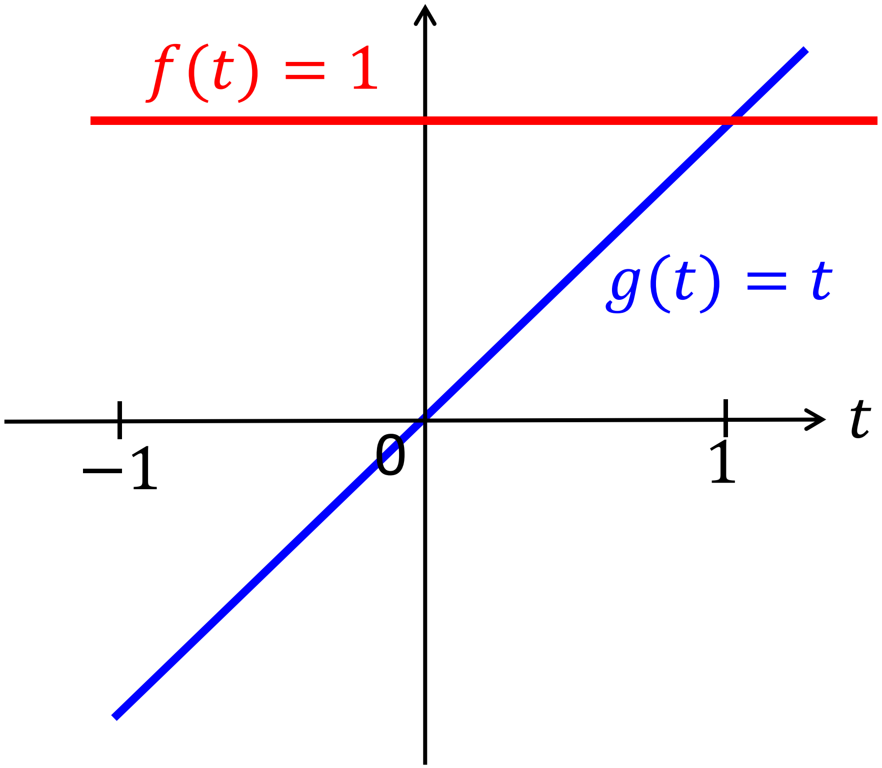
信号理論基礎

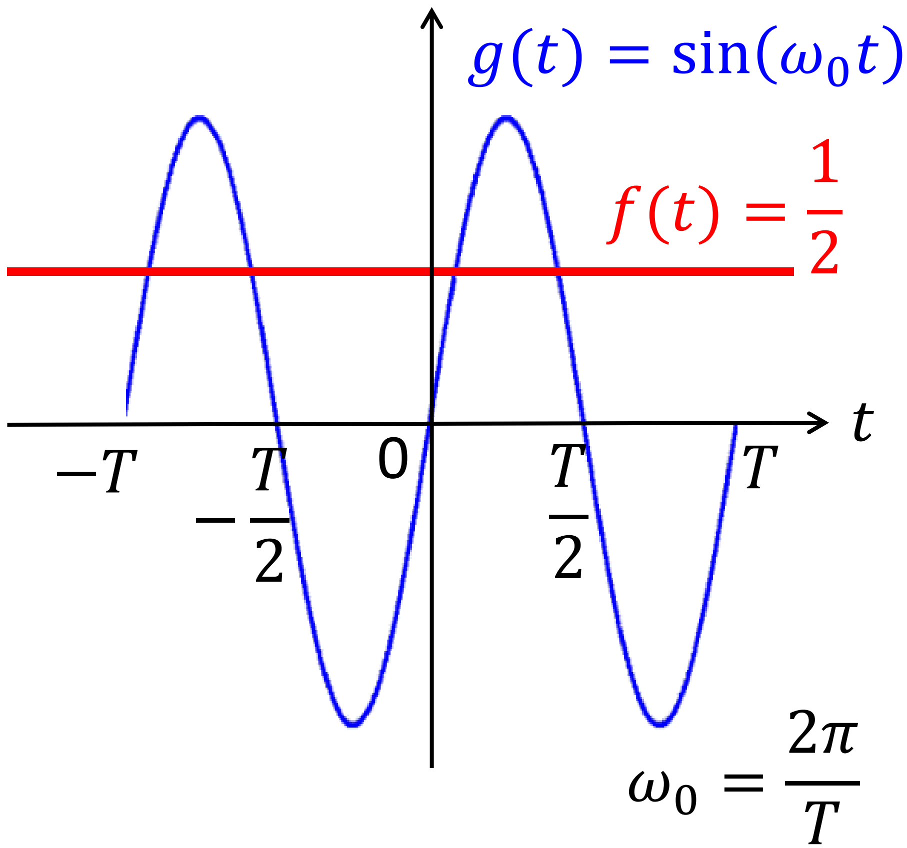
2020/05/01

関数 $f(t)$ と $g(t)$ は 直交しているか？

区間$[-1,1]$で直交しているか？



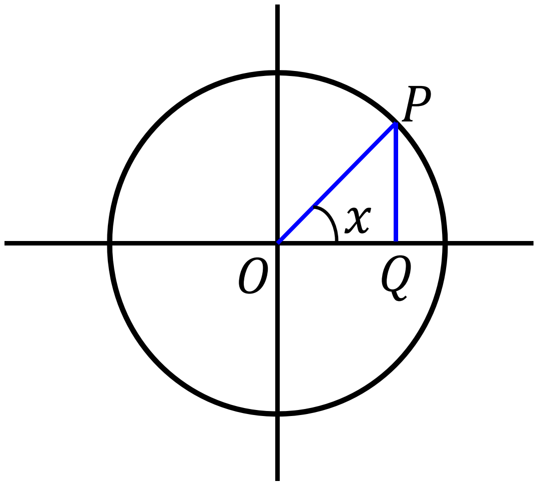
区間$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$で直交しているか？



【今日の目標】　関数の直交を理解する

（復習） 三角関数

三角関数の定義



$$\sin x = \frac{PQ}{OP}$$

$$\cos x = \frac{OQ}{OP}$$

性質1： $\sin 0 = 0,\ \sin\pi = 0,\ \cos 0 = 1,\ \cos\pi = -1$

一般化して、整数 n **に対して**

$$\sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = (-1)^n$$

性質2： $\sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

これも一般化すれば、

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = 1 \qquad (n = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots)$$

$$\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi = -1 \quad (n = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots)$$

性質3： $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

