信号理論基礎(後半)

担当:　岩橋政宏　(電気1棟510)
iwahashi@vos.nagaokaut.ac.jp

H.P.スウ 著「フーリエ解析」森北出版

4章　フーリエ積分及び連続スペクトル

5章　特殊関数のフーリエ変換

(6章　線形システムへの応用)

7章　通信理論への応用

今日の学習項目

矩形波のフーリエ変換は

sinc関数である

cosのフーリエ変換は

δ デルタ関数である

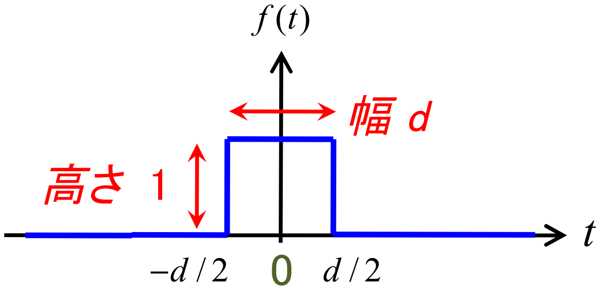
まずは問題を解く

重要

問題 4.10 (p.94)

(1)

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<d/2\\ 0, & |t|>d/2\end{cases}$$ を描け



t は変数 (a variable)
d は定数 (a given constant)

重要

問題 4.10 (p.94)

(2)

$f(t)$ を

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$ に代入せよ

(2)'

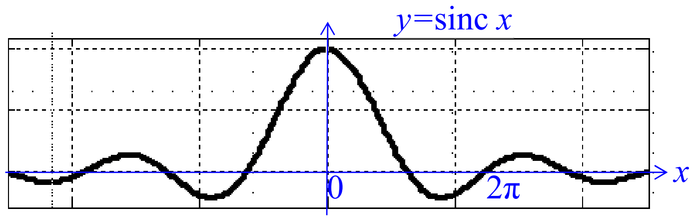
結果を $\operatorname{sinc}\dfrac{\omega d}{2}$ で表せ

このあと，ヒントを2つをきいて，5分で解くこと

ヒント 1

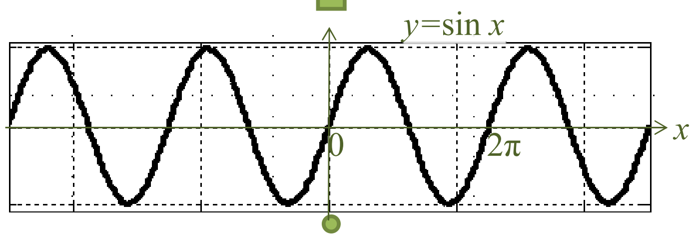
sinc 関数とは？

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

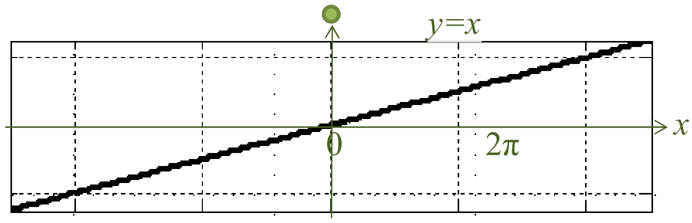


覚えておくこと！

分子は $\sin x$



分母は x



ヒント 2

三角関数と 複素数の 関係

覚えておくこと！

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

オイラーの公式

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

ヒント 2

導出法

Eulerの公式

$$e^{+jx} = \cos x + j \sin x$$

x を −x にすると

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

差は

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$$

2*j* で割る

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x$$

自力で解く
5分

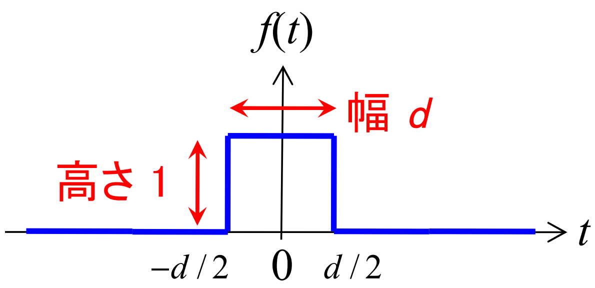
問題 4.10 (p.94)

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<d/2\\ 0, & |t|>d/2\end{cases}$$ のとき

