制御理論
（前半担当）

大石　潔

5月11日(1回目)～6月15日(6回目)

６月１５日：中間レポート課題
締切：６月２２日

- システムの記述、ブロック線図と伝達関数
- **フィードバック制御系の安定性、ボード線図とナイキストの安定判別法**
- 位相余有、ゲイン余有、位相遅れ補償、位相進み補償
- 状態方程式と伝達関数、状態方程式の解と状態遷移行列
- 固有値、固有ベクトル、座標変換と対角正準系
- 可制御性と可制御正準系、可観測性と可観測正準系、双対性

制御理論　演習問題 2

$$\frac{60}{s(s+2)(s+6)}$$ のゲイン余有を求めよ

留数

$$\frac{1}{s} \to \frac{60}{2\times 6} = 5 \quad , \quad \frac{1}{s+2} \to \frac{60}{-2\times 4} = -7.5 \quad , \quad \frac{1}{s+6} \to \frac{60}{-6\times(-4)} = 2.5$$

制御理論　演習問題２の解答例

$$\frac{60}{s(s+2)(s+6)}$$

留数

$$\frac{1}{s} \to \frac{60}{2\times 6} = 5 \quad , \quad \frac{1}{s+2} \to \frac{60}{-2\times 4} = -7.5 \quad , \quad \frac{1}{s+6} \to \frac{60}{-6\times(-4)} = 2.5$$

$$\begin{aligned}
\frac{60}{s(s+2)(s+6)} &= \frac{5}{s} - \frac{7.5}{s+2} + \frac{2.5}{s+6} \\
&= \frac{5}{j\omega} - \frac{7.5}{2+j\omega} + \frac{2.5}{6+j\omega} \\
&= -j\frac{5}{\omega} + \frac{-15+7.5j\omega}{4+\omega^2} + \frac{15-2.5j\omega}{36+\omega^2} \\
&= \frac{-15}{4+\omega^2} + \frac{15}{36+\omega^2} + j\left(\frac{-5}{\omega} + \frac{7.5\omega}{4+\omega^2} - \frac{2.5\omega}{36+\omega^2}\right)
\end{aligned}$$

虚部＝0が実軸と交差周波数

$$-\frac{5}{\omega}+\frac{7.5\omega}{4+\omega^2}-\frac{2.5\omega}{36+\omega^2}=0$$

$$-5(4+\omega^2)(36+\omega^2)+7.5\omega^2(36+\omega^2)-2.5\omega^2(4+\omega^2)=0$$

$$-720-200\omega^2-5\omega^4+270\omega^2+7.5\omega^4-10\omega^2-2.5\omega^4=0$$

$$-5\omega^4+7.5\omega^4-2.5\omega^4-200\omega^2+270\omega^2-10\omega^2-720=0$$

$$60\omega^2-720=0$$

$$\omega^2-12=0$$

$$\omega=\pm\sqrt{12}$$

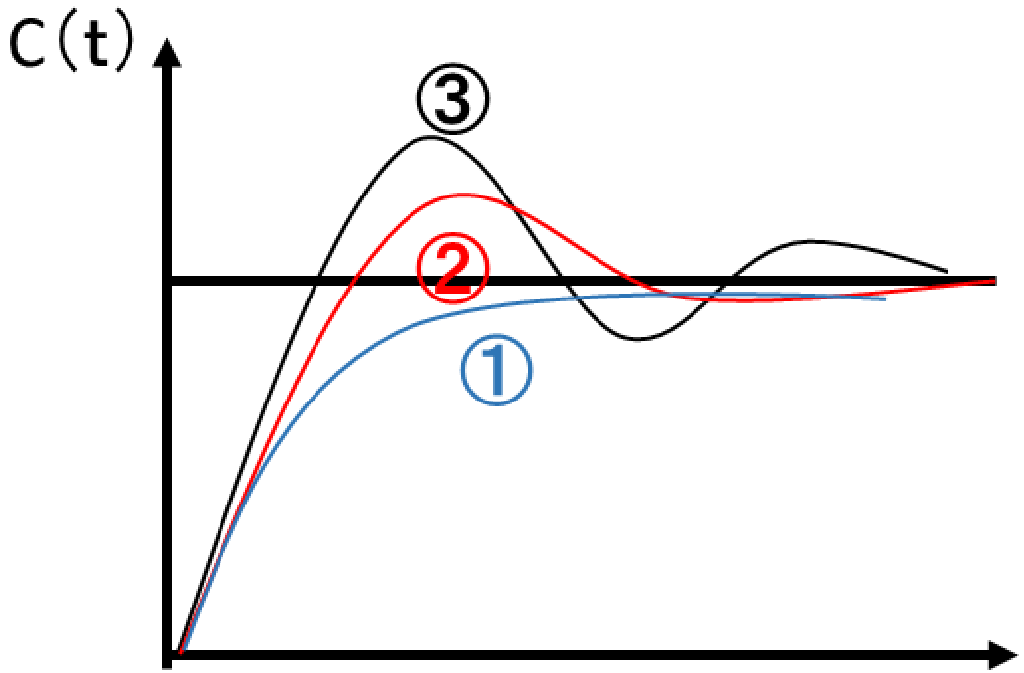
$\therefore$　交差周波数 $\omega=\sqrt{12}$　　$[rad/\sec]=3.46[rad/\sec]$