絶対覚える！

- **オイラーの公式**

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- **加法定理**

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

参考)

$$e^{j(x+y)} = \cos(x+y) + j\sin(x+y)$$

$$e^{j(x+y)} = e^{jx}e^{jy} = (\cos x + j\sin x)(\cos y + j\sin y)$$

$$= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + j(\sin x\cos y + \cos x\sin y)$$

フーリエ (フランス:1768〜1830, ナポレオンの時代)

1807年:「**任意の周期関数は三角関数によって級数展開できる**」という**フーリエ級数**を提案.

＊級数:(無限)数列の和の形で表現

フーリエ級数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0,\quad f_0 = \frac{1}{T},\quad T \text{ は周期}$$

基本角周波数　基本周波数

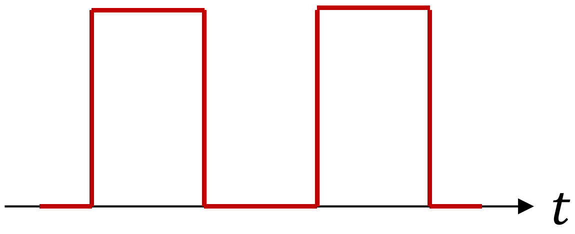
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt, \quad \cdots n = 0,1,2,\cdots,\infty$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt, \quad \cdots n = 1,2,\cdots,\infty$$

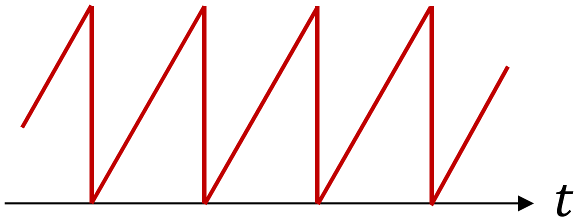
ジャン・バティスト
・ジョゼフ・フーリエ

a_n, b_n:**フーリエ係数** → 各周波数成分が
どのくらいの大きさなのかを表す.

