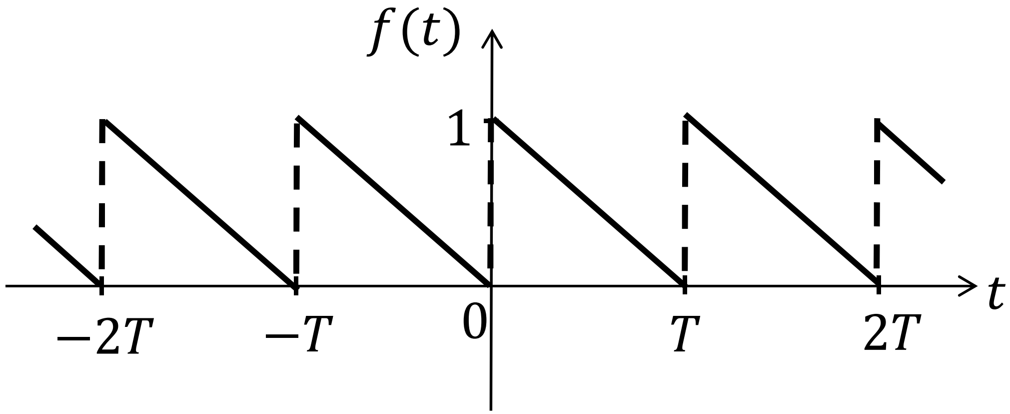
信号理論基礎

2020/05/22

【今日のテーマ】

- （周期的な）インパルス列
- 複素フーリエ級数（フーリエ級数の複素形）
- スペクトル

＜ 復習① ～不連続関数の微分～ ＞



$$f(t) = -\frac{1}{T}t + 1 \quad (0 < t < T)$$

（基本）周期 T

（基本）角周波数 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{N} a_k u(t - t_k)$$

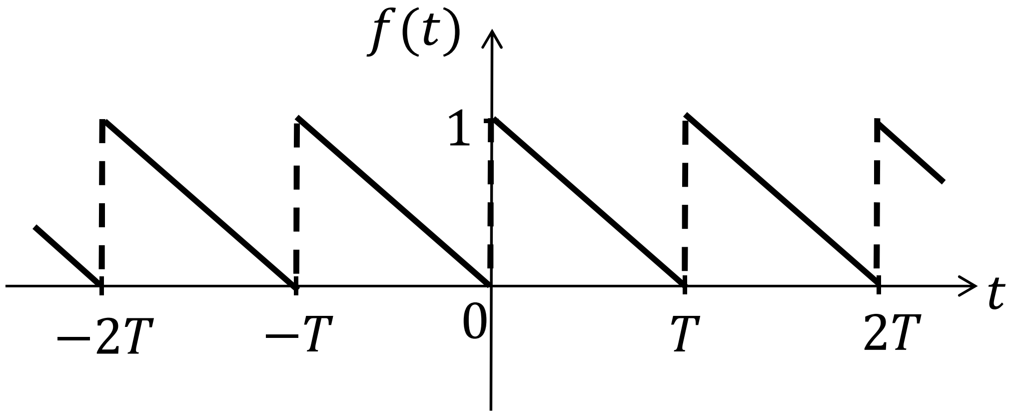
$g(t) = -\frac{1}{T}t + \alpha$ と仮定すると、

$$f(t) = -\frac{1}{T}t + \alpha + \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t - nT)$$

微分

$$f'(t) = -\frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

＜ 復習② ～周期関数のフーリエ級数～ ＞



$$f(t) = -\frac{1}{T}t + 1 \quad (0 < t < T)$$

(基本)周期 T

(基本)角周波数 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = 1 \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\sin\frac{2\pi n}{T}t$$

微分

$$f'(t) = \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n}{T}t$$

復習①の結果

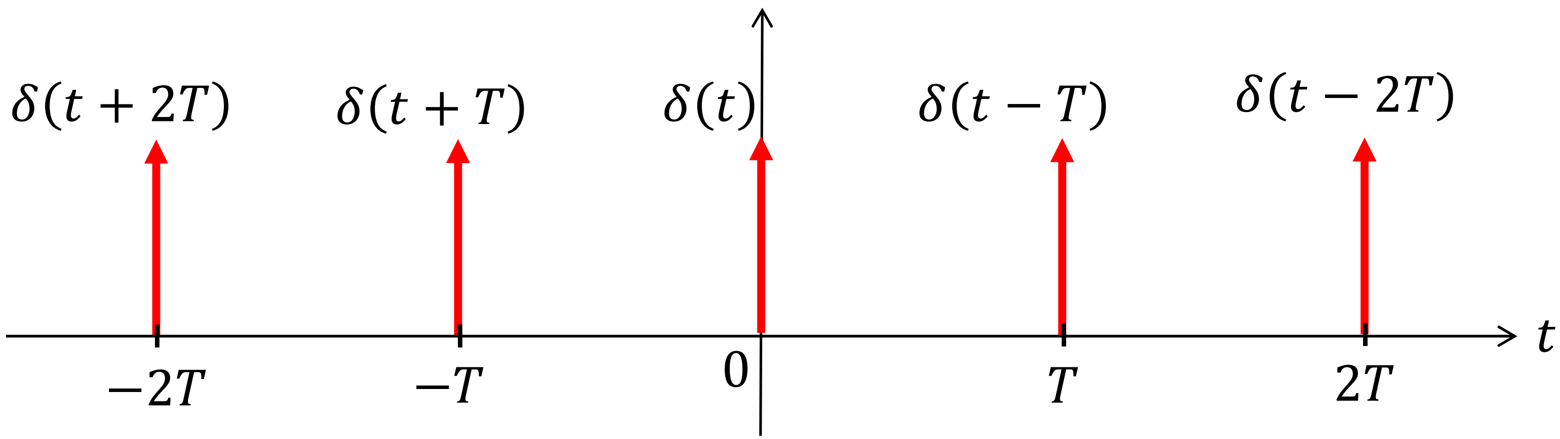
$$f'(t) = -\frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