そのときの実部は

$$-\frac{15}{4+12}+\frac{15}{36+12}=-\frac{15}{16}+\frac{15}{48}=-0.625$$

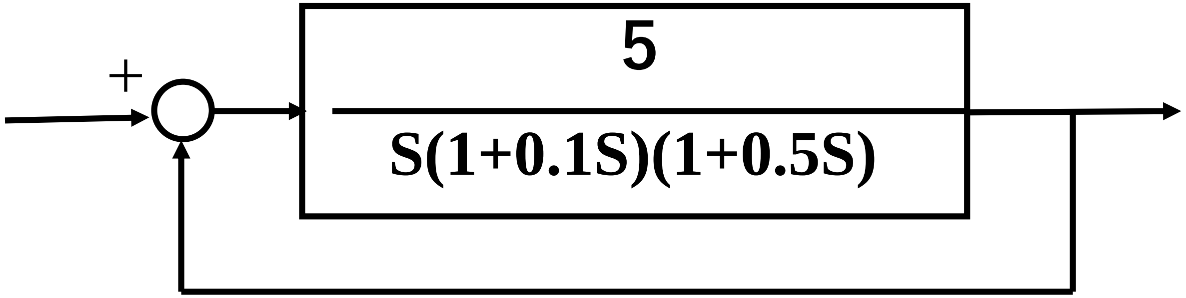
（ゲイン余有）　$g_m=-20\log 0.625=4.08[db]$

7章　フィードバック制御系の特性補償



- ①は遅い
- ③は振動しすぎ
- ②が適当である場合が多い

位相余有の目安：Φ_m:40°～65°



$\zeta = 0.175$

$\omega_n = 2.89$

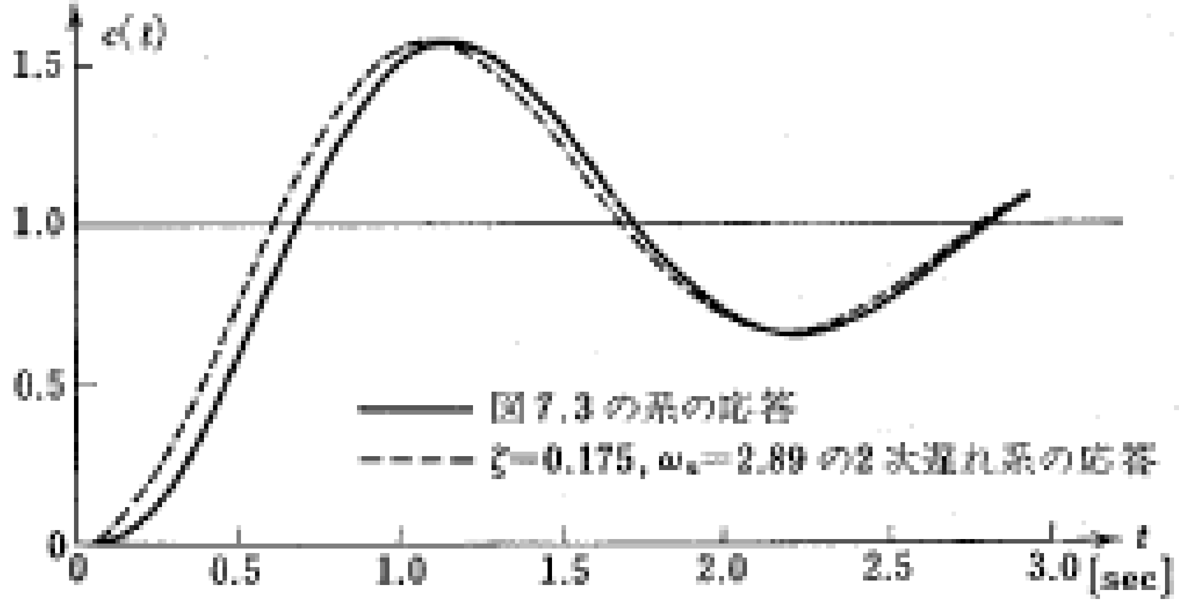


