電気電子情報数学及び演習Ⅱ－演習問題（４）

問題 3.1（p.99）

　つぎの級数は収束するか、あるいは発散するか。比判定法を用いて判定せよ。

１３．　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{i}{2}\right)^n$

問題 3.2（p.105）

　つぎのべき級数の収束領域を比判定法により求めよ。

１．　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(z + i\sqrt{2})^n$　　　　７．　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}(z + 2 - i)^n$

９．　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4-2i}{1+5i}\right)^n z^n$　の収束領域をコーシー・アダマールの公式を用いて求めよ。

問題 3.4（p.118）

７．　$f(z) = \dfrac{1}{z+3i}$ をマクローリン級数に展開せよ。また、収束半径を求めよ。

１７．　$\dfrac{1}{z}$ を $z_0 = 2$ を中心としてテイラー級数に展開せよ。また、収束半径を求めよ。

.1 (p.99)

13. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{i}{2}\right)^n \qquad z_n = n^2\left(\frac{i}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2\left(\frac{i}{2}\right)^{(n+1)}}{n^2\left(\frac{i}{2}\right)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\left(\frac{i}{2}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{i}{2}\right| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

∴絶対収束 //

3.2 (p.105)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n(z+i\sqrt{2})^n \qquad f_n(z) = n(z+i\sqrt{2})^n$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(z+i\sqrt{2})^{n+1}}{n(z+i\sqrt{2})^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}(z+i\sqrt{2})\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)(z+i\sqrt{2})\right| = \left|(z+i\sqrt{2})\right|$$

$L<1$ なら収束するから.

$$\left|(z+i\sqrt{2})\right| < 1$$

∴中心$=(0,-\sqrt{2})$, 半径1の円の内側で収束する //

3.2 (p105)

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}(z+2-i)^n$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(z+2-i)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}}}{\frac{(z+2-i)^n}{(1+i)^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z+2-i)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} \frac{(1+i)^n}{(z+2-i)^n} \right|$$

$$= \left| \frac{(z+2-i)}{(1+i)} \right| = \left| \frac{1}{1+i} \right| \cdot |z+2-i| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z+2-i|$$

$L<1$で収束するから

$\frac{1}{\sqrt{2}} |z+2-i| < 1 \longrightarrow |z+2-i| < \sqrt{2}$

∴ $(-2, 1)$を中心とする半径$\sqrt{2}$の円の内側

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4-2i}{1+5i}\right)^n z^n$

$a_n = \left(\frac{4-2i}{1+5i}\right)^n$, $z_0 = 0$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{4-2i}{1+5i}\right)\left(\frac{4-2i}{1+5i}\right)^{-(n+1)} \right| = \left| \frac{1+5i}{4-2i} \right| = \left| \frac{1}{20}(1+5i)(4+2i) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{20}(4+2i+20i-10) \right| = \left| \frac{1}{20}(-6+22i) \right| = \left| -\frac{3}{10} + i\frac{11}{10} \right|$$

$$= \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{121}{100}} = \frac{\sqrt{130}}{10}$$

∴ 原点中心の半径$\frac{\sqrt{130}}{10}$の円の内側

.4 (p.118)

7、 $f(z) = \dfrac{1}{z+3i} = \dfrac{1}{3i} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{z}{3i}} = \dfrac{1}{3i} \cdot \dfrac{1}{1-\left(-\frac{z}{3i}\right)}$

$\therefore f(z) = \dfrac{1}{3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{z}{3i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{3i} \cdot \left(-\dfrac{z}{3i}\right)^n$

$L = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{\left(-\frac{z}{3i}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{z}{3i}\right)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -\dfrac{z}{3i} \right|$

$L < 1$ で収束するので、

$\left| -\dfrac{z}{3i} \right| < 1 \to \left| -\dfrac{1}{3i} \right| |z| < 1 \to \left| \dfrac{1}{3}i \right| |z| < 1$

$\therefore \dfrac{1}{3}|z| < 1 \to |z| < 3$ ∴収束半径は3

17、 $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z-2+2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\frac{z-2}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{2}\right)}\right)$

$= \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2} (-1)^n \cdot (z-2)^n \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (z-2)^n$

$L = \left| -\dfrac{z-2}{2} \right| = \left| -\dfrac{1}{2} \right| |z-2| = \dfrac{1}{2} |z-2| < 1$

$\therefore |z-2| < 2 \to$ 収束半径は2