令和２年度　電気電子情報数学及び演習２（後半）

常微分方程式

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

講義担当 : 佐々木友之（電気１号棟 604，sasaki_tomoy@vos.nagaokaut.ac.jp）
演習担当：加藤有行（電気１号棟 303，arikato@vos.nagaokaut.ac.jp）

不定積分の基本的な公式

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)\,du$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + c \qquad (f(x) \neq 0)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad (n\text{: real number, } n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c \qquad (x > 0)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\tan\frac{x}{a} + c \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \qquad (a \neq 0)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + c$$
$$(a^2 + b^2 \neq 0)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right) + c$$
$$(a^2 + b^2 \neq 0)$$

2 変数関数の全微分

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

全微分の例

$$d(xy) = ydx + xdy$$

$$d\left(x^2 \pm y^2\right) = 2xdx \pm 2ydy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$$

$$d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

第 1 章　1 階微分方程式の解法（変数分離形）

1.1　常微分方程式

例えば,

$$y' = \sin x \tag{1.1}$$

$$y'' + 4y = 0 \tag{1.2}$$

$$x^2 y''' y' + 2e^x = (x^2 + 2) y^2 \tag{1.3}$$

のように，未知関数 $y(x)$ の導関数を含む方程式を常微分方程式という。「常」は偏導関数を含む偏微分方程式と区別するために付される。微分方程式に含まれる導関数の中で, 最も階数が高いものが n 階導関数であるならば, その微分方程式を n 階微分方程式という。(1.1)式，(1.2)式，(1.3)式はそれぞれ，1 階，2 階，3 階の常微分方程式ということになる。

微分方程式は, 様々な物理現象のモデル化に利用される。モデル化によって得られた微分方程式を解くことで, あるパラメーターがその現象に及ぼす影響を定量的に考えることが可能となる。従って，微分方程式の解法を学ぶことは, 物理を工学へと展開する上でも極めて重要である。

本講義では, 常微分方程式の解法を概説する。偏微分方程式は取り扱わないため，以後，単に微分方程式といった際は, 常微分方程式のことを指すものとする。

1.2　一般解と特殊解

ここで,

$$y' = \cos x \tag{1.4}$$

を考える。 y は微分すると $\cos x$ となる関数であるから,

$$y = \sin x + c \tag{1.5}$$

である。ここで，c は任意の定数である。即ち，(1.4)式を満足する y は無数に存在する。(1.5)式のように，1 階微分方程式の解は任意定数一つを含む関数により表され, これを一般解と呼ぶ。また，ある特定の c を選んだとき，それを特殊解と呼ぶ。例えば， $y = \sin x$ や $y = \sin x + 2020$ は特殊解である。

1.3　特異解

微分方程式,

$$y'^2 - xy' + y = 0 \tag{1.6}$$

の一般解は， $y = cx - c^2$ である（代入計算により確かめられたし)。一方で， $y = x^2/4$ もまた解である（代入計算により確かめられたし)。しかしながら, 後者は前者の任意定数 c にいかなる値を代入しても得られない。このような解を特異解という。微分方程式を解くということは，厳密にいうと，一般解と全ての特異解を求めることであるが, 特異解は工学的には重要にならないことが多いので, 本講義ではあまり気にせずに，「微分方程式を解け」ということは「微分方程式の一般解を求めよ」ということと同義とする。

1.4　陰関数形と陽関数形

1 階微分方程式について考える。1 階微分方程式は，未知関数 $y(x)$ の 1 階導関数 y' を必ず含むから,

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.7}$$

という形に表すことができる。これを陰関数形と呼ぶ。一方,

$$y' = f(x, y) \tag{1.8}$$

という形で表されることもある。これを陽関数形という。

1.5　方向場

1 階微分方程式の陽関数形,

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.9}$$

について考える。微分学によると，y' は曲線 $y(x)$ の傾きを表す。例えば，

$$y' = f(x,y) = xy \tag{1.10}$$

に対し，xy 面上のいくつかの点において，y' の値を傾きとする短い線分（方向線素）を描いてみる。表 1.1 のデータをもとに描画した結果を図 1.1 に示す。このような方向線素の場を方向場と呼ぶ。方向場は，解曲線の接線方向の場となっている。ちなみに，(1.10)式の一般解は $y = ce^{x^2/2}$ であり，$c = 1$ の場合の解曲線を図 1.1 に例示する。

表 1.1　$y' = xy$ の値

x	y	xy
0	0	0
±0.5	0.5	±0.25
	1	±0.5
	1.5	±0.75
	2	±1
±1	0.5	±0.5
	1	±1
	1.5	±1.5
	2	±2

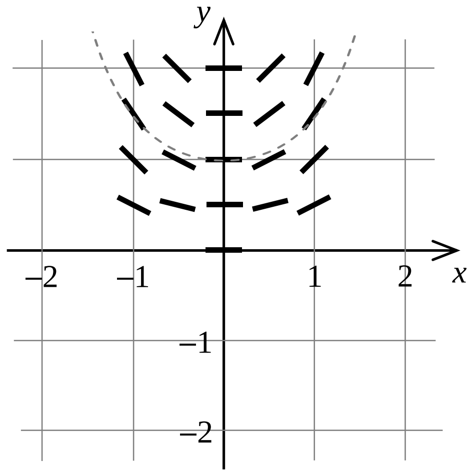

図 1.1　$y' = xy$ の方向場の計算例。破線は特殊解 $y = e^{x^2/2}$ 。

1.6　変数分離形微分方程式

次の形の微分方程式は変数分離形であるといわれる。

$$\boxed{g(y)y' = f(x)} \tag{1.11}$$

$y' = dy/dx$ であるから，

$$\boxed{g(y)dy = f(x)dx} \tag{1.12}$$

と書いてみる。(1.12)式において，y は左辺だけに，x は右辺だけにある。(1.11)式が変数分離形と呼ばれるゆえんはここにある。

(1.11)式を解くには，(1.12)式の両辺を積分すればよい。即ち，

$$\boxed{\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c} \tag{1.13}$$

を考える（厳密には，(1.11)式の両辺を x で積分し，置換積分の公式を適用する）。g と f が連続関数であれば(1.13)式における積分を実行でき，(1.11)式の一般解が求められる。

