1. Построение контингентного множества (конуса) к множеству $\Omega = \{x^0 \in \mathbb{R}^k; \{x_n \in \mathbb{R}^k\}, n = 1 \dots \infty\}$.

Множество Ω состоит из последовательности точек x_n и предельной точки x^0. Т.е. $x^0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. (Проверить!).

По определению вектор $h \in K(x^*, \Omega)$, если $\exists x_n \to x^*$ и $\exists t_n \searrow 0$, такие что $h = \lim_{n\to\infty} (x_n - x^*)/t_n$.

Каждая точка x_n из последовательности является изолированной, и, следовательно, такого предела не существует. $K(x_n, \Omega) = \{0\}$.

Для точки x^0нужно правильно подобрать последовательность $t_n \searrow 0$, <u>чтобы для каждой координаты вектора</u> h_i <u>предел</u> $h_i = \lim_{n\to\infty} (x_n - x^0)_i / t_n$ <u>был конечным и при этом хотя бы одна координата</u> h_i <u>была бы ненулевой</u>.

Как правило, в качестве t_n выбирается последовательность из той координаты h_i, которая стремится к нулю медленнее всех остальных. Например, для набора $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{n^2}{2+n^3}, \frac{\sqrt{n}}{3n+2}\right)$ в качестве t_n следует выбрать $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

При вычислении предела для раскрытия неопределённостей можно пользоваться правилом Лопиталя, заменяя t_n непрерывной переменной $t \to 0$.

В крайнем случае, когда не удаётся понять, как выбрать t_n можно положить $t_n = \|x_n - x^0\| = \sum|(x_n - x^0)_i|$. Возни больше, но получается гарантированный вектор h с $\|h\| = 1$.

Поскольку вместе с полученным вектором h множеству $K(x^0, \Omega)$ принадлежит любой вектор λh при $\lambda > 0$, то в ответ записываем $K(x^0, \Omega) = \{(\lambda h_1, \dots, \lambda h_k), \lambda > 0\}$.

2. Исследование на дифференцируемость в точке функции $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

При исследовании на дифференцируемость $f(x_1, \dots, x_n)$ в точке $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ надо дать ответ на два вопроса: дифференцируема ли она по Лагранжу и по Фреше (производная по Гато для $\mathbb{R}^n$ совпадает и существует одновременно с производной по Фреше). ***Производная по Лагранжу*** *(вариация) $\delta f(x^0|h)$ вычисляется для произвольного вектора $h \in \mathbb{R}^n$ по определению:* $\boxed{\delta f(x^0|h) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x^0 + th) - f(x^0)\right)}$.

- *Если этого предела не существует хотя бы при одном из значений $h \neq 0$, то $f(x_1, \dots, x_n)$ не дифференцируема по Лагранжу в точке x^0. И следовательно, не дифференцируема по Гато и по Фреше.*

  (!!) *Пределы вида* $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}|th_i|$ *и* $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\max\{th_j\}$ *НЕ СУЩЕСТВУЮТ, поскольку* $t \to 0$ *и слева, и справа.*

- *Если предел существует для всех $h \in \mathbb{R}^n$, то функция дифференцируема по Лагранжу и можно переходить к исследованию дифференцируемости по Фреше.*

Функция f ***дифференцируема по Фреше*** *в $\mathbb{R}^n$ (существует $f'(x^0|h)$), если производная по Лагранжу линейна.*

- *Если $\delta f(x^0|h)$ имеет вид $\delta f(x^0|h) = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n$, то она линейна.*
- *Если в представлении $\delta f(x^0|h)$ присутствуют нелинейные слагаемые: $|h_i|$, $\max\{h_j\}$, h_j^2 и т.п., то нужно показать, что она не линейна. Для этого выбираются векторы h_1, h_2, $h_3 = h_1 + h_2$, для которых $\delta f(x^0|h_3) \neq \delta f(x^0|h_1) + \delta f(x^0|h_2)$. Подбирать векторы h_i следует так, чтобы срабатывало именно нелинейное слагаемое. Из отсутствия линейности следует недифференцируемость по Фреше и по Гато.*

3. Исследование на дифференцируемость в точке функционала $f: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Схема исследования похожа на конечномерную схему, но вопроса теперь три: дифференцируем ли функционал по Лагранжу, по Гато и по Фреше. Определение производной по Лагранжу $\delta f(x^0(\cdot)|h(t))$ – то же, что и в п. 2, только $x^0(t)$ и $h(t)$ теперь – функции из $C[a,b]$. $\boxed{\delta f(x^0(\cdot)|h(t)) \coloneqq \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(f(x^0(t) + sh(t)) - f(x^0(t))\right)}$.

Один из базовых приёмов – ***дифференцирование композиции:*** *если $f(x(\cdot)) = F\left(G(x(\cdot))\right)$, где F – дифференцируема по Фреше в точке $G(x^0(t))$, а G дифференцируема в любом из трёх смыслов в точке $x^0(t)$, то*

$\boxed{\delta f(x^0(\cdot)|h(t)) = F'(G(x^0(t))) \cdot \delta G(x^0(\cdot)|h(t))}$. *Этот приём позволяет вычислять производные функционалов вида $g^n(x(t))$, $e^{g(x(t))}$, $sin(g(x(t)))$ их вариации в точке $x^0(t)$ соответственно равны $ng^{n-1}(x^0(t)) \cdot \delta g(x^0(\cdot)|h(t))$, $e^{g(x^0(t))} \cdot \delta g(x^0(\cdot)|h(t))$, $cos(g(x^0(t))) \cdot \delta g(x^0(\cdot)|h(t))$. При этом тип дифференцируемости исходного функционала зависит от типа дифференцируемости функционала g.*

Важно знать. ***<u>При дифференцировании линейного функционала</u>*** *<u>его вариация на любом $h(t)$ совпадает со значением функционала на этом элементе</u>: $\delta l(x^0(\cdot)|h(t)) = l(h(t))$. Линейность функционала $l(x(\cdot))$ означает, что $l(ax(t) + by(t)) = al(x(t)) + bl(y(t))$. Примеры линейных функционалов:*

$l(x(t)) =$	$x(a)$	$3x(a) + 2x(b)$	$\int_a^b g(t)x(t)dt$	$\int_a^b p(t)x(t) + q(t)\dot{x}(t)dt$
$\delta l(x(t)\|h(t)) =$	$h(a)$	$3h(a) + 2h(b)$	$\int_a^b g(t)h(t)dt$	$\int_a^b p(t)h(t) + q(t)\dot{h}(t)dt$

Ещё один приём – ***дифференцирование интегрального функционала****. Выполняется последующей формуле. Если $f(x(\cdot)) = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$, то $\delta f(x^0(\cdot)|h(t)) = \int_a^b F_x{}'(t, x^0(t), \dot{x}^0(t)) \cdot h(t) + F_{\dot{x}}{}'(t, x^0(t), \dot{x}^0(t)) \cdot \dot{h}(t)dt$.*

Все решения задач на дифференцирование функционалов на $C[a,b]$ сводятся к использованию перечисленных трёх приёмов + использование определения (в тех случаях, когда непонятно, как действовать).