制御理論
（前半担当）

大石　潔
5月11日(1回目)～6月15日(6回目)

６月１５日：中間レポート課題
締切：６月２２日

- システムの記述、ブロック線図と伝達関数
- フィードバック制御系の安定性、ボード線図とナイキストの安定判別法
- 位相余有、ゲイン余有、位相遅れ補償、位相進み補償
- 状態方程式と伝達関数、状態方程式の解と状態遷移行列
- **固有値、固有ベクトル、座標変換と対角正準系**
- 可制御性と可制御正準系、可観測性と可観測正準系、双対性

8.3　安定性と安定判別法

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.41}$$

の解

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0) \tag{8.42}$$

まず，正方行列 $\boldsymbol{A}(n\times n)$ の**特性方程式**

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n=0 \tag{8.43}$$

の根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を $\boldsymbol{A}$ の**固有値**という．式 (8.13) と比較すれば，これはシステム (8.5) の極と一致する．また，各固有値に対し

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\boldsymbol{v}_i \quad [\text{または，}(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}] \tag{8.44}$$

を満たす零ではない n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を，$\boldsymbol{A}$ の**固有ベクトル**という．以下，固有値 $\lambda_1\sim\lambda_n$ に重複したものがない場合だけを考えよう．すると，$\boldsymbol{v}_1\sim\boldsymbol{v}_n$ は線形独立となり，固有ベクトルを並べた行列

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)\ (n\times n) \tag{8.45}$$

は正則（$|T|\neq 0$ となることをいう）となり，

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda \tag{8.46}$$

が成り立つことが知られている．上式は，A が T によって**対角行列**（**モード行列**）Λ に変換できることを示しており，これを**対角変換**，T を**対角変換行列**という．

さて，$TT^{-1}=I$ を使えば

$$T^{-1}A^iT=T^{-1}ATT^{-1}AT\cdots T^{-1}AT=\Lambda^i \tag{8.47}$$

8.3 安定性と固有値

$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ ： 特性方程式

$$= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0$$

$$= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots\cdots(s-\lambda_n) = 0$$

$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$ $\boldsymbol{A}$の固有値と呼ぶ

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ 又は$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{v}_i = 0$を満たす

n次元縦ベクトル $v_1, v_2 \cdots v_n$ が存在する。

固有ベクトル

$v_1 \sim v_n$は線形独立である。

$\mathbf{T} = (v_1, v_2 \cdots v_n)\ (n \times n)$ は正則　$(|\boldsymbol{T}| \neq 0)$

$\mathbf{T}$ ： 対角変換行列という。

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

対角行列（モード行列）

ジョルダン形

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{i}}\mathbf{T} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\Lambda}\underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\Lambda} \cdots \underbrace{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}}_{\Lambda}$$

$\mathbf{I}$

$$= \boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{i}}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots\right)\boldsymbol{T}$$

$$=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Lambda}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{\Lambda}^2t^2+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2!}\lambda_1{}^2t^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{2!}\lambda_n{}^2t^2\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} \tag{8.48}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{8.49}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

$$=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} z_1(0)+\boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} z_2(0)+\cdots+\boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t} z_n(0) \qquad (8.50)$$

と書くことができる．ただし

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix}=\boldsymbol{z}(0) \qquad (8.51)$$

としている．$e^{\lambda_i t} z_i(0)$ を**モード**といい，式 (8.50) を自由応答の**モード展開**という．

$$\mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathrm{t} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots\right)\mathbf{T}$$

$$= \boldsymbol{T^{-1}IT} + \boldsymbol{T^{-1}ATt} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2!}}\boldsymbol{T^{-1}A^{-2}Tt^2} + \cdots$$

$$= \mathbf{I} + \Lambda\mathrm{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2!}}\Lambda^{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{t} & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 \mathrm{t} & \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \mathrm{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2!}\lambda_1^2\ \mathrm{t}^{\ 2} & \mathbf{0} \\ \ddots & \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2!}\lambda_n^2\ \mathrm{t}^{\ 2} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\mathbf{T}^{-1}$$

よって　　自由系において

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{T}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ \mathbf{0} & \ddots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

$$= [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n]\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ \mathbf{0} & \ddots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1(0) \\ \boldsymbol{z}_2(0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_n(0) \end{bmatrix}$$

← モード展開

$$= \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{z}_1(0) + \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{z}_2(0) + \cdots + \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}\boldsymbol{z}_n(0)$$

$$T^{-1}\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1(0) \\ \boldsymbol{z}_2(0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_n(0) \end{bmatrix} = \mathbf{z}(0)$$

