикой, собранной издательством:

x_i	1	2	3	5	10	20	30	50	100	200
y_i	10,15	5,52	4,08	2,85	2,11	1,62	1,41	1,30	1,21	1,15

Оценить коэффициенты θ_1, θ_2 гиперболической зависимости $y = \theta_1 + \theta_2 / x$, дисперсию ошибок наблюдений σ^2, матрицу вариаций оценок и построить 95 %-ные доверительные интервалы для θ_1, θ_2, а также для величины y при различных x_i.

78. Сырье, поступившее на завод из карьера, содержит два полезных компонента – минералы A и B. Результаты анализа 10 партий сырья, поступившего в разное время из разных мест карьера, представлены в таблице (ξ, η – соответственно процентное содержание минералов A, B в образцах):

№ партии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ	67	54	72	64	39	22	58	43	46	34
η	24	15	23	19	16	11	20	16	17	13

Оценить коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$ и функции регрессии η на ξ и ξ на η.

79. В таблице указаны различные количества фосфора x_i, внесенные в почву девяти опытных участков, и количества фосфора в кукурузе y_i, выросшей на различных участках через 38 дней:

y_i	64	71	54	81	76	93	77	95	109
x_i	1	4	5	9	11	13	23	23	28

Предполагается, что модель зависимости y от x линейна:

$$y_i = \theta_1 \left(x_i - \overline{x}\right) + \theta_2 + \varepsilon_i, i = \overline{1,9}, \text{ где } \overline{x} = \sum_{i=1}^{9} \frac{x_i}{9}.$$

Параметры θ_1, θ_2 – неизвестны, а случайные ошибки ε_i некоррелированы, имеют нулевые средние и одинаковые дисперсии σ^2. Оценить θ_1, θ_2, σ^2 по методу наименьших квадратов. Точки (x_i, y_i) и оценку $\hat{\theta}_1\left(x_1 - \overline{x}\right) + \hat{\theta}_1$ прямой линии регрессии изобразить графически в системе координат xOy.

80*. Доказать, что совместная функция распределения двух порядковых статистик $X_{(r)}$ и $X_{(s)}$ $(1 \le r < s \le n)$ имеет вид

$$F_{r,s}(x_1, x_2) =$$

$$= \sum_{m=r}^{n} \sum_{j=\max(0,s-m)}^{n-m} \frac{n!}{m!\, j!(n-m-j)!} F^m(x_1)[F(x_2) - F(x_1)]^j (1 - F(x_2))^{n-m-j},$$

если $x_1 < x_2$, и

$$F_{r,s}(x_1, x_2) = \mathrm{P}(X_{(s)} \le x_2) = F_s(x_2) = \sum_{j=s}^{n} C_n^j F^j(x_2)(1 - F(x_2))^{n-j},$$

если $x_1 \ge x_2$. Вывести отсюда формулу для $F_r(x) = \mathrm{P}(X_{(r)} \le x)$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К ГЛАВЕ 4

7*. Функция $f(t)$ является сверточным квадратом: $f(t)=(g*g)(t)$, где $g(t)=I_{[-a/2,+a/2]}(t)/\sqrt{a}\in L_1(\mathbb{R})$. Рассмотрим обратное преобразование Фурье:

$$p(x):=(F^{-1}f)(x)=(F^{-1}g\cdot F^{-1}g)(x)=(F^{-1}g)(x)^2.$$

Функция $p(x)$ является плотностью некоторой случайной величины, поскольку она неотрицательна, а интеграл ее по действительной прямой совпадает с $f(0)=1$ по свойству преобразования Фурье.

16*. Для четной характеристической функции

$$f_\xi(t)=\frac{f_\xi(t)+f_\xi(-t)}{2}=\mathrm{M}\frac{e^{it\xi}+e^{-it\xi}}{2}=\mathrm{M}\cos(t\xi).$$

Применим неравенство Йенсена $\mathrm{M}g(\eta)\ge g(\mathrm{M}\eta)$ к выпуклой вниз функции $g(z)=2z^2$ и случайной величине $\eta=\cos(t\xi)$. Получим $\mathrm{M}2\cos^2(t\xi)\ge 2(\mathrm{M}\cos(t\xi))^2$. Учитывая тождество $2\cos^2(t\xi)=1+\cos(2t\xi)$, получим

$$\mathrm{M}(1+\cos(2t\xi))\ge 2(\mathrm{M}\cos(t\xi))^2,$$

т. е. $1+f_\xi(t)\ge 2f_\xi(t)^2$, что и требовалось.

26*. Докажем первое равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\operatorname{Re}f(t)}{t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t^2}dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t^2}dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{(tx)^2}dt\,|x|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos y}{y^2}dy=\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,dF(x)=\pi\mathrm{M}\,|\xi|.$$

Аналогично, интегрируя по частям получаем

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}f'(t)}{t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\operatorname{Re}f(t)}{t^2}dt=\mathrm{M}|\xi|.$$

31*. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть случайная величина ξ имеет решетчатое распределение и $p_k=\mathrm{P}(\xi=a+kh)$, $k\in Z$. Тогда характеристическая функция ξ равна

$$f_\xi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k e^{it(a+kh)}=e^{ita}\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k e^{ikht}.$$

Поэтому

$$f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)=e^{ia\frac{2\pi}{h}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k e^{i2\pi k}=e^{ia\frac{2\pi}{h}} \quad \text{и} \quad \left|f_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right|=1.$$

Достаточность. Пусть при некотором $t_1\neq 0$ $\left|f_\xi(t_1)\right|=1$. Тогда

$$f_\xi(t_1)=e^{it_1a},\ \ a\in R \ \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty}e^{it_1x}dF_\xi(x)=e^{it_1a}.$$

Отсюда $\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_1(x-a)}dF_\xi(x)=1$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos t_1(x-a)dF_\xi(x)=1, \text{ или } \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\cos t_1(x-a)\right)dF_\xi(x)=0.$$

Последнее равенство можно записать в виде $\mathrm{M}\left(1-\cos t_1(\xi-a)\right)=0$, но так как $1-\cos t_1(\xi-a)\geq 0$, то по свойству интеграла Лебега $\mathrm{P}\left(1-\cos t_1(\xi-a)=0\right)=1$, поэтому возможные значения ξ имеют вид $a+k\dfrac{2\pi}{t_1}$, $k\in Z$, т. е. случайная величина ξ имеет решетчатое распределение.

34*. Ряд $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\xi=k)z^k$ сходится равномерно в единичном круге $|z|\leq 1$. Таким образом, производящая функция должна быть аналитической в точке $z=0$. Функция $\varphi(z)=|z|$ таковой не является.

40*. Из сходимости почти наверное $\xi_n\xrightarrow{\text{п.н.}}\xi$ вытекает сходимость по вероятности $\xi_n\xrightarrow{\mathrm{P}}\xi$. Из интегральной сходимости $\mathrm{M}|\xi_n-\eta|^p\to 0$ также вытекает сходимость по вероятности $\xi_n\xrightarrow{\mathrm{P}}\eta$.