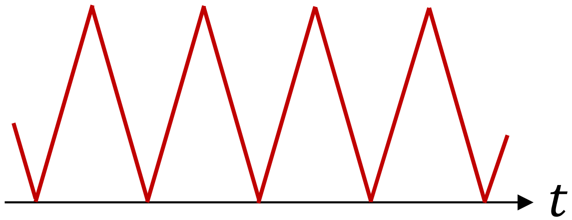
フーリエの主張！



矩形波



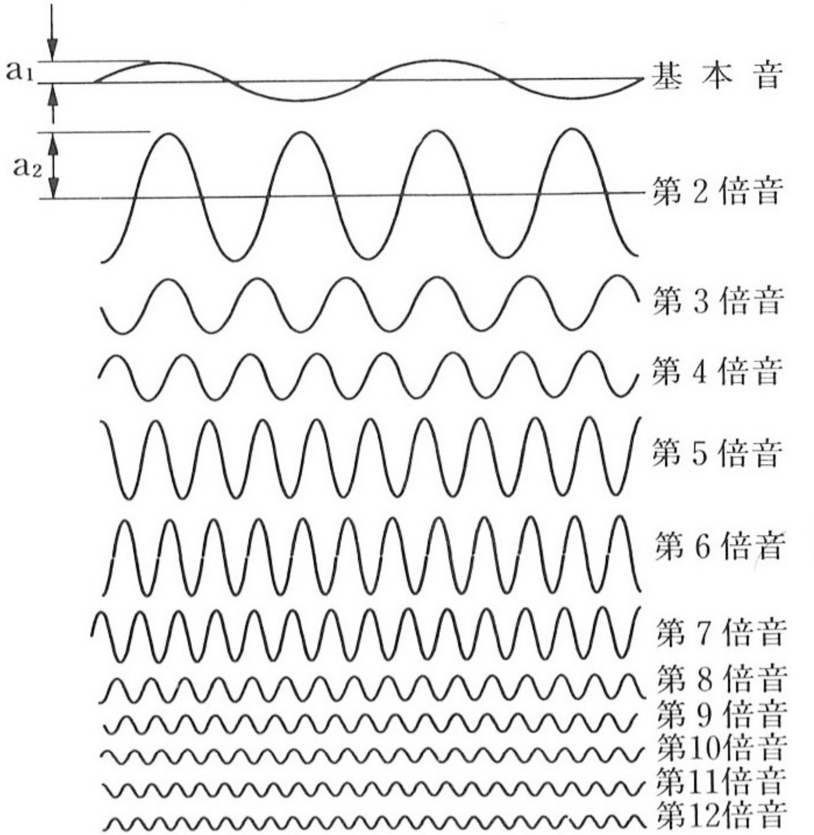
のこぎり波



三角波

一見複雑そうな信号も
単なる sin, cos の重ね合わせ

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$



1.1 周期関数(p.1)

