# Д-во неравенств ММЛ.

① Д-ть, что ср. геом. н неотр. ч. не превосх. их ср. арифм.

n-fix

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}, \quad a_i \geqslant 0$$

Можно попробовать: все в одну часть и иссл. получ. ф. Соотв. на max или min

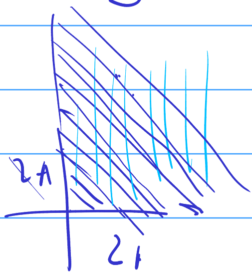
$a_1^{\frac{1}{n}} \cdot a_2^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a_n^{\frac{1}{n}}$

а) $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} = A \\ a_i \geqslant 0 \end{array} \right\} (\Omega)$

б) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{1}^{n} a_i}{n} \to \min \\ \sqrt[n]{\prod_{1}^{n} a_i} = B \\ a_i \geqslant 0 \end{array} \right\} (M)$ $\quad \prod_{1}^{n} a_i = B^n$

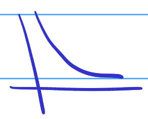
$n=2$: $a_1 + a_2 = 2A$

$\mathbb{R}^2$ $\quad a_{1,2} \geqslant 0$



$n=2$ $\quad \sqrt{a_1 a_2} = B$ $\quad a_i \geqslant 0$

$a_1 a_2 = B^2$



а) $\left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=1}^{n} a_i \to \max \\ \sum_{1}^{n} a_i = nA \\ a_i \geqslant 0 \end{array} \right\} (\Omega)$

б) $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{1}^{n} a_i \to \min \\ \prod_{1}^{n} a_i = B^n \\ a_i \geqslant 0 \end{array} \right\} (M)$

БОО: $A > 0$ $\qquad$ БОО б.о.: $B > 0$

$$\varphi'_{0\,a_1} = \frac{1}{n} \cdot a_1^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(\prod_{i=2}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \text{ для } a_1 > 0$$

Для д-ва н-ва дост-о 1-й з-чи

а) $\Omega$ — компакт.
⇓
дост. max и min

Д/з: решить з. а) и с ее пом. д-ть н-во

$\downarrow$

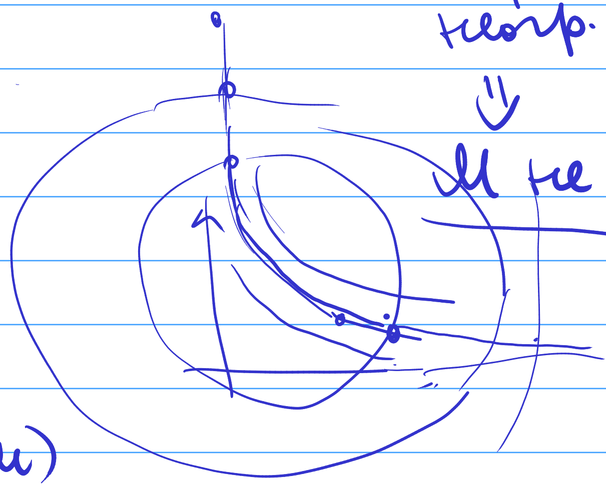
$(Bk, \frac{B}{k}, B, \ldots, B) \in M$

$k \to \infty$

неогр. п.

⇓

$M$ не огр.



$$\begin{cases} \varphi_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \to \min \\ \left.\begin{array}{l} \prod_{i=1}^{n} a_i = B^n \\ a_i \geqslant 0 \end{array}\right\} (M) \end{cases}$$

