信号理論基礎

2020/05/15

【今日のテーマ】

- 有限区間でのフーリエ級数
- インパルス関数(ディラックのデルタ関数)
- ヘビサイドのステップ関数

演習問題2(5/8実施分)、問5の解答例の訂正

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t\sin(nt)dt = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos(1-n)t - \frac{1}{2}\cos(1+n)t\right\}dt$$

ここで，$1-n=0$ の場合，すなわち，$n=1$ について考えると，

$$b_1 = \frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\{1-\cos 2t\}\,dt = \frac{A}{2}$$

$n = 2, 3, \cdots$ のとき，

$$b_n = \frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\{\cos(1-n)t - \cos(1+n)t\}\,dt = \frac{A}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{1-n}\sin(1-n)t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{1+n}\sin(1+n)t\right]_0^{\pi}\right\} = 0$$

よって，$\boxed{f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin t - \frac{2A}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\sin 2t + \frac{1}{3\cdot 5}\sin 4t + \frac{1}{5\cdot 7}\sin 6t + \cdots\right)}$

間違っていました。
（スミマセン）

正しくは、

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin t - \frac{2A}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6t + \cdots\right)$$

ILIASに修正したもの「・・・ver2」をアップしました。

偶関数と奇関数の性質

偶関数: $f_e(-t) = f_e(t)$

奇関数: $f_o(-t) = -f_o(t)$

$$f(t) = f_1(t)f_2(t)$$

● 積に関する性質

偶関数 $f_1(t)$ × 偶関数 $f_2(t)$ ＝ 偶関数

$$f(-t) = f_1(-t)f_2(-t) = f_1(t)f_2(t) = f(t)$$

奇関数 $f_1(t)$ × 奇関数 $f_2(t)$ ＝ 偶関数

$$f(-t) = f_1(-t)f_2(-t) = \left(-f_1(t)\right)\left(-f_2(t)\right) = f_1(t)f_2(t) = f(t)$$

偶関数 $f_1(t)$ × 奇関数 $f_2(t)$ ＝ 奇関数

$$f(-t) = f_1(-t)f_2(-t) = f_e(t)\left(-f_o(t)\right) = -f_1(t)f_2(t) = -f(t)$$

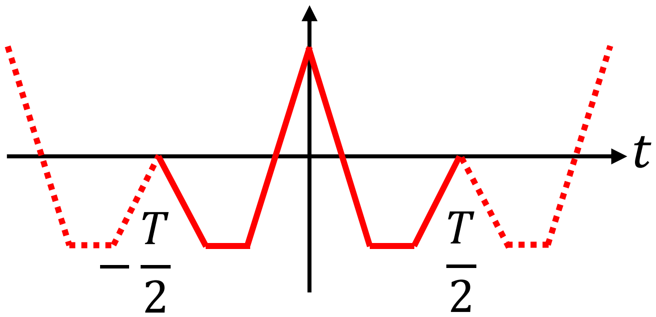
● 積分に関する性質

$$\int_{-a}^{a} f_e(t)dt = 2\int_{0}^{a} f_e(t)dt, \qquad \int_{-a}^{a} f_o(t)dt = 0$$

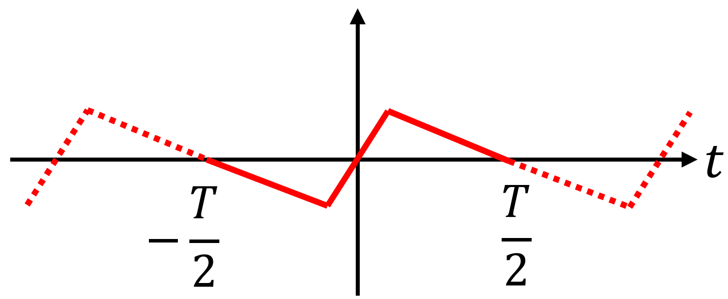
教科書: 問題2.1, 2.4, 2.5を確認すること！

計算上便利な性質①

軸対称波（偶関数）



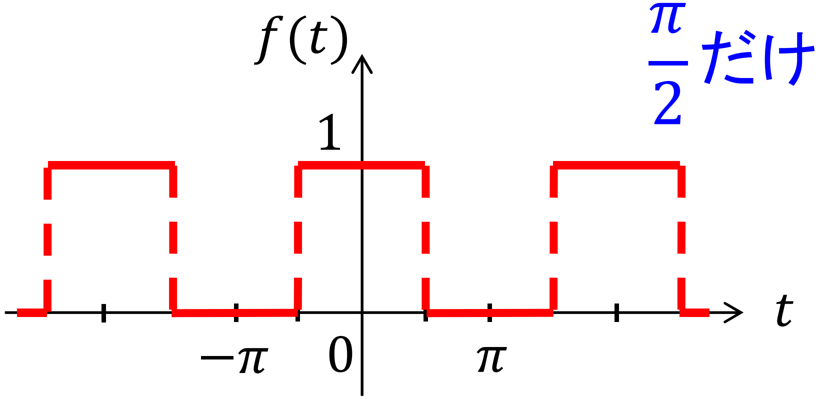
点対称波（奇関数）



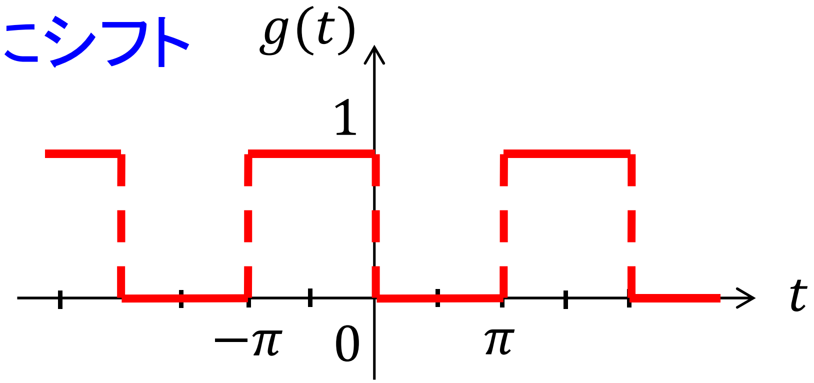
$f(t)$ が偶関数	$f(t)$が 奇関数の場合
$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 t)$ $a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ 半周期積分の2倍 $b_n=0$ 常に0	$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega_0 t)$ $a_n=0$ 常に0 $b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$ 半周期積分の2倍