図 7.5　図 7.3 の制御系の単位ステップ応答

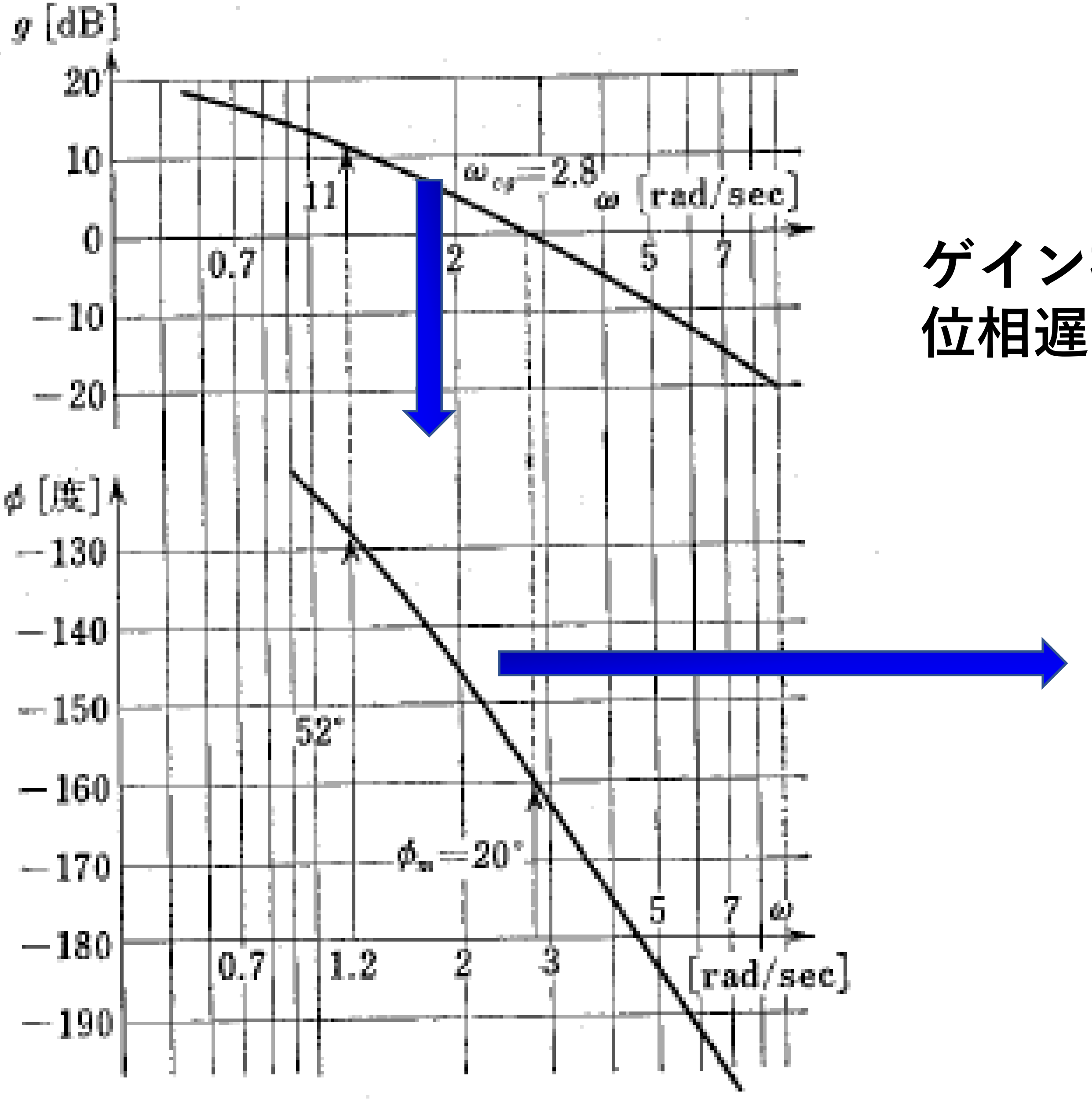


図 7.4　図7.3の系の一巡周波数応答

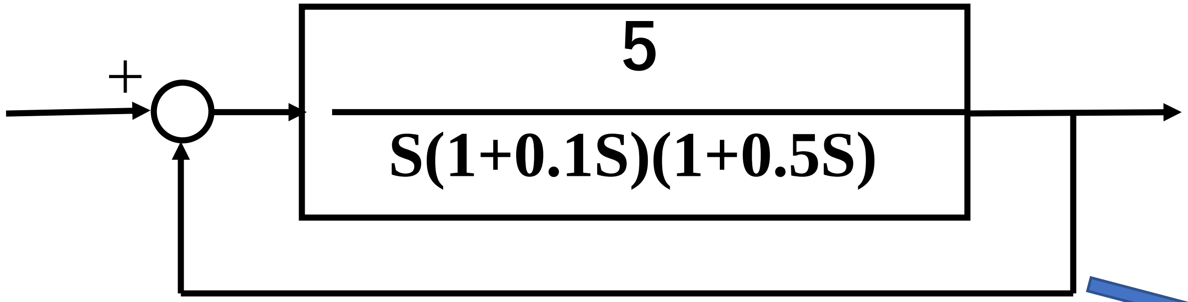
ゲイン補償
位相遅れ補償

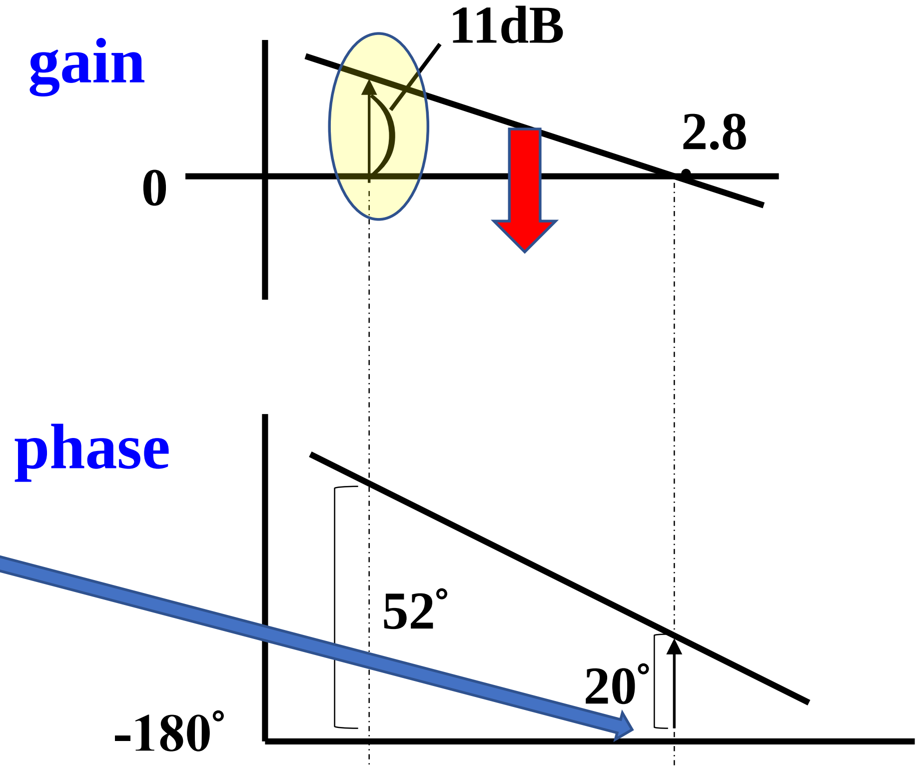
位相進み補償

◆　２次系の場合

$\zeta=0.707=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　　　このときのΦ_m:65°程度

