Курс «Сложности вычислений 2021». Максимизация 2-КНФ

Вячеслав Сурков, МФТИ, группа Б05-921

Январь 2022

Аннотация

Рассматривается вероятностный алгоритм Гоманса-Уильямсона для приближенного решения задач MAX-CUT и MAX-2SAT, работающий за полиномиальное от длины входа время и решающий задачу с точностью ~ 0.87856. Описан принцип работы алгоритма, выведены оценки точности, а также проанализированы результаты тестовых запусков. Найдены случаи, в которых алгоритм работает хорошо, результаты обоснованы с точки зрения теории.

1 Введение

Пусть G — неориентированный граф с n вершинами и m ребрами. Задача $\mathsf{MAX-CUT}$ заключается в нахождении наибольшего разреза, другими словами, такого подмножества вершин S, что количество ребер, у которых один конец принадлежит S, а другой — не принадлежит S, наибольшее.

Если F — пропозициональная формула в конъюктивной нормальной форме с n переменными и m дизъюнктами, более того, каждый дизъюнкт — двухместный. Задача $\mathsf{MAX-2SAT}$ состоит в нахождении набора значений переменных, при котором выполуено как можно больше дизъюнктов.

Задачи имеют некоторые сходства: нужно поделить объекты на два класса для максимизации некоторого функционала; обе задачи являются **NP** полными. Наивный точный алгоритм заключается в полном переборе всех делений на классы, и имеет экспоненциальную сложность. Для решения задач можно применить вариации алгоритма Гоманса-Уильямсона. Хотя алгоритм имеет полиномиальную сложность, он не является точным: если f_{opt}, f_{algo} — оптимальное и полученное алгоритмом значения функционала, то $E(f_{algo}) \geq \alpha f_{opt}$, где $\alpha \sim 0.87856$. Также, будет выведено, что в некоторых случаях алгоритм возвращает точный ответ с вероятностью, равной 1.

2 Описание алгоритма

[1] Обе задачи можно свести к следующей:

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$s.t.\ x_i \in \{-1, 1\}$$

где (a_{ij}) — некоторая квадратная матрица. Опишем сведение.

MAX-CUT. Для каждой вершины заведем переменную $x_i = \pm 1$, отражающая класс, к которому принадлежит вершина. Тогда размер разреза равен

$$\sum_{(u,v) \in E} \frac{1}{2}(1 - x_u x_v)$$

Значит, если положить a — матрица смежности G, то поиск наибольшего разреза равносилен решению

$$\frac{1}{4} \max \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(1 - x_i x_j)$$

$$s.t.\ x_i \in \{-1, 1\}$$

MAX-2SAT. Для каждой переменной v_i заведем $x_i = \pm 1$, также введем вспомогательную $x_0 = \pm 1$. Если $x_i = x_0$, то это означает, что переменной i соответствует истина, иначе ложь.

Теперь рассмотрим, что означает истинность дизъюнкта:

$$[v_i \vee v_j] = 1 - [v_i \wedge v_j] = 1 - [v_i][v_j] = 1 - \frac{1 - x_0 x_i}{2} \frac{1 - x_0 x_j}{2} = \frac{1 + x_0 x_i}{4} + \frac{1 + x_0 x_j}{4} + \frac{1 - x_i x_j}{4}$$

Если переменная v_k находится под отрицанием, то соответствующий ей x_k нужно брать с противоположным знаком.

Как видим, для решения задачи, нужно максимизировать линейную комбинацию $x_i x_j$, либо минимизировать линейную комбинацию, но с противоположными коэффициентами.

Задача минимизации сформулирована, но ее в точности решать трудно. Расширим область допустимых x_i до поверхности единичной n-мерной сферы. То есть, решим задачу

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\textit{s.t.}\ ||x_i|| = 1$$

Это равносильно (лемма 1) решению

$$min X \cdot a$$

$$\textit{s.t.}\ X \succeq 0$$

$$X_{ii} = 1\ \forall i = 1 \dots n$$

Это частный случай задачи полуопределенного программирования (SDP); приближенное решение можно найти на полиномиальное время.

Более того, матрица X является матрицей Грама для векторов x_i. Чтобы восстановить какие-то x_i, которым соответствует X, можно воспользоваться lu-разложением матрицы X.