Предположим, что $\mathrm{P}(\xi{=}\eta)<1$. Введем события $A_m=\{|\xi-\eta|\leq 1/m\}$. Из неравенства $\mathrm{P}(\xi{=}\eta)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty}A_m\right)<1$ вытекает существование номера j, для которого $\mathrm{P}(A_j)=\mathrm{P}(|\xi-\eta|\leq 1/j)<1$, т. е. $\mathrm{P}(|\xi-\eta|>1/j)>0$. Однако

$$\mathrm{P}(|\xi-\eta|>1/j)\leq \mathrm{P}(|\xi-\xi_n|+|\xi_n-\eta|>1/j)\leq$$
$$\leq \mathrm{P}\left(|\xi-\xi_n|>\frac{1}{2j}\right)+\mathrm{P}\left(|\xi_n-\eta|>\frac{1}{2j}\right)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

70*. Сначала докажем утверждение для $\lambda = n$ натурального. В этом случае распределение $\xi_\lambda = \xi_n$ совпадает с распределением суммы $\eta_1 + ... + \eta_n$, где η_k независимы и имеют распределение Пуассона с параметром 1. Поскольку $M(\eta_1 + ... + \eta_n) = n,$ $D(\eta_1 + ... + \eta_n) = n,$ то утверждение следует из центральной предельной теоремы для одинаково распределенных независимых случайных величин.

В общем случае представим λ в виде $\lambda = n + \alpha$, где $0 < \alpha < 1$. Распределение ξ_λ совпадает с распределением суммы $\eta_1 + ... + \eta_n + \eta_0$, где η_k независимы и имеют распределение Пуассона с параметром 1 при $1 \le k \le n$ и параметром α при $k = 0$. Имеем равенство

$$\frac{\eta_1 + ... + \eta_n + \eta_0 - (n + \alpha)}{\sqrt{n + \alpha}} - \frac{\eta_1 + ... + \eta_n - n}{\sqrt{n}} =$$

$$= -\frac{(\sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n})(\eta_1 + ... + \eta_n)}{\sqrt{n+\alpha}\sqrt{n}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{n+\alpha}} - (\sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n}).$$

Поскольку $(\sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n}) \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$, то разность слабо стремится к тождественно нулевой случайной величине. Поэтому $\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$, как и $\frac{\xi_n - n}{\sqrt{n}}$, слабо стремится к стандартной нормальной случайной величине.

77*. Рассмотрим невырожденную случайную величину η, принимающую значения 0 и 1 с вероятностью 1/2. Положим $\xi_k = (-1)^k \eta, k = 1,2,...$. В этом случае $\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, однако $\frac{|\xi_1| + ... + |\xi_n|}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \eta \ne 0$.

Отметим, что в этом примере $\xi_1, \xi_2, ...$ не являются независимыми.

79*. Если бы $\xi_1, \xi_2, ...$ удовлетворяла закону больших чисел, то $\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n}$ слабо сходилась бы к 0, а характеристическая функция $\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n}$ стремилась бы к единице равномерно на всех компактах в R. Однако

$$f_{\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{n}\frac{k\alpha_k}{\alpha}\right).$$

В силу неравенства $\alpha_n \ge \alpha > 0$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеется нуль функции $\cos\left(\frac{t}{n}\frac{n\alpha_n}{\alpha}\right) = \cos\left(t\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)$. Получается противоречие с утверждением о равномерной сходимости к единице характеристических функций на $[-\pi, \pi]$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К ГЛАВЕ 5

17*. Пусть $a \in \mathbb{R}$ такое, что $\mathrm{P}\{\xi(t_0) = a\} = 1$. Для всех $t \le t_0$ из независимости приращений процесса ξ получаем, что случайные величины $\xi(t_0) - \xi(t) = a - \xi(t)$ и $\xi(t)$ независимы. Откуда вытекает, что $\xi(t)$ не зависит сама от себя, поэтому является константой.

18*. Пусть $\xi = \{\xi(t), t \ge 0\}$ – процесс с независимыми приращениями. Для любой ограниченной борелевской функции f и всех $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le t$ имеем

$$\mathrm{M}\Big(f\big(\xi(t)\big)\Big|\xi(t_1), ..., \xi(t_n)\Big) = \mathrm{M}\Big(f\big(\xi(t) - \xi(t_n) + \xi(t_n)\big)\Big|\xi(t_1), ..., \xi(t_n)\Big).$$

Из свойств условного математического ожидания и независимости $\xi(t) - \xi(t_n)$ с $\xi(t_1), ..., \xi(t_n)$ получаем

$$\mathrm{M}\Big(f\big(\xi(t) - \xi(t_n) + \xi(t_n)\big)\Big|\xi(t_1), ..., \xi(t_n)\Big) = \mathrm{M}\Big(f\big(\xi(t) - \xi(t_n) + x\big)\Big)\Big|_{x=\xi(t_n)}.$$

Аналогично

$$\mathrm{M}\Big(f\big(\xi(t)\big)\Big|\xi(t_n)\Big) = \mathrm{M}\Big(f\big(\xi(t) - \xi(t_n) + x\big)\Big)\Big|_{x=\xi(t_n)}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{M}\Big(f\big(\xi(t)\big)\Big|\xi(t_1), ..., \xi(t_n)\Big) = \mathrm{M}\Big(f\big(\xi(t)\big)\Big|\xi(t_n)\Big).$$

По определению заключаем, что случайный процесс ξ является марковским.

21*. Пусть $W = \{W(t), t \ge 0\}$ – стандартный процесс броуновского движения. Покажем, что $W_h(t) = \dfrac{W(t+h) - W(t)}{h}$ не сходится по вероятности при $h \to +0$ для всех $t \ge 0$. Так как сходимость по вероятности влечет слабую сходимость, то достаточно показать, что $W_h(t)$ не сходится в слабом смысле.

Вычислим характеристическую функцию $\varphi_h(t,z)$ случайной величины $W_h(t)$. Тогда при $h \to +0$ для $z \ne 0$ имеем

$$\varphi_h(t,z) = \mathrm{M}e^{zW_h(t)} = e^{-\frac{z^2 h}{2h^2}} = e^{-\frac{z^2}{2h}} \to 0.$$

Предел $\varphi_h(t,z)$ не является характеристической функцией, поэтому $W_h(t)$ не сходится в слабом смысле.

26*. Найдем математическое ожидание суммы $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2$. В силу того, что приращения процесса броуновского движения являются гауссовскими случайными величинами с нулевым средним, получаем

$$\mathrm{M}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^2\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{M}\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^2=\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)=c.$$

Используя независимость приращений процесса броуновского движения, имеем

$$\mathrm{M}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^2-c\right)^2=\mathrm{D}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^2\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{D}\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^2=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{M}\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^4-\left(\mathrm{M}\left(W(t_{k+1})-W(t_k)\right)^2\right)^2\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(3\left(t_{k+1}-t_k\right)^2-\left(t_{k+1}-t_k\right)^2\right)\le 2c\max_{0\le k\le n-1}\left(t_{k+1}-t_k\right)\to 0\ .$$

36*. 1. Покажем, что процесс Пуассона непрерывен по вероятности. Так как приращения процесса Пуассона имеют распределение Пуассона, то они принимают только целые неотрицательные значения. Тогда для всех $\varepsilon<1$ имеем при $h\to 0$

$$\mathrm{P}\left(\left|\Pi(t+h)-\Pi(t)\right|>\varepsilon\right)=1-\mathrm{P}\left(\left|\Pi(t+h)-\Pi(t)\right|=0\right)=1-e^{-\mu h}\to 0\ .$$

Значит процесс Пуассона непрерывен в каждой точке $t\ge 0$.

