

電気電子情報数学及び演習 1 演習問題 6

注意事項:

- 解答用エクセルファイルに, 解答を記入したファイル名を学籍番号 (半角数字).xlsx として次週の 13 時までに提出すること
- 本演習に関して質問がある場合には, 授業時間内に演習担当者もしくは kazumasa@vos.nagaokaut.ac.jp (高橋) 宛にメールすること。

1. 次の行列の固有値とそれに対する固有空間を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{固有値は } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 固有空間は } W_{\textcircled{1}} = \left\langle \begin{bmatrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{bmatrix} \right\rangle, W_{\textcircled{2}} = \left\langle \begin{bmatrix} \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \\ \textcircled{8} \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{固有値は } \textcircled{9}, \textcircled{10}, \textcircled{11} \text{ 固有空間は } W_{\textcircled{9}} = \left\langle \begin{bmatrix} \textcircled{12} \\ \textcircled{13} \\ \textcircled{14} \end{bmatrix} \right\rangle, W_{\textcircled{10}} = \left\langle \begin{bmatrix} \textcircled{15} \\ \textcircled{16} \\ \textcircled{17} \end{bmatrix} \right\rangle, W_{\textcircled{11}} = \left\langle \begin{bmatrix} \textcircled{18} \\ \textcircled{19} \\ \textcircled{20} \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$(3) \begin{bmatrix} 17 & -2 & 4 \\ 28 & -1 & 8 \\ -42 & 6 & -9 \end{bmatrix}. \quad \text{固有値は } \textcircled{21}, \textcircled{22}, \text{ 固有空間は } W_{\textcircled{21}} = \left\langle \begin{bmatrix} \textcircled{23} \\ \textcircled{24} \\ \textcircled{25} \end{bmatrix} \right\rangle, W_{\textcircled{22}} = \left\langle \begin{bmatrix} \textcircled{26} \\ \textcircled{27} \\ \textcircled{28} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textcircled{29} \\ \textcircled{30} \\ \textcircled{31} \end{bmatrix} \right\rangle,$$

2. 次の行列は対角化可能か, 可能ならば対角化せよ. (対角化できない場合は行列成分の解答欄は空欄にすること.)

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{対角化は } \textcircled{32} \text{ (可能 / 不可能)}, \text{ 対角化した行列は } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \textcircled{33} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{34} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{35} \end{bmatrix} \text{ (順序は任意).}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{対角化は } \textcircled{36} \text{ (可能 / 不可能)}, \text{ 対角化した行列は } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \textcircled{37} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{38} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{39} \end{bmatrix} \text{ (順序は任意).}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}. \quad \text{対角化は } \textcircled{40} \text{ (可能 / 不可能)}, \text{ 対角化した行列は } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \textcircled{41} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{42} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{43} \end{bmatrix} \text{ (順序は任意).}$$

3. 3 行 3 列の行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ に関して以下の設問に答えよ。(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\text{固有値 } \textcircled{44} \text{ のとき, 固有ベクトル } a \begin{bmatrix} \textcircled{45} \\ \textcircled{46} \\ \textcircled{47} \end{bmatrix} \quad (a \neq 0),$$

$$\text{固有値 } \textcircled{48} \text{ のとき固有ベクトル } b \begin{bmatrix} \textcircled{49} \\ \textcircled{50} \\ \textcircled{51} \end{bmatrix} \quad (b \neq 0),$$

$$\text{固有値 } \textcircled{52} \text{ のとき固有ベクトル } c \begin{bmatrix} \textcircled{53} \\ \textcircled{54} \\ \textcircled{55} \end{bmatrix} \quad (c \neq 0)$$

(2) 行列に関する方程式, $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ の係数 a, b, c を求めよ。

$$a = \textcircled{56}, b = \textcircled{57}, c = \textcircled{58}$$

(3) (2) の結果を用いて $A^5 - 6A^3 - 4A^2 + 18I$ を計算せよ。

$$\begin{bmatrix} \textcircled{59} & \textcircled{60} & \textcircled{61} \\ \textcircled{62} & \textcircled{63} & \textcircled{64} \\ \textcircled{65} & \textcircled{66} & \textcircled{67} \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$ のとき, ケーリー・ハミルトンの定理を用いて A^{20} を求めよ。

$$A^{20} = \textcircled{68} \begin{bmatrix} \textcircled{69} & \textcircled{70} \\ \textcircled{71} & \textcircled{72} \end{bmatrix}$$