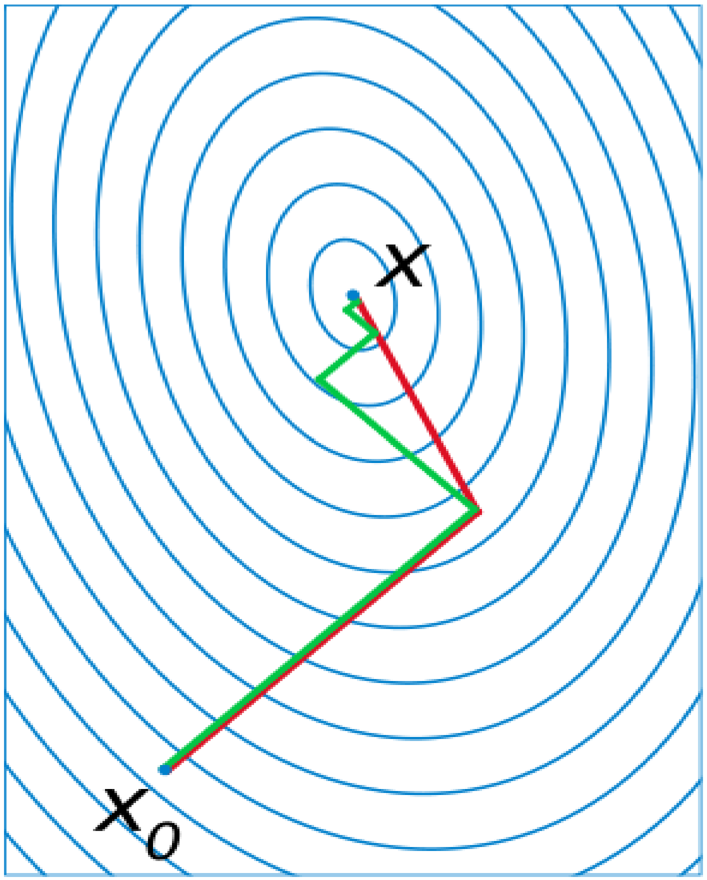
Метод сопряженных направлений

Выполнила
Дейнега Лилия
532 группа

Преподаватель
Малинина М.А.

Метод сопряженных направлений



Вектора называются ***сопряжёнными***, если:

1. $\vec{S}_i^{\,T} H \vec{S}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n$
2. $\vec{S}_i^{\,T} H \vec{S}_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n$

где H — матрица Гессе.

Градиент и производная изображения

- Градиент

$$G[f(x,y)] = \begin{vmatrix} G_x \\ G_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{df}{dx} \\ \dfrac{df}{dy} \end{vmatrix}$$

- Производные

$$G_x = \frac{df}{dx} = f(x,y) - f(x-1,y)$$

$$G_y = \frac{df}{dy} = f(x,y) - f(x,y-1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$

Расчетные формулы

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^{k} - \mu^{k}\vec{p}^{k}, \quad k = 0,1 \ldots \qquad (1)$$

$$\vec{p}^{0} = \nabla f(\vec{x}^{\,0}), \qquad (2)$$

направление поиска

$$\vec{p}_k = \nabla f(\vec{x}_k) + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^2_{A_k}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^2_{A_{k-1}}} \cdot \vec{p}_{k-1}, \qquad k = 1,2 \ldots \qquad (3)$$

$$\mu^{k} = \frac{\nabla f(\vec{x}^{\,k})_{A_k}\vec{p}^{\,k\,т}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(p_i^k\right)^2_{A_k}\right) detH}, \text{ где } H - \text{матрица Гессе}, k = 0,1 \ldots \qquad (4)$$

шаг

$$H = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2_1} & \frac{d^2 f}{dx_1 x_2} \\ \frac{d^2 f}{dx_1 x_2} & \frac{d^2 f}{dx^2_2} \end{pmatrix}$$

Алгоритм

1. В точке $A_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ вычисляют начальное направление:
$$\overrightarrow{p_0} = \left(\left(\frac{df}{dx_1}\right)_{A_0}, \left(\frac{df}{dx_2}\right)_{A_0}, \dots, \left(\frac{df}{dx_n}\right)_{A_0}\right)$$
2. По формуле (1) находят точку $A_1(x_1^1, \dots, x_n^1)$
3. Вычисляют в точке A_1 значение функции $f(A_1)$ и градиента $\nabla f(A_1)$
4. Определяют новое направление поиска по формуле (3) и т.д.
5. Поиск заканчивают при выполнении условия
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(p_i^k\right)^2} \le \varepsilon$$

Практика

- Требуется минимизировать функцию $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4$, начиная с точки $A_o(4,4)$. Принять $\varepsilon = 0{,}5$.

Нулевой шаг

1. Находим начальное направление

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1; \quad p_1^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A0} = 2x_1^0 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2; \quad p_2^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A0} = 2x_2^0 = 2 \cdot 4 = 8$$

2. Находим длину шага из (4)

$$\lambda_0 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot p_1\right)_{A0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot p_2\right)_{A0}}{\left[(p_1^0)^2 + (p_2^0)^2\right]_{A0} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}_{A0}} = \frac{8 \cdot 8 + 8 \cdot 8}{(8^2 + 8^2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{128}{128 \cdot 4} = 0{,}25$$

3. Вычислим значение функции $f(A_o)$

$$f(Ao) = 16 + 16 - 4 = 28$$

4. Окончание процесса:

$$\sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} \approx 11{,}3 > 0{,}5$$

Оформление решения

№ итерации	x_1	x_2	p_1	p_2	μ	$f(\vec{x})$
0	*4*	*4*	*8*	*8*	*0,25*	*28*
1						