制御理論
（前半担当）

大石　潔

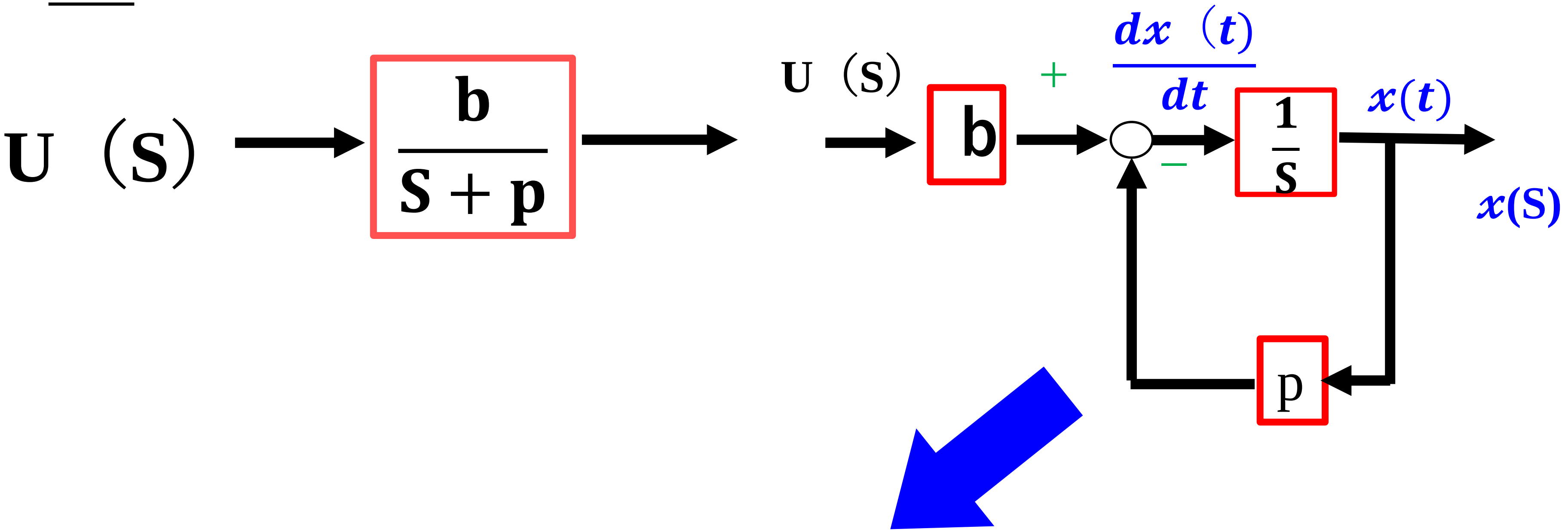
5月11日(1回目)～6月15日(6回目)

