数学Ⅱ 前半試験　　20315784 佐藤凌雅

1 (1) $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{(1-i)}{2} = \underline{\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}}$ //

(2) $z\bar{z} = (1+i)(1-i) = \underline{2}$ //

(3) $|z| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \underline{\sqrt{2}}$ //

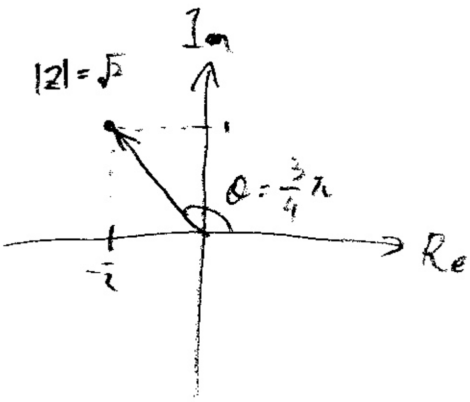
(4) $z^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = \underline{2i}$ //

2. (1) $z = -1 + i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}(-1) = \frac{3}{4}\pi$

$\therefore\ z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$ //



(2) $w = \sqrt{i}$

$z = i$ とする

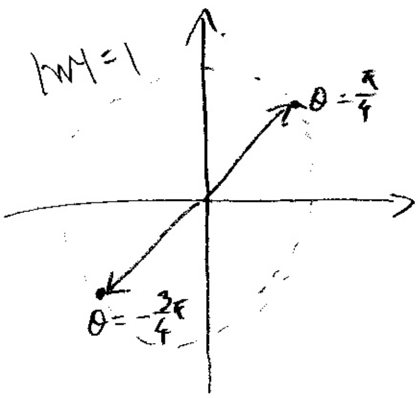
$z = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}$ $(n \in \mathbb{Z})$

$w = z^{\frac{1}{2}}$

$= e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4n\pi}{4})}$

$\frac{\pi + 4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$w_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $w_2 = e^{-i\frac{3}{4}\pi}$ //



3. $f(z) = z + \bar{z}$

$z = x + iy$ として

$f(z) = (x+iy)(x-iy) = 2x$

$u = 2x$, $v = 0$ とおいて

$u_x = 2$ $\quad$ $v_x = 0$

$u_y = 0$ $\quad$ $v_y = 0$

これは、コーシーリーマンの関係式を満たさないので、解析的でない

4

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 　　$a_n = \dfrac{1}{n^2}$ として

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{n^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = 1$$

∴ 中心 0, 半径 1 の円内部で収束 //

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(z-1)^n$ 　　$a_n = \dfrac{2^n}{n}$ として

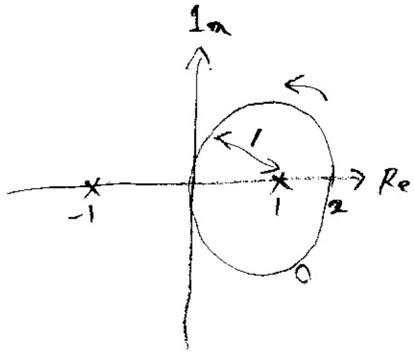
$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}$$

∴ 中心 $(x, y) = (1, 0)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円内部で収束 //

5. $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1} = \frac{z^2+1}{(z+1)(z-1)} \to z_0 = \pm 1$$

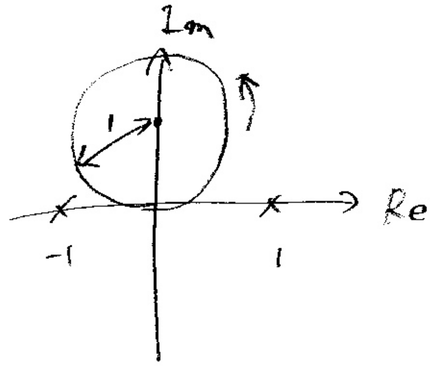


(1) $z_0 = 1$ がC内部に存在.

・$z = 1$ の留数は

$$\underset{z=1}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2+1}{z+1} = 1$$

よって $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 2\pi i \times (1) = \underline{2\pi i}$ //



(2) 右図より、積分路内に極が存在しない

すなわち、積分路内部では解析的.

解析的な領域での周回積分はコーシーの

積分定理より結果が0となるので、

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 0$$

//

6. (1) $\frac{1}{z}$ $z_0 = i$ を中心にテイラー展開

テイラー級数は $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-i}{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-i}{i}\right)}$$

$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ の関係を用いて

$$f(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{i}\right)^n = -i \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{i}\right)^n (z-i)^n$$

$$= -i \sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^n = \underline{-\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} (z-i)^n}$$

収束半径は

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-i^{n+2}(z-i)^{n+1}}{-i^{n+1}(z-i)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| i \cdot (z-i) \right|$$

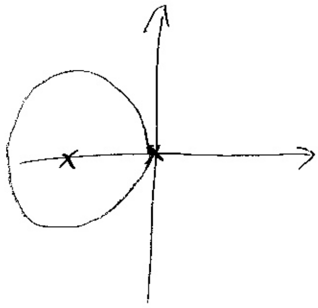
$$= |i|\,|z-i| = |z-i|$$

$$|z-i| < 1$$

∴ 収束半径は 1

6. (2)

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} \qquad z_0 = 0,\ -1$$



$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

$0 < |z+1| < 1$ に対して $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z+1)^n}$ が欲しい

第2項はすでにOKなので、

第1項について

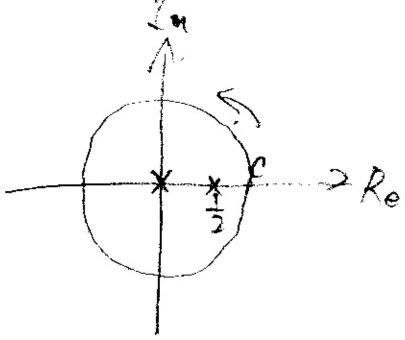
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1)-1} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n$$

$$f(z) = -\frac{z}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n$$

問7.

(1) $\oint_C \frac{2z+1}{2z^2-z}\,dz$

$$f(z)=\frac{2z+1}{2z^2-z}=\frac{2z+1}{z(2z-1)} \to z_0=0,\ \frac{1}{2}$$



$z_0=0,\ \frac{1}{2}$ は2つとも C内部にある

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0} z\cdot f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{2z+1}{2z-1}=-1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot f(z)=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{2z+1}{z}=2$$

よって $\oint_C \frac{2z+1}{2z^2-z}\,dz=2\pi i(-1+2)=\underline{-2\pi i}$ //

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4x^2+1}\,dx$

$f(z)=\frac{1}{4z^2+1}$ とする　$z=re^{i\theta}$ として　$4z^2+1=4\cdot(r^2e^{i2\theta})+1=0$

$$4r^2e^{i2\theta}=-1 \to r^2e^{i2\theta}=-\frac{1}{4} \to r=\frac{1}{2},\ e^{i2\theta}=-1$$

$$\theta=\frac{1}{2}(2\pi n+\pi)$$

このうち上半面の極は $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{i}{2}$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}} f(z)=-\frac{i}{4}$$

よって留数定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4x^2+1}\,dx=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right)=-\frac{2\pi(-1)}{4}=\underline{\frac{\pi}{2}}$$ //