復習②の結果

$$f'(t) = \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n}{T} t$$

$$-\frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n}{T} t$$

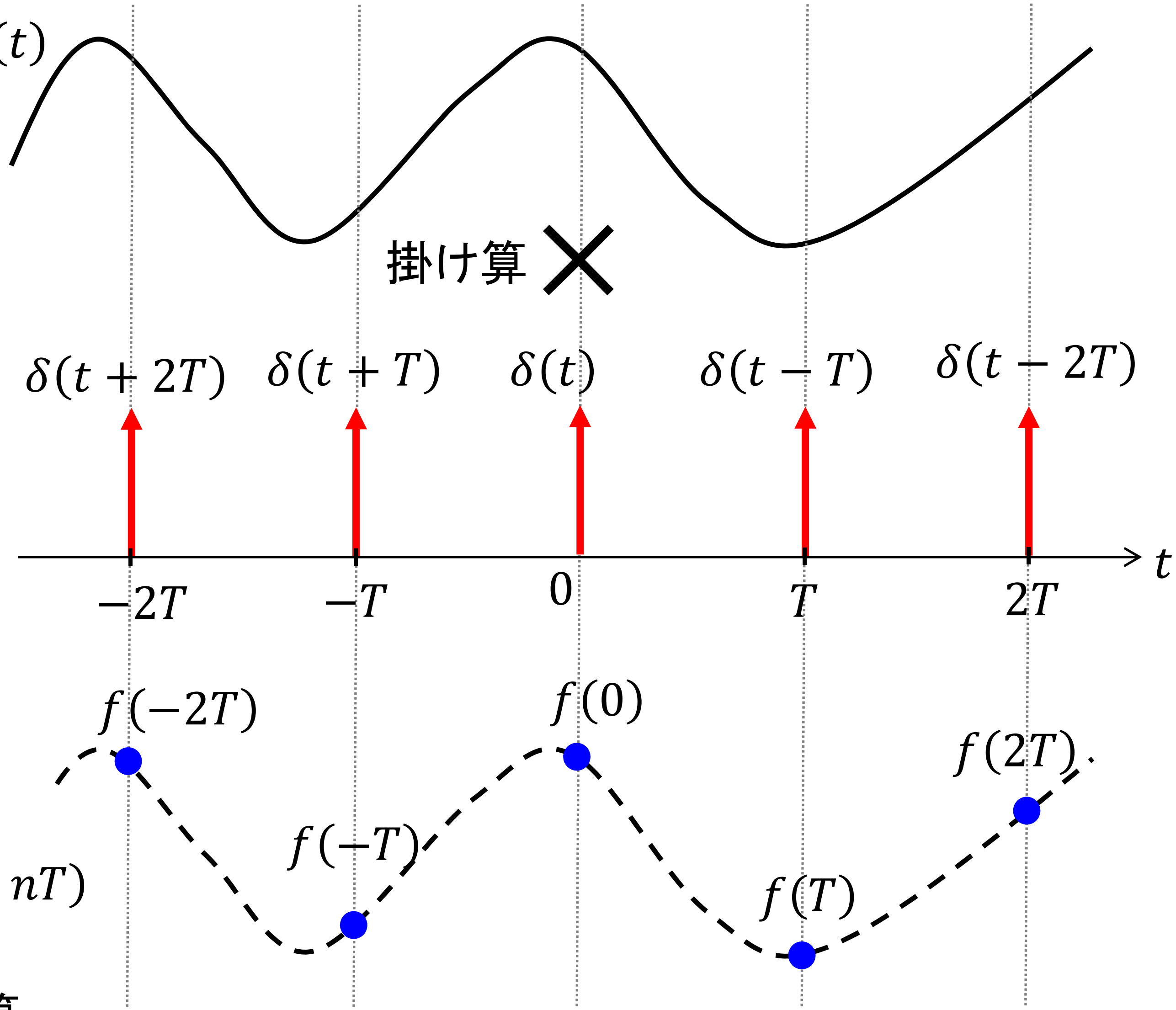
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n}{T} t$$



（周期的な）単位インパルス列

インパルス列とAD変換

連続時間信号 $f(t)$



インパルス列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

離散時間信号

$$f(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT)$$

（インパルス列との掛け算
として得られた値）

3.2 フーリエ級数の複素形(p.64)

(実)フーリエ級数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

オイラー(1707-1783)

複素フーリエ級数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

(実)フーリエ級数から複素フーリエ級数へ

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

オイラーの公式から

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}(a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} \right\}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

複素フーリエ係数 c_n

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt - j\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\{\cos(n\omega_0 t) - j\sin(n\omega_0 t)\}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

複素フーリエ級数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

c_n :複素フーリエ係数(スペクトルとも呼ぶ)

複素フーリエ級数の基底 $e^{jn\omega_0 t}$ は直交関数なのか？

⇒ 内積＝0 ならば直交

3.3 複素フーリエ級数関数の直交性(p.69)

複素関数の内積の定義

- 区間 $a \le x \le b$ で定義された複素関数 f と g の内積

$$< f, g >= \int_a^b f(x) g^*(x) dx$$

g^* はg の複素共役

大きさ(ノルム)