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$ を計算せよ

また、結果を $\mathrm{sinc}\,\dfrac{\omega d}{2}$ で表せ

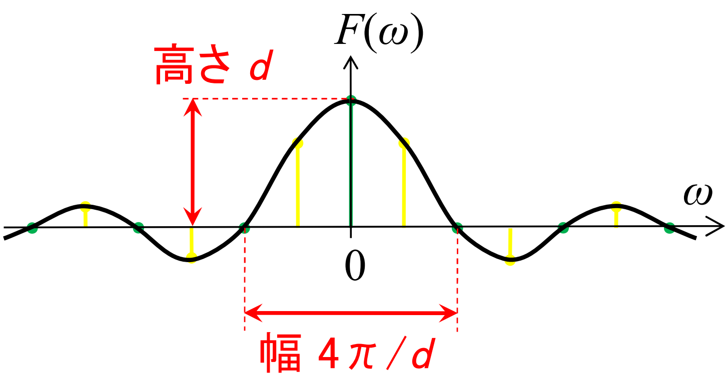
問題4.10　の解答



$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le d/2\\ 0, & |t|>d/2\end{cases}$$

$\mathcal{F}$ フーリエ変換

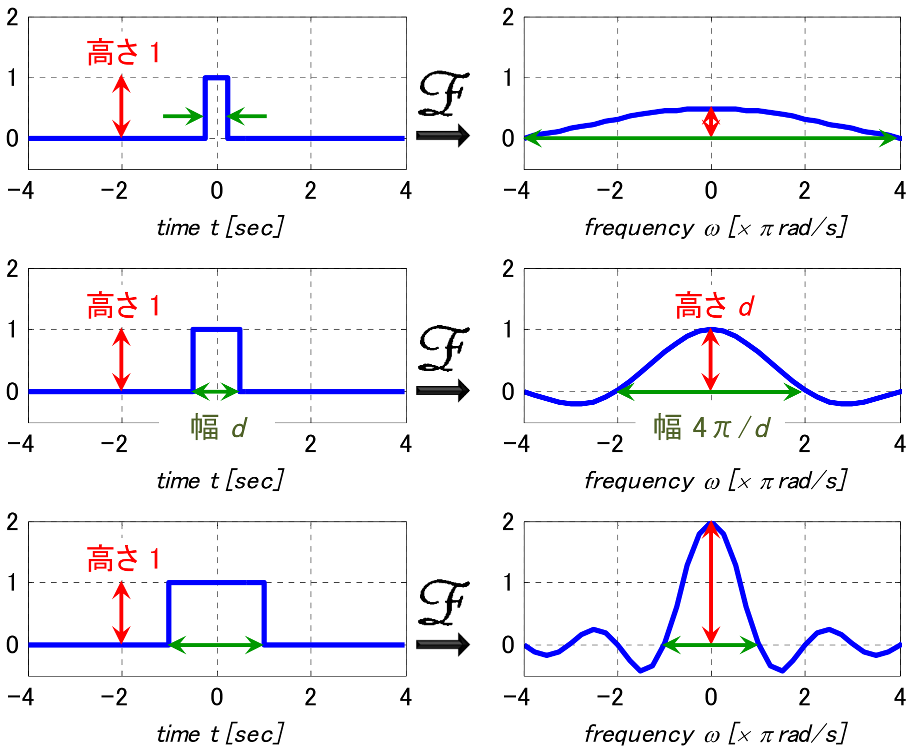
$\mathcal{F}$ フーリエ変換



$$F(\omega)=d\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

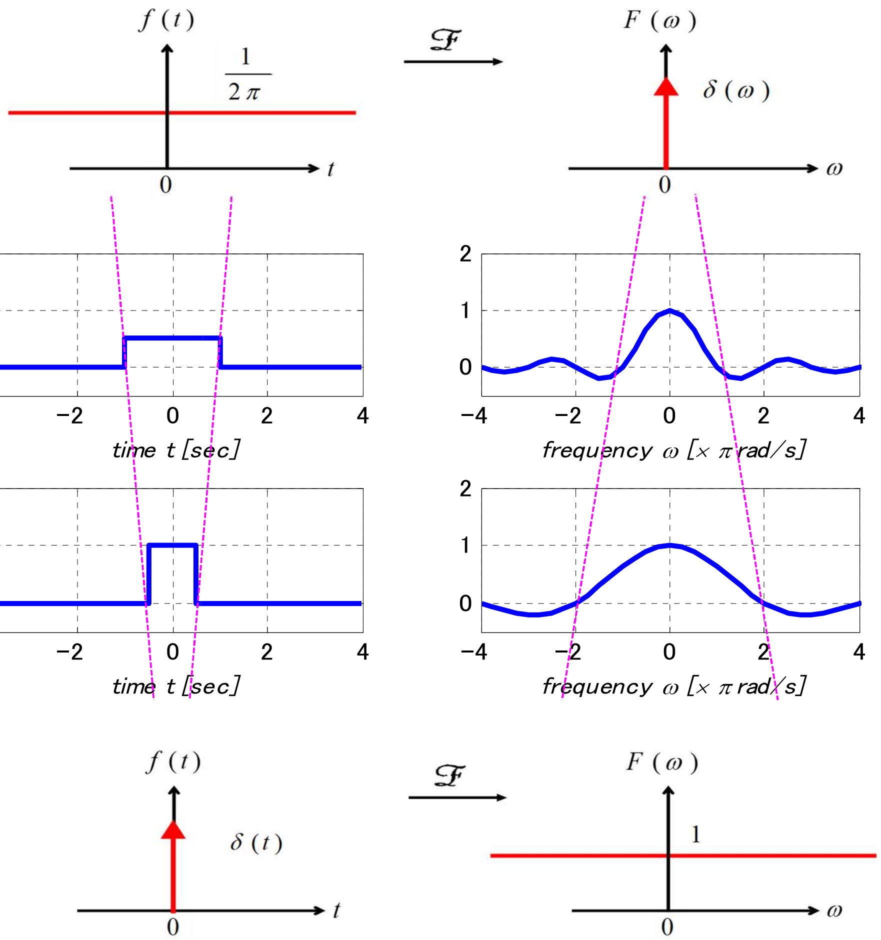
答えは、あってましたか？
概略を図示できますか？

MATLAB




```
clear all; close all;
N =2^10;  n =1:N; Wd=8;

t=(n-N/2-1)/N*Wd;
w=(n-N/2-1)/Wd*2;

for i=1:3;   Ts=2^(i-2);

 x1=abs(t)<Ts/2; X1=fftshift( x1)
 X1=fft(x1);
 X1=real(fftshift(X1))/N*Wd;

 subplot(3,2,(i-1)*2+1);