■ **すべての t に対して次式を満たす関数：**

$$x(t) = x(t+T)$$

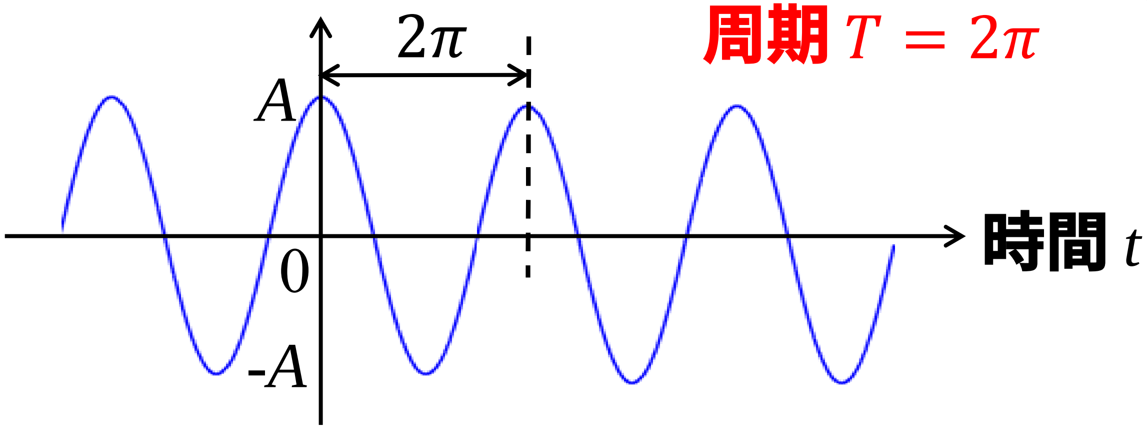
＊上記を満たす正の最小値 T を「周期（基本周期）」と呼ぶ

$$x(t) = x(t+nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

基本角周波数：$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$，**基本周波数**：$f_0 = \dfrac{1}{T}$

➢ **周期関数代表例**：sin, cos, exp **など**

$$x(t) = A\cos t$$



周期 $T = 2\pi$

$$x(t) = x(t+T)$$

$$\begin{aligned} A\cos t &= A\cos(t+T) \\ &= A\cos(t+2\pi) \\ &= A\cos(t+4\pi) \\ &\vdots \end{aligned}$$

周期関数であるための条件

$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ が周期関数であるためには？

周期関数の定義 $f(t) = f(t + T)$ より

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = \cos(\omega_1 t + \omega_1 T) + \cos(\omega_2 t + \omega_2 T)$$

を満たす T が存在する。

整数 m に対して $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos\theta$ なので

$$\omega_1 T = 2\pi m, \quad \omega_2 T = 2\pi n, \quad m, n: \text{整数}$$

$$\frac{2\pi m}{\omega_1} = \frac{2\pi n}{\omega_2} \Longrightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n}{m}$$

よって、$\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ が有理数(rational number)でなければならない

【例】 関数 $x(t) = 1 + \cos(t) + \cos(t/2) + \cos(t/3)$
の基本周期、基本周波数、基本角周波数を求めよ。

解） 関数 $x(t)$ **が基本周期** T **で周期的であるとすると，定義より**

$$1 + \cos(t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{3}\right) = 1 + \cos(t + T) + \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{T}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{3} + \frac{T}{3}\right)$$

を満たす T **が存在する。直流(定数)はすべての周期に対応。**

いかなる m **についても** $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos\theta$ **であるので，**

$T = 2\pi m,\quad \dfrac{T}{2} = 2\pi n,\quad \dfrac{T}{3} = 2\pi k,$ **ただし，**m, n, k **は整数**

よって、$T = 2\pi m = 4\pi n = 6\pi k$ **より** $m = 2n = 3k$ **となる。**

1,2,3**の最小公倍数は** 6 **なので，**$m = 6, n = 3, k = 2$。

したがって，基本周期は $T = 12\pi$

基本周波数は$f_0 = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{12\pi}$， **基本角周波数は** $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{1}{6}$

【例題】　関数 $x(t)=\sin^2 t$

の基本周期、基本周波数、基本角周波数を求めよ。

$$x(t)=\sin^2 t$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t \quad =\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t+2T)$$

$\cos(\theta+2\pi m)=\cos\theta$ だから

$$2T=2\pi m$$

$m=1$ のとき $T=\pi$ であるから 基本周期は π

$$\therefore f_0=\frac{1}{T}=\frac{1}{\pi}, \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=2$$

1.2 フーリエ級数(p.4)