$x_k = (Bk, \frac{B}{k}, B, \ldots, B)$

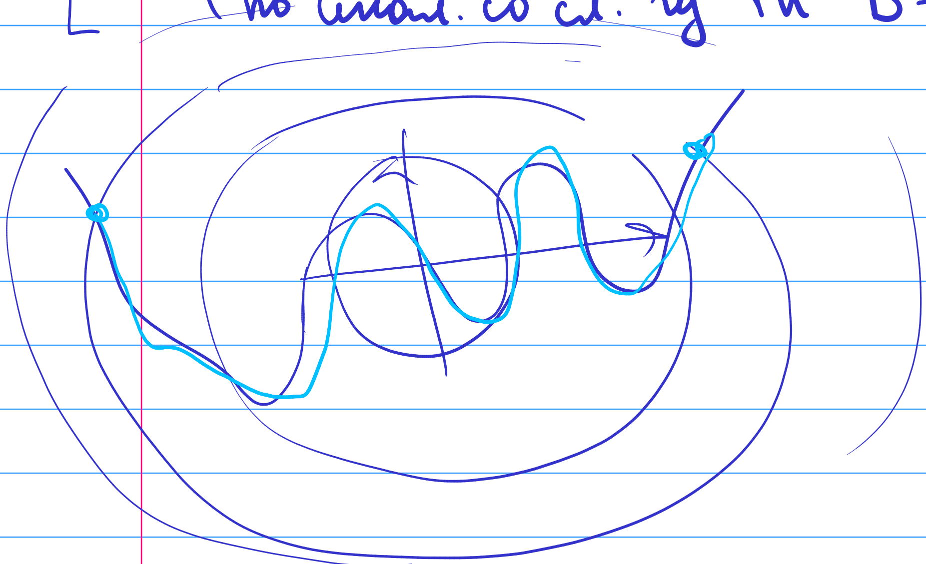
$\varphi_0(x_k) = Bk + \frac{B}{k} + (n-2)B \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$

Т.к. $\lim\limits_{\substack{a_i \to \infty \\ a \in M}} \varphi_0(a) = +\infty$ и $\varphi_0(a) \geqslant 0$ $\forall a \in M$

⇓

На $M$ $\varphi_0$ не дост. max, но дост. min (globmin) (по анал. со сл. из Th В-са)

Осмыслить!



$\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{array}{l} \lambda_0 \to \\ \lambda_1 \to \\ \lambda_{i+1} \to \\ \lambda_{i+1} \to \end{array} \begin{cases} \sum a_i \to \min \\ \left.\begin{array}{l} \prod a_i = B^n \\ a_i \geqslant 0, i = \overline{1,n} \end{array}\right\} (M) \\ (-a_i \leqslant 0 \end{cases}$$

$(M)$ — не огр., но замкн. а цел. ф. на $M$ огр. сн.

$$\mathcal{L}(a,\lambda) = \lambda_0\left(\sum_1^n a_i\right) + \lambda_1\left(\prod_1^n a_i - B^n\right) - \sum_{i=1}^n \lambda_{i+1} a_i$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{a_i} = \lambda_0 + \lambda_1 \prod\limits_{j\neq i} a_j - \lambda_{i+1} = 0 \\ \prod a_i = B^n \ (B>0) \Rightarrow a_i > 0 \quad \Rightarrow \\ \lambda_{i+1} a_i = 0 \\ a_i \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} a_i = 0 \\ a_i > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{i+1} = 0$$

а) $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ и $\lambda_{i+1} = 0$ — не подх.

б) $\lambda_0 \neq 0 \quad \lambda_0 = 1$

$$a_i \Big| \begin{cases} 1 + \lambda_1 \prod\limits_{j\neq i} a_j = 0 \quad \forall i = \overline{1,n} \\ \prod\limits_1^n a_i = B^n \\ a_i > 0 \end{cases}$$

к-т при равенстве

$$\begin{cases} a_i + \lambda_1 \prod\limits_{j\neq i}^n a_j = 0 \quad \forall i = \overline{1,n} \\ \prod a_i = B^n \\ a_i > 0 \end{cases} \qquad a_i = a_j = B$$

$(B, \dots, B) \in \text{glob min}\,(\delta)$

Подст. т. min в н-во:

$$B \geqslant B$$

Поск. в т. min н-во обращ-ся в верн. р-во, то во всех ост-х т. $\delta$ вып-ся треб. н-во.

Дз: ① П.а

② Осмыслить реш. ⑥

③ Д-ть н-во:

$$\left(\sum_1^n x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_1^n x_i^2\right)\left(\sum_1^n y_i^2\right)$$

④
$$\begin{cases} xy+yz \mapsto extr \\ x^2+y^2=2 \\ y+z=2 \\ (x, y, z>0) \end{cases}$$

⑤
$$\begin{cases} \sin x \sin y \sin z \mapsto extr \\ x+y+z=\pi/2 \\ (x, y, z>0) \end{cases}$$

⑥
$$\begin{cases} \sum_1^n \frac{\alpha_i}{x_i} \mapsto extr \\ \sum_1^n \beta_i x_i = 1 \\ x_i>0 \ (\alpha_i, \beta_i > 0) \end{cases}$$