5/13修正：解答例 問5

令和 2 年 5 月 8 日，1 時限目

信号理論基礎　演習問題 2

提出に関する注意事項：

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとして ILIAS から提出する。
  ファイル形式は提出ができれば何でも構いません (jpeg, word, pdf など)。
  ファイル名は「bst_report2」としてください。
  複数のファイルになる場合は「bst_report2_1」、「bst_report2_2」などとしてください。
- 提出期限：5 月 13 日 (木) 24:00(日本時間) まで。

---

1. 図 1 に示す周期 $T = 2\pi$ の波形をもつ関数 $f_1(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

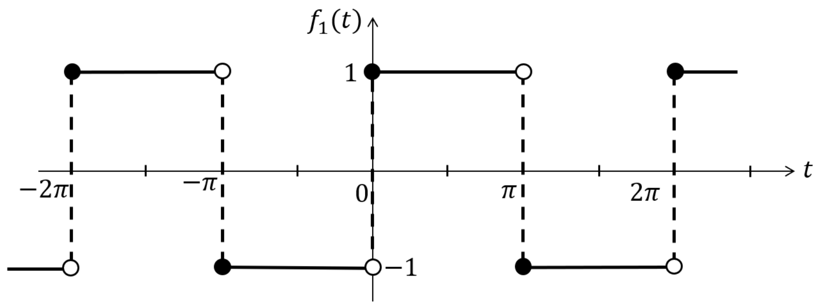

図 1: 問題 1. の波形

2. 図 2 に示す周期 $T = 2\pi$ の波形をもつ関数 $f_2(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

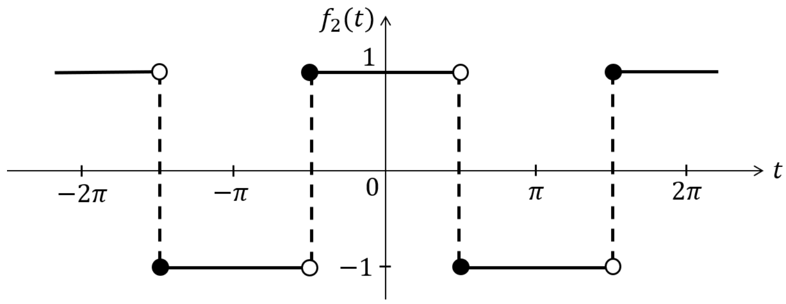

図 2: 問題 2. の波形

3. 図 3 に示す周期 $T = 2\pi$ の波形をもつ関数 $f_3(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

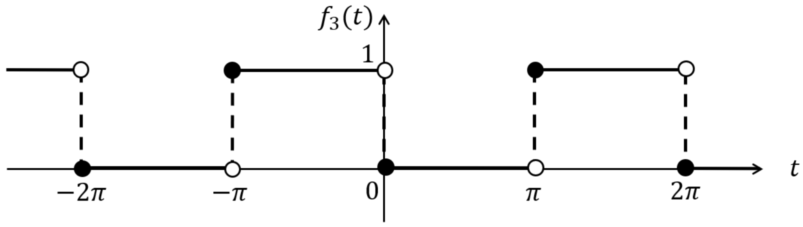

図 3: 問題 3. の波形

4. 図 4 に示す周期 $T = 2\pi$ の波形をもつ関数 $f_4(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

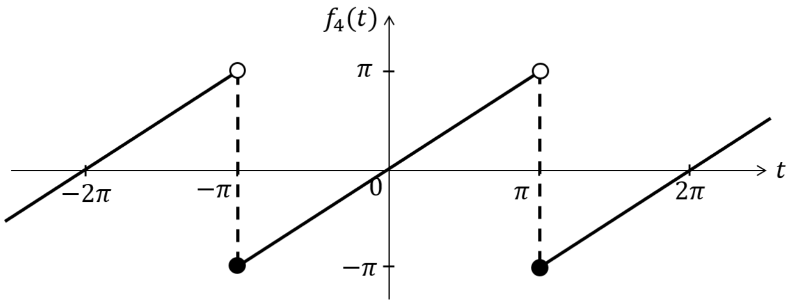

図 4: 問題 4. の波形

5. 次式で定義される関数 $f(t)$ を $-2\pi \leq t < 2\pi$ の範囲で図示せよ．また，$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t) = \begin{cases} 0, \quad (-\pi \leq t < 0) \\ A\sin(\omega_0 t) \qquad (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$

および $f(t+T) = f(t)$, $T = 2\pi$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

6. $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$, となることを示せ.