- 自身の内積の平方根

$$\|f(x)\| = \sqrt{< f, f >}$$

$$< f, f >= \int_a^b f(x) f^*(x) dx$$

複素フーリエ級数の基底関数

$$f_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

内積

$$< f_n, f_m >= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_n(t) f_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ r_n, & n = m \end{cases}$$

$n \neq m$のとき $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = 0$$

$n = m$のとき $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\, dt = T$$

3.4 複素周波数スペクトル(p.71)

スペクトルの意味

複雑な情報や信号を，その周波数ごとの成分に分解して，成分ごとの大小にしたがって配置したもの

$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}$ ：スペクトル

$|c_n|$ ：振幅スペクトル

$|c_n|^2$ ：パワースペクトル

ϕ_n ：位相スペクトル

- **スペクトルとフーリエ係数の関係**

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

スペクトルの重要な特徴

$f(t)$ が実数のとき、$c_{-n} = c_n^*$ となる

（振幅スペクトルは偶対称、位相スペクトルは奇対称）

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j(-n)\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

$$c_n^* = \left\{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right\}^* = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^*(t)\left\{e^{-jn\omega_0 t}\right\}^* dt$$

$f(t)$ が実数ならば
$f^*(t) = f(t)$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

【例1】$f(t) = \cos 2\pi t + 2\cos 6\pi t$

のスペクトルを求め、振幅スペクトルを図示せよ。

$f(t)$ の周期は $T = 1$, 基本角周波数 $\omega_0 = 2\pi$, 基本周波数 $f_0 = 1$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)\}$$

■ フーリエ係数: $a_0 = 0,\ \ a_1 = 1,\ \ a_2 = 0,\ \ a_3 = 2,\ \ a_4 = 0....,\ \ b_n = 0$

係数とスペクトルの関係

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2},\quad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

■ スペクトル: $c_0 = \frac{a_0}{2} = 0, c_1 = \frac{a_1 - jb_1}{2} = \frac{1}{2}, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 0, ...$

$$c_{-1} = \frac{a_1 + jb_1}{2} = \frac{1}{2}, c_{-2} = 0, c_{-3} = 1, c_{-4} = 0, ...$$

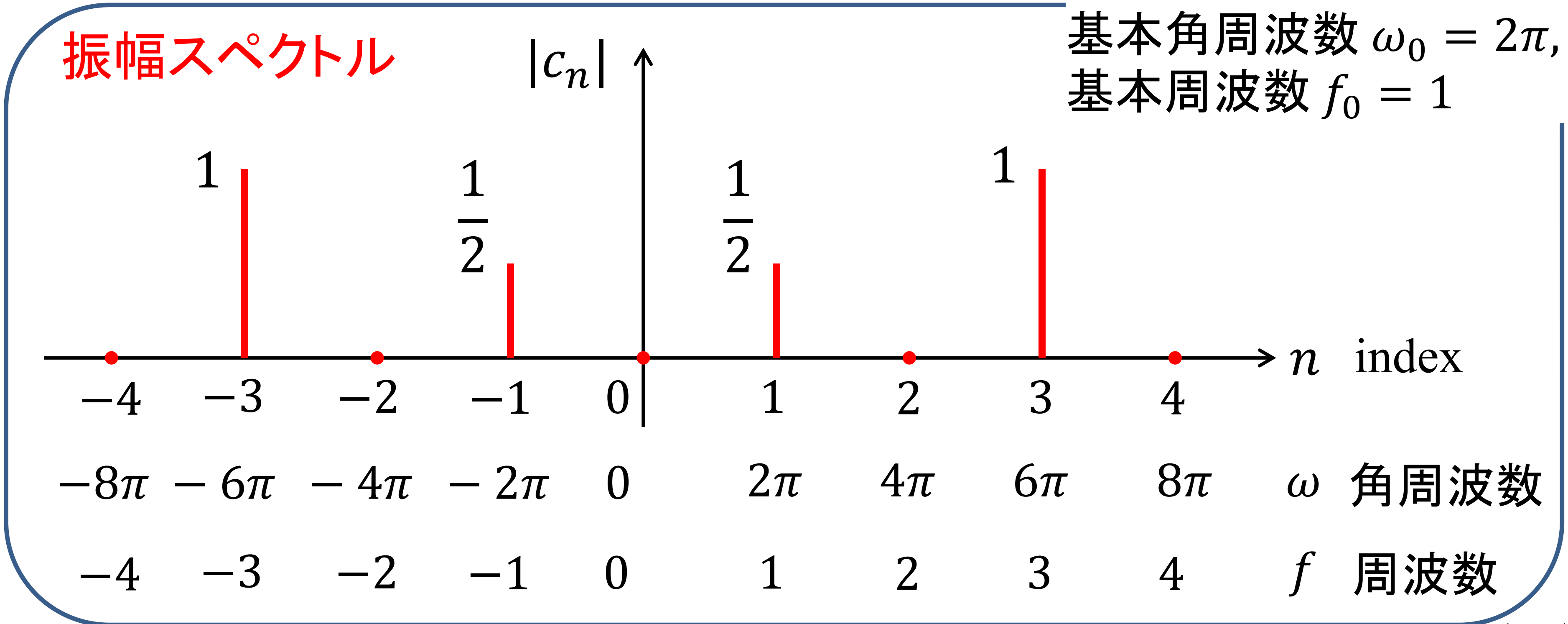
（解答のつづき）

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = 0, c_1 = \frac{a_1 - jb_1}{2} = \frac{1}{2}, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 0, \ldots.$$