ζ：0.35～0.7　とすると、　Φ_m:40°～65°になる。





【ボード線図から】

位相余有　Φ_m:20.0°　ゲイン支差角周波数　ω_{cg}=2.8　［rad/sec］

P92，図6,12　図6,13　より

２次系に近似すると

ζ=0.175　，ω_n=2.89〔rad/sec〕

ζ=0.5にすると　Φ_m=52.0°になる

ゲインを11$\{dB\}$下げると　Φ_m=52.0になる

ゲイン補償

$$-11 = 20\log_{10} G$$

$$log_{10} G = -\frac{11}{20}$$

$$G = \frac{1}{10} = 0.282$$

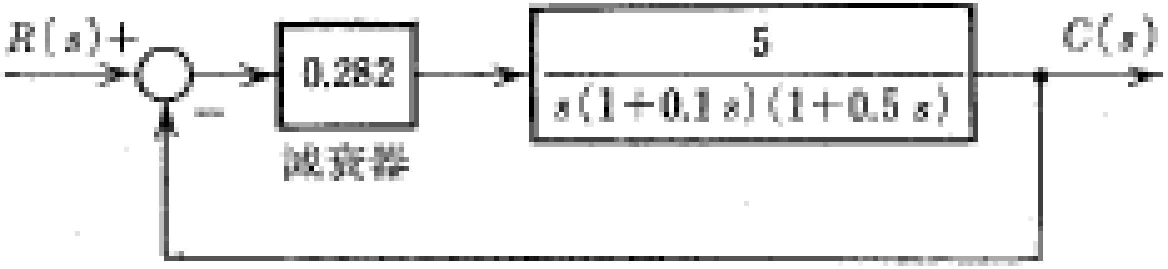


図 7.7　ゲイン補償後の制御系

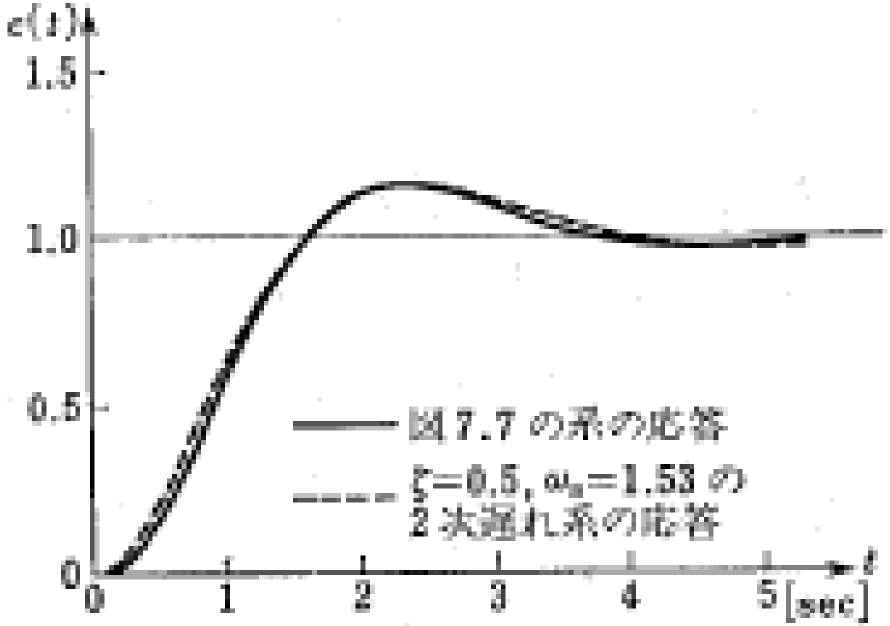


図 7.8　ゲイン補償後の単位ステップ応答

ζ=0.5とすると、２次系では

$$\frac{\omega_{cg}}{\omega_n} = 0.8 \qquad (\omega_{cg} = 1.2〔\mathrm{rad/sec}〕より$$

$$\omega_n = \frac{1.2}{0.8} = 1.5 \ [\mathrm{rad/sec}]$$

◆応答が遅くなって安定度が増した。

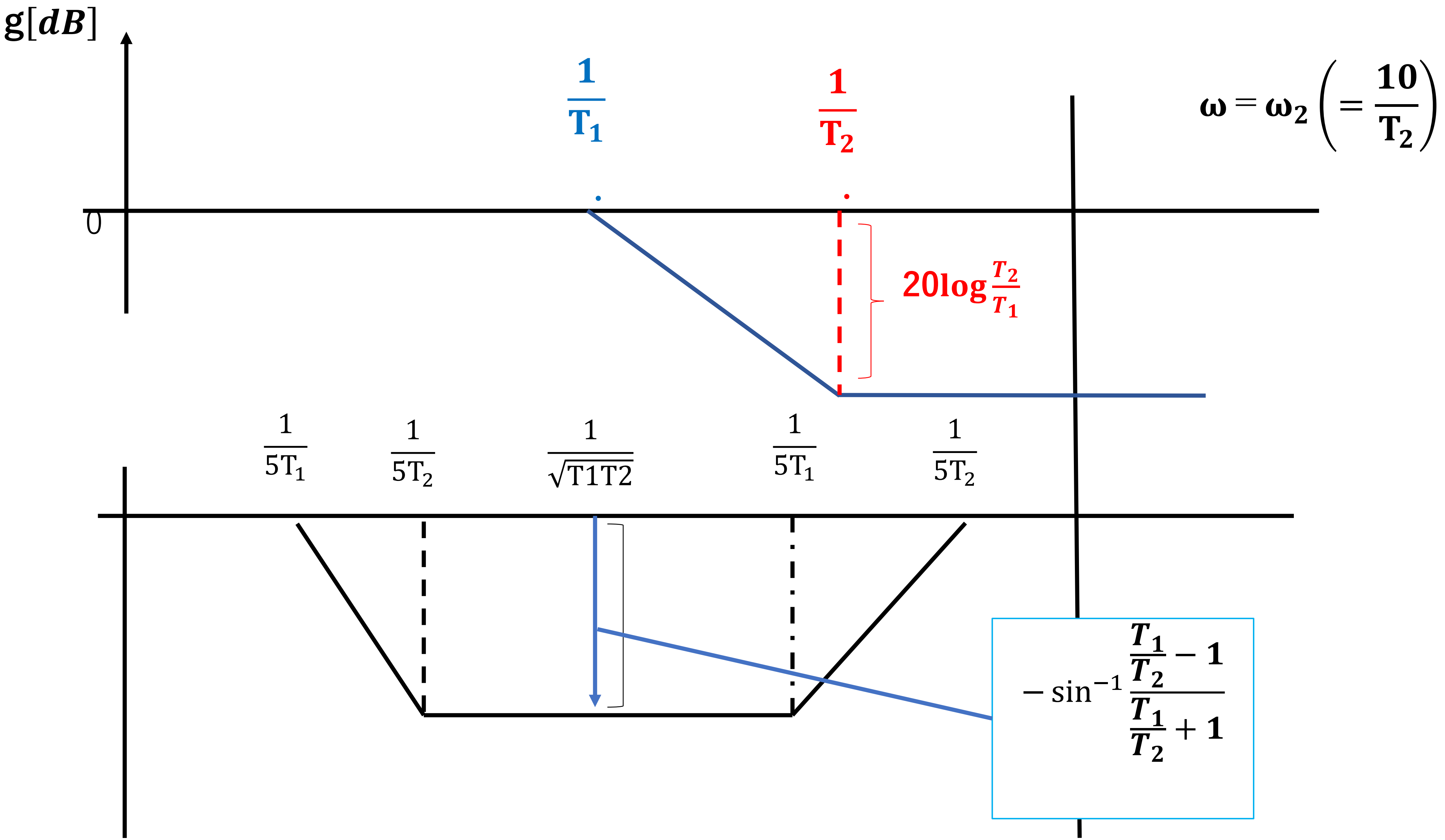
◆ゲイン全周波数帯域で下げるので、定常偏差が悪化するときがある。

◆ 遅れ補償法

$$\mathrm{Ge(S)} = \frac{1+ST_2}{1+ST_1} \qquad T_1 > T_2$$

1）　安定度に必要となるωの区間だけゲイン特性を下げて安定度を向上させる

2）　定常特性に影響を与えないように　$\omega=0$付近のゲイン特性を下げない。



g[dB]
0
$\frac{1}{T_1}$
$\frac{1}{T_2}$
$\omega = \omega_2 \left(= \frac{10}{T_2}\right)$
$20\log\frac{T_2}{T_1}$
$\frac{1}{5T_1}$
$\frac{1}{5T_2}$
$\frac{1}{\sqrt{T1T2}}$
$\frac{1}{5T_1}$
$\frac{1}{5T_2}$
$-\sin^{-1}\frac{\frac{T_1}{T_2}-1}{\frac{T_1}{T_2}+1}$