【例題 1.1】以下の微分方程式を解け。

$9yy' + 4x = 0$

【例題 1.2】以下の微分方程式を解け。

$dx + xy\,dy = y^2\,dx + y\,dy$

なお，例題 1.1，例題 1.2 において，c は任意定数である。式変形を経た後の c_n（n は自然数）も結局のところは任意定数であるので, 以後は, 簡略化のため, 式変形後に定数を書き換えない場合があるので注意されたし。

1.7　変数分離形に帰着する形の一例

微分方程式

$$M(x, y)\,dx = N(x, y)\,dy \qquad (1.14)$$

において,

$x \to \lambda x$

$y \to \lambda y$

なる置換をしたとき,

$M(x, y) \to \lambda^m M(x, y)$

$N(x, y) \to \lambda^n N(x, y)$

となり， さらに， $m = n$ であれば，(1.14)式は, $y = xu$ と置くことで,

$f(x)\,dx = g(u)\,du$

と変数分離できる。

【例題 1.3】以下の微分方程式を変数分離し，解を求めよ。

$2xyy' = y^2 - x^2$

第 2 章　1 階微分方程式の解法（完全微分形）

2.1　全微分

事前準備として全微分を思い出す。関数 $u(x, y)$ が連続な偏導関数を持つとき，u の全微分は，

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy} \tag{2.1}$$

で与えられる。

(2.1)式は，$x \to x + dx$，$y \to y + dy$ と僅かに変化したときの u の変化量を表している。

【例題 2.1】$u = xy$ の全微分を求めよ。

解）

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial}{\partial x}(xy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(xy)dy \\ &= y\,dx + x\,dy \end{aligned}$$

（解答終）

2.2　完全微分方程式

1 階微分方程式は，

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.2}$$

という形に表される。この方程式の左辺が関数 $u(x, y)$ の全微分 du に等しければ，(2.2)式を完全微分方程式という。

(2.2)式が完全微分方程式であれば，

$$du = 0 \tag{2.3}$$

であるから，両辺を積分すれば，一般解として，

$$u(x, y) = c \tag{2.4}$$

が得られる。

(2.2)式が完全微分方程式であるための必要十分条件は，

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}} \tag{2.5}$$

で与えられる。

(2.2)式が完全微分方程式であれば，$u(x, y)$，即ち，陰関数形式での解は，以下のようにして求められる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \tag{2.6}$$

の両辺を x について積分すれば，

$$u = \int M(x, y)dx + k(y) \tag{2.7}$$

を得る。ここで，$k(y)$ は x に関係せず，積分定数の役割を果たす。これを，

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N \tag{2.8}$$

に代入すると，

$$N = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx + k(y)\right)$$

$$\therefore \frac{dk}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx \tag{2.9}$$

となる。(2.9)式から $k(y)$ を決めると，

$$\boxed{u = \int M(x, y)dx + k(y) = c} \tag{2.10}$$

と解が求まる。

一方，以下のようにしても求められる。

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N$$

について，両辺を y で積分すれば，

$$u = \int N(x, y)dy + l(x) \tag{2.11}$$

を得る。ここで，$l(x)$ は y に関係せず，積分定数の役割を果たす。これを，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M$$

に代入すると，

$$\frac{dl}{dx} = M - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x, y)dy \tag{2.12}$$

と書ける。(2.12)式から $l(x)$ が決まると，

$$\boxed{u = \int N(x, y)dy + l(x) = c} \tag{2.13}$$

と解が求まる。

【例題 2.2】以下の微分方程式を解け。

$$(2x+3y-2)dx+(3x-4y+1)dy=0$$

別解）

$$2x+3y-2=M\text{，}\quad 3x-4y+1=N$$

とする。

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3\text{，}\quad \frac{\partial N}{\partial x}=3$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}$$

であるから，与式は完全微分形である。

$$N=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

とすると，

$$u=\int N\,dy+l$$
$$=\int(3x-4y+1)dy+l$$
$$=3xy-2y^2+y+l$$

となる。ここで，$l=l(x)$ である。この u を，

$$M=\frac{\partial u}{\partial x}$$

に代入すると，

$$M=\frac{\partial}{\partial x}\left(3xy-2y^2+y+l\right)$$
$$=3y+\frac{dl}{dx}$$

となる。一方，$M=2x+3y-2$ であるから，

$$\frac{dl}{dx}=2x-2$$
$$\therefore l=\int(2x-2)dx+c_1=x^2-2x+c_1$$
$$\therefore u=3xy-2y^2+y+x^2-2x+c_1$$

