電気電子情報数学及び演習Ⅱ－演習問題（２）解答例

<u>問題 1.4 (p.26)</u>

４． $f(z)=i\ /\ z^5$ に関し、極形式のコーシー・リーマンの方程式を用いて解析性を調べよ。
また、解析的である場合、導関数を求めよ。

（解答例）

$z=re^{i\theta}=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$とおくと、

$$f(z)=\frac{i}{(x+iy)^5}=\frac{i}{r^5(\cos 5\theta+\ i\sin 5\theta)}$$

$$=\frac{i}{r^5}\frac{(\cos 5\theta-\ i\sin 5\theta)}{(\cos 5\theta+\ i\sin 5\theta)(\cos 5\theta-\ i\sin 5\theta)}$$

$$=\frac{i}{r^5}\ (\cos 5\theta-\ i\sin 5\theta)=\frac{1}{r^5}\ (\sin 5\theta+i\cos 5\theta)$$

$$\equiv u+iv$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{5}{r^6}\ \sin 5\theta,\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{5}{r^6}\ \cos 5\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{5}{r^5}\ \cos 5\theta,\qquad \frac{\partial v}{\partial \theta}=-\frac{5}{r^5}\ \sin 5\theta$$

であるから、コーシー・リーマンの方程式を用いると、

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=-\frac{5}{r^6}\ \sin 5\theta,\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{5}{r^6}\ \cos 5\theta$$

が成立する。ゆえに、$f(z)=i\ /\ z^5$はあらゆる z に対して解析的である。

この際の導関数は、$f'(z)=e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ であるので、

$$f'(z)=e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=e^{-i\theta}\left(-\frac{5}{r^6}\ \sin 5\theta-i\frac{5}{r^6}\ \cos 5\theta\right)=-i\frac{5}{r^6}e^{-i\theta}(\ \cos 5\theta-i\sin 5\theta)$$

$$=-i\frac{5}{r^6}e^{-i\theta}e^{-i5\theta}=-i\frac{5}{r^6}e^{-i6\theta}=-i\frac{5}{r^6e^{i6\theta}}=-i\frac{5}{(re^{i\theta})^6}=\frac{-i5}{z^6}$$

（導関数別解）

$$f(z)=\frac{q(z)}{g(z)}\text{のとき、}f'(z)=\frac{q'(z)g(z)-q(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2}\text{なので}$$

$$f(z)=\frac{i}{z^5}\text{の導関数}f'(z)\text{は}\quad f'(z)=\frac{-i5z^4}{(z^5)^2}=\frac{-i5z^4}{z^{10}}=\frac{-i5}{z^6}$$

６． $f(z)=z+\frac{1}{z}$に関し、コーシー・リーマンの方程式を用いて解析性を調べよ。

（解答例）

$z=x+iy$として

$$f(z)=z+\frac{1}{z}=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\equiv u+iv$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{x'(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 + \frac{x'(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 + \frac{y'(x^2+y^2) - y(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 - \frac{y'(x^2+y^2) - y(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

が成立するので、あらゆる z に対して解析的である。

（別解）極形式による判定

$z = re^{i\theta}$として

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \equiv u + iv$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(r - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \left(r + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta$$

極形式のコーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

が成立するので、あらゆる z に対して解析的である。

１１． $f(z) = \mathrm{Re}(z^3)$ に関し、コーシー・リーマンの方程式を用いて解析性を調べよ。
また、解析的である場合、導関数を求めよ。

（解答例）

$z = x + iy$ とすると $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ なので

$f(z) = \mathrm{Re}(z^3) = x^3 - 3xy^2$より、$u = x^3 - 3xy^2, v = 0$であり

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

となり，コーシー・リーマンの方程式を満たさないため，解析的ではない。

２１．　$v(x,y) = -e^{-x}\sin y$ が調和関数であるかどうか調べよ。
　　　もし調和関数ならば、対応する解析関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を求めよ。

（解答例）

$\nabla^2 v(x,y)$を求める。

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\sin y, \qquad v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -e^{-x}\sin y$$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x}\cos y, \qquad v_{yy} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^{-x}\sin y$$

となり、$\nabla^2 v(x,y)$は

$$\nabla^2 v(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y = 0$$

となるため、ラプラスの方程式を満足し、$v(x,y)$ は調和関数である。

また、$u(x,y)$ を求めるために、コーシー・リーマンの方程式を利用すると、

$$u_x = v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x}\cos y, \qquad u_y = -v_x = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x}\sin y$$