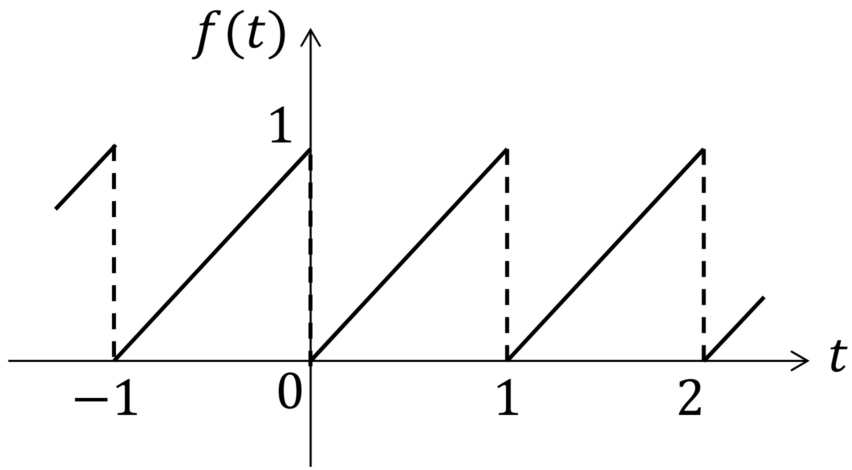
$$c_{-1} = \frac{a_1 + jb_1}{2} = \frac{1}{2}, c_{-2} = 0, c_{-3} = 1, c_{-4} = 0, \ldots.$$

なので，その振幅スペクトルは以下のようになる

周期 $T = 1$,
基本角周波数 $\omega_0 = 2\pi$,
基本周波数 $f_0 = 1$



【 例2 】以下に示す周期関数 $f(t)$ を複素フーリエ級数展開せよ。
また、振幅スペクトルを図示せよ。



解答例） $f(t) = t \quad \cdots 0 \leq t < 1$ $\qquad T = 1, \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \int_0^1 te^{-j2\pi nt}dt$$

$n = 0$ のとき $c_0 = \displaystyle\int_0^1 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$n \neq 0$のとき　$c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \int_0^1 te^{-j2\pi nt}dt$

$$= \int_0^1 t\left(\frac{1}{-j2\pi n}e^{-j2\pi nt}\right)' dt$$

$$= \frac{1}{-j2\pi n}\left\{\left[te^{-j2\pi nt}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-j2\pi nt}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi n}\left\{e^{-j2\pi n} - \left[\frac{1}{-j2\pi n}e^{-j2\pi nt}\right]_0^1\right\}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi n}\left\{e^{-j2\pi n} - \frac{1}{-j2\pi n}\left(e^{-j2\pi n} - 1\right)\right\} = j\frac{1}{2\pi n}$$

$c_0 = \dfrac{1}{2}$,　$c_n = j\dfrac{1}{2\pi n}$　より　$f(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{j}{2\pi n}e^{j2\pi nt}$

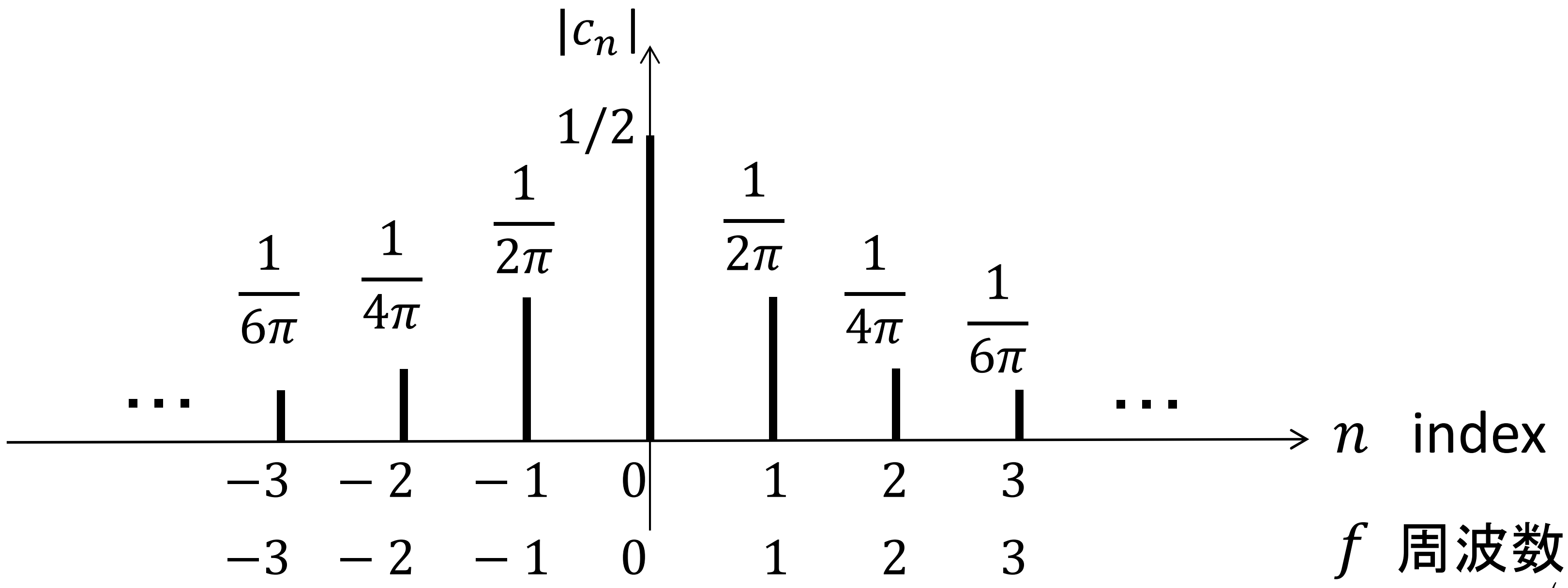
ただし，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$　は零以外の整数についての和を意味する

