В.Ю.Протасов, мех-мат МГУ, 2020

II. Дифференцирование в нормированных пространствах. Производные Гато и Фреше. Производные высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функций. Необходимое условие локального минимума. Уравнения Эйлера-Лагранжа

1. Дифференцирование в нормированных пространствах

Определение 1 *Пусть* X, Y *– нормированные пространства,* $G \subset X$*,* $x \in \operatorname{int} G$*,* $h \in X$*. Вариацией по Лагранжу отображения* $F : G \to Y$ *в точке* x *по направлению* h *называется предел* $\delta_F(x,h) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t}$.

Отображение называется *дифференцируемым по Лагранжу* в точке x, если вариация по Лагранжу в данной точке существует по любому направлению $h \in X$. Следующая теорема является обобщением теоремы Ферма на нормированные пространства.

Теорема 1 *(Теорема Ферма для нормированных пространств). Если* $x \in \operatorname{int} G \subset X$ *– точка локального минимума функции* $f : G \to \mathbb{R}$*, и функция* f *дифференцируема по Лагранжу в этой точке, то* $\delta_f(x,h) = 0$ *для любого* $h \in X$*.*

Доказательство. Для любого h рассмотрим функцию $F_h(t) = f(x + th)$. Так как $0 \in \operatorname{locmin} F_h$, то $F_h'(0) = 0$. Остаётся заметить, что $F_h'(0) = \delta_F(x,h)$. □

Теперь мы можем обобщить два главных свойства выпуклых функций на произвольные нормированные пространства. Лемма 1.2 не меняется вовсе, ни формулировка ни доказательство: *для выпуклой задачи каждый локальный минимум является её абсолютным минимумом.* Лемма 1.3 теперь переформулируется так:

Предложение 1 *Если задача выпукла, функция* f *дифференцируема по Лагранжу в точке* $x \in \operatorname{int} G$ *и* $\delta_f(x,h) = 0$ *для всех* $h \in X$*, то эта точка даёт абсолютный минимум.*

Доказательство. Предположим, что существует точка $y \in G$, для которой $f(y) < f(x)$. Проведем прямую через точки x и y: $\{ x + th \mid t \in \mathbb{R} \}$, где $h = y - x$. Ограничение функции f на эту прямую является выпуклой функцией одной переменной, её производная в точке x равна $\delta_f(x,h) = 0$, следовательно (лемма 1.3), абсолютный минимум этой функции на прямой достигается в точке x, а значит $f(y) \geq f(x)$.

□

Определение 2 *Отображение $F: G \to Y$, где $G \subset X$, называется дифференцируемым по Гато в точке $x \in \operatorname{int} G$, если оно дифференцируемо по Лагранжу в этой точке и существует линейный непрерывный оператор $A: X \to Y$ такой, что $\delta_F(x,h) = Ah$. Оператор A называется производной по Гато отображения F в точке x.*

Следствие 1 *В условиях теоремы 1 функция f дифференцируема по Гато в точке x, и производная по Гато равна нулю.*

Определение 3 *Отображение $F: G \to Y$, где $G \subset X$, называется дифференцируемым по Фреше в точке $x \in \operatorname{int} G$, если существует линейный непрерывный оператор $A: X \to Y$ такой, что $F(x+h) = F(x) + Ah + o(h)$, $h \to 0$, $h \in X$. Оператор A называется производной по Фреше отображения F в точке x и обозначается $A = F'(x)$.*

Таким образом, $F(x+h) = F(x) + F'(x)[h] + o(h)$, $h \to 0$. Из этого следует, что функция, дифференцируемая по Фреше в точке x, непрерывна в x. Для дифференцируемости по Гато это может не выполняться (пример 2). Заметим, что производная по Фреше, если существует, однозначно определена. В противном случае, если найдутся два оператора A_1, A_2, для которых выполнено соотношение $F(x+h) = F(x) + A_i[h] + o(h)$, $h \to 0$, $i = 1,2$, то, вычитая, получим, $(A_1 - A_2)[h] = o(h)$, $h \to 0$. Последнее означает, что $A_1 = A_2$. Иначе было бы $(A_1 - A_2)[\tilde{h}] \neq 0$ для некоторого $\tilde{h} \in X$, и тогда $t\,(A_1 - A_2)[\tilde{h}] = (A_1 - A_2)[t\tilde{h}] = o(t)$, $t \to 0$, что невозможно.

