信号理論基礎

2020/05/08

【前回の復習】

フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots$$

$$+ b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots$$

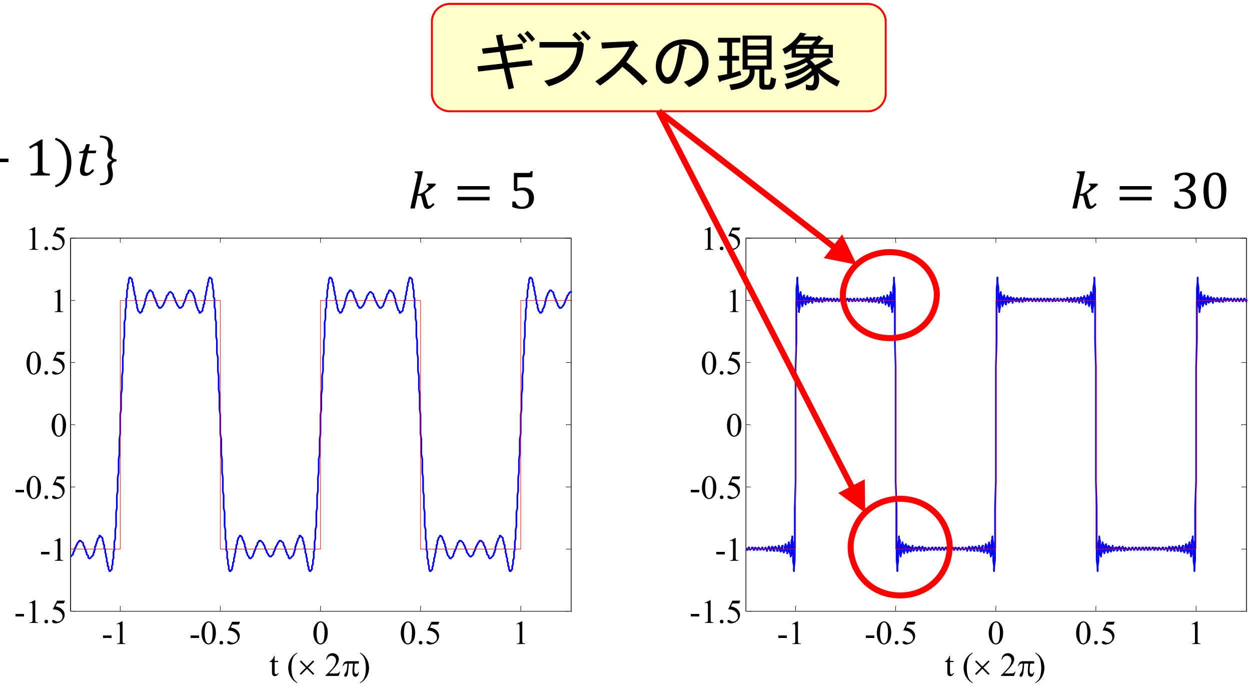
- ■ 周期関数に対する解析手法
- ■ sin, cosによる直交関数（基底）で表現 ⇒ 直交関数展開
- ■ フーリエ係数a_n、b_nは内積により計算可

【今日のテーマ】

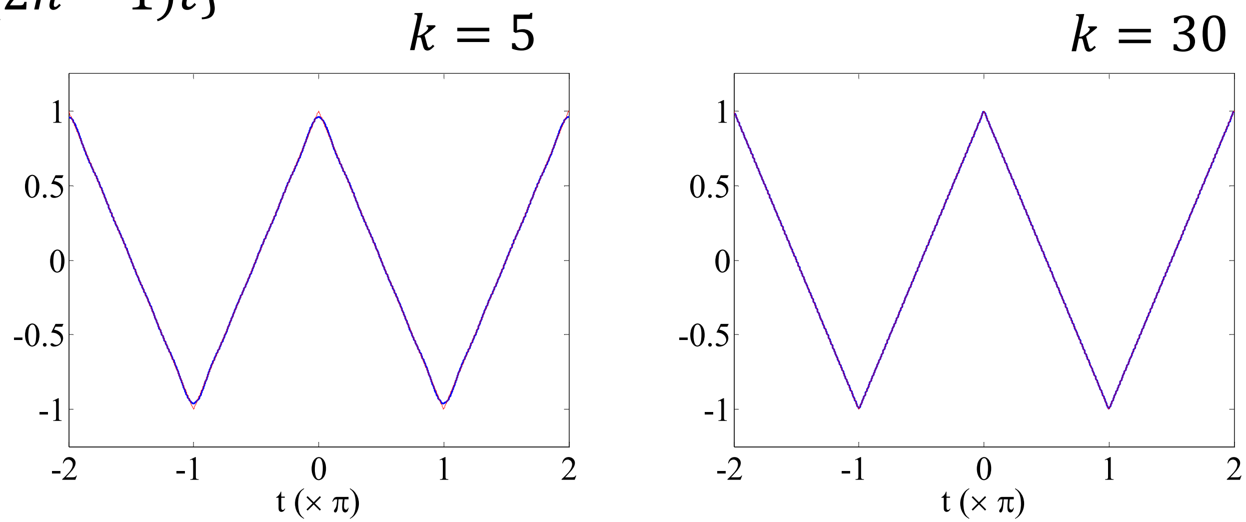
- 有限な項数での近似
- フーリエ級数は本当に成り立つのか？
- 偶奇分解とフーリエ級数展開