計算上便利な性質②

ある関数のフーリエ級数が分かっている場合、
原点を移動した波形のフーリエ級数は容易に求めることができる



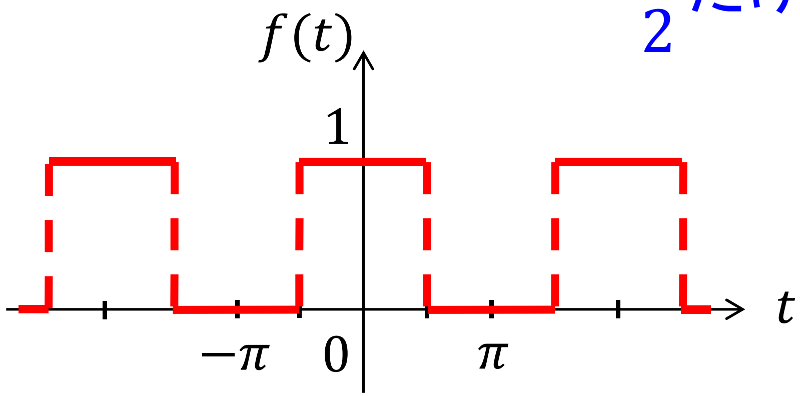
$\frac{\pi}{2}$だけ左にシフト

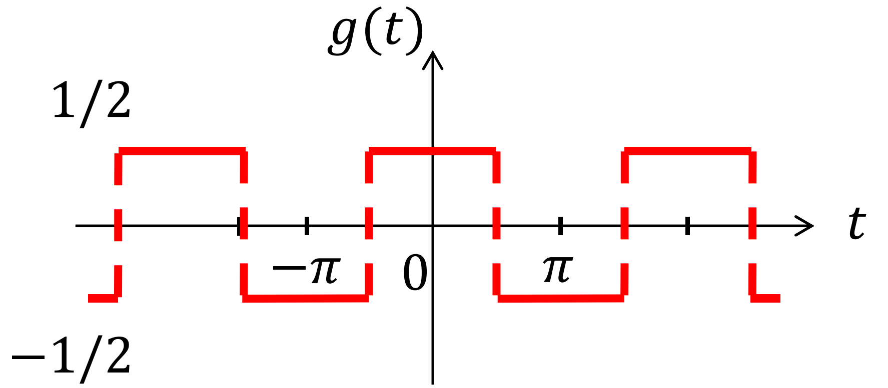


$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left\{\cos t-\frac{1}{3}\cos 3t+\frac{1}{5}\cos 5t-\cdots\right\}$$

$$\begin{aligned}
g(t)&=f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left\{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{3}\cos\left(3t+\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{1}{5}\cos\left(5t+\frac{5\pi}{2}\right)-\cdots\right\}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left\{\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots\right\}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$だけ下方向にシフト





$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left\{\cos t-\frac{1}{3}\cos 3t+\frac{1}{5}\cos 5t-\cdots\right\}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t)-\frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\cos t-\frac{1}{3}\cos 3t+\frac{1}{5}\cos 5t-\cdots\right\} \end{aligned}$$

これまでのまとめ

周期 T の周期関数 $f(t)$ は、基本角周波数 ω_0とその整数倍からなる関数の和として表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots$$

$$+b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots$$

ただし、 $\omega_0 = 2\pi f_0,\quad f_0 = \frac{1}{T}$

係数は内積で求まる

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\,,\quad \cdots n = 0, 1,2, \cdots, \infty$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt\,,\quad \cdots n = 1,2, \cdots, \infty$$

理解度チェック
（フーリエ級数の本質を理解しているか）

（1） $f(t) = \cos^2 t$ のフーリエ級数を求めよ。

ヒント: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$, $\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

（2） $g(t) = \cos^3 t$ のフーリエ級数を求めよ。

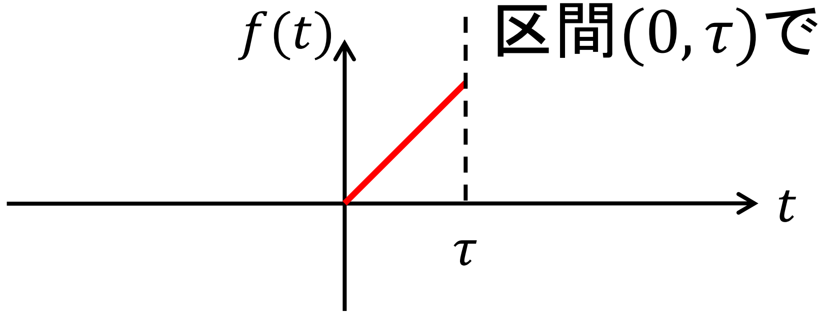
2.3 有限区間における関数のフーリエ展開(p.41)

ある有限区間$(0, \tau)$で定義される非周期関数$f(t)$は、

- ■ 区間$(0, \tau)$上で適宜な周期関数を構成
- ■ 必要なフーリエ級数の形を与える条件を満足させる

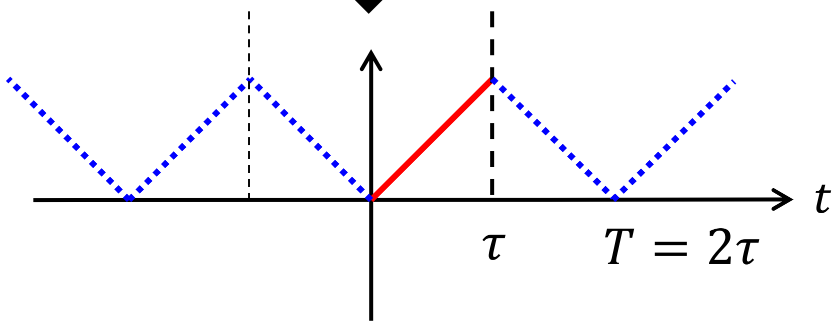
ことで、区間$(0, \tau)$ においてのみ定義されるフーリエ級数に展開できる

