令和2年5月8日，1時限目

信号理論基礎　演習問題2

提出に関する注意事項：

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとして ILIAS から提出する。
  ファイル形式は提出ができれば何でも構いません (jpeg, word, pdf など)。
  ファイル名は「bst_report2」としてください。
  複数のファイルになる場合は「bst_report2_1」、「bst_report2_2」などとしてください。
- 提出期限：5月13日(木) 24:00(日本時間) まで。

---

1. 図1に示す周期 $T = 2\pi$ の波形をもつ関数 $f_1(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

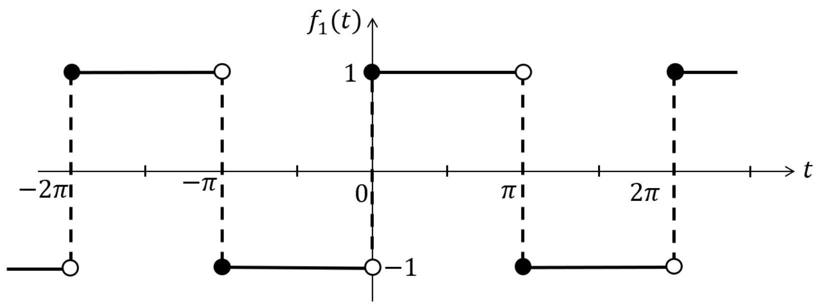


図 1: 問題 1. の波形

2. 図2に示す周期 $T = 2\pi$ の波形をもつ関数 $f_2(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

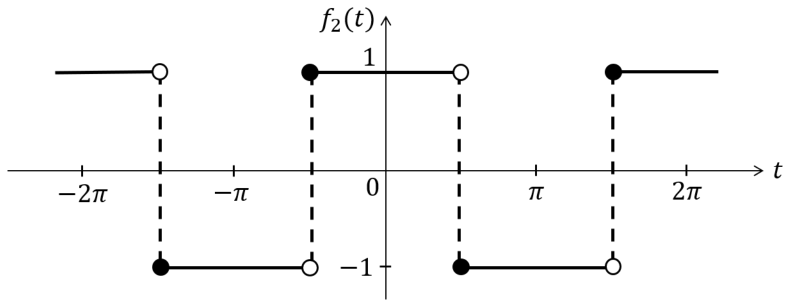


図 2: 問題 2. の波形

3. 図3に示す周期 $T = 2\pi$ の波形をもつ関数 $f_3(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

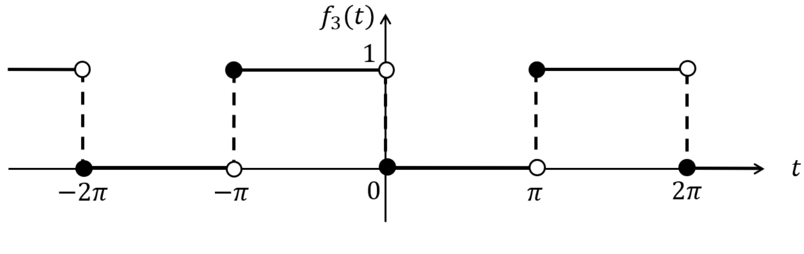


図 3: 問題 3. の波形

4. 図 4 に示す周期 $T = 2\pi$ の波形をもつ関数 $f_4(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

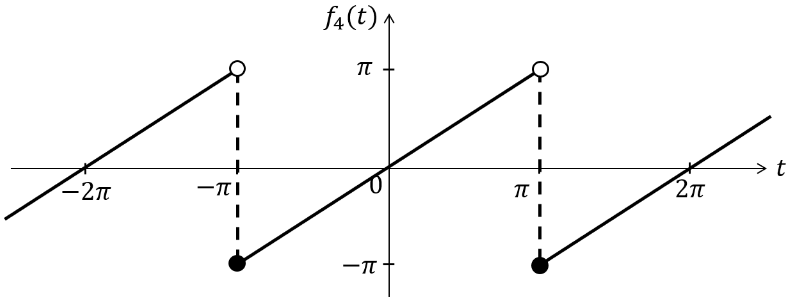


図 4: 問題 4. の波形

5. 次式で定義される関数 $f(t)$ を $-2\pi \leq t < 2\pi$ の範囲で図示せよ．また，$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t) = \begin{cases} 0, & (-\pi \leq t < 0) \\ A\sin(\omega_0 t) & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$

および $f(t+T) = f(t)$, $T = 2\pi$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

6. $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$, となることを示せ.

