第二届八一杯网络大学生数学竞赛

— 代数题目若干

MatNoble

文章导航

1 线性无关的应用

例题 1.1. 某班级有 n 位同学, 共参加了 m 个社团. 每个社团中, 该班学生的数目都是奇数; 任意两个社团中, 共同学生的数目是偶数. 试证明: $m \leq n$.

证明. 令 $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{F}_2^n (i = 1, \cdots, m)$ 表示第 i 个社团的成员信息, $\boldsymbol{v}_i$ 的第 j 个分量为 1 表示: 编号为 j 的同学在 i 社团, 反之为 0. 如此, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i$ 表示第 i 个社团中的人数, 由题意可知, 人数为偶数, 所以, 在 $\mathbb{F}_2$ 中, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 1$; 类似的, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j (i \neq j)$ 表示同时在 i 社团与 j 社团的人数, 由题意可知, 人数为奇数, 所以, 在 $\mathbb{F}_2$ 中, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0 (i \neq j)$

下面证明 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ 是线性无关的. 假设存在 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{F}_2$ 满足

$$c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m \boldsymbol{v}_m = 0.$$

将 $\boldsymbol{v}_i (i = 1, \cdots, m)$ 分别与上式作内积, 得到 $c_i = 0 (i = 1, \cdots, m)$, 即 m 个 n 维向量线性无关, 进而得到 $m \leq n$.

∎

非数 26

例题 1.2. 某班级有 n 位同学, 共参加了 m 个社团. 任意两个社团中, 共同学生的数目恰好都是 k 个 $(k>0)$. 试证明: $m \leq n$.

证明. 令 $\boldsymbol{v}_i(i=1,\cdots,m)$ 表示第 i 个社团的成员信息, $\boldsymbol{v}_i$ 的第 j 个向量为 1 表示: 编号为 j 的同学在 i 社团, 反之为 0. 由题意知, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = k(i \neq j)$.

我们知道向量 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 线性无关, 则 $m \leq n$ 成立. 反之, 则成立不全为零的 $c_i(i=1,\cdots,m)$ 满足

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m=\mathbf{0}.$$

对上式作如下内积,

$$\begin{aligned}
0 &= (c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m)\cdot(c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m) \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i + 2\sum_{i<j} c_i c_j \boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i^2 |\boldsymbol{v}_i|^2 + 2k\sum_{i<j} c_i c_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i^2 (|\boldsymbol{v}_i|^2 - k) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i^2 (|\boldsymbol{v}_i|^2 - k) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2
\end{aligned}$$

因为任意两个俱乐部共享 k 位同学, 所以每个社团成员数不小于 k, 即 $|\boldsymbol{v}_i|^2-k \geq 0$. 观察上式中, 每一项都是非负数, 所以每一项的和都是 0. 只有当 $|\boldsymbol{v}_i|^2-k=0$ 时的 c_i 可以不为 0, 此时, i 社团中恰好有 k 名成员, 由题意, 这 k 名成员必须参加其他所有的社团, 如此, 社团的数量最多为 n.

∎

数 B 高 3, 非数 27 . 本题中不同社团应理解为社团成员组成完全不同

命题人说 1

线性无关的题一般都需要用到$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m=\mathbf{0}$. 上面两道题都有现实背景, 解题思路是: 在某数域空间里构造向量组, 然后证明线性无关或相关.

以上题目来源于 Oddtown/Eventown 问题和 Fisher 不等式

2 矩阵

例题 2.1. 已知 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(i) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂可写为: $\boldsymbol{A}^k=c_k\boldsymbol{A}+d_k\boldsymbol{I}, k>0$, 试计算系数 c_k, d_k

(ii) 试将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 写成 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的线性组合

说明 1

本题考察矩阵幂的相关知识, 意在说明矩阵是由一组数按一定顺序排列形成, 但有时可以 “囫囵吞枣” 地认为矩阵就是一个数. 但由于笔者决定使用本题时, “画蛇添足” 地修改了数据, 导致手算很费劲, 所以, 解析中使用原数据 $\boldsymbol{A}=\left[\begin{smallmatrix}5 & 1\\ -2 & 0\end{smallmatrix}\right]$. 本题推荐非数学或者数学系低年级同学做一做, 增加对矩阵的理解.

