信号理論基礎　演習問題 1

提出に関する注意事項：

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとして ILIAS から提出する。
  ファイル形式は提出ができれば何でも構いません (jpeg, word, pdf など)。
  ファイル名は「bst_report1」としてください。
  複数のファイルになる場合は「bst_report1_1」、「bst_report1_2」などとしてください。
- 提出期限：5 月 7 日 (木) 24:00(日本時間) まで。

---

1. 次の三角関数の積を三角関数の和で表せ.
   (1) $\sin\alpha\sin\beta$　(2) $\sin\alpha\cos\beta$　(3) $\cos\alpha\sin\beta$　(4) $\cos\alpha\cos\beta$

2. 次の関数の基本周期を求めよ.
   (1) $\cos 4\pi t$　(2) $\sin 3t + 3\cos 5t$　(3) $\sin t \cos 2t$　(4) $\cos^2(2\pi t)$

3. 次を計算せよ．但し，t は実数，n, m は正の整数であり $n \neq m$ とする.
   また，$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ である.

   (1) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)dt$　(2) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)dt$　(3) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt$

   (4) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt$　(5) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt$

   (6) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega_0 t)dt$　(7) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega_0 t)dt$

1.
$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

(1) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

(2) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

(3) $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right)$

(4) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

2. (1) $\cos 4\pi t$

$\underline{\frac{1}{2}}$ //

$\omega = 2\pi f$

$\omega = 2\pi\frac{1}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

(2) $\sin 3t + 3\cos 5t$

$T = \frac{2}{3}\pi m$, $T = \frac{2}{5}\pi n$

$\frac{2}{3}\pi m = \frac{2}{5}\pi n \rightarrow \frac{m}{3} = \frac{n}{5} \rightarrow 5m \rightarrow m=3,\ n=5$

$\rightarrow T = \frac{2}{3}\pi \times 3 = \underline{2\pi}$ //

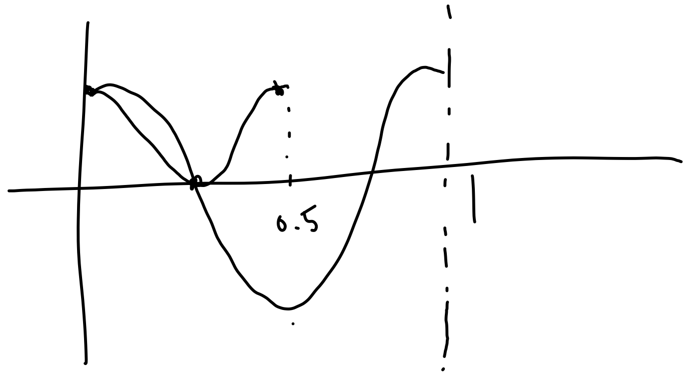
(3) $\sin t \cos 2t$

$T = \frac{2}{1}\pi = 2\pi$, $T = \frac{2}{2}\pi = \pi$

$\therefore \underline{T = 2\pi}$ //

(4) $\cos^2(2\pi t)$

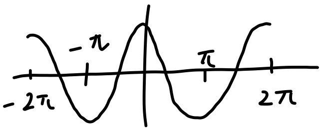
$\underline{T = \frac{1}{2}}$ //



3. (1) $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\,dt = -\frac{1}{n\omega_0}\Big[\cos(n\omega_0 t)\Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= -\frac{1}{n\,\frac{2\pi}{T}}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{T}{2\pi n}\left(\cos(\pi n) - \cos(-\pi n)\right)$$



$$= 0 \;\#$$

(2) $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{T}{n\omega_0}\Big[\sin(n\omega_0 t)\Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{T}{2\pi n}\left(\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot\left(-\frac{T}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{T}{2\pi n}\left(\sin(\pi n) - \sin(-\pi n)\right)$$

$$= 0 \;\#$$

(3) $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi t(m-n)}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t(m+n)}{T}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{T}{2\pi(m-n)}\sin\left(\frac{2\pi(m-n)}{T}t\right) + \frac{T}{2\pi(m+n)}\sin\left(\frac{2\pi(m+n)}{T}t\right)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= 0 \;\#$$

3. (4) $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,dt \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big(\cos(n\omega_0 t - m\omega_0 t) - \cos(n\omega_0 t + m\omega_0 t)\Big)\,dt$$

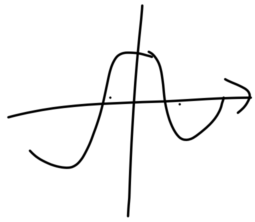
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n\omega_0 t - m\omega_0 t)}{(n-m)\omega_0} - \frac{\sin(n\omega_0 t + m\omega_0 t)}{(n+m)\omega_0}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= 0 \; //$$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,dt$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big(\sin(n\omega_0 t + m\omega_0 t) + \sin(n\omega_0 t - m\omega_0 t)\Big)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos((n+m)\omega_0 t)}{(n+m)\omega_0} + \frac{\cos((n-m)\omega_0 t)}{(n-m)\omega_0}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$



$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((n+m)\pi)}{(n+m)\omega_0} + \frac{\cos((n-m)\pi)}{(n-m)\omega_0} - \frac{\cos(-(n+m)\pi)}{(n+m)\omega_0} - \frac{\cos(-(n-m)\pi)}{(n-m)\pi}\right)$$

$$= 0 \; //$$

3.(6) $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2(n\omega_0 t)\,dt$

$u = n\omega_0 t$ とおく

$$\frac{du}{dt} = n\omega_0 \longrightarrow dt = \frac{1}{n\omega_0}du$$

t	$-\frac{T}{2} \to \frac{T}{2}$
u	$-\pi \to \pi$

$$\text{与式} = \frac{1}{n\omega_0}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(u)\,du$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2u}{2}$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}du - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2u\,du\right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\left(\left[\frac{1}{2}u\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\left[\sin 2u\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\left(0 - \frac{1}{4}(0-0)\right)$$

$$= 0$$

3.(ア) $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(n\omega_0 t)\,dt$

$u = n\omega_0 t$ とおく

$$\frac{du}{dt} = n\omega_0 \longrightarrow dt = \frac{1}{n\omega_0}du$$

t	$-\frac{T}{2} \to \frac{T}{2}$
u	$-\pi \to \pi$

$$与式 = \frac{1}{n\omega_0}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(u)\,du$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}du + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2u\,du\right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\left(\left[\frac{1}{2}u\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\left[\sin 2u\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\left(0 - \frac{1}{4}(0+0)\right)$$

$$= 0$$