令和 2 年 5 月 15 日，1 時限目

信号理論基礎　演習問題 3

提出に関する注意事項：

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い)。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとして ILIAS から提出する。
  ファイル形式は提出ができれば何でも構いません (jpeg, word, pdf など)。
  ファイル名は「bst_report3」としてください。
  複数のファイルになる場合は「bst_report3_1」、「bst_report3_2」などとしてください。
- 提出期限：5 月 21 日 (木) 24:00(日本時間) まで。

---

1. 区間 $(0 < t < \pi)$ でのみ定義される関数 $f(t) = t$ をフーリエ余弦級数に展開せよ.

2. 以下の積分を求めよ。

   (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt$

   (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\delta(t) + \delta(t - t_0) + \delta(t - t_1)\right\}dt$

   (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left\{f(t)\sum_{n=1}^{N}\delta(t - nT)\right\}dt$

   (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t + t_0)\delta(t)dt$　　ヒント：変数変換を用いる（$t + t_0 = \tau$ と置く）

3. 区間 $(-T/2,\ T/2)$ において $f(t) = \begin{cases} 2, & (0 < t < T/2) \\ 0, & (-T/2 < t < 0) \end{cases}$ で定義される周期 T の周期関数について以下の問いに答えよ。

   (1) $f(t)$ を $-2T \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ。

   (2) $f(t)$ を Heaviside(ヘビサイド) のステップ関数を用いて表せ。

   (3) $f(t)$ の微分 $f'(t) = \dfrac{d}{dt}f(t)$ を求めよ。

   (4) $f'(t)$ を $-2T \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ。

信号理論基礎　演習問題3 (解答：簡略版)

1. 【解答】

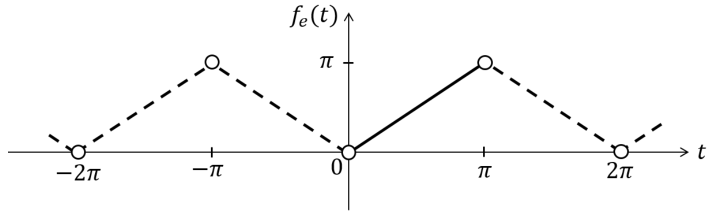

図 1：$f_e(t)$

図 1 のように，関数 $f(t)$ を偶対称 (余弦項) 拡張した周期 $T = 2\pi$ の周期関数 $f_e(t)$ を考える。このとき，余弦展開の係数 a_n は，

$n = 0$ のとき，

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_e(t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f_e(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \pi$$

$n \neq 0$ のとき，

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_e(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right)' dt = \frac{2}{\pi}\left\{\left[t\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{2\left\{(-1)^n - 1\right\}}{n^2\pi}$$

よって，$0 < t < \pi$ では $f(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left\{\cos(t) + \dfrac{1}{3^2}\cos(3t) + \dfrac{1}{5^2}\cos(5t) + \cdots\right\}$

2. 【解答】

(1) デルタ関数の定義より，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\delta(t) + \delta(t - t_0) + \delta(t - t_1)\right\}dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_1)dt$$

$$= f(0) + f(t_0) + f(t_1)$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(t)\sum_{n=1}^{N}\delta(t - nT)\right\}dt = \sum_{n=1}^{N} f(nT)$

(4) 変数変換を利用する。$t + t_0 = \tau$ と置くと，$t = \tau - t_0, dt = d\tau$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t + t_0)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = f(t_0)$$

3. 【解答】

(1) 図 2 の通り

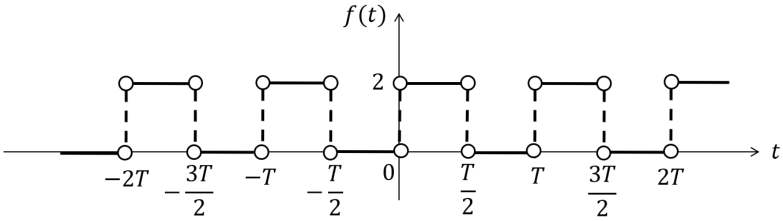

図 2：$f(t)$

(2) $f(t)$ は $t = nT \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ で $0 \to 2$ に，$t = \dfrac{T}{2} + nT = \dfrac{1+2n}{2}T$ で $2 \to 0$ に跳び不連続をもつ。
よって，

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \cdots + 2u(t+T) - 2u(t+\frac{T}{2}) + 2u(t) - 2u(t-\frac{T}{2}) + 2u(t-T) - 2u(t-\frac{3T}{2}) + \cdots \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 2u(t-nT) - 2u(t-\frac{1+2n}{2}T) \right\}
\end{aligned}
$$

(3) $u'(t) = \delta(t)$ なので，

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \cdots + 2\delta\,(t+T) - 2\delta(t+\frac{T}{2}) + 2\delta(t) - 2\delta(t-\tfrac{T}{2}) + 2\delta(t-T) - 2\delta(t-\frac{3T}{2}) + \cdots \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 2\delta(t-nT) - 2\delta(t-\frac{1+2n}{2}T) \right\}
\end{aligned}
$$

(4) 図 3 の通り

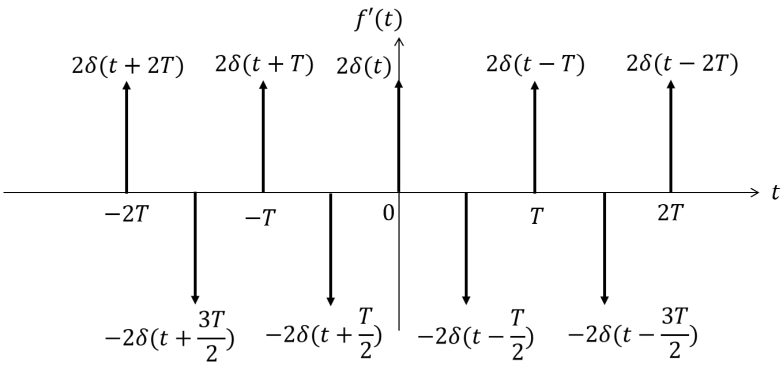

図 3：$f'(t)$