$e^{\lambda_i t}\boldsymbol{z}_i(0)$をモードと言う。

一般に，すべての初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0} \tag{8.52}$$

となるとき，自由系（8.41）を**漸近安定**という（古典制御理論では単に**安定**ということが多い）．ところで，固有値は一般に複素数で $\lambda_i=a_i+jb_i$ と書け，$|e^{\lambda_i t}|=|e^{a_i t+jb_i t}|=e^{a_i t}$ となるので，$\lim_{t\to\infty}e^{\lambda_i t}=0$ が成り立つのは $a_i<0$，すなわち，固有値の実部が負のときに限る．式（8.50）に対して，このことと，$\boldsymbol{x}(0)$ と $\boldsymbol{z}(0)$ に1対1の関係があることを使うと，式（8.52）が成り立つための必要十分条件として，すべての固有値の実部が負である条件を得る．すなわち，**自由系が漸近安定であるための必要十分条件は，A のすべての固有値 λ_i の実部 $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ が負（<0）となることである**．ここでは，簡単のため固有値に重複したものがないとしたが，重複固有値がある場合も同様である．制御理論では，固有値の実部が負であることを固有値が（複素開）**左半面**（L.H.P）にあるという．また，すべての固有値の実部が負である行列を**安定行列**という．

すべての初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ に対して

$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \mathbf{0}$ のとき、<u>漸近安定という</u>

$\lambda_i = a_i + jb_i$

$$\left|e^{\lambda_i t}\right| = \left|e^{a_i t + jb_i t}\right| = \left|e^{a_i t} e^{jb_i t}\right|$$

常に大きさ1である。

$$= \left|e^{a_i t}\left(\cos b_i t + j\sin b_i t\right)\right|$$

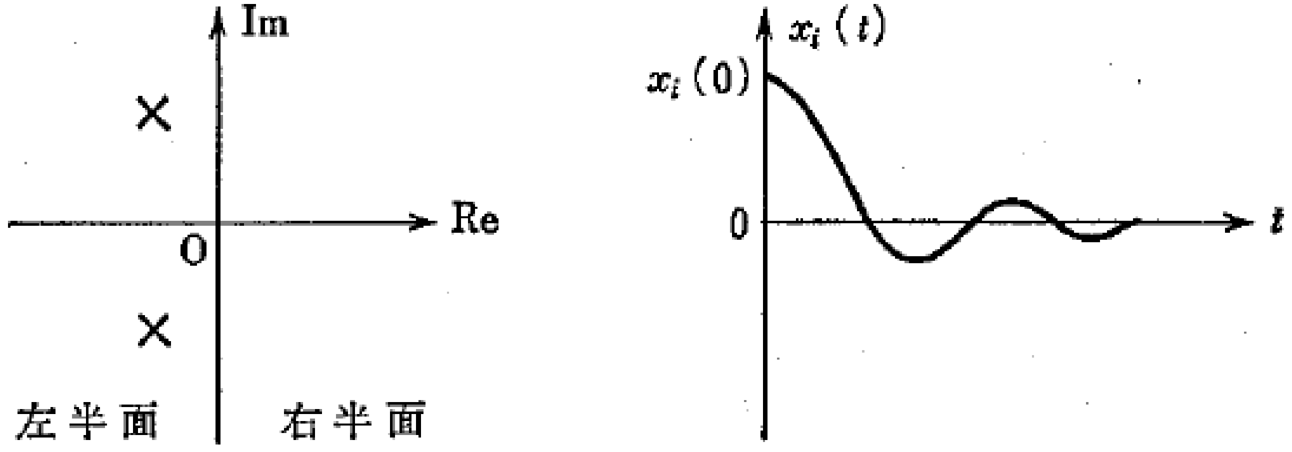
$$= e^{a_i t}$$

したがって $\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{e}^{\lambda_i t} = \mathbf{0}$ が成り立つのは　$a_i < 0$ のとき