 plot(t,x1,'LineWidth',2);
 axis([-Wd/2,Wd/2,-.5,2]); grid c
 xlabel('¥it time t [sec]');

 subplot(3,2,(i-1)*2+2);
 plot(w,X1,'LineWidth',2);
 axis([-Wd/2,Wd/2,-.5,2]); grid c
 xlabel('¥it frequency ¥omega [

end;
```

参考



宿題 1/2

問題4.10(教科書p.94)を解け

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<d/2\\ 0, & |t|>d/2\end{cases}$$

をフーリエ変換せよ

1. 問題を自力で解いてみる
2. 教科書を見ながら添削する

問題4.10を解くためには

- 教科書 p.86〜94 を読む
- 問題　4.1〜4.9　を解く

教科書を読んで、自分で考え、
学習する必要があります。

まとめ

毎回、授業に参加し

毎回、自宅で学習し

毎回、宿題に取り組むことで

単位を習得できます

何のための
フーリエ変換か？

身近な応用は
何だろうか？

周波数と 大きさを 調べる

波形

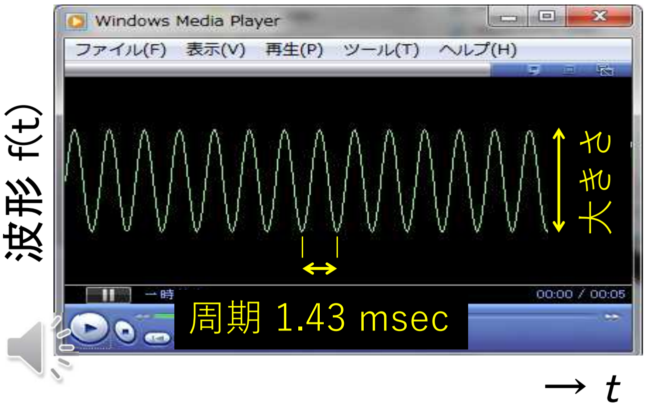
$$f(t)$$

$\mathcal{F}$ フーリエ変換

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

波形 f(t)