2. Аналогично получаем при $h\to 0$

$$\mathrm{P}\left(\frac{\left|\Pi(t+h)-\Pi(t)\right|}{h}>\varepsilon\right)=1-\mathrm{P}\left(\left|\Pi(t+h)-\Pi(t)\right|=0\right)=1-e^{-\mu h}\to 0\ .$$

44*. 1. По определению ковариационной функции процесса получаем

$$\mathrm{M}\left(\left|\xi(t')-\xi(t)\right|^2\right)=\mathrm{M}\left(\xi(t')\overline{\xi(t')}\right)-\mathrm{M}\left(\xi(t')\overline{\xi(t)}\right)-\mathrm{M}\left(\xi(t)\overline{\xi(t')}\right)+\mathrm{M}\left(\xi(t)\overline{\xi(t)}\right)=$$

$$=B_\xi(t',t')-B_\xi(t',t)-B_\xi(t,t')+B_\xi(t,t)\ .$$

Откуда вытекает требуемое.

2. Доказывается аналогично.

51*. Так как $\xi(t)=\eta$ для всех $t\in T$, то $\mathrm{M}(\xi(t))=\mathrm{M}(\eta)=a$ и $\mathrm{D}(\xi(t))=\sigma^2$. Ковариационная функция равна $B_\xi(t,s)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}=M\eta^2=\sigma^2+a^2$. Она не зависит от t и s, значит, процесс является стационарным в широком смысле. Кроме того, сам процесс не зависит от временного параметра, поэтому является стационарным.

63*. Пусть в момент времени $t+\Delta t$ система находится в состоянии E_n . Тогда в момент t система была либо в этом состоянии с вероятностью $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, либо в состоянии E_{n-1} с вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, либо в каком-то другом состоянии с вероятностью $o(\Delta t)$. По формуле полной вероятности имеем для $n\ge 1$:

$$p_n(t+\Delta t)=p_n(t)\left(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)+p_{n-1}(t)\left(\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)+o(\Delta t).$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу при $\Delta t \to 0$, получим для $n \geq 1$:

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t).$$

Аналогично при $n = 0$ имеем $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$.

В начальный момент времени система находилась в состоянии E_0, поэтому $p_0(0) = 1$ и $p_n(0) = 0$ для $n \geq 1$.

Решив полученную систему линейных дифференциальных уравнений, получим

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ К ГЛАВЕ 6

30*. В равенстве (2) § 1 главы 6 показано, что выборочные моменты A_{nk} k-го порядка являются несмещенными оценками для теоретических моментов $\alpha_k = \mathrm{M}\xi^k$ k-го порядка, $k = 1,\ 2,\ \dots$.

Далее, применяя теорему Хинчина о законе больших чисел (напомним, что элементы рассматриваемой выборки являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, k-е степени этих случайных величин также независимы и одинаково распределены), получим

$$A_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}X_i^k = \alpha_k,$$

т. е. A_{nk} являются состоятельными оценками для α_k, $k = 1,\ 2,\ \dots$. Из теоремы Колмогорова об усиленном законе больших чисел аналогично получим, что A_{nk} – сильно состоятельные оценки для α_k.

31*. Так как $\mathrm{M}(X_i - \overline{X}) = 0$ для любых $i = \overline{1,n}$, то

$$\mathrm{M}(X_i - \overline{X})^2 = \mathrm{D}(X_i - \overline{X}) = \mathrm{D}\left(X_i - \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\right) = \frac{n-1}{n}\mathrm{D}\xi,$$

поэтому

$$\mathrm{M}S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n-1}{n}\mathrm{D}\xi.$$

Полученная формула показывает, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой теоретической дисперсии. Однако смещение этой оценки

$$\mathrm{M}S^2 - \mathrm{D}\xi = -\frac{1}{n}\mathrm{D}\xi \to 0, \quad n \to \infty,$$

так что выборочная дисперсия асимптотически несмещенная. Кроме того, легко изменить величину S^2 так, чтобы она была несмещенной. Положим

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Очевидно, что S_{n-1}^2 – несмещенная оценка теоретической дисперсии.

32*. Найдем распределение случайной величины $\overline{X}$. Так как характеристическая функция распределения Коши имеет вид

$$f_\xi(t) = \exp\{i\theta t - |t|\},$$

то для характеристической функции $f_{\overline{X}}(t)$ величины $\overline{X}$ имеем

$$f_{\overline{X}}(t) = \left[f_\xi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \exp\{i\theta t - |t|\} = f_\xi(t).$$

Отсюда можно сделать вывод, что случайная величина $\overline{X} - \theta$ имеет распределение, не зависящее от n, т. е. оценка $\overline{X}$ не является состоятельной.

33*. Значение θ является медианой данного распределения, так как

$$\int_{-\infty}^{\theta} f(x,\ \theta)dx = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2},$$

и по теореме 3 § 1 главы 6 оценка $Z_{n,\frac{1}{2}}$ является сильно состоятельной оценкой для θ, причем величина

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{n}\left(Z_{n,\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)$$

асимптотически (0; 1) – нормальна.

34*. Найдем функцию вклада

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x};\theta)}{\partial\theta} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-\theta)}{1+(x_k-\theta)^2}.$$

Заметим, что случайные величины

$$\frac{(X_k-\theta)}{1+(X_k-\theta)^2}$$

имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, равные $\frac{1}{8}$. Отсюда мы получаем значение для количества информации Фишера

$$i_n(\theta) = \mathrm{M}_\theta\left(\frac{\partial \ln L(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{n}{2}.$$

35*. Плотность распределения наблюдаемой случайной величины ξ

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}I(x),$$

где $I(x)=1,$ если $x\geq 0$ и $I(x)=0,$ если $x<0$. Поэтому

$$L(\vec{x};\theta)=\frac{1}{\theta^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}x_k\right\}I(x_1)\cdots I(x_n).$$

Итак, функция правдоподобия $L(\vec{x};\theta)$ представлена в виде (1) (см. теорему 2 § 2 главы 6). Следовательно, статистика

$$T(X)=\sum_{k=1}^{n}X_k$$

в силу критерия факторизации является минимальной достаточной статистикой.

36*. Функция правдоподобия заданной случайной величины имеет вид

$$L(\vec{x};\theta)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\theta_2\right)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2-\frac{n(\overline{x}-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right\}$$

и по критерию факторизации статистика $T=(T_1,T_2),$ где

$$T_1(X)=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,\quad T_2(X)=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2,$$

является минимальной достаточной статистикой для $\theta=(\theta_1,\theta_2)$.