となる。$du=0$ であるから，$u=c$ であるので，与式の一般解は，

$$x^2+3xy-2x-2y^2+y=c$$

と求まる。

（別解終）

2.3　積分因子を掛けると完全微分形

完全微分形でない方程式，

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{2.14}$$

にある関数 $F=F(x,y)$ を掛けた方程式，

$$FP\,dx+FQ\,dy=0 \tag{2.15}$$

が完全微分形であるとき，即ち，

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP)=\frac{\partial}{\partial x}(FQ) \tag{2.16}$$

であるとき，F を積分因子という。積分因子が見つかれば，(2.14)式を完全微分方程式と同様にして解くことができる。

積分因子は 1 階微分方程式に対して必ず存在する。また，それは一つではない。積分因子を求めるためには試行錯誤が必要になることが多いが，とりあえずは，以下のイ，ロ，ハに示す方法を試すとよい。

イ） $F=F(x)$ の場合

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\equiv R$$

が x のみに依存するならば，即ち，$R=R(x)$ ならば，$F=F(x)$ なる積分因子が存在し，

$$F(x)=e^{\int R(x)dx} \tag{2.17}$$

である。

ロ） $F=F(y)$ の場合

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\equiv R$$

が y のみに依存するならば，即ち，$R=R(y)$ ならば，$F=F(y)$ なる積分因子が存在し，

$$F(y)=e^{\int R(y)dy} \tag{2.18}$$

である。

ハ）全微分が利用できる場合

例えば，

$$y\,dx-x\,dy=0$$

なる完全微分形でない方程式を考える。全微分の公式（本テキストの表紙の裏によく使うものを挙げてある），

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$$

を思い出し，与式の両辺を y^2 で割ってみる。

$$\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0 \tag{1}$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{y}=-\frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{1}{y^2}$$

であるので，(1)式は完全微分形といえる。従って，

$$F = \frac{1}{y^2}$$

は積分因子である。

【例題 2.3】次の微分方程式を解け。

$$\left(2x^2 + 3xy\right)dx + 3x^2\,dy = 0$$

解）

与式は完全微分形でないので，積分因子を求めてみる。上記イの方法を試すと，

$$2x^2 + 3xy = P\,,\quad 3x^2 = Q$$

として，

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{3x^2}\left(3x - 6x\right)$$
$$= -\frac{1}{x} \equiv R$$

ここで， $R = R(x)$ であるので，積分因子は，

$$F(x) = e^{\int R(x)\,dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx}$$
$$= e^{-\ln|x| + c}$$

と求まる。ここで， c を適当に選べば，

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

と書ける。与式の両辺にこの積分因子を掛けると，

$$\left(2x + 3y\right)dx + 3x\,dy = 0 \qquad (1)$$

となる。従って，問題はこの完全微分方程式を解くことに帰着する。即ち，

$$2x + 3y = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\quad 3x = \frac{\partial u}{\partial y}$$

なる u を求めればよい。例題 2.2 で示したような手順を踏んでも問題はないが，この程度であれば，目察により，

$$u = x^2 + 3xy + c$$

であることが分かる。(1)式から，

$$du = 0$$
$$\therefore u = c$$

であるので，与式の解が，

$$x^2 + 3xy = c$$

と求まる。

（解答終）

【例題 2.4】次の微分方程式を解け。

$$\left(x^2 + y^2 - x\right)dx - y\,dy = 0$$

別解）

与式を変形すると，

$$\left(x^2+y^2\right)dx-\left(x\,dx+y\,dy\right)=0 \qquad (1)$$

となる。ここで，

$$x\,dx+y\,dy=\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2\right)$$

であるから，(1)式は，

$$\left(x^2+y^2\right)dx-\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2\right)=0$$

$$\therefore 2dx=\frac{1}{x^2+y^2}d\left(x^2+y^2\right)$$

と変形される。上式の両辺を積分すると，

$$2x=\ln\left(x^2+y^2\right)+c$$

$$\therefore e^{2x}=\left(x^2+y^2\right)c$$

$$\therefore x^2+y^2=ce^{2x}$$

（別解終）

MEMO

第 3 章　1 階線形微分方程式

3.1　線形微分方程式

1 階微分方程式は,

$$\boxed{y' + p(x)y = r(x)} \tag{3.1}$$

という形に表されるとき，線形であるという。方程式を考える区間の任意の x に対して $r(x) = 0$ であるならば，(3.1)式は同次であるといい，そうでない場合は非同次であるという。

3.2　同次方程式の解

同次式

$$\boxed{y' + p(x)y = 0} \tag{3.2}$$

を変形すると,

$$\frac{1}{y}dy = -p(x)dx$$

となる。この両辺を積分すると,

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + c$$

が得られる。従って，(3.2)式の一般解は,

$$\boxed{y = ce^{-\int p(x)dx}} \tag{3.3}$$

と求められる。

3.3　非同次方程式の解

非同次式

$$y' + p(x)y = r(x)$$

を定数変化法と呼ばれる方法で解いてみる。右辺を 0 と置いた同次式の解は,

$$y = ce^{-\int p(x)dx}$$

と求められるが，この定数 c を x の関数 $u(x)$ に置き換えて考えると,

$$y = u(x)e^{-\int p(x)dx}$$
$$y' = u'(x)e^{-\int p(x)dx} - u(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

である。これらを与えられた非同次式に代入すると,

$$u'(x) = r(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\therefore u(x) = \int r(x)e^{\int p(x)dx}dx + c \tag{3.4}$$

となる。従って，非同次式の解は,

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int r(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]} \tag{3.5}$$