６月１５日：中間レポート課題
締切：６月２２日

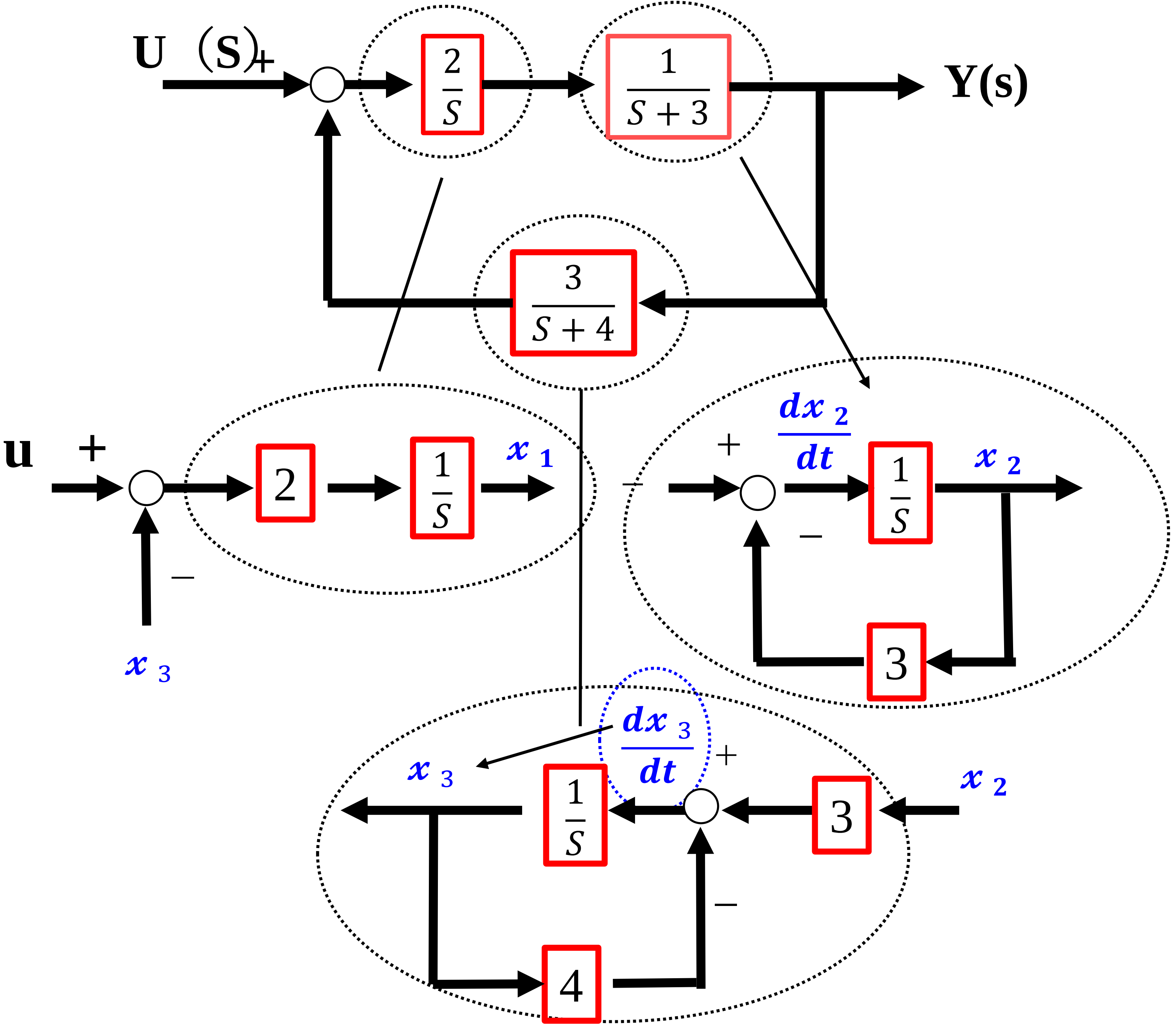
- システムの記述、ブロック線図と伝達関数
- フィードバック制御系の安定性、ボード線図とナイキストの安定判別法
- 位相余有、ゲイン余有、位相遅れ補償、位相進み補償
- **状態方程式と伝達関数、状態方程式の解と状態遷移行列**
- 固有値、固有ベクトル、座標変換と対角正準系
- 可制御性と可制御正準系、可観測性と可観測正準系、双対性

8章　状態方程式と伝達関数

8-1



$$\frac{d}{dt}x(t) = -\mathrm{p}x(\mathrm{t}) + \mathrm{bu}(t)$$



U (S)
+
$\frac{2}{S}$
$\frac{1}{S+3}$
Y(s)
$\frac{3}{S+4}$
u
+
2
$\frac{1}{S}$
x_1
−
x_3
$\frac{dx_2}{dt}$
+
$\frac{1}{S}$
x_2
−
3
$\frac{dx_3}{dt}$
x_3
$\frac{1}{S}$
+
3
x_2
−
4

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{x}_1(t) = -2\boldsymbol{x}_3(t) + 2\mathrm{u}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{x}_1(t) - 3\boldsymbol{x}_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{x}_3(t) = 3\boldsymbol{x}_2(t) - 4\boldsymbol{x}_3(t)$$

$$\mathrm{y}(t) = \boldsymbol{x}_2(t)$$

以上を行列で表すと…..