例）



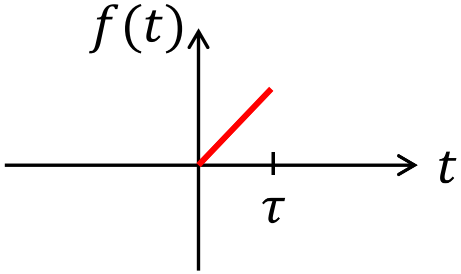
区間$(0, \tau)$で定義される関数
（非周期関数）

周期 T の関数に拡張 ⇒ フーリエ級数展開

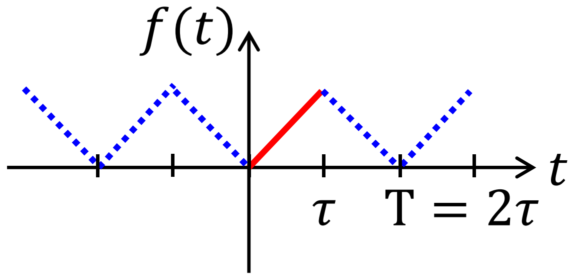


区間$(0, \tau)$では正しい展開

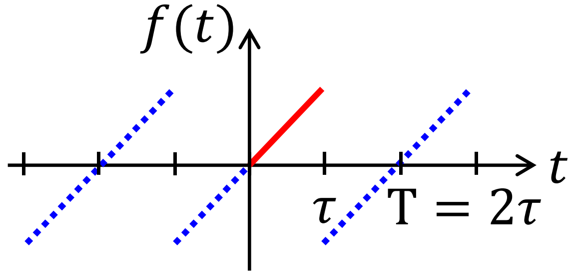
関数拡張の例



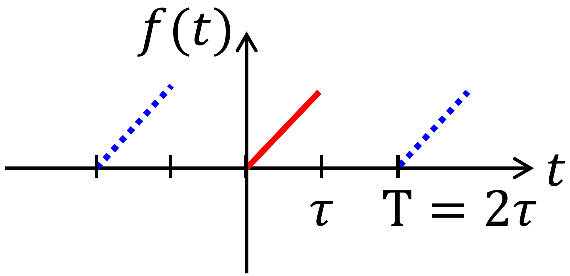
元の関数



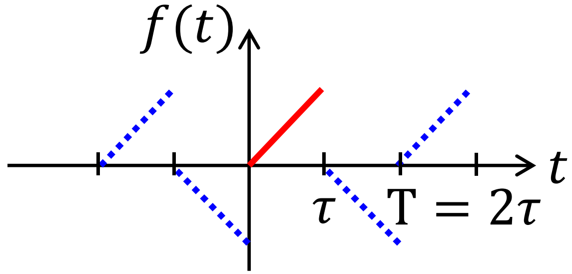
偶対象（余弦項）



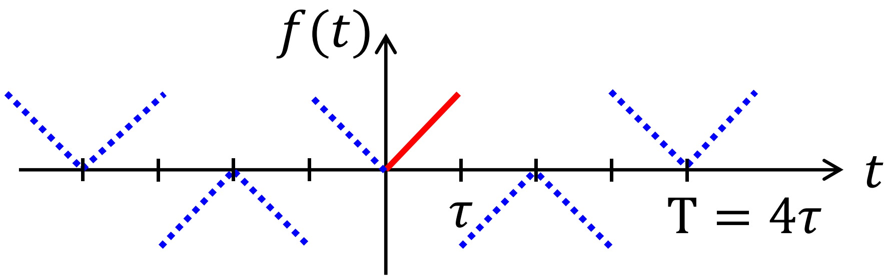
奇対称（正弦項）



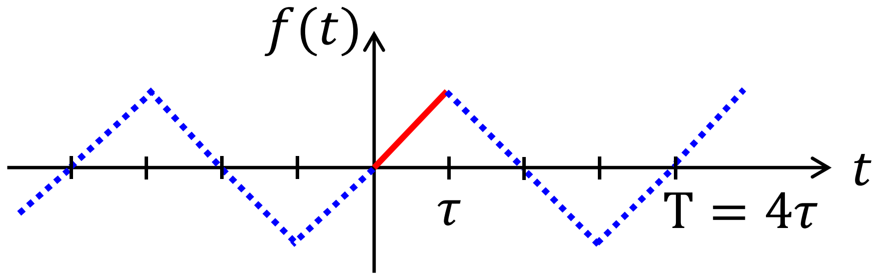
正弦及び余弦項



半波対称



偶1/4波対称

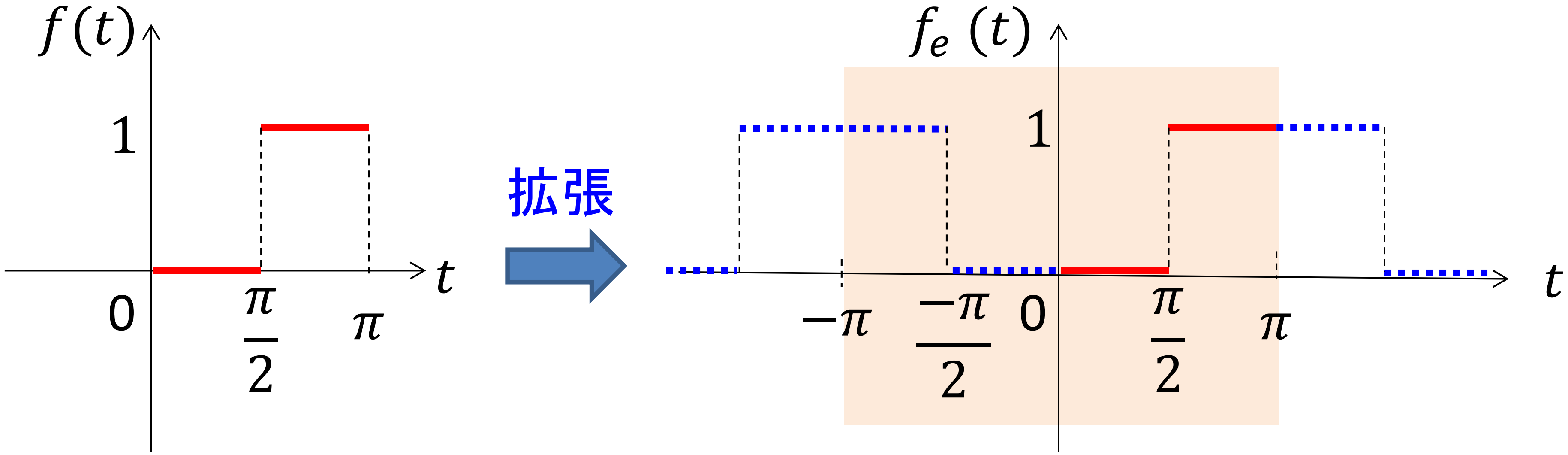


奇1/4波対称

【 例1 】

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<\dfrac{1}{2}\pi \\ 1, & \dfrac{1}{2}\pi<t<\pi\end{cases}$$ をフーリエ余弦級数展開せよ。

フーリエ余弦級数展開 ⇒ 偶対象（余弦項）拡張



周期 $T=2\pi$, 基本角周波数 $\omega_0=1$

偶対称なので、$b_n=0$, （$n=1,2,\cdots$）

（計算用）

■ $n=0$のとき　$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_e(t)dt$

対称性を考慮すると $a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f_e(t)dt = \frac{2}{\pi}\left\{\int_{\pi/2}^{\pi} 1\,dt\right\} = 1$

■ $n \neq 0$のとき　$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_e(t)\cos(n\omega_0 t)dt$

対称性を考慮すると $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f_e(t)\cos(n\omega_0 t)dt$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nt)dt = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

よって，$0 < t < \pi$では

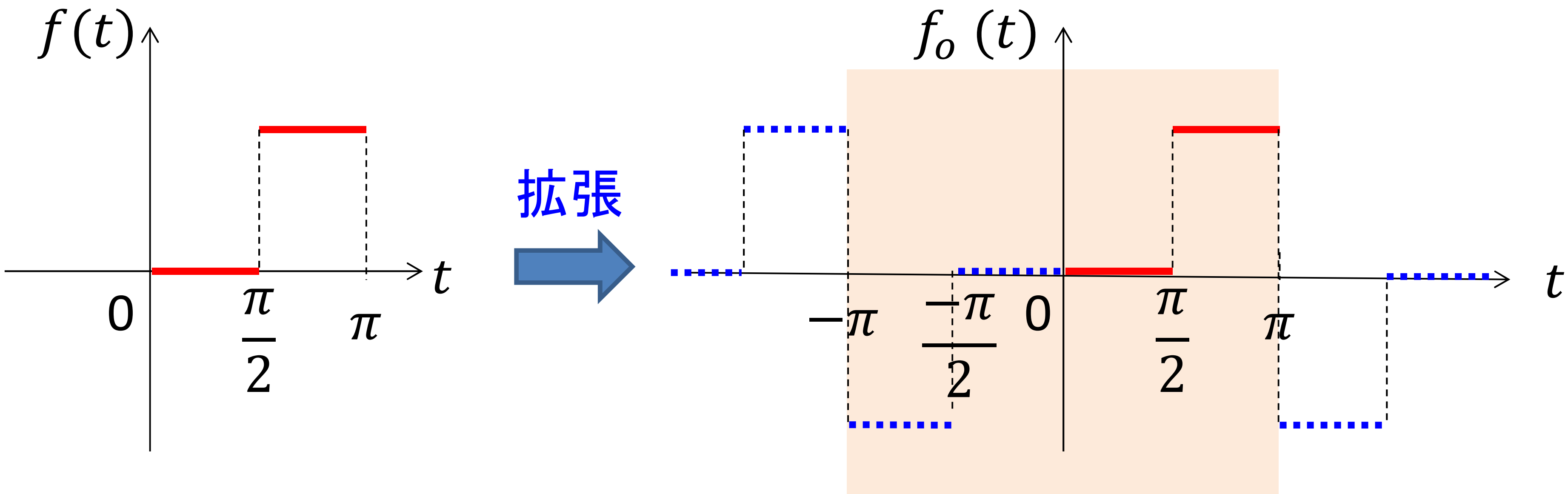
$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 5t - \cdots\right)$$

