Santiago Uribe Pastás 8925546

Abril 29 de /2021

parcial 2

1. tengo t y Y, usando el modelo de ajuste obtengo que

$$Y_1 = a_1 + a_2 t_1$$
$$\vdots$$
$$Y_n = a_1 + a_2 t_n$$

Por lo que tengo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

resuelvo el ejercicio con

$$A^T A x = A^T b$$

Una vez encontrados a_1 y a_2 para calcular $Y(5)$ resolvemos

$$y5 = a_1 + a_2 \cdot 5$$

3.a $A = U \Sigma V^T$

$$\|A\| = \|U \Sigma V^T\|$$

Al estar en matrices cuadradas $(\mathbb{R}^{n \times n})$

$$\|A\| \leq \|U\| \, \|\Sigma\| \, \|V^T\|$$

Al ser U y V^T, matrices ortonormales su norma es 1

$$\|A\| \leq \|\Sigma\|$$

recuerde que Σ es una matriz diagonal de los valores singulares

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{matlab}} \begin{bmatrix} 9,2668 & 0 & 0 \\ 0 & 1,7121 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4412 \end{bmatrix}$$

$\|A\|_2 = 9,2668 \rightarrow \|A\|_2 = \sigma_1$

b. $A = U \Sigma V^T$

$\|A\|_2 = \|U \Sigma V^T\|_2$

$\|A\| \leq \|U\|_2 \|\Sigma\|_2 \|V^T\|_2$

U y V^T son ortonormales por lo que su norma es 1

$\|A\|_2 \leq \|\Sigma\|_2$

$\|A\|_2 \leq \sqrt{tr(\Sigma^T \Sigma)}$ $\quad \Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$

$\|A\|_2 \leq \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \leq \sqrt{\sigma_1^2}$

$\|A\|_2 \leq \sigma_1$

c. $x = Ve_1$ $\quad (\|x\|_2 = 1)$

Por ende $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \cancel{\|x\|}^{1} \leq \|A\|_2$

$\|Ax\|_2 = \|A\|_2$

d. Sea $e_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T$ y $w = \Sigma \cdot e_1$

Note que w tiene la forma $\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\|w\| = \sigma_1$

Se sabe que $\|A\|_2 \leq \sigma_1$ y por los resultados de c se tiene que $\|Aw\|_2 = \sigma_1$. Entonces:

$\|Aw\| \leq \|\Sigma w\|$

$\|A\| \|w\| \leq \|\Sigma\| \|w\|$

$\|A\| \sigma_1 \leq \sigma_1 \sigma_1$

$\rightarrow \|A\| \leq \sigma_1$

$\|A\| = \sigma_1$

2. $T(t) = a_1 + a_2 e^{-(t+a_3)}$

$$f_i = a_1 + a_2 e^{-(t+a_3)} - y_i$$

$$F = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 e^{-(t_1+a_3)} - y_1 \\ \vdots \\ a_1 + a_2 e^{-(t_n+a_3)} - y_n \end{bmatrix}$$

$$DF = \begin{bmatrix} 1 & e^{-(t_1+a_3)} & -a_2 \cdot e^{-(t_1+a_3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-(t_n+a_3)} & -a_2 \cdot e^{-(t_n+a_3)} \end{bmatrix}$$

4. $A_{10 \times n} \, x_{n \times 1} = b_{10 \times 1}$

• $n = 6$

Sol Real	Sol QR	Sol QReco	Sol Min Cua
$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

Como se puede apreciar los 3 metodos dan el resultado correcto

• $n = 8$

Sol Real	Sol QR	Sol QReco	Sol Min Cua
$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1,0011\\0,9461\\1,6754\\-2,53559\\10,2645\\-11,8154\\9,9466\\-1,4829\end{bmatrix}$

Como se aprecia el metodo de minimos cuadrados genera muy malos resultados a comparación de los otros que dan muy buen resultado