解.

(i) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $p(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$, 由 Cayley-Hamilton 定理知: $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=0$ 或 $\boldsymbol{A}^2=3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$

已知 $\boldsymbol{A}^k=c_k\boldsymbol{A}+d_k\boldsymbol{I}$, 那么 $\boldsymbol{A}^{k+1}=c_k\boldsymbol{A}^2+d_k\boldsymbol{A}=c_k(3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+d_k\boldsymbol{A}=(3c_k+d_k)\boldsymbol{A}-2c_k\boldsymbol{I}$, 于是

$$\begin{cases} c_{k+1} & =3c_k+d_k\\ d_{k+1} & =-2c_k\end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}c_{k+1}\\ d_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_k\\ d_k\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}c_k\\ d_k\end{bmatrix}$$

其中, $\boldsymbol{A}$ 可以对角化

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

由 $c_0=0, d_0=1$, 得

$$\begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^k \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{S}^{-1} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k-1 \\ -2^k+2 \end{bmatrix}$$

(ii) 仍然利用 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=0$, 移项

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\right]$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \left[\frac{1}{2}(-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\right]$. 另外, 将 $k=-1$ 带入 (i) 中公式也可以.

数 B 高 4, 非数 53

例题 2.2. 假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 是 $n\times n$ 的实矩阵, 满足 $\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{MB}$, 并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式. 试证明: 对于任意 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{MX})=\det(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{XM})$

证明. 令 $\boldsymbol{A}_\lambda=\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}_\lambda=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}$, 由题意知, $\det(\boldsymbol{A}_\lambda)=\det(\boldsymbol{B}_\lambda)$. 又因为 $\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{MB}$, 所以 $\boldsymbol{A}_\lambda\boldsymbol{M}=\boldsymbol{MB}_\lambda$, 当 λ 取合适值时, $\boldsymbol{A}_\lambda,\boldsymbol{B}_\lambda$ 是可逆的. 所以, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}_\lambda\boldsymbol{MB}_\lambda^{-1}$. 令 $\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I}$,

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}_\lambda-\boldsymbol{MX}_t)&=\det(\boldsymbol{A}_\lambda-\boldsymbol{A}_\lambda\boldsymbol{MB}_\lambda^{-1}\boldsymbol{X}_t)\\
&=\det(\boldsymbol{A}_\lambda)\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{MB}_\lambda^{-1}\boldsymbol{X}_t)\\
&=\det(\boldsymbol{A}_\lambda)\det(\boldsymbol{B}_\lambda)^{-1}\det(\boldsymbol{X}_t)\det(\boldsymbol{X}_t^{-1}\boldsymbol{B}_\lambda-\boldsymbol{M})\\
&=\det(\boldsymbol{X}_t)\det(\boldsymbol{X}_t^{-1}\boldsymbol{B}_\lambda-\boldsymbol{M})\\
&=\det(\boldsymbol{B}_\lambda-\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{M})
\end{aligned}$$

上式是关于 λ 和 t 的恒等式, 取 $\lambda=t=0$ 等式仍成立, 得证.(或者, 取 $t=0$, 上式即表明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{MX}$ 和 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{XM}$ 有相同特征多项式, 从而行列式相等)

还可以用分块矩阵来解此题, 步骤略.

∎

数 B 高 5

例题 2.3. 设 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$. 如果实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}$, 求证 $\det \boldsymbol{A}=1$.

证明. 假设所有满足 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 全体组成的集合为 S. 显然若 $\boldsymbol{A}\in S,\boldsymbol{B}\in S$, 那么就有 $\boldsymbol{AB}\in S$. 接下来, 依次证明

(1) 若 $\boldsymbol{A}\in S$, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1}\in S,\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\in S$.