Далее, проведем случайную $(n-1)$-мерную гиперплоскость, проходящую через начало координат (то же самое, что случайно равномерно выбрать точку на S^n, вектор соединяющий начало координат и точку соответствует нормали гиперплоскости). Теперь можно вернуться к значениям $x_i = \pm 1$: переменным, соответствующим точкам на сфере, сопоставим ± 1 в зависимости от того, с какой стороны от гиперплоскости они находятся.

Пусть для исходных задач при таких значениях x_i, значение функционала равно f_{algo}, оптимальное значение — f_{opt}. Тогда (лемма 2.1 и 2.2) $E(f_{algo}) \geq \alpha E(f_{opt})$, где $\alpha \sim 0.87856$.

3 Формулировка и доказательство лемм

Лемма 1.[2] Рассматривается задача (1)

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\textit{s.t.}\ ||x_i|| = 1$$

Набор $\{x_i\}$ с матрицей Грама X является оптимальным для задачи (1) тогда и только тогда, когда X оптимально для задачи (2)

$$min X \cdot a$$

$$\textit{s.t.}\ X \succeq 0$$

$$X_{ii} = 1 \; \forall i = 1 \dots n$$

Доказательство. Во-первых, X матрица Грама $\Leftrightarrow$ X неотрицательно определена. Тогда будем рассматривать только $X \succeq 0$.

X *допустима для (2)* $\Leftrightarrow X_{ii} = 1 \, \forall i \Leftrightarrow ||x_i|| = 1 \, \forall i \Leftrightarrow \{x_i\}$ *допустимы для (1)*

Также, минимизируемый функционал в обеих задачах один и тот же, что завершает доказательство.

Лемма 2.1.[2] Рассматривается задача MAX-CUT. Алгоритм Гоманса-Уильямсона находит разрез, математическое ожидание величины которого составляет не менее α от максимального разреза, где $\alpha \; \sim 0.87856$.

Доказательство. Рассмотрим последний шаг алгоритма (проведение случайной гиперплоскости). Вероятность того, что точки, соответствующие вершинам фиксированного ребра (a, b) попадут по разные стороны от гиперплоскости H равна $\frac{arccos(x_a \cdot x_b)}{\pi}$. Действительно, для того, чтобы x_a, x_b находились по разные стороны от гиперплоскости H, необходимо и достаточно, чтобы прямая пересечения плоскости $(O; x_a; x_b)$ с H попала внутрь угла $(x_a O x_b)$.

Обозначим C как величину разреза, полученного алгоритмом; f_{opt} — величина оптимального разреза.

$$R\!:= \frac{1}{4} \max \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(1 - x_i x_j)$$

$$\textit{s.t. } x_i \in S^n$$

R легко получается из решения

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\textit{s.t. } ||x_i|| = 1$$

.

Обозначим β наибольшее число, такое что $arccos(t) \geq \beta(1 - t) \; \forall t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. $\alpha\!:= \frac{2\beta}{\pi}$. $\alpha \sim 0.87856$. Тогда:

$$E(C) = \sum_{(a,b)\in E} \frac{arccos(x_a \cdot x_b)}{\pi} \geq \sum_{(a,b)\in E} \frac{\beta}{\pi}(1 - x_a x_b) = \sum_{(a,b)\in E} \frac{\alpha}{2}(1 - x_a x_b) = \alpha R \geq \alpha f_{opt}$$

Последнее неравенство выполнено, так как ± 1 также лежат на сфере. Доказательство завершено.

Лемма 2.2[1]. Рассматривается задача MAX-2SAT. Алгоритм Гоманса-Уильямсона находит распределение значений переменных так, что математическое ожидание количества выполненных дизъюнкторв составляет не менее α от оптимального, где $\alpha \sim 0.87856$.

Доказательство во многом повторяет доказательство леммы 2.1, поэтому опустим его.

4 Тестовые наборы

Тесты разделены на две части: для MAX-CUT и для MAX-2SAT. Для того, чтобы оценить математическое ожидание значения функционала, я провожу случайную плоскость 1000 раз. Такое количество дает достаточную точность (точность метода Монте-Карло обратно пропорциональна квадратному корню количества запусков), и вычисления занимают разумное время.

