# 第8回制御理論講義

令和２年６月29日

担当：宮﨑

内容

第10章　安定化の基礎理論

10.2　直接フィードバック制御と根軌跡法

10.3　直列補償器による安定化

# 直接フィードバック制御

- 前回は、システムのすべての状態が観測可能であること前提とした制御系について検討した。
- 実際には、すべての状態変数を観測することが出来ない場合が多い
- 出力（本講義の教科書では制御量に相当）を検出できる一部の状態量（もしくはその組み合わせ）として考える

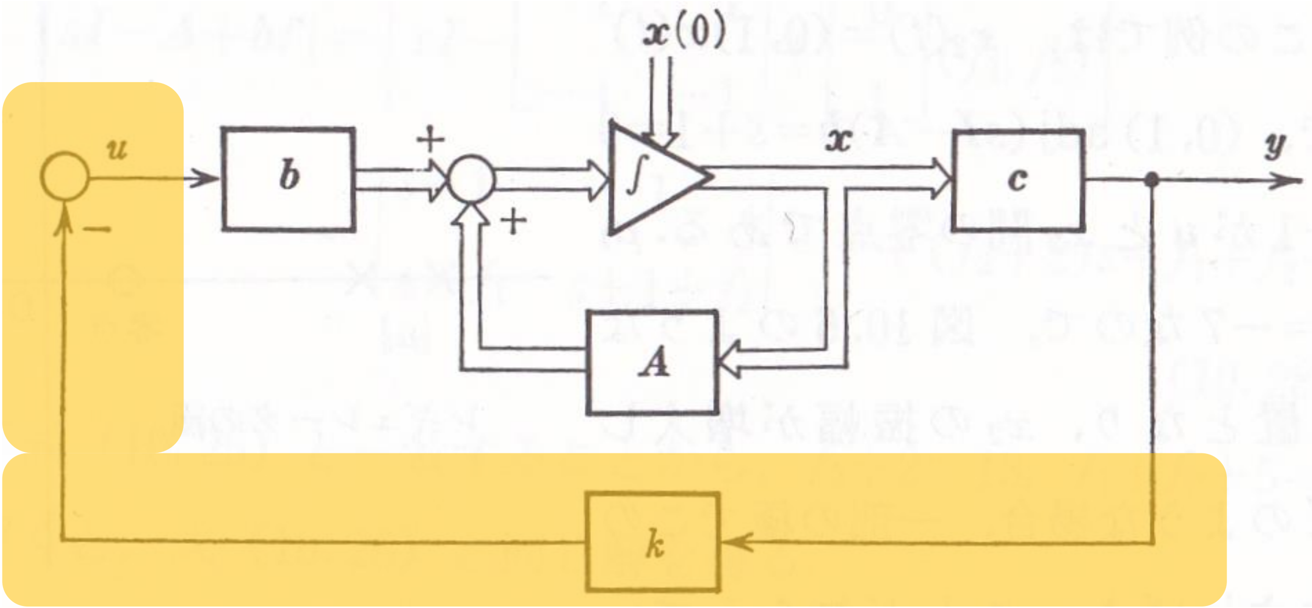
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) \quad : \boldsymbol{c}(1 \times n)$$

- 検出量 $y(t)$ からスカラゲイン $k$ を経由してフィードバックする、「**直接フィードバック制御**（ゲイン補償）」について検討する

$$u(t) = -ky(t)$$

- この制御が成り立つ前提条件
  - $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ が可制御である
  - $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{A})$ が可観測である
  - この条件は制御を行う上でとても<u>**ベーシックな条件**</u>

# 直接フィードバック制御




- 状態フィードバックとの違い
  - 制御ゲインは１つ、制御系の極はn個である
  - 必ず安定化できるとは限らない
- どのように設計するか？
  - 制御ゲインを変えていったときに制御系の応答がどうなるかを調べて、一番適切なところのゲインを選ぶやり方
  - 制御系の応答は“特性方程式の根（別名“極”）で見る
  - ゲインを変えていった時の根の変化を追いかける　⇒“根軌跡“