Как связана производная по Фреше с вариацией по Лагранжу ? Имеем

$$\delta_F(x,h) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F'(x)[th] + o(th)}{t} = F'(x)[h].$$

Следовательно, отображение, дифференцируемое по Фреше, дифференцируемо и по Лагранжу. Более того, так как ого вариация по Лагранжу равна $\delta_F(x,h) = Ah$, где $A = F'(x)$, то приходим к выводу, что отображение, дифференцируемое по Фреше, дифференцируемо и по Гато (с той же производной). Итак,

Фреше $\Rightarrow$ Гато $\Rightarrow$ Лагранж

Обратные импликации не выполняются, как показывают следующие примеры:

Пример 1 Функция $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданная формулой $F(x_1,x_2) = \left(x_1^2 x_2\right)^{1/3}$, дифференцируема по Лагранжу в точке $x = (0,0)$: $\delta_F(x,h) = \left(h_1^2 h_2\right)^{1/3}$. Если $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$, то $\delta_F(x,e_1) = \delta_F(x,e_2) = 0$. Однако, $\delta_F(x,e_1+e_2) = 1$. Если отображение дифференцируемо по Гато, то $\delta_F(x,h)$ линейно зависит от h. Значит, должно выполняться $\delta_F(x,e_1+e_2) = \delta_F(x,e_1) + \delta_F(x,e_2)$, что неверно. Поэтому F не дифференцируемо по Гато.

Пример 2 Функция $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x_2 = x_1^2,\ x_1 \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

дифференцируема по Лагранжу в точке $x = (0, 0)$: $\delta_F(x, h) = 0$ для любого $h \in \mathbb{R}^2$. Значит, она дифференцируема и по Гато, её производная по Гато равна 0. Но по Фреше она не дифференцируема, так как она разрывна в точке x.

Класс функций, дифференцируемых по Фреше в точке x обозначим $\mathcal{D}(x)$, а дифференцируемых в каждой точке области G – через $\mathcal{D}(G)$. Далее, если не оговорено обратное, под дифференцируемыми функциями мы будем понимать именно дифференцируемые по Фреше.

Всплески применяются в инженерных задачах теории обработки информации, при численном решении дифференциальных уравнений, в некоторых теоретических задачах теории приближений и теории функций. Наиболее популярной системой для разложений функций в L_2 всегда была тригонометрическая система Фурье $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Однако, одна имеет ряд существенных недостатков: 1) она рассчитана на периодические функции; 2) она не локализована, т.е. функции этой системы не убывают при $t \to \infty$. С первым недостатком люди давно научились справляться с помощью разного рада периодизаций, и т.д. Второй оказался куда более сложным. Прежде, чем решать эту проблему, мы строго ее сформулируем.

2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера-Лагранжа.

Простейшей задачей вариационного исчисления называется следующая задача:

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) \;=\; \int\limits_{t_0}^{t_1} L\left(t, x, \dot{x}\right) dt \;\to\; \min\,, \\[2em] x \,\in\, C^1\left(\, [t_0, t_1]\,,\, \mathbb{R}^n \,\right), \\ x(t_0) \,=\, x_0\,, \quad x(t_1) \,=\, x_1\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$ – непрерывно-дифференцируемая вектор-функция из отрезка $[t_0, t_1]$ в $\mathbb{R}^n$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ – заданные точки (граничные условия), $L \in C\left(\, [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,,\, \mathbb{R}\,\right)$ – заданная функция, называемая *интегрантом.* Таким образом, среди всех непрерывно-дифференцируемых функций, принимающих данные значения на концах отрезка, найти такую, которая доставляет минимум интегральному функционалу $\mathcal{J}(x)$. Функции $x \in C^1\left(\, [t_0, t_1]\,,\, \mathbb{R}^n \,\right)$, удовлетворяющие данным граничным условиям, будем называть *допустимыми.*

