令和 2 年 5 月 22 日，1 時限目

# 信号理論基礎　演習問題 4

提出に関する注意事項：

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとして ILIAS から提出する。
  ファイル形式は提出ができれば何でも構いません (jpeg, word, pdf など)。
  ファイル名は「bst_report4」としてください。
  複数のファイルになる場合は「bst_report4_1」、「bst_report4_2」などとしてください。
- 提出期限：5 月 28 日 (木) 24:00(日本時間) まで。

---

1. 複素関数の集合 $\{g_n(t)\}$ は，

$$\int_a^b g_n(t)g_m^*(t)dt = \begin{cases} 0, & (n \neq m) \\ r_n > 0, & (n = m) \end{cases}$$

を満たすとき，区間 $a < t < b$ で直交であるという。ここで，$g_m^*(t)$ は $g_m(t)$ の共役複素数である。このことを利用して，複素フーリエ級数展開における指数関数の集合 $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ が区間 $-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T$ で直交することを示せ。

2. 周期が $T$ である関数 $f(t)$ を，区間 $-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T$ において次式で定義する。

$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0, & -\frac{1}{2}T < t < -\frac{1}{2}d,\ \frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}T \end{cases}$$

また，$g(t) = f\left(t - \frac{1}{2}d\right)$ と定義する。以下の問に答えよ。

(1)　$f(t)$ および $g(t)$ を $-T \leq t \leq T$ の範囲で図示せよ。

(2)　$f(t)$ の複素フーリエ係数 (スペクトル) を求めよ。

(3)　$g(t)$ の複素フーリエ係数 (スペクトル) を求めよ。

1. ○ $n \neq m$ のとき

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} \left[ e^{j(n-m)\omega_0 t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \\ e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta \end{array}}$$

$$= \frac{1}{j(n-m)2\pi} \left( e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{j(n-m)2\pi} \cdot 2j\sin(n-m)\pi$$

$$= \frac{1}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi$$

$$= 0$$

○ $n = m$ のとき

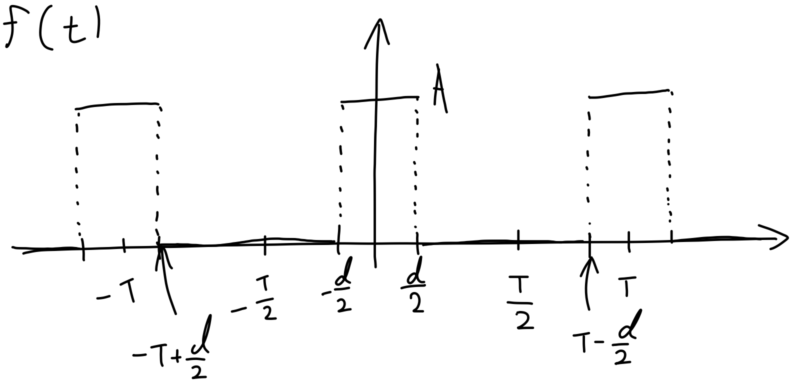
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot 0 \cdot \omega_0 t} dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \left[ t \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) = T$$

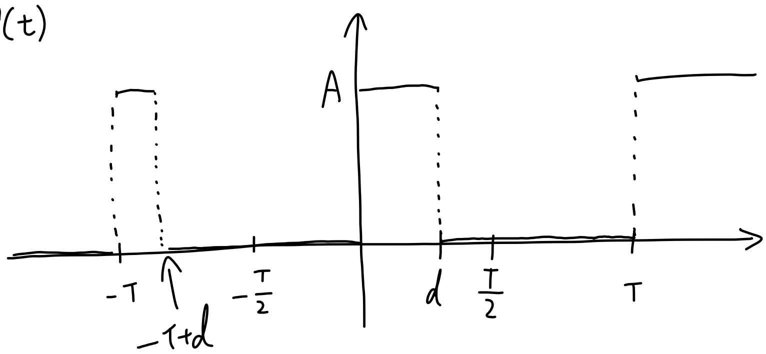
よって与式を満足した.

2.

(1) ∘ $f(t)$




∘ $g(t)$




(2) $$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} A\,dt = \frac{A}{T}\Big[t\Big]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = \underline{\frac{Ad}{T}} \;/\!/$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{A}{T}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{-jn\omega_0}\Big[e^{-jn\omega_0 t}\Big]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{-jn\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0\frac{d}{2}} - e^{jn\omega_0\frac{d}{2}}\right) = \frac{1}{T}\,\frac{1}{jn\omega_0}\left(e^{jn\omega_0\frac{d}{2}} - e^{-jn\omega_0\frac{d}{2}}\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered} e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \\ e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta \end{gathered}}$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{jn\omega_0}\cdot 2j\sin\left(n\omega_0\frac{d}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{A}{T}\,\frac{2}{n\omega_0}\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)} \;/\!/$$

2.

(3)

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^d A\,dt = \underline{\frac{Ad}{T}} \;//$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^d A\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{-jn\omega_0}\left[e^{-jn\omega_0 t}\right]_0^d$$

$$= \underline{\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{-jn\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0 d} - 1\right)} \;//$$