ヒント：1. の結果に $t = \dfrac{\pi}{2}$ を代入して考える.

信号理論基礎　演習問題2 (解答：簡略版)

---

1. 【解答】

$$f_1(t)=\begin{cases}-1 & (-\pi\le t<0)\\ 1 & (0\le t<\pi)\end{cases}\ ,\ \text{周期}\ T=2\pi,\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}=1.$$

$n=0$ に対して，

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_1(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}-1dt+\int_{0}^{\pi}dt\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{[-t]_{-\pi}^{0}+[t]_{0}^{\pi}\right\}=0$$

$n\neq 0$ に対して，

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_1(t)\cos(n\omega_0 t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}-\cos(nt)dt+\int_{0}^{\pi}\cos(nt)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{0}^{\pi}\right\}=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_1(t)\sin(n\omega_0 t)dt=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}-\sin(nt)dt+\int_{0}^{\pi}\sin(nt)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{0}+\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{0}^{\pi}\right\}=\frac{2}{n\pi}\left\{1-\cos(n\pi)\right\}=\begin{cases}0 & (n:\text{even})\\ \dfrac{4}{n\pi} & (n:\text{odd})\end{cases}$$

よって，$f_1(t)=\dfrac{4}{\pi}\left\{\sin(t)+\dfrac{1}{3}\sin(3t)+\dfrac{1}{5}\sin(5t)+\cdots\right\}=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left\{(2k-1)t\right\}$

2. 【解答】

$$f_2(t)=\begin{cases}-1 & (-\pi\le t<-\pi/2)\\ 1 & (-\pi/2\le t<\pi/2)\\ -1 & (\pi/2\le t<\pi)\end{cases}\ ,\ \text{周期}\ T=2\pi,\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}=1.$$

$n=0$ に対して，

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_2(t)dt=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-1dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-1dt\right\}=0$$

$n\neq 0$ に対して，

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_2(t)\cos(n\omega_0 t)dt=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\cos(nt)dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(nt)dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos(nt)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}=\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_2(t)\sin(n\omega_0 t)dt=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\sin(nt)dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(nt)dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin(nt)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}=0$$

よって，$f_2(t)=\dfrac{4}{\pi}\left\{\cos t+\dfrac{1}{3}\cos(3t)+\dfrac{1}{5}\cos(5t)-\cdots\right\}=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}\cos\left\{(2k-1)t\right\}$

【別解】問 1 の解答を利用する。

$f_2(t) = f_1\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ の関係があるので，

$$f_2(t) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5t + \frac{5\pi}{2}\right) + \cdots\right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\cos t + \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t) - \cdots\right\} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}\cos\{(2k-1)t\}$$

3. 【解答】

$$f_3(t) = \begin{cases} 1 & (-\pi \le t < 0) \\ 0 & (0 \le t < \pi) \end{cases}, \text{ 周期 } T = 2\pi,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1.$$

$n = 0$ に対して，

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_3(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1dt = \frac{1}{\pi}\left[t\right]_{-\pi}^{0} = 1$$

$n \neq 0$ に対して，

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_3(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nt)dt = \frac{1}{n\pi}\left[\sin(nt)\right]_{-\pi}^{0} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_3(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nt)dt = \frac{-1}{n\pi}\left[\cos(nt)\right]_{-\pi}^{0} = \frac{-1}{n\pi}\{1 - (-1)^n\} = \begin{cases} 0 & (n : \text{even}) \\ -\dfrac{2}{n\pi} & (n : \text{odd}) \end{cases}$$

よって，$f_3(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\left\{\sin t + \dfrac{1}{3}\sin(3t) + \dfrac{1}{5}\sin(5t) + \cdots\right\} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\sin\{(2k-1)t\}$

【別解】問 1 の解答を利用する。

$f_3(t) = -\dfrac{1}{2}f_1(t) + \dfrac{1}{2}$ の関係があるので，

$$f_3(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left\{\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \cdots\right\} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin((2k-1)t)$$

4. 【解答】

$f_4(t) = t \quad (-\pi \le t < \pi)$, 周期 $T = 2\pi$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 1$.