と求められる。

実際に問題を解く際は, (3.5)式を利用しても構わないが, 同次式の解の定数を関数と考えるという手順さえ覚えておけば, (3.5)式を暗記する必要はない。

【例題 3.1】次の微分方程式を解け。

$$y' - y = e^{2x}$$

【例題 3.2】次の微分方程式を解け。

$$y' + 2y = e^x (3\sin 2x + 2\cos 2x)$$

【例題 3.3】微分方程式

$$y' + y\tan x = \sin 2x$$

を解け。但し， $y(0) = 1$ とする。

3.4　物理現象のモデル化

　本節では, 電気電子情報工学課程の学生にとって身近な物理現象を 1 階線形微分方程式によってモデル化する。

【例題 3.4】抵抗値が $R(\Omega)$ の抵抗と，インダクタンスが $L(\mathrm{H})$ のインダクタと，電圧が $E(\mathrm{V})$ の交流電源の直列回路において，回路に流れる電流 $I(\mathrm{A})$ を時間 $t(\mathrm{s})$ の関数として求めるための微分方程式を立てよ。

解）

　抵抗による電圧降下は，その瞬間の電流に比例し，その比例定数が抵抗値であるから，

である。一方，インダクタによる電圧降下は，電流の時間変化に比例し，その比例定数が L であるから，時間を t として，

と表される。 E_L と E_R の和が印加電圧に等しいから，

なる微分方程式が立てられる。

（解答終）

【例題 3.5】抵抗値が $R(\Omega)$ の抵抗と，キャパシタンスが $C(\mathrm{F})$ のコンデンサと，電圧が $E(\mathrm{V})$ の交流電源の直列回路において，回路に流れる電流 $I(\mathrm{A})$ を時間 $t(\mathrm{s})$ の関数として

求めるための微分方程式を立てよ。

解）

抵抗による電圧降下は，

$$E_R = RI$$

である。一方，コンデンサによる電圧降下は，

$$E_C = \frac{1}{C}\int I\,dt$$

で与えられる。$E_R + E_C = E$ であるから，

$$RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = E$$

である。両辺を時間で微分すると，

$$R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

なる非同次式が得られる。

（解答終）

【例題 3.6】金属に一様な電場を印加した場合に関し，金属中の電子の平均移動速度（ドリフト速度）を求めよ。

解）

電子が電場 E (V/m) により受ける力は，電子の電荷を q (C) とすると，qE (N) である。従って，電子の静止質量を m (kg) とすると，電子の加速度は，

$$a = \frac{qE}{m}$$

である（$q < 0$ であるので電場とは逆方向に加速される）。

$E \neq 0$ で $a \neq 0$ であることから，電場を印加し続けた場合，電子は加速され続け，電流も増大し続ける。しかしながら，実際にはオームの法則で表される定常状態が実現される。即ち，電子の移動には何らかの抵抗力が作用して，これが電場による力と平衡することが考えられる。電場が存在しない場合，電子の平均移動速度 v は時間経過とともに指数関数的に減少し，最終的には 0 になると考え，

$$v = v_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

と想定する。ここで，t_0 は $E = 0$ となった時間であり，$v_0 = v(t_0)$ は $E = 0$ とした時間における速度である。また，τ は減速に関する時定数である（電子の緩和時間と呼ばれる）。この減速に関する加速度は，上式を t で微分することにより，

$$\gamma = -\frac{1}{\tau}v_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = -\frac{v}{\tau}$$

と求められる。

a と γ の和が，電場により受ける力と抵抗力とを考慮した加速度であるから，

$$\frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m} - \frac{v}{\tau} \qquad (1)$$

と書ける。即ち，電子の運動方程式は 1 階線形非同次式で表現される。

例えば，$t = 0$ で電場を印加し，$v(0) = 0$ であったとすると，電子の平均移動速度は，(1) 式の初期値問題を解くことにより，

$$v = \frac{q\tau E}{m}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

と求められる。

（解答終）

【参考】

金属中における電子の移動に対する抵抗力の起源は，電子と原子（格子イオン）との衝突にある。電子と他の電子の衝突も考えられるが，これについては運動量が保存されるため，速度の変化は生じない。

第 4 章　2 階線形同次微分方程式

4.1　2 階線形微分方程式

2 階微分方程式は,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{4.1}$$

のように表されるとき線形であるという。このように表されない場合は非線形であるという。また，考える区間の任意の x について $r(x)=0$ であるとき，即ち,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.2}$$

を同次であるという。$r(x) \neq 0$ の場合は非同次であるという。

2 階線形微分方程式は，力学や電気回路などへの応用上重要であるとともに, 高階線形微分方程式を考える上での基本となる。

4.2　線形独立とロンスキアン

後の準備として線形独立について説明する。n 個の関数 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ について，定数 c_1，c_2，$\cdots$，c_n を係数とする恒等式

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0 \tag{4.3}$$

が成り立つために，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ となければならないとき，$y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ は線形独立であるという。

