制御理論
（前半担当）

大石　潔

5月11日(1回目)～6月15日(6回目)

６月１５日：中間レポート課題
締切：６月２２日

- システムの記述、ブロック線図と伝達関数
- **フィードバック制御系の安定性、ボード線図とナイキストの安定判別法**
- 位相余有、ゲイン余有、位相遅れ補償、位相進み補償
- 状態方程式と伝達関数、状態方程式の解と状態遷移行列
- 固有値、固有ベクトル、座標変換と対角正準系
- 可制御性と可制御正準系、可観測性と可観測正準系、双対性

5.1　周波数応答とは

図 5.1 に示すように，線形定係数回路に入力信号 $x_i(t)$ として，

$$x_i(t) = X_i \sin \omega t \tag{5.1}$$

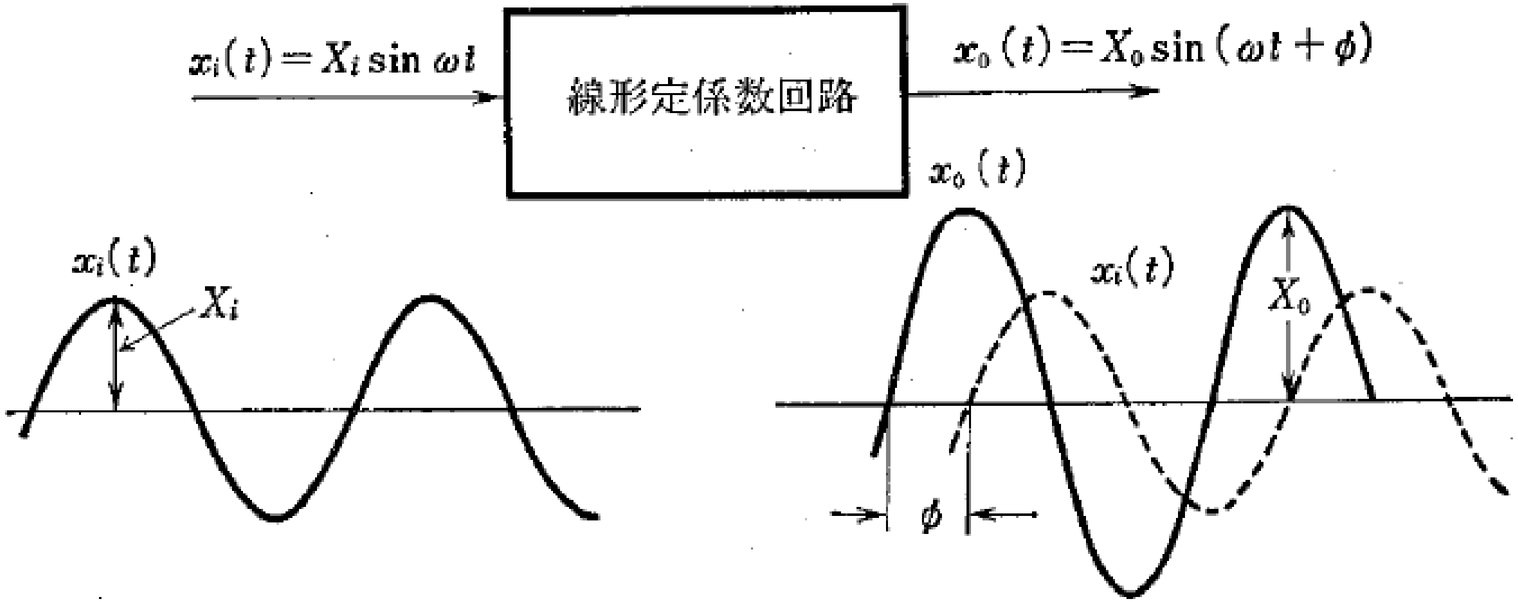
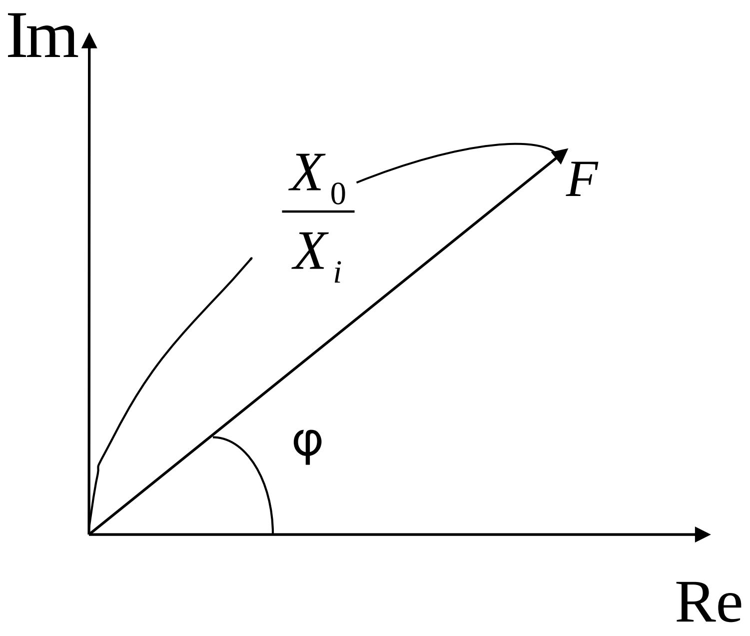


図 5.1　定常時の入出力関係

5.　周波数応答

【5.1 周波数応答とは】



$$F = \frac{X_0}{X_i}\cos\phi + j\frac{X_0}{X_i}\sin\phi$$

$$= \frac{X_0}{X_i}e^{j\phi}$$

F　:　　周波数応答と呼ぶ

【例題】　微分要素の周波数応答

$$x_0(t) = \frac{d}{dt}(X_i \sin \omega t) = \omega X_i \sin(\omega t + 90°)$$

振幅比　・・・ $\dfrac{\omega X_i}{X_i} = \omega$

位相差　・・・ $90° = j$

$$F = j\omega$$

5.3.1 ベクトル軌跡

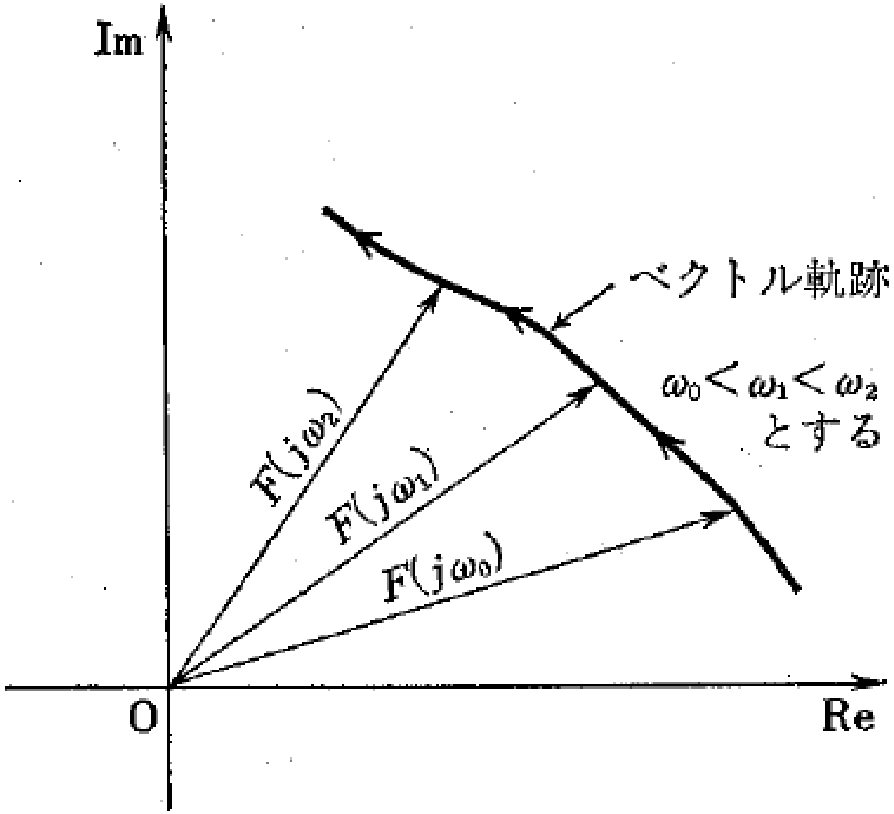


図 5.7 ベクトル軌跡

【5.2 伝達関数F(s)を持つ系の周波数応答】

$$x_0(t) = \int_0^t f(t-\tau) A e^{j\omega\tau} d\tau = \int_0^t f(t) A e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$t \to \infty$ を考える

$$x_0(t) \to X_{0s}(t)$$

$$x_{0s} = \int_0^\infty f(\tau) A e^{j\omega(t-t)} d\tau$$

$$= A e^{j\omega t} \int_0^\infty f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$F(j\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt$$ とする←フーリエ変換

$$x_{0s} = A e^{j\omega t} \times F(j\omega)$$

インパルス応答$f(t)$を持つ要素に$x_i(t)$が追加されたとき
出力信号$x_0(t)$は

$$x_0(t) = \int_0^t f(\tau) x_i(t-\tau) d\tau$$

$$\int_0^\infty e^{-j\omega t} x_0(t) dt = \int_0^\infty e^{-j\omega t} dt \int_0^t f(\tau) x_i(t-\tau) d\tau$$

$$X_0(j\omega) = \int_0^\infty dt \int_0^t e^{-j\omega t} f(\tau) x_i(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty e^{-j\omega t} f(\tau) x_i(t-\tau) dt$$

$e^{-j\omega t} = e^{-j\omega(\tau+t-\tau)} = e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega(t-\tau)}$ とおくと

$$= \int_0^\infty e^{-j\omega\tau} f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-j\omega(t-\tau)} x_i(t-\tau) dt$$

$t-\tau=\sigma$ とおくと

$$= \int_0^\infty f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_0^\infty e^{-j\omega\sigma} x_i(\sigma) d\sigma$$

$$= F(j\omega) \times X_i(j\omega)$$

周波数応答　と呼ぶ

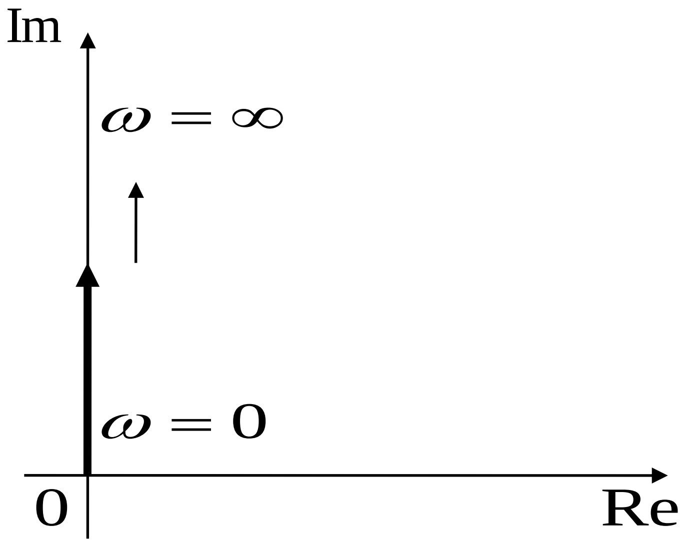
周波数応答$F(j\omega)$において，ωを$0\rightarrow\infty$まで変化させていったとき，$F(j\omega)$の変化の様子を表現する方法に

ベクトル軌跡　と　ボード線図　がある。

1）ベクトル軌跡

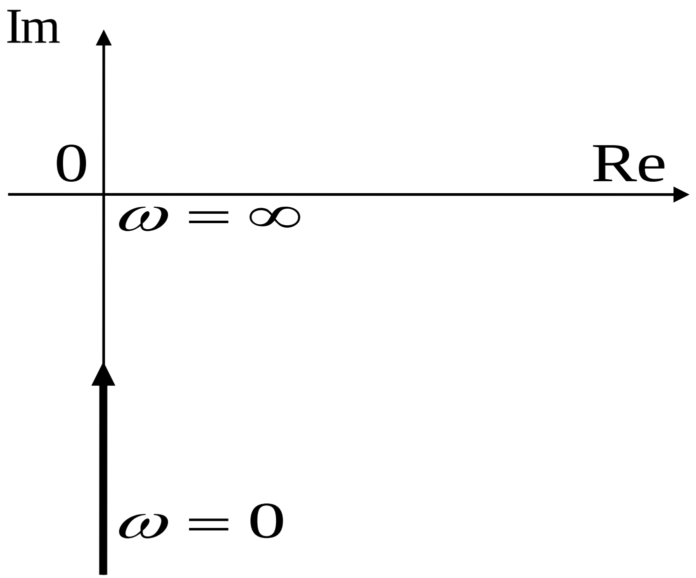
ｉ）微分要素

$$F(j\omega)=j\omega$$



ⅱ）積分要素

$$F(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=\frac{-j}{\omega}$$



iii）1次遅れ要素

$$F(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}=\frac{K}{1+\omega^2T^2}(1-j\omega T)$$

大きさ　$|F(j\omega)|=\sqrt{\frac{K^2}{(0+\omega^2T^2)^2}+\frac{\omega^2T^2K^2}{(1+\omega^2T^2)^2}}$

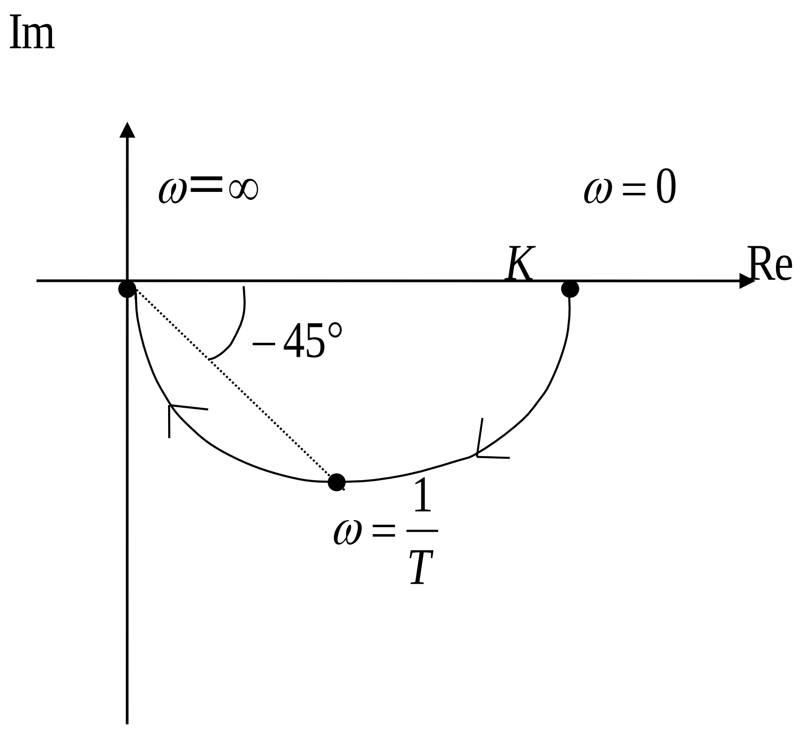
$$=\sqrt{\frac{K^2(1+\omega^2T^2)}{(1+\omega^2T^2)^2}}$$

$$=\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

位相角 $\angle F(j\omega)$

$$\tan\theta=\frac{\text{虚軸}}{\text{実軸}}=\frac{-\omega T}{1}=+\omega T$$　より

$$\angle F(j\omega)=-\tan^{-1}\omega T$$

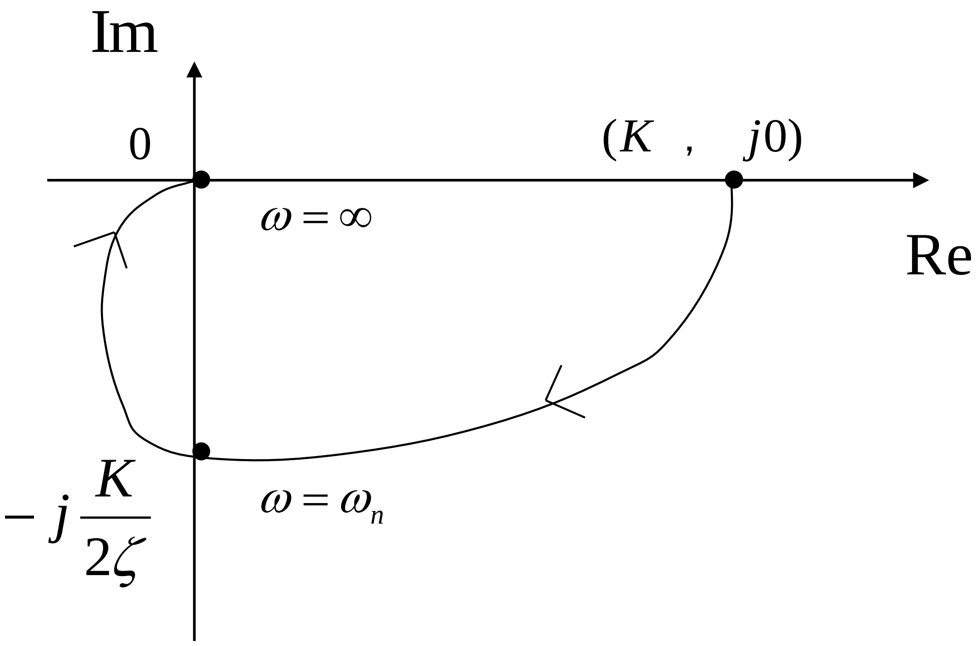


ⅳ）2次遅れ要素

$$F(j\omega)=\frac{K}{1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}$$

$$=\frac{K}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}$$

$$=\frac{K\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\zeta^2\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$



