考虑集合

$$\mathcal{A}_{r,s}=\{\begin{pmatrix} xI_r & M_{r\times s} \\ O_{s\times r} & xI_s \end{pmatrix}|M_{r\times s}\in\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C}),r+s=n\}$$

任取$A=\begin{pmatrix} xI_r & M_{r\times s} \\ O_{s\times r} & xI_s \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} yI_r & N_{r\times s} \\ O_{s\times r} & yI_s \end{pmatrix}\in\mathcal{A},$

$$AB=\begin{pmatrix} xI_r & M_{r\times s} \\ O_{s\times r} & xI_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} yI_r & N_{r\times s} \\ O_{s\times r} & yI_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xyI_r & xN_{r\times s}+yM_{r\times s} \\ O_{s\times r} & xyI_s \end{pmatrix}=BA$$

因此$\mathcal{A}_{r,s}$是$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$的可交换子代数.且显然$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}_{r,s}=rs+1.$
则形如$\mathcal{A}_{r,s}$的可交换子代数的最大维数为$[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])+1=[\frac{n^2}{4}]+1.$