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_n = j\frac{1}{2\pi n}$$

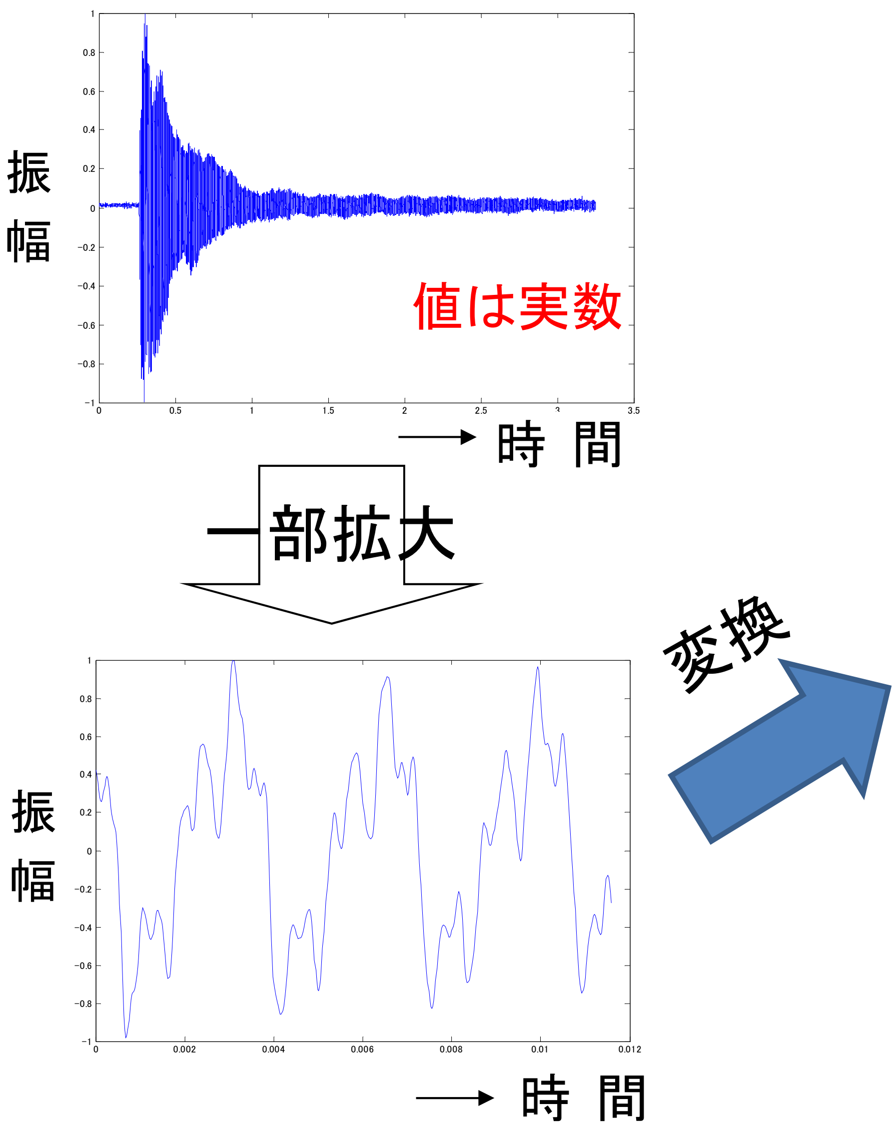
スペクトル： $c_0 = \frac{1}{2}e^{j0}, \quad c_1 = j\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad c_{-1} = -j\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}},$

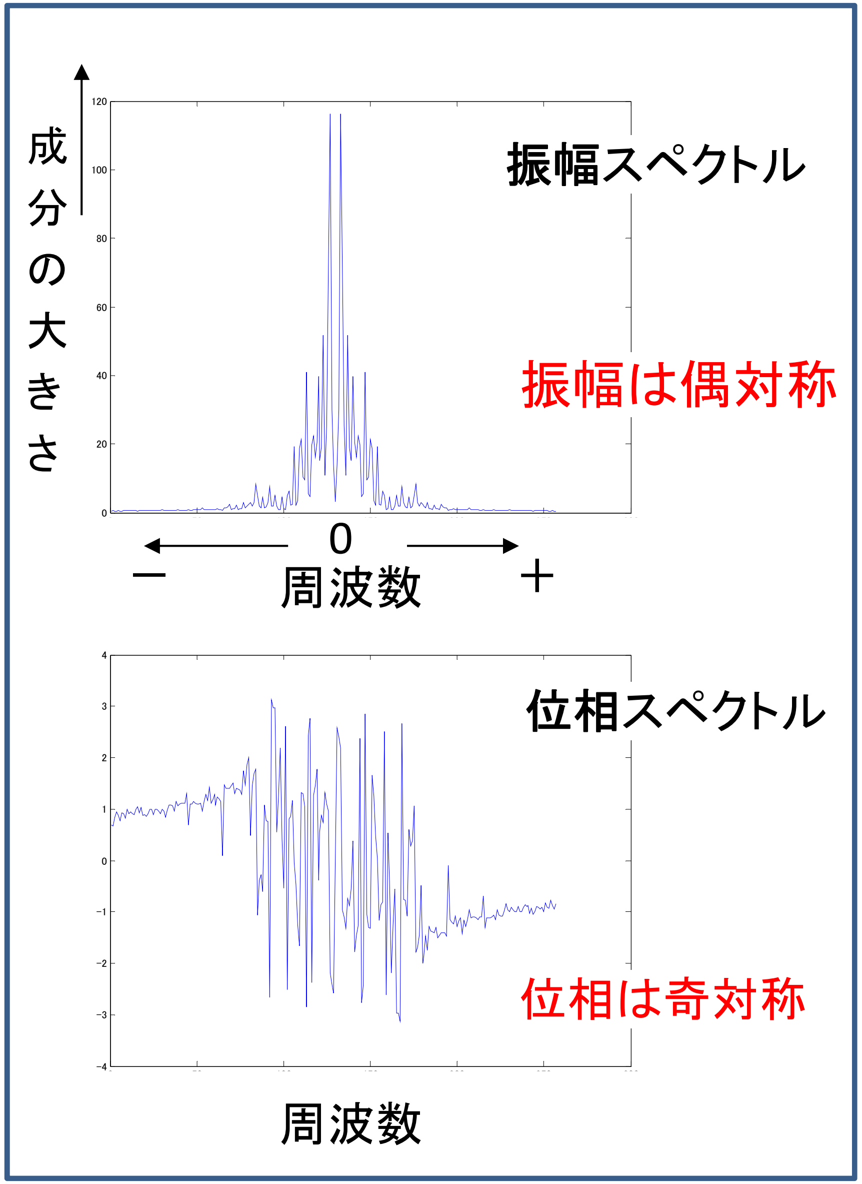
$$c_2 = j\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad c_{-2} = -j\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