位相

$$\tan\theta=\frac{s\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$=\frac{2\zeta\dfrac{1}{\omega_n}}{\dfrac{1}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega_n^2}}$$

むだ時間要素

$$F(j\omega)=e^{-j\omega L}$$
$$=\cos\omega L-j\sin\omega L$$

したがってベクトルは

$$\left.\begin{aligned}|F(j\omega)|&=1\\ \angle F(j\omega)&=-\omega L\\ &\quad\text{[rad]}\end{aligned}\right\}\tag{5.22}$$

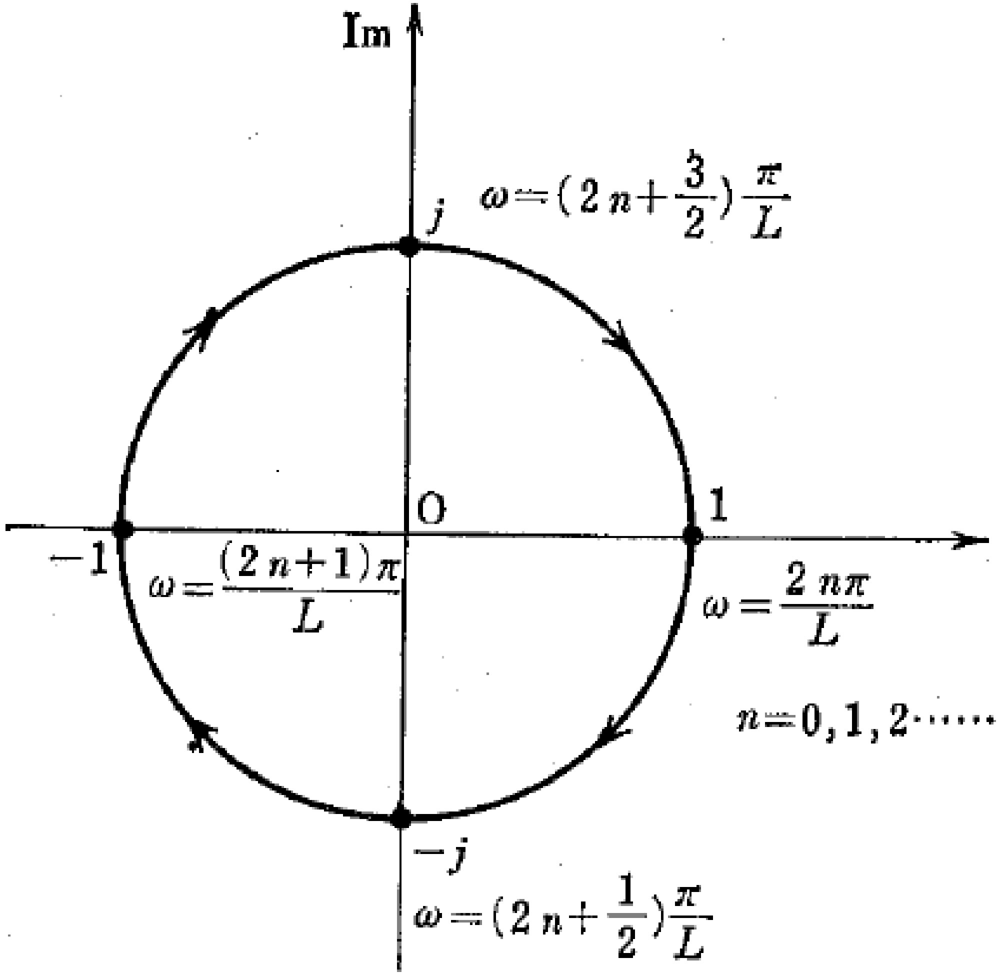
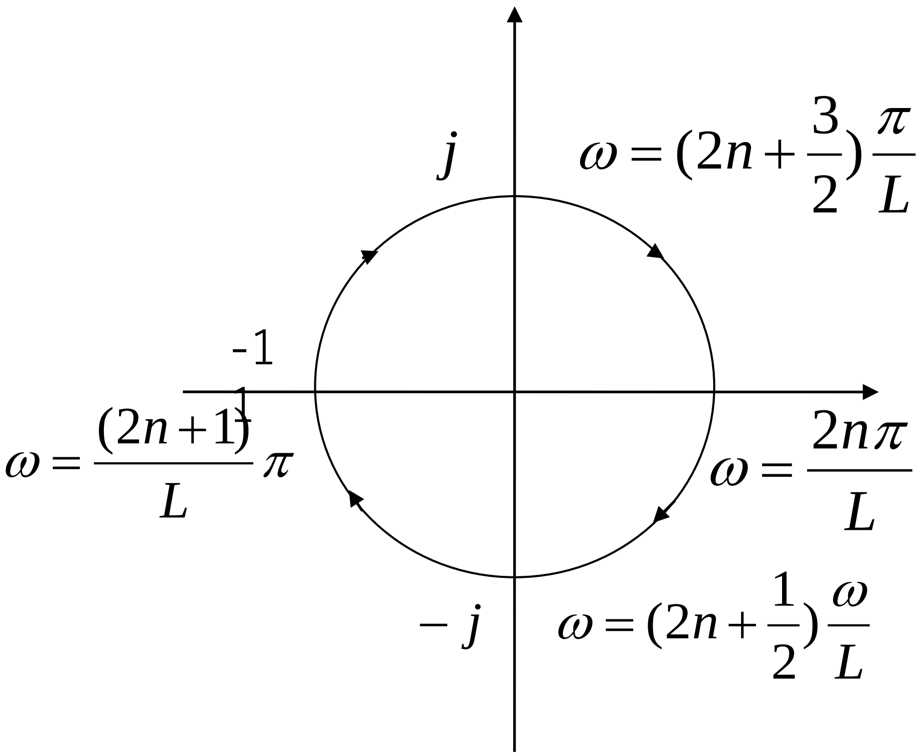


図 5.12 むだ時間要素のベクトル軌跡

ｖ）むだ時間要素

$$F(j\omega) = e^{-j\omega L}$$
$$= \cos\omega L - j\sin\omega L$$
$$|F(j\omega)| = \cos^2\omega L + \sin^2 L = 1$$
$$\angle F(j\omega) = -\omega L$$

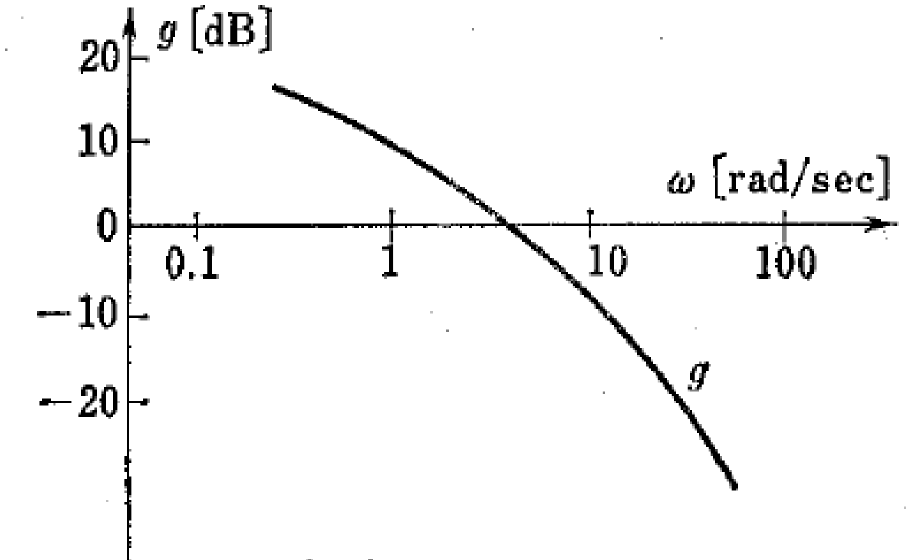
$$\tan\theta = \frac{-\sin\omega L}{\cos\omega L}$$
$$= \tan -\omega L$$



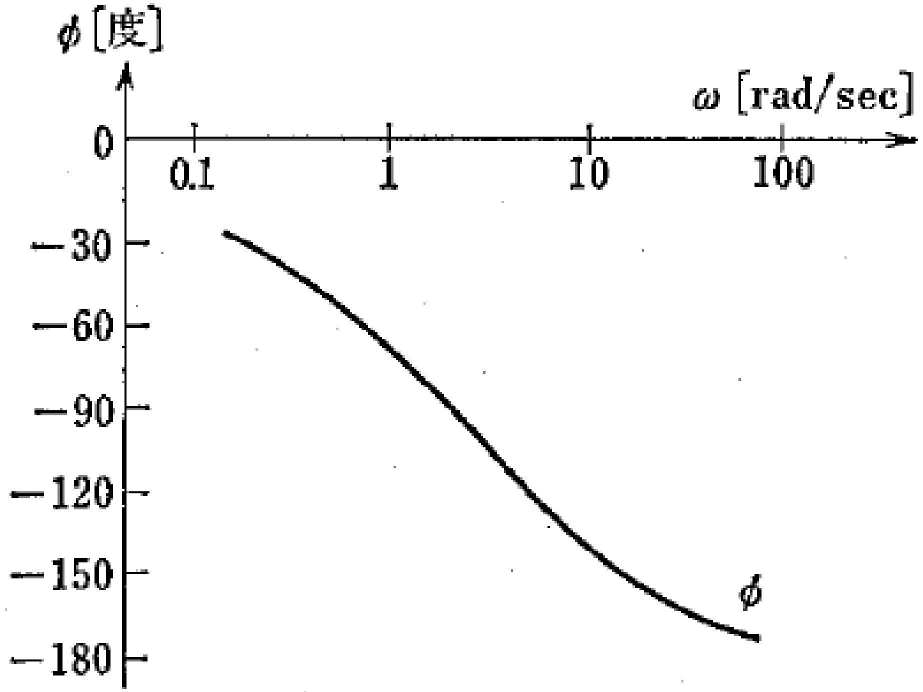
5.3.2 ボード線図

$$g = 20 \log_{10} |F(j\omega)| \quad \text{[dB]}$$

$$\phi = \underline{/F(j\omega)}$$



（a） ゲイン特性曲線



（b） 位相特性曲線

2） ボード線図

ゲイン特性曲線

$$g = 20\log_{10}|F(j\omega)| \qquad [db]$$

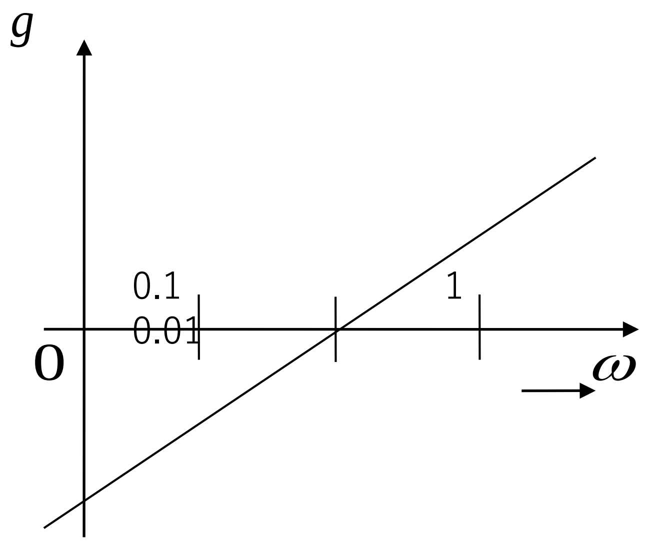
位相特性曲線

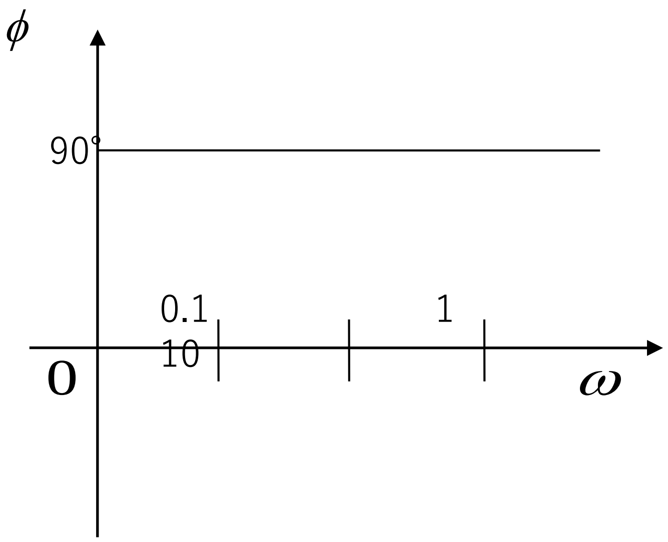
$$\phi = \angle F(j\omega)$$

i ）微分要素

$$g = 20\log|j\omega| = 20\log\omega$$

$$\phi = 90°$$





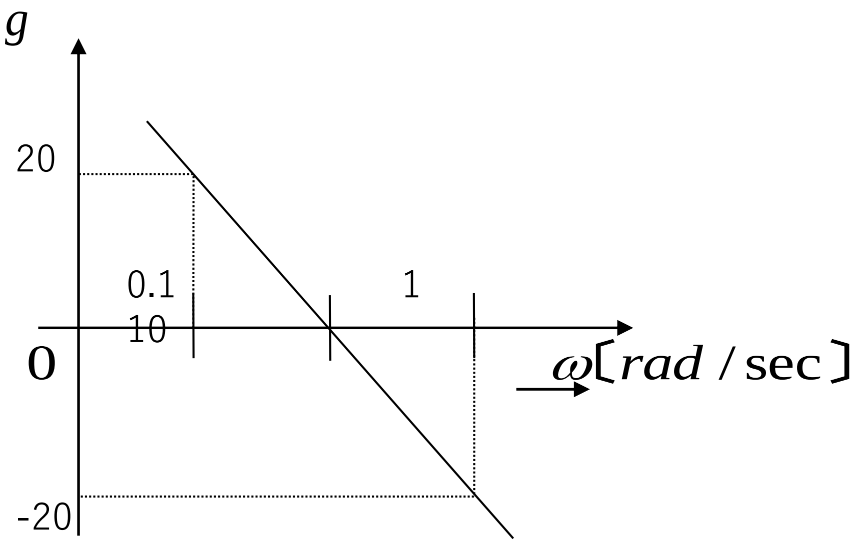
ωが10倍増加すると,20〔db〕ずつ増加する
（decode)