4.1 MAX-CUT

- Графы $G(n, p)$, для $n = 6..14,\ p \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$. Для каждого случая сгенерировано 15 графов.

- Двудольные графы с размерами долей от 5 до 25 с шагом 5. Ребра между долями генерируются независимо с вероятностью $0.2, 0.5, 0.8$. Для каждого случая сгенерировано 15 графов.

4.2 MAX-2SAT

- Случайные 2-КНФ с количеством переменных от 2 до 6 и количеством дизъюнктов от 2 до 11. Для каждого случая сгенерировано 10 формул.

- Случайные 2-КНФ с теми же количествами переменных и дизъюнктов, но существует набор, на котором все дизъюнкты истинны. Для каждого случая сгенерировано 10 формул.

- 100 выполнимых 2-КНФ с 10 переменными и 50 дизъюнктами.

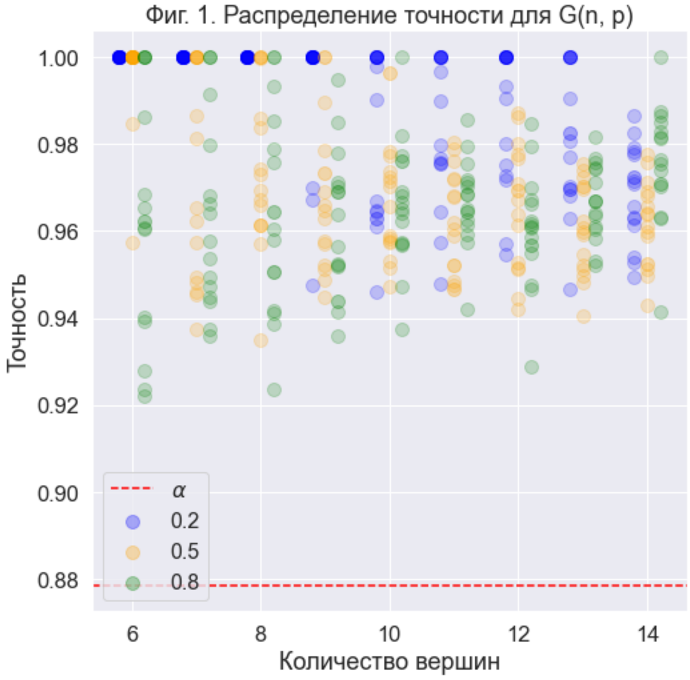
- Случайные 2-КНФ с количеством переменных от 2 до 6 и количеством дизъюнктов от 2 до 11. В каждом дизъюнкте одинаковые переменные (отрицания могут быть разными). Для каждого случая сгенерировано 10 формул.