Определение 4 *Допустимая функция $\hat{x} \in C^1\left(\, [t_0, t_1]\,,\, \mathbb{R}^n \,\right)$ доставляет слабый локальный минимум в задаче (1), если существует $\varepsilon > 0$ такой, что $\mathcal{J}(x) \;\ge\; \mathcal{J}(\hat{x})$ для любой допустимой функции x, удовлетворяющей условию $\big\|x - \hat{x}\big\|_{C^1[t_0,t_1]} < \varepsilon$.*

Термин *слабый* относится к метрике пространства C^1, которая определяет окрестность для данного локального минимума. Таким образом, точка $\hat{x}$ доставляет слабый локальный минимум, если для всех допустимых x, расположенных достаточно близко от $\bar{x}$ в метрике пространства C^1, имеем $\mathcal{J}(x) \ \ge \ \mathcal{J}(\hat{x})$. Следующая теорема даёт необходимые условия слабого локального минимума.

Теорема 2 *Предположим, что в задаче (1) функции* L, L_x *и* $L_{\dot{x}}$ *непрерывны. Если функция* $\hat{x}$ *доставляет слабый локальный минимум, то выполнено уравнение Эйлера-Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\, L_{\,\dot{x}}\,(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \quad = \quad L_{\,x}\,(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})\,. \tag{2}$$

Любое решение $\hat{x}(t)$ уравнения (2) называется *экстремалью.* Уравнение (2) является фактически системой из n уравнений $\frac{d}{dt} L_{\,\dot{x}_i} \ = \ L_{\,x_i}\,,\ i = 1, \ldots, n$. Таким образом, для поиска экстремали имеется система из n дифференциальных уравнений второго порядка и $2n$ граничных условий $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ (т.е., $x_i(t_0) = x_{0i}, x_i(t_1) = x_{1i}\ \ i = 1, \ldots, n$). Согласно теореме 2 любая функция, доставляющая слабый локальный минимум, является экстремалью. Но, вообще говоря, не наоборот. Мы докажем теорему 2 в случае $n = 1$. Многомерный случай полностью аналогичен, мы оставляем его читателю. Доказательство состоит из двух лемм. Пространство функций из $C^1[t_0, t_1]$, удовлетворяющих условию $h(t_0) = h(t_1) = 0$ будем обозначать $C^1_0[t_0, t_1]$ или просто C^1_0.

Лемма 1 *Если функции* L, L_x *и* $L_{\dot{x}}$ *непрерывны, то для любой функции* $h \in C^1_0[t_0, t_1]$ *имеем*

$$\delta_{\mathcal{J}}\,\bigl(x, h\bigr) \quad = \quad \int_{t_0}^{t_1} \Bigl(\, L_{\,x}\, h \,+\, L_{\,\dot{x}}\, \dot{h} \Bigr)\, dt\,.$$

`Доказательство.` Так как частные производные L_x и $L_{\dot{x}}$ непрерывны, то функция $\varphi(\lambda) = L(t, x + \lambda h, \dot{x} + \lambda\dot{h})$ дифференцируема по λ. Пользуясь правилом дифференцирования функции многих переменных и дифференцированием интеграла по параметру, имеем

$$\delta_{\mathcal{J}}\,\bigl(x, h\bigr) \,=\, \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{J}(x + \lambda h) - \mathcal{J}(x)}{\lambda} \;\;=\; \int_{t_0}^{t_1} \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{L(t, x + \lambda h, \dot{x} + \lambda \dot{h}) \,-\, L(t, x, \dot{x})}{\lambda} \right) dt \;=$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\lambda}\, L(t, x + \lambda h, \dot{x} + \lambda \dot{h}) \Big|_{\lambda = 0} dt \quad = \quad \int_{t_0}^{t_1} \Bigl(\, L_{\,x}\, h \,+\, L_{\,\dot{x}}\, \dot{h} \Bigr)\, dt\,.$$