37*. Функция правдоподобия имеет вид

$$L(\vec{x};\theta_1;\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1\leq x_{(1)}\leq x_{(n)}\leq\theta_2;\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $x_{(1)}=\min\{x_1,\ \ldots,\ x_n\},\ x_{(n)}=\max\{x_1,\ldots,x_n\},$ т. е. пара $T_1(X)=X_{(1)}$ и $T_2(X)=X_{(n)}$ является минимальной достаточной статистикой в данном случае.

38*. Обозначим $T_n^*=6\left(T_n-\dfrac{n(n-1)}{4}\right)n^{-\frac{3}{2}}$. Тогда характеристическая функция

$$\mathrm{M}e^{itT_n^*}=\exp\left\{-\frac{3it(n-1)}{2\sqrt{n}}\right\}\Phi_n(e^{6itn^{-\frac{3}{2}}})=\exp\left\{-\frac{3it(n-1)}{2\sqrt{n}}\right\}\prod_{r=2}^{n}\left[1+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r-1}(e^{6itkn^{-\frac{3}{2}}}-1)\right].$$

При $|t|\leq c<\infty, n\to\infty$ и любом $k=1,\ldots,n$

$$\exp\left\{6itkn^{-\frac{3}{2}}\right\}-1=6itkn^{-\frac{3}{2}}-18t^2k^2n^{-3}+O\left(\frac{k^3}{n^{\frac{9}{2}}}\right).$$

Отсюда

$$\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r-1}(e^{6itkn^{-\frac{3}{2}}}-1)=\frac{3it(r-1)}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{3t^2(r-1)(2r-1)}{n^3}+O\left(\frac{r^3}{n^{\frac{9}{2}}}\right).$$

Переходя к логарифмам и используя формулу

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3), x\to 0,$$

получим

$$\ln \mathrm{M}e^{itT_n^*}=-\frac{3it(n-1)}{2\sqrt{n}}+\frac{3it}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{r=2}^{n}(r-1)-\frac{3t^2}{n^3}\sum_{r=2}^{n}(r-1)(2r-1)+\frac{9t^2}{2n^3}\sum_{r=2}^{n}(r-1)^2+\sum_{r=2}^{n}O\left(\frac{r^3}{n^{\frac{9}{2}}}\right)=$$

$$=-\frac{t^2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

39*. Характеристическая функция имеет вид

$$f\ (t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}dF\ (x)=\mathrm{M}e^{it\xi}.$$

В качестве оценки возьмем соответствующую эмпирическую характеристическую функцию

$$f_n(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}dF_n(x)\ .$$

Рассмотрим ее математическое ожидание

$$\mathrm{M}f_n(t)=\mathrm{M}\int_{\mathbb{R}}e^{itx}dF_n(x)=\mathrm{M}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{itX_j}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}e^{itX_j}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}e^{it\xi}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(t)=f(t)\ .$$

Данная оценка является несмещенной.

40*. Рассмотрим $Y_i\in N(0,\theta^2)$ такое, что $Y_i=X_i-\mu$, тогда

$$T_n(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|Y_i|,\ Y_i\in N(0,\theta^2).$$

Рассмотрим математическое ожидание

$$\mathrm{M}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|Y_i|\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2\int_0^{\infty}\frac{x}{\theta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\theta n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\theta t e^{-\frac{t^2}{2}}\theta dt=\frac{\theta}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\frac{2t}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{\theta}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}dt^2=\frac{\theta}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}d\left(-e^{-u}\right)=\frac{\theta}{n}n(-e^{-t}|_0^{\infty})=\theta.$$

Значит, оценка является несмещенной. Покажем теперь, что она состоятельна. Рассмотрим дисперсию $T_n(X)$:

$$\mathrm{D}T_n(X)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\mathrm{D}\,|\,X_1-\mu\,|=\frac{\pi-2}{2n}\theta^2.$$

Таким образом, дисперсия $T_n(X)$ есть бесконечно малая величина при $n\to\infty$. Применяя неравенство Чебышева, получим, что оценка состоятельная. Что и требовалось доказать.

41*. Имеем $F_{T_1}(x)=\mathrm{P}(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\le x)=\mathrm{P}(\max\{X_1,\ldots,X_n\}\le\frac{n}{n+1}x)=$

$$=\mathrm{P}(X_1\le\frac{n}{n+1}x)\cdots\mathrm{P}(X_n\le\frac{n}{n+1}x)=\left(F_R\left(\frac{n}{n+1}x\right)\right)^n,$$

где F_R – функция распределения равномерно распределенной на $[0,\theta]$ случайной величины $(R(0,\theta))$;

$$p_{T_1}(x)=n\left(F_R\left(\frac{n}{n+1}x\right)\right)^{n-1}\cdot p_R\left(\frac{n}{n+1}x\right)\frac{n}{n+1}=\frac{n^2}{n+1}\left(F_R\left(\frac{n}{n+1}x\right)\right)^{n-1}\cdot p_R\left(\frac{n}{n+1}x\right),$$

где $p_R(x)$ – плотность распределения равномерно распределенной на $[0,\theta]$ случайной величины. Известно, что

$$F_R(x)=0,\text{ если } x<0;\quad F_R(x)=\frac{x}{\theta},\text{ если } 0\le x\le\theta;\quad F_R(x)=1,\text{ если } x>\theta.$$

Поэтому

$$p_{T_1}(x)=\frac{n^2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta},\ 0\le x\le\frac{n+1}{n}\theta.$$

Тогда

$$\mathrm{M}T_1=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\frac{1}{\theta^n}\int_0^{\frac{n+1}{n}\theta}x^n dx=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\frac{1}{\theta^n}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{n+1}{n}\theta}=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\frac{1}{\theta^n}\frac{(\frac{n+1}{n}\theta)^{n+1}}{n+1}=\theta.$$

Значит, статистика T_1 является несмещенной. Найдем ее дисперсию:

$$\mathrm{M}T_1^2=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\frac{1}{\theta^n}\int_0^{\frac{n+1}{n}\theta}x^{n+1}dx=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\frac{1}{\theta^n}\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^{\frac{n+1}{n}\theta}=$$

$$=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\frac{1}{\theta^n}\frac{(n+1)^{n+2}\theta^{n+2}}{n^{n+2}(n+2)}=\frac{(n+1)^2\theta^2}{n(n+2)},$$

$$\mathrm{D}T_1=\frac{(n+1)^2\theta^2}{n(n+2)}-\theta^2=\theta^2\,\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{n(n+2)}=\frac{\theta^2}{n(n+2)};$$

$\mathrm{D}T_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, значит, оценка T_1 состоятельна.