$y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ が線形独立であるための必要十分条件は,

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

が恒等的に 0 とならないことである。ここで, W をロンスキ行列式（ロンスキアン）という。なお, 上付きの $(n-1)$ は，$(n-1)$ 階微分を表す。例えば，二つの関数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ が線形独立であれば,

$$\boxed{W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0} \tag{4.5}$$

である。

(4.2)式で表される同次式の一般解は, 線形独立な二つの解 $y_1(x)$，$y_2(x)$ により,

$$\boxed{y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)} \tag{4.6}$$

で与えられる。このとき，$y_1(x)$，$y_2(x)$ を解の基底と呼ぶ。

4.3　定数係数 2 階同次方程式の解法

定数係数 a と b をもつ 2 階同次微分方程式,

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0} \tag{4.7}$$

の解法について述べる。1 階の同次式 $y' + ky = 0$ が $y = e^{-kx}$ なる解を有することから，(4.7)式の解として,

$$y = e^{\lambda x}$$

を仮定してみる。すると,

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

であるから，(4.7)式は,

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

となる。よって，λ が 2 次方程式

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0} \tag{4.8}$$

の解ならば，$y = e^{\lambda x}$ は(4.7)式の解である。ここで，(4.8)式は特性方程式と呼ばれる。(4.8)式の根は,

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

で与えられる。

(4.7)式の一般解は，特性方程式の判別式 $a^2 - 4b$ に応じて, 次のイ，ロ，ハのように求められる。

イ） $a^2-4b>0$ の場合

　このとき，二つの異なる実根 λ_1， λ_2 が得られ，同次式の一般解は,

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$

で与えられる。

ロ） $a^2-4b=0$ の場合

　このとき, 一つの根 $\lambda_1=\lambda_2=-a/2$（実重根）が得られる。一般解は,

$$y=(c_1+c_2x)e^{-ax/2}$$

で与えられる。

ハ） $a^2-4b<0$ の場合

　$\sqrt{a^2-4b}=i\sqrt{4b-a^2}$ である。従って，$\omega=\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}$ とすると, 二つの根（複素根）は,

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}a+i\omega$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{2}a-i\omega$$

であり，一般解は,

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$

で与えられる。これはオイラーの公式を用いると,

$$y=e^{-ax/2}(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x)$$

とも書ける。

【例題 4.1】次の微分方程式を解け。

$$y''-3y'+2y=0$$

【例題 4.2】次の微分方程式を解け。

$$y''+4y'+4y=0$$

【例題 4.3】次の微分方程式を解け。

$$y'' + 0.2y' + 4.01y = 0$$

4.4　オイラー・コーシーの方程式とその解法

以下の線形微分方程式をオイラー・コーシーの方程式という。

$$\boxed{x^2 y'' + axy' + by = 0} \tag{4.9}$$

ここで，a と b は定数である。この方程式の解として，

$$y = x^m$$

を仮定してみる。これを(4.9)式に代入すると，

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

$$m(m-1)x^m + amx^m + bx^m = 0$$

となる。$x^m \neq 0$ を仮定すると，

$$\boxed{m^2 + (a-1)m + b = 0} \tag{4.10}$$

が得られるが，これを(4.9)式の補助方程式という。この根は，

$$m = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \tag{4.11}$$

で与えられる。

(4.9)式の解は，補助方程式の根を用いて，次のイ，ロ，ハのようにして求められる。

イ）異なる実根の場合

補助方程式が異なる実根 m_1，m_2 を持つ場合，一般解は，

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

となる。

ロ）実重根の場合

補助方程式が重根をもつとき，$m = (1-a)/2$ であり，一般解は，

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{(1-a)/2}$$

で与えられる。

ハ）複素根の場合

補助方程式が複素根

$$m_1 = \mu + i\nu$$

$$m_2 = \mu - i\nu$$

をもつ場合，一般解は，全ての正の x に対して，

$$y = x^{\mu}[c_1 \cos(\nu \ln x) + c_2 \sin(\nu \ln x)]$$

で与えられる。

【例題 4.4】次の微分方程式を解け。

$$x^2 y'' + 4xy' - 10y = 0$$

【例題 4.5】次の微分方程式を解け。

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

第 5 章　2 階線形非同次微分方程式

5.1　2 階線形非同次微分方程式

前章では同次形の解法を説明したが，ここでは非同次方程式の解法を述べる。2 階線形非同次微分方程式

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)} \tag{5.1}$$

の一般解は，右辺を 0 と置いた同次形，

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.2}$$

の一般解を $y_h(x)$ とすると，

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)} \tag{5.3}$$

と表される。ここで，$y_p(x)$ は(5.1)式の特殊解であり，任意定数を含まない。

(5.1)式が定数係数の場合，$y_h(x)$ の求め方は前章で学習しているので，問題は特殊解 $y_p(x)$ を求めることに帰着する。

5.2　未定係数法

非同次方程式の特殊解 $y_p(x)$ を求める方法の一つに，未定係数法がある。全ての問題に適用できるわけではないが，定数 a と b を係数に有する定数係数非同次式，

$$\boxed{y'' + ay' + by = r(x)} \tag{5.4}$$

において，$r(x)$ がある種の関数である場合，比較的簡単に $y_p(x)$ を求められる。具体的には，表 5.1 を参照し，以下のイ，ロ，ハのようにして求める。

イ）(5.4)式の $r(x)$ が表 5.1 の第 1 列の関数ならば，y_p として，対応する第 2 列の関数を選ぶ。$y = y_p$，$y' = y'_p$，$y'' = y''_p$ とし，(5.4)式への代入により未定係数（K など）を決める。

ロ）表 5.1 より選択した y_p のいずれかの項が，同次式の一般解 y_h のいずれかの項と重複する場合，重複しなくなるような最低次数のべき関数 x^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をその項に掛ける。