となる。ここで、u_y を y について積分すると、

$$u(x,y) = \int u_y dy + h(x) = -\int e^{-x}\sin y\, dy + h(x) = e^{-x}\cos y + h(x)$$

となる。さらに、$u(x,y)$をxで偏微分し、コーシー・リーマンの方程式より、

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\cos y + \frac{dh(x)}{dx} = v_y = -e^{-x}\cos y$$

となるため、

$$\frac{dh(x)}{dx} = 0, \qquad h(x) = c$$

となる。つまり、

$$u(x,y) = e^{-x}\cos y + c$$

が求められ、$f(z)$ は、

$$f(z) = e^{-x}\cos y + c - ie^{-x}\sin y = e^{-x}(\cos y - i\sin y) + c$$

となる。

問題 1.5 (p.31)

６．複素数 $z = x + iy$ とするとき、$x > 0, y < 0$の領域をz平面上に図示せよ。
　　また、$w = f(z) = z^2$ とするとき、$x > 0, y < 0$ の領域の像を求めてw 平面上に図示せよ。

（解答例）

$x > 0, y < 0$ の領域は図 1(a)の通り。

$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると,

$x > 0, y < 0$ は $r > 0,\ -\pi/2 < \theta < 0$ と同じである。

ここで、$w = u + iv = Re^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi)$ とすると,

$w = z^2 = r^2 e^{i2\theta} = Re^{i\phi}$であるので

$r > 0,\ -\pi/2 < \theta < 0$ は $R > 0,\ -\pi < \phi < 0$ へ写像される。

したがって、$v < 0,\ u$ はすべての実数、であるので図 1(b)の通りである。

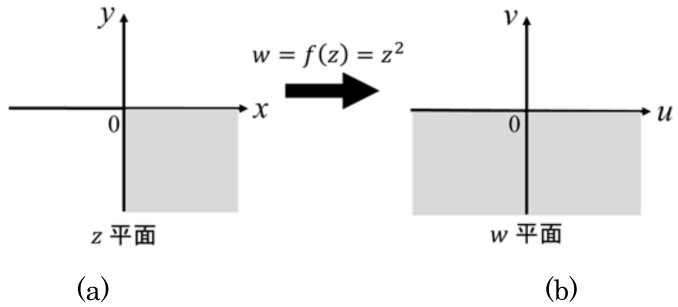

図 1

<u>問題 1.6 (p.36)</u>

z がつぎの場合の $w = e^z$ を計算し、実部 $\mathrm{Re}\{w\}$、虚部 $\mathrm{Im}\{w\}$、及び$|w|$を求めよ。

２． $z = 1 + i$

（解答例）

$$w = e^z = e^{1+i} = e^1 e^i = e(\cos 1 + i \sin 1)$$

$$\mathrm{Re}\{w\} = e \cos 1$$

$$\mathrm{Im}\{w\} = e \sin 1$$

$$|w| = \sqrt{(\mathrm{Re}\{w\})^2 + (\mathrm{Im}\{w\})^2} = \sqrt{e^2(\cos^2 1 + \sin^2 1)} = e$$

５． $z = -\pi i/2$

（解答例）

$$w = e^z = e^{\frac{-\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

$$\mathrm{Re}\{w\} = 0$$

$$\mathrm{Im}\{w\} = -1$$

$$|w| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

１２．$e^{2z} = 2$ のすべての解を求めよ。

（解答例）

$z = x + iy$ とすると、

$$e^{2z} = e^{2x+i2y} = e^{2x}e^{i2y} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = 2$$

となる。両辺の実部、虚部がそれぞれ等しいとおくと次式が得られる。

$$e^{2x} \cos 2y = 2 \quad \cdots (1)$$

$$e^{2x} \sin 2y = 0 \quad \cdots (2)$$

$e^{2x} > 0$ より、式(2)において $\sin 2y = 0$ である必要があり、かつ式(1)において $\cos 2y > 0$ を満たす必要がある。したがって、

$$2y = \pm 2\pi n \qquad (n = 0,1,2 \cdots) \qquad \cdots (3)$$

$$y = \pm \pi n \qquad (n = 0,1,2 \cdots) \qquad \cdots (3)$$

となる。式(1)において、$\cos 2y = \cos(\pm 2\pi n) = 1$ となり、$e^{2x} = 2$となるので、$2x = \ln 2$

$$x = \frac{1}{2} \ln 2$$

が得られる。よって、$z = x + iy = \dfrac{1}{2}\ln 2 \pm i\pi n \quad (n$ は全ての整数$)$となる。

<u>問題 1.7 (p.41)</u>

１． $\cosh z=\dfrac{1}{2}(e^z+e^{-z})$、 $\sinh z=\dfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})$ を利用して、次式がなりたつことを示せ。

$$\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$$
$$\sinh z=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$$