一次遅れ系であるので　傾きは$20^{[dB]}/_{[rad/sec]}$

$\frac{1}{T_2} = \frac{10}{T_1}$　のとき　-20$[dB]$　となる　$\frac{\log\frac{1}{T_1} + \log\frac{1}{T_2}}{2} = \log\omega$

→ したがって　$\frac{1}{T_2}$　のとき　$\left(20\log\frac{T_2}{T_1} \right.$だけゲインは下がる$\left. \right)$

<u>そのときの位相角の最小値の角周波数</u>

↓

$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{\mathrm{T_1T_2}} = \log\omega$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$

$$\mathrm{Ge}(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_2)(1-j\omega T_1)}{1+\omega^2T_1^2} = \frac{1+j\omega(T_2\text{-}T_1)+T_1T_2\omega^2}{1+\omega^2T_1^2}$$

$$= \frac{1+j\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}(T_2\text{-}T_1)+\cancel{T_1T_2}\frac{1}{\cancel{T_1T_2}}}{1+\frac{T_1^{\cancel{2}}}{\cancel{T_1}T_2}}$$

$$= \frac{2+j\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}(T_2-T_1)}{1+\frac{T_1}{T_2}}$$

$$\Phi = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}(T_1-T_2)}{2}$$

◆ゲイン補償した制御対象に位相遅れ補償を行う。

$\omega \quad = 1.2[md/sec]$ 付近で　$11[dB]$　下げる

$$\begin{cases} 20\log\frac{T_2}{T_1} = -11 & -(1) \\ \frac{10}{T_2} = \omega_s \leq 1.2 & -(2) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{10^{\frac{11}{20}}}}$$

（2）より　$T_2 \geq \frac{10}{1.2} = 8.33$

（1）に代入　$T_1 = T_2 \times 10^{\frac{11}{20}} = 8.33 \times 10^{\frac{11}{20}}$

$= 8.33 \times 3.55$

$= 29.57$

よって、$Ge(s) = \frac{1+T_2S}{1+T_1S} = \frac{1+8.33s}{1+29.57s} \quad \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}} = 0{,}0637[rad/sec]$

◆ 補償後の一巡周波数応答

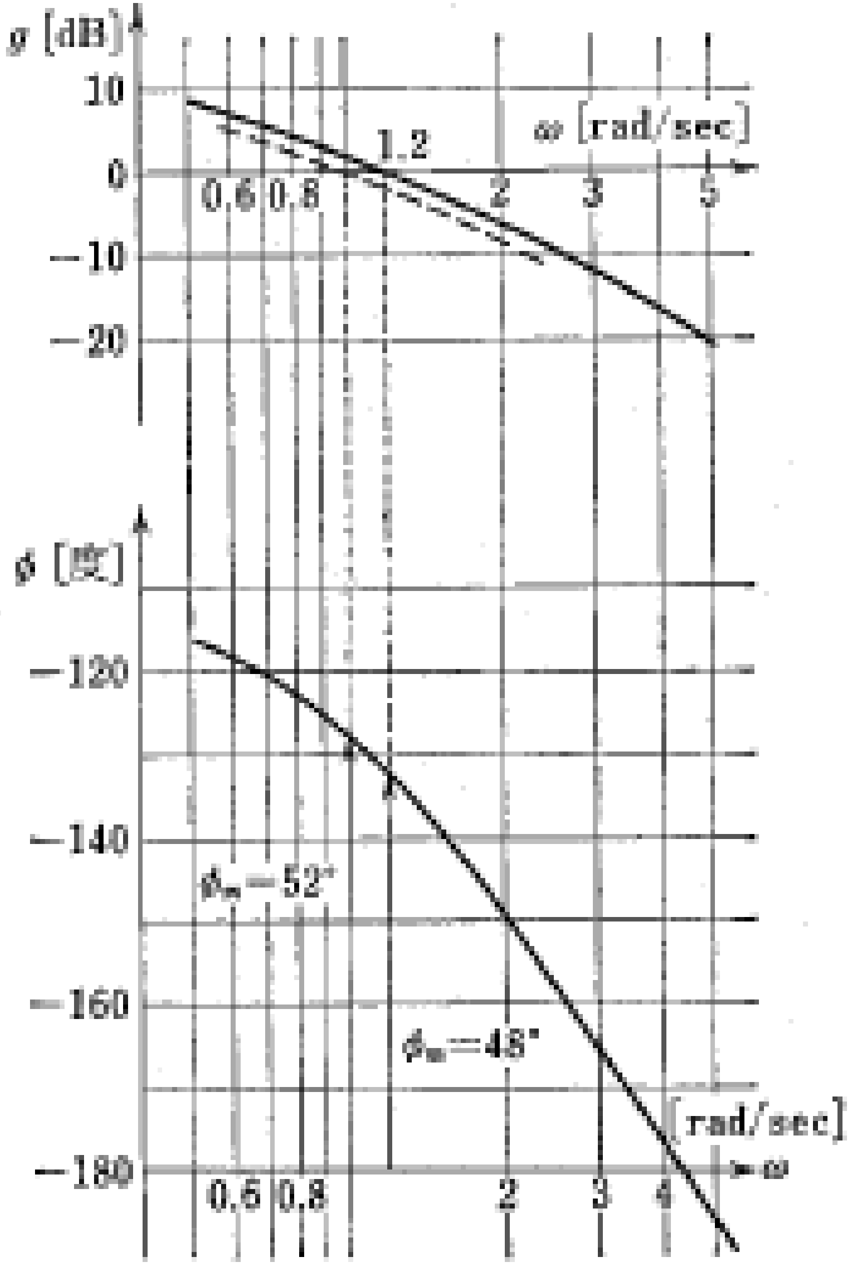
$$G_c(S)G(S) = \frac{1+8.33s}{1+29.57s} \times \frac{5}{S(1+0.68+0.05S^2)}$$

$$= \frac{5+41.65S}{S+0.6S^2+0.5S^3+29.57S^2+17.74S^3+1.48S^4}$$

$$= \frac{41.65s+5}{1.48S^4+18.34S^3+30.17S^2+S}$$

実際のΦ_m は 48° で、 4° 不足であった

残留位相遅れ



g [dB]
10
0
−10
−20
ω [rad/sec]
1.2
0.6
0.8
2
3
5
φ [度]
−120
−140
−160
−180
$\phi_m=52°$
$\phi_m=48°$
[rad/sec]
ω
0.5
0.8
2
3
4