周期 T の周期関数 $f(t)$ は、
基本角周波数 ω_0とその整数倍からなる関数の和として表現できる

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots$$

$$+b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots$$

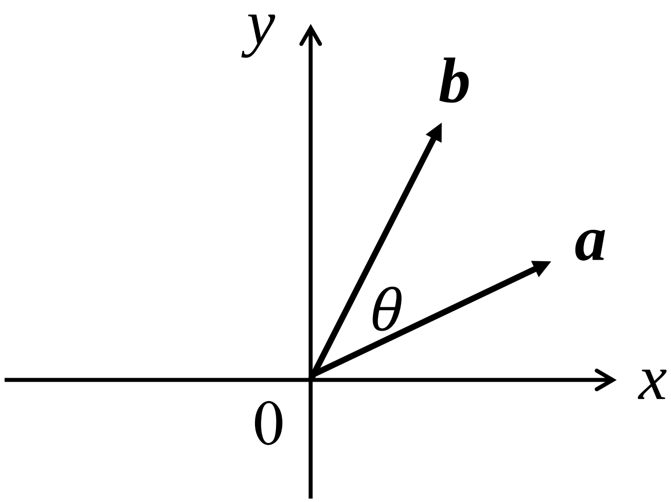
ただし、 $\omega_0 = 2\pi f_0, \quad f_0 = \frac{1}{T}$

三角関数の合成定理を使って、以下のようにも書ける

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

ただし、 $C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$

(復習) 内積と直交 ～高校数学のお話し～



内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$

大きさ $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$

$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ **：直交**

ベクトルが成分で表されているならば

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$$

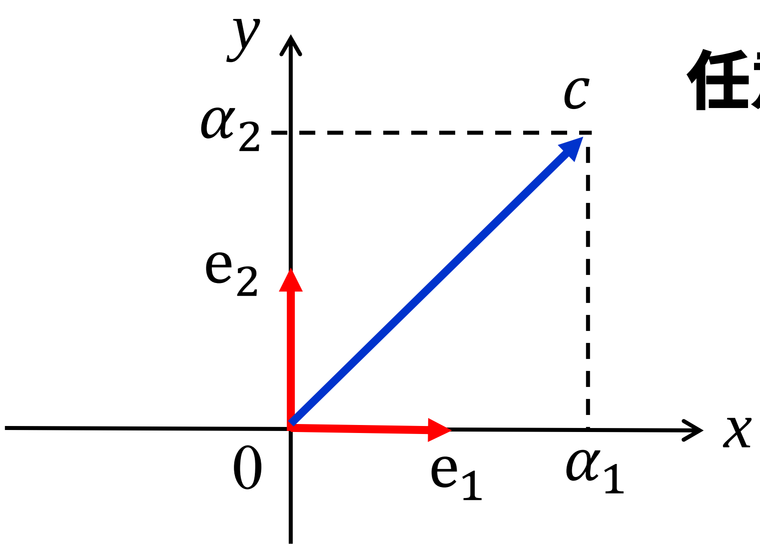
内積は要素同士の掛け算の総和

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{n=1}^{2} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

◎ **互いに線形独立なベクトルから成る集合：基底**

$\Rightarrow$ **ベクトル空間のすべてのベクトル** (or **点**) **を表せる**

◎ **代表的な基底ベクトル：** $\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

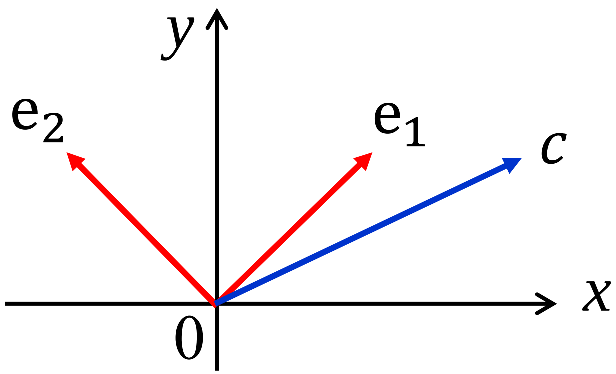


任意の座標を $c = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2$ **で表せる**

$\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ **は<u>正規</u>直交基底**

大きさ 1

【例題1】ベクトル c を $c = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2$ の形で表せ



$$\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$c = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2$ **より** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ **であるから**

