Teoría Proyecto ADA

Santiago Uribe Pastás

Mayo 2020

1 DFT:

$x^n = 1$ tiene n soluciones complejas (llamadas enésimas raíces de unidad) de la forma $w_{n,k} = e^{(2k\pi i)/n}$ con $k = 0$, ... , n-1. Por propiedades de números complejos, estas raíces presentan una simetría respecto al eje x. La enésima raíz $w_n = w_{n,1} = e^{(2\pi i)/n}$ se puede usar para describir las otras enésimas raíces $w_{n,k} = (w_n)^k$.

Lo que nos lleva a que la DFT de un polinomio $A(x)$ se define como los valores del polinomio en los puntos $x = w_{n,k}$. Teniendo el polinomio $A(x)$ en representación como un arreglo de coeficientes $(a_0, ..., a_{n-1})$ se tiene que:

$$DFT(A) = (A(w_n^0), A(w_n^1), ..., A(w_n^n - 1))$$

De igual forma la DFT inversa restaura los coeficientes del polinomio usando esos valores.

1.1 Propiedades:

Sean $A(x)$ y $B(x)$ dos polinomios del mismo grado, entonces:

$$(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x)$$
$$DFT(A \cdot B) = DFT(A) \cdot DFT(B)$$
$$(A \cdot B)(x) = InverseDFT(DFT(A) \cdot DFT(B))$$

2 FFT:

Método que permite calcular la DFT en tiempo O($nlogn$). La idea básica de la FFT es aplicar dividir y conquistar.

2.1 Método:

Sea $A(x)$ un polinomio con grado $n-1$, donde n es una potencia de 2 y $n > 1$ (si n no es una potencias de 2 rellenamos los termines faltantes $a_i x^i$ con coeficientes $a_i = 0$)

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + ... + a_{n-1} x^{n-1}$$

Lo dividimos en dos polinomios más pequeños, el que contiene solo los coeficientes de las posiciones pares, y el que contiene los coeficientes de las posiciones impares:

$$A_{even}(x) = a_0 x^0 + a_2 x^1 + ... + a_{n-2} x^{\frac{n}{2}-1}$$
$$A_{odd}(x) = a_1 x^0 + a_3 x^1 + ... + a_{n-1} x^{\frac{n}{2}-1}$$

Al dividir el polinomio $A(x)$ en 2 esto nos permitirá calcular la DFT(A) en tiempo O($nlogn$).

Por la simetría anteriormente nombrada tenemos que para calcular $DFT(A_{even})$ y $DFT(A_{odd})$ se tiene que $w_n^n = 1$ y $w_n^{n/2} = -1$.

Por lo que para calcular el arreglo y que representa a $DFT(A)$ se tiene que:

$$y_k = y_k^0 + w_n^k \cdot y_k^1, \qquad k = 0...\frac{n}{2} - 1$$
$$y_{k+n/2} = y_k^0 - w_n^k \cdot y_k^1, \qquad k = 0...\frac{n}{2} - 1$$

Este patrón $a + b$ y $a - b$ se llama mariposa.

2.2 FFT inversa:

Hacer este proceso se denomina interpolación. Para el calculo de y tenemos que:

$$y_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{ki}$$

Por lo que para hallar a_k tenemos que:

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i w_n^{-ki}$$

Note que los coeficientes a_k se pueden encontrar con el mismo algoritmo de dividir y conquistar, así como el FFT directo, solo que en lugar de w_n^k tenemos que usar w_n^{-k}, y al final necesitamos para dividir los coeficientes resultantes por n.

3 Representaciones y sus costos computacionales:

Coeficientes:
- Evaluación: O(n)
- Multiplicación: O(n^2)

Punto-Valor:
- Evaluación: O(n^2)
- Multiplicación: O(n)