□

Лемма 2 *(Дюбуа-Реймона). Пусть* $a(t), b(t) \ \in \ C\,[t_0, t_1]$ *и для любой функции* $h \in C^1_0[t_0, t_1]$ *имеем*

$$\int_{t_0}^{t_1} \Bigl(\, a(t)\, h(t) \,+\, b(t)\, \dot{h}(t) \Bigr)\, dt \;=\; 0\,.$$

Тогда функция $b(t)$ *непрерывно дифференцируема и* $b'(t) \,=\, a(t)$.

`Доказательство.` Пусть $A(t)$ – любая первообразная функции $a(t)$, т.е., $A(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau + K$. Интегрируя по частям, имеем

$$0 \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \Big(a(t)\, h(t) \,+\, b(t)\, \dot h(t) \Big)\, dt \;=\; A(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Big(-A(t) \,+\, b(t) \Big)\, \dot h(t)\; dt\,.$$

Теперь учитываем, что $h(t_0) \;=\; h(t_1) \;=\; 0$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(-A(t) \,+\, b(t) \Big)\, \dot h(t)\; dt \quad = \quad 0\,.$$

Это равенство выполнено для любой функции $h \in C_0^1[t_0, t_1]$. Выберем теперь нужную функцию h. Для этого подберем константу K таким образом, чтобы интеграл функции $-A(t) \,+\, b(t)$ по отрезку $[t_0, t_1]$ был равен нулю. Тогда функция $h(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} \big(-A(\tau) \,+\, b(\tau) \big)\, d\tau$ принадлежит $C_0^1[t_0, t_1]$, и при этом

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(-A(t) \,+\, b(t) \Big)\, \dot h(t)\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \Big(-A(t) \,+\, b(t) \Big)^2 dt \;=\; 0\,.$$

Следовательно, $b(t) \;\equiv\; A(t)$. Поэтому $b \in C^1[t_0, t_1]$ и $b'(t) \;=\; a(t)$.

□

`Доказательство теоремы 2.` Если $\bar x$ – точка локального минимума функционала $\mathcal{J}(x)$ в пространстве $C_0^1[t_0, t_1]$ то, согласно теореме 2.1 (лекция 2), $\delta_{\mathcal{J}}(\bar x, h) \;=\; 0$ для любой функции $h \;\in\; C_0^1[t_0, t_1]$. Применяя теперь лемму 1, а затем лемму 2 для $a = L_x$, $b = L_{\dot x}$, завершаем доказательство.

□

Применив теперь предложение 2.1, получаем

Следствие 2 *Если интегрант в простейшей задаче является выпуклым функционалом от x, т.е.,*

$$L\Big(t\,,\, (1-\lambda)x + \lambda y\,,\, (1-\lambda)\dot x + \lambda \dot y \Big) \quad \le \quad (1-\lambda)\, L(t, x, \dot x) \;+\; \lambda\, L(t, y, \dot y)$$

для любых допустимых $x, y \in C^1[t_0, t_1]$ в любой точке $t \in [t_0, t_1]$, то уравнение Эйлера-Лагранжа является достаточным условием абсолютного минимума.

В некоторых частных случаях уравнение Эйлера-Лагранжа может быть сведено у уравнению первого порядка. Введем ещё два определения: интеграла импульса $p(t) \;=\; L_{\dot x}$ и интеграла энергии $H(t) \;=\; \dot x\, L_{\dot x} \;-\; L$.