ハ）$r(x)$ が表 5.1 の第 1 列のいくつかの行の和であるならば，第 2 列の対応する行の和をとる。

表 5.1　未定係数法

$r(x)$	$y_p(x)$ の選択
$ke^{\alpha x}$	$Ke^{\alpha x}$
$kx^n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$kx^n e^{\alpha x} (n = 0, 1, 2, \cdots)$	$\left(K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0\right) e^{\alpha x}$
$k \cos \omega x, k \sin \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$ke^{\alpha x} \cos \omega x, ke^{\alpha x} \sin \omega x$	$e^{\alpha x}\left(K \cos \omega x + M \sin \omega x\right)$

【例題 5.1】次の微分方程式を解け。

$$y'' + 4y = 8x^2$$

【例題 5.2】次の微分方程式を解け。

$y'' + 9y = 2x^2 + 4x + 7$

解）

はじめに，同次式

$y'' + 9y = 0$

を解く。この特性方程式は，

$\lambda^2 + 9 = 0$

$(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) = 0$

$\lambda = \pm 3i$

従って，同次式の一般解は，

$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

となる。

続いて，非同次式の特殊解 y_p を求める。表 5.1 を参照して，$r(x) = 2x^2 + 4x + 7$ は，kx^n の和であるから，

$y_p = K_2 x^2 + K_1 x + K_0$

を考える。

$y_p'' = 2K_2$

であるから，与式は，

$2K_2 + 9(K_2 x^2 + K_1 x + K_0) = 2x^2 + 4x + 7$

となる。両辺を比較すると，

$9K_2 = 2$

$9K_1 = 4$

$2K_2 + 9K_0 = 7$

なることが分かる。従って，

$K_2 = 2/9$

$K_1 = 4/9$

$K_0 = 59/81$

$\therefore y_p = \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{59}{81}$

以上より，与式の一般解は，

$y = y_h + y_p$

$= c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{59}{81}$

と求められる。

（解答終）

【例題 5.3】次の微分方程式を解け。

$y'' + 4y' + 5y = 3e^{-2x}$

解）

はじめに，同次式

$y'' + 4y' + 5y = 0$

の一般解 y_h を求める。この特性方程式は，

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

$\therefore \lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 5}}{2} = -2 \pm i$

$\therefore y_h = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

次に，非同次式の特殊解 y_p を求める。
$r(x) = 3e^{-2x}$ であるから，表 5.1 を参照して，

$y_p = Ke^{-2x}$

を仮定する。

$y'_p = -2Ke^{-2x}$

$y''_p = 4Ke^{-2x}$

であるから，与式は，

$(4K - 8K + 5K)e^{-2x} = 3e^{-2x}$

$\therefore Ke^{-2x} = 3e^{-2x}$

となる。両辺を比較すると，

$K = 3$

$\therefore y_p = 3e^{-2x}$

従って，与式の一般解は，

$y = y_h + y_p$

$\quad = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 3e^{-2x}$

と求まる。

（解答終）

【例題 5.4】次の微分方程式を解け。

$y'' + 5y' + 6y = 3e^{-2x} + e^{3x}$

【例題 5.5】次の微分方程式を解け。

$$y'' - 2y' + y = xe^x - e^x$$

解）

はじめに，同次式

$$y'' - 2y' + y = 0$$

の一般解 y_h を求める。この特性方程式は，

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\therefore \lambda = 1 \text{（重根）}$$

$$\therefore y_h = c_1 xe^x + c_2 e^x$$

次に，非同次式の特殊解 y_p を求める。$r(x) = xe^x - e^x$ であるから，表 5.1 を参照して，

$$y_p = K_1 xe^x + K_0 e^x$$

を選択したいが，y_h との重複を防ぐため，

$$y_p = K_1 x^3 e^x + K_0 x^2 e^x$$

とする。ここで，

$$\begin{aligned} y_p' &= K_1 x^3 e^x + 3K_1 x^2 e^x + K_0 x^2 e^x + 2K_0 xe^x \\ &= K_1 x^3 e^x + (3K_1 + K_0)x^2 e^x + 2K_0 xe^x \\ y_p'' &= K_1 x^3 e^x + 3K_1 x^2 e^x + (3K_1 + K_0)x^2 e^x \\ &\quad + 2(3K_1 + K_0)xe^x + 2K_0 xe^x + 2K_0 e^x \\ &= K_1 x^3 e^x + (6K_1 + K_0)x^2 e^x \\ &\quad + 2(3K_1 + 2K_0)xe^x + 2K_0 e^x \end{aligned}$$

であるから，　与式左辺は，

$$\begin{aligned} &\left[K_1 x^3 + (6K_1 + K_0)x^2 + 2(3K_1 + 2K_0)x + 2K_0\right]e^x \\ &-2\left[K_1 x^3 + (3K_1 + K_0)x^2 + 2K_0 x\right]e^x \\ &+\left(K_1 x^3 + K_0 x^2\right)e^x \\ &= (6K_1 x + 2K_0)e^x \end{aligned}$$

となる。これが右辺と等しいから，

$$K_1 = 1/6$$

$$K_0 = -1/2$$

であり，

$$y_p = \frac{1}{6}x^3 e^x - \frac{1}{2}x^2 e^x$$

と求まる。

従って，与式の一般解は，

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2\right)e^x \end{aligned}$$

となる。

（解答終）

5.3　定数変化法

未定係数法は，定数係数であり，かつ $r(x)$ が特定の関数である場合にのみ適用できる。一方で，詳細は割愛するが，(5.1)式で与えられる 2 階線形非同次微分方程式の特殊解は，定数変化法と呼ばれる手法を用いると，

$$\boxed{y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,dx} \qquad (5.5)$$

