

信号理論基礎 演習問題1

提出に関する注意事項:

- ノート・レポート用紙等に解答する(問題文は書かなくても良い)。
 - 解答をスキャン(カメラで撮影など)して電子ファイルとして ILIAS から提出する。
ファイル形式は提出ができれば何でも構いません(jpeg, word, pdf など)。
ファイル名は「bst_report1」としてください。
複数のファイルになる場合は「bst_report1_1」、「bst_report1_2」などとしてください。
 - 提出期限: 5月7日(木) 24:00(日本時間) まで。
-

1. 次の三角関数の積を三角関数の和で表せ。

$$(1) \sin \alpha \sin \beta \quad (2) \sin \alpha \cos \beta \quad (3) \cos \alpha \sin \beta \quad (4) \cos \alpha \cos \beta$$

2. 次の関数の基本周期を求めよ。

$$(1) \cos 4\pi t \quad (2) \sin 3t + 3 \cos 5t \quad (3) \sin t \cos 2t \quad (4) \cos^2(2\pi t)$$

3. 次を計算せよ。但し, t は実数, n, m は正の整数であり $n \neq m$ とする。

また, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ である。

$$(1) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt \quad (2) \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \quad (3) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

$$(4) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt \quad (5) \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

$$(6) \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega_0 t) dt \quad (7) \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega_0 t) dt$$

$$1. \begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$(1) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$(2) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$(3) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

$$(4) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$2. (1) \cos 4\pi t$$

$$\frac{1}{2} //$$

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ \omega &= 2\pi \frac{1}{T} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

$$(2) \sin 3t + 3 \cos 5t$$

$$T = \frac{2}{3}\pi m, T = \frac{2}{5}\pi n$$

$$\left(\frac{2}{3}\pi m = \frac{2}{5}\pi n \rightarrow \frac{m}{3} = \frac{n}{5} \rightarrow 5m \right)$$

$$\rightarrow m=3, n=5$$

$$\rightarrow T = \frac{2}{3}\pi \times 3 = \underline{2\pi} //$$

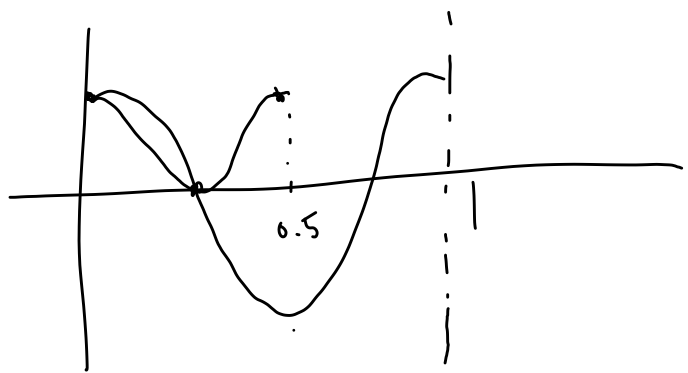
$$(3) \sin t \cos 2t$$

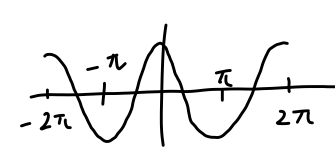
$$T = \frac{2}{1}\pi = 2\pi, T = \frac{2}{2}\pi = \pi$$

$$\therefore T = \underline{2\pi} //$$

$$(4) \cos^2(2\pi t)$$

$$T = \underline{\frac{1}{2}} //$$



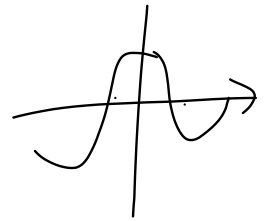
$$\begin{aligned}
 3. (1) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) dt &= -\frac{1}{n\omega_0} \left[\cos(n\omega_0 t) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= -\frac{1}{n \frac{2\pi}{T}} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2}\right)\right) \right) \\
 &= -\frac{T}{2\pi n} (\cos(\pi n) - \cos(-\pi n)) \\
 &= \underline{0} \#
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 (2) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) dt &= \frac{T}{n\omega_0} \left[\sin(n\omega_0 t) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{T}{2\pi n} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2}\right)\right) \right) \\
 &= \frac{T}{2\pi n} (\sin(\pi n) - \sin(-\pi n)) \\
 &= \underline{0} \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\cos\left(\frac{2\pi t(m-n)}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t(m+n)}{T}\right) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{T}{2\pi(m-n)} \sin\left(\frac{2\pi(m-n)}{T} t\right) + \frac{T}{2\pi(m+n)} \sin\left(\frac{2\pi(m+n)}{T} t\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \underline{0} \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. (4) \quad & \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(n\omega_0 t - m\omega_0 t) - \cos(n\omega_0 t + m\omega_0 t)) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t - m\omega_0 t)}{(n-m)\omega_0} - \frac{\sin(n\omega_0 t + m\omega_0 t)}{(n+m)\omega_0} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \underline{0} \quad \text{H}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\
 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(n\omega_0 t + m\omega_0 t) + \cos(n\omega_0 t - m\omega_0 t)) dt \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+m)\omega_0 t)}{(n+m)\omega_0} + \frac{\sin((n-m)\omega_0 t)}{(n-m)\omega_0} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos((n+m)\pi)}{(n+m)\omega_0} + \frac{\cos((n-m)\pi)}{(n-m)\omega_0} - \frac{\cos(-(n+m)\pi)}{(n+m)\omega_0} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos(-(n-m)\pi)}{(n-m)\omega_0} \right)
 \end{aligned}$$

$$\underline{= 0} \quad \text{H}$$

$$3.(6) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2(n\omega_0 t) dt$$

$$u = n\omega_0 t \quad \text{とおく}$$

$$\frac{du}{dt} = n\omega_0 \rightarrow dt = \frac{1}{n\omega_0} du$$

$$\frac{t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rightarrow \frac{T}{2}}{u \Big|_{-\pi}^{\pi} \rightarrow \pi}$$

$$\text{5zt} = \frac{1}{n\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(u) du$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} du - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2u du \right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} \left(\left[\frac{1}{2} u \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4} [\sin 2u]_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} \left(0 - \frac{1}{4} (0 - 0) \right)$$

$$= 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$3.(1) \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos^2(n\omega_0 t) dt$$

$$u = n\omega_0 t \quad \text{とおく}$$

$$\frac{du}{dt} = n\omega_0 \rightarrow dt = \frac{1}{n\omega_0} du$$

$$\begin{array}{c|c} t & -\frac{\tau}{2} \rightarrow \frac{\tau}{2} \\ \hline u & -\pi \rightarrow \pi \end{array}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(u) du$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2u}{2} du$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} du + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2u du \right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} \left(\left[\frac{1}{2} u \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4} \left[\sin 2u \right]_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} \left(0 - \frac{1}{4} (0 + 0) \right)$$

$$= 0$$