有限なフーリエ級数による近似例

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2n-1}\sin\{(2n-1)t\}$$



$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\{(2n-1)t\}$$

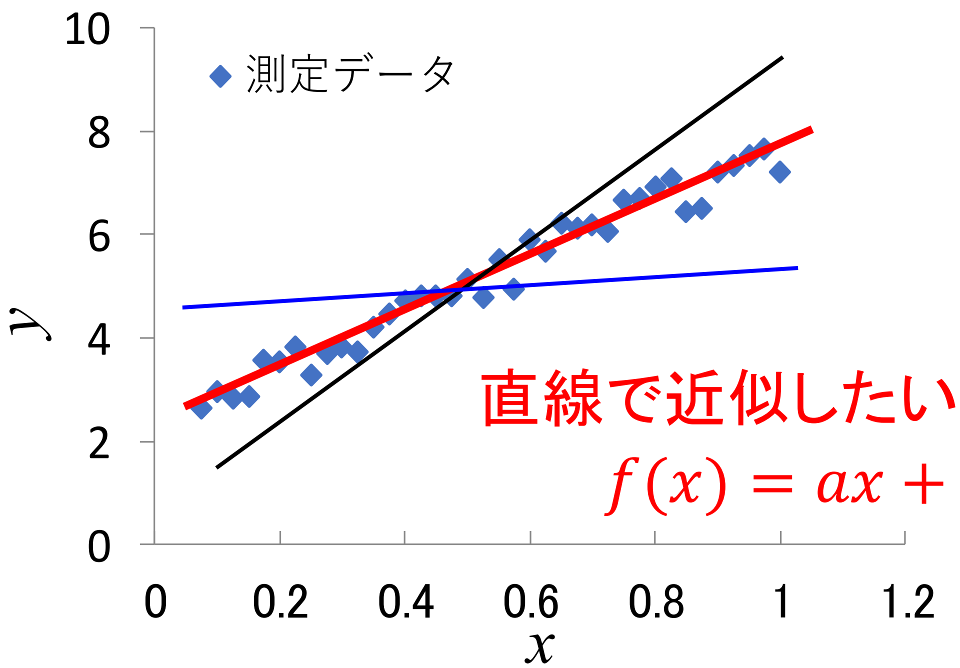


最小二乗法

<例>　N個のデータ対(x_i, y_i)が得られているとする.

$$(x_1, y_1) = (0.05, 2.9), (x_2, y_2) = (0.1, 3.2), \ldots, (x_N, y_N) = (1.5, 7.0)$$

x	y
0.05	2.9
0.1	3.2
0.15	3.6
⋮	⋮
1.5	7.0



直線で近似したい！

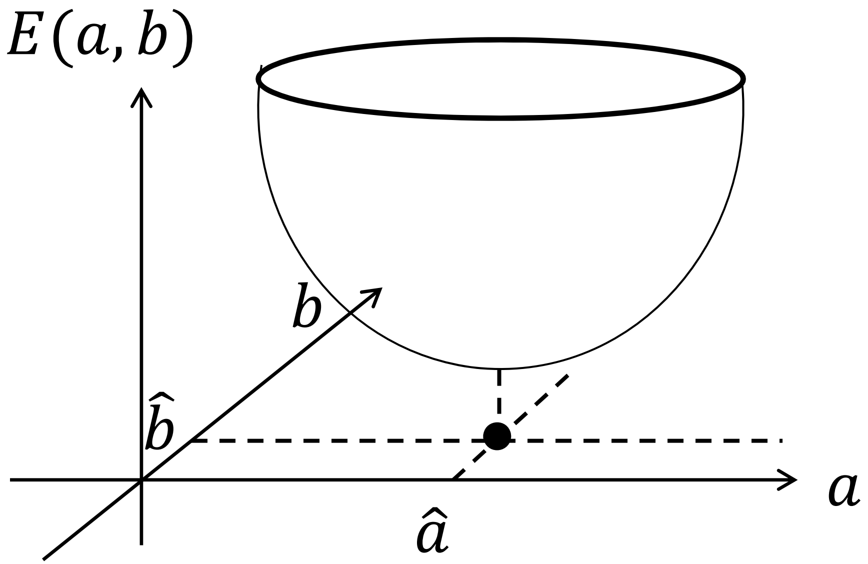
$f(x) = ax + b$

どうa, bを選ぶか？？

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$$

を最小にするa, bを選ぶ

誤差関数Eのイメージ



$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a x_i - b)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E(a,b)}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial E(a,b)}{\partial b} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{を満たす } a, b \text{ を求める}$$

1.5 有限なフーリエ級数による近似(p.15)

$$f(t) = S_k(t) + \epsilon_k(t)$$

ただし，$S_k(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$

$$\epsilon_k(t) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

➢ **平均自乗誤差(MSE：Mean-Square Error)**

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [\epsilon_k(t)]^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2\, dt$$

関数 $f(t)$ を有限なフーリエ級数$S_k(t)$で近似すると，
その近似は最小平均自乗誤差の性質を有する

（証明はp.15, 問題1.14）

確認　（詳細は教科書p.15, 問題1.14）

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [\epsilon_k(t)]^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{k} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\} \right]^2 dt$$

以下を満たす係数を求める

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial b_n} = 0, \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0}=\frac{\partial}{\partial a_0}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\}\right]^2 dt=0$$

微分、積分の順序交換すると、

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{\partial}{\partial a_0}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\}\right]^2 dt$$

$$=\frac{-1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\}\right]dt=0$$

$$=-\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{a_0}{2}dt+\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{k}\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\}\right\}dt}_{\text{直交性から「0」}}$$

$$=\frac{a_0}{2}-\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt=0 \quad\Longrightarrow\quad a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = \frac{\partial}{\partial a_n}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{k}\{a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\}\right]^2 dt = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial b_n} = \frac{\partial}{\partial b_n}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{k}\{a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\}\right]^2 dt = 0$$

も同様に考えると、

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

a_n, b_nの導出は自力でやってみる！

フーリエ係数の最終性

最良近似問題(平均自乗誤差を最小にする係数)は，関数 $f(t)$ のフーリエ係数である

★重要な性質

フーリエ係数の最終性

フーリエ係数は k と関係なく決まるので，さらに k を大きくした三角多項式で $f(t)$ を最良近似するときも，すでに求めてある係数を計算しなおす必要がない

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

フーリエ級数の各点収束

周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt、\quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

を考える。

$f(t) = S(t)$ が成り立つのはどんな時か？

【例】 $f(t) = t \quad (-\pi < t \leq \pi)$ のフーリエ級数 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\left\{\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \cdots\right\}$$