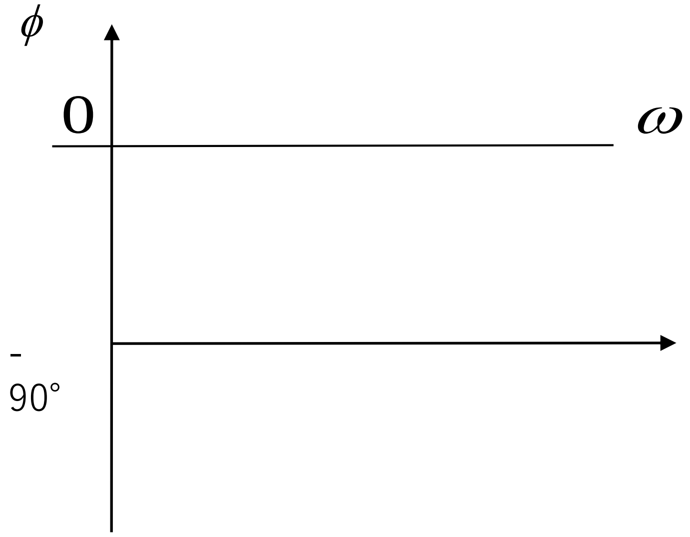
ゲイン特性曲線の傾き
→20〔db/decode〕と呼ぶ

ii）積分要素

$$g = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = 20og\left|-\frac{j}{\omega}\right| = -20\log\omega$$

$$\phi = -90^\circ$$





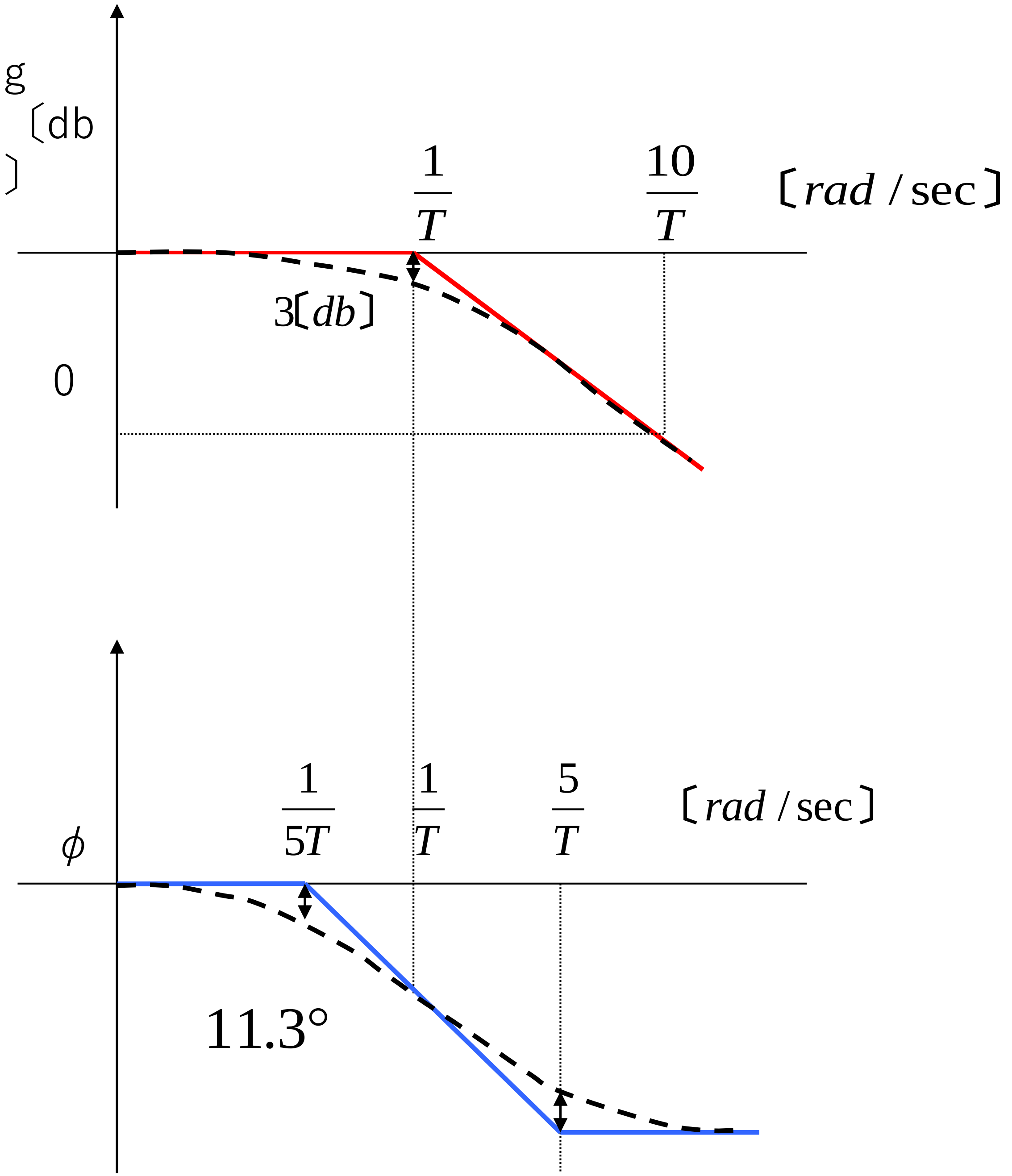
iii）1次遅れ要素

$$g = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2}$$

$\omega T < 1$ のとき $\quad g \fallingdotseq -20\log\sqrt{1} \quad \simeq \ 0$

$\omega T > 1$ のとき $\quad g \fallingdotseq -20\log\sqrt{\omega^2 T^2}$

$$= -20\log T - 20\log\omega$$



$\frac{1}{T}$: 折点角周波数

その時のゲイン　$g = -20\log\sqrt{1+\left(\frac{1}{T}T\right)^2}$

$$= -20\log\sqrt{2}$$

$$= -10\log 2$$

$$= -10 \times 0.301 \quad \text{〔}db\text{〕}$$

その時の位相　$\phi = -\tan^{-1}\frac{1}{T}T$

$$= -\tan^{-1}1 = -45^\circ$$

$\frac{10}{T}$のゲイン　$g = -20\log\sqrt{1+10^2} = -10\log\sqrt{101} = -20.04 \quad \text{〔}db\text{〕}$

$\frac{1}{5T}$の位相　$\phi = -\tan^{-1}\frac{1}{5} = -11.3^\circ$

$\frac{5}{T}$の位相　$\phi = -\tan^{-1}5 = -78.7^\circ$

$$g = -20\log\sqrt{1+(0.5\,\omega)^2} = -10\log\{1+(0.5\,\omega)^2\}$$

$$\phi = -\tan^{-1}0.5\,\omega$$

表 5.1　$1/(1+j\,0.5\,\omega)$ の周波数特性

ω	g	ϕ
0.2	− 0.04	− 5.7
0.4	− 0.17	−11.3
0.6	− 0.37	−16.7
0.8	− 0.64	−21.8
1.0	− 0.97	−26.5
1.5	− 1.94	−36.9
2.0	− 3.01	−45.0
3.0	− 5.12	−56.3
5.0	− 8.60	−68.2
7.0	−11.22	−74.1
10.0	−14.15	−78.7
15.0	−17.58	−82.4
20.0	−20.04	−84.3

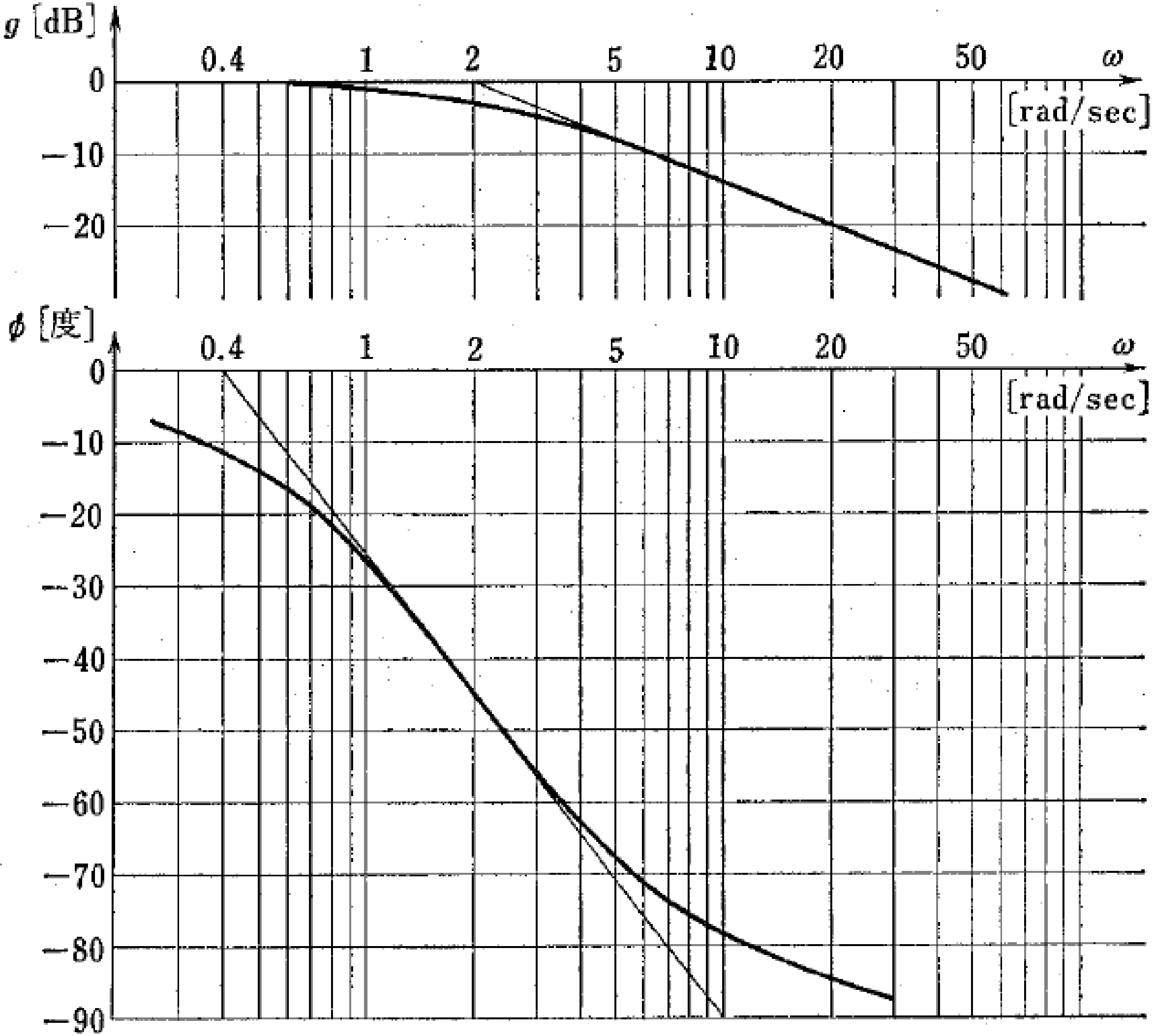


図 5.17　$1/(1+j0.5\omega)$ のボード線図

iv）2次遅れ要素

$K=1$のとき

$$F(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta(\frac{j\omega}{\omega_n})+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$$

$$=\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}-j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$=\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}-j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1+\frac{\omega^4}{\omega_n^4}+2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}(2\zeta^2-1)}$$

$\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$　のとき

$$F(j\omega)=\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}-j\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_n}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

ゲイン

$$|F(j\omega)|=\sqrt{\frac{(1-\frac{\omega}{\omega_n^2})^2+(\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+(\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+2\frac{\omega}{\omega_n^2}}{(1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

ゲイン

$$\frac{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}}{1+\frac{\omega^4}{\omega_n^4}+2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}(2\zeta^2-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{1+(\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2-2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}(1-2\zeta^2)}}{1+(\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2-2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}(1-2\zeta^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2-2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}(1-2\zeta^2)}}$$

$\alpha=2(1-2\zeta^2)$ とおく

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2-\alpha\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}0$$

$$q=1+\frac{\omega^4}{\omega_n^4}-\alpha\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

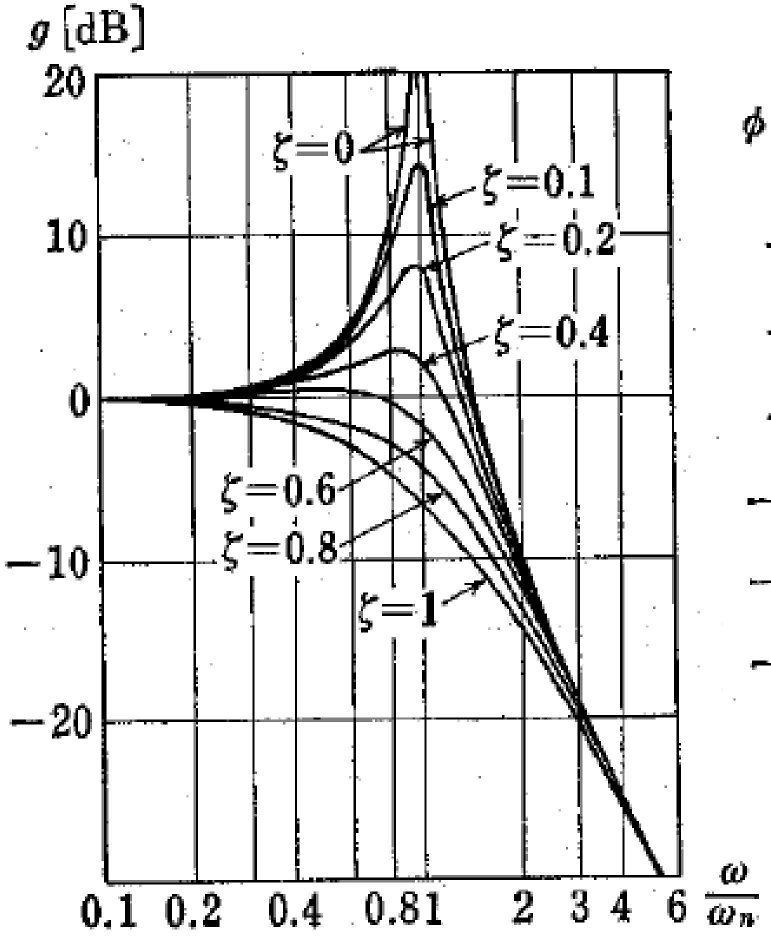
$$q'=\frac{4\omega^3}{\omega_n^4}-2\alpha\frac{\omega}{\omega_n^2}=\frac{2\omega}{\omega_n^2}(\frac{2\omega^2}{\omega_n^2}-\alpha)$$

$\omega=\pm\omega_n\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ で極値 ー はないので

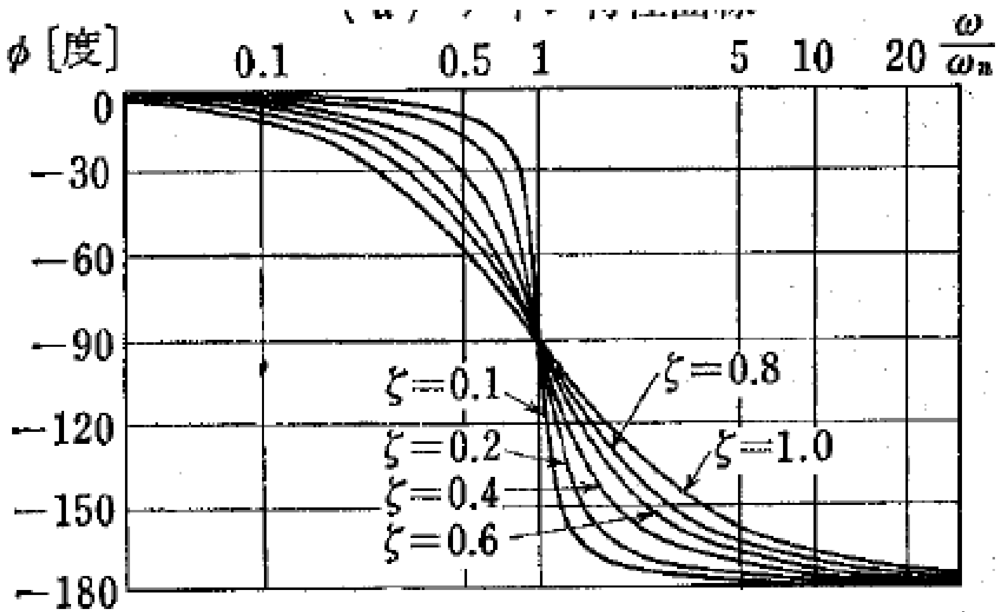
$\omega=\omega_n\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ ただし $\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}$