【 例2 】

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{1}{2}\pi \\ 1, & \frac{1}{2}\pi < t < \pi \end{cases}$$

をフーリエ正弦級数展開せよ。

フーリエ正弦級数展開 ⇒ 奇対象(正弦項)拡張



周期 $T = 2\pi$, 基本角周波数 $\omega_0 = 1$

奇対称なので、$a_n = 0$, $(n = 0,1,2,\cdots)$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_o(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

対称性を考慮すると

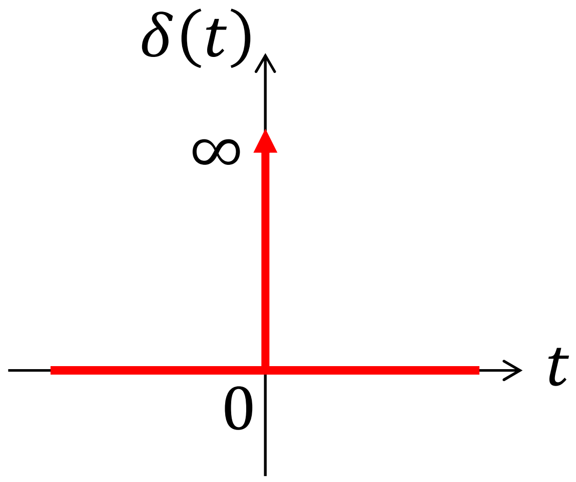
$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f_o(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(nt)dt$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & (n = 1,3,5,\cdots) \\ -\frac{4}{n\pi} & (n = 2,6,10,\cdots) \\ 0 & (n = 4,8,12,\cdots) \end{cases}$$

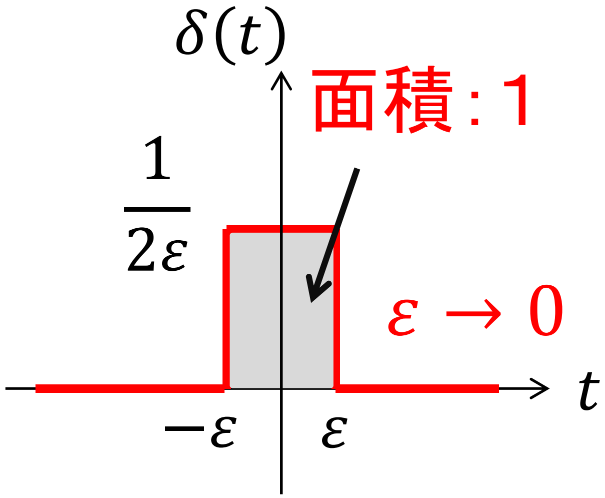
よって，$0 < t < \pi$では

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)$$
$$- \frac{2}{\pi}\left(\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 6t + \frac{1}{5}\sin 10t + \cdots\right)$$

2.4 インパルス関数(デルタ関数)(p.46)



考え方



Diracのデルタ関数(定義)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \infty & (t = 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1, \quad \varepsilon > 0$$

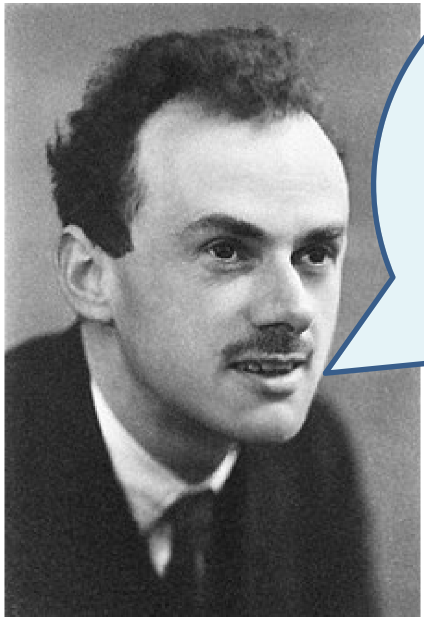
幅：0，　高さ：無限大，　面積：1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)\,dt = \phi(0)$$

超関数

$\phi(t)$: $t = 0$で連続な関数

＜ 余談です ＞



空間の一点にだけある粒子を式中で表現したいんだけど、点で考えるとどの場所でも同じになっちゃうんだよな～・・・
（質点、点電荷）

ポール・エイドリアン・モーリス・ディラック
（1902年8月8日 － 1984年10月20日）
理論物理学者
（主に量子力学及び量子電磁気学）
1933年にノーベル物理学賞を受賞
（エルヴィン・シュレーディンガーと共同）

ガウスの法則（微分形）

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$密度: \rho = \frac{質量}{体積}$$

例えば、

点 a に質量 m_1 の粒子が存在

体積「0」→ 密度∞

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\color{red}{m_1\delta(x-a)}}_{\color{red}{密度}}\, dt = \underbrace{m_1}_{質量}$$

（密度の積分）

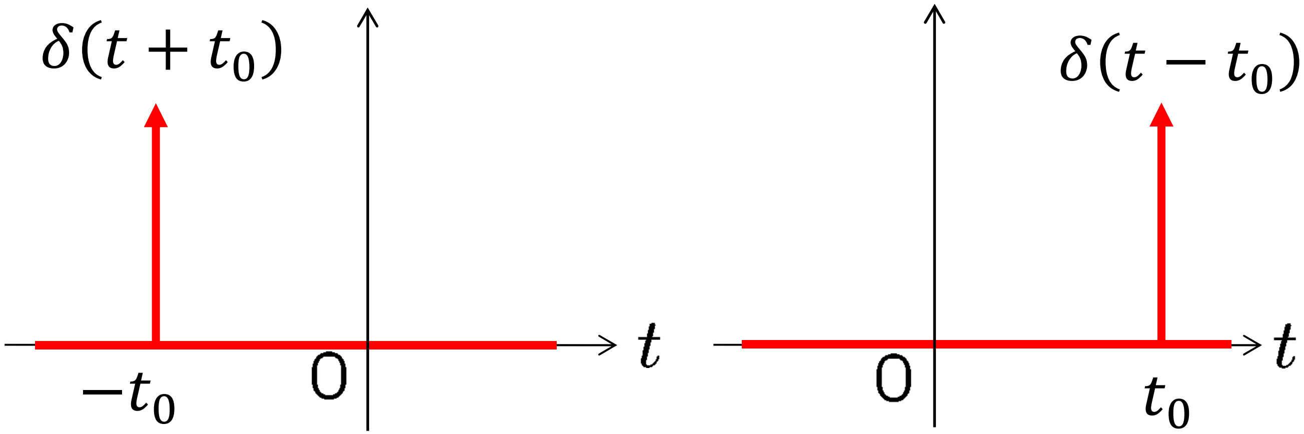
点 b に質量 m_2 の粒子が存在

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_2\delta(x-b)\, dt = m_2$$

違いを表現

デルタ関数の重要な性質(他の性質はpp.46～49)