Аналогично можно показать, что статистика T_2 является несмещенной оценкой параметра θ, и найти дисперсию T_2:

$$\mathrm{D}T_2=\frac{n}{n+2}\theta^2 .$$

Покажем, что оценка T_2 не является состоятельной. Так как

$$\mathrm{P}(X_{(1)}\le t)=1-(1-\frac{t}{\theta})^n,\ 0\le t\le\theta,$$

то

$$\mathrm{P}(|T_2-\theta|\le\varepsilon)=\mathrm{P}(\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\le X_{(1)}\le\frac{\theta+\varepsilon}{n+1})=$$

$$=\left(1-\frac{\theta-\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)^n-\left(1-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)^n\to e^{-(\theta-\varepsilon)/\theta}-e^{-(\theta+\varepsilon)/\theta}<1\,.$$

Это значит, что оценка T_2 не состоятельна. Далее очевидно, что $\mathrm{D}T_1<\mathrm{D}T_2$, следовательно, оценка T_1 точнее.

42*. Пусть случайная величина ξ имеет гамма-распределение с параметрами (a,λ), $a>0$, $\lambda>0$. Тогда ее плотность распределения имеет следующий вид:

$$p(x,a,\lambda)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^{\lambda-1}}{a^\lambda\Gamma(\lambda)}e^{-\frac{x}{a}}, & x\ge 0,\end{cases}$$

где $\Gamma(\lambda)=\int\limits_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx$ – гамма-функция.

Найдем характеристическую функцию случайной величины ξ. Используя формулу для вычисления характеристической функции абсолютно непрерывной случайной величины, получим

$$f_\xi(t)=\frac{1}{a^\lambda\Gamma(\lambda)}\int\limits_0^\infty x^{\lambda-1}e^{itx-\frac{x}{a}}dx.$$

Продифференцируем обе части этой формулы по t , а затем в правой части произведем интегрирование по частям и получим

$$f_\xi'(t) = \frac{1}{a^\lambda \Gamma(\lambda)} \int_0^\infty ix^\lambda e^{itx - \frac{x}{a}} dx = \frac{i\lambda}{a^\lambda \Gamma(\lambda)\left(\frac{1}{a} - it\right)} \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{itx-\frac{x}{a}} dx = \frac{i\lambda}{\frac{1}{a} - it} f_\xi\ (t).$$

Решая это дифференциальное уравнение и учитывая, что $f_\xi(0) = 1$, получим $f_\xi\ (t) = (1 - iat)^{-\lambda}$. Из вида характеристической функции легко получить следующее свойство гамма-распределения (иногда его называют *свойством воспроизводимости*): *сумма двух независимых случайных величин, имеющих гамма-распределение с параметрами* (a, λ_1) *и* (a, λ_2) *соответственно, имеет гамма-распределение с параметрами* $(a, \lambda_1 + \lambda_2)$. Для вычисления моментов $\mathrm{M}\xi^k$, $k = 1, 2, \ldots,$ используем формулу $f_\xi^{(k)}(0) = i^k \mathrm{M}\xi^k$. Тогда $\mathrm{M}\xi^k = a^k \lambda(\lambda + 1)\ldots(\lambda + k - 1)$, $k = 1, 2, \ldots$. Формула для моментов $\mathrm{M}\left(\chi_n^2\right)^k$ следует из этой формулы для моментов распределения $\Gamma(a, \lambda)$ при $a = 2$, $\lambda = \dfrac{n}{2}$ (см. равенство (3) § 3 главы 4). $\mathrm{M}\chi_n^2 = n$, $\mathrm{D}\chi_n^2 = 2n$.

Воспользуемся *свойством воспроизводимости* гамма-распределения для решения нашей задачи. Тогда $\chi_n^2 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковое распределение $\chi_1^2 = \Gamma(2, 1/2)$. Получим $\chi_n^2 = \Gamma(2, n/2)$. После применения центральной предельной теоремы получим, что случайная величина $\dfrac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

66*. Число исходов 10. При уровне значимости 0,05 критическая граница согласно таблице распределения χ^2 равна ${\chi^2}_{0,05;9} = 16{,}9$.

Находим значение статистики X_n^2, если $p_1 = \ldots = p_{10} = \dfrac{1}{10}$, по формуле

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i} = 9{,}37.$$

Далее, так как $X_n^2(h) = 9{,}37 < 16{,}9 = {\chi^2}_{0,05;9}$, то данные согласуются с гипотезой H_0 о случайности цифр.

Согласно таблице распределения χ^2 [12, с. 240] гипотеза H_0 отвергается при уровне значимости не меньше 0,5.

67*. Для $\mathscr{L}(\xi) = Bi(2, \theta)$ вероятности исходов имеют вид

$$p_1(\theta) = \mathrm{P}(\xi = 0) = (1 - \theta)^2, \quad p_2(\theta) = \mathrm{P}(\xi = 1) = 2\theta(1 - \theta),, \quad p_3(\theta) = \mathrm{P}(\xi = 2) = \theta^2.$$

Уравнение для нахождения оценки параметра θ таково [12, с. 114–116]:

$$\sum_{j=1}^{3} h_j p_j'(\theta) / p_j(\theta) = -\frac{2h_1}{1 - \theta} + \frac{1 - 2\theta}{\theta(1 - \theta)} h_2 + \frac{2h_3}{\theta} = 0.$$

А сама оценка $\hat{\theta}_n = (h_2 + 2h_3)/2n$.

В данном случае $h_1 = 476$, $h_2 = 1017$, $h_3 = 527$, $n = 2020$, поэтому $\hat{\theta}_n = 0{,}5126$. Далее имеем

$$X_n^2 = \sum_{j=1}^{3} (h_j - np_j(\hat{\theta}_n))^2 / (np_j(\hat{\theta}_n)) = 0{,}118.$$

Результат надо сравнить с $\chi^2_{\alpha;1}$. Поскольку $\chi^2_{0{,}05;1}$ = 3,84, то при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотеза не отвергается.

68*. Для начала посчитаем статистику критерия по формуле

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i} = 11{,}14.$$

Теперь сравниваем ее с критической границей $\chi^2_{0{,}05;2}$ = 5,99, которую берем из таблицы. Поскольку 11,14 > 5,99, то гипотеза H_0 отвергается.

69*. Для $\mathscr{L}(\xi) = Bi(2,\theta)$ вероятности исходов имеют вид

$$p_1(\theta) = \mathrm{P}(\xi = 0) = (1-\theta)^2, \quad p_2(\theta) = \mathrm{P}(\xi = 1) = 2\theta(1-\theta), \quad p_3(\theta) = \mathrm{P}(\xi = 2) = \theta^2.$$

Уравнение для нахождения оценки параметра θ таково [12, с. 114–116]:

$$\sum_{j=1}^{3} h_j p_j'(\theta) / p_j(\theta) = -\frac{2h_1}{1-\theta} + \frac{1-2\theta}{\theta(1-\theta)} h_2 + \frac{2h_3}{\theta} = 0 .$$

А сама оценка $\hat{\theta}_n = (h_2 + 2h_3)/2n$.

В данном случае $h_1 = 1810$, $h_2 = 181$, $h_3 = 9$, $n = 2000$, поэтому $\hat{\theta}_n = 0{,}04975$. Далее имеем:

$$X_n^2 = \sum_{j=1}^{3} (h_j - np_j(\hat{\theta}_n))^2 / (np_j(\hat{\theta}_n)) = 3{,}669.$$

Результат надо сравнить с $\chi^2_{\alpha;1}$. Поскольку $\chi^2_{0{,}05;1}$ = 3,84, то на уровне значимости 0,05 гипотеза не отвергается.

