12. *proof. Let* $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$,则根据 $M=AMA^T$ 知

$$-A_2A_1^T+A_1A_2^T=0 \quad (1), \qquad -A_2A_3^T+A_1A_4^T=I_n \quad (2),$$

$$-A_4A_1^T+A_3A_2^T=-I_n \quad (3), \qquad -A_4A_3^T+A_3A_4^T=0 \quad (4).$$

若 A_1 可逆结合 A 的分块可知 $|A|=|A_1|\,|A_4-A_3A_1^{-1}A_2|$ (5)

由(1)可知 $A_2=A_1A_2^T(A_1^{-1})^T$ 代入(2)可得到 $A_4-A_3A_1^{-1}A_2=(A_1^{-1})^T$ (6)

联合(5)(6)可知 $|A|=|A_1|\,|A_4-A_3A_1^{-1}A_2|=|A_1|\,|(A_1^{-1})^T|=1.$

若当 A_1 不可逆时,考虑摄动法处理即可. 从而有 $\det(A)=1.$ □