2次遅れ要素

$$F(j\omega)=1/\{(1-(\omega/\omega_n)^2+j\,2\,\zeta\omega/\omega_n\}$$



(a) ゲイン特性曲線



(b) 位相特性曲線

図 5.18 2次遅れ要素のボード線図

ｖ）むだ時間要素

$$F(j\omega) = e^{-j\omega L}$$

$$|F(j\omega)| = 1 \qquad \angle F(j\omega) = -\omega L$$

ゲイン　$g = 0$　〔db〕

$\phi = -\omega L \times 180/\pi$　〔度〕

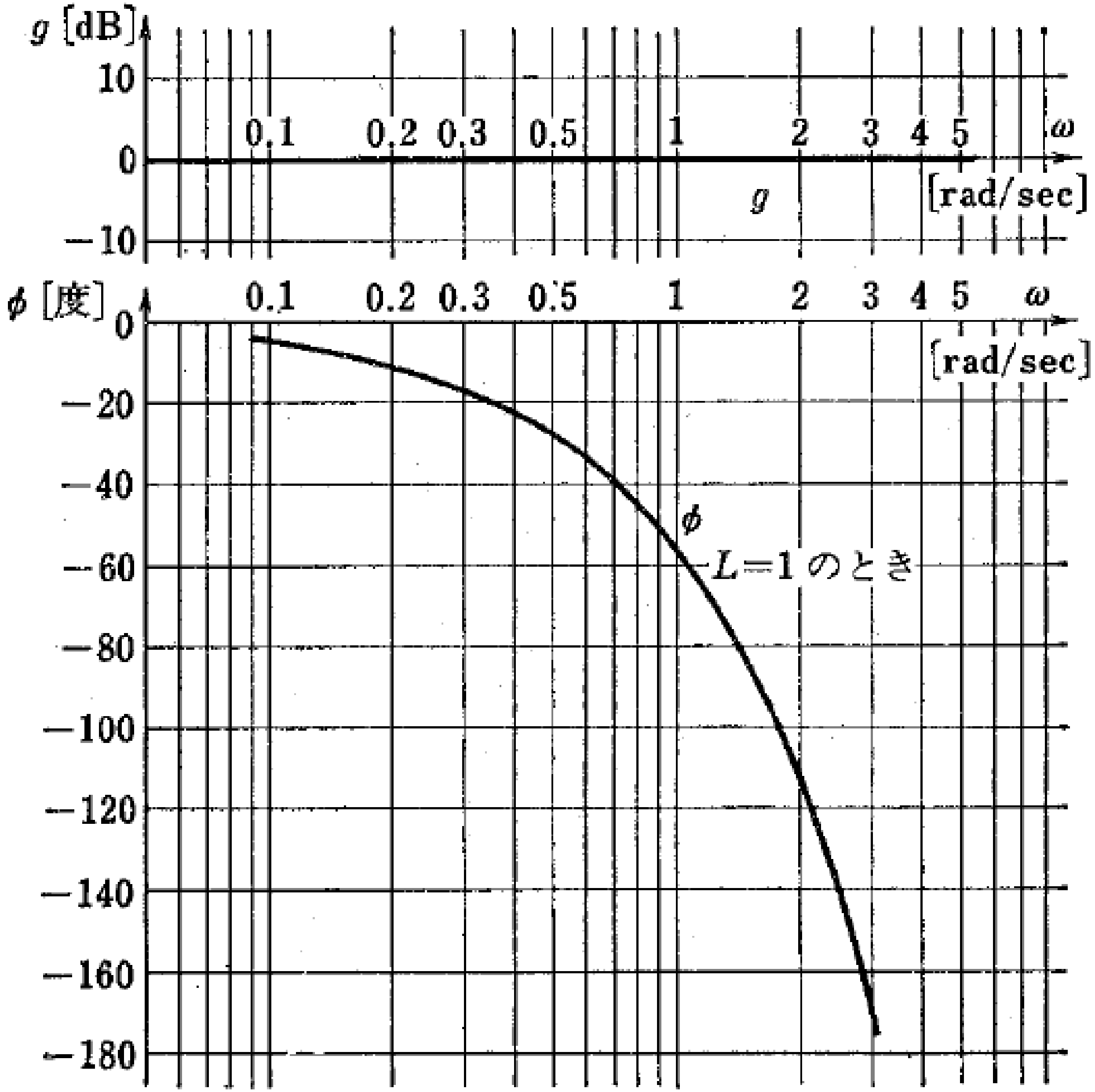


図 5.20　むだ時間要素のボード線図

vi）複雑な伝達関数のボード線図

$$F(s) = F_1(s) \times F_2(s) \times F_3(s) \times \cdots$$

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) \times F_2(j\omega) \times F_3(j\omega) \times \cdots$$

$$\begin{aligned} g &= 20\log\left|F_1(j\omega) \times F_2(j\omega) \times F_3(j\omega) \times \cdots\right| \\ &= 20\log\left|F_1(j\omega)\right| + 20\log\left|F_2(j\omega)\right| + 20\log\left|F_3(j\omega)\right| \cdots \end{aligned}$$

各ゲイン特性曲線の和として与えられる。

$$\begin{aligned} \phi &= \angle F_1(j\omega) \times \angle F_2(j\omega) \times \angle F_3(j\omega) \times \cdots \\ &= \angle F_1(j\omega) + \angle F_2(j\omega) + \angle F_3(j\omega) + \cdots \end{aligned}$$

各位相特性曲線の和として与えられる。

例題5.4

$$\frac{\sqrt{10}(1+10s)}{1+2s}=\sqrt{10}\times(1+10s)\times\frac{1}{1+2s}$$

$$20\log\sqrt{10}=10\log 10=10 \quad 〔db〕$$

①

直流利得(オフセット)

② $1+10s$:

$$\frac{1}{T}=0.1 \quad , \quad \frac{10}{T}=1$$

$$\frac{1}{5T}=0.02 \quad , \quad \frac{5}{T}=0.5$$

③ $\dfrac{1}{1+2s}$:

$$\frac{1}{T}=0.5 \quad , \quad \frac{10}{T}=5$$

$$\frac{1}{5T}=0.1 \quad , \quad \frac{5}{T}=2.5$$

【例題 5.4】

$$\frac{\sqrt{10}\,(1+10s)}{(1+2s)} \qquad \sqrt{10}\times(1+10s)\times\frac{1}{1+2s}$$

①　②　③

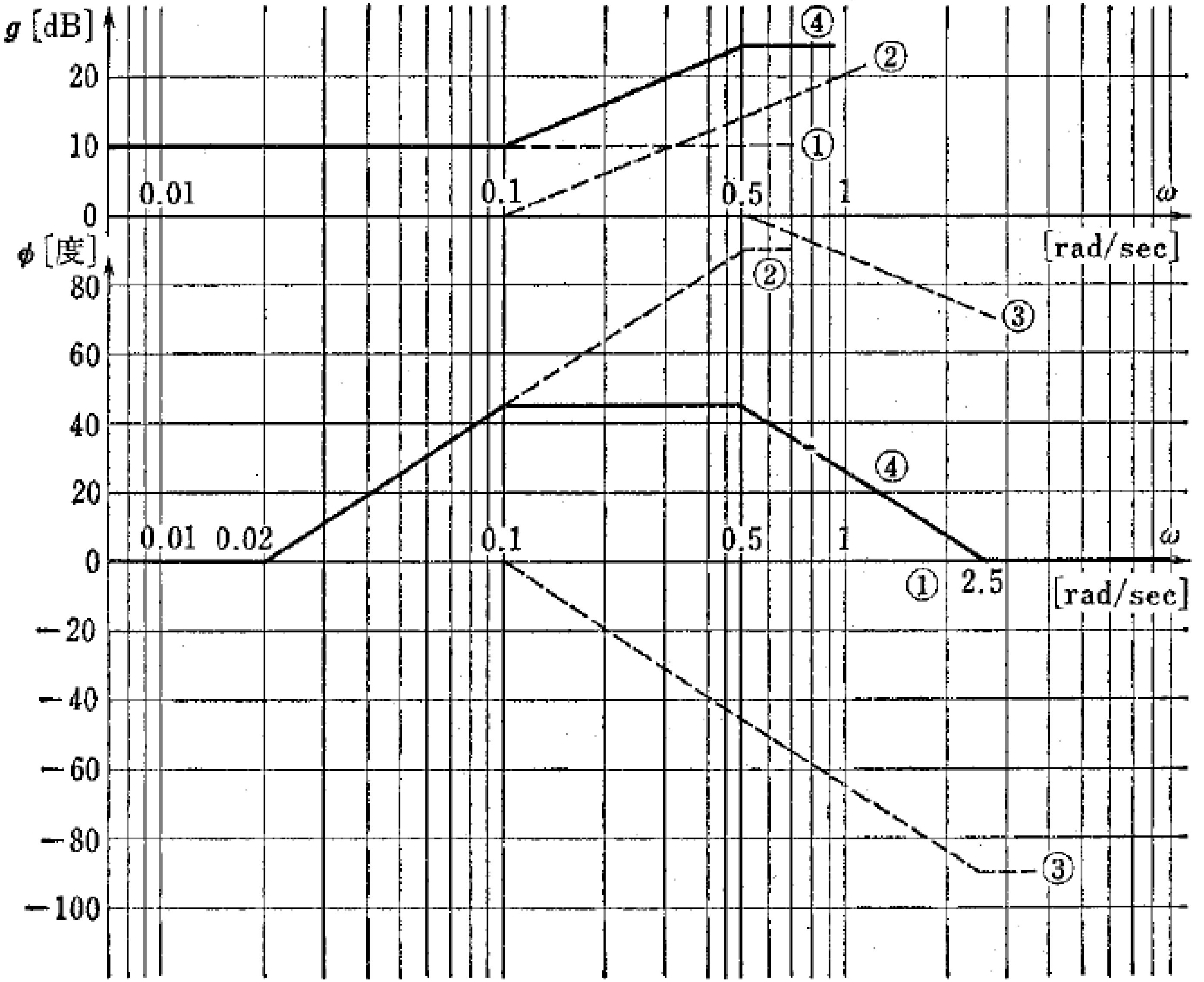


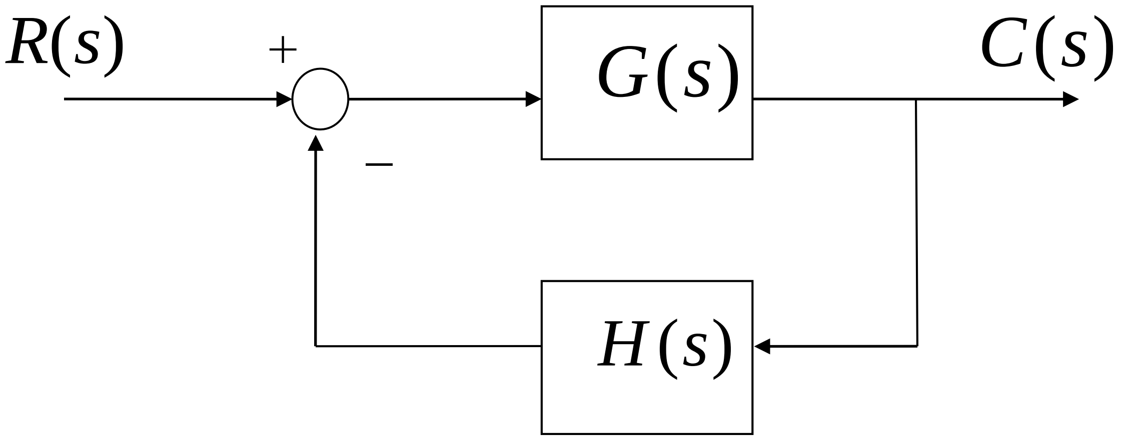
図 5.22 〔例題 5.4〕のボード線図

6章　フィードバック制御系の安定性と過渡特性

フィードバック制御系において、フィードバックループを切り離した時　→　開ループ系

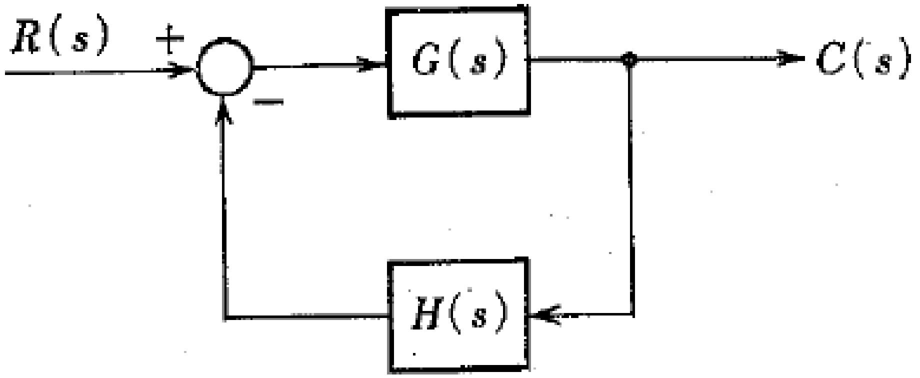
フィードバックループを閉じたとき　→　閉ループ系

開ループ系が安定であっても、閉ループ系が安定とは限らない

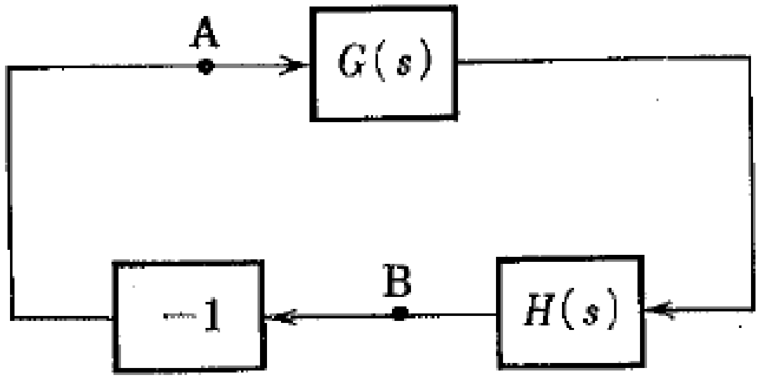


$G(s)H(s)$:一巡伝達関数

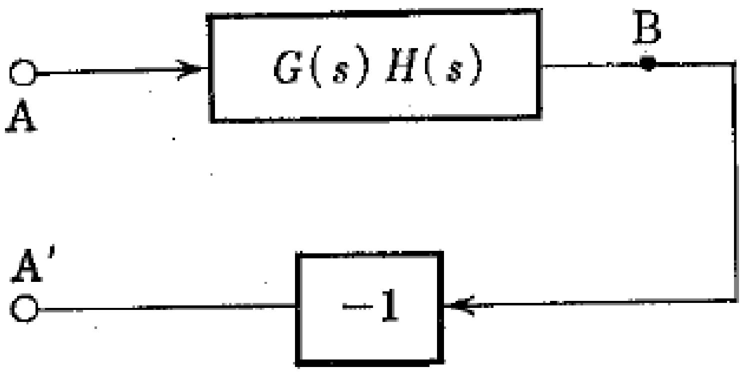
$G(j\omega)H(j\omega)$:一巡周波数応答



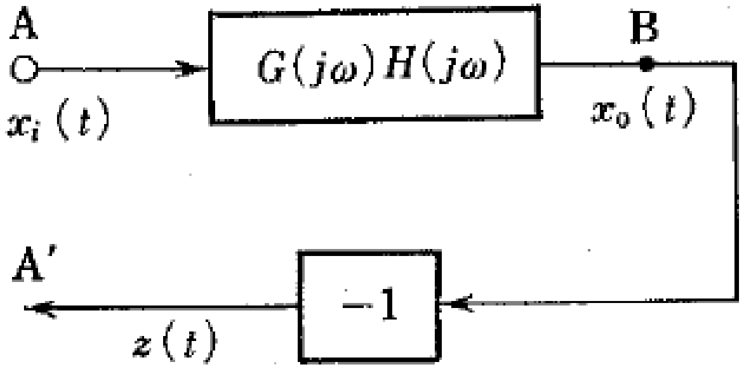
(a)