ヒント：1. の結果に $t = \dfrac{\pi}{2}$ を代入して考える.

1、 $f_1(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq t < \pi) \\ -1 & (-\pi \leqq t < 0) \end{cases}$, $T = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(0)\,dt = \frac{2}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt + \int_0^{\pi} 1\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-[t]_{-\pi}^{0} + [t]_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\Big(-(0+\pi)+(\pi-0)\Big) = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = \underline{0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos(n\omega_0 t)\,dt + \int_0^{\pi}\cos(n\omega_0 t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n\omega_0}\left[\sin(n\omega_0 t)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n\omega_0}\left[\sin(n\omega_0 t)\right]_0^{\pi}\right)$$

$\omega_0 = 0$

$$= \frac{1}{n\omega_0\pi}\Big((0-0)-(0-0)\Big) = \underline{0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}-\sin(nt)\,dt + \int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{n}\left[-\cos(nt)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\left[-\cos(nt)\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left\{\left(1-(-1)^n\right) - \left((-1)^n - 1\right)\right\} = \frac{1}{n\pi}\left(2-2(-1)^n\right)$$

$$\underline{b_n = \begin{cases} 0 & (n.\text{even}) \\ \frac{4}{n\pi} & (n:\text{odd}) \end{cases}}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right\}$$

$$\underline{= \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\sin 5t + \cdots}\ /\!/$$

2. $$f_2 = \begin{cases} -1 & \left(\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi\right) \\ 1 & \left(-\frac{\pi}{2} \leqq t < \frac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \left(-\pi \leqq t < -\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \quad {}^{-\frac{\pi}{2}} 1dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -1dt \Big\} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -\cos(nt)\,dt + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos(nt)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{n}\Big[\sin(nt)\Big]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n}\Big[\sin(nt)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\Big[\sin(nt)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left\{-\left(-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right) + 2\left(\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right) - \left(0 - \sin\frac{n\pi}{2}\right)\right.$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} + 2\sin\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right) = \underline{\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -\sin(nt)\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin(nt)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\Big[\cos(nt)\Big]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\Big[\cos(nt)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\Big[\cos(nt)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left\{\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right) - \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + \left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n - 0 + (-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right\} = \underline{0}$$

$$\therefore f_2(t) = \frac{4}{\pi}\left\{\cos(t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t) + \cdots\right\} \quad /\!/$$

3. $f_3 = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t < \pi) \\ 1 & (-\pi \leqq t < 0) \end{cases}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} dt = \frac{1}{\pi}(0+\pi) = \underline{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos(n\omega_0 t)\, dt = \frac{1}{n\pi} \Big[\sin(nt)\Big]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(0-0) = \underline{0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin(n\omega_0 t)\, dt = -\frac{1}{n\pi} \Big[\cos(nt)\Big]_{-\pi}^{0}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\big(1-\cos(n\pi)\big) = -\frac{1}{n\pi}\big(1-(-1)^n\big) = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & (n : \text{odd}) \\ 0 & (n : \text{even}) \end{cases}$$

$$\therefore f_3 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left\{\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \cdots\right\}$$

4. $f_4(t) = t \quad (-\pi \leqq t < \pi) \qquad \omega_0 = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi^2 - \pi^2) = \underline{0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left\{0 + \frac{1}{n}\left[\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - (-1)^n\right) = \underline{0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{-\left[\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nt)\,dt\right\}$$