→ t

時刻

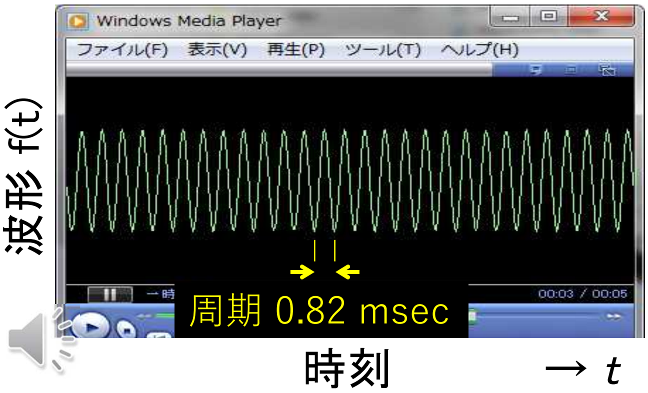
スペクトル |F(ω)|

→ ω

←低い 周波数 高い→

違いを 調べたい → 分析 したい

波形 f(t)



時刻 → t

スペクトル |F(ω)|

周波数 → ω

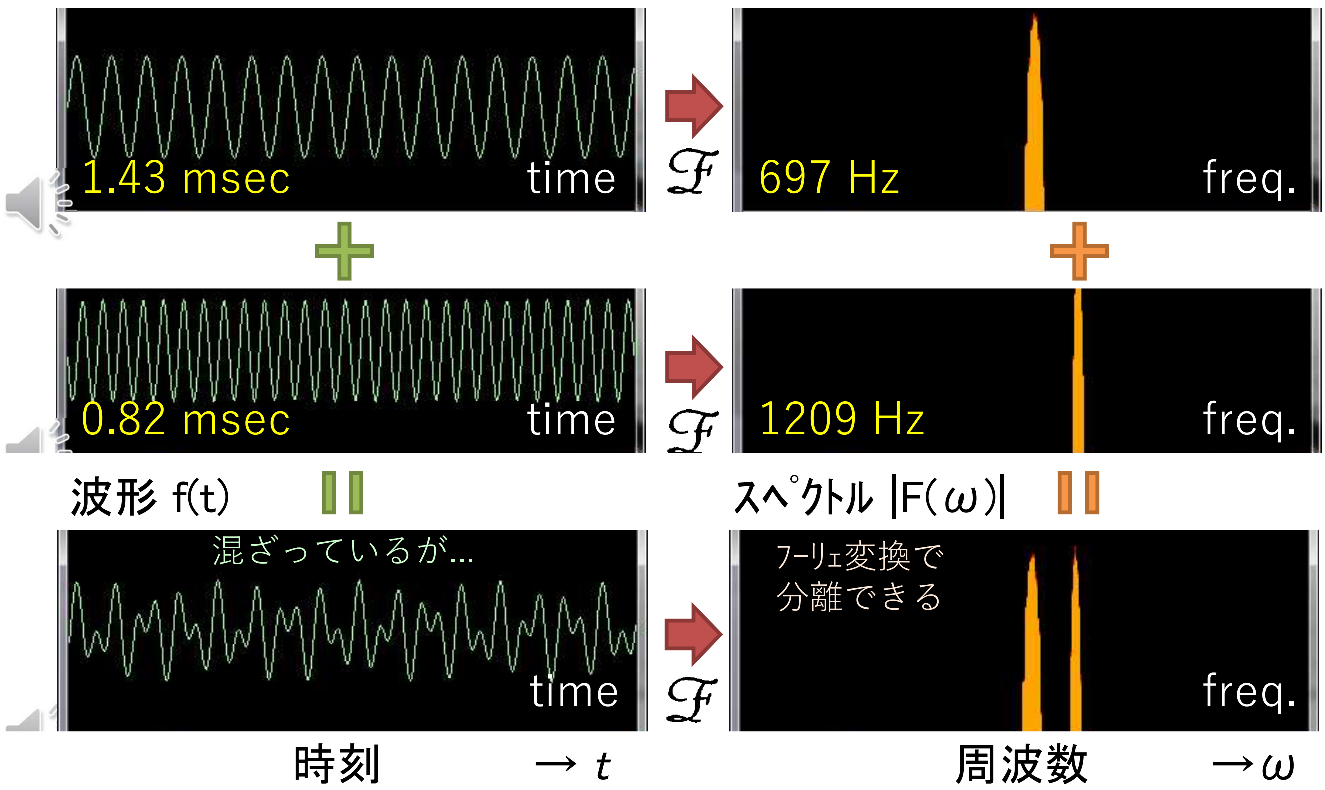
波形 f(t)

時刻 → t

スペクトル |F(ω)|

周波数 → ω

混ざっていても 分析 できる



音の組み合わせ（プッシュホン）

http://ja.wikipedia.org/wiki/

DTMF
（Dual-Tone Multi-Frequency）

		高群 (Hz)			
		1209	1336	1477	1633
低群 (Hz)	697	1	2	3	A
	770	4	5	6	B
	852	7	8	9	C
	941	*	0	#	D