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

状態方程式

状態変数

入力変数

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t}) \end{bmatrix}$$

出力方程式

出力変数

状態変数の数 ⇒ n個　：n次のシステム

特性多項式の s。

最高次数

一般に　一入力 一出力 のシステムの状態方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) + \boldsymbol{b}\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) + \mathrm{du}(\mathrm{t})$$

となる。

$\boldsymbol{A}: n \times n$ 行列、　$\boldsymbol{b}: n \times 1$行列、 $\boldsymbol{C}: 1 \times n$ 行列
d : 1×1（スカラー）

伝達関数の分母と分子の次数が同一のとき、　d は存在
ではないとき　d は存在しない

分母>分子

※dが存在しない場合　厳密にプロパーと言う。

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{C}$、d が時間関数でない → 時不変形
である → 時変形

<u>※時不変形の場合が多いので、ここでは時不変形を扱う。</u>

状態方程式をラプラス変換すると

$$s\boldsymbol{X}(S) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(S) + \boldsymbol{b}\mathrm{U}(S)$$

$$\mathrm{Y}(S) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(S) + d\,\mathbf{U}(S)$$

$$s\boldsymbol{X}(S) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(S) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{b}\mathrm{U}(S)$$

$$(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(S) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{b}\mathrm{U}(S)$$

$$\boldsymbol{X}(S) = (s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\mathrm{U}(S)$$

すると

$$\Rightarrow \mathrm{Y}(\mathrm{S}) = \boldsymbol{C}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\mathrm{U}(\mathrm{S}) + \mathrm{d}\,\mathbf{U}(\mathrm{S})$$

伝達関数は$\boldsymbol{x}(0)=0$とおいたときの入力と出力のラプラス変換の比となる。

$$\mathrm{G}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{Y}(\mathrm{S})}{\mathbf{U}(\mathrm{S})} = \boldsymbol{C}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+\mathrm{d}$$

$$= \frac{\boldsymbol{C}\mathrm{adj}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{b}+\mathrm{d}}{\det|\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A}|}+\mathrm{d}$$

$\det|\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 特性方程式の解で**極**という

$$= \frac{\boldsymbol{C}\mathrm{adj}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}+\mathrm{d}+\mathrm{d}det|\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A}|}{det|\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A}|}$$

$\boldsymbol{C}\mathrm{adj}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{b}+\mathrm{d}\det|\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A}|=0$ の解を零点という。

次の状態方程式からなるシステムの伝達関数、特性方程式、零点を求めよ。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ -1 & s+2 & -1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det|\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A}| = &\ \big((s+2)(s+2)-1\big)(s+2)-(s+2) \\ &= (s^2+4s+3)(s+2)-(s+2) \\ &= s^3+4s^2+3s+2s^2+8s+6-s-2 \\ &= s^3+6s^2+10s+4\end{aligned}$$

$$\mathrm{adj}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} (s+2)(s+2)-2 & (s+2) & 2 \\ (s+2) & (s+2)(s+2) & s+2 \\ 2 & s+2 & (s+2)(s+2)-2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\mathrm{adj}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}=2(\mathrm{s}+2)=2\mathrm{s}+4$$

$$\frac{\boldsymbol{C}\mathrm{adj}(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}}{\det(\mathrm{s}\mathbf{I}-\boldsymbol{A})}=\frac{2\mathrm{s}+4}{\mathrm{s}^3+6\mathrm{s}^2+10\mathrm{s}+4}$$