(b)



(c)



(d)

て図（d）のブロック線図によって求めることができる．とくに，一巡伝達関数 $G(s)H(s)$ の周波数応答 $G(j\omega)H(j\omega)$ のことを**一巡周波数応答**と呼んでい

以上のことを前提にして，一巡周波数応答のベクトル軌跡 $G(j\omega)H(j\omega)$ が図 6.3 の曲線①のように $\omega=\omega_0$ で実軸上 $(-1, j0)$ の左側の点，すなわち $k>1$ としたとき $(-k,\ j0)$ の点を通過する場合を考える．このとき図 6.1（d）において A 点の信号を

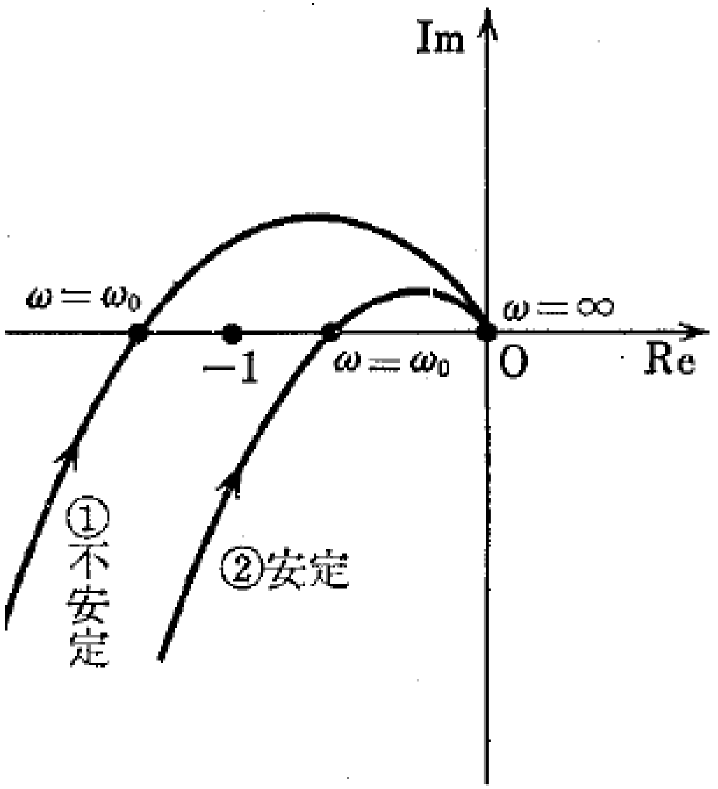
$$x_i(t)=\sin\omega_0 t \quad (6.5)$$

とすると，B 点の信号は

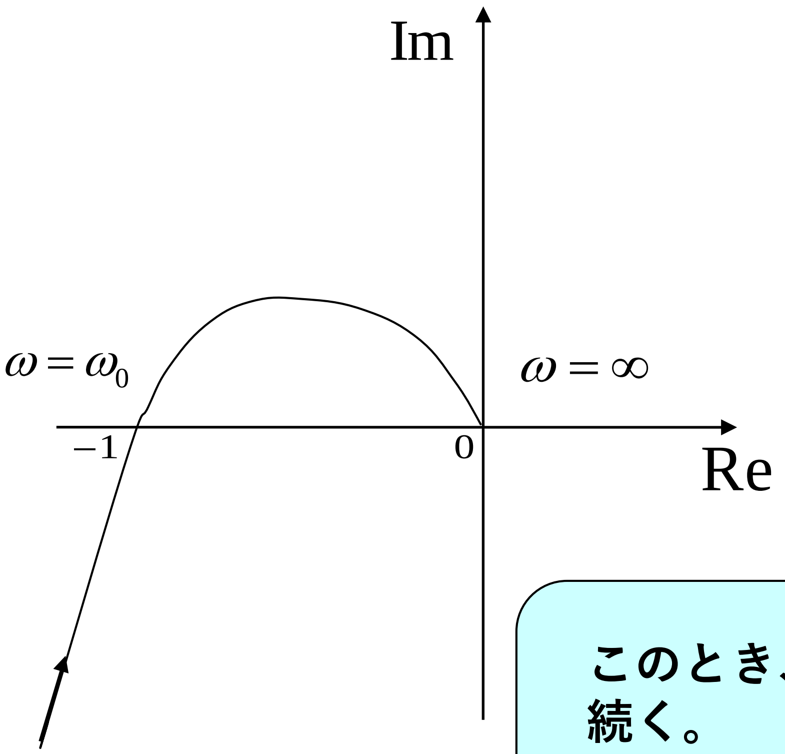
$$x_0(t)=-k\sin\omega_0 t$$

となり，A′ 点の信号 $z(t)$ は

$$z(t)=k\sin\omega_0 t$$



.3　ベクトル軌跡による閉ループ系の安定判別



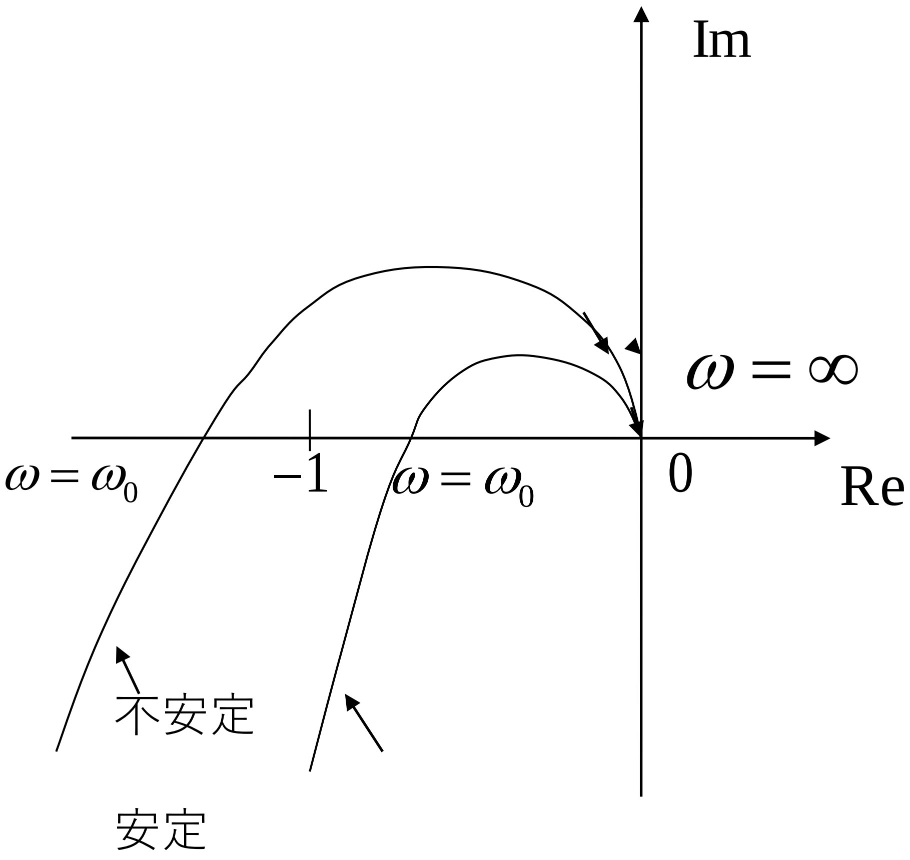
一巡周波数応答

$$G(j\omega_0)H(J\omega_0) = -1 + j0$$

$$\cos(180°) + j\sin(-180°) = e^{-j\pi}$$

振幅比 $=1$　　　　位相差 $=180°$

このとき、外部から信号を与えなくても一定振幅の振動が無限に続く。
安定と不安定の境目　　　　安定ではない。



ナイキストの安定判別 法

1）一巡周波数応答$G(j\omega)H(j\omega)$を求める

2）$G(j\omega)H(j\omega)$のベクトル軌跡を求める

3)（$-1, j0$)の右側を通過 $\rightarrow$ 安定な制御系

左側を通過 $\rightarrow$ 不安定な制御系

したがって

1次遅れ要素と2次遅れ要素は

第2象限に入らないので常に安定である。

ナイキストの安定判別法を要約すると，次の順序に従って検討していけばよいことになる．

（1） 与えられたフィードバック制御系において，一巡周波数応答 $G(j\omega)H(j\omega)$ を求める．

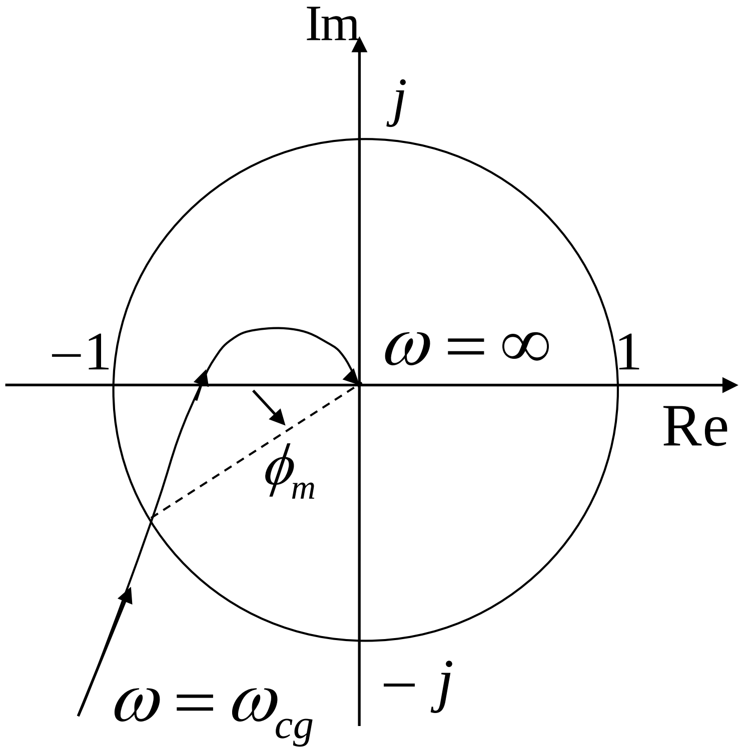
（2） $G(j\omega)H(j\omega)$ を複素平面に描くことによりベクトル軌跡を求める．

（3） ベクトル軌跡が負の実軸を横切るとき $(-1, j0)$ の点の左側を通る場合，与えられたフィードバック制御系は不安定な系である．これに対して $(-1, j0)$ の右側を通る場合，安定な制御系となる．

【6.2　制御系の安定度】

システムがどの程度安定な系であるかを示す。

6.2.1　位相余有



ϕ_m ： 位相余有〔°〕

ω_{cg} ： ゲイン交差角周波数

ϕ_mが大きければ大きいほど安定度が高い。

6.2　制御系の安定度

6.2.1　位　相　余　有

まず，複素平面上において，図 6.9 に示すように，原点を中心に半径 1 の円を描く．次に，この平面上にベクトル軌跡を描き，さきの円との交点をQとする．また点Qにおける角周波数を ω_{cg} とする．ここで，点Qに対し，原点Oから引いたベクトルOQを考え，このベクトルOQの角度を負の実軸より計ったとき，この値を**位相余有**と定義し ϕ_m で表す．さらに点Qでの角周波数 ω_{cg} を**ゲイン交差角周波数**と呼ぶことにする．このとき，一巡

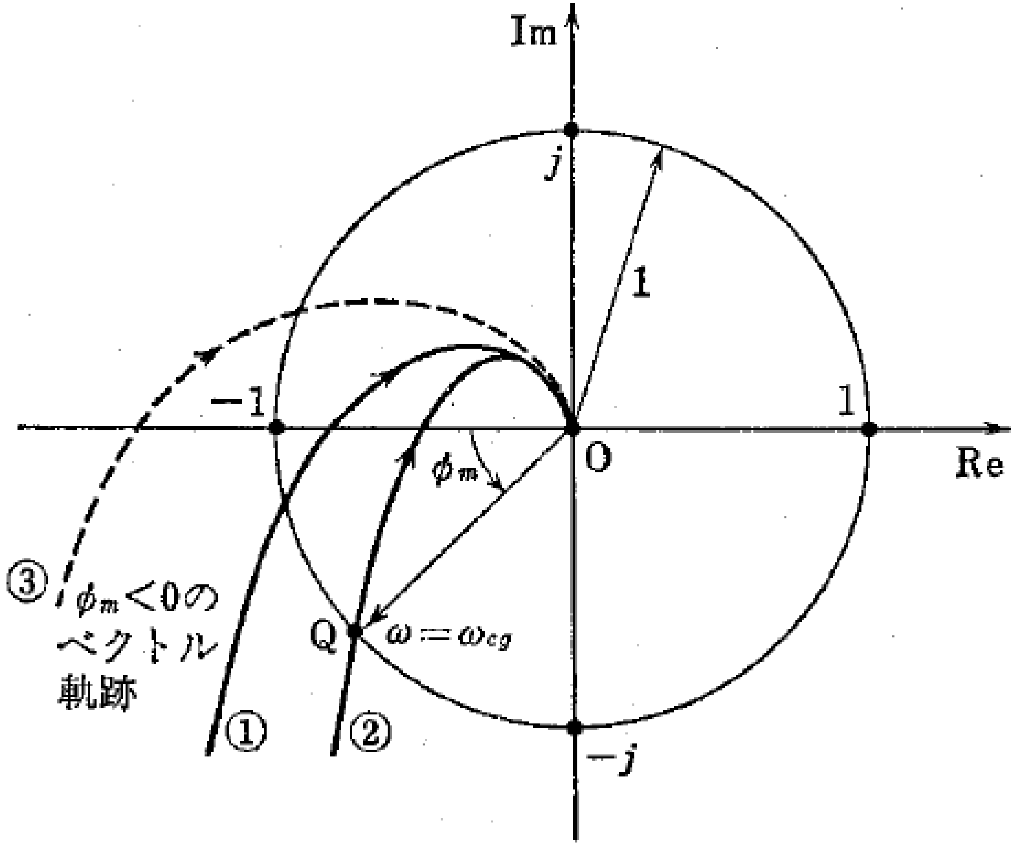


図 6.9　位相余有 ϕ_m の定義

周波数応答のベクトル軌跡は，図 6.9 に示す ①, ② を比較して明らかなように ϕ_m が大きければ大きい程，原点に近い位置で負の実軸と交わることになり，安定度の高いフィードバック制御系ということができる．さらに ϕ_m が負の場合，このベクトル軌跡は図 6.9 の ③ の破線で示すように $(-1, j0)$ を右にみて負の実軸と交わることになり，このフィードバック制御系は不安定な系となる．