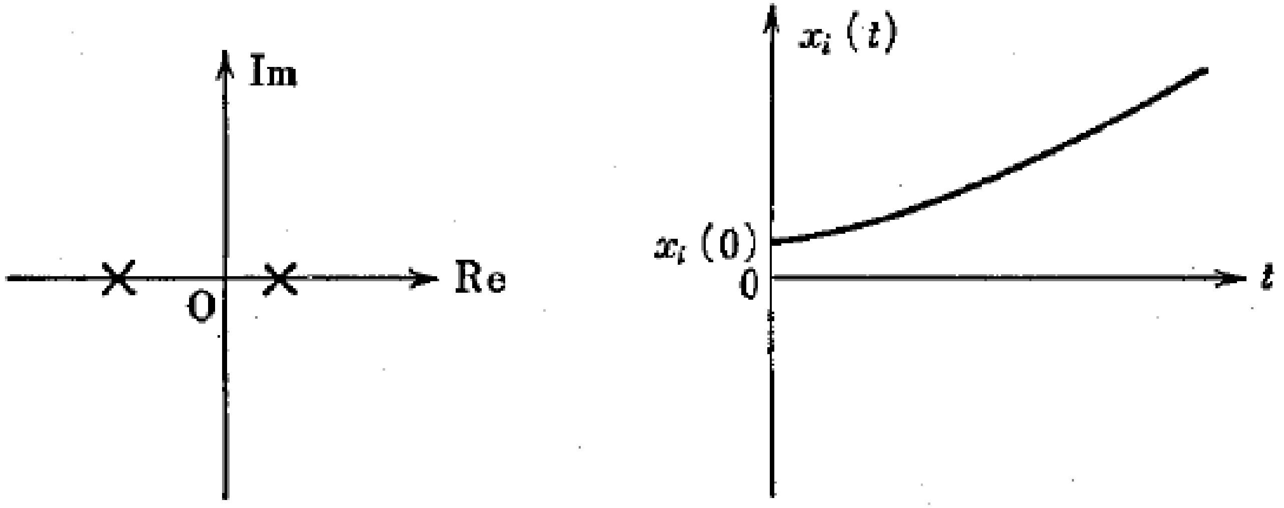
固有値の実部が負のときに限る。

漸近安定の必要分条件は

A の全ての固有値 λ_i の実部 $R_e(\lambda_i)$ が負であること。

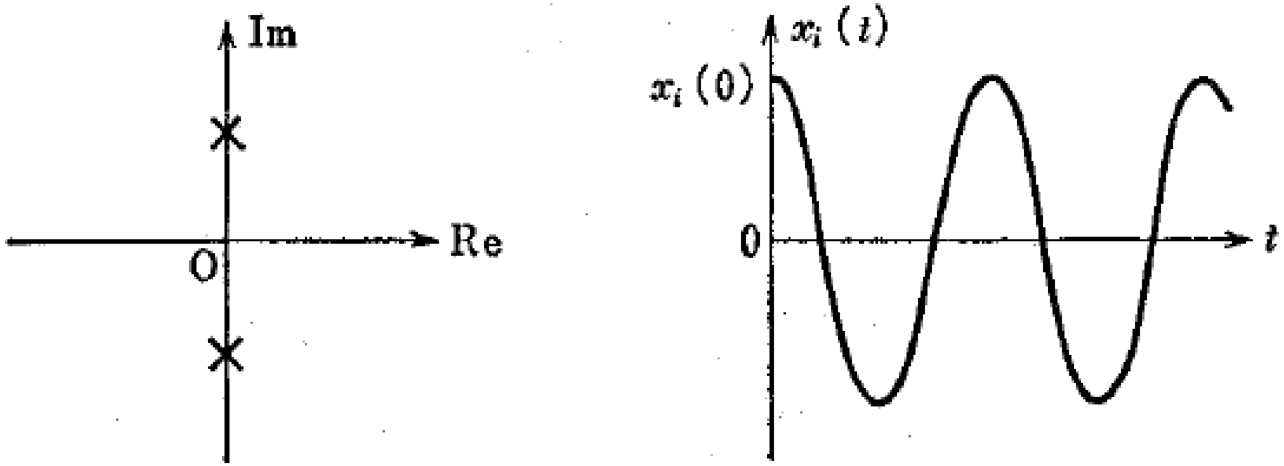


（a） 漸近安定（安定）



（b） 不安定

なお，$\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$ の固有値があるときには $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t}=\infty$ となるので，ある $\boldsymbol{x}(0)$ に対して $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t)=\infty$ となる．このときには**不安定**という．また，重複しない $\lambda_i=0$ や $\lambda_i=\pm j\omega$ の固有値があるときには，それぞれ，$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t)=$一定 $\neq 0$ となったり，単振動をする．この場合には，リアプノフの意味で安定ということもあるが，制御理論では普通不安定とする（図 8.5 参照）．



（c） 安定限界（不安定）

図 8.5 複素平面上の固有値の配置と自由系の時間応答

固有値が複素平面で左半平面 (L.H.P)にあるという。

逆に　$\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$　の固有値があると

$$\lim_{t \to \infty} e^{\lambda i t} = \infty$$ となり

ある$\boldsymbol{x}$（0）に対して、　$\boxed{\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = \infty \text{となる。}}$ ⇦ 不安定

$\lambda_i = 0,$　　$\boldsymbol{x}$（t）＝一定　　← **オフセット**

$\lambda_i = \pm j\omega$　　$\boldsymbol{x}$（t）$= \mathrm{K} \cos \omega t$　　← **単振動**

※　厳密に言えば、安定とも不安定とも言えない。

⇩

広義の意味では、不安定となる。

ここで，定常値が存在することを**偏差システム**を使って証明しておく．まず，定常値があり，式 (8.53) で与えられるものと仮定し[4]，定常値からの**偏差**を

$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(\infty) \tag{8.55}$$

とおくと（図 8.6 参照），以上の関係式より

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}a\\&=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{x}(\infty)]+\boldsymbol{b}a\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\infty)+\boldsymbol{b}a\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}(t)\end{aligned} \tag{8.56}$$