$t = \pi$ を代入すると $f(\pi) = \pi$ 、$S(\pi) = 0$ なので $f(t) \neq S(t)$

1.6 ディリクレの条件(p.17)

（収束＝収斂）

ディリクレ(1805-1859)
(数学者，ドイツ)

関数 $f(t)$ が**区分的に滑らかな周期関数**であるとき，フーリエ級数展開は，すべての点で収束する．ただし，$f(t)$ の不連続な点αでは，次の値に収束する．

$$\frac{\lim_{\varepsilon\to 0} f(\alpha+\varepsilon)+\lim_{\varepsilon\to 0} f(\alpha-\varepsilon)}{2}$$

（<u>証明はp.314, 付録A</u>）

「区分的に連続／滑らか」とは？

➢ **区分的に連続**： $f(t)$が$a \le t \le b$において

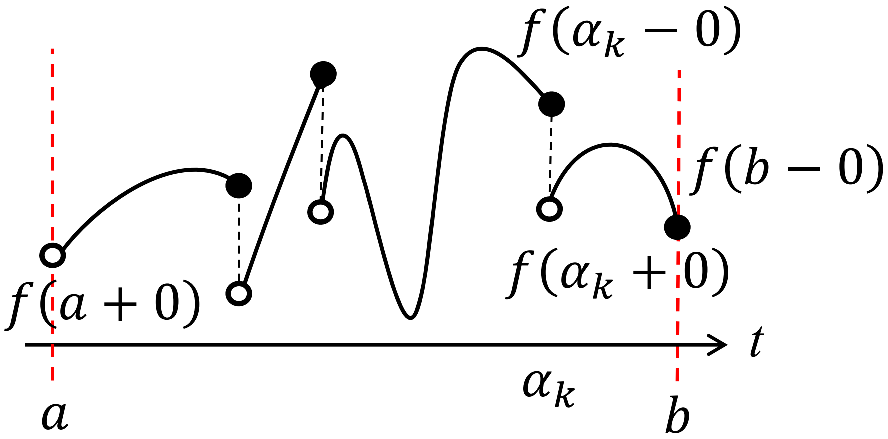
① 有限個の点を除いて連続で、

② $\lim_{\varepsilon \to 0} f(a+\varepsilon)$、$\lim_{\varepsilon \to 0} f(b-\varepsilon)$ が存在し、

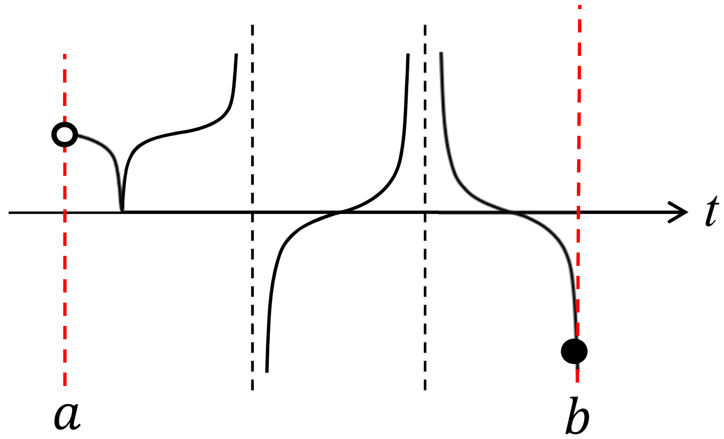
③ 各不連続点 $t = \alpha_k$ において、

$f(\alpha_k + 0)$、$f(\alpha_k - 0)$が存在する。

このような不連続点を「**第一種不連続点**」という。



（a）区分的に連続な例



（b）区分的に連続でない例

「区分的に連続／滑らか」とは？

➢ **区分的に連続**：　$f(t)$が$a \leq t \leq b$において

① 有限個の点を除いて連続で、

② $\lim_{\varepsilon \to 0} f(a+\varepsilon)$、$\lim_{\varepsilon \to 0} f(b-\varepsilon)$ が存在し、

③ 各不連続点 $t = \alpha_k$ において、

$f(\alpha_k + 0)$、$f(\alpha_k - 0)$が存在する。

このような不連続点を「**第一種不連続点**」という。

➢ **区分的に滑らか**：
区分的に連続な関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ が区分的に連続であること。

で？　結局フーリエ級数は本当に成り立つのか？

【答え】

- 不連続な点を持つ関数はフーリエ級数で
  近似はできるが決して一致はしない
  ただし，実世界の信号ではあまり問題にはならない

- 工学的応用の視点で見れば，「無限級数」そのものが使用できない。常に有限！
  （数学の世界では一致するかどうかは重要かも）

1.7 フーリエ級数の微分・積分(p.19～)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

微分関数のフーリエ級数

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n \cos(n\omega_0 t) + \beta_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\underbrace{-n\omega_0 a_n}_{\beta_n} \sin(n\omega_0 t) + \underbrace{n\omega_0 b_n}_{\alpha_n} \cos(n\omega_0 t)\}$$

項別微分可能であるならば、フーリエ級数の微分は,

フーリエ係数に定数 $\pm n\omega_0$ を乗じるだけ

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n\omega_0 \\ -n\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\}$$

積分した関数のフーリエ級数

$$F(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n\cos(n\omega_0 t)+\beta_n\sin(n\omega_0 t)\}$$

$$F(t)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\omega_0}}_{\frac{\alpha_0}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{\frac{a_n}{n\omega_0}}_{\beta_n}\sin(n\omega_0 t)\underbrace{-\frac{b_n}{n\omega_0}}_{\alpha_n}\cos(n\omega_0 t)\right\}$$

項別積分可能であるならば、フーリエ級数の積分は,

フーリエ係数を定数 $\pm n\omega_0$ で割るだけ

$$\alpha_0=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\omega_0},\qquad \begin{bmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{n\omega_0}\\ \dfrac{1}{n\omega_0} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$$

項別微分と項別積分

■ 項別微分(項−項微分)