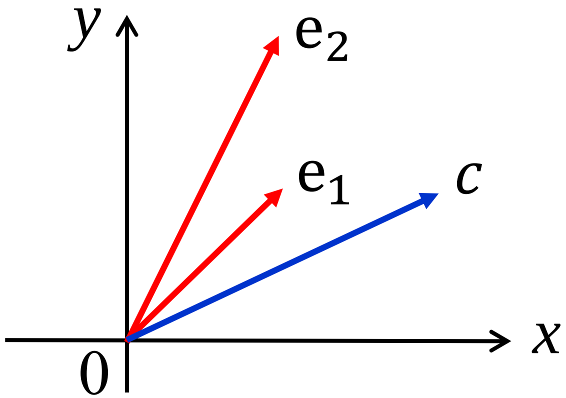
$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2 \quad \cdots ①$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2 \quad \cdots ②$$

の連立方程式を解いて $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

したがって、 $c = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}_1 + \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}_2$

【例題2】ベクトル c を $c = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2$ の形で表せ



$$\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$c = a\,e_1 + b\,e_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 1 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} + b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$a + b = \sqrt{2} \rightarrow b = \sqrt{2} - a$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a + 2 - \sqrt{2}a = 1$$

$$a(1-\sqrt{2}) = -1 \rightarrow a = \frac{-1}{1-\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow a = 1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{b}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow b = \sqrt{2} - a = \sqrt{2} - (1+\sqrt{2}) = -1$$

$$\therefore c = (1+\sqrt{2})e_1 - e_2$$

【サービス問題 (もし解く余裕があれば)】

ベクトル c を $c = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2 + \alpha_3 \mathrm{e}_3$ の形で表すとき、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めよ

$$\mathrm{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathrm{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} \quad \mathrm{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$$

$\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ は正規直交基底 → 内積で計算できる。

$$\alpha_1 = \langle c, e_1 \rangle = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{7}{\sqrt{5}}}$$

$$\alpha_2 = \langle c, e_2 \rangle = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{-3}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$\alpha_3 = \langle c, e_3 \rangle = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{30}} + \frac{-2}{\sqrt{30}} + \frac{10}{\sqrt{30}} = \underline{\frac{11}{\sqrt{30}}}$$

【例題3】例題1を内積を使って解いてみる

$$\boxed{\mathrm{c} = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2} \Longrightarrow$$

α_1 を求めるために、c と e_1の内積を取る

α_2 を求めるために、c と e_2の内積を取る

参考) p. 14連立方程式の解　$\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

$$\alpha_1 = \langle c, e_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\alpha_2 = \langle c, e_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

ベクトル $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \cdots$ が直交基底ならば、

$$c = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2 + \cdots$$

の係数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ は内積で計算できる

例題1の $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ は直交基底 ⇒ 内積で求まる

$$\alpha_1 = \langle c, e_1 \rangle, \quad \alpha_2 = \langle c, e_2 \rangle$$

例題2の $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ は非直交基底 (直交していない)
⇒ 内積では求まらない

基底が直交していると、後の計算が非常に楽になる！

【p.16のサービス問題の解答例】

ベクトル c を $c = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2 + \alpha_3 \mathrm{e}_3$ の形で表すとき、

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めよ

$$\mathrm{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

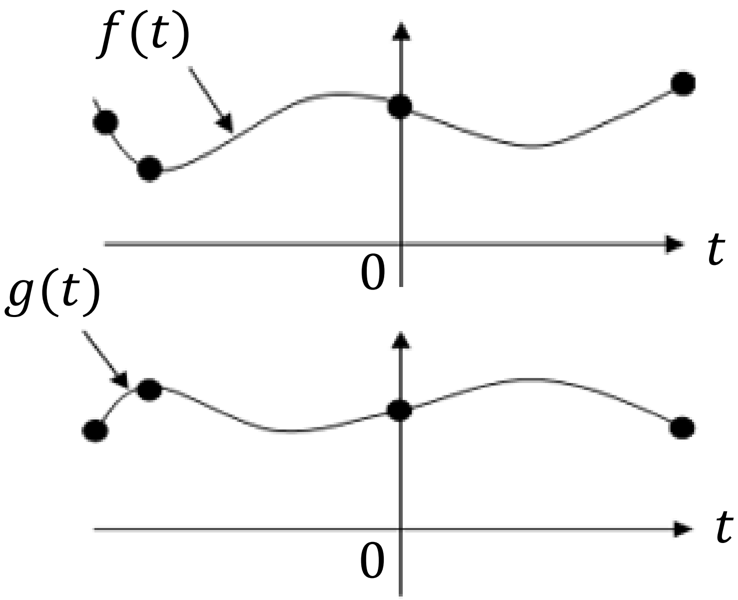
$\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ は正規直交基底

$$\alpha_1 = \langle c, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0\} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha_2 = \langle c, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1\} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\alpha_3 = \langle c, e_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\{3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 5\} = \frac{11}{\sqrt{30}}$$