◆　状態方程式の解と状態推移行列

$$e^{\boldsymbol{A}t} = I + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \quad + \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n t^n +$$

と　行列指数関数を呼ぶ。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ \mathrm{t}} e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^3 t^2 + \cdots$$

$$= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \cdots\right)$$

$$= \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}{}_{//}$$

$e^{\boldsymbol{A}t}$ に t = 0 を代入すると　　　$e^0 = \boldsymbol{I}_{//}$　（単位行列）

$$e^{\boldsymbol{A}t}e^{-\boldsymbol{A}t} = e^{(\boldsymbol{A}t-\boldsymbol{A}t)} = e^0 = \boldsymbol{I}_{//}$$

$e^{-\boldsymbol{A}t}$: 逆行列となる。

逆行列は存在する。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) + \boldsymbol{b}\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

入力u(t)が存在
（強制系）

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\mathrm{t})$$

入力u(t)が無い
（自由系）

$\boldsymbol{x}$（0）の値によって$\boldsymbol{x}(\mathrm{t})$が決まる。

◆自由系の解は

$\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = e^{At}\boldsymbol{x}(0)$ となる。

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{t})|_{t=0} = e^{0}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(0) \;//$$

以上より
立証できた。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \boldsymbol{A}e^{At}\boldsymbol{x}(0)$$

$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) \;//$$

$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}$は状態$\boldsymbol{x}$（0）を$\boldsymbol{x}$(t) へ推移（遷移）させる

よって、　状態推移行列（状態遷移行列）と呼ばれる。

◆強制系の場合

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = e^{\boldsymbol{A}t}[\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{Z}(t)]\ ,\ \boldsymbol{Z}(0) = 0$$

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{t})|_{t=0} = e^{0}[\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{Z}(0)]$$

$$= \boldsymbol{x}(0)_{//}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\ t}}\boldsymbol{x}(\mathrm{\ t\ }) = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}[\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{Z}(t)] + e^{\boldsymbol{A}t}\dot{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{t})$$

$$= \boldsymbol{Ax}(\mathrm{t}) + \boldsymbol{b}\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

$e^{At}\dot{\boldsymbol{Z}}(\mathrm{t}) = \boldsymbol{b}\mathrm{u}(\mathrm{t})$　となる。

$$\dot{\boldsymbol{Z}}(\mathrm{t}) = e^{-At}\boldsymbol{b}u(t)$$

$$\boldsymbol{Z}(\mathrm{t}) = \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{b}\mathrm{u}(\tau)d\tau$$

すると

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\left[\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau\right]$$

$$= e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A\tau}e^{-A\tau}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau\,)$$

$$= e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \quad //$$

出力　g（t）は$\boldsymbol{x}$（t）に$\boldsymbol{C}$行列を乗ずる。

$$g(t) = \boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t ce^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \quad //$$

（8～10）

$$\boldsymbol{X}(\mathrm{s}) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{U}(\mathrm{s})$$

（8～29）

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = L^{-1}[\boldsymbol{X}(\mathrm{s})]$ より

$$\boldsymbol{e^{At}} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}] \quad \text{となる。}$$

ここで　$\boldsymbol{x}(0) = 0$,　$u(t) = \underline{\delta(t)}$ デルタ関数とする

↓

$\delta(0) = \infty$　　$\int_0^\infty \delta(\tau)d\tau = 1$

単位インパルス応答は

$$\mathrm{y(t)} = \int_0^t \boldsymbol{C}\, e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} \boldsymbol{b} \delta(\tau) = e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{C} e^{At} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]\, \boldsymbol{b}$$

定数

$$= \boldsymbol{L}^{-1}\left[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{b}\right]$$

$$\boldsymbol{C}\,(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{L}^{-1}\left[\boldsymbol{C} e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{b}\right]$$

