20315784 佐藤麦雅

**2次遅れ要素**

$$F(j\omega)=\frac{K}{1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}$$

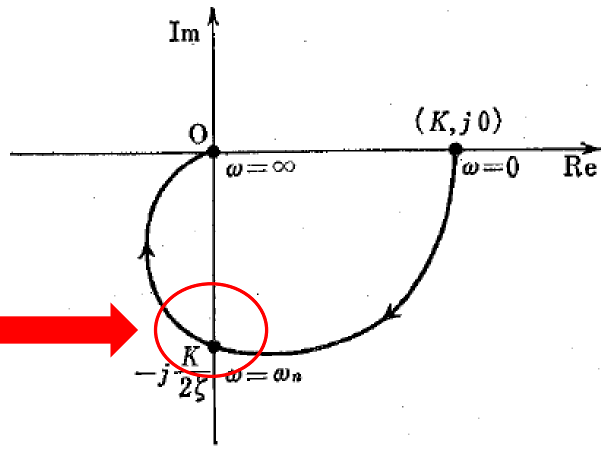


図 5.11　2次遅れ要素のベクトル軌跡

演習課題1
角周波数ωがωnのときに、虚軸を通過する理由を式を使って説明せよ。

20315784 佐藤凌雅

$$F(j\omega) = \frac{K}{1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$= \frac{K\left\{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}}{\left\{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}\left\{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)-j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right\}}$$

$$= \frac{K\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}{\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 - \left(j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} - j\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 - \left(j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

虚軸を通過するのは，$Re\{F(j\omega)\}=0$ のときであるから.

$$\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{1+2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+\frac{\omega^4}{\omega_n^4}+2\zeta\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = 0$$

$$\frac{\omega_n^4 - \omega^2\omega_n^2}{\omega_n^4 + 2\omega^2\omega_n^2 + \omega_n^4 + \zeta\omega^2\omega_n^2} = 0$$

$$\frac{\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)}{\omega_n^2(2\omega_n^2 + (2+\zeta)\omega^2)} = 0$$

$$\frac{\omega_n^2-\omega^2}{2\omega_n^2+(2+\zeta)\omega^2} = 0$$

このとき，(左辺) = 0 となるのは (分子) = 0 のときである.

よって

$$\omega_n^2 - \omega^2 = 0$$

$$(\omega+\omega_n)(\omega-\omega_n) = 0$$

$$\therefore \omega = \pm\omega_n$$

ここで，$\omega$ は非負であるから.

$\therefore$ $F(j\omega)$ が虚軸を通過するのは $\omega$ が $\omega_n$ のときとなる.

20315784 佐藤凌雅

なお，このときに通過する座標は

2次遅れの式 $F(j\omega)$ に $\omega_n$ を代入すると．

$$F(j\omega) = \frac{K}{1+2\zeta j\frac{\omega}{\omega_n}) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$F(j\omega_n) = \frac{K}{1+2\zeta\times j+(j)^2} = \frac{K}{1+j2\zeta-1} = \frac{K}{j2\zeta} = -j\frac{K}{2\zeta}$$

$(Re, Im) = \left(0, -j\frac{K}{2\zeta}\right)$ を通過することが分かる．