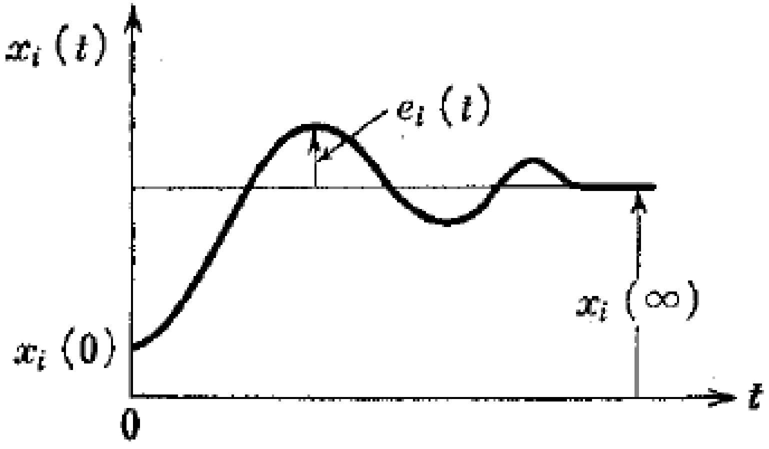


図 8.6 定常値と偏差

となり，偏差に関する自由系

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}(t)$$

$$:\ \boldsymbol{e}(0)=\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}(\infty) \tag{8.57}$$

を得る．$\boldsymbol{A}$ が安定行列なので，$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{0}$ が保証され，定常値は確かに式 (8.53) となる．

$\boldsymbol{x}(\infty)$を基準とする偏差システム

$$\mathrm{e(t)} = \boldsymbol{x}(\mathrm{t}) - \boldsymbol{x}(\infty)$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}a$$

$$= \mathbf{A}[\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{x}(\infty)] + \boldsymbol{b}a$$

$$= \mathbf{A}\boldsymbol{e}(t) + \mathbf{A} \times \left(-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}a\right) + \boldsymbol{b}a$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{0}$$

$$= \mathbf{A}e(t)$$

したがって　$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ となる。

以上では自由系について考えたが，強制系（8.5）についても，$\boldsymbol{A}$ が安定行列のとき漸近安定という．

入力がステップ関数で，$u(t)=a=$一定（$t\geq 0$）のときには，$\boldsymbol{x}(\infty)=$ 一定となり，$\dot{\boldsymbol{x}}(\infty)=\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\infty)+\boldsymbol{b}a$ を解いて，定常値として

$$\boldsymbol{x}(\infty)=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}a \tag{8.53}$$

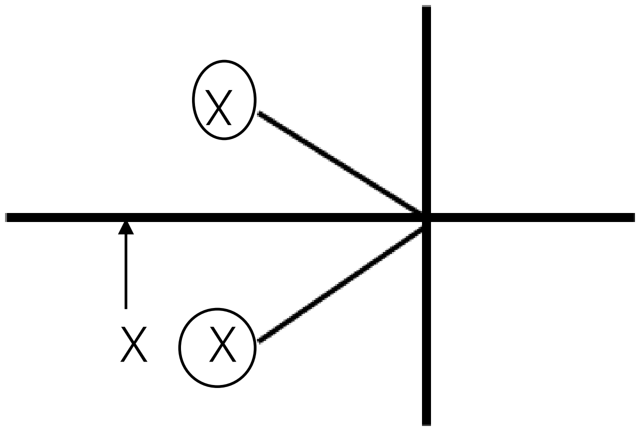
を得る．本式は，式（8.10 a）と最終値の定理から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(\infty)&=\lim_{s\to 0} s\boldsymbol{X}(s)\\ &=\lim_{s\to 0}\left[s(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+s(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\frac{a}{s}\right]\\ &=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}a \end{aligned}\tag{8.54}$$

として求めることもできる．

すべての固有値の実部がより負（絶対値が大きい）

速い応答(即応性)がある。



虚軸に一番近いモード
代表モード

漸近安定なシステムにおいて

$t \to \infty$ 　　u(t)= a （ステップ入力）

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\infty) = 0 = \mathbf{A}\boldsymbol{x}(\infty) + ba$$

$$-\mathbf{A}\boldsymbol{x}(\infty) = ba$$

$$\boldsymbol{x}(\infty) = -A^{-1}ba$$

最終値の定理

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} s\mathbf{X}(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s\left[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}U(s)\right]$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{s}}$$

$$= \lim_{s \to 0} \underbrace{s\,(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)}_{0} + (\underbrace{s}_{0}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}a$$

$$= -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}a \ //$$

ところで，実際のシステムの応答は偏差と定常値の和であるから，過渡応答の良し悪しは偏差に関する自由系を使って議論することができる．このため，現代制御理論では自由系の制御が最初に取り上げられる