伝達関数　　**単位インパルス応答の逆ラプラス変換**

よって

$$\int_0^t \boldsymbol{C} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} \boldsymbol{b} u(\tau) = \boldsymbol{L}^{-1}[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{b} \boldsymbol{U}(s)]$$ となる。

例題　8,2

状態変数の時間応答の求め方

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)\ ,\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u(t)=1\ \ (t\geq 0)$ ：単位ステップ関数

(i)　$\boldsymbol{X}(\mathrm{s}) = (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{U}(\mathrm{s})$

$= (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\{\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{U}(\mathrm{s})\}$

<u>を逆ラプラス変換する　→　$\boldsymbol{x}(t)$を得る</u>

(ii)　$e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$ よりe^{At}を求めて

$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$より求める。

(i) $\boldsymbol{X}(\mathrm{s}) = (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{U}(\mathrm{s})$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s^2+9s+14}\begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ -6 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+7)}\begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ -6 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{U}(s)] = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s}\right\}$$

ここに数式を入力します。

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(\mathrm{s}) = \frac{1}{(s+2)(s+7)}\begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ -6 & s+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{s+1}{s} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+7)}\begin{bmatrix} s+5-\frac{s+1}{s} \\ -6+\frac{(s+4)(s+1)}{s} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+4s-1}{(s+2)(s+7)s} \\ \dfrac{s^2-s+4}{(s+2)(s+7)s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{14}\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{4}{7}\dfrac{1}{s+7} \\ \dfrac{2}{7}\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{12}{7}\dfrac{1}{s+7} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \boldsymbol{L}^{-1}[\boldsymbol{X}(s)] = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{4}{7}e^{-7t} \\ \dfrac{2}{7} - e^{-2t} + \dfrac{12}{7}e^{-7t} \end{bmatrix}_{//}$$

(ii) $e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+7)} & \frac{-1}{(s+2)(s+7)} \\ \frac{6}{(s+2)(s+7)} & \frac{s+4}{(s+2)(s+7)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{5}\frac{1}{s+7} \ , & -\frac{1}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{5}\frac{1}{s+7} \\ -\frac{6}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{6}{5}\frac{1}{s+7} \ , & \frac{2}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{s+7} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{-7t} \ , & -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{-7t} \\ -\frac{6}{5}e^{-2t} + \frac{6}{5}e^{-7t} \ , & \frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{3}{5}e^{-7t} \end{bmatrix}$$

$$x（\mathrm{t}）=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$$e^{At}\boldsymbol{x}(0)=e^{At}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}e^{-2t}+\frac{3}{5}e^{-7t}\\-\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{9}{5}e^{-7t}\end{bmatrix}_{//}$$

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(\tau)d\tau = \int_0^t\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}e^{-2(t-\tau)}+\frac{1}{5}e^{-7(t-\tau)}\\\frac{2}{5}e^{-2(t-\tau)}+\frac{3}{5}e^{-7(t-\tau)}\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{10}e^{-2(t-\tau)}+\frac{1}{35}e^{-7(t-\tau)}\\\frac{1}{5}e^{-2(t-\tau)}+\frac{3}{35}e^{-7(t-\tau)}\end{bmatrix}_0^{\mathrm{t}}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{10}+\frac{1}{35}+\frac{1}{10}e^{-2t}-\frac{1}{35}e^{-7t}\\\frac{1}{5}+\frac{3}{35}-\frac{1}{5}e^{-2t}-\frac{3}{35}e^{-7t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14}+\frac{1}{10}e^{-2t}-\frac{1}{35}e^{-7t}+\frac{2}{5}e^{-2t}+\frac{3}{5}e^{-7t} \\ \frac{2}{7}-\frac{1}{5}e^{-2t}-\frac{3}{35}e^{-7t}-\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{9}{5}e^{-7t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{14}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{4}{7}e^{-7t} \\ \frac{2}{7}-e^{-2t}+\frac{12}{7}e^{-7t} \end{bmatrix}$$