令和 2 年 5 月 15 日，1 時限目

信号理論基礎　演習問題 3

提出に関する注意事項：

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとして ILIAS から提出する。
  ファイル形式は提出ができれば何でも構いません (jpeg, word, pdf など)。
  ファイル名は「bst_report3」としてください。
  複数のファイルになる場合は「bst_report3_1」、「bst_report3_2」などとしてください。
- 提出期限：5 月 21 日 (木) 24:00(日本時間) まで。

---

1. 区間 $(0 < t < \pi)$ でのみ定義される関数 $f(t) = t$ をフーリエ余弦級数に展開せよ．

2. 以下の積分を求めよ。

   (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt$

   (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\delta(t) + \delta(t - t_0) + \delta(t - t_1)\right\} dt$

   (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(t)\sum_{n=1}^{N} \delta(t - nT) \right\} dt$

   (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t + t_0)\delta(t)dt$　　ヒント：変数変換を用いる（$t + t_0 = \tau$ と置く）

3. 区間 $(-T/2,\ T/2)$ において $f(t) = \begin{cases} 2, & (0 < t < T/2) \\ 0, & (-T/2 < t < 0) \end{cases}$ で定義される周期 T の周期関数について以下の問いに答えよ。

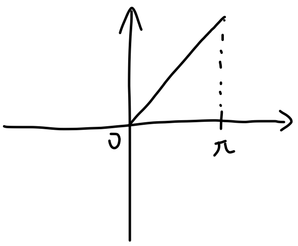
   (1) $f(t)$ を $-2T \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ。

   (2) $f(t)$ を Heaviside(ヘビサイド) のステップ関数を用いて表せ。

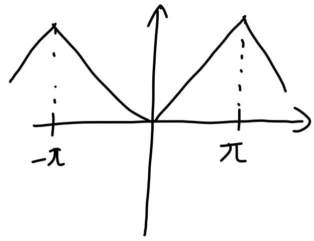
   (3) $f(t)$ の微分 $f'(t) = \dfrac{d}{dt}f(t)$ を求めよ。

   (4) $f'(t)$ を $-2T \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ。

1. $f(t) = t \quad (0 < t < \pi)$



余弦項 (偶対称) 拡張 $\longrightarrow$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad \rightarrow \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi^2 = \underline{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\left[t\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}(0-0) - \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\left[\cos(nt)\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & (n:\text{even}) \\ \dfrac{-4}{n^2\pi} & (n:\text{odd}) \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$\therefore f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\cos t + \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{25}\cos 5t + \cdots\right\} \;//$$

2.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \underline{f(t_0)}$ //

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\delta(t)+\delta(t-t_0)+\delta(t-t_1)\right\} = \underline{f(0)+f(t_0)+f(t_1)}$ //

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(t)\sum_{n=1}^{N}\delta(t-nT)\right\} = \underline{\sum_{n=1}^{N} f(nT)}$ //

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t+t_0)\,\delta(t)\,dt$

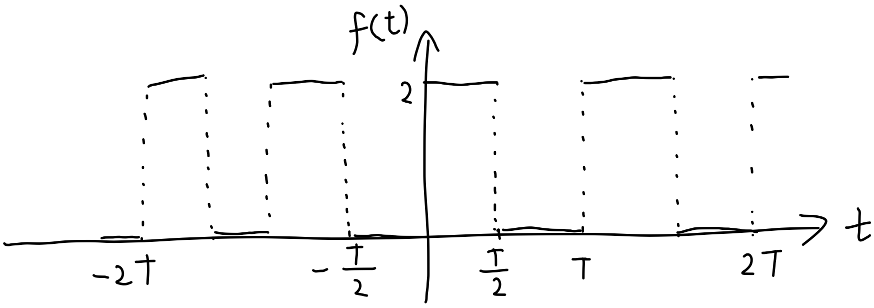
$\tau = t + t_0$ とおくと $\dfrac{d\tau}{dt} = 1 \rightarrow d\tau = dt \quad t = \tau - t_0$

t	$-\infty \to \infty$
τ	$-\infty \to \infty$

(与式) $\displaystyle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(\tau-t_0)\,d\tau = \underline{f(t_0)}$ //

3. $f(t) = \begin{cases} 2 & \left(0 < t < \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \left(-\frac{T}{2} < t < 0\right) \end{cases}$

(1)



(2) $f(t) = 2u(t+T) - 2u(t+\frac{T}{2}) + 2u(t) - 2u(t-\frac{T}{2}) + 2u(t-T) - 2u(t-\frac{3}{2}T)$

$\displaystyle = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{2u(t-nT) - 2u\left(t-\frac{2n+1}{2}T\right)\right\} = \underline{2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{u(t-nT) - u\left(t-\frac{2n+1}{2}T\right)\right\}}$ //

(3) $\displaystyle \frac{d}{dt}f(t) = \underline{2\sum_{n\to-\infty}^{\infty}\left\{\delta(t-nT) - \delta\left(t-\frac{2n+1}{2}T\right)\right\}}$ //

(4)