Предложение 2 *Если интегрант $L(t)$ не зависит явно от $\dot x$, т.е., $L(t, x, \dot x) \;=\; L(t, x)$, то уравнение Эйлера-Лагранжа равносильно уравнению $\hat L_x(t) \;\equiv\; 0$.*

Если интегрант $L(t)$ не зависит явно от x, то уравнение Эйлера-Лагранжа равносильно уравнению $\hat p(t) \;=\; \hat L_{\dot x}(t) \;\equiv\; \mathrm{const}$.

Если интегрант $L(t)$ не зависит явно от t, то из уравнения Эйлера-Лагранжа следует, что $\hat H(t) \;=\; \hat L_{\dot x}\dot{\hat x} \;-\; L \;\equiv\; \mathrm{const}$. Если известно, что экстремаль $\hat x$ не является тождественной константой ни на каком интервале, то верно и обратное: из уравнения $\hat H \;\equiv\; \mathrm{const}$ следует уравнение Эйлера-Лагранжа.

`Доказательство.` Первые два пункта очевидны, докажем третий. Имеем

$$H' = \frac{d}{dt}\Big(L_{\dot{x}}\Big)\,\dot{x} \;+\; L_{\dot{x}}\,\ddot{x} \;-\; L_x\,\dot{x} \;-\; L_{\dot{x}}\,\ddot{x} \;=\; \Big(\frac{d}{dt}\,L_{\dot{x}} \;-\; L_x\Big)\,\dot{x}.$$

Поэтому из уравнения Эйлера-Лагранжа следует, что $\hat{H}' \equiv 0$, т.е., $\hat{H} \equiv \mathrm{const}$. Если функция $\dot{\hat{x}}(t)$ не обращается в ноль ни на каком интервале, то функция $\frac{d}{dt}\,\hat{L}_{\dot{x}} - \hat{L}_x$ равна нулю на всюду плотном подмножестве отрезка $[t_0, t_1]$, а значит (в силу непрерывности), и на всём отрезке.

□

Пример 3 *(Пример Гильберта).* Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} J(x) \;=\; \int\limits_0^1 t^{2/3}\,\dot{x}^2\,dt \quad\to\; \min\,; \\ x(0) = 0\,,\; x(1) = 1\,. \end{cases} \tag{3}$$

Так как интегрант не зависит явно от x, то уравнение Эйлера-Лагранжа дает $\frac{d}{dt}\,L_{\dot{x}} = 0$, откуда $L_{\dot{x}} = \mathrm{const}$, следовательно $2t^{2/3}\dot{x} = c$. Единственное решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, $\hat{x}(t) = t^{1/3}$. Докажем, что $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$. Для любой допустимой вариации $h \in C^1_0[0,1]$ имеем

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) \;=\; \int_0^1 [t^{2/3}(\dot{\hat{x}}+\dot{h})^2 - t^{2/3}\dot{\hat{x}}^2]\,dt \;=\; \int_0^1 [2t^{2/3}\dot{\hat{x}}\dot{h} \;+\; t^{2/3}\dot{h}^2]\,dt \;\geq$$

$$\int_0^1 2t^{2/3}\dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt \;=\; \int_0^1 2t^{2/3}\frac{1}{3}t^{-2/3}\,\dot{h}\,dt \;=\; \frac{2}{3}\big(h(1) - h(0)\big) \;=\; 0\,.$$

Таким образом, $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум. Тем не менее, эта функция не является экстремалью, поскольку она не принадлежит $C^1[0,1]$. Поэтому, в данной задаче вообще нет допустимых экстремалей. Этот пример показывает, что в некоторых случаях пространство C^1 слишком узко для решения простейшей задачи, и имеет смысл искать экстремали в более широких пространствах, например в пространствах Соболева.