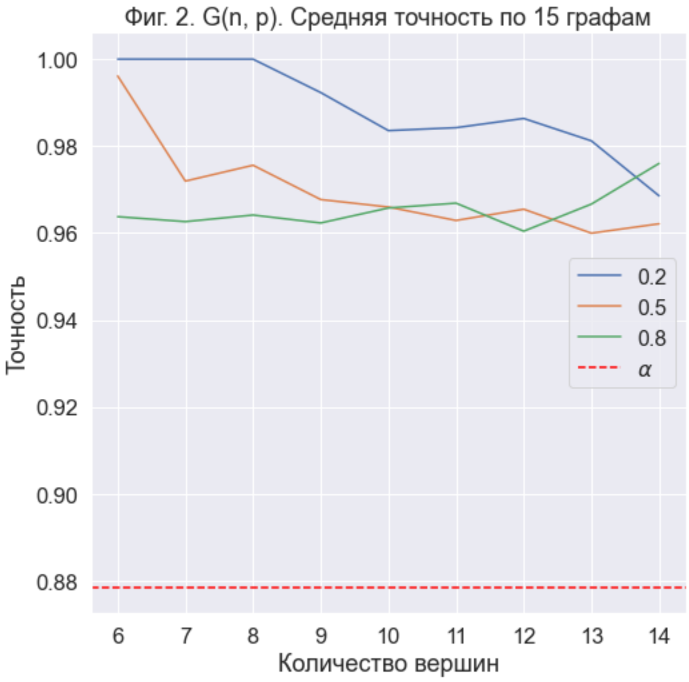
5 Запуски

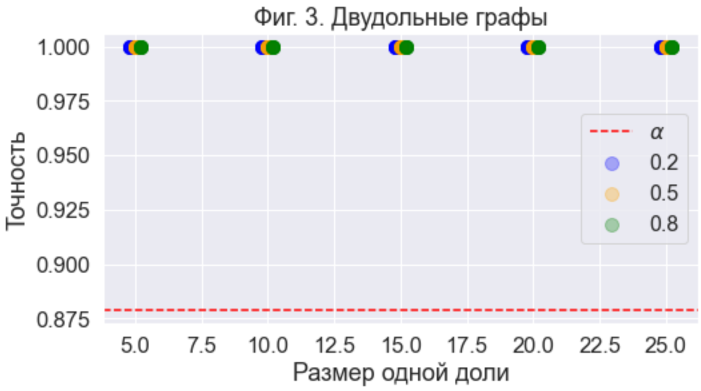
5.1 MAX-CUT

На графиках точность означает отношение оценки математического ожидания и оптимального ответа.

Фиг. 1. Распределение точности для G(n, p)





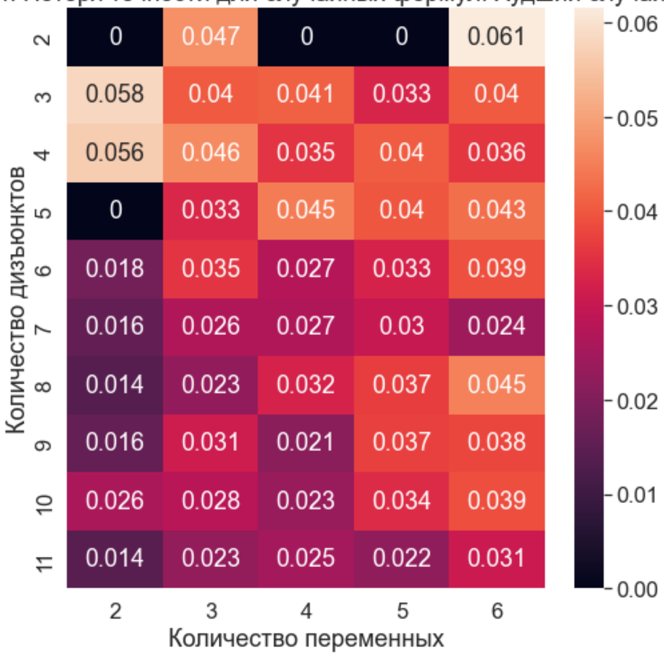


Видим, что не получилось приблизиться к теоретической оценке ни при каких n, p, наихудшая точность получилась равной ~ 0.92. Также можно заметить, что в среднем при $p = 0.2$ точность выше, но виден тренд, что отрыв уменьшается с ростом n. Также, видим, что для двудольных графов алгоритм дал точный ответ. Позже докажем, что в данном случае ответ точный почти наверное.

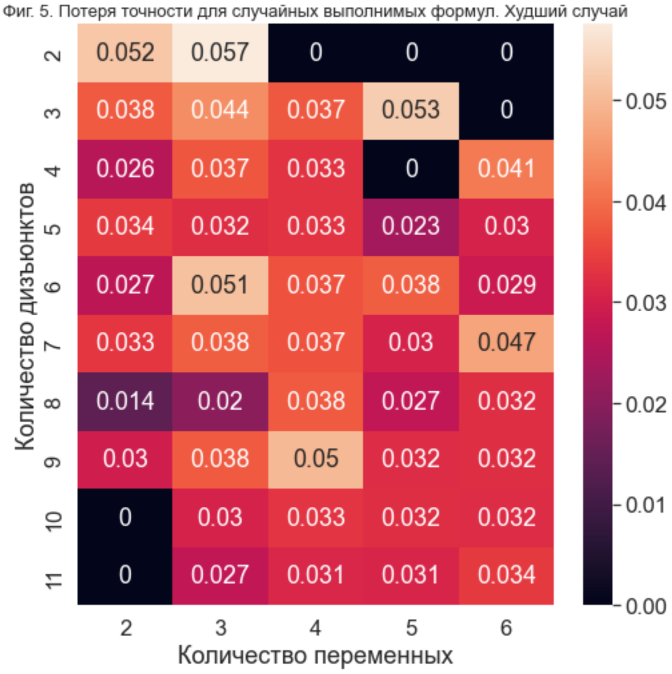
5.2 MAX-2SAT

Здесь под потерей точности имеется в виду величина дополнения точности до единицы.