関数の内積



離散（図の●）データのベクトル表記

$$f = \begin{bmatrix} f(-\infty) \\ \vdots \\ f(0) \\ \vdots \\ f(\infty) \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} g(-\infty) \\ \vdots \\ g(0) \\ \vdots \\ g(\infty) \end{bmatrix}$$

【離散（ベクトル）の場合】

f **と** g **の内積**：$\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(n)$

$\Downarrow$ **（離散間隔を 0 にすると）**

$$< f, g > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$$ **連続関数の内積**

【定義：関数の内積】

区間 $a \leq t \leq b$ で定義された関数 f と g の内積は

$$< f, g > = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

大きさ（ノルム）：$|f(x)| = \sqrt{< f, f >}$

（自分自身の内積の平方根）

f と g が複素関数の場合の内積：

$$< f, g^* > = \int_a^b f(t)g^*(t)dt$$

g^* は g の共役複素関数（p.69）

1.3 直交関数 (p.5)

集合$\{\phi_K(t)\}$ **における2つの関数** $\phi_m(t), \phi_n(t)$ **が**

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ r_n, & m = n \end{cases}$$

を満たすとき，区間 $a < t < b$ **において集合**$\{\phi_K(t)\}$ **は直交と呼ぶ**

→それぞれの関数のノルムは「0」でなく，2つの関数の内積は「0」のとき.

【例】 $\phi_1(t) = \frac{1}{2}$ **と** $\phi_2(t) = \sin(\omega_0 t)$, **は区間** $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ **で直交か？**

ただし，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ **とする。**

(1) $m = n = 1$ **のとき：**

$$\int_{-T/2}^{T/2} \phi_1(t)\phi_1(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}[t]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right\} = \frac{T}{4}$$

(2) $m = n = 2$ **のとき：**

$$\int_{-T/2}^{T/2} \phi_2(t)\phi_2(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(\omega_0 t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\{1-\cos(2\omega_0 t)\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[t]_{-T/2}^{T/2} - \left[\frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 t)\right]_{-T/2}^{T/2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{[t]_{-T/2}^{T/2} - \left[\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right]_{-T/2}^{T/2}\right\}$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{T}{8\pi}\{\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)\} = \frac{T}{2}$$

(3) $m = 1, n = 2$ **のとき：**

$$\int_{-T/2}^{T/2} \phi_1(t)\phi_2(t)dt \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\cdot\sin\omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= -\frac{T}{4\pi}\left[\cos\frac{2\pi}{T}t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{T}{4\pi}\{\cos\pi - \cos(-\pi)\} = 0$$

したがって、

$\phi_1(t) = \frac{1}{2}$ **と** $\phi_2(t) = \sin\omega_0 t$, **は区間** $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ **で直交**

フーリエ級数展開と直交関数

$$\left[\frac{1}{2}, \cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cdots\right]$$ **は直交関数系**

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) \cdots + a_n \cos(n\omega_0 t) + \cdots$$

$$+ b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots + b_n \sin(n\omega_0 t) + \cdots$$

フーリエ級数展開 ⇒ 関数 $f(t)$ を直交関数 (基底) で表現

1.4 フーリエ係数(pp.4 - 7)

(係数導出の詳細は教科書p.7, 1.4節を参照)

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t)\cdots + a_n\cos(n\omega_0 t) + \cdots$$

$$+b_1\sin(\omega_0 t) + b_2\sin(2\omega_0 t) + \cdots + b_n\sin(n\omega_0 t) + \cdots$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\,, \quad \cdots n = 0, 1,2, \cdots, \infty$$

$$b_n = \boxed{\frac{2}{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt\,, \quad \cdots n = 1,2, \cdots, \infty$$

