第7回制御理論講義

令和２年６月22日

担当：宮崎

内容

第10章　安定化の基礎理論

10.1　状態フィードバック制御と安定化

古典制御理論：フィードバック制御・伝達関数・周波数特性（前回までの復習１）

- 制御とは？
  - ある目的に適合するように、対象となっているものに所要の操作を加えること
- 様々な物理現象を取り扱う（電気、機械、化学、情報など）
- 統一的な表現とする　⇛　<u>ラプラス変換による数学表現</u>
  - 対象：　制御対象・補償器（伝達関数表現）
  - 結果：　制御量
  - 操作：　操作量
  - 目的：　制御命令
- 制御方法
  - フィードバック制御:　位相進み補償法、位相遅れ補償法
- 制御系の評価方法
  - 安定性：ナイキストの安定判別法
  - 定常応答：最終値の定理、内部モデル原理
  - 過渡応答：周波数特性（ベクトル軌跡、ボード線図）

現代制御理論：状態方程式と可制御・可観測性（前回までの復習２）

- システムの内部状態まで考慮する、状態方程式で、入出力関係を表現
- 連立の1次微分方程式を基礎として記述

- どんな応答か？
  - 安定であるか：制御量が時間とともに一定値に落ち着く
    - 定常応答はどうか？　：定常特性を調べる
    - 過渡応答はどうか？　：過渡特性を調べる
  - 不安定であるか：制御量が時間とともに大きくなる

  - 安定と不安定を調べるとき：<u>安定判別法</u>を使う
  - 定常特性を調べるとき：最終値の定理を使って<u>定常偏差</u>をみる
  - 過渡特性を調べるとき：<u>立ち上がりの速さと行き過ぎ量、振動</u>を見る

今日の課題１

- ナイキストの安定判別法について教科書で調べて簡単に説明を書いてください。

安定化の基礎理論 “レギュレータ“

- 制御対象の記述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \quad : \boldsymbol{A}(n \times n),\ \ \boldsymbol{b}(n \times 1)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) \quad : \boldsymbol{c}(1 \times n)$$

  - 操作量：$u(t)$　検出量（測定出力）：$y(t)$　　状態変数： $\boldsymbol{x}(t)\ (n \times 1)$
- 当面、状態変数は直接観測可能とする
- 状態フィードバック制御則

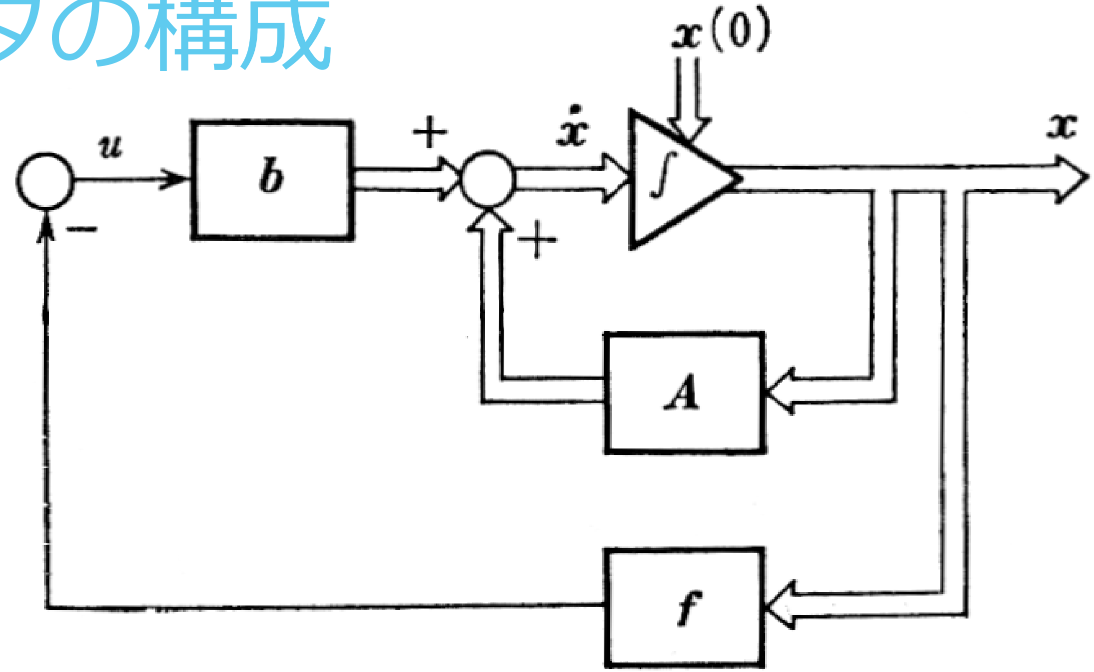
$$\begin{aligned} u(t) &= -f_1 x_1(t) - f_2 x_2(t) - \cdots - f_n x_n(t) \\ &= -\boldsymbol{f}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned}$$