70*. Используем критерий согласия χ^2 для сложной гипотезы [12, с. 114–116]. В качестве оценки параметра θ выбираем выборочное среднее:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=0}^{10} ih_i}{2608} = 3{,}86733.$$

Вычисляем оценки вероятностей $\hat{p}_i = e^{-\hat{\theta}} \frac{\hat{\theta}^i}{i!}$, $i = 0, 1, \ldots, 10$ и значения статистики

$$X_n^2 = \sum_{i=0}^{10} \frac{(h_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 14,862.$$

Число степеней свободы $k = 9$. Поскольку $\chi^2_{0,05;9}$ = 16,9>14,862, гипотеза H_0 не отвергается.

71*. Применим критерий однородности χ^2. Статистика критерия

$$X_n^2 = n_1 n_2 \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\nu_{i1} + \nu_{i2}} (\nu_{i1}/n_1 - \nu_{i2}/n_2)^2 = 2,08 \quad (s = 4,\ k = 2),$$

критическая граница критерия $\chi^2_{\alpha,(s-1)(k-1)} = \chi^2_{0,05;3} = 7,82$. Таким образом, $X_n^2 < \chi^2_{0,05;3}$, гипотеза не отвергается.

72*. Имеем $X_n^2 = n(\sum_{ij} \frac{\nu_{ij}^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}} - 1) = 7,55$ < $\chi^2_{0,05;4} = 9,49$. Значит, гипотеза не отвергается.

73*. Выберем уровень значимости $\alpha = 0,005$.

Здесь значение статистики $X_n^2 = n(\sum_{ij} \frac{\nu_{ij}^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}} - 1)$ равно 1073,5, а $\chi^2_{0,005;6} = 18,6$, поэтому гипотезу H_0 о независимости этих признаков следует отклонить; вероятность ошибки при этом значительно меньше $\alpha = 0,005$.

74*. В нашем случае $X_n^2 = 29,7$. Так как $\chi^2_{0,005;1} = 7,9$, – гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

75*. Проверим гипотезу случайности. В данном случае число инверсий $T_0 = 0$. Вероятность получить такое значение при гипотезе H_0 равна $(8!)^{-1} = 0,25 \cdot 10^{-4}$. Следовательно, при любом разумном уровне значимости гипотеза H_0 отвергается.

76*. Границы интервалов находим из уравнений $1 - e^{-x_1} = 1/4$, $e^{-x_j} - e^{-x_{j+1}} = 1/4$, $j = 1,2$. Имеем $x_1 = 0,288$, $x_2 = 0,693$, $x_3 = 1,386$. При группировке по этим интервалам получаем вектор частот h = (9, 9, 17, 15). Статистика критерия

$$X_n^2 = \sum_{j=1}^{4} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i} = 4,08$$

меньше критической границы $\chi^2_{0,1;3} = 6,25$, т. е. гипотеза H_0 не отвергается.

80*. События $\{X_{(r)} \le x_1, X_{(s)} \le x_2\}$ и $\{\mu_n(x_1) \ge r, \mu_n(x_2) \ge s\}$ эквивалентны, поэтому $F_{r,s}(x_1, x_2) = \mathrm{P}(\mu_n(x_1) \ge r, \mu_n(x_2) \ge s)$. Пусть сначала $x_1 < x_2$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1 = \mu_n(x_1)$, $\nu_2 = \mu_n(x_2) - \mu_n(x_1)$, $\nu_3 = n - \mu_n(x_2)$. Тогда распределение случайного вектора (ν_1, ν_2, ν_3) будет полиномиальным с параметрами (n, p_1, p_2, p_3), т. е. $\mathscr{L}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = M(n, p_1, p_2, p_3)$, где $p_1 = F(x_1), p_2 = F(x_2) - F(x_1), p_3 = 1 - F(x_2)$.

Значит, $\mathrm{P}(\mu_n(x_1) \geq r, \mu_n(x_2) \geq s) = \sum \mathrm{P}(\nu_1 = m, \nu_2 = j)$, где суммирование производится по всем m и j, удовлетворяющим условиям $m \geq r$, $s \leq m + j \leq n$.

Так как

$$\mathrm{P}(\nu_1 = m, \nu_2 = j) = \frac{n!}{m!\, j!\, (n-m-j)!} p_1^m \, p_2^j \, p_3^{n-m-j},$$

после преобразований имеем:

$$F_{r,s}(x_1, x_2) = \sum_{m=r}^{n} \sum_{j=\max(0,\, s-m)}^{n-m} \frac{n!}{m!\, j!\, (n-m-j)!} F^m(x_1) \left(F(x_2) - F(x_1)\right)^j \left(1 - F(x_2)\right)^{n-m-j}$$

при $x_1 < x_2$.

Рассмотрим случай, когда $x_1 \geq x_2$. Событие $\{X_{(r)} \leq x_1, X_{(s)} \leq x_2\} = \{X_{(s)} \leq x_2\}$. Получим формулу для одномерной функции распределения: $F_r(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to \infty} F_{r,s}(x_1, x_2)$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Основные

Распределение	Обозначение	Параметры и область их изменения	Плотность распределения (дискретное распределение вероятностей)
Бернулли	$Bi(1, p)$	$0 \le p \le 1$	$p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$
Биномиальное	$Bi(N, p)$	N – натуральное число, $0 \le p \le 1$	$C_N^x p^x (1-p)^{N-x}, \quad x \in \{0, 1, \dots, N\}$
Отрицательное биномиальное	$\overline{Bi}(r, p)$	r – натуральное число, $0 \le p \le 1$	$C_{x+r-1}^x p^r (1-p)^x, \quad x \in \{0, 1, \dots\}$
Пуассона	$\Pi(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\lambda^x e^{-\lambda}/x!, \quad x \in \{0, 1, \dots\}$
Геометрическое	$G(p)$	$0 \le p \le 1$	$p(1-p)^x, \quad x \in \{0, 1, \dots\}$
Гипергеометрическое	$H(N, L, n)$	N, L, n – натуральные числа, $L < n$	$C_L^x C_{N-L}^{n-x} / C_N^n$, $x \in \{\max(0, n+L-N), \dots, \min(n, L)\}$
Одномерное нормальное (гауссовское)	$N(\mu, \sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}$
Логнормальное	$L(\mu, \sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\dfrac{(\ln(x/\mu))^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \ge 0$
Многомерное нормальное (гауссовское)	$N_N(\mu, \Sigma)$	$\mu = (\mu_i) \in \mathbb{R}^N$, $\Sigma = (\sigma_{ij}) = \Sigma^T$	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}N} \lvert\Sigma\rvert^{-\frac{1}{2}} \times$ $\times \exp\left\{\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right\}, x \in \mathbb{R}^N$
Равномерное	$R(a, b)$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\dfrac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$