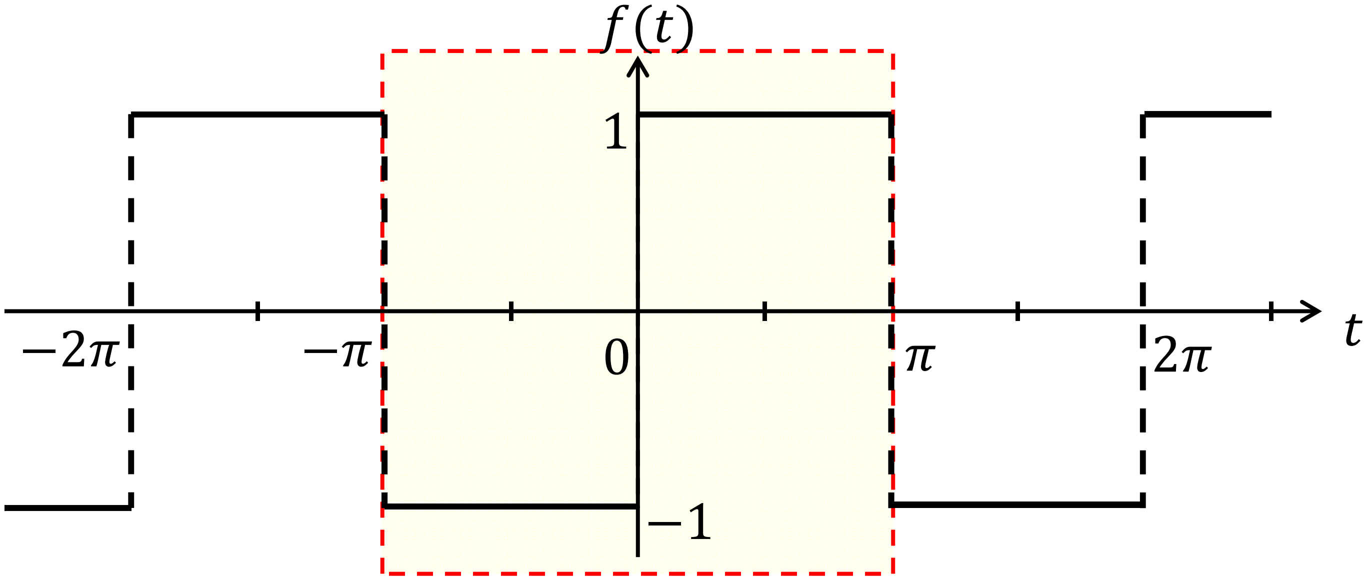
T は周期, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

内積を正規化するための係数

係数は内積で求まる

【例題】

下図に示す周期 $T = 2\pi$ **の関数** $f(t)$ **のフーリエ級数を求めよ．**



(基本) **周期** $T = 2\pi$

(基本) **角周波数** $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 1$

$-\pi \sim \pi$ **で考えた場合** $f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0 \\ \;\;\,1, & 0 < t < \pi \end{cases}$

あとは定義式を使って計算するだけ！

$$f(t)=\begin{cases}-1, & -\pi<t<0\\ 1, & 0<t<\pi\end{cases}$$

関数の値が区間によって変わる
→場合分け

■ $n=0$に対して

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt+\int_{0}^{\pi}1\,dt\right\}=\frac{1}{\pi}\{[-t]_{-\pi}^{0}+[\,t\,]_{0}^{\pi}\}=0$$

■ $n\neq 0$に対して

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos(nt)\,dt+\int_{0}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{0}^{\pi}\right\}=0$$

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin(nt)\,dt + \int_{0}^{\pi}\sin(nt)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{0}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$= \begin{cases} 0, & (n\text{: even}) \\ \dfrac{4}{n\pi}, & (n\text{: odd}) \end{cases}$$

計算結果をまとめると

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad b_n = \begin{cases} 0, & (n\text{: even}) \\ \dfrac{4}{n\pi}, & (n\text{: odd}) \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

よって、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left\{(2k-1)t\right\}$$