  - 状態フィードバック係数ベクトル

$$: \boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

  - この式がレギュレータを作るための制御式

レギュレータの構成



前のページの制御則と制御対象をブロック線図で表すと右図になる

右図のシステムを微分方程式（状態方程式）で表すと

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(-\boldsymbol{f}\boldsymbol{x}(t)) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}(t))$$

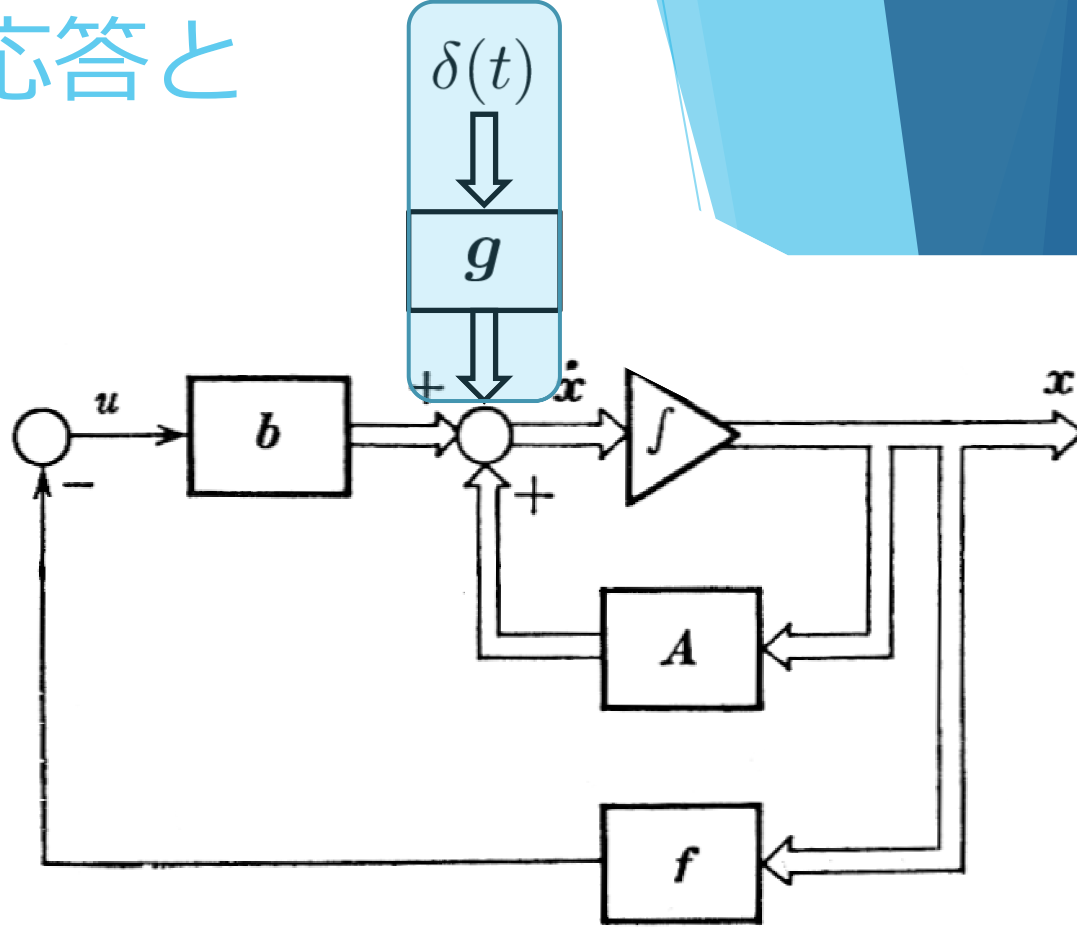
以前学習した、状態遷移行列の考え方を適用して解を求める

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{f})t}\boldsymbol{x}(0)$$

検出量（出力）の式を求めると

$$y(t) = \boldsymbol{c}e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{f})t}\boldsymbol{x}(0)$$

インパルス外乱応答と初期応答



ここで右図のように、インパルス外乱がある場合の式を考えてみる

