信号理論基礎　演習問題 4

提出に関する注意事項：

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとして ILIAS から提出する。
  ファイル形式は提出ができれば何でも構いません (jpeg, word, pdf など)。
  ファイル名は「bst_report4」としてください。
  複数のファイルになる場合は「bst_report4_1」、「bst_report4_2」などとしてください。
- 提出期限：5 月 28 日 (木) 24:00(日本時間) まで。

---

1. 複素関数の集合 $\{g_n(t)\}$ は，

$$\int_a^b g_n(t)g_m^*(t)dt = \begin{cases} 0, & (n \neq m) \\ r_n > 0, & (n = m) \end{cases}$$

を満たすとき，区間 $a < t < b$ で直交であるという。ここで，$g_m^*(t)$ は $g_m(t)$ の共役複素数である。このことを利用して，複素フーリエ級数展開における指数関数の集合 $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ が区間 $-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T$ で直交することを示せ。

2. 周期が T である関数 $f(t)$ を，区間 $-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T$ において次式で定義する。

$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0, & -\frac{1}{2}T < t < -\frac{1}{2}d,\ \frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}T \end{cases}$$

また，$g(t) = f\left(t - \frac{1}{2}d\right)$ と定義する。以下の問に答えよ。

(1)　$f(t)$ および $g(t)$ を $-T \leq t \leq T$ の範囲で図示せよ。

(2)　$f(t)$ の複素フーリエ係数 (スペクトル) を求めよ。

(3)　$g(t)$ の複素フーリエ係数 (スペクトル) を求めよ。

信号理論基礎　演習問題4 (解答：簡略版)

1. 【解答】

$n = m$ のとき，

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = [t]_{-T/2}^{T/2} = T$$

$n \neq m$ のとき，

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$$

$$= \left[\frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{T}{j(n-m)2\pi} \left\{ e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi} \right\}$$

$$= \frac{T}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi = 0$$

よって，複素関数の集合 $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ は区間 $-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T$ で直交する。

2. 【解答】

(1)

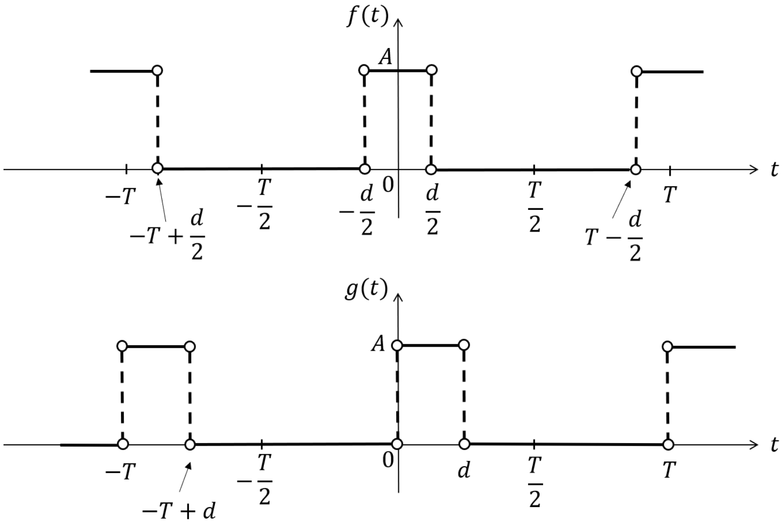

図 1：$f(t), g(t)$ の波形

(2) $f(t)$ の複素フーリエ係数を c_n とすると，

$n = 0$ のとき，

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} A dt = \frac{Ad}{T}$$

$n \neq 0$ のとき，

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-d/2}^{d/2} Ae^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{A}{T}\frac{1}{-jn\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0 d/2} - e^{jn\omega_0 d/2}\right)$$

$$= \frac{A}{T}\frac{1}{-jn\omega_0}\left\{-2j\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)\right\} = \frac{A}{T}\frac{2}{n\omega_0}\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)$$

(ここまでできれば十分ですが、もう少し頑張って整理すると，)

$$= \frac{Ad}{T}\frac{\sin\left(\dfrac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\dfrac{n\omega_0 d}{2}\right)} = \frac{Ad}{T}\frac{\sin\left(\dfrac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\dfrac{n\pi d}{T}\right)} = \frac{Ad}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)$$

(3) $g(t)$ の複素フーリエ係数を c_n とすると，

$n = 0$ のとき，

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{d} Adt = \frac{Ad}{T}$$

$n \neq 0$ のとき，

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{d} Ae^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\right]_{0}^{d} = \frac{A}{T}\frac{1}{-jn\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0 d} - e^{0}\right) = \frac{A}{T}\frac{1}{-jn\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0 d} - 1\right)$$

(ここからかなり頑張って整理すると，)

$$= \frac{A}{T}\frac{1}{-jn\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0 d/2} - e^{jn\omega_0 d/2}\right)e^{-jn\omega_0 d/2}$$

$$= \frac{A}{T}\frac{1}{-jn\omega_0}\left\{-2j\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)\right\}e^{-jn\omega_0 d/2} = \frac{A}{T}\frac{2}{n\omega_0}\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)e^{-jn\omega_0 d/2}$$

$$= \frac{Ad}{T}\frac{\sin\left(\dfrac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\dfrac{n\omega_0 d}{2}\right)}e^{-jn\omega_0 d/2} = \frac{Ad}{T}\frac{\sin\left(\dfrac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\dfrac{n\pi d}{T}\right)}e^{-jn\pi d/T} = \frac{Ad}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)e^{-jn\pi d/T}$$