微分と和の順番を入れ替えて，先に各項を微分してから和を取ること

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} g_n(x)$$

【項別微分できる条件】

関数 $f(t)$ が $-T/2 \le t \le T/2$ で連続であり，
またその導関数 $f'(t)$ が区分的に連続で微分可能

■ 項別積分(項−項積分)：

積分と和の順番を入れ替えて，先に各項を積分してから和を取ること

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} g_n(x)\,dx$$

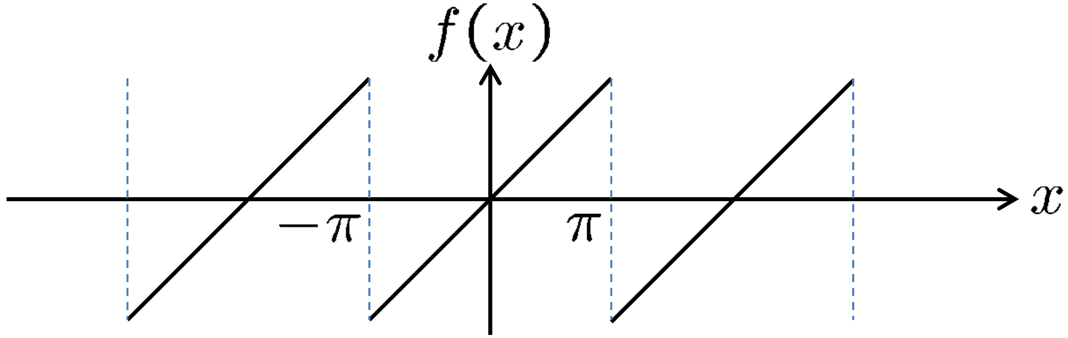
【項別積分できる条件】

関数 $f(t)$ が $-T/2 \le t \le T/2$ で区分的に連続

項別微分できない例

関数 $f(x) = x \qquad (-\pi \leq x < \pi)$

を, $f(x+2\pi) = f(x)$ によって拡張した関数を考える



フーリエ級数:

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

左辺を微分　　　　　右辺を項別微分

$$1 \qquad\qquad 2\,(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots)$$

明らかに収束しない
(例えば, $x = 0$ とする)

【例１】 $f(t) = t^2 \quad (-\pi \leq t < \pi)$ のフーリエ級数は

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt \qquad \text{である。}$$

$g(t) = t \quad (-\pi \leq t < \pi)$ のフーリエ級数を求めよ。

$f(t)$ は項別微分可能なので，$g(t) = \frac{1}{2} f'(t)$ を利用する

$n \geq 1$に対して $f'(t)$の係数は $\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ なので、

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{bmatrix}$$

よって、$g(t) = t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$

【例1】 $f(t)=t^2 \quad (-\pi \leq t < \pi)$ のフーリエ級数は

$$t^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$ である。

$g(t)=t \quad (-\pi \leq t < \pi)$ のフーリエ級数を求めよ。

（別解）

両辺を微分すると

$$2t=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-n\sin nt)=-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt$$

よって、$g(t)=t=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$$

【例2】 $f(t) = t \quad (-\pi \le t < \pi)$ のフーリエ級数は

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$ である。

$g(t) = t^2 \quad (-\pi \le t < \pi)$ のフーリエ級数を求めよ。

$f(t)$ は項別積分可能なので，両辺を積分すると

$$\frac{1}{2}t^2 + c_1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nt + c_2$$

⬇ $c = c_2 - c_1$ とおくと

$$\frac{1}{2}t^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos nt + c$$

$\boxed{\text{定数} = \frac{1}{2}a_0}$

関数 $\frac{1}{2}t^2$ の直流

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos nt + \frac{1}{2}a_0$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} t^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3} t^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi}\{\pi^3 - (-\pi)^3\} = \frac{\pi^2}{3}$$ より

$$\frac{1}{2} t^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{3}$$

よって、 $$g(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$$

2.1 偶関数と奇関数(p.27)

偶関数: $f(-t) = f(t)$ $\xrightarrow{\text{Ex.}}$ $\cos(-t) = \cos(t)$

奇関数: $f(-t) = -f(t)$ $\longrightarrow$ $\sin(-t) = -\sin(t)$

$f(t)$: 元の関数, $f(-t)$: 時間反転関数

関数の分解(偶奇分解)

任意の関数 $f(t)$ は偶関数と奇関数の和に分解できる

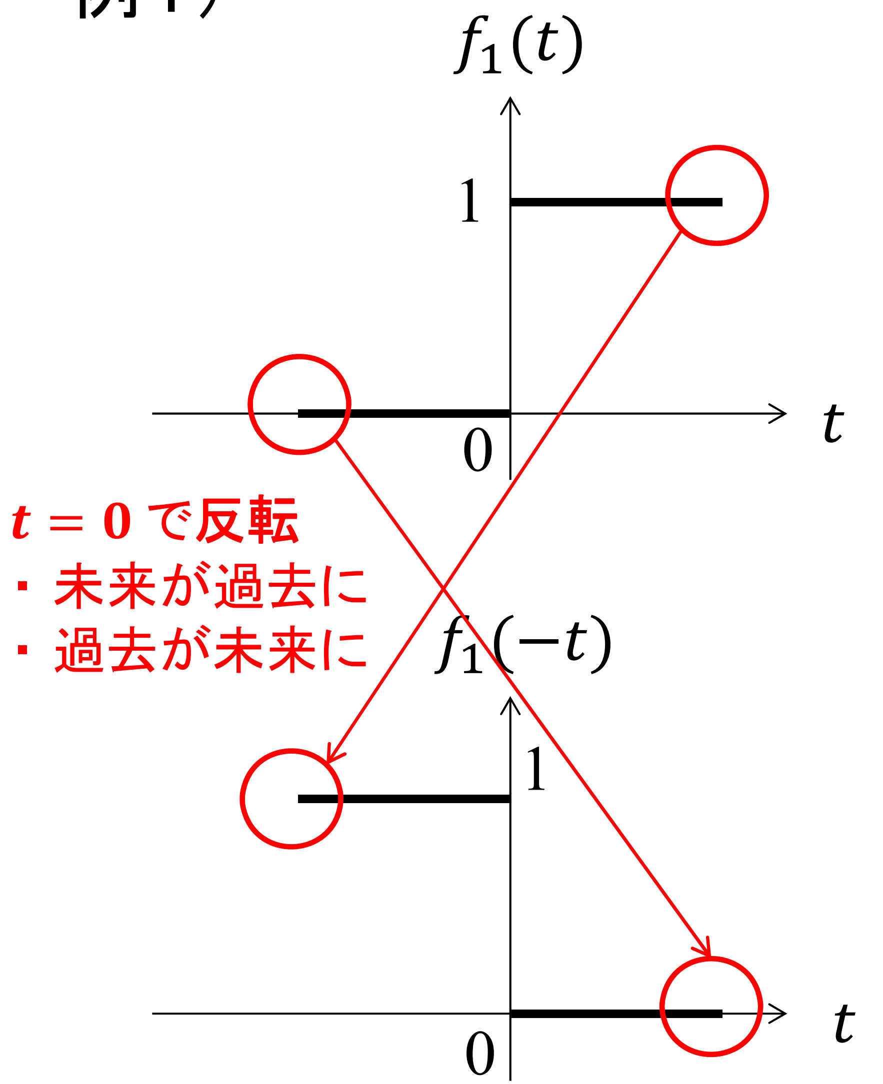
$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