‘1番’ = 697 Hz + 1209 Hz

‘2番’ = 697 Hz + 1336 Hz

‘5番’ = 770 Hz + 1336 Hz

【クイズ】プッシュホンの番号は？

		高群 (Hz)			
		1209	1336	1477	1633
低群 (Hz)	697	1	2	3	A
	770	4	5	6	B
	852	7	8	9	C
	941	*	0	#	D

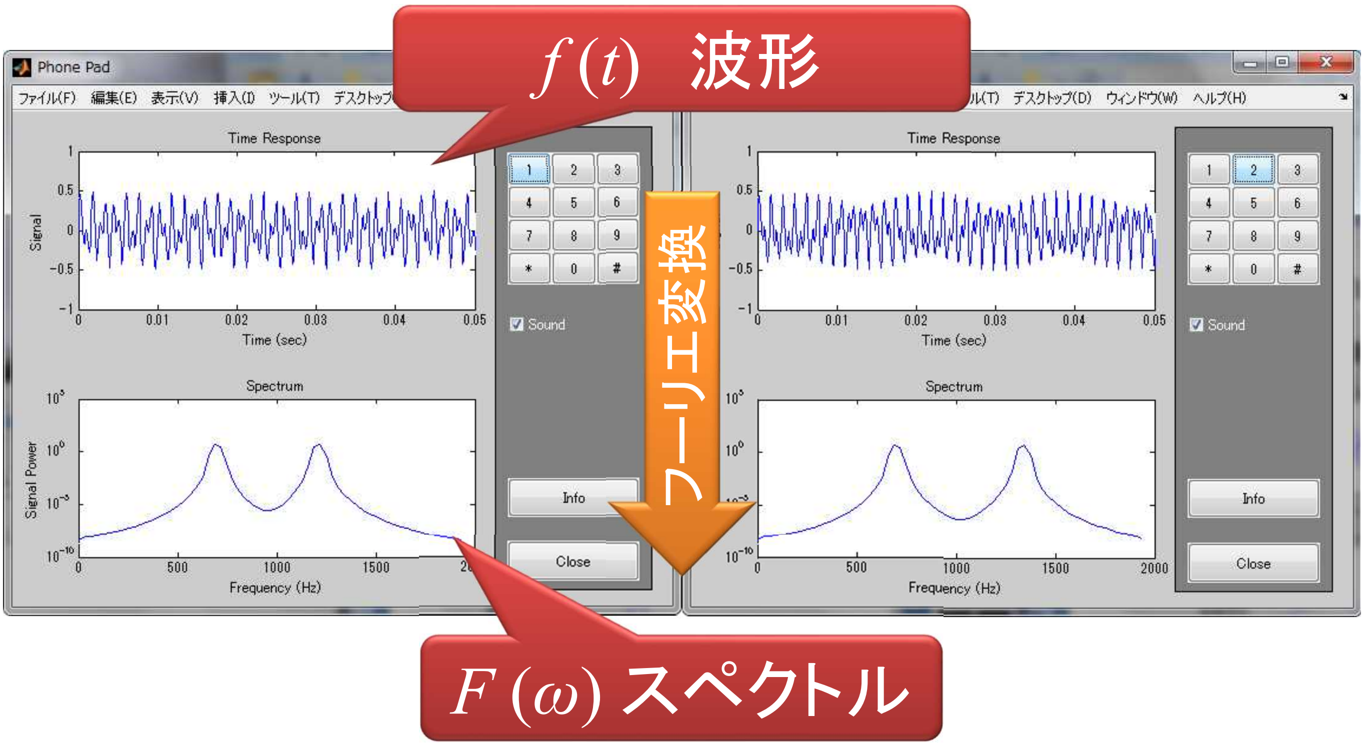
①この音は何番？

770 + 1209　（ヒント：単音で聞く）

941 + 1336　②この音は何番？

【参考】

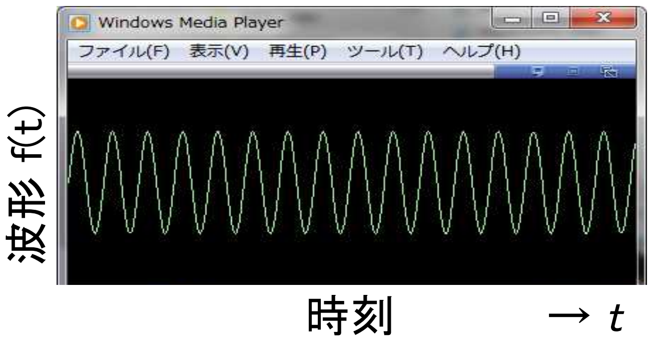
'phone' command in MATLAB



計算して
確かめよう

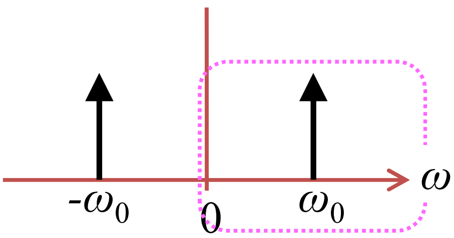
波形

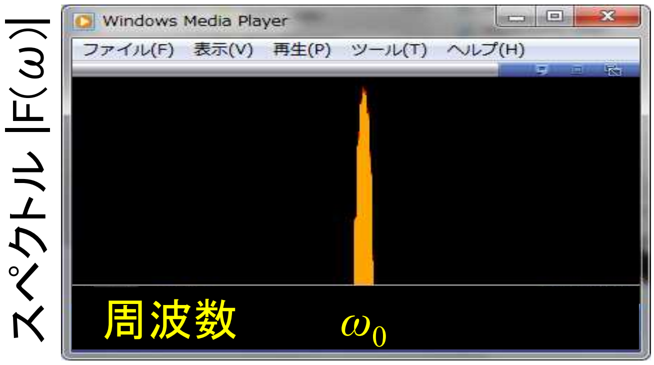
$$f(t)=\cos\omega_0 t$$



$\mathscr{F}$ フーリエ変換

$\mathscr{F}$ フーリエ変換





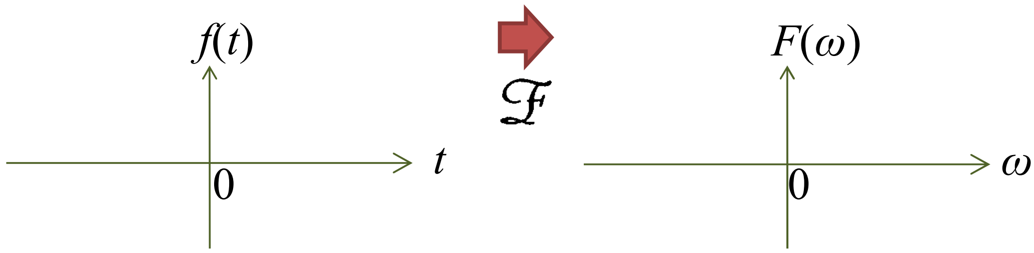
こうなることを
数式で確かめたい

重要

問題 5.8 (p.128)

(1) $f(t) = \cos\omega_0 t$ 　をフーリエ変換せよ