# 直接フィードバック制御

- 特性方程式を導出する
  - 出力フィードバック制御系の式を改めて書く

$$u(t) = -ky(t) = -k\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)$$

状態フィードバック
と同じような式に見える

  - この式を制御対象の入力に入れた場合の計算をすると

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{b}k\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)\\ &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}k\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

  - 特性方程式は以下になる

$$\begin{aligned}|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}k\boldsymbol{c}| &= |(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})[\boldsymbol{I} + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}k\boldsymbol{c}]|\\ &= |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}||\boldsymbol{I} + k((s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|\\ &= |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|(1 + k\boldsymbol{c}((s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}))\\ &= |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| + k|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|\boldsymbol{c}\frac{adj(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{|(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})|}\boldsymbol{b}\\ &= \underline{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| + k\boldsymbol{c}\,adj(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{b} = 0}\end{aligned}$$

この式変形は
(10.95)式参照

- 評価する式は

$$D(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|, \quad N(s) = \boldsymbol{c}\,adj(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{b}$$

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| + k\boldsymbol{c}\,adj(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{b} = \boxed{D(s) + kN(s) = 0}$$

この式が重要

# 根軌跡の解析

- 前提条件
  - 制御対象の極： $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$
  - 制御対象の零点：$z_1, z_2, \cdots, z_m \quad (n > m)$
  - 制御対象のゲイン：$h_{m+1} > 0$
- 制御ゲイン $k$ を $0$ から$\infty$ まで変化させたときの特性方程式の根(極）を導出する
- 根の変化はS平面(複素平面）上で確認する
- 根軌跡の法則

i. $k = 0$ のときは、制御前の根と一致する

ii. $k = \infty$ のときには、m個の根は制御前の零点へ収束、残りのn-m個の根は無限遠へ発散する

iii. 無限遠に発散する根は実軸から特定の傾きで移動する

iv. 実軸上にある根は制御前の零点と極の間で移動する

v. 実軸上から離れる点は以下の式の根の一部である

$$\frac{1}{s-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{s-\lambda_n} - \frac{1}{s-z_1} - \cdots - \frac{1}{s-z_m} = 0$$

vi. 軌跡が虚軸を横切る条件はラウスーフルビッツの安定判別法から求まる

# 根軌跡の例

- n=2, m=1 の制御系の場合
  - 1個の根は元の零点（実軸上）に移動する
  - n-m=1個の根は実軸上を無限遠に向って移動する
  - このとき、制御の応答としては、ゲインが大きくなるにしたがって速い応答になる。元の零点が不安定でなければ、制御系は不安定にはならない
- n=4, m=2 の制御系の場合
  - 2個の根は元の零点（S平面上）に移動する
  - 2個の根は共役複素根としてS平面の上下対象で垂直上下向きに無限遠に向って移動する
  - この時の制御応答としては、ゲインが大きくなるにしたがって、振動周期が早くなる振動的な応答になる。元の零点が不安定でなければ、制御系は不安定にはならない。
- n=3, m=0 の制御系の場合
  - 零点がないのですべての極は無限遠に移動する
  - 3個の根のうち１つは実軸上を無限遠に向って移動する
  - 3個の根のうち2つは、共役複素根として、S平面上の上下対象で斜め方向に無限遠に向って移動する
  - 但し移動方向は、右半平面方向になるため不安定になる限界のゲインが存在する