ただし,

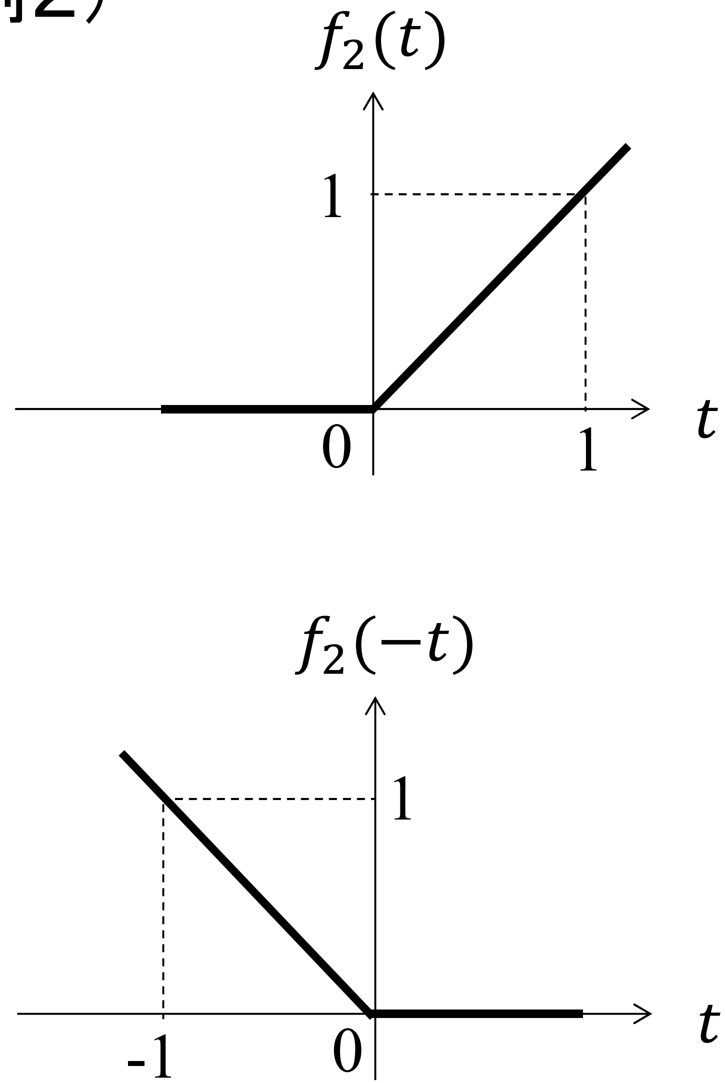
$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