【性質1】

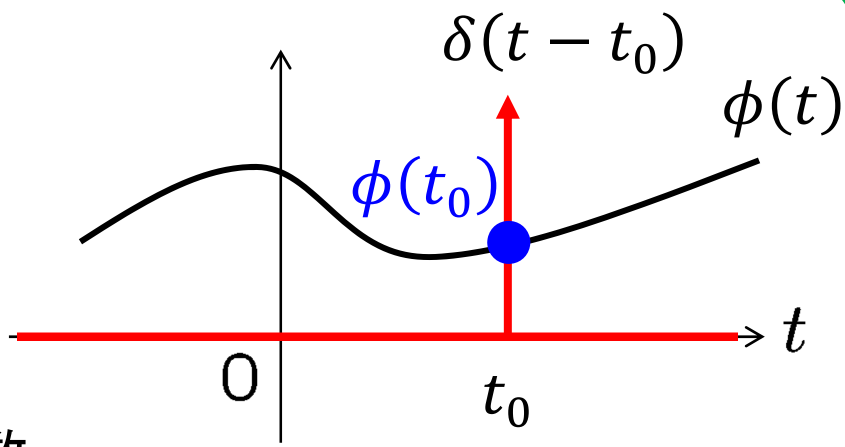


【性質2】

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)\,dt = \phi(t_0)$$

δ 関数の括弧の中が 0 になる
時刻での関数ϕの値が得られる

ただし、$\phi(t)$は$t=t_0$で連続な関数



【性質3】

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)\,dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi\left(\frac{t}{a}\right)dt = \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

【性質4】 $a < b$のとき

$$\int_a^b \delta(t - t_0)\,dt = \begin{cases} 1, & a < t_0 < b \\ 0, & t_0 < a \text{ または } b < t_0 \end{cases}$$

【性質5】

$f(t)$ が $t = 0$で連続ならば、

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

【性質6】

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

【性質7】

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

デルタ関数の微分(p.49)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t)\,dt = [\delta(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)\,dt$$

$$= \delta(\infty)\phi(\infty) - \delta(-\infty)\phi(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)\,dt$$

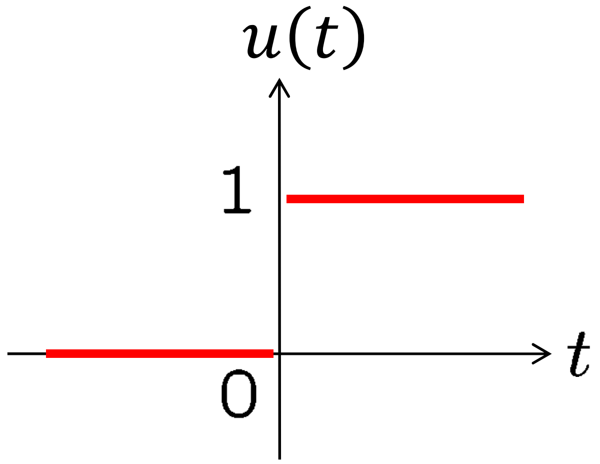
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)\,dt = -\phi'(0)$$

ただし、$\delta'(t) = \dfrac{d}{dt}\delta(t), \qquad \phi'(0) = \dfrac{d}{dt}\phi(t)\Big|_{t=0}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)\,dt = -\phi'(0)}$$

デルタ関数の微分 $\delta'(t)$ と任意の関数 $\phi(t)$ の積を微分すると $\phi(t)$の微分値にマイナスを掛けたものが抽出

ヘビサイドのステップ関数(p.57)



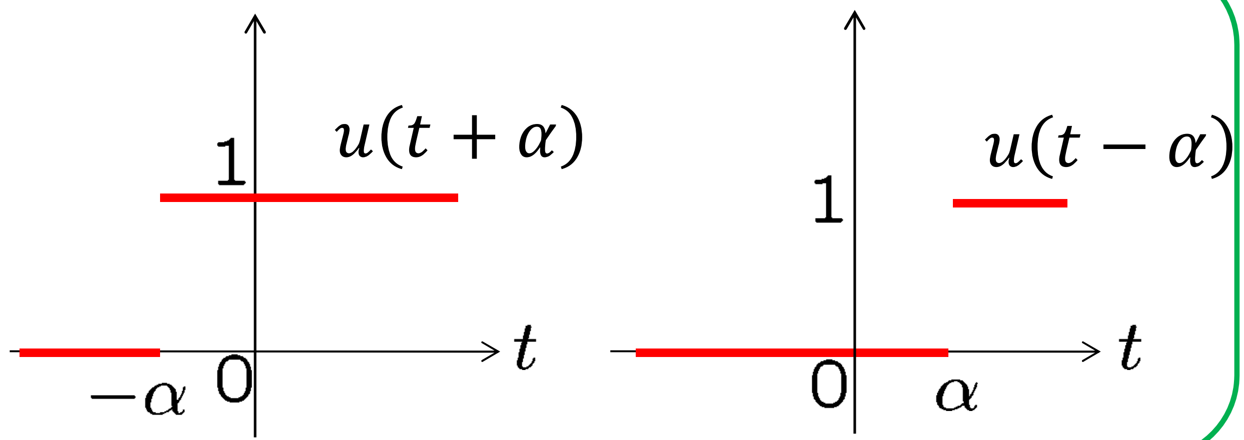
- unit function (単位関数)
- unit step function(単位階段関数)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