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{g}\delta(t)$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$$

前項と同様に状態フィードバックを行った場合

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{g}\delta(t), \ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$$

解を求めて、前項の式と比較すると

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{f})(t-\tau)}\boldsymbol{g}\delta(\tau)d\tau$$
$$= e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{f})t}\boldsymbol{g}$$

インパルス外乱応答と初期値応答は同じ

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{x}(0)$$

レギュレータの役割

レギュレータとは：
　前述の状態変数ベクトル応答値が、有限の初期値もしくはインパルス外乱に対して、

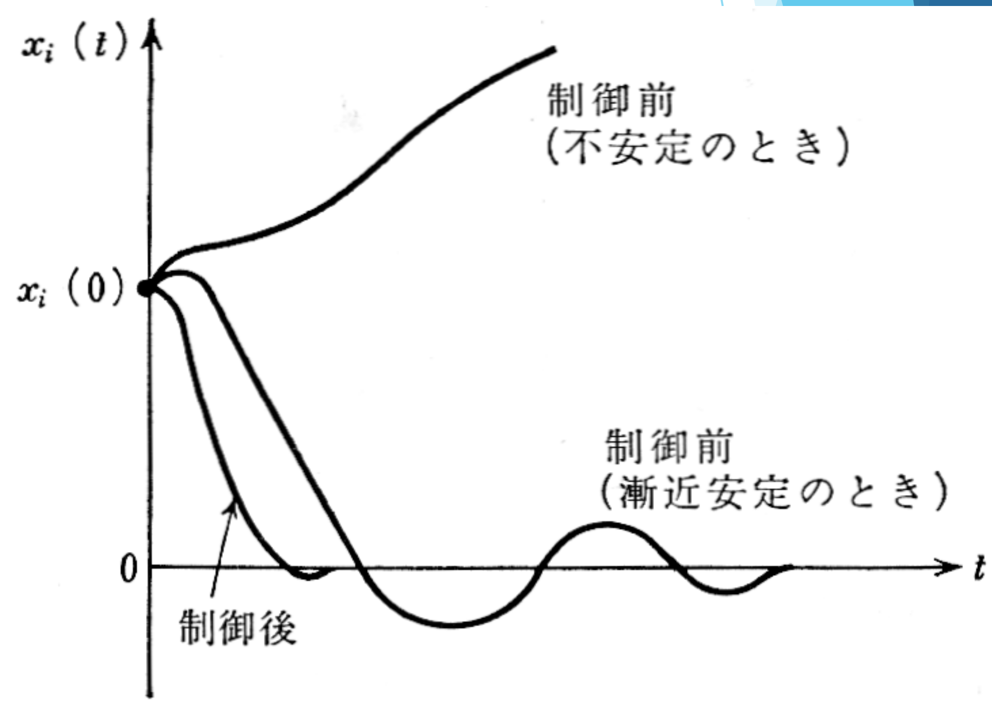
$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = 0$$