# 今日の課題 1

- ここで、ちょっと休憩と課題
- 例題10.3と前のページの説明を参考に以下のシステムを直接フィードバック制御したときの根軌跡について答えよ

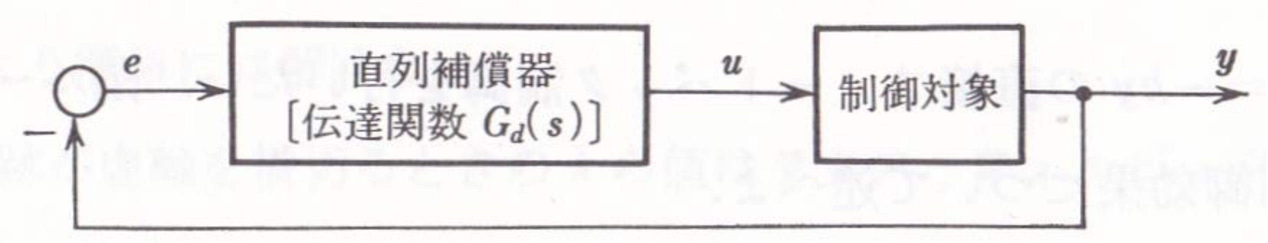
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

$$u(t) = -ky(t)$$

- 以下について求めよ
  - ① $k = 0$ の時の根はいくつか？
  - ② $k = \infty$ のときの根はどこに向かうか？
  - ③ 2つの根が実軸を離れる点はどこになるか？
- 解答を計算して、ilias の 6月29日の講義の演習 1 に直接記入して提出してください。
- 提出期限は本日の授業終了12時とします。
- 分かったところだけでもいいので　“必ず”提出してください。

# 直列補償器による安定化

- 直接フィードバック制御の問題点
  - 必ず安定化できるかどうかわからない
  - 極を任意に指定できない
  - 設計ゲインの決め方が間接的
- 動的な直列補償器（動的補償器）を用いて閉ループ系の極を決める方法がある




- この形どこかで見たことがあるような？
- 古典的制御を学習したときに出てきたフィードバック制御と同じ構造である(7章を参照)
- 古典的制御ではこのフィードバック制御系を、周波数特性から設計していた
- 現代制御理論ではこの設計をより明確に行えるようにする

# 直列補償器の設計

- 想定する制御対象（n次のシステム）

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \quad : \boldsymbol{A}(n \times n),\ \ \boldsymbol{b}(n \times 1)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) \quad : \boldsymbol{c}(1 \times n)$$

  - 伝達関数で表すと

$$G(s) = \frac{h_n s^{n-1} + h_{n-1} s^{n-2} + \cdots + h_2 s + h_1}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

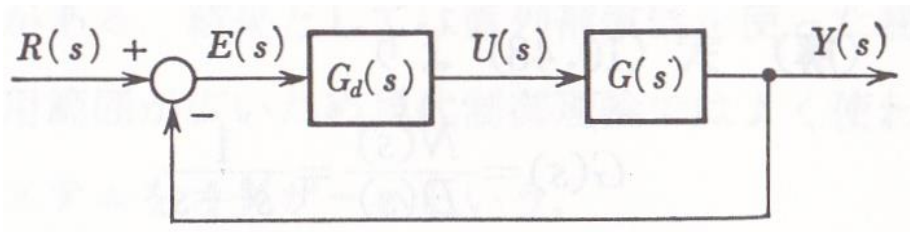
  - 伝達関数で表される場合、制御対象は可制御・可観測である
- 動的な直列補償器の構造（n-1次のシステム）

$$G_d(s) = \frac{q_n s^{n-1} + q_{n-1} s^{n-2} + \cdots + q_2 s + q_1}{s^{n-1} + p_{n-1} s^{n-2} + \cdots + p_2 s + p_1}$$

- 直列補償器を用いた制御系全体： n + (n-1) = 2n-1 次のシステム
- 補償器のパラメータ：q が n 個、p が n-1個　合計 2n-1個
- 制御系全体が2n-1次で、極の数は 2n-1 個
- つまり、すべての極が補償器のパラメータで設定できる！

