Teoría Proyecto ADA

Santiago Uribe Pastás

Mayo 2020

1 Definiciones

1.1 DFT

La DFT de un arreglo $X[0..N)$ de números complejos esta definida como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \cdot w_N^{kn} \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

1.2 Convolución

La convolución de 2 funciones f y h esta definida como

$$f * g = \sum_{i=0}^{N} f(i) \cdot g(N-i)$$

Para nuestro caso, cuando se multiplican dos polinomios, los coeficientes del producto están dados por la convolución de las sucesiones originales de coeficientes.

1.2.1 Teorema de convolución

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

donde $\mathcal{F}$ denota la Transformada de Fourier.

1.3 Interpolación

Conocidos los valores de una función f en los puntos x_i con $i = 0, ..., N$ se puede obtener un polinomio P (de grado no mayor a N) que coincida con la función f en dichos puntos, es decir

$$P(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, ..., N$$

Por lo que el polinomio sera de la forma

$$P(x) = a_N x^N + ... + a_1 x + a_0$$

por lo que habrá que encontrar los coeficientes $a_0, ..., a_n$ del polinomio P.

2 DFT:

$x^n = 1$ tiene n soluciones complejas (llamadas enésimas raíces de unidad) de la forma $w_n^k = e^{(2k\pi i)/n}$ con $k = 0$,...,n-1. La enésima raíz $w_n = w_n^1 = e^{(2\pi i)/n}$ se puede usar para describir las otras enésimas raíces $w_n^k = (w_n)^k$. Por propiedades estas raíces presentan una simetría respecto al eje x lo que indica que la raíz $w_n^{k+n/2}$ es el conjugado de la raiz w_n^k con $k = 0, ..., \frac{n}{2}$.

Lo que nos lleva a que la DFT de un polinomio $A(x)$ se define como los valores del polinomio en los puntos $x = w_n^k$ con $k = 0$,...,n-1. Teniendo el polinomio $A(x)$ en representación como un arreglo de coeficientes $(a_0, ..., a_{n-1})$ se tiene que:

$$DFT(A) = (A(w_n^0), A(w_n^1), ..., A(w_n^{n-1}))$$

2.1 Propiedades:

Sean $A(x)$ y $B(x)$ dos polinomios del mismo grado, entonces:

$$(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x)$$
$$DFT(A \cdot B) = DFT(A) \cdot DFT(B)$$
$$(A \cdot B)(x) = InverseDFT(DFT(A) \cdot DFT(B))$$

3 FFT:

Método que permite calcular la DFT en tiempo O($nlogn$). La idea básica de la FFT es aplicar dividir y conquistar.

3.1 Método:

Sea $A(x)$ un polinomio con grado $n-1$, donde n es una potencia de 2 y $n > 1$ (si n no es una potencias de 2 rellenamos los termines faltantes $a_i x^i$ con coeficientes $a_i = 0$)

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + ... + a_{n-1} x^{n-1}$$

Lo dividimos en dos polinomios más pequeños, el que contiene solo los coeficientes de las posiciones pares, y el que contiene los coeficientes de las posiciones impares:

$$A_{even}(x) = a_0x^0 + a_2x^1 + ... + a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1}$$
$$A_{odd}(x) = a_1x^0 + a_3x^1 + ... + a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}$$

Por la simetría anteriormente nombrada tenemos que para calcular $DFT(A_{even})$ y $DFT(A_{odd})$ se tiene que $w_n^n = 1$ y $w_n^{n/2} = -1$.

Por lo que para calcular el arreglo y que representa a $DFT(A)$ se tiene que:

$$y_k = y_k^0 + w_n^k \cdot y_k^1, \qquad k = 0...\frac{n}{2} - 1$$
$$y_{k+n/2} = y_k^0 - w_n^k \cdot y_k^1, \qquad k = 0...\frac{n}{2} - 1$$

Este patrón $a + b$ y $a - b$ se conoce como mariposa.

3.2 FFT inversa:

Hacer este proceso se denomina interpolación. Para el calculo de y tenemos que:

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{kn} \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

Por lo que para hallar el coeficiente a_k tenemos que:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_N^{-kn} \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

Note que los coeficientes a_k se pueden encontrar con el mismo algoritmo de dividir y conquistar, que para hallar el FFT directo, solo que en lugar de w_N^k tenemos que usar w_N^{-k}, y al final necesitamos dividir los coeficientes resultantes por N.

4 Representaciones y sus costos computacionales:

Coeficientes:
- Evaluación: O(n)
- Multiplicación: O(n^2)

Punto-Valor:
- Evaluación: O(n^2)
- Multiplicación: O(n)