となるように、安定化された閉ループ系となること

ここで、どのように0に収束するかを決めるのは、$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bf}$ の固有値であり、これを
レギュレータの極
と呼ぶ

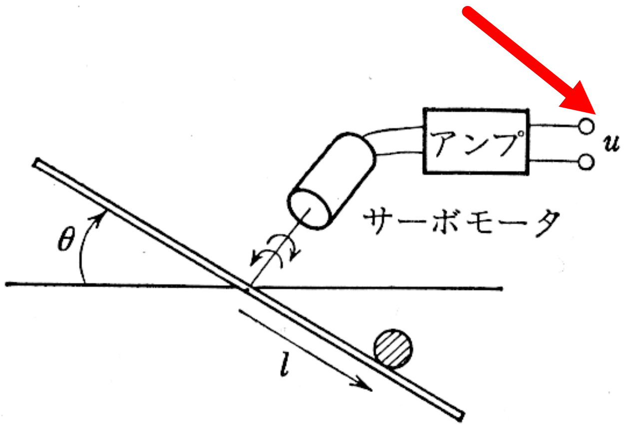
S平面の左半平面のより遠くに極があると、即応性が改善される

一般に、制御では即応性の改善と安定化を目的にレギュレータを構成する



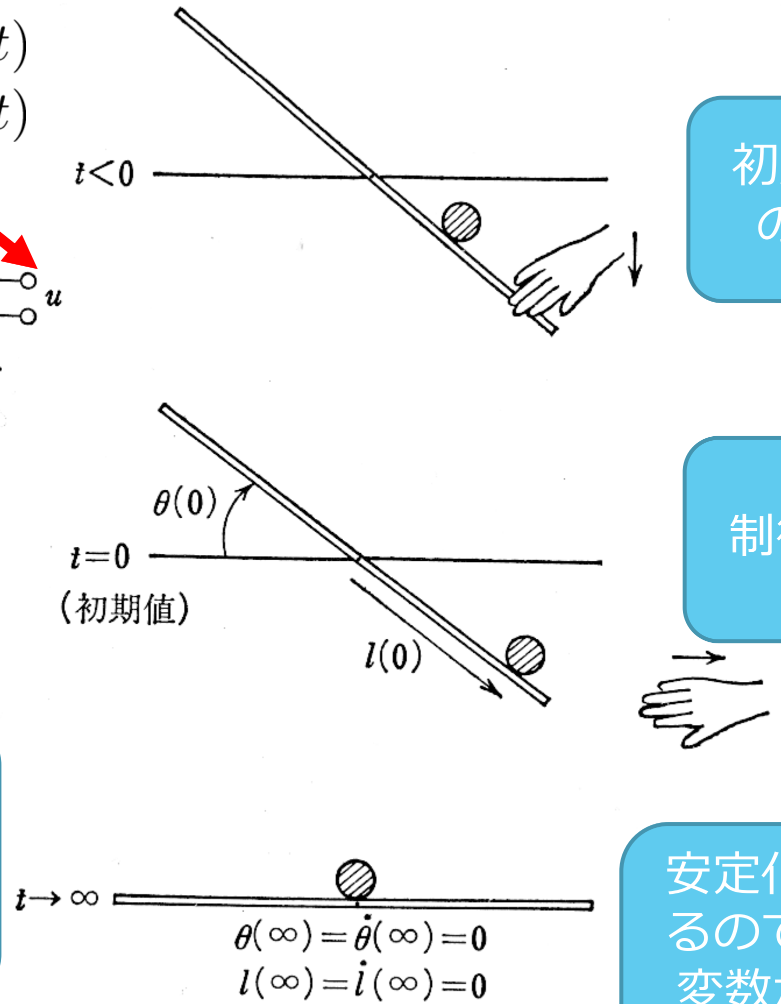
レギュレータの例

$$u(t) = -f_1\theta(t) - f_2\dot{\theta}(t) - f_3 l(t) - f_4\dot{l}(t)$$



（a） 制 御 対 象

制御対象の状態量：
・板の角度・各速度
・回転中心からボールまでの距離・速度



（b） 安定化の様子

初期外乱の入力

制御開始

安定化してるので状態変数が0になる

レギュレータが可能ための条件

- 制御対象が可制御であること（必要十分条件）
- $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f}$ の固有値を任意な値に設定する係数ベクトル $\boldsymbol{f}$ が存在するための必要十分条件は、$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ が可制御であることである。ただし、$\boldsymbol{f}$ が実係数ベクトルとなるように、複素固有値を設定するときには、それと複素共役な固有値も同時に設定する必要がある。
- 上記の定理を証明する計算をしてみよう！
  - 前提条件：$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f})\boldsymbol{T}$ の特性多項式は等しい

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{f}| = \left|s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}} + \tilde{\boldsymbol{b}}\tilde{\boldsymbol{f}}\right|$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\ \tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A},\ \tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}\boldsymbol{T}$$

  - 手順
    - $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ が可制御でないと不可制御な極は $\boldsymbol{f}$ によって変えられないことの説明（必要条件）
    - 固有値を任意に設定するためには、$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ が可制御でなければならないことの説明（十分条件）
    - 2次元のシステムで実施

必要条件

- $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 のうち、λ_2が不可制御であるとする。
- 対角変換をすると

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- フィードバック係数ベクトルを $\tilde{\boldsymbol{f}} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$とおくと

$$\begin{aligned} |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{f}| &= \begin{vmatrix} s - \lambda_1 + \beta_1\varepsilon_1 & \beta 1\varepsilon_2 \\ 0 & s - \lambda_2 \end{vmatrix} \\ &= (s - \underline{\lambda_1 + \beta_1\varepsilon_1})(s - \underline{\lambda_2}) = 0 \end{aligned}$$