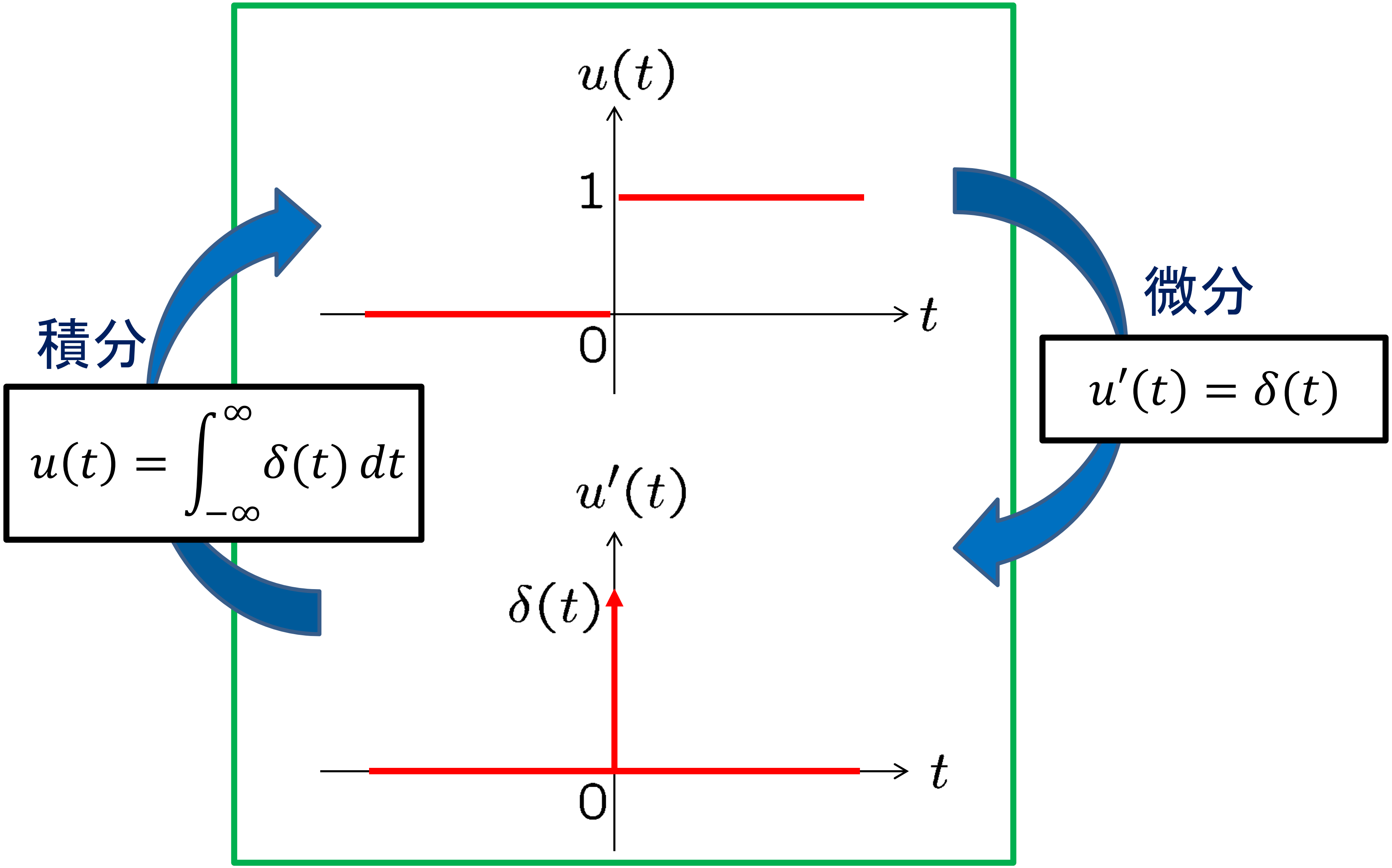
$t = 0$ は定義されない

注) $t = 0$ を定義して使用することもある

シフトしたステップ関数



ステップ関数とデルタ関数の関係



ステップ関数の微分がデルタ関数になることの証明

【証明】 $\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\phi(t)dt$ を考える。 $u(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$

部分積分により

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\phi(t)dt = [u(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi'(t)dt$$

$$= u(\infty)\phi(\infty) - u(-\infty)\phi(-\infty) - \int_{0}^{\infty} \phi'(t)dt$$

$$= \phi(\infty) - [\phi(t)]_0^{\infty} = \phi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

比較

デルタ関数の定義

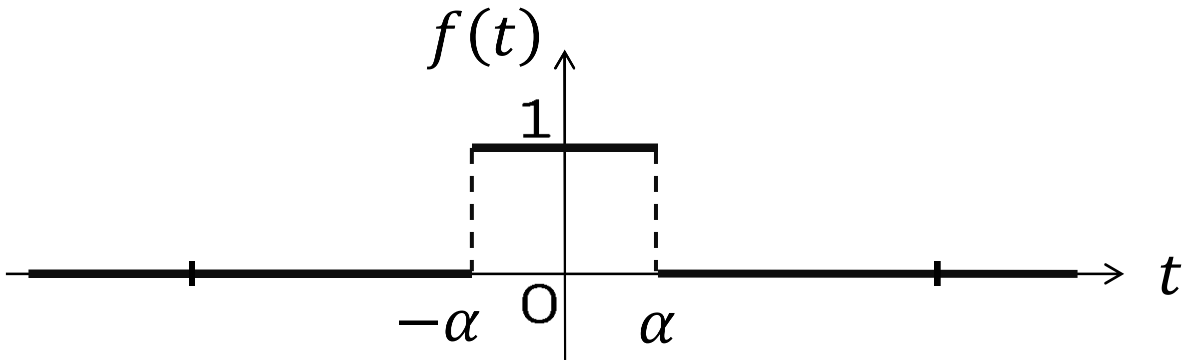
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)\, dt = \phi(0)}$$

よって,

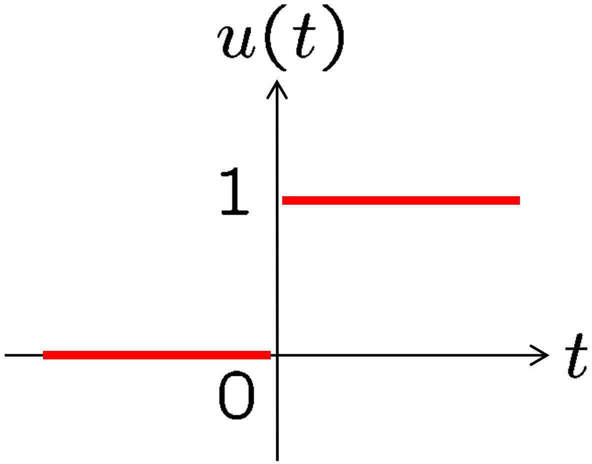
$$u'(t) = \delta(t)$$

【 例 】

$$f(t)=\begin{cases}1, & -\alpha < t < \alpha \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$ の微分を求めよ。