(2) $f(t)$ と $F(\omega)$ を、それぞれ図示せよ



このあと，ヒントを3つをきいて，5分で解くこと

ヒント（1）

式(5.51)
p.14

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

ヒント（2）

問題5.7
p.128

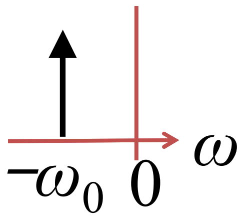
$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

フーリエ変換

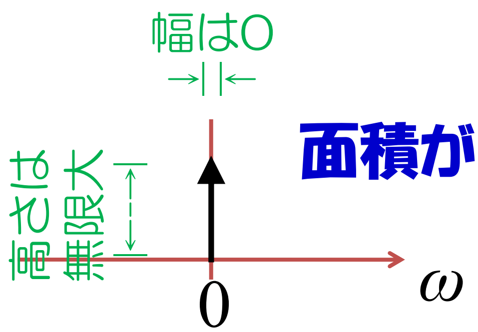
ヒント（3）

デルタ関数とは？

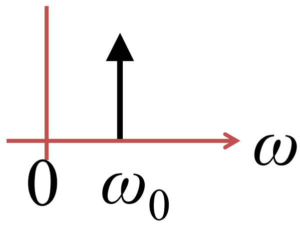
$$\delta(\omega+\omega_0)$$



$$\delta(\omega)$$



$$\delta(\omega-\omega_0)$$



教科書 2.4（p.46～49）を復習しておこう

自力で解く

問題 5.8 を解く（p.128）

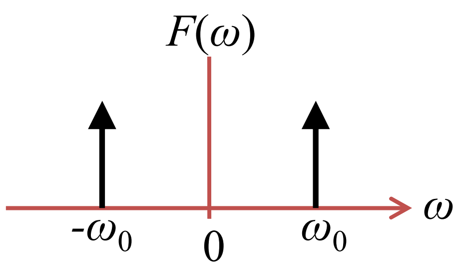
$$f(t)=\cos\omega_0 t=\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2}+\frac{e^{+j\omega_0 t}}{2}$$

