(1) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(27|x_{2i}|^3 + 125|x_{2i-1}|^3\right) \to extr \\ \sum_{i=1}^{n} \left(9x_{2i}^2 + 25x_{2i-1}^2\right) = 16 \end{cases}$$

$y_{2i} = 3|x_{2i}|$, $y_{2i-1} = 5|x_{2i-1}|$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{2n} y_j^3 \to extr \\ \sum_{j=1}^{2n} y_j^2 = 16 \\ y_j \geq 0, \ j=\overline{1,2n} \end{cases}$$

(2) $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{1} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{1} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

$\tilde{x}_i \geq 0$ $\tilde{y}_i \geq 0$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$

$(\pm\tilde{x}_1, \dots, \pm\tilde{x}_n)$

Д-ть н-во можно для $x_i, y_i \geq 0$

$|x_i| = a_i \geq 0$ $|y_i| = b_i \geq 0$

I сп Рассм. (b_i) — как в-р н-в . Д-ем: $\forall b$
$\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \geq 0$

н-во вып-ся при $\forall (a_1, \dots, a_n)$

fix произв. $b \geq 0$ и д-ем;

$$\sum_{1}^{n} a_i b_i \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}}_{} \overbrace{\left(\sum b_i^q\right)^{1/q}}^{B}, \ \forall a, b \geq 0$$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| A \quad\quad\quad\quad \|b\| - fix$ z.

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} a_i b_i \to max \\ \sum_{1}^{n} a_i^p = A^p \end{cases}$$

БОО: $A > 0$

$\{ a_i \geq 0, i=\overline{1,n} \}$ – комп. $\Rightarrow \exists$ max и min

$$\mathcal{L}(a,\lambda) = \lambda_0 \left(\sum_1^n a_i b_i \right) + \lambda_1 \left(\sum_1^n a_i^p - A^p \right) - \sum_1^n \lambda_{i+1} a_i$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{a_i} = \lambda_0 b_i + \lambda_1 \cdot p\, a_i^{p-1} - \lambda_{i+1} = 0, \quad i=\overline{1,n} \\ \sum a_i^p = A^p \\ \left.\begin{matrix} \lambda_{i+1} a_i = 0 \\ a_i \geq 0 \end{matrix}\right\} i=\overline{1,n} \end{cases}$$

а) $\lambda_0 = 0$ $\quad \begin{cases} \lambda_1 \cdot p\, a_i^{p-1} = \lambda_{i+1} & \forall i=\overline{1,n} \quad ?! \\ \lambda_{i+1} a_i = 0 \end{cases}$

б) $\lambda_0 \neq 0$ $\quad \lambda_0 = p$

$$\begin{cases} b_i + \lambda_1 a_i^{p-1} - \dfrac{\lambda_{i+1}}{p} = 0, \quad i=\overline{1,n} \\ \sum a_i^p = A^p \\ \left.\begin{matrix} \lambda_{i+1} a_i = 0 \\ a_i \geq 0 \end{matrix}\right\} i=\overline{1,n} \end{cases}$$

Пусть реш. им. $k \neq 0$ к-т

БОО – $a_i \neq 0 \ \forall i=\overline{1,k} \Rightarrow \lambda_{i+1} = 0, \ i=\overline{1,k}$

$$\begin{cases} b_i = -\lambda_1 a_i^{p-1}, \ i=\overline{1,k} \quad (\lambda_{i+1}=0) \\ \lambda_{i+1} = p \cdot b_i, \ i=\overline{k+1,n} \quad (a_i = 0) \end{cases}$$

Если $\exists \ \lambda_{i+1} \neq 0 \Rightarrow b_i > 0 \Rightarrow \lambda_{i+1} > 0$
$\Downarrow$
стац. т. в этом сл. м.б. только min

Усл. соп. дополн.

А т. max м.б. только та точка у кот. $\lambda_{i+1} = 0 \Rightarrow a_i \geq 0$

Если $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ получ. т., подозрит. на min
$\Downarrow$
Н/р-во: $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_{i+1} = 0$

$$\forall i: \; b_i + \lambda_1 a_i^{p-1} = 0 \Rightarrow$$

$$a_i^{p-1} = -\frac{b_i}{\lambda_1}$$

$$a_i = \left(-\frac{b_i}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p-1}} = b_i^{\frac{1}{p-1}} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\sum_1^n \left(-\frac{b_i}{\lambda_1}\right)^{\frac{p}{(p-1)}} = A^p$$

$(p-1)p$

$$\left(\left(\frac{1}{-\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^p \sum_1^n b_i^{\frac{p}{p-1}} = A^p$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$$

$$q = \frac{p}{p-1}$$

$$\left(\frac{1}{-\lambda_1}\right)^{p-1} = \frac{A}{\left(\sum b_i^q\right)^{1/p}}$$

$$a_i^* = \frac{A \cdot b_i^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum b_j^q\right)^{1/p}} \text{ — } \underline{\text{т. max}}$$

$$\sum_1^n a_i^* b_i = \sum_1^n \frac{A \cdot b_i^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum b_j^q\right)^{1/p}} \cdot b_i = \frac{A}{\left(\sum b_j^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{p-1}+1} =$$

$$= \frac{A}{\left(\sum_1^n b_j^q\right)^{1/p}} \cdot \sum_1^n b_j^q = A\left(\sum b_j^q\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

"q"

$\Downarrow$

в т. max получ. верное р-во

II сп. $\begin{cases} \sum a_i b_i \to \max \\ \sum a_i^p = A^p \\ \sum b_j^q = B^q \\ a_i, b_j \geqslant 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}(a, b, \lambda) = \lambda_0 \left(\sum a_i b_i\right) + \lambda_1 \left(\sum a_i^p - A^p\right) +$$
$$+ \lambda_2 \left(\sum b_j^q - B^q\right) - \sum_1^n \lambda_{2+i} a_i - \sum_1^n \lambda_{2+n+j} b_j$$

$\mathcal{L}'_{a_i} =$

$\mathcal{L}'_{b_i} =$