# 直列補償器の設計例（１）

- 以下の食列補償器を持つシ制御ステムの補償器パラメータを求める




- 制御対象を3次とする（n=3）

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{h_3s^2+h_2s+h_1}{s^3+a_3s^2+a_2s+a_1}$$

$$G_d(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{q_3s^2+q_2s+q_1}{s^2+p_2s+p_1}$$

- 指令値から制御量までの伝達関数は

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)G_d(s)}{1+G(s)G_d(s)}=\frac{N(s)Q(s)}{D(s)P(s)+N(s)D(s)}$$

- 特性方程式は5次の多項式で表される

$$D(s)P(s)+N(s)D(s)=0$$

# 直列補償器の設計例（２）

- 特性方程式を解き下すと

$$
\begin{aligned}
D(s)P(s) + N(s)D(s) &= (s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1)(s^2 + p_2 s + p_1) \\
&\quad + (h_3 s^2 + h_2 s + h_1)(q_3 s^2 + q_2 s + q_1) \\
&= s^5 + p_2 s^4 + p_1 s^3 + a_3 s^4 + a_3 p_2 s^3 + a_3 p_1 s^2 \\
&\quad + a_2 s^3 + a_2 p_2 s^2 + a_2 p_1 s + a_1 s^2 + a_1 p_2 s + a_1 p_1 \\
&\quad + h_3 q_3 s^4 + h_3 q_2 s^3 + h_3 q_1 s^2 + h_2 q_3 s^3 + h_2 q_2 s^2 \\
&\quad + h_2 q_1 s + h_1 q_3 s^2 + h_1 q_2 s + h_1 q_1 \\
&= s^5 + (p_2 + a_3 + h_3 q_3) s^4 \\
&\quad + (p_1 + a_3 p_2 + a_2 + h_3 q_2 + h_2 q_3) s^3 \\
&\quad + (a_3 p_1 + a_2 p_2 + a_1 + h_3 q_1 + h_2 q_2 + h_1 q_3) s^2 \\
&\quad + (a_2 p_1 + a_1 p_2 + h_2 q_1 + h_1 q_2) s \\
&\quad + a_1 p_1 + h_1 q_1
\end{aligned}
$$

- これを指定したい極を根とする方程式と比較する

$$
s^5 + d_5 s^4 + d_4 s^3 + d_3 s^2 + d_2 s + d_1 = 0
$$

# 直列補償器の設計例（３）

- 前のページの同じ色の下線部が等しくなればいいので、以下の式が成り立つような、補償器パラメータを求めればよいことになる。

$$d_5 = p_2 + a_3 + h_3 q_3$$
$$d_4 = p_1 + a_3 p_2 + a_2 + h_3 q_2 + h_2 q_3$$
$$d_3 = a_3 p_1 + a_2 p_2 + a_1 + h_3 q_1 + h_2 q_2 + h_1 q_3$$
$$d_2 = a_2 p_1 + a_1 p_2 + h_2 q_1 + h_1 q_2$$
$$d_1 = a_1 p_1 + h_1 q_1$$

- この式の〇のついているパラメータが補償器パラメータ
- よく見ると1次方程式になってるみたいなので次のように行列書き直すことが出来る

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h_3 & 0 & 0 \\ a_3 & 1 & h_2 & h_3 & 0 \\ a_2 & a_3 & h_1 & h_2 & h_3 \\ a_1 & a_2 & 0 & h_1 & h_2 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \\ q_3 \\ q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_5 - a_3 \\ d_4 - a_2 \\ d_3 - a_1 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

- この行列を解くことでパラメータが求まる

# 今日の課題２

- 例題10.4について、閉ループの極を以下になるように設計した直列補償器を求めてください。
  - 指定したい極

$$\mu_1 = -1, \ \ \mu_2 = -2, \ \ \mu_3 = -10$$

  - 指定したい特性方程式

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3) = 0$$

  - 計算経過も含めて手書きもしくはwordなどを使って作成してください

- この課題は、ilias 上の6月29日の課題２に提出してもらいますが、期限は来週の授業開始前までとします。