と求められる。ここで，y_1 と y_2 は同次式(5.2)の解の基底である。また，W は y_1 と y_2 のロンスキアンであり，

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \tag{5.6}$$

で与えられる。

(5.5)式は $r(x)$ によらない一般的なものであるが，積分が解析的にできない場合や，できても難しい場合が多いので，可能であるならば未定係数法を用いた方が簡便である。

【例題 5.6】次の微分方程式を解け。

$$y'' + y = \sec x$$

MEMO

第 6 章　連立微分方程式

6.1　連立微分方程式

独立変数を x とする n 個の未知関数 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ について，

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \cdots, y_n) \\ &\ \vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

の組を（1 階の）連立微分方程式という。

(6.1)式が $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ について線形であるならば，即ち，

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ &\ \vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

と書けるならば，これを線形連立微分方程式という。ベクトルを用いると，(6.2)式は，

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \tag{6.3}$$

と書ける。ここで，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

である。(6.3)式は，恒等的に $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$ のとき同次であるといい，$\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{0}$ のとき非同次であるという。

6.2　定数係数同次連立方程式

同次連立方程式

$$\boxed{\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}} \tag{6.4}$$

の解法を例題に基づき説明する。但し，$\boldsymbol{A}$ は各成分が定数である定数行列とする。

【例題 6.1】 次の連立方程式の一般解を求めよ。

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned}$$

【例題 6.2】次の連立方程式（特性方程式が重根をもつ場合）の一般解を求めよ。

$$y_1' = -y_2$$
$$y_2' = y_1 + 2y_2$$

解）

$D = d/dx$ とすると，与式は，

$$Dy_1 + y_2 = 0$$
$$-y_1 + (D-2)y_2 = 0$$

と書ける。これを，

$$\begin{bmatrix} D & 1 \\ -1 & D-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と行列で表記する。この解を，

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}e^{\lambda x}$$

と仮定して上式に代入すると，

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

従って，特性方程式は，

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

$$(\lambda-1)^2=0$$

となるが，この根は，

$$\lambda=1$$

と重根である。

第 1 の独立な解を

$$\boldsymbol{y}^{(1)}=\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1^{(1)} \\ c_2^{(1)} \end{bmatrix}e^{x}$$

と表す。(1)式に $\lambda=1$ を代入すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1^{(1)} \\ c_2^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore c_1^{(1)}+c_2^{(1)}=0$$

$$\therefore c_2^{(1)}=-c_1^{(1)}$$

$$\therefore \boldsymbol{y}^{(1)}=\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}$$

第 2 の独立な解を，第 1 の解との重複を避けるため，

$$\boldsymbol{y}^{(2)}=\begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix}e^{x}+c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}xe^{x}$$

と置く。（上式右辺第 2 項は， $\boldsymbol{y}^{(1)}$ に x を掛けた形となっている。なお，右辺は第 2 項だけでなく，第 1 項も必要であることに注意されたし。）これを行列表示での連立方程式に代入すると，

$$\begin{bmatrix} D & 1 \\ -1 & D-2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} c_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}xe^{x}+\begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix}e^{x}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D(xe^{x}) & xe^{x} \\ -xe^{x} & (D-2)xe^{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} De^{x} & e^{x} \\ -e^{x} & (D-2)e^{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D & 1 \\ -1 & D-2 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} c_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}xe^{x}+\begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix}e^{x}\right\}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D(xe^{x}) & xe^{x} \\ -xe^{x} & (D-2)xe^{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} De^{x} & e^{x} \\ -e^{x} & (D-2)e^{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{x}+xe^{x} & xe^{x} \\ -xe^{x} & e^{x}+xe^{x}-2xe^{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} e^{x} & e^{x} \\ -e^{x} & e^{x}-2e^{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+x & x \\ -x & 1-x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1^{(2)}+c_2^{(2)} \\ -c_1^{(2)}-c_2^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore c_3+c_1^{(2)}+c_2^{(2)}=0$$

$$\therefore c_2^{(2)}=-c_3-c_1^{(2)}$$

となる。従って，第 2 の解は，

$$\boldsymbol{y}^{(2)}=c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}xe^{x}+\begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ -c_3-c_1^{(2)} \end{bmatrix}e^{x}$$

$$=c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}xe^{x}+c_3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}+c_1^{(2)}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}$$

となる。

以上より，与式の一般解は，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{(1)}+\boldsymbol{y}^{(2)}$$

$$=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}+c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}xe^{x}+c_3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}$$

$$+c_1^{(2)}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}$$

$$=K_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}xe^{x}+K_1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}+K_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}$$

と求められる。スカラー表記では，

$$y_1=K_1xe^{x}+K_2e^{x}$$

$$y_2=-K_1xe^{x}-(K_1+K_2)e^{x}$$

である。

（解答終）

6.3　定数係数非同次連立方程式

非同次連立方程式

$$\boxed{\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}} \tag{6.5}$$

の解法を例題に基づき説明する。但し，$\boldsymbol{A}$ は定数行列とする。

【例題 6.3】 次の連立方程式の一般解を求めよ。

$$y_1' = y_2 + e^{3x}$$
$$y_2' = y_1 - 3e^{3x}$$

6.4　消去法による解法（付録）

前節までは，連立方程式を，

$$\begin{bmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}$$

のように行列形式で表して解いた。ここでは，これと異なる手順を踏む，消去法と呼ばれる解法を説明する。

連立方程式

$$P_{11}(D)y_1 + P_{12}(D)y_2 = g_1(x) \tag{6.6}$$

$$P_{21}(D)y_1 + P_{22}(D)y_2 = g_2(x) \tag{6.7}$$

を考える。例えば，$\left[P_{22}\times(6.6)\text{式}\right]-\left[P_{12}\times(6.7)\text{式}\right]$ より y_2 を消去すると，

$$\left[P_{11}(D)P_{22}(D)-P_{12}(D)P_{21}(D)\right]y_1$$
$$= P_{22}(D)g_1(x)-P_{12}(D)g_2(x)$$