$n = 0$ に対して，

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_4(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\ dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$n \neq 0$ に対して，

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_4(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right)' dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)dt\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_4(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)' dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nt)dt\right\} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

よって，$f_4(t) = 2\left(\sin(t) - \dfrac{1}{2}\sin(2t) + \dfrac{1}{3}\sin(3t) - \cdots\right) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)$

5. 【解答】

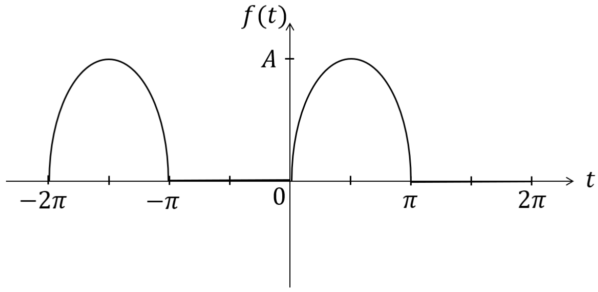

図 1: 問題 5. の波形

$n=0$ に対して，
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t\ dt = \frac{-A}{\pi}\left[\cos t\right]_0^{\pi} = \frac{-A}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2A}{\pi}$$

$n \neq 0$ に対して，
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t\cos(nt)dt = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\sin(1+n)t + \frac{1}{2}\sin(1-n)t\right\}dt$$
ここで，$1-n=0$ の場合，すなわち，$n=1$ について考えると，
$$a_1 = \frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t dt = \frac{A}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi} = -\frac{A}{4\pi}\left\{\cos 2\pi - \cos 0\right\} = 0$$

$n=2,3,\cdots$ のとき，
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\sin(1+n)t + \frac{1}{2}\sin(1-n)t\right\}dt = \frac{A}{2\pi}\left\{\left[\frac{-1}{1+n}\cos(1+n)t\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-1}{1-n}\cos(1-n)t\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{-A}{2\pi}\left\{\frac{\cos(1+n)\pi - \cos 0}{1+n} + \frac{\cos(1-n)\pi - \cos 0}{1-n}\right\} \\
&= \frac{A}{2\pi}\left\{\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{A}{2\pi}\left(\dfrac{2}{1+n} + \dfrac{2}{1-n}\right) = -\dfrac{2A}{(n-1)(n+1)\pi} & (n:\mathrm{even}) \\ 0 \qquad (n:\mathrm{odd}) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t\sin(nt)dt = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos(1-n)t - \frac{1}{2}\cos(1+n)t\right\}dt$$
ここで，$1-n=0$ の場合，すなわち，$n=1$ について考えると，
$$b_1 = \frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{1-\cos 2t\right\}dt = \frac{A}{2}$$
$n=2,3,\cdots$ のとき，
$$b_n = \frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\cos(1-n)t - \cos(1+n)t\right\}dt = \frac{A}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{1-n}\sin(1-n)t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{1+n}\sin(1+n)t\right]_0^{\pi}\right\} = 0$$
よって，$f(t) = \dfrac{A}{\pi} + \dfrac{A}{2}\sin t - \dfrac{2A}{\pi}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}\cos 2t + \dfrac{1}{3\cdot 5}\cos 4t + \dfrac{1}{5\cdot 7}\cos 6t + \cdots\right)$

6. 【解答】

$f_1(t)$ はディリクレの条件を満たすので，$t=\dfrac{\pi}{2}$ で 1 に収束する．すなわち，$f_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ となる．
1. の結果より，
$1 = \dfrac{4}{\pi}\left\{\sin\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{1}{5}\sin\dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{1}{7}\sin\dfrac{7\pi}{2} + \cdots\right\}$ を満たすので，
$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots,$