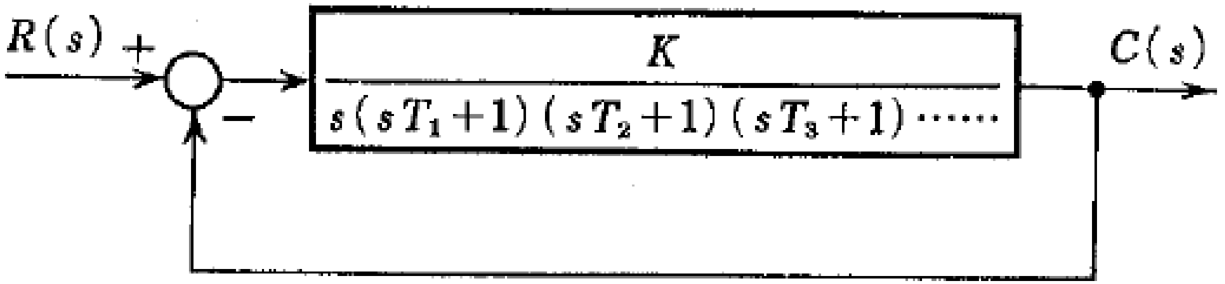


図 6.10　高次の遅れ要素をもつフィードバック制御系

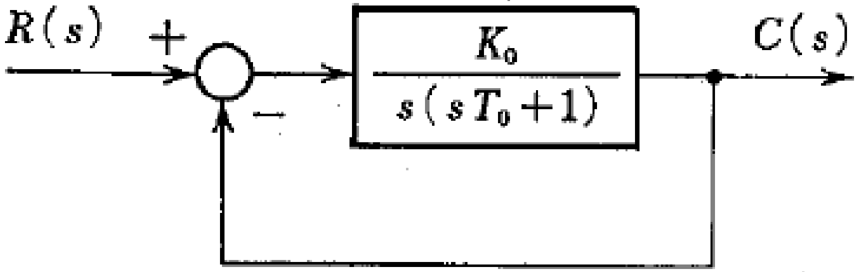
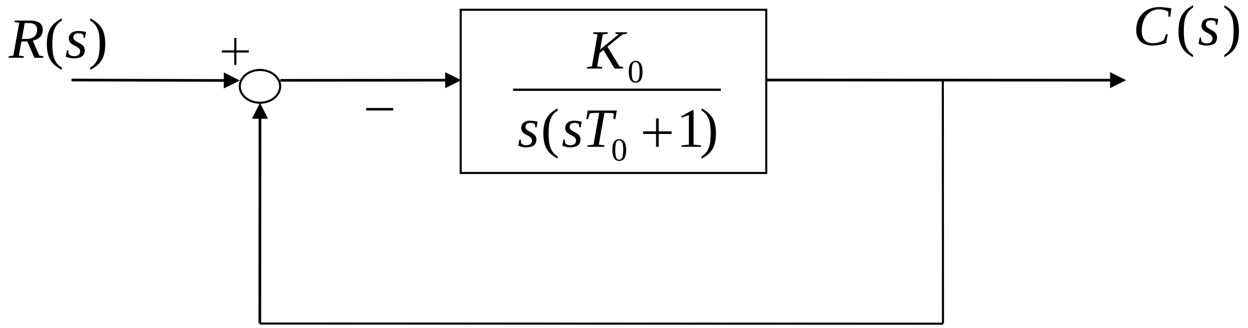


図 6.11　図 6.10 を近似するフィードバック制御系

ϕ_mは2次遅れ系にも存在する。



1巡伝達関数　$\frac{K_0}{T_0 s^2 + s}$

閉ループ伝達関数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_0}{T_0 s^2 + s}}{1 + \frac{K_0}{T_0 s^2 + s}} = \frac{1}{1 + \frac{s}{K_0} + \frac{s^2 T_0}{K_0}}$$

$$K_0 = \omega_n / 2\zeta \quad , \quad T_0 = 1 / 2\omega_n \zeta$$ とすると

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + (\frac{2\zeta}{\omega_n})s + (\frac{s}{\omega_n})^2}$$

$$\phi_m = 90^\circ - \tan^{-1} \sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{4 + \frac{1}{\zeta^4}} - \frac{1}{2}} \qquad (6{,}13)$$

$$\omega_{cg} = \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}\,\omega_n \qquad (6{,}14)$$

3次以上の高次なシステムは，そのϕ_mとω_{cg}から

(6,13)式と(6,14)式から2次系んみ近似することができる。

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_0/s(sT_0+1)}{1+K_0/s(sT_0+1)}=\frac{1}{1+s/K_0+s^2T_0/K_0}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+(2\zeta/\omega_n)s+(s/\omega_n)^2}$$

$$\phi_m=90°-\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{4+1/\zeta^4}-\frac{1}{2}}$$

$$\omega_{cg}=\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}\,\omega_n$$

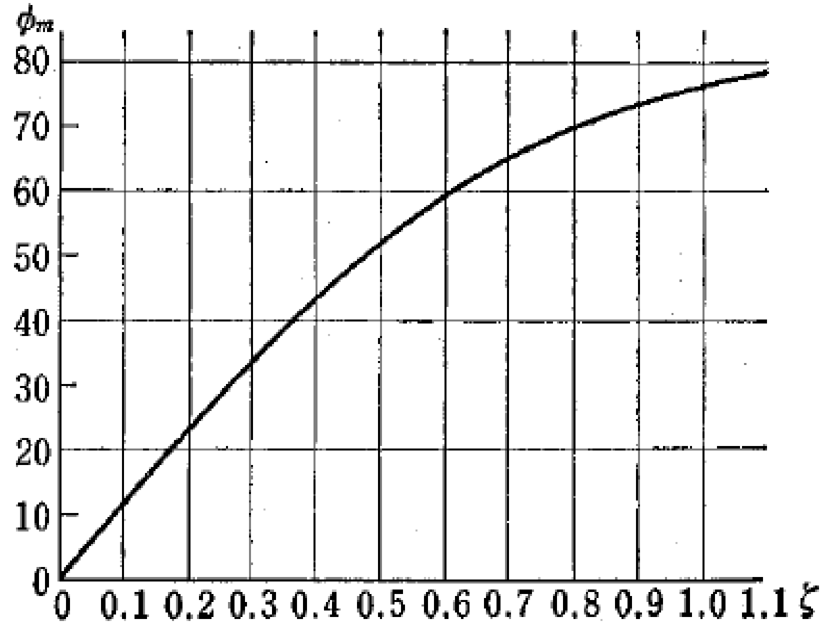


図 6.12 ϕ_m と ζ の関係

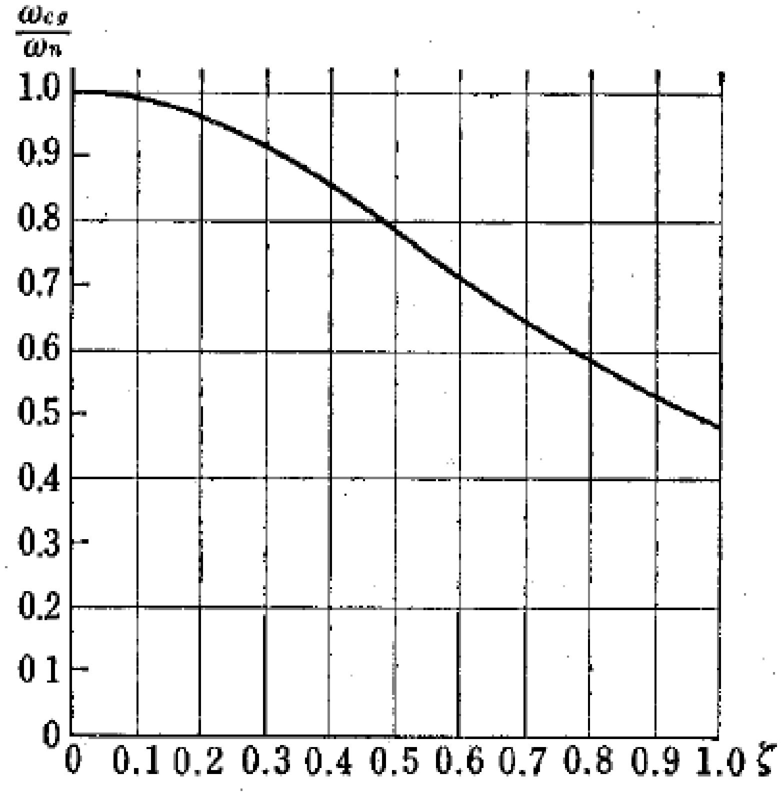


図 6.13 ω_{cg}/ω_n と ζ の関係

【例題 6.2】　図 6.14 で与えられるフィードバック制御系について，過渡特性を求めよ．

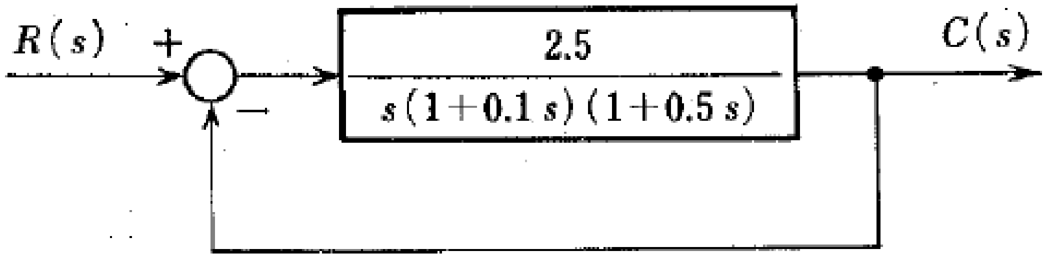


図 6.14 〔例題 6.2〕の制御系

（解） まず一巡周波数応答のベクトル軌跡を描くと，図6.15が得られ，これからこの系の位相余有 ϕ_m とゲイン交差角周波数 ω_{cg} は次のように求められる．

$$\phi_m = 38°$$

$$\omega_{cg} = 1.8 \text{〔rad/sec〕}$$

図6.12より $\phi_m = 38°$ の系は，閉ループ系の応答にした場合 $\zeta = 0.34$ となることがわかり，さらに $\zeta = 0.34$ のとき $\omega_{cg}/\omega_n = 0.9$ となることがわかる．したがって ω_n は

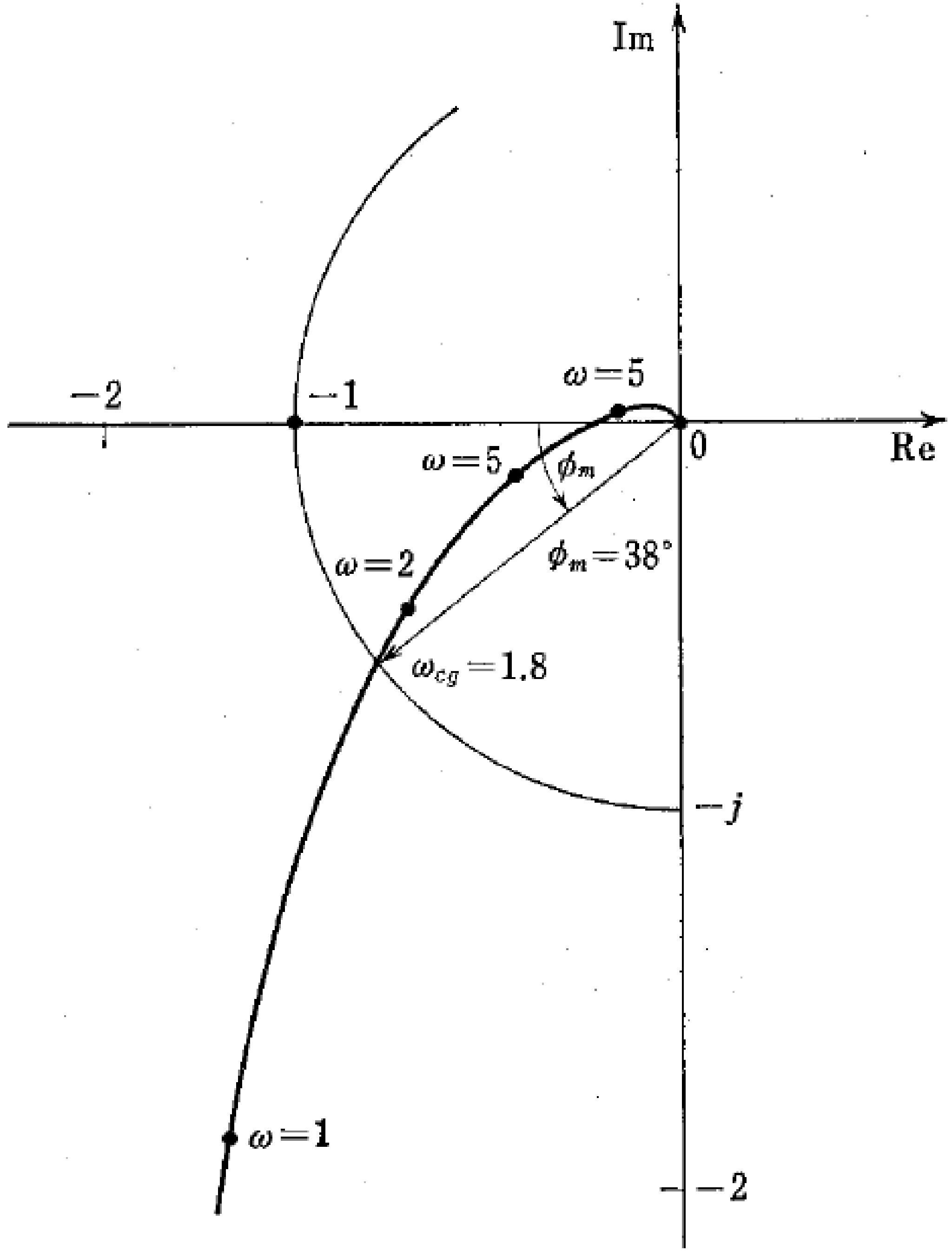
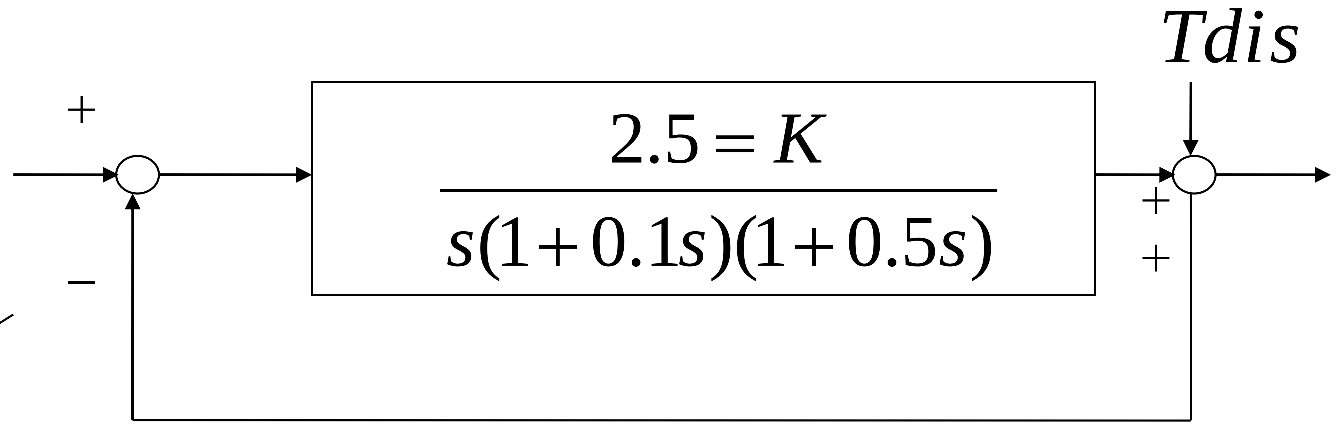


図 6.15　図6.14の系の一巡周波数応答のベクトル軌跡

【例題6.2】



$\phi_m = 38^\circ$, $\omega_{cg} = 1.8\left[{}^{rad}\!/\!_{\sec}\right]$

$\zeta = 0.34 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\omega_{cg}}{\omega_n} = 0.9 \qquad \omega_n = {}^{1.8}\!/\!_{0.9} = 2.0\left[{}^{rad}\!/\!_{\sec}\right]$

$$\frac{\dfrac{K}{s(s+0.1s^2)(1+0.5s)}}{1+\dfrac{K}{s(s+0.1s^2)(1+0.5s)}} = \frac{K}{s(s+0.1s^2)(1+0.5s)+K}$$