$\Downarrow \mathscr{F}$

Fourier 変換

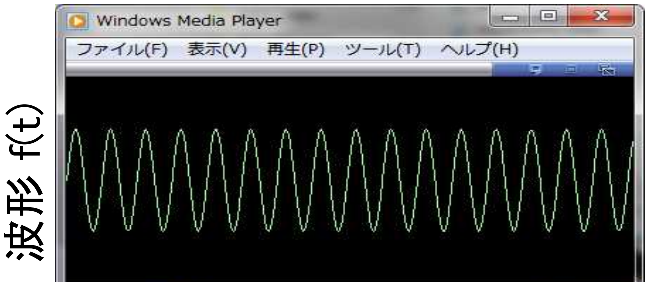
問題5.7（p.128）

$$F(\omega)=\frac{2\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0)}{2}+\frac{2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)}{2}$$



波形

$$f(t) = \cos\omega_0 t$$

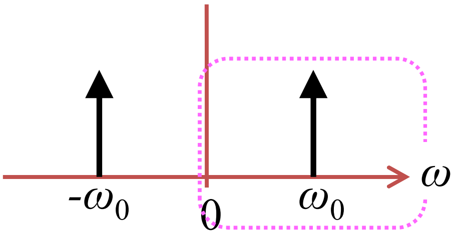


時刻 → t

$\mathcal{F}$ フーリエ変換

$\mathcal{F}$ フーリエ変換

$$F(\omega) =$$
$$\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0)+\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)$$



こうなることが
数式で確認できた

宿題 2/2

問題 5.7 と 5.8 を解け
（教科書p.128）

1. **問題を自力で解いてみる**
2. **教科書を見ながら添削する**

時間が余ったら…

今日、習ったことを、
復習してみよう

問題1

(1) 以下の $f(t)$ をフーリエ変換せよ

$$f(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

但し、フーリエ変換は以下で定義される

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

問題1（続き）

(2) 得られた $F(\omega)$ を $\mathrm{sinc}\,\dfrac{\omega T}{2}$ で表せ。

(3) $F(\omega)$ の概形を図示せよ。

$\mathrm{sinc}\,\dfrac{\omega T}{2}$ は $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)}{\dfrac{\omega T}{2}}$ のことです

問題2

(1) sinc x の概形を描け。$-3\pi \leqq x \leqq 3\pi$ の範囲で

(2) sinc x =0 となるときの x の値を
図に記入せよ。

問題3

(1) オイラーの公式を使い

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

三角関数を、複素指数関数で表せ

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \qquad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

復習問題
の
解説

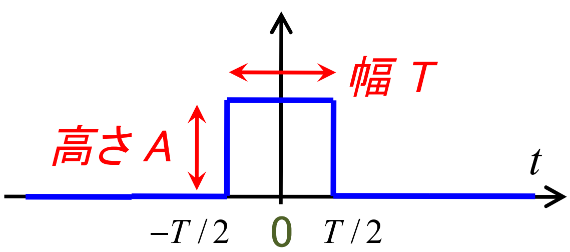
問題1

$$f(t)=\begin{cases} A, & |t|\le T/2 \\ 0, & |t|>T/2 \end{cases}$$

$\mathscr{F}$

フーリエ変換

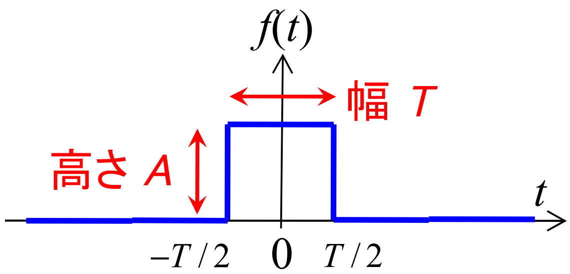
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$