$$c_3 = j\frac{1}{6\pi} = \frac{1}{6\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad c_{-3} = -j\frac{1}{6\pi} = \frac{1}{6\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

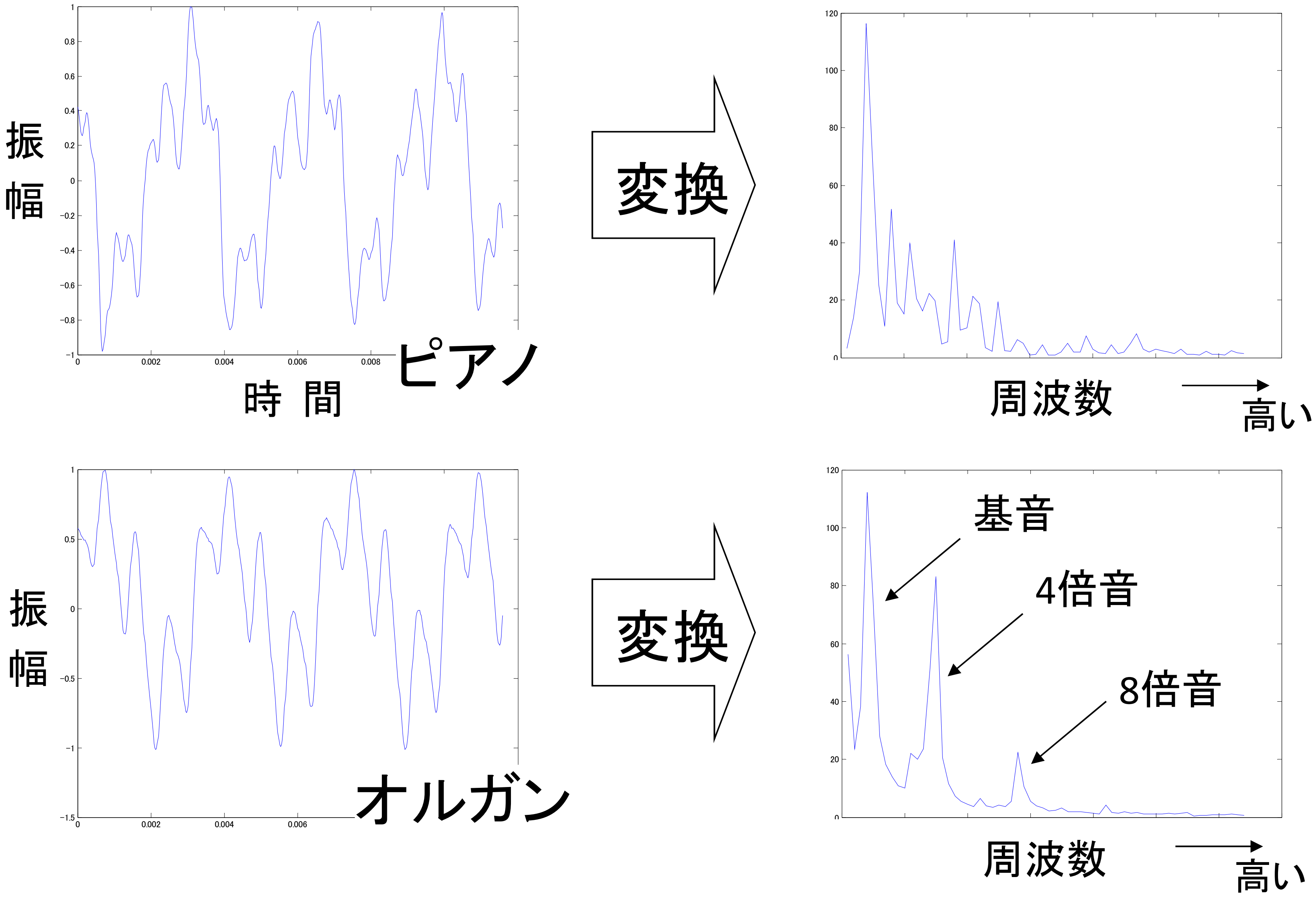


ピアノの「ラ」の音（波形）、スペクトル



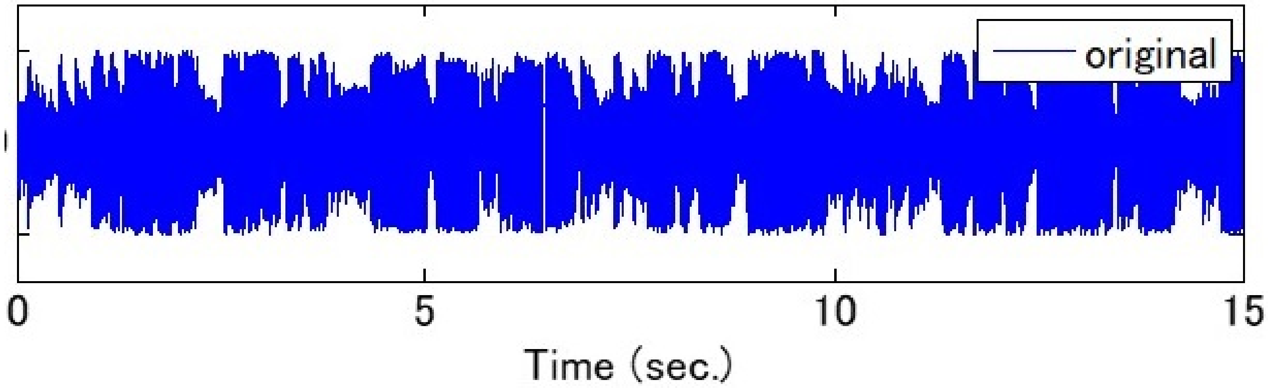


ピアノとオルガンの「ラ」の音を比較

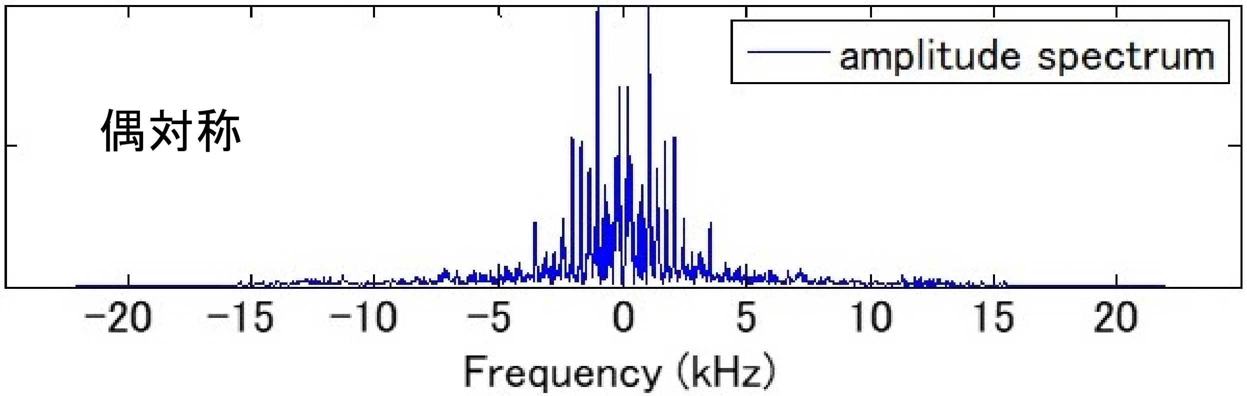


いきものがかり「YELL」のスペクトル

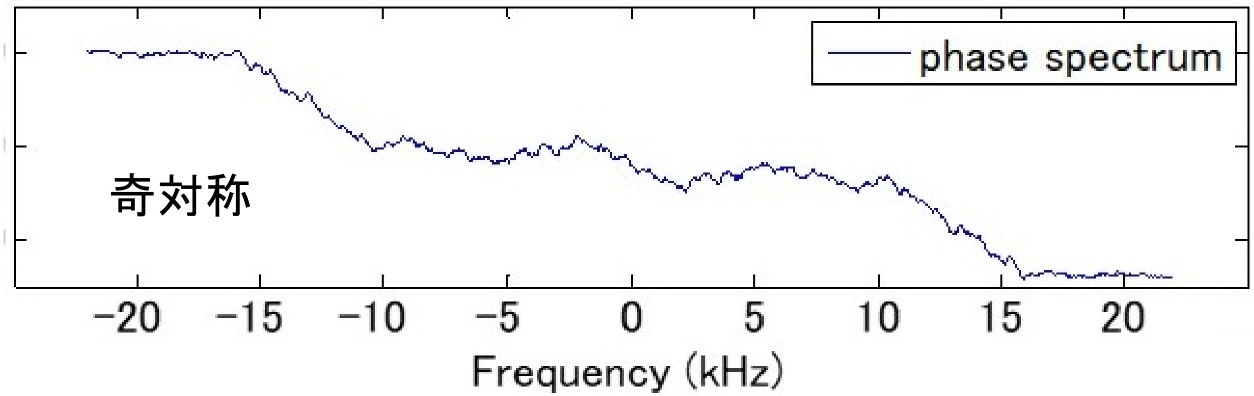
時間データ



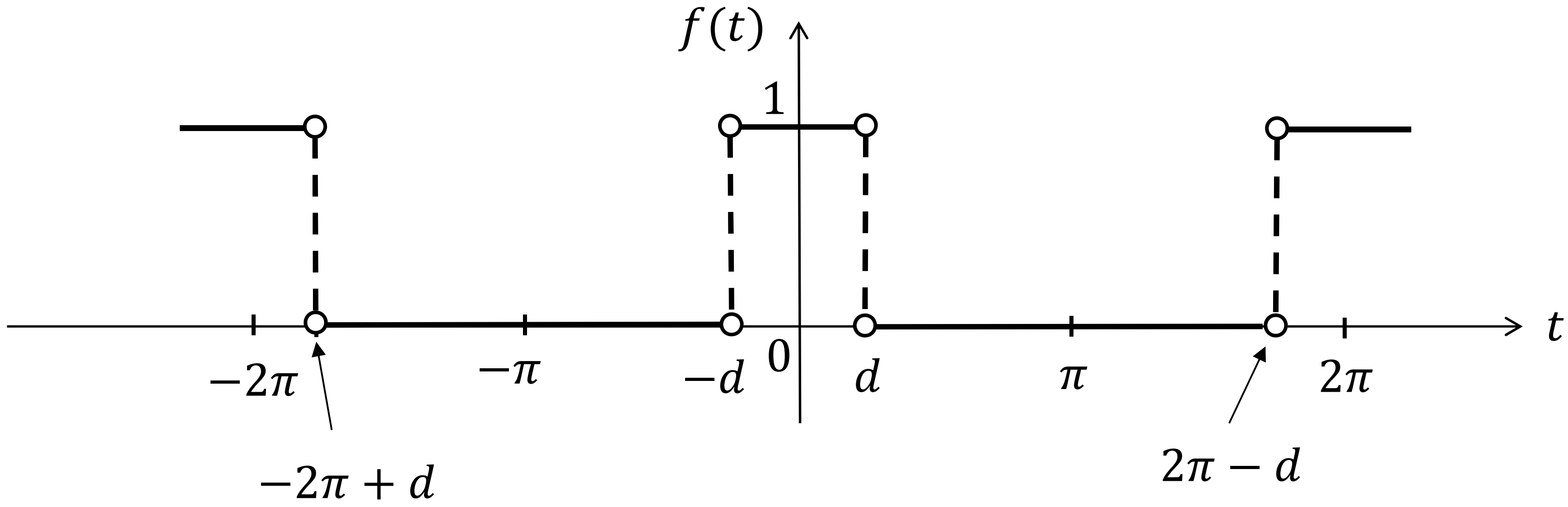
振幅スペクトル



位相スペクトル



【練習問題】以下の信号のスペクトルを求めよ。