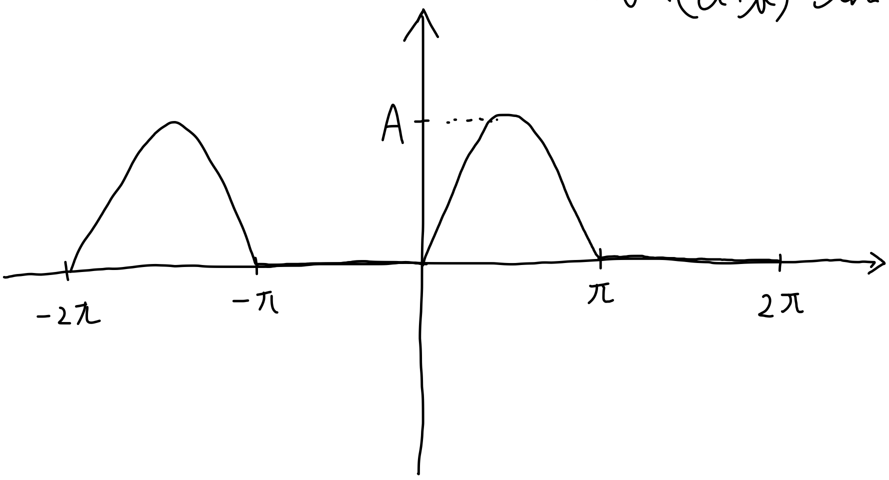
$$= \frac{1}{n\pi}\left\{-\left(\pi(-1)^n + \pi(-1)^n\right) + \frac{1}{n}\left[\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}\right\}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}2\pi(-1)^n = -(-1)^n\frac{2}{n}$$

$$\therefore\ \underline{f_4(t) = 2\left\{\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t) + \cdots\right\}}$$

5. $f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq t < 0) \\ A\sin(\omega_0 t) & (0 \leqq t < \pi) \end{cases}$ $T = 2\pi \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

$\sin(a+b) = \sin a \cos$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin(t)\,dt = -\frac{A}{\pi}\Big[\cos(t)\Big]_0^{\pi} = -\frac{A}{\pi}(-1-1) = \underline{\frac{2A}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin(t)\cdot\cos(nt)\,dt = \frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(\sin(t-nt)+\sin(t+nt)\big)\,dt$$

$$= \frac{A}{2\pi}\left\{-\frac{1}{1-n}\Big[\cos\big((1-n)t\big)\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{1+n}\Big[\cos\big((1+n)t\big)\Big]_0^{\pi}\right\}$$

ここで、$\frac{1}{1-n}$ が存在するため、$1-n=0$ 即ち $n=1$ のときについて考える.

$$a_1 = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cdot\cos t\,dt = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt = \frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt$$

$$= -\frac{A}{2\pi}\Big[\cos t\Big]_0^{\pi} = -\frac{A}{2\pi}(-1+1) \underline{= 0}$$

$n = 2, 3, 4 \cdots$ のときは

$$a_n = \frac{A}{2\pi}\left\{-\frac{1}{1-n}\big((-1)^{n-1}-1\big) - \frac{1}{1-n}\big((-1)^{n-1}-1\big)\right\}$$

$$\begin{cases} n : \text{even} \\ \quad a_n = \dfrac{A}{2\pi}\left(\dfrac{2}{1-n} + \dfrac{2}{1+n}\right) \\ n : \text{odd} \\ \quad a_n = 0 \end{cases}$$

$\cos(a \pm b) = \mp \sin a \sin b$

5. $b_n = \frac{A}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin nt \, dt$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos(t - nt) - \cos(t + nt) \right) dt$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-n} \left[\sin(1-n)t \right]_0^{\pi} - \frac{1}{1+n} \left[\sin(1+n)t \right]_0^{\pi} \right\}$$

ここで、$\frac{1}{1-n}$ が存在するので、$1-n=0 \rightarrow n=1$ のときについて考える

$$b_1 = \frac{A}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos 0 - \cos 2t) \, dt = \frac{A}{\pi} \left\{ (\pi - 0) - \frac{1}{2} \left[\sin 2t \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left\{ \pi - \frac{1}{2} (0 - 0) \right\} = \underline{\frac{A}{2}}$$

$n = 2, 3, 4, \cdots$ のときは

$$b_n = \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-n} \left[\sin(1-n)t \right]_0^{\pi} - \frac{1}{1+n} \left[\sin(1+n)t \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-n} (0 - 0) - \frac{1}{1+n} (0 - 0) \right\} \underline{= 0}$$

$$\therefore f_5(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin t + \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{8}{3} \cos 2t - \frac{4}{15} \cos 4t - \frac{4}{35} \cos 6t + \cdots \right\}$$

$$\underline{= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin t + \frac{2A}{\pi} \left(\frac{2}{3} \cos 2t - \frac{1}{15} \cos 4t - \frac{1}{35} \cos 6t + \cdots \right)}$$ //

6. 1. の結果に $t=\frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}\pi+\cdots\right\}$$

このとき, $f_1(t)$ はディリクレの条件を満たすので, $t=\frac{\pi}{2}$ のとき 1 に収束する.

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

//