$s \to 0$ 利得 $\to \dfrac{K}{K} = 1$

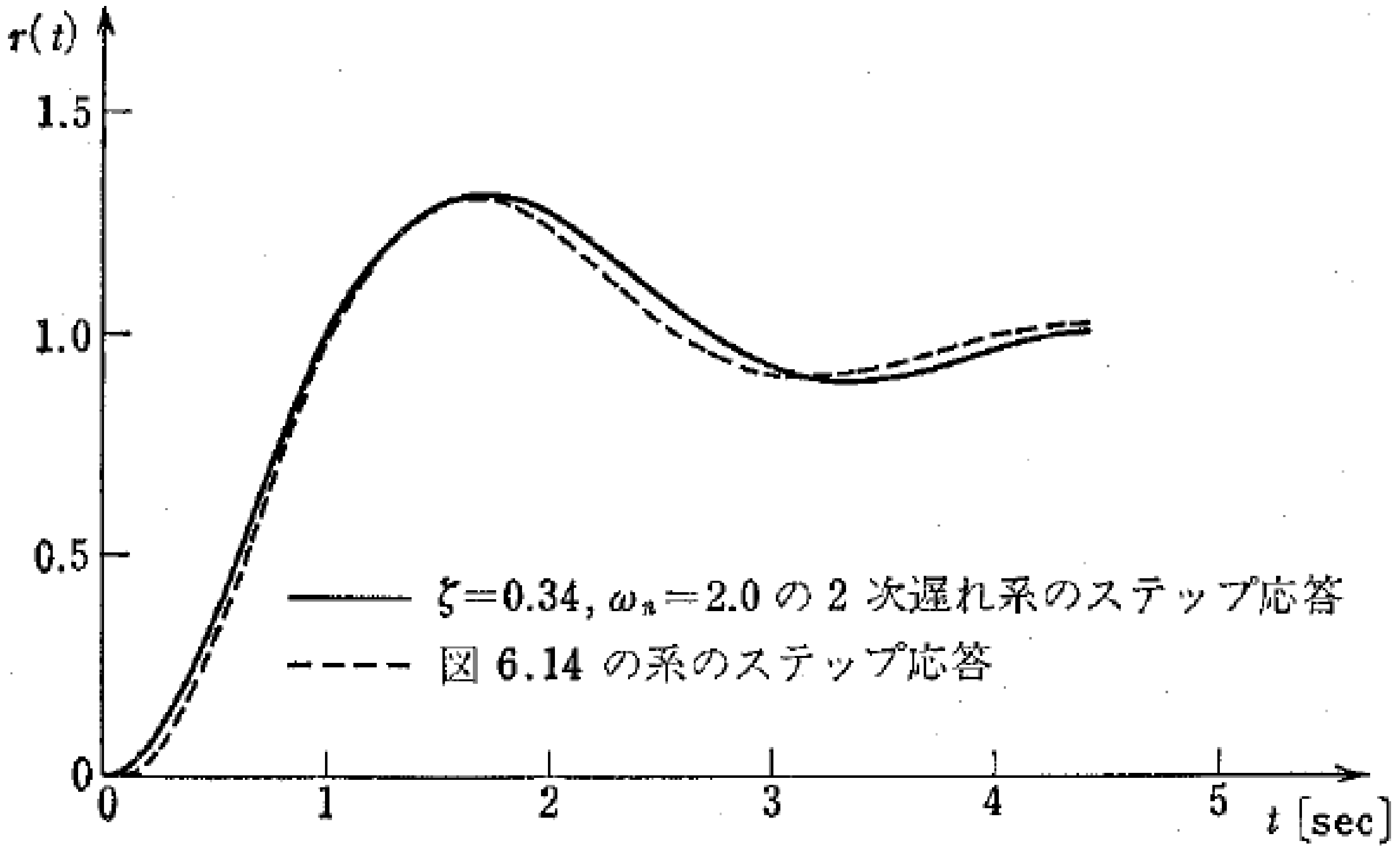
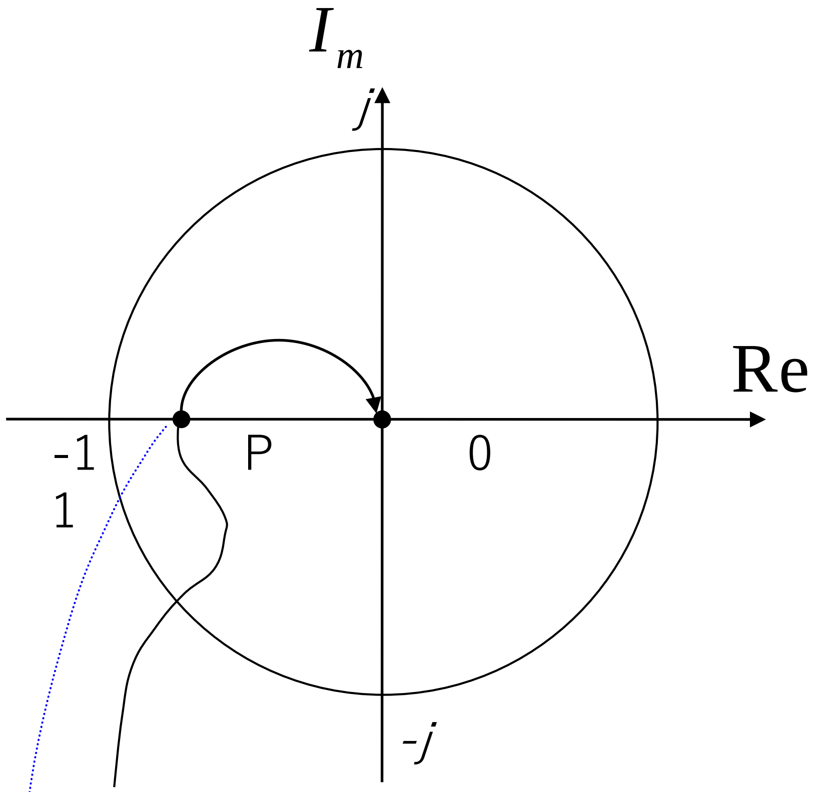


図 6.16　図 6.14 の系のステップ応答

【ゲイン余有】

位相余有だけでは不十分な場合がある。



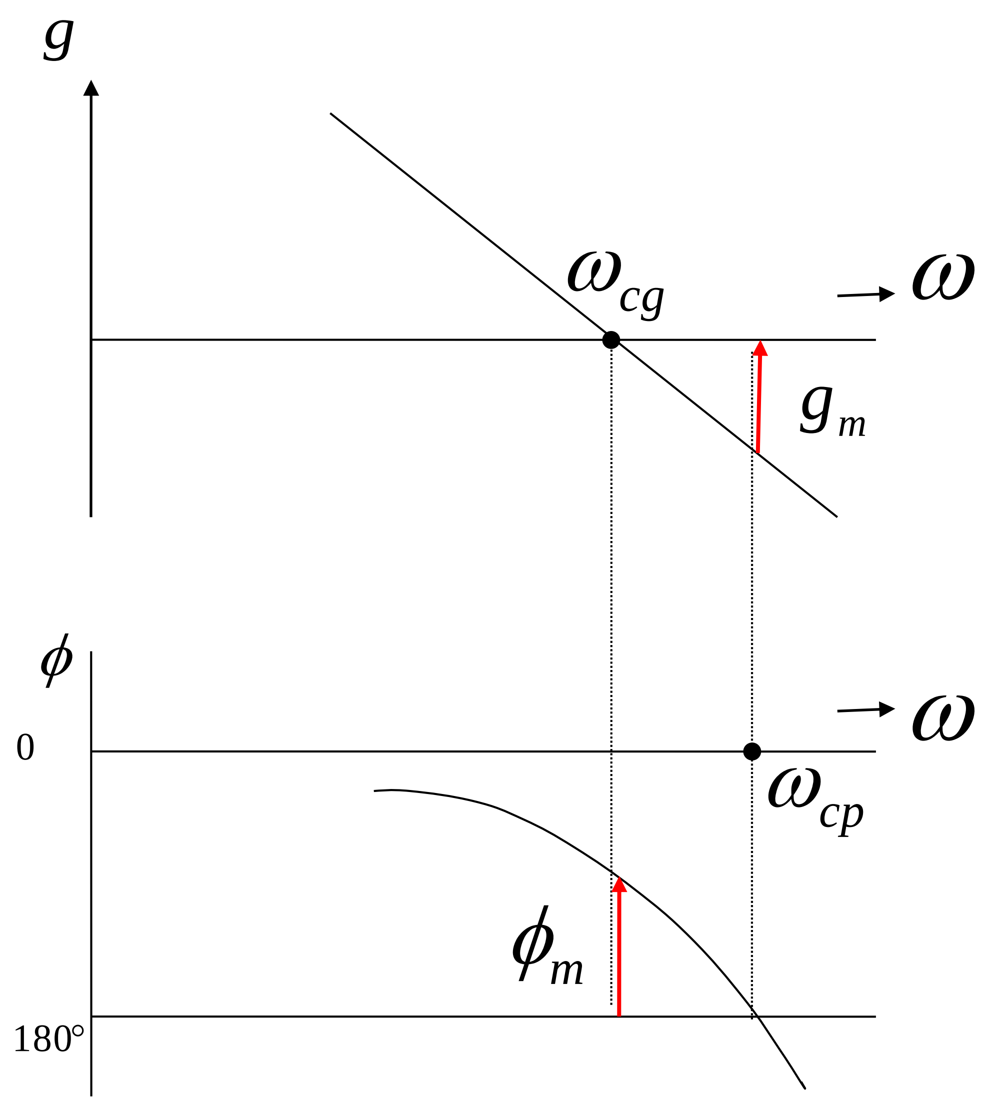
$$g_m = 20\log\frac{1}{OP}$$
$$= -20\log OP$$

$OP < 1$　すなわち　$g_m > 0$　安定

$OP \geq 1$　すなわち　$g_m \leq 0$　不安定

$\omega = \omega_{cp}$　：　位相交差角周波数

ボード線図



g
ω_{cg}
$\rightarrow \omega$
g_m
ϕ
$\rightarrow \omega$
0
ω_{cp}
ϕ_m
180°

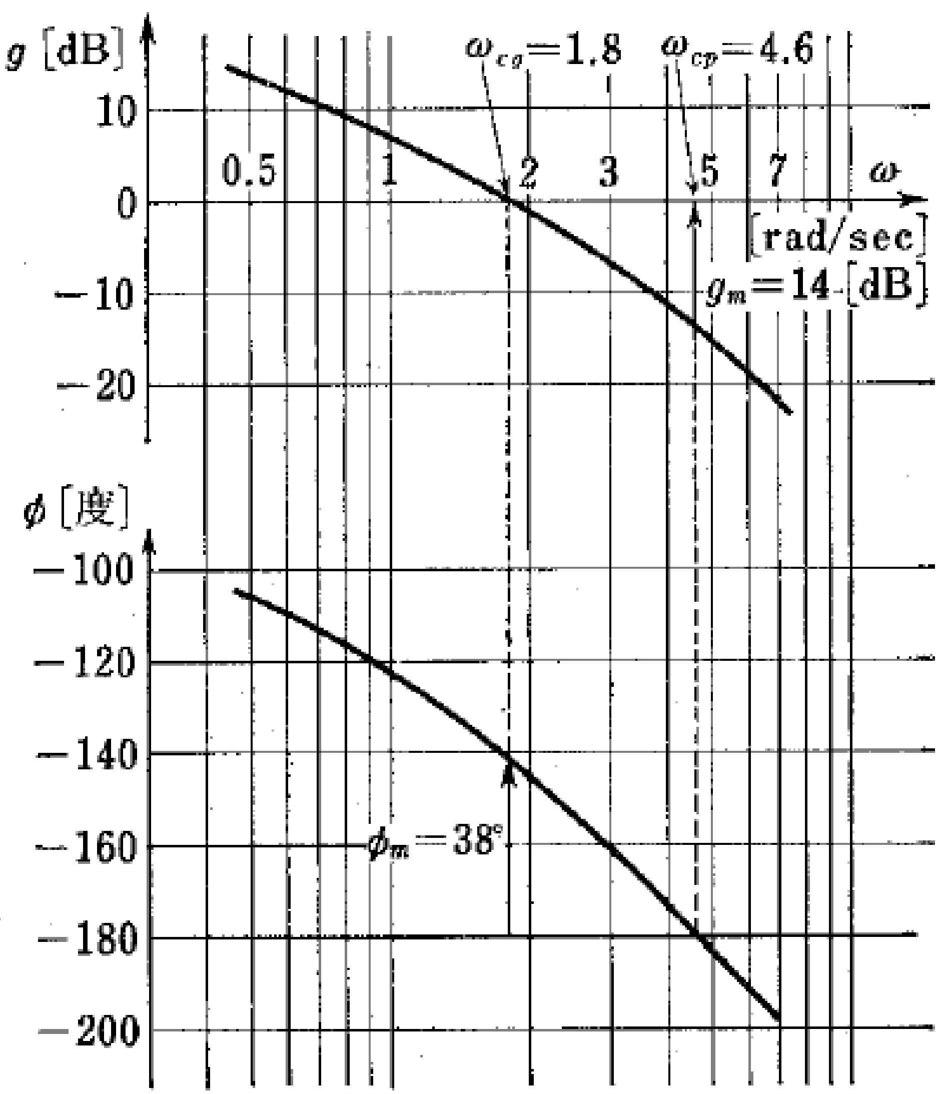
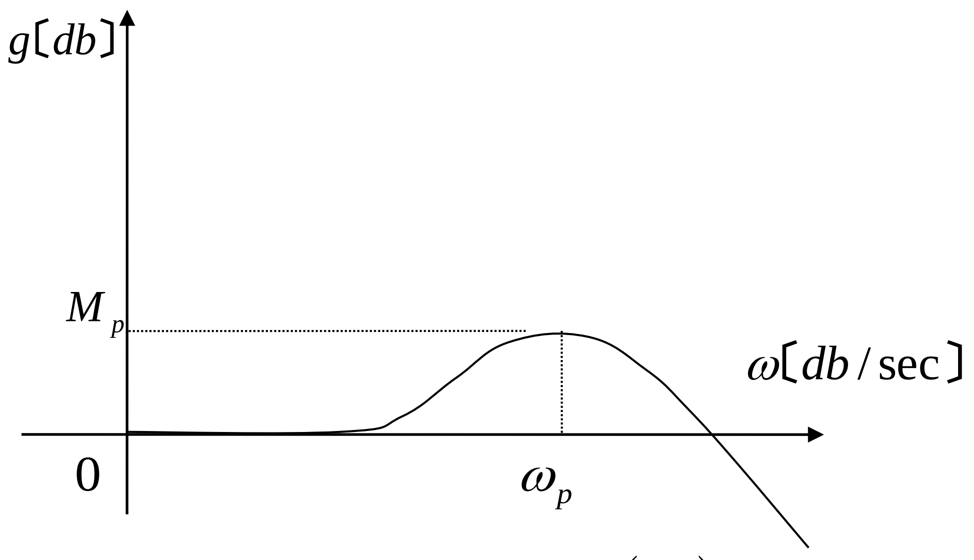


図 6.19 〔例題 6.3〕の系の位相余有とゲイン余有

【共振値と過渡特性】

過渡特性が振動的な場合

閉ループ伝達関数



$$M(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \simeq \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ただし　$0<\zeta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