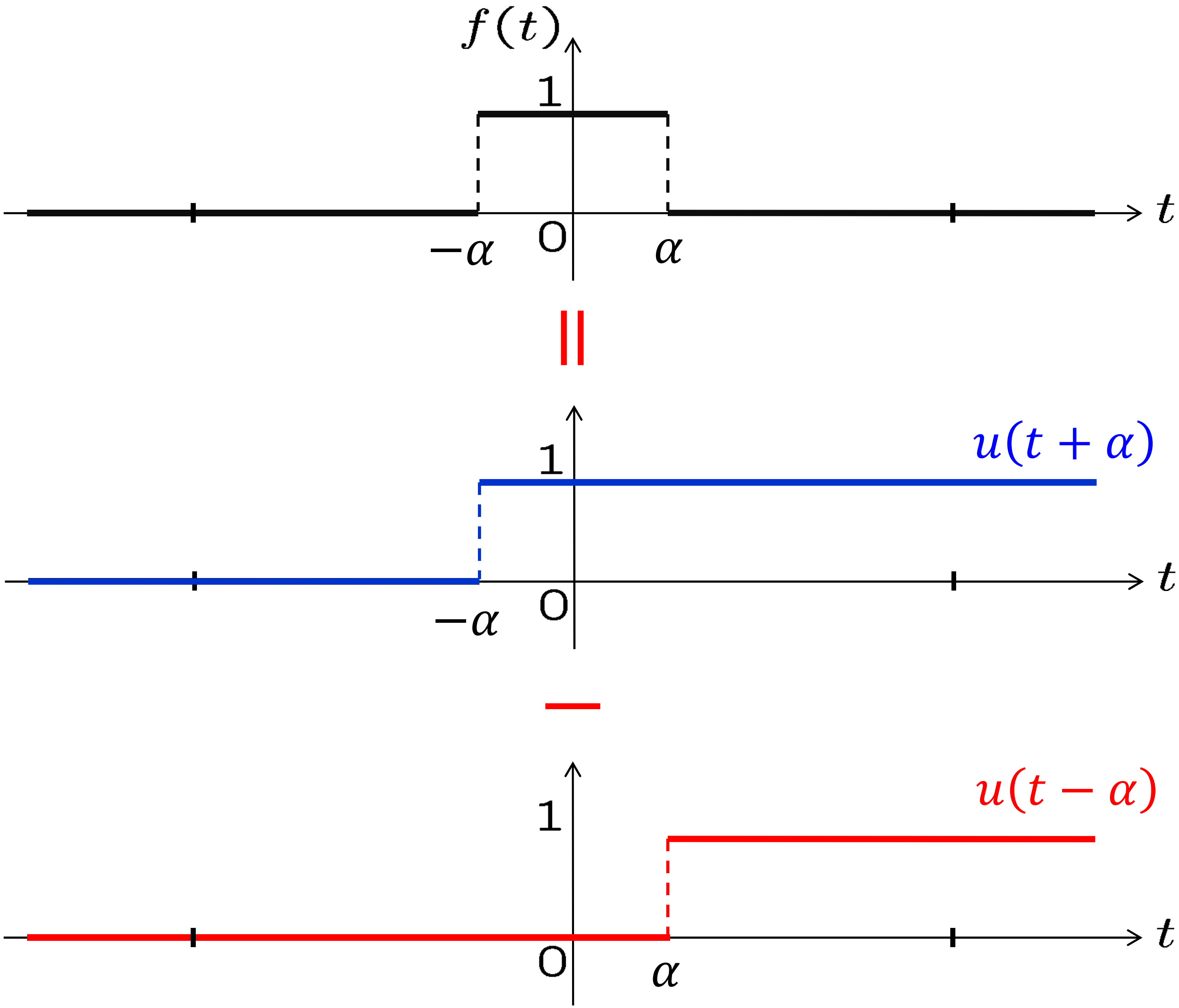


ポイントは、ステップ関数 $u(t)$ を上手く使って $f(t)$ 表せるか



$$u(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

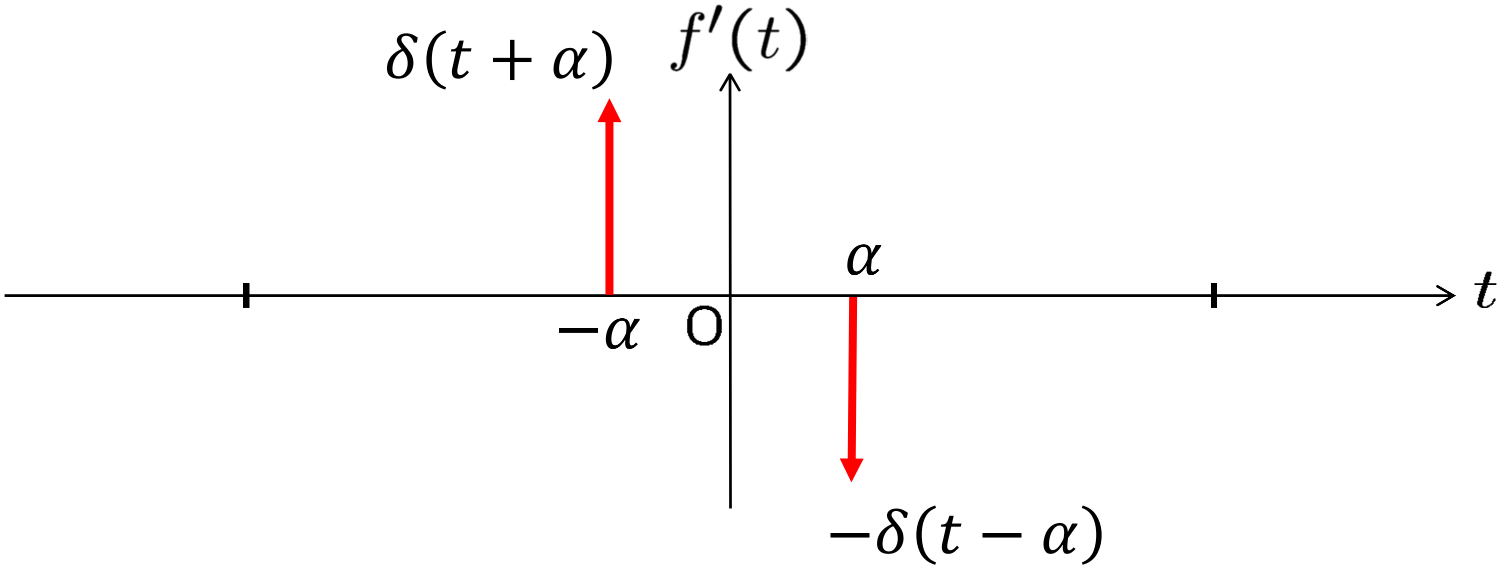
ステップ関数を使うと　$f(t) = u(t+\alpha) - u(t-\alpha)$