固有値が変化している　　固有値が変わらない

- 不可制御の固有値 λ_2 はフィードバック係数ベクトルによって変化しない
- つまり、<u>不可制御の場合は固有値を自由に変えられない</u>

十分条件（1）

- $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ が可制御のとき $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f}$ の固有値を任意の値

$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$$

- に設定する $\boldsymbol{f}$ を求める。（求まればよい。）
- 制御対象の特性方程式の係数を求める

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$$

- 可制御正準系へ変換する変換行列を求める

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}) \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 1 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 1 & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

十分条件（2）

- 可制御正準系

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ここでフィードバック係数ベクトルと以下に設定する

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n)$$

- 状態フィードバックしてまとめると

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{f}| =$$

$$\left| s\boldsymbol{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \underline{-a_1 - \varepsilon_1} & \underline{-a_2 - \varepsilon_2} & \underline{-a_3 - \varepsilon_3} & \underline{\cdots} & \underline{-a_{n-1} - \varepsilon_{n-1}} & \underline{-a_n - \varepsilon_n} \end{bmatrix} \right|$$

極（固有値）が変わっているっぽい！

十分条件（3）

- さらに計算を進めて行列式を解いて、配置したい根を持つ多項式と係数比較する

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{bf}| = s^n + (a_n + \varepsilon_n)s^{n-1} + \cdots + (a_2 + \varepsilon_2)s + (a_1 + \varepsilon_1)$$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)\cdots(s - \mu_n) = s^n + d_n s^{n-1} + \cdots + d_2 s + d_1$$

- 係数が等しくなるようにフィードバック係数ベクトルを求めると、簡単に求まる

$$\varepsilon_i = d_i - a_i, \quad (i = 1 \sim n)$$

- ここで正準系にする前の形へフィードバック係数ベクトルを変換する

$$\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{T}^{-1} = (d_1 - a_1, d_2 - a_2, \cdots, d_n - a_n)\boldsymbol{T}^{-1}$$