4°　不足を補償するためには → 2 [dB] 下げなければならない。

$$-2 = 20\log G \qquad G = \frac{1}{10^{\frac{1}{10}}} = 0.794$$

4°　に相当するωを左に（低周波数の方に）シフトさせる

すなわち、$\frac{1}{T_1}$を小さく　　　T_1を大きくする。

G_c（S）＝0．７９４ $\times \frac{1+T_2S}{1+T_1S}$ は　直流利得を下げるので不適切。

そこで

$$= \frac{1+T_2S}{\frac{1}{0.794}+\frac{T_1}{0.794}S}$$

$$\cong \frac{1+T_2S}{1+\frac{T_1}{0.794}S} = \frac{1+8.33S}{1+\frac{29.57}{0.794}S} = \frac{1+8.33S}{1+37.24S}$$

このときの$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = 0.568[rad/sec]$, $\dfrac{1}{T_1} = 0.0269[rad/sec]$

$20\log\dfrac{T_2}{T_1} = -13.0[\mathrm{dB}]$ $\dashrightarrow$ <u>2[dB]下がっている。</u>

$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \omega \text{は} 0.0069[rad/sec] \text{左にシフトした。} \quad \text{これにより} \quad \Phi_m = 52^\circ \text{を満たした。}}$

$$G_c(S)\,G(S) = \frac{1+8.33(S)}{1+37.24(S)} \times \frac{5}{S+0.6S^2+0.05S^3}$$

$$= \frac{5+41.65S}{S+0.6S^2+0.05S^3+37.24S^2+22.34S^3+1.86S^4}$$

$$= \frac{41.65S+5}{1.86S^4+22.39S^3+37.84S^2+S}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{{}^{T_1}/_{T_2}-1}{{}^{T_1}/_{T_2}+1}\right) = \sin^{-1}\frac{-0.766}{1.224} = -39.4^\circ$$

$$\tan^{-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}(T_1-T_2)}{2} = \tan^{-1}\frac{-1.64}{2} = -39.4^\circ$$