時間反転関数の例

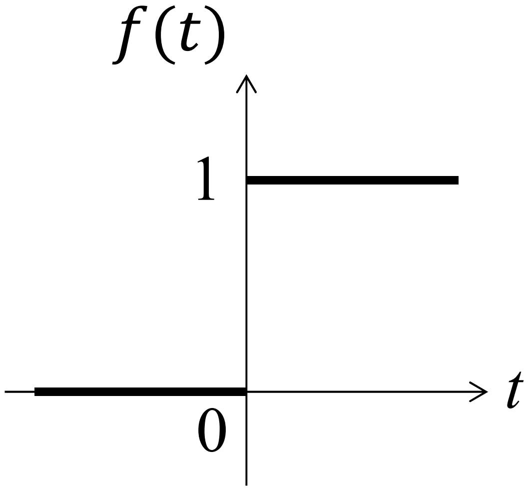
例１）



例２）



偶奇分解の例

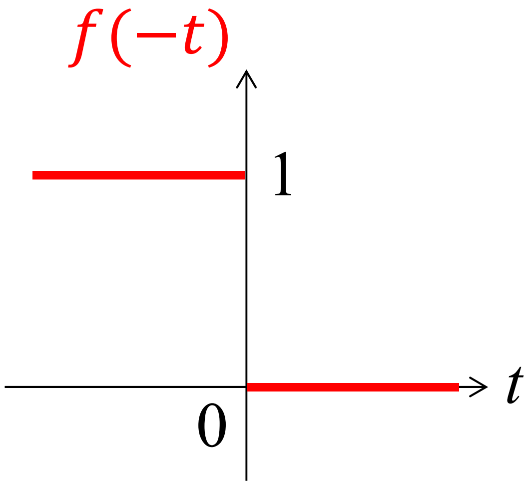


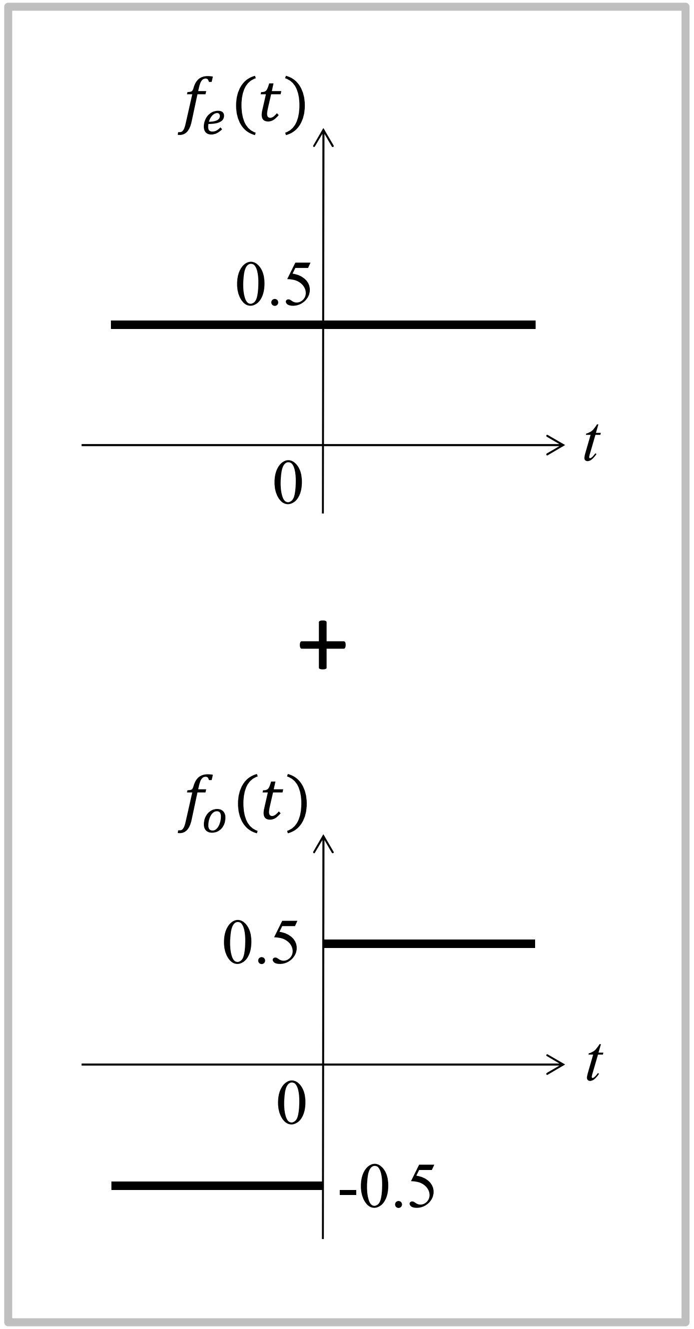
$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