M_pとζ

$\dfrac{\omega_p}{\omega_n}$と$\zeta$

関係から，高次フィードバック制御系を2次系に
近似することができる。

$|G(j\omega)|$と$\angle G(j\omega)$　から

$|M(j\omega)|$と$\angle M(j\omega)$　を求める方法としてニコルス線図がある

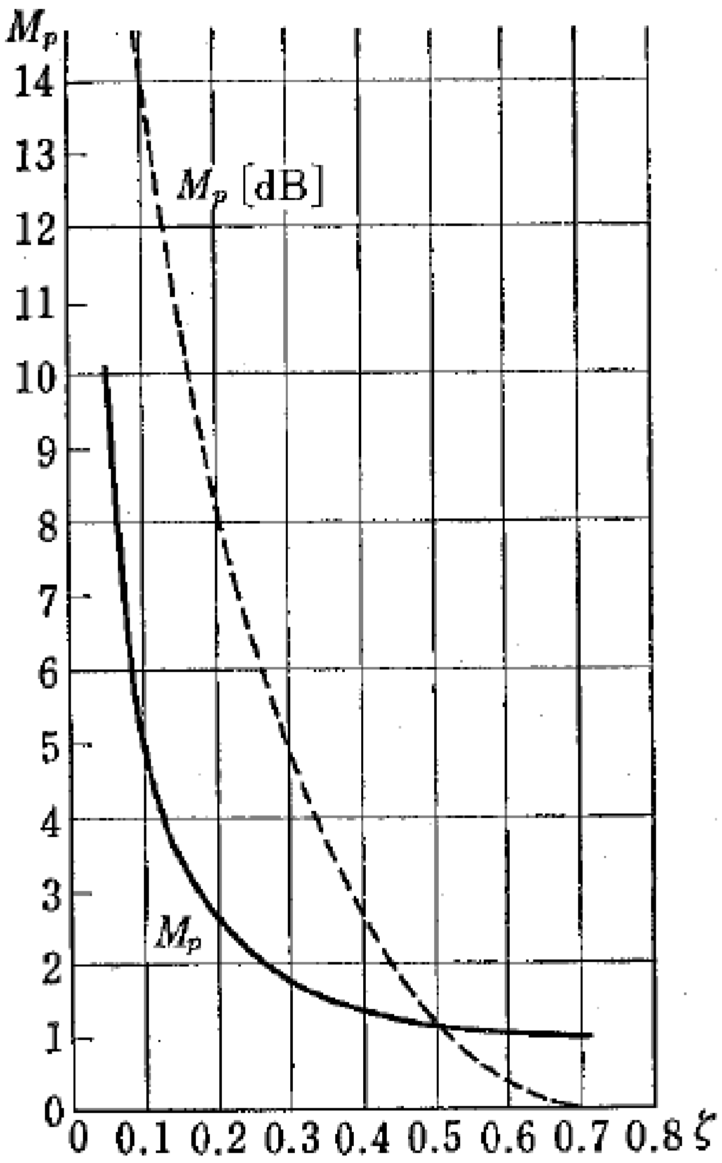


図 6.21　M_p と ζ との関係

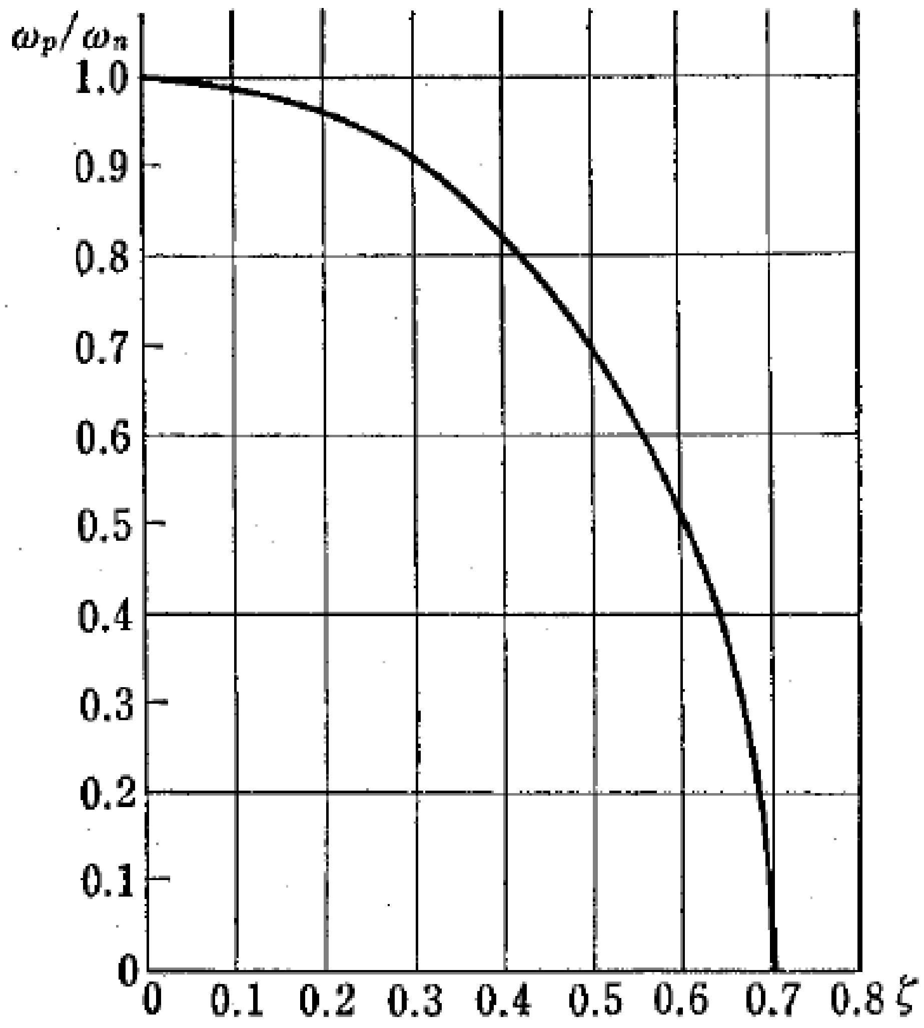


図 6.22　ω_p/ω_n と ζ の 関係

このように，高次の遅れをもつフィードバック制御系は，閉ループ系の周波数応答 $M(j\omega)$ が求まると，その過渡特性も容易に求めることができた．ところが図 6.7 の制御系において，一巡周波数応答 $G(j\omega)$ は，前章で述べた 5.3.2 項（6）の方法を用いることにより簡単に求められるのに対し，式 (6.16) で与えられる $M(j\omega)$ は簡単に求めることができない．そのために用意されている線図が，図 6.23 に示す**ニコルス線図**である．線図中に $20\log|G(j\omega)|$，$\angle G(j\omega)$ の値から決まる点を，それぞれ，縦軸，横軸を座標軸としてプロットすると，図中の目盛線から $20\log|M(j\omega)|$，$\angle M(j\omega)$ の値をただちに読み取ることができる．次の例題を検討して，ニコルス線図の使い方および過渡特性の求め方を学ぶこととする．

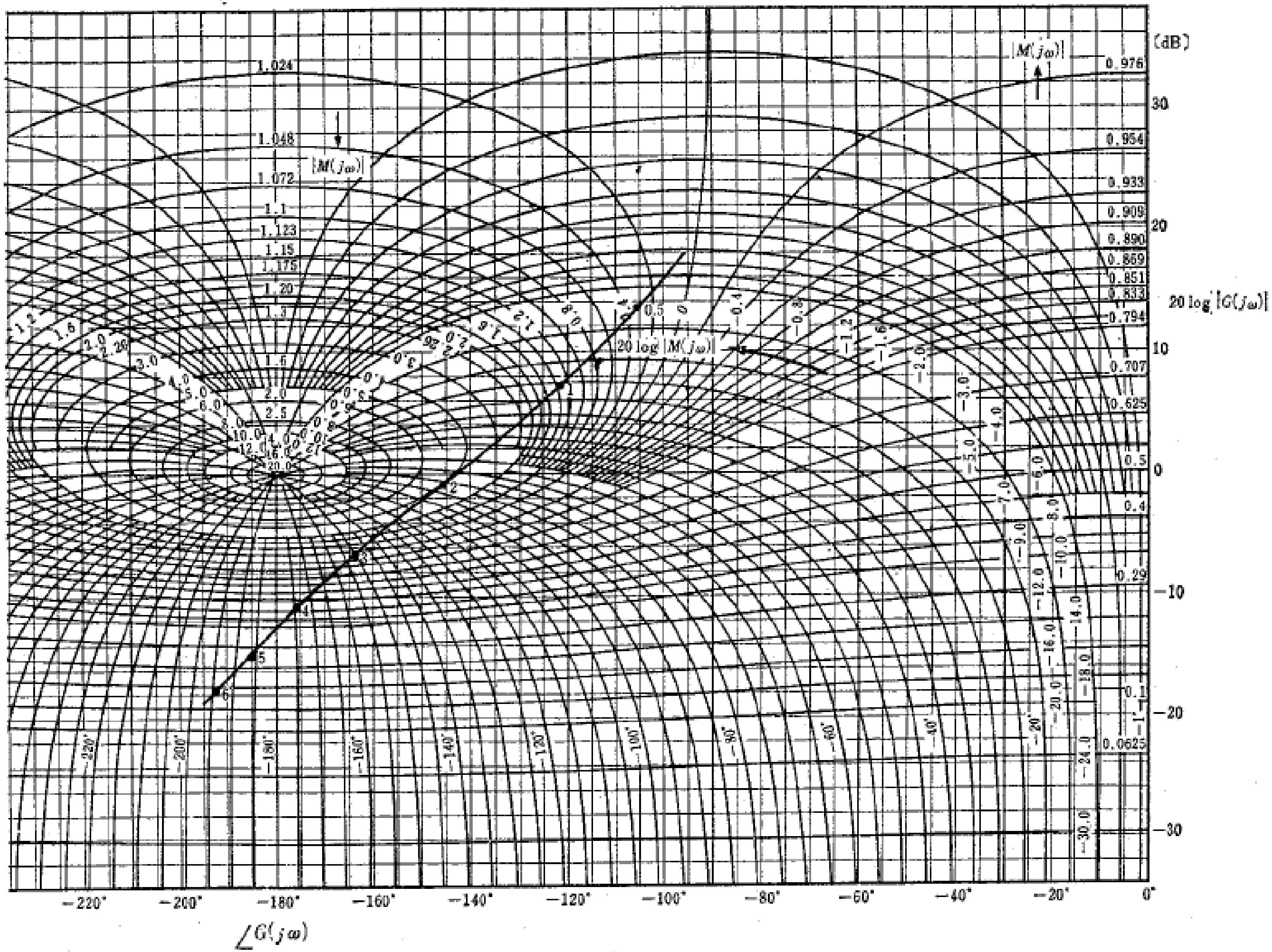


図 6.24　ニコルス線図上の軌跡

【例題 6.4】 図 6.14 の系について，

（i） ニコルス線図を用いて閉ループ周波数応答 $M(j\omega)$ を求めよ．

（ii） 共振点における M_p, ω_p を用いて過渡特性を検討せよ．

（解） 図 6.14 の系の一巡周波数応答は図 6.19 のボード線図で表すことができた．次に $20\log|G(j\omega_0)|$，$\underline{/G(j\omega_0)}$ の値をニコルス線図中にプロットすることにより $\omega=\omega_0$ のときの点が決まる．たとえば $\omega=$ 　のとき $20\log|G(j)|=6.5$，$\underline{/G}(j)=-122.3°$ であることから，これによって，図 6.24 中の $\omega=1$ の点が決まる．次にニコルス線図中の目盛線を用いて $20\log|M(j)|=1.3$〔dB〕，$\angle M(j)=-28°$ が求まる．他の ω についても，同様にして $20\log|M(j\omega)|$ と $\angle M(j\omega)$ の値を求めていくと，$M(j\omega)$ のボード線図が図 6.25 のように描ける．

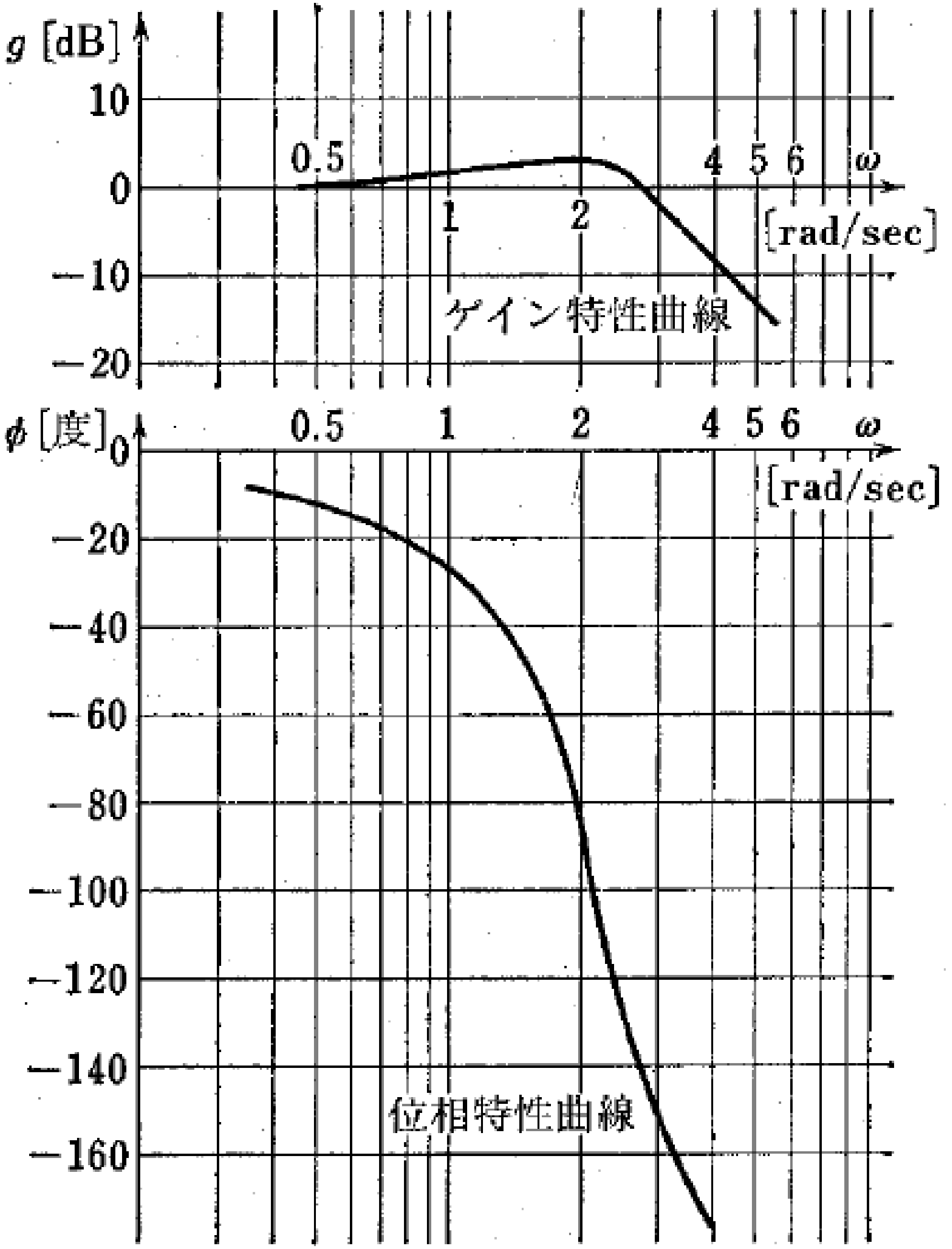


図 6.25 閉ループ周波数応答

テキストの問題 6.1

$$\frac{2(s+1)}{s^2}$$ の位相余有

$$F(j\omega)=\left|\frac{2j\omega+2}{-\omega^2}\right|$$

$$=\left|-\frac{2}{\omega^2}-2j\frac{1}{\omega}\right|$$

$$\sqrt{\frac{4}{\omega^4}+\frac{4}{\omega^2}}=1$$

$$\omega^4=4\omega^2+4$$

$$\omega^4-4\omega^2-4=0$$

$$\omega^2=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{4+4\sqrt{2}}{2}}=2.197[rad/\sec]$$

$$\angle F(j\omega)=\tan\theta=\frac{-\frac{2}{\omega}}{-\frac{2}{\omega^2}}=\omega$$

$$\theta=\tan^{-1}\omega=\tan^{-1}2.197=65.53^\circ$$

制御理論　演習問題２

$$\frac{60}{s(s+2)(s+6)}$$ のゲイン余有を求めよ

留数

$$\frac{1}{s} \to \frac{60}{2\times 6}=5 \quad , \quad \frac{1}{s+2} \to \frac{60}{-2\times 4}=-7.5 \quad , \quad \frac{1}{s+6} \to \frac{60}{-6\times(-4)}=2.5$$