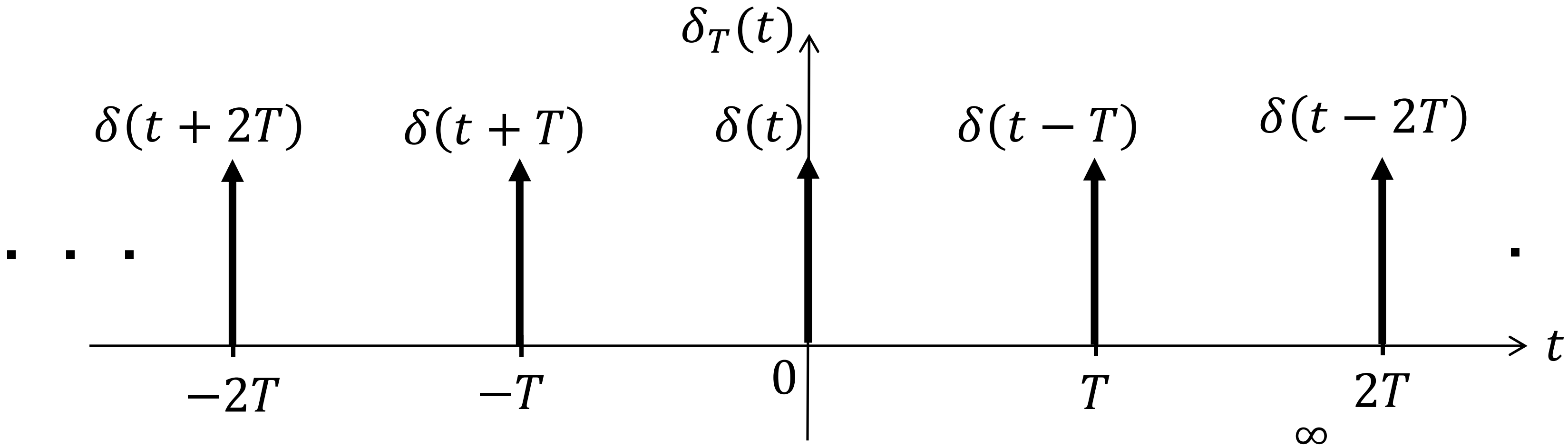


周期 $T = 2\pi,\ \ \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 1$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -d < t < d \\ 0, & -\pi < t < -d, \qquad d < t < \pi \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{d} e^{-jnt}\,dt$$

【練習問題】単位インパルス列のスペクトルを求め図示せよ。



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

ヒント: 周期 T, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

1周期 $-\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2}$ で考えると、

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

パーシヴァルの定理

(p.17)

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

(p.81)

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

時間領域のパワー　＝　周波数領域のパワー

宿題

- 演習問題4
- ILIASからダウンロード
- 提出期限: 5 月28 日(木) 24:00(日本時間) まで

【注意】

- ノート・レポート用紙等に解答する（問題文は書かなくても良い）。
- 解答をスキャン（カメラで撮影など）して電子ファイルとしてILIAS から提出する。
- ファイル形式は提出ができれば何でも構いません(jpeg, word, pdf など)。
- ファイル名は「bst_report_4」としてください。複数のファイルになる場合は「bst_report4_1」、「bst_report4_2」などとしてください。