時間反転関数

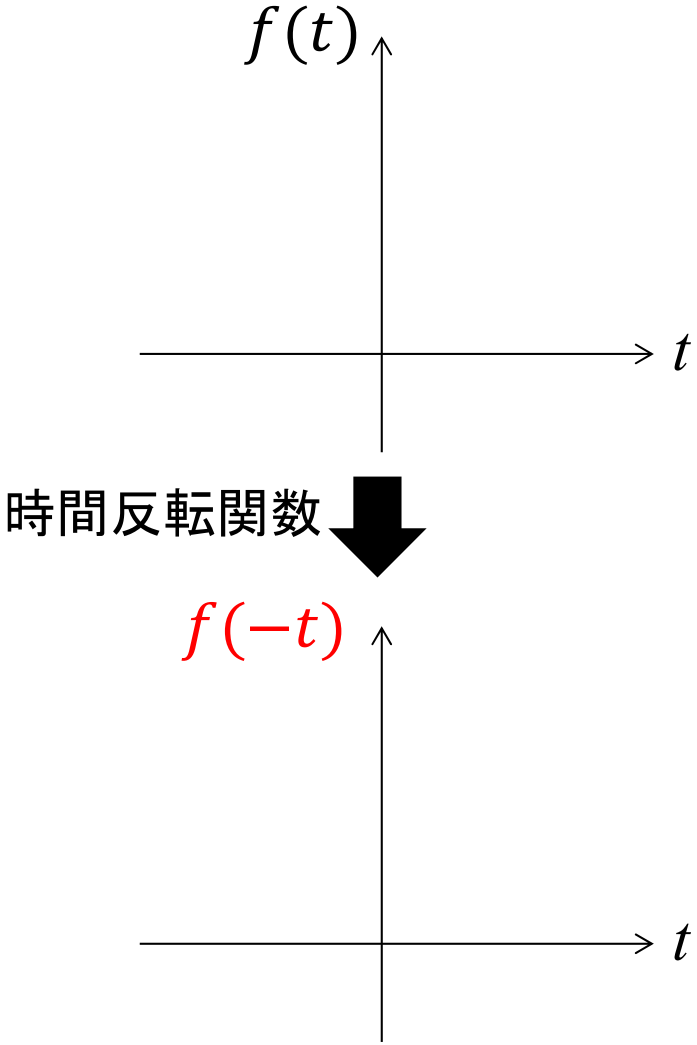


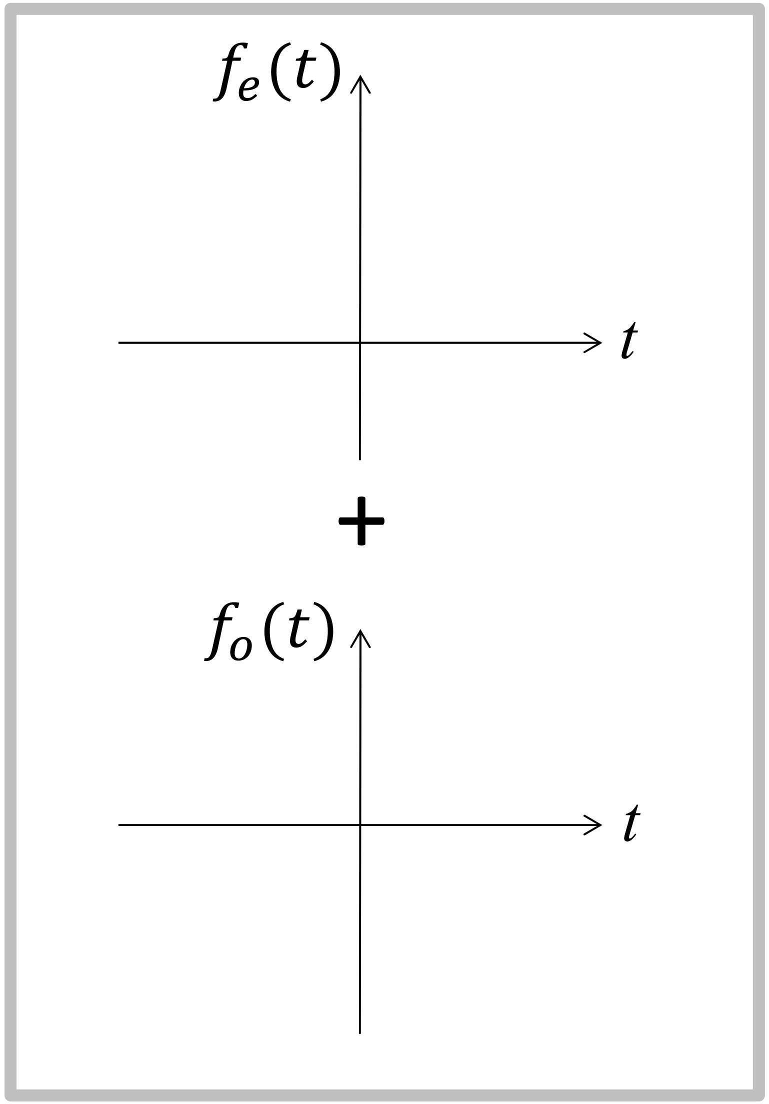


【例題1】

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 0 \end{cases}$$

を偶奇分解し，偶成分 $f_e(t)$ と奇成分 $f_o(t)$ を図示せよ。

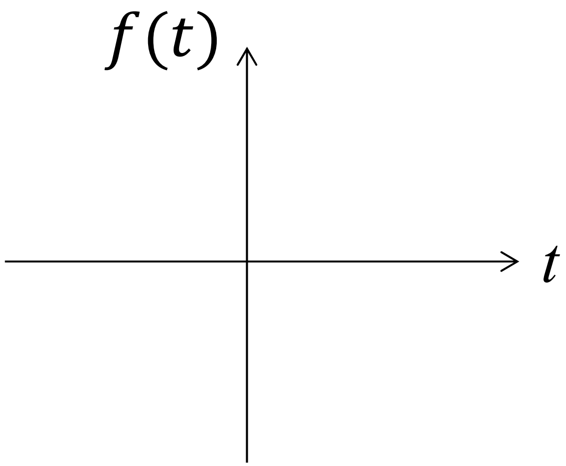




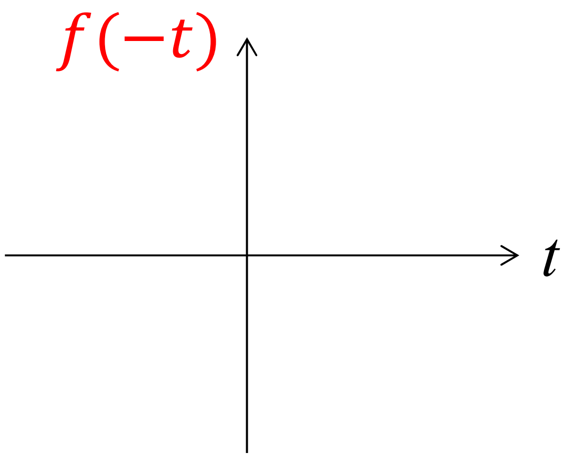
【例題2】

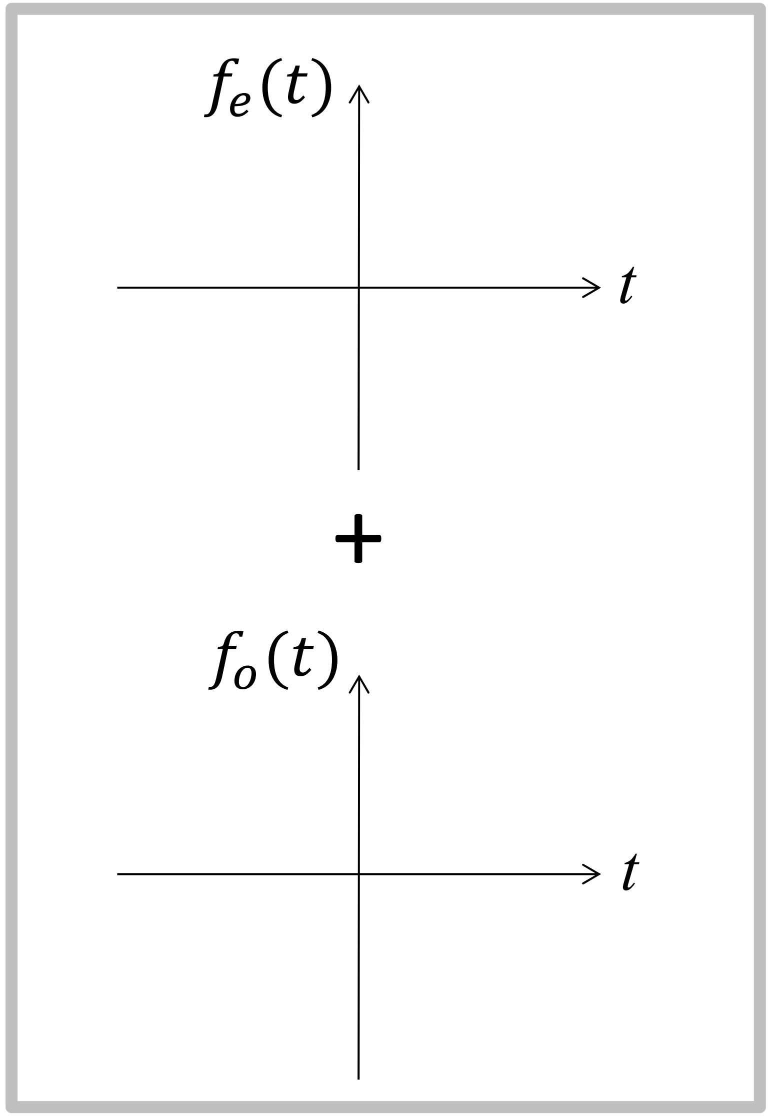
$$f(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