座標変換と可制御性・可観測性

9.1　座標変換とシステムの等価性

ブロック線図から状態方程式を求める場合，状態変数の取り方を変えれば $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ も変わるが，入出力関係はシステム固有のものであるので伝達関数は不変であり，さらに安定性も変わらないといえる．このように状態変数の取り方を変えることを一般に座標変換という．さらに，座標変換によって不変で

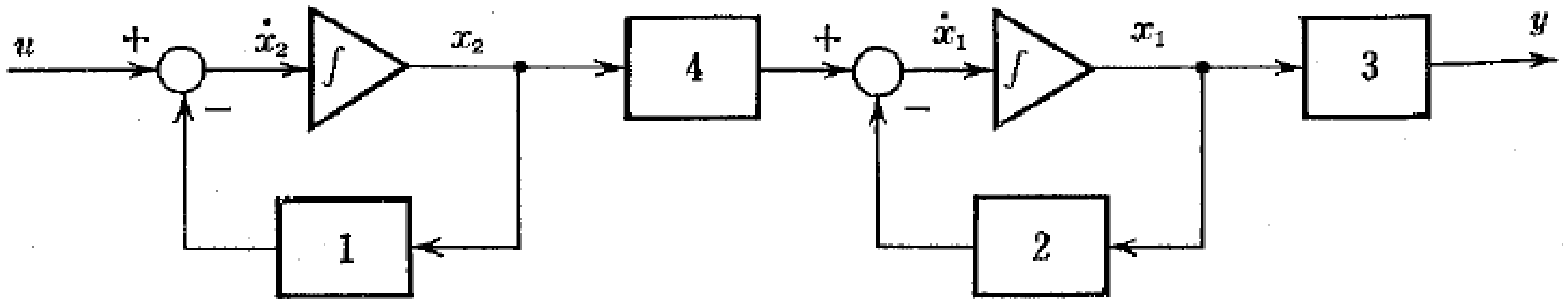


図 9.1　システム (9.1)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=(3,\ 0)\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \tag{9.1}$$

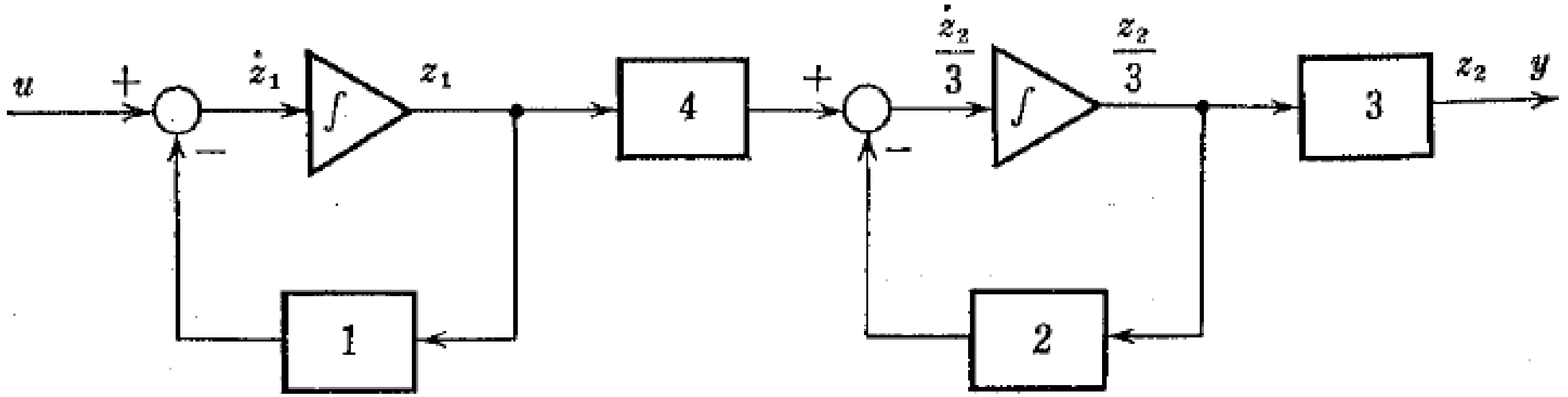


図 9.2 システム (9.2)

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1(t)\\ \dot{z}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 12 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=(0,1)\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix} \tag{9.2}$$

ここで，両方のシステムの伝達関数を計算すると

$$(3,0)\begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=(0,1)\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -12 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{12}{(s+1)(s+2)} \tag{9.3}$$

となり一致する．また，状態変数ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{z}(t)$ には

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

の関係があることがわかる．

さて，式 (9.4) のように，古い状態変数ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ を新しい状態変数ベクトル $\boldsymbol{z}(t)$ で表すことを**座標変換**といい，一般には，正則行列 $\boldsymbol{T}$ によって