この計算式を使えば何次のシステムでも設計ができる
行列演算なので、コンピュータが得意かも！
現代制御理論はコンピュータ向けかもしれない。

図で考えてみる

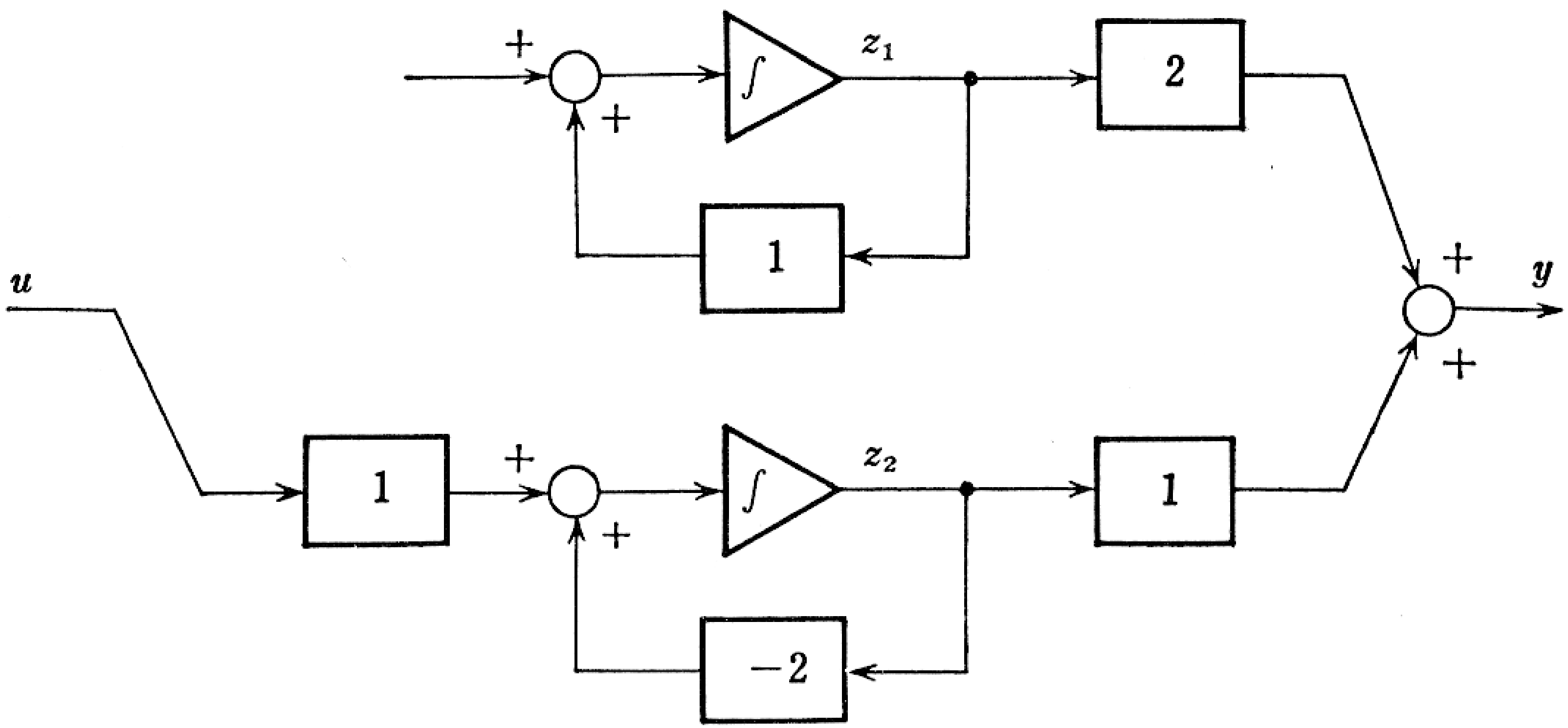


図 9.7　システム (9.45)

今日の課題２

- 例題10.1の(i-2)について以下のシステムと極配置でレギュレータを構成してください。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_1 = -5, \mu_2 = -10$$