を偶奇分解し，偶成分 $f_e(t)$ と奇成分 $f_o(t)$ を図示せよ。



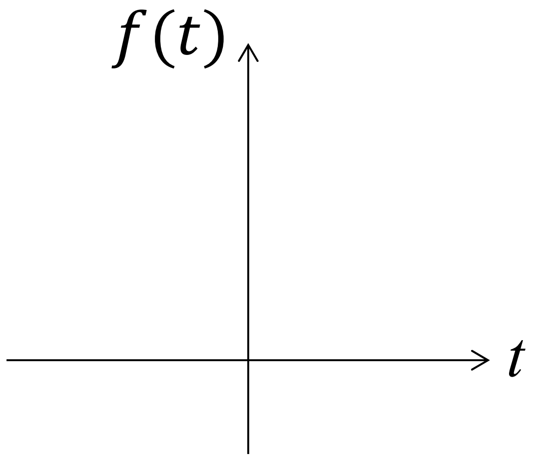
時間反転関数



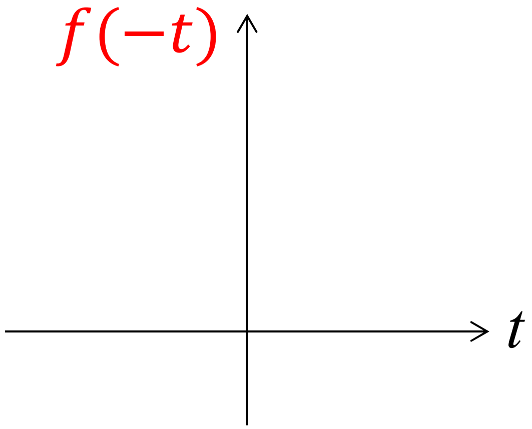


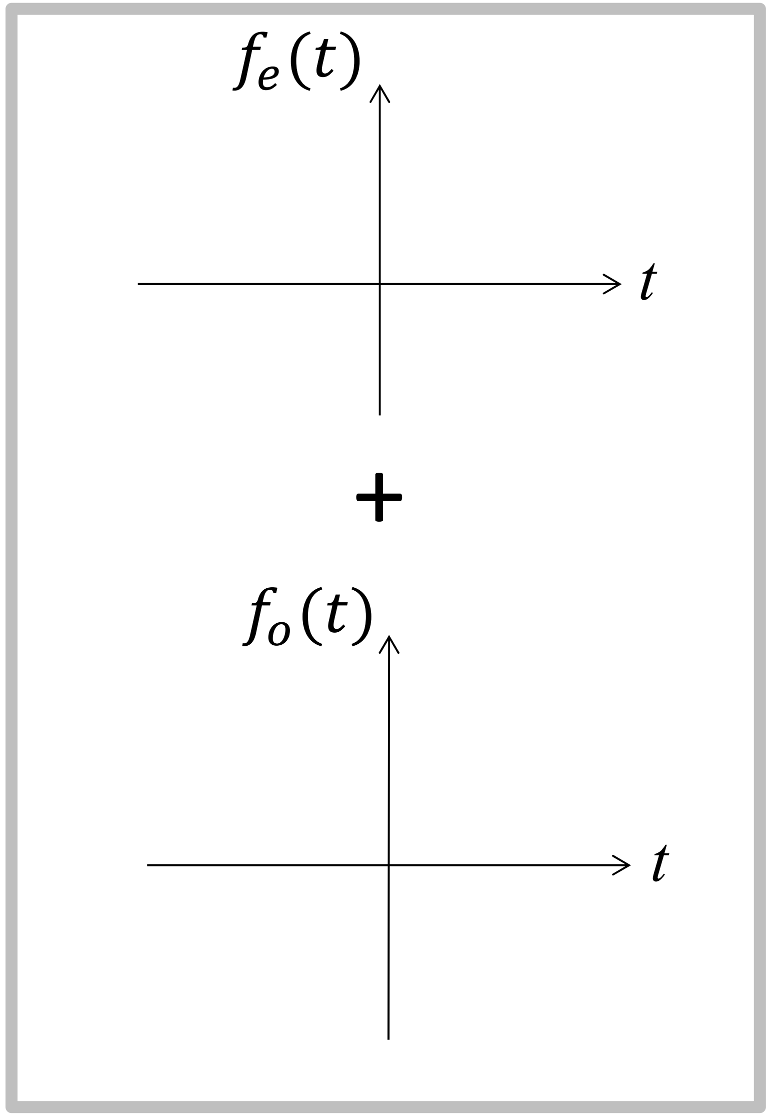
【例題3】

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$ を偶奇分解し，偶成分 $f_e(t)$ と奇成分 $f_o(t)$ を図示せよ。



時間反転関数





フーリエ級数も偶奇分解

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots$$ ← 偶関数

$$+ b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots$$ ← 奇関数

$f(t)$: 偶関数 ⇒ $b_n \ (n = 1,2,\cdots) = 0$

$f(t)$: 奇関数 ⇒ $a_n \ (n = 0,1,2,\cdots) = 0$

$f(t)$: 偶関数でも奇関数でもない
⇒ a_n, b_n ともに値を持つ

宿題

- 演習問題2
- ILIASからダウンロード
- 提出期限: 5 月13 日(木) 24:00(日本時間) まで

【注意】

- ノート･レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとしてILIAS から提出する。
- ファイル形式は提出ができれば何でも構いません(jpeg, word, pdf など)。
- ファイル名は「bst report2」としてください。複数のファイルになる場合は「bst report2 1」、「bst report2 2」などとしてください。