Пример 4 *(Задача о минимальной площади поверхности вращения).* Общая задача Лагранжа-Плато состоит в нахождении поверхности минимальной площади, содержащей заданное компактное множество в $\mathbb{R}^3$. Мы рассмотрим случай, когда это множество – два круга радиусом 1, причем отрезок между их центрами равен $2a$ и перпендикулярен плоскостям кругов. Мы ограничимся только поверхностями вращения (что выглядит естественно, но не так просто обосновывается). Если поверхность образована вращением графика функции $x(t)$ такой, что $x(-a) = x(a) = 1$, вокруг оси абсцисс, то задача формализуется в виде:

$$\begin{cases} J(x) \;=\; \int\limits_{-a}^{a} 2\pi x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \;\to\; \min\,; \\ x(-a) = x(a) = 1\,. \end{cases} \tag{4}$$

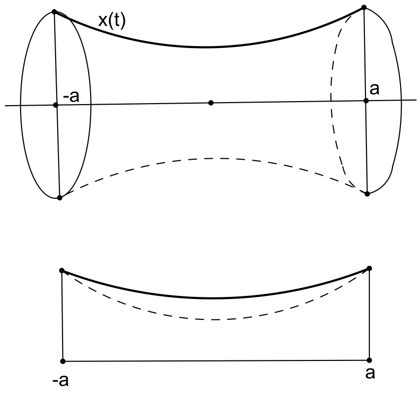

Рис. 1:

Так как интегрант не зависит явно от t, можем воспользоваться интегралом энергии: $H = \dot{x}L_{\dot{x}} - L = \text{const}$. Вычислив производные и проделав очевидные преобразования, получаем $\frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = c$, откуда $\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 1}} = dt$. С помощью замены $x = c \operatorname{ch} \tau$, находим решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $\hat{x}(t) = c \operatorname{ch}\left(\frac{t}{c}\right)$. Остается найти параметр c из краевого условия $\hat{x}(a) = 1$ (условие $\hat{x}(-a) = 1$ будет тогда выполнено в силу чётности функции). Обозначив $s = \frac{a}{c}$, получаем уравнение $\operatorname{ch} s = \frac{s}{a}$. Пусть число a_0 таково, что прямая $y = \frac{s}{a_0}$ касается графика функции $y = \operatorname{ch} s$ (рис. 2). Имеем $a_0 = 0.662\ldots$. При каждом $a < a_0$ прямая пересека-

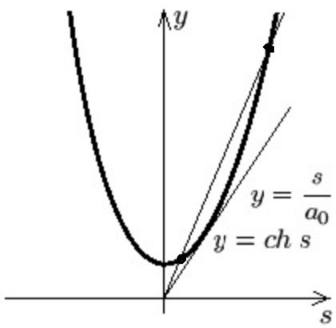

Рис. 2:

ет график в двух точках, поэтому существует два значения параметра c, т.е., задача имеет две допустимые экстремали. При $a = a_0$ экстремаль единственна, а при $a > a_0$ экстремалей нет. Последнее объясняется тем, что при $a > a_0$ площадь любой поверхности вращения становится больше суммы площадей двух кругов радиусом 1, поэтому минимальная поверхность “распадается” в объединение двух кругов. В случае $a < a_0$ из двух экстремалей абсолютный минимум дает одна, соответствующая меньшему из двух значений c, т.е., меньшему корню уравнения $c \operatorname{ch}\left(\frac{a}{c}\right) = 1$; вторая не доставляет даже локального минимума. Это мы доказывать не будем.

3. Производные высших порядков

Для получения условий второго порядка в простейшей задаче, мы вначале определим вторую производную по Фреше. Пусть X, Y – нормированные пространства, $F : X \to Y$ – некоторое отображение. Обозначим также через $\mathcal{L}(X, Y)$ пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y.