◆位相進み補償　<u>ゲイン特性をいじらずに、位相特性を進める。</u>

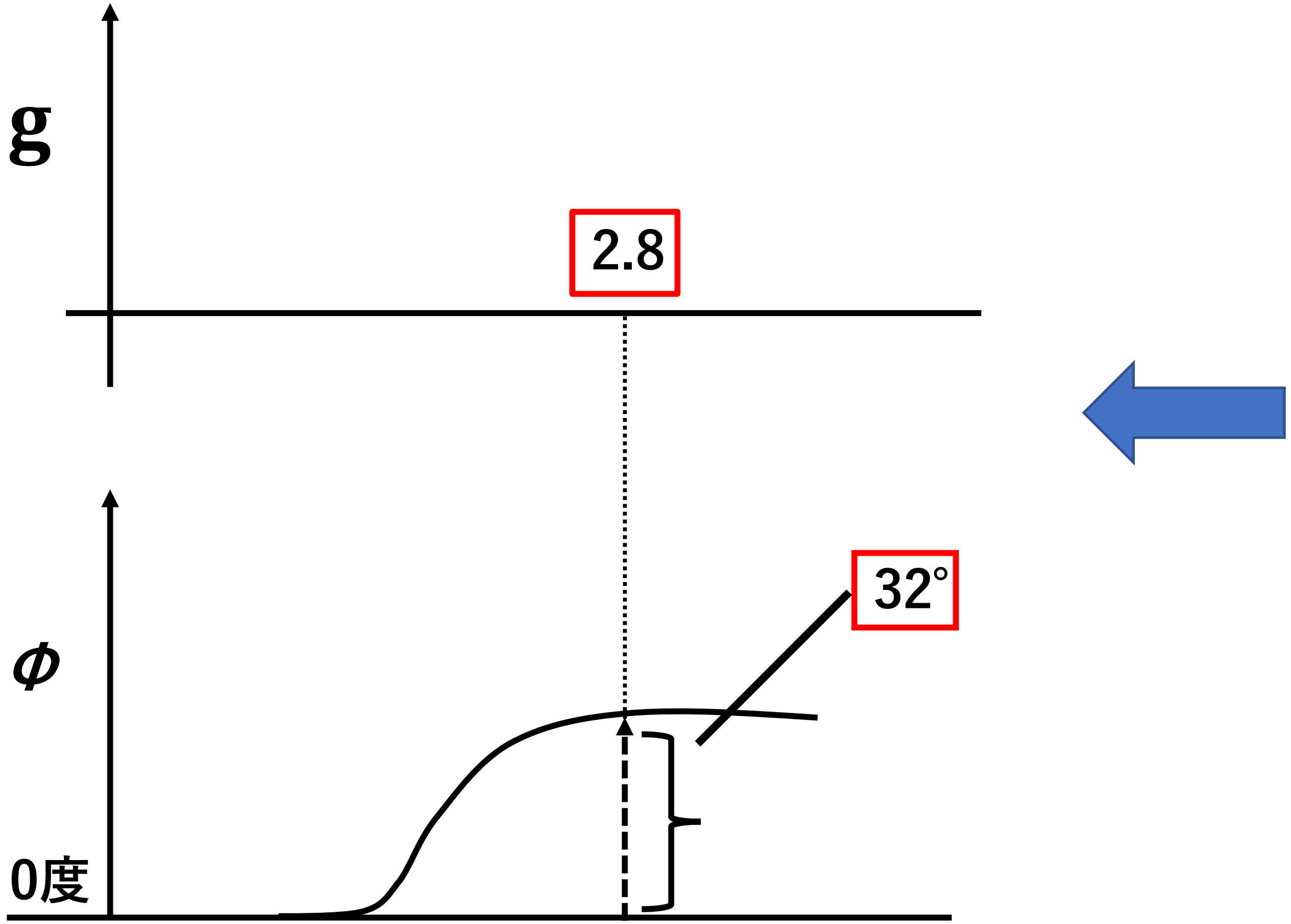


図７．１３

ゲイン特性を変化させないで、位相特性だけを変化させる

⇓

負のむだ時間要素　　　（不可能）

そこで、　位相進み要素を用いる

$$G_c = \frac{1+ST_2}{1+ST_1} \quad (T_2 > T_1)$$

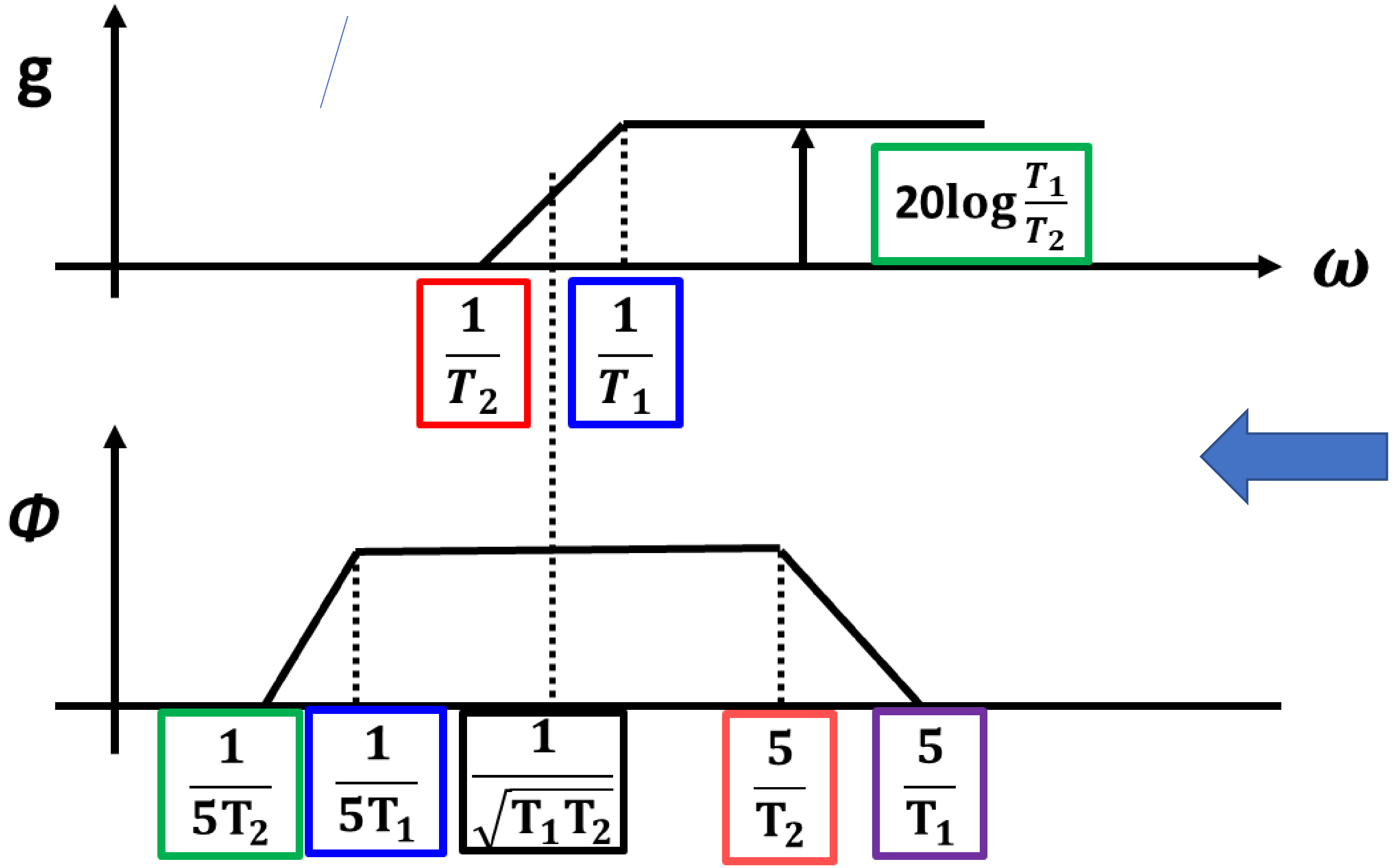


図７．１４

１次系なので、　傾きは $20[\mathrm{dB}]/[\mathrm{rad/sec}]$

$\frac{1}{T_1} = \frac{10}{T_2}$ のとき　<u>２０[dB]となる</u>

⇒ したがって $\frac{1}{T_1}$ のとき $\left(２０\log\frac{T_1}{T_2}\right.$ だけゲインは上がる$\left.\right)$

そのときの位相角の最大値の周波数

$$\frac{\log\frac{1}{T_2} + \log\frac{1}{T_1}}{2} = \log\omega$$

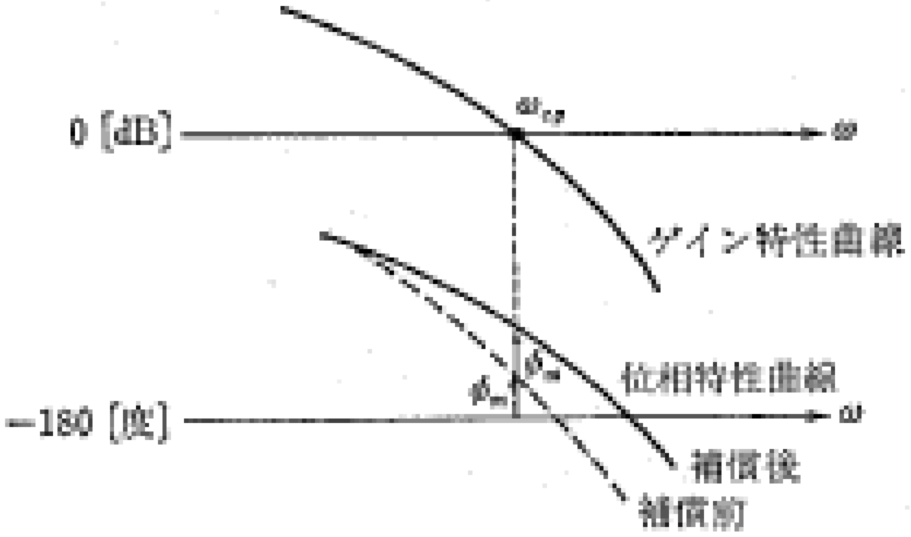
$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{T_2T_1} = \log\omega$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_2T_1}}$$

$$\mathrm{G_c(j\omega)} = \frac{(1+\mathrm{j\omega T_2})(1-\mathrm{j\omega T_1})}{1+\omega^2\mathrm{T_1^2}}$$ より