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) \tag{9.5}$$

と書くことができる[1)]．$\boldsymbol{T}$ は**座標変換行列**と呼ばれている．

座標変換をしても伝達関数は不変である．

9章　座標変換と可制御性・可観測性

システムにおいて、特性多項式（伝達関数の分母）は不変
入力と出力が同じであれば　　　伝達関数も不変

状態方程式は何通りでも表現できる。

システムが同じで、異なる状態方程式の場合、座標が異なるとも言う。
（状態変数も異なる）

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{T}z(t)$$

状態方程式A　　状態方程式B

座標変換行列　←　**正則行列**

そこで，$\boldsymbol{x}(t)$ が

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t) \tag{9.6 a}$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) \tag{9.6 b}$$

を満たすとき，$\boldsymbol{z}(t)$ の満たすシステムを求めてみる．すると，$\boldsymbol{T}$ が定数行列であることから $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{z}}(t)$ となり，$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t)$ と共に上式へ代入すると

$$\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{b}u(t) \tag{9.7 a}$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) \tag{9.7 b}$$

となる．さらに，式（9.7 a）に左から $\boldsymbol{T}^{-1}$ をかけると

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}(t)+\tilde{\boldsymbol{b}}u(t) \tag{9.8 a}$$

$$y(t)=\tilde{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{z}(t) \tag{9.8 b}$$

ただし

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\ \ \tilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b},\ \ \tilde{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T} \tag{9.8 c}$$

となり，これが座標変換後の $\boldsymbol{z}(t)$ が満たす状態方程式と出力方程式となる．とくに，$\boldsymbol{A}$ と $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ の関係は相似と呼ばれている．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$$

$$\mathrm{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{x}(t) + du(t)$$

$$\underline{\mathbf{T}\dot{\mathrm{z}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\mathrm{z}(t) + \boldsymbol{b}u(t)}$$

$$\mathrm{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\mathrm{z}(\mathrm{t}) + d\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

$$\dot{\mathrm{z}}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\mathrm{z}(t) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}u(t)$$

$$\dot{\mathrm{z}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{A}}\mathrm{z}(t) + \widetilde{\boldsymbol{b}}u(t)$$

$$\mathrm{y}(t) = \widetilde{\boldsymbol{C}}\mathrm{z}(t) + \tilde{d}u(t)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$$

$$d = d$$

$$|sI-\tilde{A}|=|T^{-1}(sI-A)T|=|T^{-1}||T||sI-A|$$
$$=|sI-A| \tag{9.11}$$

となり[2]，**特性多項式**（よって，特性方程式）は不変である．したがって，システムの固有値（極）も不変で，安定性も変わらない．同様に

$$\tilde{c}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{b}=cT[T^{-1}(sI-A)T]^{-1}T^{-1}b$$
$$=cTT^{-1}(sI-A)^{-1}TT^{-1}b$$
$$=c(sI-A)^{-1}b \tag{9.12}$$

となり伝達関数も不変である．さらに，極と伝達関数が不変なので零点も不変である．すなわち，状態変数をどうとろうと，すべての状態方程式表現はこれらの意味で等価であることがわかる．

$\boldsymbol{A}$と$\widetilde{\boldsymbol{A}}$　の関係は相似と呼ぶ。

相似のシステムでは

$$\left|s\boldsymbol{I}-\widetilde{\boldsymbol{A}}\right| = \left|s\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\right)-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right|$$

$$= |\boldsymbol{T}^{-1}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}|$$

$$= |\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})|$$

$$= |s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$$

※特性多項式は不変。

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}\left(sI-\widetilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}[\boldsymbol{T}^{-1}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}]^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

※伝達関数も不変。

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n) \tag{9.13}$$

をとり，システム (9.6) に対し

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) \tag{9.14}$$

の変換を行うと

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{9.15 a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) \tag{9.15 b}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u(t) \tag{9.16 a}$$

$$y(t) = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} \tag{9.16 b}$$

$$\boldsymbol{T} = (v_1 v_2 v_3 \cdots, v_n)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T} z(t)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} = [\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n]$$

$$\tilde{d} = d$$

◆ 対角正準系

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n]\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