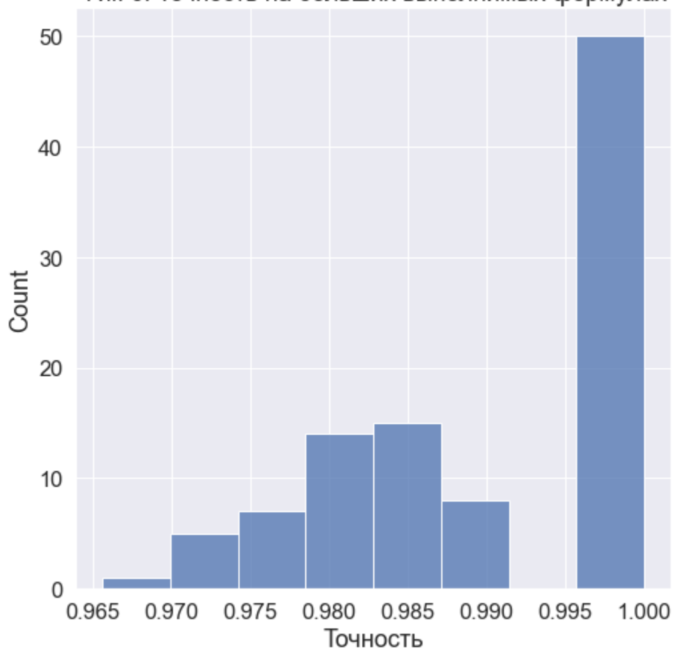
Фиг. 4. Потеря точности для случайных формул. Худший случай



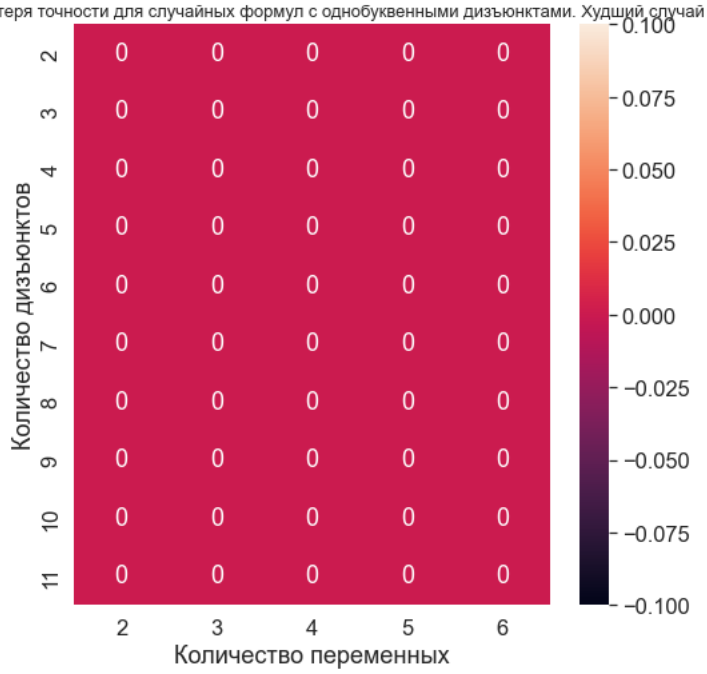
Фиг. 5. Потеря точности для случайных выполнимых формул. Худший случай



Фиг. 6. Точность на больших выполнимых формулах



Фиг. 7. Потеря точности для случайных формул с однобуквенными дизъюнктами. Худший случай



На случайных формулах точность оказалась очень высокой — не получилось найти формулу, для которой точность оказалась ниже $1-0.061 = 0.939$. Среди больших выполнимых формул тоже не удалось получить низкую точность. Примечательно распределение точности — для примерно половины формул алгоритм не совершил ошибку (либо совершил небольшую ошибку на малом числе запусков), а за исключением этого высокого столбика плотность унимодальна с локальным максимумом при точности около 0.985. На однобуквенных дизъюнктах алгоритм отработал точно, это докажем далее.