（解答例）$z=x+iy$とすると、

$$\begin{aligned}\cosh z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=\frac{1}{2}\left(e^{x+iy}+e^{-x-iy}\right)&=\frac{1}{2}\left(e^xe^{iy}+e^{-x}e^{-iy}\right)\\&=\frac{1}{2}\{e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)\}\\&=\frac{1}{2}\{(e^x+e^{-x})\cos y+i(e^x-e^{-x})\sin y\}\\&=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\cos y+i\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\sin y\\&=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=\frac{1}{2}\left(e^{x+iy}-e^{-x-iy}\right)&=\frac{1}{2}\left(e^xe^{iy}-e^{-x}e^{-iy}\right)\\&=\frac{1}{2}\{e^x(\cos y+i\sin y)-e^{-x}(\cos y-i\sin y)\}\\&=\frac{1}{2}\{(e^x-e^{-x})\cos y+i(e^x+e^{-x})\sin y\}\\&=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\cos y+i\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\sin y\\&=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y\end{aligned}$$

$u+iv$ の形で、つぎを求めよ。

４． $w=\cos(1+i)$

（解答例） $w=\cos(1+i)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i-1}+e^{-i+1}\right)$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\left(e^ie^{-1}+e^{-i}e^1\right)=\frac{1}{2}\left((\cos 1+i\sin 1)e^{-1}+(\cos 1-i\sin 1)e^1\right)\\&=\frac{1}{2}\left((e^{-1}+e^1)\cos 1+i(e^{-1}-e^1)\sin 1\right)=\cos 1\left[\frac{1}{2}(e^1+e^{-1})\right]-i\sin 1\left[\frac{1}{2}(e^1-e^{-1})\right]\\&=\cos 1\cosh 1-i\sin 1\sinh 1\end{aligned}$$

１０． $\cosh z=0$ の解を全て求めよ。

ヒント： $\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$ を利用する。

（解答例）

$$\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y=0$$

両辺の実部と虚部をそれぞれ等しいと置くと、

$$\cosh x\cos y=0 \qquad \cdots(1)$$
$$\sinh x\sin y=0 \qquad \cdots(2)$$

式(1)において、任意の x に対して$\cosh x \geq 1$であるから、$\cos y = 0$ が成立する必要がある。よって、

$$y = \frac{\pi}{2}(2n+1) \cdots (3)$$

となる。式(2)において、式(3)より $\sin y = \sin\frac{\pi}{2}(2n+1) = (-1)^n$ であるので、

$\sinh x = 0$ となる必要がある。したがって、$x = 0$ が得られる。ゆえに、

$$z = x + iy = 0 + i\frac{\pi}{2}(2n+1) = i\frac{\pi}{2}(2n+1)$$

<u>問題 1.8 (p.46)</u>

z について解け。

１６．　$\ln z = -2 - \frac{3i}{2}$

（解答例）　$z = e^{-2-\frac{3i}{2}\pm 2n\pi i} = e^{-2-\frac{3i}{2}}\ e^{\pm 2n\pi i} = e^{-2-\frac{3i}{2}}$

<u>問題（教科書外）</u>：

対数関数 $w = \ln z$ の解析性を調べ、その導関数を求めよ。ただし、$z = x + iy$ とする。

ヒント：$w = \ln z = \ln|z| + i\arg(z) = u + iv$

$$\ln|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$\arg(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

コーシー・リーマンの方程式を満足するか？

（解答例）

$w = \ln z = \ln|z| + i\arg(z) = u + iv$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\tan^{-1}\frac{y}{x}\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\tan^{-1}\frac{y}{x}\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

コーシー・リーマンの方程式を満たすので、解析的である

導関数 $\frac{dw}{dz} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \ = \ \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{(x+iy)} = \frac{1}{z}$$