$\boldsymbol{A}^{-1}\in S$ 是显然的. 注意到 $\boldsymbol{M}^2=-\boldsymbol{I}_{2n}$, 所以

$$\begin{cases}(\boldsymbol{AM})\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{AM})\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{MA}=(\boldsymbol{AMA}^{\mathsf{T}})\boldsymbol{MA}\\(\boldsymbol{AM})\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{AI}_{2n}=\boldsymbol{MMA}\end{cases}\implies \boldsymbol{M}=\boldsymbol{AMA}^{\mathsf{T}}$$

所以, $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\in S$.

(2) 若正定矩阵 $\boldsymbol{H}\in S$, 那么 $\boldsymbol{H}$ 的平方根 $\boldsymbol{P}\in S$.

由已知得 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{HMH},\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{MH}$, 从而对任何多项式 $f(x)$ 有 $f(\boldsymbol{H}^{-1})\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}f(\boldsymbol{H})$. 设 $\boldsymbol{H}$ 特征值为 $\{\lambda_1^2,\dots,\lambda_{2n}^2\}$, 正交矩阵 $\boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{HO}=\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\dots,\lambda_{2n}^2\}$, 那么 $\boldsymbol{O}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{PO}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_{2n}\}$. 可利用拉格朗日插值法使 f 满足 $f\lambda_i^2=\lambda_i,f(1/\lambda_i^2)=1/\lambda_i$. 这样就有 $f(\boldsymbol{H})=\boldsymbol{P},f(\boldsymbol{H}^{-1})=\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而 $\boldsymbol{P}\in \boldsymbol{S}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}\in S$, $\boldsymbol{A}$ 的极分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{HQ}$, 这里 $\boldsymbol{H}$ 正定, $\boldsymbol{Q}$ 正交, 则 $\boldsymbol{H}\in S,\boldsymbol{Q}\in S$.

$\boldsymbol{A}\in S,\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\in S\Rightarrow \boldsymbol{AA}^{\mathsf{T}}\in S\Rightarrow\sqrt{\boldsymbol{AA}^{\mathsf{T}}}=\boldsymbol{H}\in S\Rightarrow \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{AH}^{-1}\in S$.

(4) 设 $\boldsymbol{Q}\in S$, $\boldsymbol{Q}$ 正交, 则 $\det\boldsymbol{Q}=1$.

设 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{F}\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{MQ}=\boldsymbol{QM}$, 从而 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F},\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{E}$, 所以, $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\\-\boldsymbol{D}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{Q}$ 正交说明 $\boldsymbol{CC}^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{DD}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{CD}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{DC}^{\mathsf{T}}$. 从而 $(\boldsymbol{C}+i\boldsymbol{D})(\boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}-i\boldsymbol{D}^{\mathsf{T}})=\boldsymbol{I}_n$, 则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\\-\boldsymbol{D}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{C}+i\boldsymbol{D}|\cdot|\boldsymbol{C}-i\boldsymbol{D}|=1.$$

从而 $\det\boldsymbol{Q}=1$.

(5) 设 $\boldsymbol{H}\in S$, $\boldsymbol{H}$ 正交, 则 $\det\boldsymbol{H}=1$.

由 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{HMH}$ 可得 $(\det\boldsymbol{H})^2=1$, 又因为 $\boldsymbol{H}$ 正定, 所以 $\det\boldsymbol{H}=1$

综合 (3), (4), (5), 就得到了问题的证明. ∎

数 A 高 12, 非数 78

优秀解答 (来自 戴银 武汉大学)

12. *proof. Let* $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$,则根据 $M=AMA^T$ 知

$$-A_2A_1^T+A_1A_2^T=0 \quad (1), \qquad -A_2A_3^T+A_1A_4^T=I_n \quad (2),$$
$$-A_4A_1^T+A_3A_2^T=-I_n \quad (3), \qquad -A_4A_3^T+A_3A_4^T=0 \quad (4).$$

若 A_1 可逆结合 A 的分块可知 $|A|=|A_1||A_4-A_3A_1^{-1}A_2|$ (5)

由(1)可知 $A_2=A_1A_2^T(A_1^{-1})^T$ 代入(2)可得到 $A_4-A_3A_1^{-1}A_2=(A_1^{-1})^T$ (6)

联合(5)(6)可知 $|A|=|A_1||A_4-A_3A_1^{-1}A_2|=|A_1||(A_1^{-1})^T|=1$.