となる。形式的に行列式を用いると，

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} g_1(x) & P_{12}(D) \\ g_2(x) & P_{22}(D) \end{vmatrix}$$

と書ける。これは y_1 のみに関する方程式であるので，前章までのようにして解ける。

一方，連立方程式から y_1 を消去すると，

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} y_2 = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & g_1(x) \\ P_{21}(D) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

となる。これは y_2 のみに関する方程式なので，これも解ける。

最後に，求めた y_1 と y_2 を与式に代入し，y_1 の未定係数と y_2 の未定係数との関係を求める。

【例題 6.4】例題 6.2 に示した連立方程式

$$y_1' = -y_2$$
$$y_2' = y_1 + 2y_2$$

を消去法により解け。

解）

$D = d/dx$ として与式を変形すると，

$$Dy_1 + y_2 = 0$$
$$-y_1 + (D-2)y_2 = 0$$

と書ける。これから y_2 を消去すると，

$$\begin{vmatrix} D & 1 \\ -1 & D-2 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & D-2 \end{vmatrix}$$
$$\therefore (D^2 - 2D + 1)y_1 = 0$$

となる。これは，y_1 に関する定数係数 2 階同次方程式である。特性方程式とその根は，

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda - 1)^2 = 0$$
$$\therefore \lambda = 1$$

となる。重根であるから，一般解は，

$$y_1 = c_1 x e^x + c_2 e^x$$

となる。

また，連立方程式から y_1 を消去すると，

$$\begin{vmatrix} D & 1 \\ -1 & D-2 \end{vmatrix} y_2 = \begin{vmatrix} D & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\therefore (D^2 - 2D + 1)y_2 = 0$$

となる。特性方程式とその根は，

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda - 1)^2 = 0$$
$$\therefore \lambda = 1$$

となる。重根であるから，一般解は，

$$y_2 = c_3 x e^x + c_4 e^x$$

となる。

得られた y_1 と y_2 を与式に代入すると，

$$\begin{cases} c_1 x e^x + c_1 e^x + c_2 e^x = -c_3 x e^x - c_4 e^x \\ c_3 x e^x + c_3 e^x + c_4 e^x \\ = c_1 x e^x + c_2 e^x + 2c_3 x e^x + 2c_4 e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c_1 + c_3)x + c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ (-c_1 - c_3)x - c_2 + c_3 - c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ -c_2 + c_3 - c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} c_3 = c_1 \\ c_4 = -c_1 - c_2 \end{cases}$$

と求まる。

以上から，与式の一般解は，

$$y_1 = c_1 x e^x + c_2 e^x$$
$$y_2 = -c_1 x e^x - (c_1 + c_2)e^x$$

となる。これは例題 6.2 の解と一致する。

（解答終）

【例題 6.5】例題 6.3 に示した連立方程式

$$y_1' = y_2 + e^{3x}$$
$$y_2' = y_1 - 3e^{3x}$$

を消去法により解け。

解）

$D = d/dx$ とすると，与式は，

$$Dy_1 - y_2 = e^{3x}$$
$$-y_1 + Dy_2 = -3e^{3x}$$

と変形できる。これから，

$$\begin{vmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} e^{3x} & -1 \\ -3e^{3x} & D \end{vmatrix}$$
$$\therefore (D^2 - 1)y_1 = 0 \qquad (1)$$

が得られる。また，

$$\begin{vmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{vmatrix} y_2 = \begin{vmatrix} D & e^{3x} \\ -1 & -3e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \left(D^2 - 1\right) y_2 = -8e^{3x} \qquad (2)$$

も得られる。

(1)を解く。特性方程式はとその根は,

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \lambda = \pm 1$$

であるから，一般解は,

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

と求まる。

(2)を解く。右辺を 0 と置いた同次式の解は,

$$y_{2h} = c_3 e^x + c_4 e^{-x}$$

である。特殊解を

$$y_{2p} = c_5 e^{3x}$$

と仮定すると，(2)式から,

$$9c_5 e^{3x} - c_5 e^{3x} = -8e^{3x}$$

$$\therefore c_5 = -1$$

$$\therefore y_{2p} = -e^{3x}$$

と求められる。従って，(2)式の一般解は,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_{2h} + y_{2p} \\ &= c_3 e^x + c_4 e^{-x} - e^{3x} \end{aligned}$$

となる。

求めた y_1 と y_2 を与式に代入すると,

$$\begin{cases} c_1 e^x - c_2 e^{-x} = c_3 e^x + c_4 e^{-x} - e^{3x} + e^{3x} \\ c_3 e^x - c_4 e^{-x} - 3e^{3x} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 3e^{3x} \end{cases}$$

$$\therefore \left(c_1 - c_3\right) e^x - \left(c_2 + c_4\right) e^{-x} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} c_3 = c_1 \\ c_4 = -c_2 \end{cases}$$

が得られる。

以上から，与式の一般解は,

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$y_2 = c_1 e^x - c_2 e^{-x} - e^{3x}$$

となる。これは例題 6.3 の解と一致する。

（解答終）