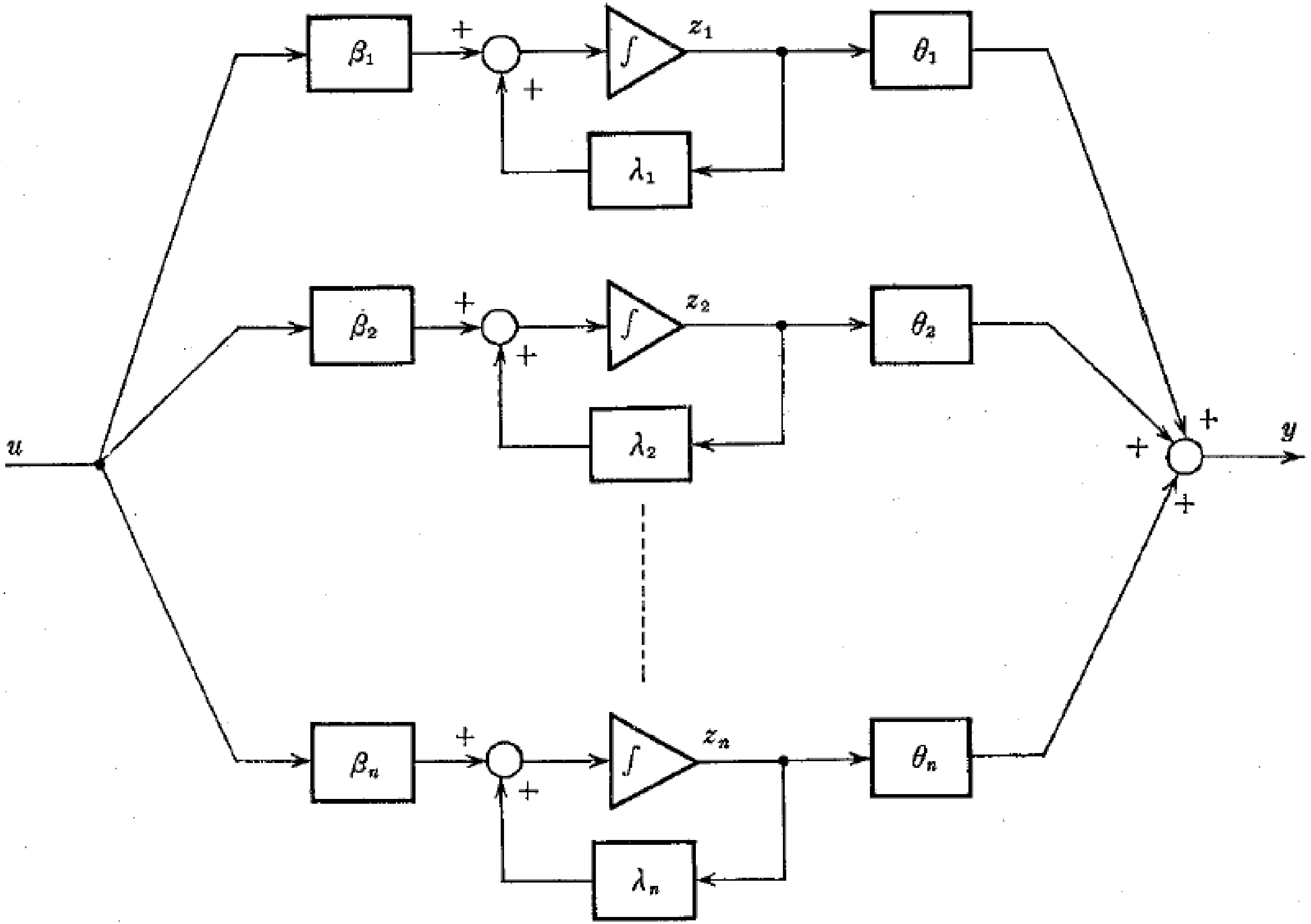


図 9.3　対角正準系の状態変数線図

すなわち

$$\dot{z}_i(t)=\lambda_i z_i(t)+\beta_i u(t) \quad (i=1\sim n) \tag{9.17 a}$$

$$y(t)=\theta_1 z_1(t)+\theta_2 z_2(t)+\cdots+\theta_n z_n(t) \tag{9.17 b}$$

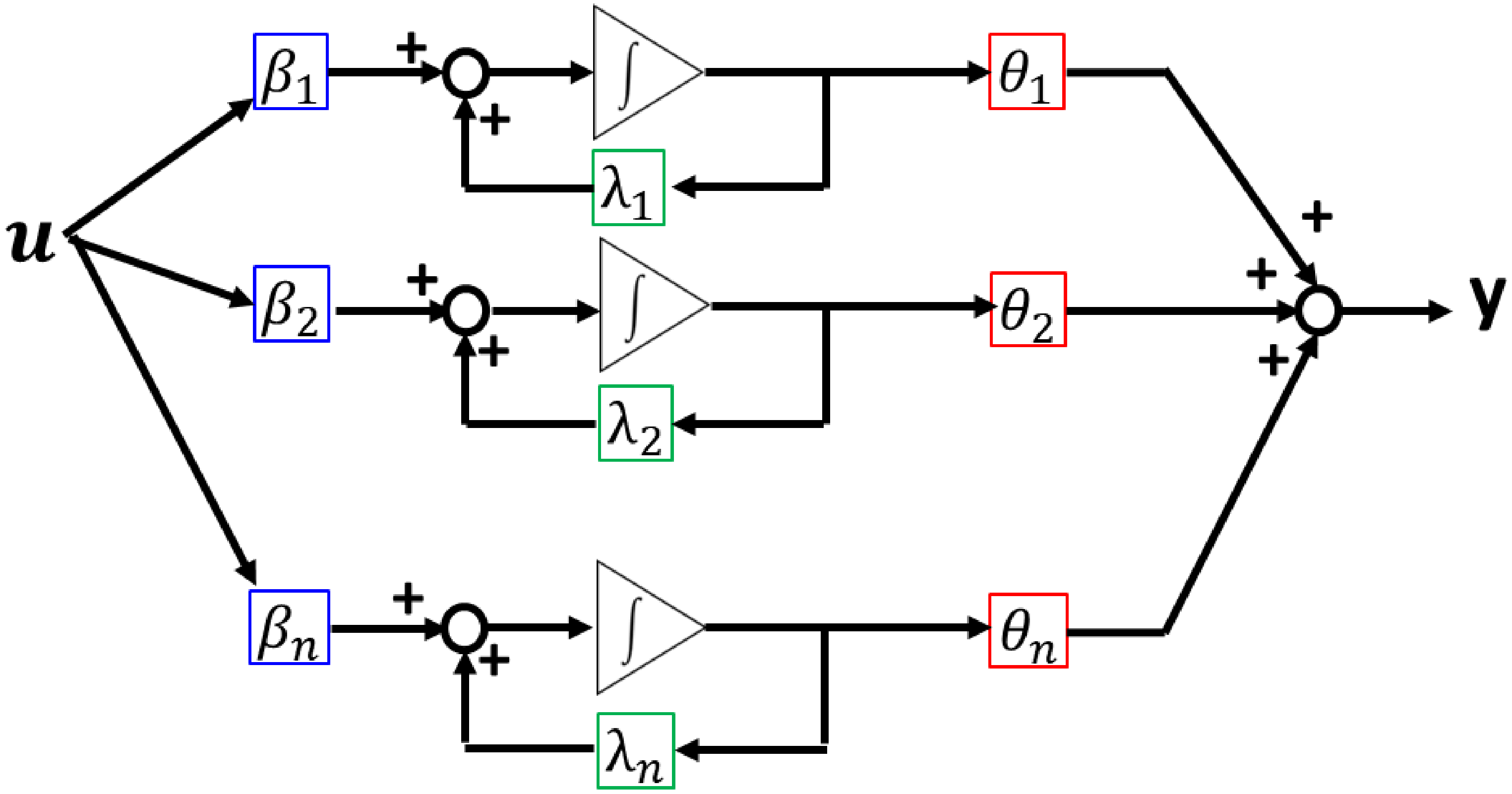
のように並列システムとして表される（図 9.3 参照）．このようなシステムを**対角正準系**といい，$\tilde{\boldsymbol{A}}$，$\tilde{\boldsymbol{b}}$，$\tilde{\boldsymbol{c}}$ を**対角正準形式**という．また，8.3 節での定義を一般化して，$z_i(t)$ をモードと呼ぶ．

ここで，$z_i(0)=0$ ($\forall_i$) として，式 (9.17) をラプラス変換し，まとめると

$$Y(s)=\left[\frac{\theta_1\beta_1}{s-\lambda_1}+\frac{\theta_2\beta_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{\theta_n\beta_n}{s-\lambda_n}\right]U(s) \tag{9.18}$$

を得る．一方，伝達関数が座標変換によって変わらないことより

$$\begin{aligned} G(s)&=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\tilde{\boldsymbol{c}}(s\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{A}})^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}} \\ &=\frac{\theta_1\beta_1}{s-\lambda_1}+\frac{\theta_2\beta_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{\theta_n\beta_n}{s-\lambda_n} \end{aligned} \tag{9.19}$$