6 Доказательства закономерностей

Утверждение 1. Для двудольных графов алгоритм Гоманса-Уильямсона даёт точный ответ почти наверное.

Доказательство. Рассмотрим точки x_i, x_j, принадлежащие единичной сфере. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $x_i \cdot x_j \geq -1$, равенство достигается только при $x_i = -x_j$. Так как граф двудольный, то зафиксировав точку a на сфере, положим переменные соответствующие правой доле равными a, а остальные $-a$. Тогда в сумме $\sum_{(u,v)\in E} \frac{1}{2}(1 - x_u \cdot x_v)$ все $x_u \cdot x_v$ равны -1. Значит сумма принимает наименьшее возможное значение. Обратно: если сумма принимает наименьшее значение, то все скалярные произведения равны -1, переменные, соответствующие вершинам на разных концах ребра, должны лежать в противоположных точках сферы. Тогда случайная плоскость пересечет все ребра почти наверное.

Утверждение 2.. Для 2-КНФ с однобуквенными дизъюнктами алгоритм Гоманса-Уильямсона даёт точный ответ почти наверное.

Доказательство. Рассмотрим задачу в формулировке нахождения минимума скалярного произведения матрицы Грама X с матрицей a. В 2-КНФ F присутствуют дизъюнкты трех типов:

- $v \vee \bar{v}$
- $v \vee v$
- $\bar{v} \vee \bar{v}$

Из раздела 2 известно:

$$[v_i \vee \bar{v}_i] = \frac{1 + x_0 x_i}{4} + \frac{1 - x_0 x_i}{4} + \frac{1 + 1}{4} = 0.5$$

Следовательно, этот дизъюнкт не влияет на ответ. Его можно убрать из формулы, и множество оптимальных выполняющих наборов не изменится.

$$[v_i \vee v_i] = \frac{1 + x_0 x_i}{4} + \frac{1 + x_0 x_i}{4} + \frac{1 - 1}{4} = \frac{1 + x_0 x_i}{2} = -[\bar{v}_i \vee \bar{v}_i]$$

Значит, в сумме ненулевые слагаемые стоят только перед $x_0 \cdot x_i$. Наименьшее значение скалярного произведения равно -1, и достигается только когда $x_i = -x_0$, а наибольшее значение равно 1 (из неравенства Коши-Буняковского), и достигается только при $x_i = x_0$. Тогда для минимизации суммы нужно положить $x_i = x_0$, если $a_{0i} < 0$, и $x_i = -x_0$, если $a_{0i} > 0$. Более того, только при выполнении этих условий достигается минимум. Дизъюнкты, для переменных v_k которых выполнено $a_{0k} = 0$ никак не влияют на ответ ни в задаче на сфере, ни в задаче на ± 1. Тогда случайная гиперплоскость разделит $x_i = x_0$ и $x_j = -x_0$ почти наверное. После замены всех x_i на ± 1 значение функционала не поменяется, а оно было наименьшим для задачи на сфере, следовательно будет наименьшим для задачи на ± 1. Отсюда полученный ответ — точный.

7 Выводы

Не удалось найти граф для MAX-CUT и формулу для MAX-2SAT, на котором точность алгоритма близка к теоретической оценке. Это мотивирует искать более точные оценки.

Существуют объекты, на которых алгоритм Гоманса-Уильямсона работает точно почти наверное: это двудольные графы в задаче MAX-CUT и 2-КНФ в каждом дизъюнкте которой присутствует лишь один вид переменной.

Список литературы

[1] Michel X. Goemans, David P. Williamson, Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems Using Semidefinite Programming, https://klein.mit.edu/~goemans/PAPERS/maxcut-jacm.pdf

[2] Simon Fraster University. Semidefinite Programming. Lecture notes. The Goemans-Williamson Algorithm, https://www.sfu.ca/~mdevos/notes/semidef/GW.pdf