вероятностные распределения

Характеристическая функция	Математическое ожидание	Мода	Дисперсия
$1+p(e^{it}-1)$	p	$U(p-1/2)$	$p(1-p)$
$(1+p(e^{it}-1))^N$	Np	$(N+1)p-0,5+\varepsilon$, $0\le\lvert\varepsilon\rvert\le 0,5$	$Np(1-p)$
$(p/(1-(1-p)e^{it}))^r$	$r(1-p)/p$	λ и $\lambda-1$, если λ – целое, иначе $[\lambda]$; $\lambda =$ $=(r-1)\times(1-p)/p$	$r(1-p)/p^2$
$\exp(\lambda(e^{it}-1))$	λ	λ и $\lambda-1$, если λ – целое, иначе $[\lambda]$	λ
$p/(1-(1-p)e^{it})$	$(1-p)/p$	0	$(1-p)/p^2$
$\sum\limits_{\max(0,n+L-N)}^{\min(n,L)} e^{itk}C_L^k C_{N-L}^{n-k}/C_N^n$	nL/N	–	$\dfrac{nL(N-L)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$\exp\left(it\mu-\dfrac{1}{2}t^2\sigma^2\right)$	μ	μ	σ^2
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(it)^k}{k!}\exp\left(k\ln\mu+\dfrac{k^2\sigma^2}{2}\right)$	$\mu\sqrt{\omega}$, где $\omega=e^{\sigma^2}$	μ/ω	$\mu^2\omega(\omega-1)$
$\exp(it^T\mu-t^T\Sigma t/2)$	μ	μ	ковариационная матрица Σ
$\dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{i(b-a)t}$	$\dfrac{a+b}{2}$	–	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Распределение	Обозначение	Параметры и область их изменения	Плотность распределения (дискретное распределение вероятностей)
Гамма-распределение	$\gamma(\alpha, \lambda)$	$\alpha, \lambda > 0$	$\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) / \Gamma(\alpha),\ x \ge 0$
Экспоненциальное	$\varepsilon(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x},\quad x > 0$
Коши	$K(a, b)$	$a \in \mathbb{R},\ \ b > 0$	$1/(\pi b(1 + ((x-a)/b)^2)),\ \ x \in \mathbb{R}$
Лапласа	$EE(a, \lambda)$	$a \in \mathbb{R}, \lambda > 0$	$\frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda \lvert x - a \rvert),\ x \in \mathbb{R}$
χ^2-распределение	χ^2_{υ}	υ – целое положительное число	$\frac{x^{\upsilon/2-1}\exp(-x/2)}{2^{\upsilon/2}\Gamma(\upsilon/2)},\quad x \ge 0$
t-распределение Стьюдента	t_{υ}	υ – целое положительное число	$\frac{\Gamma((\upsilon+1)/2)}{\sqrt{\pi\upsilon}\,\Gamma(\upsilon/2)}\left(1 + \frac{x^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}},\quad x \in \mathbb{R}$
F-распределение Фишера	F_{mn}	m, n – целые положительные числа	$m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}},\ x \ge 0$
Логистическое	$l(a,\sigma)$	$a \in \mathbb{R},\ \ \sigma > 0,$ $k = \sqrt{3}\sigma/\pi$	$\frac{\exp((x-a)/k)}{k(1+\exp((x-a)/k))^2},\quad x \in \mathbb{R}$
Вейбулла – Гнеденко	$W(\alpha,\lambda)$	$\alpha, \lambda > 0$	$\alpha\lambda x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha}),\ \ x \ge 0$
Бета-распределение	$\beta(\upsilon, \omega)$	$\upsilon,\ \ \omega > 0$	$\frac{\Gamma(\upsilon+\omega)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\omega)} x^{\upsilon-1}(1-x)^{\omega-1},\ \ 0 \le x \le 1$

Окончание прил. 1

Характеристическая функция	Математическое ожидание	Мода	Дисперсия
$(1-it/\lambda)^{-\alpha}$	α/λ	$(\alpha-1)/\lambda$, если $\lambda \geq 1$	α/λ^2
$(1-it/\lambda)^{-1}$	λ^{-1}	0	λ^{-2}
$\exp(ita-b\|t\|)$	не существует	a	не существует
$\lambda^2(t^2+\lambda^2)^{-1}e^{ita}$	a	a	$2\lambda^{-2}$
$(1-2it)^{-\upsilon/2}$	υ	$\upsilon-2$, если $\upsilon \geq 2$	2υ
$\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma((\upsilon+1)/2)\exp(-\sqrt{\upsilon}\|t\|)}{\Gamma(\upsilon/2)2^{2(n-1)}(n-1)!}\times$ $\times\sum_{k=0}^{n-1}(2k)!C_{n-1+k}^{2k}\times$ $\times(2\sqrt{\upsilon}\|t\|)^{n-1-k}$, если $n=(\upsilon+1)/2$ – целое	0, если $\upsilon>1$	0	$\upsilon/(\upsilon-2)$, если $\upsilon>2$
$\left(\dfrac{n}{m}\right)^{it/2}\left(\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\right)^{-1}\times$ $\times\Gamma\left(\dfrac{m+it}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-it}{2}\right)$	$\dfrac{n}{n-2}$, если $n>2$	$\dfrac{n}{n+2}\left(1-\dfrac{2}{m}\right)$, если $m>2$	$\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, если $n>4$
$e^{ita}\Gamma(1-itk)\Gamma(1+itk)$	a	a	σ^2
$\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(it)^k\Gamma(1+k/\alpha)}{k!\lambda^{k/\alpha}}$	$\lambda^{-1/\alpha}\times$ $\times\Gamma(1+\alpha^{-1})$	0, если $\alpha\leq 1$; $\left(\dfrac{1-1/\alpha}{\lambda}\right)^{1/\alpha}$	$\lambda^{-2/\alpha}(2\alpha^{-1}\Gamma(2\alpha^{-1})-$ $-\alpha^{-2}\Gamma^2(\alpha^{-1}))$
$\dfrac{\Gamma(\upsilon+\omega)}{\Gamma(\upsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(\upsilon+k)}{\Gamma(\upsilon+\omega+k)}\dfrac{it^k}{k!}$	$\dfrac{\upsilon}{\upsilon+\omega}$	$\dfrac{\upsilon-1}{\upsilon+\omega-2}$, если $\upsilon,\ \omega>1$	$\dfrac{\upsilon\omega}{(\upsilon+\omega)^2(\upsilon+\omega+1)}$

2. Значение интеграла Лапласа $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	703	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	531	554	577	599	621
1,1	643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	861	864	868	871	875	878	881	884	887	890
2,3	893	896	898	901	904	906	909	911	913	916
2,4	918	920	922	925	927	929	931	932	934	936
2,5	938	940	941	943	945	946	948	949	951	952
2,6	953	955	956	957	959	960	961	962	963	964
2,7	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974
2,8	974	975	976	977	977	978	979	979	980	981
2,9	981	982	982	983	984	984	985	985	985	986
3,0	987	987	987	988	988	989	989	989	990	990

3. Значения функции u_α

Функция u_α определяется равенством $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

α	0,001	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050
u_α	3,0902	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600	1,8808	1,8119	1,7507	1,6954	1,6449

4. Значения функции $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824

Окончание прил. 4

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

5. Значения функции $t_{\alpha,n}$

Функция $t_{\alpha,n}$ определяется равенством

$$P(\tau_n > t_{\alpha,n}) = \alpha,$$

где случайная величина τ_n имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы. Плотность распределения τ_n равна

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

n \ 2α	0,10	0,05	0,02	0,01
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,624	2,977
16	1,746	2,120	2,583	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

6. Значения функции $\chi^2_{\alpha,m}$

Функция $\chi^2_{\alpha,m}$ определяется равенством

$$P(\chi^2_m > \chi^2_{\alpha,m}) = \alpha,$$

где случайная величина χ^2_m имеет χ^2-распределение с m степенями свободы.