$z_i(0) = (\forall_i)$ としてラプラス変換すると・・・

$$\mathrm{Y(s)} = \left[\frac{\theta_1\beta_1}{s-\lambda_1} + \frac{\theta_2\beta_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{\theta_n\beta_n}{s-\lambda_n}\right]\mathbf{U}(s)$$

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \frac{\theta_1\beta_1}{s-\lambda_1} + \frac{\theta_2\beta_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{\theta_n\beta_n}{s-\lambda_n}$$

βが零の状態変数 z は不可制御
θが零の状態変数 z は不可観測

すなわち，システム（9.6）の対角正準系（9.16）において，$\beta_i \neq 0\,(\forall_i)$である とき，システム（9.6）を可制御といい，$\theta_i \neq 0$（$\forall_i$）であるとき，可観測という．

なお，この定義はシステムに重複固有値がない場合にしか使えないが，そうでない場合も含めて，可制御性の定義を「すべての $\boldsymbol{x}(0)$ と任意に与えられたベクトル $\boldsymbol{x}_f$ に対して，有限な時刻 t_f と入力 $u(t)$（$0 \leq t \leq t_f$）が存在し，$\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$ とできること」，可観測性の定義を「ある有限な時刻 t_f があり，$0 \leq t \leq t_f$ 間の $y(t)$ と $u(t)$ から $\boldsymbol{x}(0)$ を逆算できること」とすれば，両方の定義は等価となることが知られている．