若当 A_1 不可逆时,考虑摄动法处理即可. 从而有 $\det(A)=1$. □

命题人说 2

矩阵是线性代数或者高等代数中的重要内容, 几乎占了半壁江山. 相应地, 矩阵的题目也是层出不穷. 作为数学竞赛, 理应相对难一些, 但考虑到全面性, 导致前两道题目稍简单, 但我认为还算有趣, 同时, 可以增加做竞赛题的信心.

分块矩阵, 特征值, 特征向量, 特征多项式, 矩阵相似, 矩阵相抵, 矩阵相合, 矩阵对角化, 矩阵可交换, 正交矩阵, 正定矩阵, 秩 1 矩阵... 都是矩阵专题中重要的研究内容.

感兴趣的同学可以买本习题集做一做 (推荐亲测过的王品超的高等代数新方法)

3 空间

例题 3.1. 设 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间, 如果 $\boldsymbol{M}$ 中的矩阵两两可以交换, 求证 $\boldsymbol{M}$ 的维数最大是的 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$($[\cdot]$ 表示高斯取整函数).

证明. 对 n 归纳, $n=1$ 结论显然成立, 设小于 n 时结论也成立. 下面, 讨论 n 的情形:

由于 $\boldsymbol{M}$ 中的矩阵两两可以交换, 所以他们可以同时上三角化, 所以不妨假设 $\boldsymbol{M}$ 中的每一个矩阵都是上三角矩阵. 对于每个 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}$, 我们截取 $\boldsymbol{A}$ 左上角的 $n-1$ 阶主子阵, 把这个矩阵记为 $f(\boldsymbol{A})$, 同时截取 $\boldsymbol{A}$ 的右下角的 $n-1$ 阶主子阵, 把它记作 $g(\boldsymbol{A})$. 那么所有的 $f(\boldsymbol{A})$ 之间两两可以交换, 所有的 $g(\boldsymbol{A})$ 两两之间可以交换. 由于 f 和 g 都可以看作是 $\boldsymbol{M}$ 到 $\boldsymbol{M}_{n-1}$ 的交换子空间的线性映射, 所以有归纳假设, $\dim f\le\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+1, \dim g\le\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+1$.

不难看出, $\mathrm{Ker} f$ 中的元素形如 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n-1} & \boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$, $\mathrm{Ker} g$ 中的元素形如 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}\\ \boldsymbol{0}_{n-1\times n}\end{bmatrix}$. 这里的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维列向量. 两者可交换意味着 $\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$, 即 $\mathrm{Ker} f\perp\mathrm{Ker} g$, 所以 $\dim\mathrm{Ker} f+\dim\mathrm{Ker} g\ge n$, 从而

$$
\begin{aligned}
\dim\boldsymbol{M}&=\dim\mathrm{Ker} f+\dim f=\dim\mathrm{Ker} g+\dim g\\
&\le\frac{\dim\mathrm{Ker} f+\dim\mathrm{Ker} g}{2}+\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+1\\
&\le\frac{n}{2}+\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+1\le\left[\frac{(n)^2}{4}\right]+1.
\end{aligned}
$$

当 $n=2m$ 是偶数时, 取形如

$$
\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}
$$

的矩阵. 当 $n=2m+1$ 是奇数时, 取形如

$$
\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{I}_{m+1}\end{bmatrix}
$$

的矩阵.

∎

数 A 低 6, 数 B 低 5

优秀解答 (来自 Cherry 杭州师范大学)

考虑集合

$$\mathcal{A}_{r,s}=\{\begin{pmatrix} xI_r & M_{r\times s} \\ O_{s\times r} & xI_s \end{pmatrix}|M_{r\times s}\in\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C}),r+s=n\}$$

任取$A=\begin{pmatrix} xI_r & M_{r\times s} \\ O_{s\times r} & xI_s \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} yI_r & N_{r\times s} \\ O_{s\times r} & yI_s \end{pmatrix}\in\mathcal{A},$

$$AB=\begin{pmatrix} xI_r & M_{r\times s} \\ O_{s\times r} & xI_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} yI_r & N_{r\times s} \\ O_{s\times r} & yI_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xyI_r & xN_{r\times s}+yM_{r\times s} \\ O_{s\times r} & xyI_s \end{pmatrix}=BA$$

因此$\mathcal{A}_{r,s}$是$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$的可交换子代数.且显然$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}_{r,s}=rs+1$.
则形如$\mathcal{A}_{r,s}$的可交换子代数的最大维数为$[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])+1=[\frac{n^2}{4}]+1$.