Плотность распределения χ^2_m равна

$$p_{\chi^2_m}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)2^{\frac{m}{2}}} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

m \ α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005
1	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9
2	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6
3	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8
4	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9
5	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3
6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3
8	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9
9	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6
10	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2
11	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8
12	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3
13	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8
14	21,1	23,7	26,9	29,1	31
15	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5
16	23,5	26,3	29,6	32,0	34
17	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5
18	26,0	28,9	32,3	34,8	37
19	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5
20	28,4	31,4	35,0	37,6	40
21	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5
22	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5
23	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0
24	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5
25	34,4	37,7	41,6	44,3	47

7. Латинский алфавит

Печатная буква	Название	Печатная буква	Название	Печатная буква	Название
A a	а	**J j**	йот (жи)	**S s**	эс
B b	бэ	**K k**	ка	**T t**	тэ
C c	цэ	**L l**	эль	**U u**	у
D d	дэ	**M m**	эм	**V v**	ве
E e	э	**N n**	эн	**W w**	дубль-ве
F f	эф	**O o**	о	**X x**	икс
G g	гэ	**P p**	пэ	**Y y**	игрек
H h	аш	**Q q**	ку	**Z z**	зэт
I i	и	**R r**	эр		

8. Греческий алфавит

Печатная буква	Название	Печатная буква	Название	Печатная буква	Название
Α α	альфа	**Ι ι**	йота	**Ρ ρ**	ро
Β β	бета	**Κ κ**	каппа	**Σ σ**	сигма
Γ γ	гамма	**Λ λ**	ламбда	**Τ τ**	тау
Δ δ	дельта	**Μ μ**	мю	**Υ υ**	ипсилон
Ε ε	эпсилон	**Ν ν**	ню	**Φ φ**	фи
Ζ ζ	дзэта	**Ξ ξ**	кси	**Χ χ**	хи
Η η	эта	**Ο ο**	омикрон	**Ψ ψ**	пси
Θ θ	тэта	**Π π**	пи	**Ω ω**	омега

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Антоневич, А. Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. Минск : БГУ, 2006.

2. *Бахтин, В. И.* Введение в прикладную статистику : курс лекций : в 2 ч. Ч. 1: Математическая статистика. Минск : БГУ, 2011; Ч. 2: Методы прикладной статистики / В. И. Бахтин. Минск : БГУ, 2012.

3. *Большев, Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. М. : Наука, 1965.

4. *Боровков, А. А.* Математическая статистика / А. А. Боровков. М. : Наука, 1984.

5. *Боровков, А. А.* Теория вероятностей / А. А. Боровков. М. : Наука, 1986.

6. *Вентцель, А. Д.* Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель. М. : Наука, 1978.

7. *Гихман, И. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. Киев : Вища школа, 1979.

8. *Гнеденко, Б. В.* Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. М. : Наука, 1988.

9. *Зубков, А. М.* Сборник задач по теории вероятностей / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. М. : Наука, 1989.

10. *Емельянов, Г. В.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г. В. Емельянов, В. П. Скитович. Л. : ЛГУ, 1967.

11. *Зуеў, М. М.* Тэорыя імавернасцей і матэматычная статыстыка / М. М. Зуеў, У. У. Сячко. Мазыр : Белы вецер, 2000.

12. *Ивченко, Г. И.* Математическая статистика / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. М. : Высш. шк., 1984.

13. *Ивченко, Г. И.* Сборник задач по математической статистике / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, А. В. Чистяков. М. : Высш. шк., 1989.

14. *Климов, Г. П.* Теория вероятностей и математическая статистика / Г. П. Климов. М. : МГУ, 1983.

15. *Козлов, М. В.* Введение в математическую статистику / М. В. Козлов, А. В. Прохоров. М. : МГУ, 1987.

16. *Колмогоров, А. Н.* Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. М. : Наука, 1974.

17. *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М. : Наука, 1972.

18. *Крамер, Г.* Стационарные случайные процессы, свойства выборочных функций и их приложения / Г. Крамер, М. Лидбеттер. М. : Мир, 1969.

19. *Лазакович, Н. В.* Теория вероятностей / Н. В. Лазакович, С. П. Сташулёнок, О. Л. Яблонский. Минск : БГУ, 2007.

20. *Лапо, П. М.* Задачы па тэорыі імавернасцей : вучэб. дапам. / П. М. Лапо, М. А. Маталыцкі. Мінск : Універсітэцкае, 1995.

21. *Леман, Э.* Проверка статистических гипотез / Э. Леман. М. : Наука, 1964.

22. *Липцер, Р. Ш.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы) / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. М. : Наука, 1974.

23. *Малинковский, Ю. В.* Теория вероятностей и математическая статистика : в 2 ч. Ч. 1: Теория вероятностей; Ч. 2: Математическая статистика / Ю. В. Малинковский. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.

24. *Мешалкин, Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей / Л. Д. Мешалкин. М. : МГУ, 1963.

25. *Прохоров, А. В.* Задачи по теории вероятностей / А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков. М. : Наука, 1986.

26. *Розанов, Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика / Ю. А. Розанов. М. : Наука, 1989.

27. *Севастьянов, Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики / Б. А. Севастьянов. М. : Наука, 1982.

28. Теория вероятностей: сборник задач / А. Я. Дороговцев [и др.]. Киев : Вища школа, 1980.

29. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. / В. М. Феллер. Мир, 1984.

30. *Харин, Ю. С.* Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика : учебник / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук . Минск : БГУ, 2011.

31. *Харин, Ю. С.* Сборник задач по теории вероятностей, случайных процессов и математической статистике / Ю. С. Харин, Г. А. Хацкевич, В. И. Лобач. Минск : БГУ, 1995.

32. *Хида, Т.* Броуновское движение / Т. Хида. М. : Наука, 1987.

33. *Чистяков, В. П.* Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. М. : Наука, 1987.

34. *Ширяев, А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. М. : Наука, 1989.

.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Лазакович Николай Викторович
Радыно Евгений Мефодьевич
Сташулёнок Сергей Павлович и др.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРАКТИКУМ

В двух частях
Часть 2

Учебное пособие

Редактор *Т. Н. Крюкова*
Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Художественный редактор *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Компьютерная верстка *А. А. Микулевича*
Корректор *О. С. Сафронова*

Подписано в печать 29.09.2014. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 11,0. Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 150 экз. Заказ 678.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.