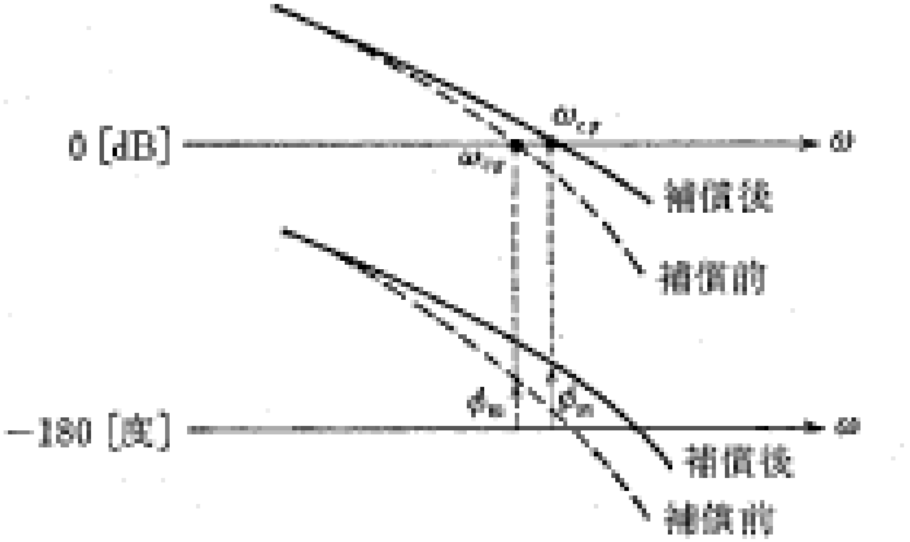
$$\phi = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{T_1T_2}}}(\mathrm{T_2}-\mathrm{T_1})}{2}$$

位相遅れ系と同じ原理



（a） 図7.13の要素による補償

図７．１３



（b） 図7.14の要素による補償

図７．１４

$T_1 = \frac{T_2}{n}$ として　実際に設計する

$\boxed{\mathbf{n} = \mathbf{10}\ \text{とする}}$

$G_c(S) = \frac{1+0.5S}{1+0.05S}$ ➡ 制御対象の最大時定数のもの
分母・分子相数する

<u>$G_C(j\omega)G(j\omega)$のボード線図 より</u>

$\omega_{cg} = 4.45\,[rad/sec]$,　$\Phi_m = 53.5°$ となる

$\boxed{n = 7}$ とする

$$\frac{0.5}{7} = 0.071$$

$$G_c(S) = \frac{1+0.5S}{1+0.071S}$$ とする

<u>$G_c(j\omega)G(j\omega)$ のボード線図より</u>

$\omega_{cg} = 4.4\,[rad/sec]$，　Φ_m= ４８．８° となる

$n = 10$ と $n = 7$ の結果により、直線補間する

$n = 7$，$\Phi_m = 48.8°$を原点として

$$\Phi_m = a \times n$$

$$n = \frac{1}{a}\Phi_m = \frac{10-7}{53.5-48.8} \times (\Phi_m - 48.8) + 7$$

$$= 0.683\ (52\text{-}48.8)\ {+7}$$

$$= 2.04 +7 = 9.04$$

$\boxed{\boldsymbol{n} = 9.04}$ **とすると**

$$\boldsymbol{G_c} = \frac{\mathbf{1+0.5}\boldsymbol{S}}{\mathbf{1+0.055}\boldsymbol{S}}$$ となる

$$\boldsymbol{\omega_{cg}} = \mathbf{4.45}[\boldsymbol{rad/sec}] \ , \boldsymbol{\Phi_m} = 52.1°$$

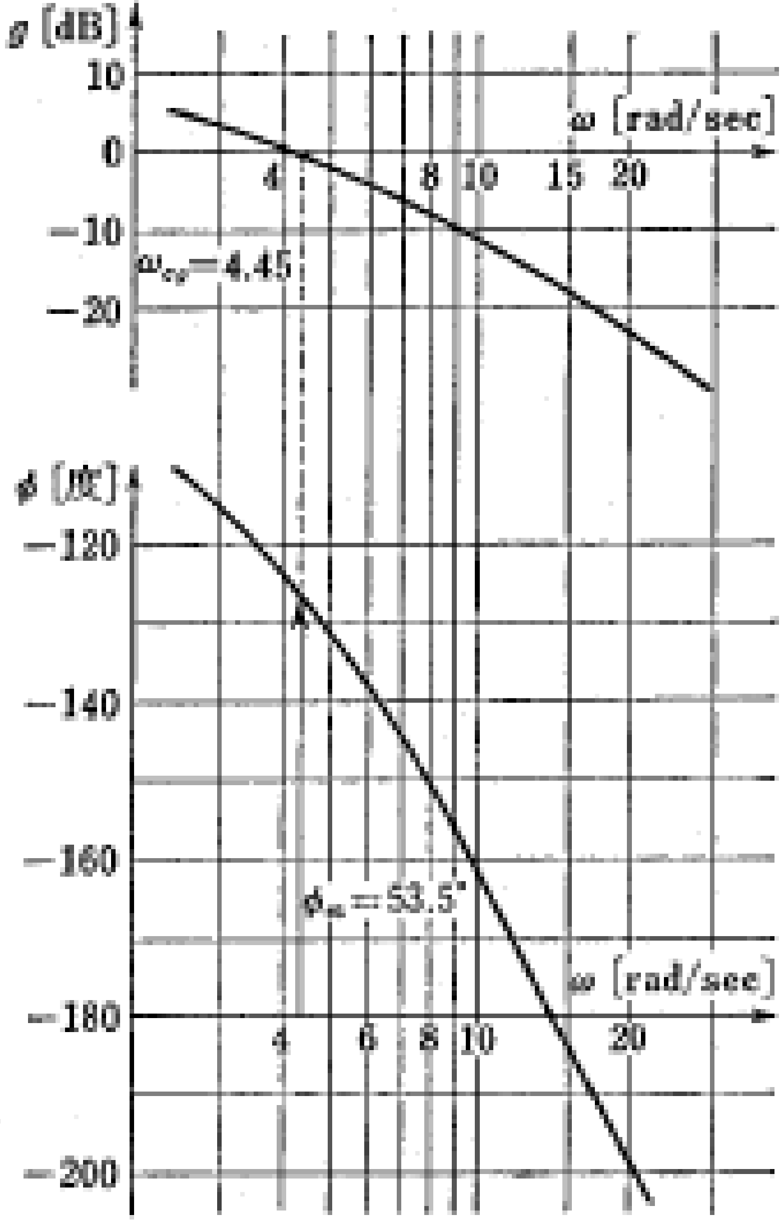


図 7.16　進み補償後の一巡周波数応答