ВДМК4 Лабораторные

13

Задача 1

Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке(центре тяжести тэтраэдра) и делятся в ней в отношении 3:1(считая от вершин). Докажите также, что в этой же точке пересекаются и делятся пополам отрезки, соединяющие середины противоположных ребер.

Решение:

Докажем, что любые две медианы тетраэдра пересекаются и делятся точкой пересечения в отношении $3:1$, считая от вершины. Отсюда будет следовать, что через точку, делящую одну из медиан тетраэдра в отношении $3:1$, считая от вершины, проходят остальные три медианы. Пусть M и N — точки пересечения медиан граней ABC и ABD тетраэдра $ABCD$, K — середина AB. Плоскость, проходящая через точки D, K и C, содержит точки M и N, причём стороны CK и DK треугольника DKC делятся этими точками в одном и том же отношении:

$CM:MK = DN:NK = 2:1.$

Из подобия треугольников KCD и KMN следует, что

$CD:MN = KC:KM = 3:1.$

Пусть отрезки DM и CN пересекаются в точке O. Так как $CM:MK = DN:NK$, то CD и MN параллельны. Из этого следует, что

$\angle DCN = \angle CNM, \angle MDC = \angle DMN.$

То есть, треугольники DOC и MON подобны. Из этого следует, что

$OD:OM = OC:ON = CD:MN = 3:1.$

Что и требовалось доказать.

Соединим середины ребер, лежащих в одной грани; получим, что каждый из отрезков будет средней линией соответствующего треугольника. Заметим, что:

$MN || AB, PQ || AB,$

поэтому

$MN || PQ, MQ || DC, NP || DC,$

так что,

$MQ || NP.$

Значит, 4-угольник $MNPQ$ — параллелограмм по определению, его диагонали QN и MP пересекаются в т.O и делятся ей пополам. Отрезки QN и MP соединяют середины противоположных ребер тетраэдра.

Повторяя проведенные выше рассуждения с другими гранями, заключаем, что RS и QN тоже пересекаются в точке O и делятся ей пополам.

Таким образом, все три отрезка: RS, QN, MP — пересекаются в т. O и делятся в ней пополам.

Утверждение доказано.

Последнее изменение: Четверг, 14 Октябрь 2021, 19:42