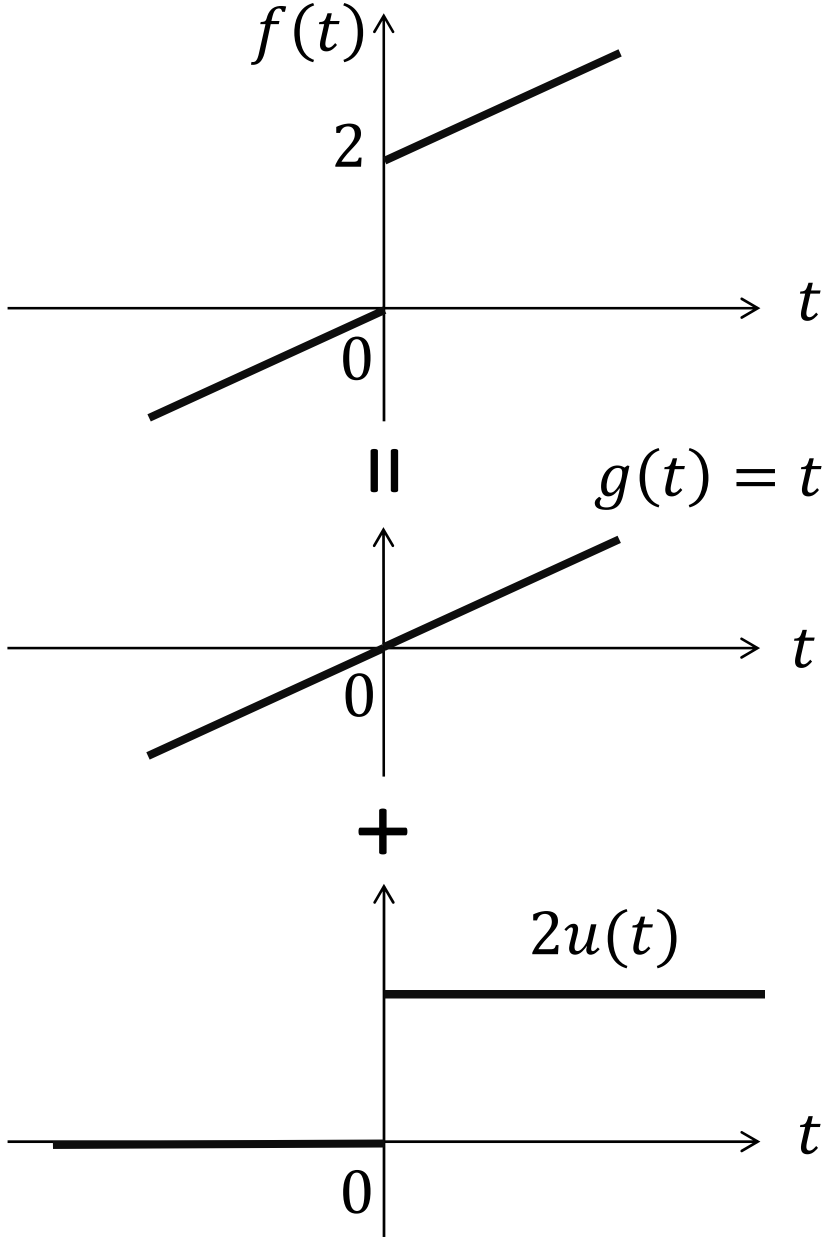
$$f(t) = u(t+\alpha) - u(t-\alpha)$$

$u'(t) = \delta(t)$ なので

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t+\alpha) - u'(t-\alpha) \\ &= \delta(t+\alpha) - \delta(t-\alpha) \end{aligned}$$



不連続関数の微分



$$f(t) = \begin{cases} t + 2 & (0 \leq t) \\ t & (t < 0) \end{cases}$$

$t = 0$で不連続

$$f(t) = g(t) + 2u(t)$$
$$= t + 2u(t)$$

微分

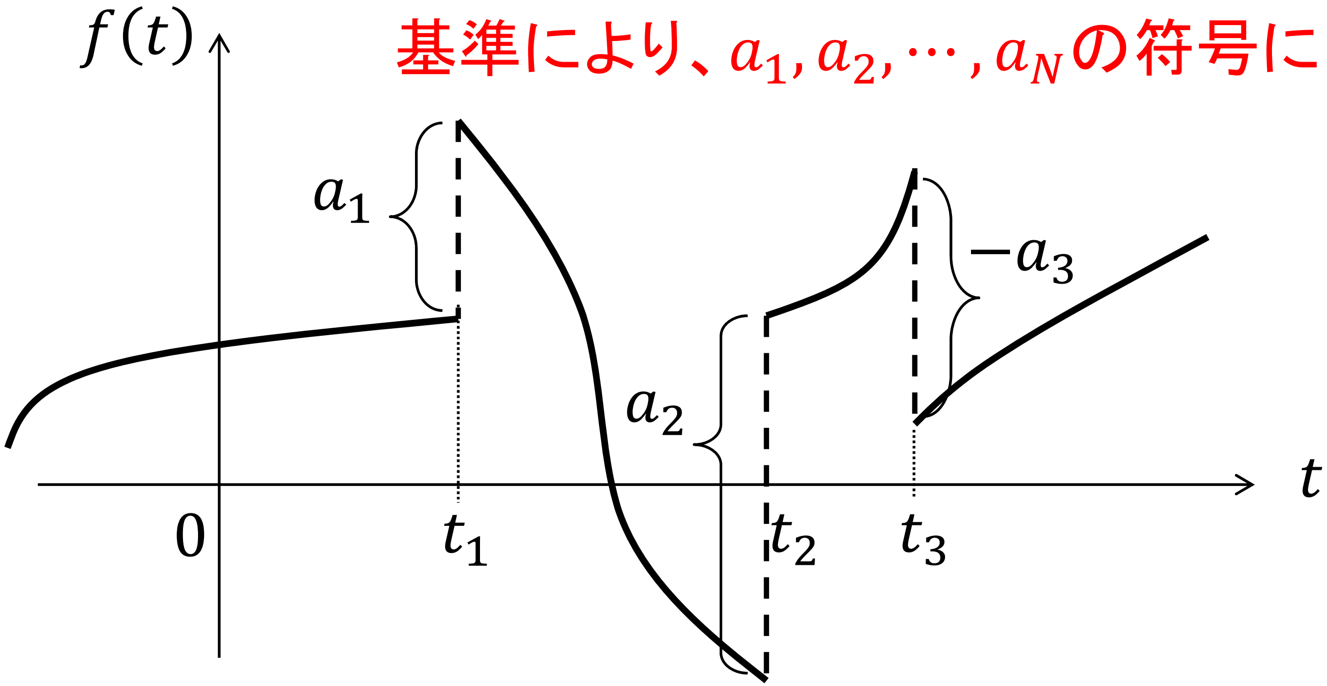
$$f'(t) = g'(t) + 2u'(t)$$
$$= 1 + 2\delta(t)$$

一般に、$f(t)$ が $t_1, t_2, \cdots, t_N$ で跳び不連続 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ をもつ区分的に連続な関数とする。

連続関数 $g(t)$: $g(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k u(t - t_k)$

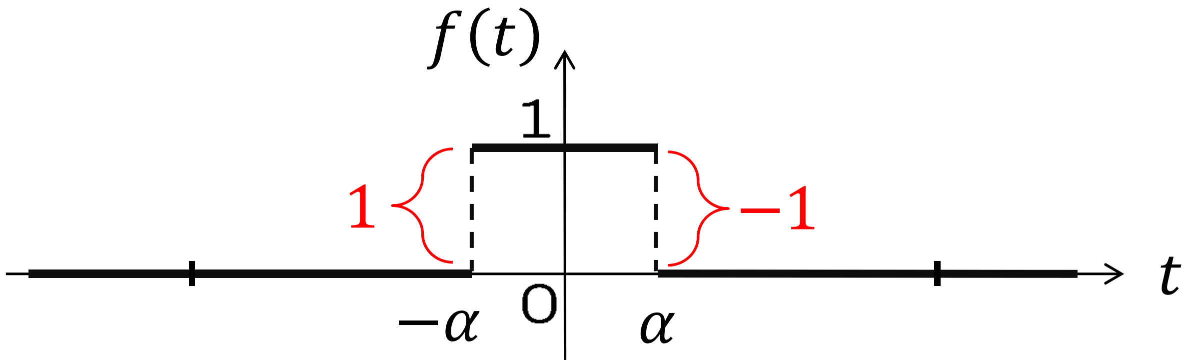
$f(t)$の微分: $f'(t) = g'(t) + \sum_{k=1}^{N} a_k \delta(t - t_k)$

基準により、$a_1, a_2, \cdots, a_N$の符号には注意



【 再び先の例 】

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\alpha < t < \alpha \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$ の微分を求めよ。



$g(t) = 0$ を仮定すると

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k u(t - t_k) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k u(t - t_k)$$

$N = 2, \quad t_1 = -\alpha, \quad t_2 = \alpha, \quad a_1 = 1, a_2 = -1$ なので

$$f(t) = u(t + \alpha) - u(t - \alpha)$$

$$f'(t) = \delta'(t + \alpha) - \delta(t - \alpha)$$

宿題

- 演習問題3
- ILIASからダウンロード
- 提出期限: 5 月21 日(木) 24:00(日本時間) まで

【注意】

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとしてILIAS から提出する。
- ファイル形式は提出ができれば何でも構いません(jpeg, word, pdf など)。
- ファイル名は「bst_report_3」としてください。複数のファイルになる場合は「bst_report3_1」、「bst_report3_2」などとしてください。