Определение 5 *Отображение $F : X \to Y$ является дважды дифференцируемым в точке x, если оно дифференцируемо в окрестности этой точки и отображение $x \to F'(x)$ (из пространства X в $\mathcal{L}(X, Y)$) является дифференцируемым. Производная этого отображения называется второй производной функции F в точке x.*

По определению, таким образом, имеем

$$F'(x + h_1)[h_2] \;=\; F'(x)[h_2] \;+\; \bigl(F''(x)[h_1]\bigr)[h_2] \;+\; o(\|h_1\| \,\cdot\, \|h_2\|)\,.$$

Если функция дважды дифференцируема, то $\bigl(F''(x)[h_1]\bigr)[h_2] = \bigl(F''(x)[h_2]\bigr)[h_1]$ для любых $h_1, h_2 \in X$. Мы оставим этот факт без доказательства. Таким образом, вторая производная – это непрерывная симметричная билинейная форма на X: $F''[h_1, h_2] = \bigl(F''(x)[h_1]\bigr)[h_2]$. Следующее предложение мы также не будем доказывать.

Предложение 3 *Если отображение F дважды дифференцируемо в точке x, то*
$F(x + h) \;=\; F(x) \;+\; F'(x)[h] \;+\; \frac{1}{2}\,F''(x)[h, h] \;+\; o(\|h\|^2)$.

Симметрическая билинейная форма $Q : X \times X \to \mathbb{R}$ и соответствующая ей квадратичная форма $Q(x, x)$ называется неотрицательно определённой (в других терминах – положительно полуопределённой, обозначение $Q \geq 0$), если $Q(x, x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Если же $Q(x, x) > 0$ для всех $x \in X, x \neq 0$, то форма называется положительно определённой (обозначение $Q > 0$).

Теорема 3 *Если $\hat{x}$ – точка локального минимума функции $F : X \to \mathbb{R}$, и в этой точке F дважды дифференцируема, то $F'(\hat{x}) = 0$ и $F''(\hat{x}) \geq 0$. Обратно, если $F'(\hat{x}) = 0$ и $F''(\hat{x})[h, h] \geq \alpha\,\|h\|^2$, то точка $\hat{x}$ доставляет локальный минимум.*

`Доказательство.` Если $\hat{x} \in \mathrm{locmin}$, то $F'(\hat{x}) = 0$. Если при этом $F''(\hat{x})[h, h] < 0$ для некоторого $h \in X$, то $F''(\hat{x})[th, th] = t^2 F''(\hat{x})[h, h] < 0$ при любом $t \neq 0$. При $t \to 0$ применяем предложение 3 и получаем, что $F(\hat{x} + th) < F(\hat{x})$ при малых t. Доказательство достаточности немедленно вытекает из предложения 3.

□

Замечание 1 В пограничном случае, когда $F'(\hat{x}) = 0$ и $F''(\hat{x}) \geq 0$, т.е., когда необходимые условия выполнены, а достаточные – нет, могут быть разные ситуации. Так, для функции $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3$ точка $\hat{x} = 0$ не даёт локального минимума.

Рассмотрим теперь простейшую задачу и соответствующий функционал $\mathcal{J}(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt$. Предполагая, что вторые частные производные $L_{x\,x}$, $L_{x\,\dot{x}}$, $L_{\dot{x}\,\dot{x}}$ существуют и непрерывны, получаем

$$\mathcal{J}''(x)[h,h] \quad = \quad \int_{t_0}^{t_1} \Big(L_{x\,x}\,h^2 \,+\, 2\,L_{x\,\dot{x}}\,h\,\dot{h} \,+\, L_{\dot{x}\,\dot{x}}\,\dot{h}^2 \Big)\,dt\,. \tag{5}$$

Список литературы

[1] В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин, *Оптимальное управление*, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979

[2] В.М. Алексеев , Э.М. Галеев , В.М. Тихомиров , *Сборник задач по оптимизации. Теория, примеры, задачи*, М. Физматлит, 2006.

[3] В.Ю. Протасов, *Вариационное исчисление и оптимальное управление. Курс лекций*, $http://opu.math.msu.su/sites/default/files/main_courses/course-opu15f.pdf$