結果を sinc 関数で表せ

$$\operatorname{sinc} x=\frac{\sin x}{x}$$

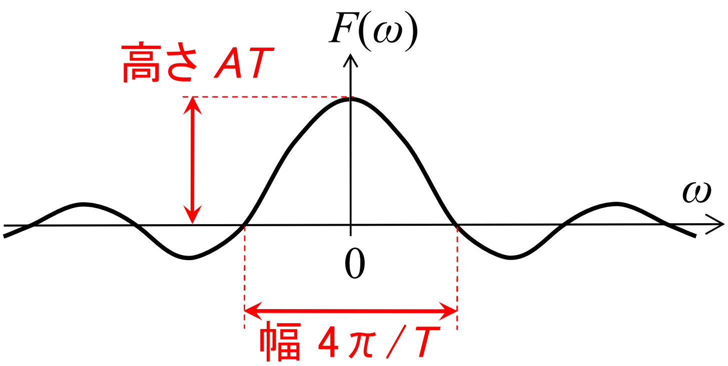
問題1（解答）



$$f(t) = \begin{cases} A, & |t| \le T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

Fourier transform $\mathcal{F}$

Fourier transform $\mathcal{F}$



$$F(\omega) = AT \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

答えは、あってましたか？
概略を図示できますか？

問題1（解説 1/2）

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-T/2}^{+T/2} A \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= A \cdot \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T/2}^{+T/2}$$

$$= A \cdot \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega}$$

問題1（解説 2/2）

$$F(\omega)=\frac{2A}{\omega}\cdot\frac{e^{-j\omega T/2}-e^{j\omega T/2}}{-2j}$$

$$=\frac{2A}{\omega}\cdot\sin\frac{\omega T}{2}$$

$$=AT\cdot\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$

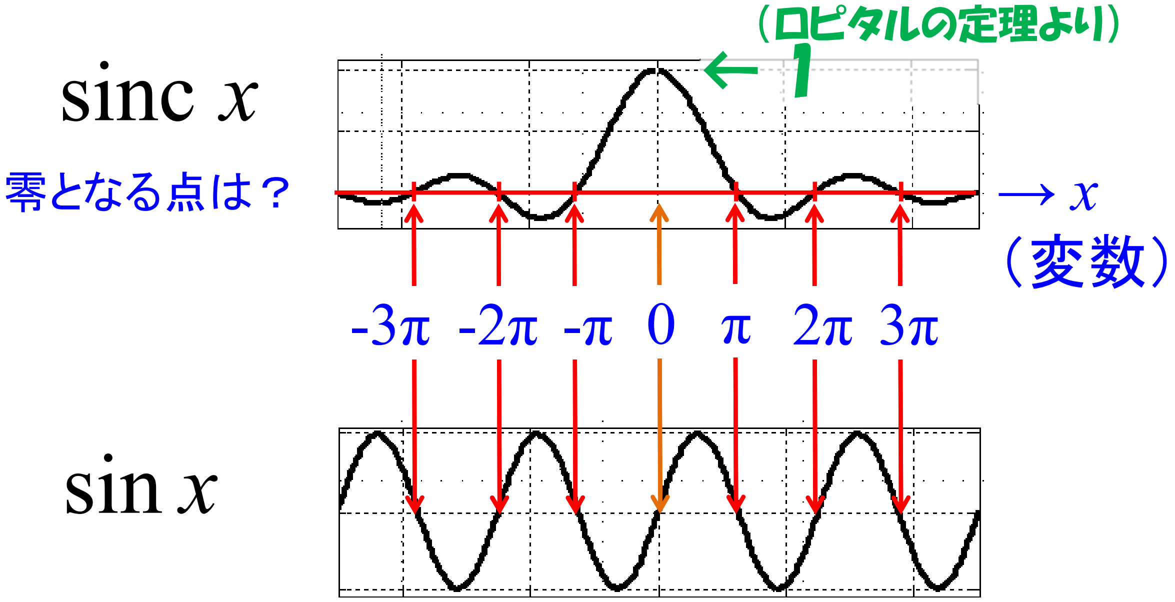
$$=AT\cdot\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}$$

問題2

(1) sinc x の概形を描け。-3π≦x≦3π の範囲で

(2) sinc x =0 となるときの x の値を図に記入せよ。

問題2（解答）



参考

ロピタルの定理

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{d}{dt}f(t)}{\dfrac{d}{dt}g(t)}$$

$$\mathrm{sinc}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin t)'}{(t)'}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1}=\cos 1=1$$

ロピタルの定理より
x=0 のとき sinc関数は 1 となる

問題3（解説）

Eulerの公式は

$$e^{+jx} = \cos x + j \sin x$$

x を −x にすると

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

和は

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x$$

差は

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$$