命题人说 3

"空间为体, 矩阵为用", 空间是线性代数或高等代数中除矩阵外的又一个重要研究对象, 包括向量空间, 矩阵的四个基本空间, 子空间, 直和, 最小二乘法, 内积空间等等内容.

类似上面的问题, 还有:

- 如果 $\boldsymbol{M}$ 中的所有矩阵的秩都不超过 r, 这里 $0<r<n$, 那么 $\boldsymbol{M}$ 的维数最大是多少?
- 如果 $\boldsymbol{M}$ 中所有矩阵都是幂零的,即对任何 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}$, 存在一个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=0$, 那么 $\boldsymbol{M}$ 的维数最大是多少?
- 如果 $\boldsymbol{M}$ 中所有非零矩阵都是可逆矩阵,那么 $\boldsymbol{M}$ 的维数最大是多少?

参考链接 矩阵空间的子空间

4 奇异值分解

例题 4.1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 5×4 阶的实矩阵, 并且 $\boldsymbol{M}$ 有非零奇异值 $1,2,3,4$, 试依次计算

(i) $\det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})$

(ii) $\operatorname{trace}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$

(iii) $\dim N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$

(iv) $\max_{\|x=1\|}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$

解. 设 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}$, 其中 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}_5$, $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}_4$,

$$\Sigma=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

将奇异值分解代入计算 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$, 得到以下结果:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}})=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}&=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}})(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}4^2&0&0&0\\0&3^2&0&0\\0&0&2^2&0\\0&0&0&1^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix}4^2&0&0&0&0\\0&3^2&0&0&0\\0&0&2^2&0&0\\0&0&0&1^2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(i)

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})&=\det(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}})=\det(\boldsymbol{V})\det(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma})\det(\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}})\\&=\det(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma})=4^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2=576.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})&=\operatorname{trace}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}})=\operatorname{trace}(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{U})\\&=\operatorname{trace}(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}})=4^2+3^2+2^2+1^2+0=30.\end{aligned}$$

(iii) 利用秩 – 零化度定理, 可知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) + \dim N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) = 5$. 因为 $\boldsymbol{U}$ 是实正交矩阵, 因此可逆, 即知

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}) = 4.$$

所以, $\dim N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) = 5 - 4 = 1$.

(iv) 利用奇异值分解写出

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{z}\end{aligned}$$

上面令 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$, 就有 $\|\boldsymbol{z}\|^2 = \boldsymbol{z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = 1$, 因此原问题等价于

$$\max_{\|\boldsymbol{z}\|=1} \sqrt{\boldsymbol{z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{z}}$$

令 $\boldsymbol{z} = [z_1, z_2, z_3, z_4]^{\mathsf{T}}$, 且 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1$, 可得

$$\boldsymbol{z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{z} = 4^2z_1^2 + 3^2z_2^2 + 2^2z_3^2 + 1^2z_4^2 \le 4^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) = 4^2$$

当且仅当 $\boldsymbol{z} = [1, 0, 0, 0]^{\mathsf{T}}$. 所以, $\max_{\|x=1\|}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = 4$.

数 A 低 7

命题人说 4

奇异值分解 (SVD) 是最重要的矩阵分解之一, 虽然很少出现在线性代数或者高等代数课本上, 但是奇异值分解可以解释很多线代中的其他知识, 并且应用广泛. 因此决定出一个有关奇异值分解的题目. 不太困难, 希望引起各位考友的注意.

最后, 若发现以上解析有错误, 请告诉我 hustmatnoble@gmail.com