
教科書 p. 15，問題 1.2，2

次の微分方程式について，手計算により方向場を図示せよ。

$\boxed{y' = 2x}$

解）

適当な x に対する y' の計算結果を表 1 に示す。また，この y' を傾きとする方向場を図 1 に示す。

表 1　数値データ

x	$y' = 2x$
0	0
±0.5	±1
±1	±2
±1.5	±3
±2	±4

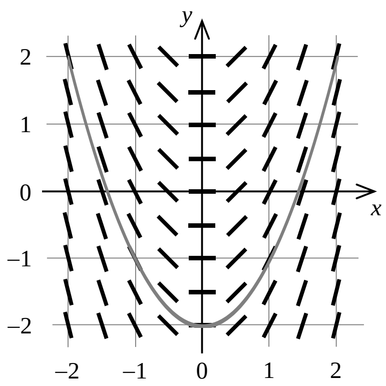

図 1　方向場の計算結果と解析解の一例

なお，微分方程式の一般解は目察により，

$$y = x^2 + c$$

となることが分かる。図 1 に $c = -2$ とした場合の解曲線を示してあるが，方向場を滑らかに結ぶと解曲線と重なることが推察される。

教科書 p. 20，問題 1.3，4

以下の微分方程式を解け。得られた解を代入して検算せよ。

$\boxed{y' + 3x^2 y^2 = 0}$

解）

与式は，

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{y^2}dy = -3x^2 dx$$

と変数分離できる。この両式を積分すると，

$$-\frac{1}{y} = -x^3 + c$$

$$\therefore y = \frac{1}{x^3 + c}$$

検算する。求めた y を与式左辺に代入すると，

$$\text{左辺} = -\frac{3x^2}{(x^3 + c_1)^2} + 3x^2\left(\frac{1}{x^3 + c_1}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \text{左辺} = \text{右辺}$$

教科書 p. 21，問題 1.3，8

以下の微分方程式を解け。示されている変換を用いよ。得られた解を代入して検算せよ。

$\boxed{xy' = x + y,\quad y/x = u}$

解）

与式を変形して，

$$y' = 1 + \frac{y}{x} = 1 + u \tag{1}$$

ここで，$y = xu$ であるから，

$$y' = \frac{dy}{dx} = u\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}u$$

$$= u + x\frac{du}{dx}$$

これを(1)式の y' に代入すると，

$$x\frac{du}{dx} = 1$$

$$\therefore du = \frac{1}{x}dx$$

両辺を積分すると，

$$u = \ln|x| + c$$

$$\therefore y = x(\ln|x| + c)$$

検算する。求めた y を用いると，

$$y' = (\ln|x| + c)\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}(\ln|x| + c) = \ln|x| + c$$

従って，与式左辺は，

$$xy' = x(\ln|x| + c)$$

一方，右辺は，

$$x + y = x + x(\ln|x| + c) = x(\ln|x| + c)$$

$$\therefore xy' = x + y$$

教科書 p. 26，問題 1.4，2

飛行機が滑走路を 2 km 走ってから離陸するとする。飛行機は初速 10 m/s で動き出し，一定加速度で 50 s 走る。離陸時の速さはいくらか。

解）

時間を t (s)，速度を v (m/s) とすると，加速度は，

$$a = \frac{dv}{dt}$$

であるから，これを v について解くと，

$$v = at + c$$

である。初速は $v(t=0) = 10\,\mathrm{m/s}$ であるから，

$$v = at + 10$$

と書ける。走行距離を $x\,(\mathrm{m})$ とすると，

$$v = \frac{dx}{dt}$$

であるから， $t = 0$ で $x = 0$ とすると，

$$\frac{dx}{dt} = at + 10$$

$$\therefore x = \frac{a}{2}t^2 + 10t$$

$t = 50\mathrm{s}$ のとき $x = 2000\ \mathrm{m}$ だから，

$$2000 = \frac{a}{2}50^2 + 10 \cdot 50$$

$$\therefore a = 1.2\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\therefore v = 1.2t + 10$$

$$\therefore v(t=50) = 70\ \mathrm{m/s}$$

教科書 p. 26，問題 1.4，6

乾燥機の中に置かれた紙が，その含水量に比例した速度で水分を失うものとする。はじめの 10 分間で含水量の半分を失うものとすると，事実上乾燥する（99%の水分が失われる）のはいつか。予想をたててから計算せよ。

解）

予想をたてる。含水量に比例した速度で水分を失うのであるから，10 分で含水量が半分，即ち，$1/2$ になるのであれば，もう 10 分後にはその $1/2$ に減るので，20 分経過後の含水量は，初めの量の $1/2^2 = 1/4$ になる。30 分経過後には $1/2^3 = 1/8$, 40 分経過後には $1/2^4 = 1/16$, 50 分経過後には $1/2^5 = 1/32$, 60 分経過後には $1/2^6 = 1/64$ ， 70 分経過後には $1/2^7 = 1/128$ になる。よって，99%失われる（当初の量の $1/100$ になる）時間は，60 分と 70 分の間であると考えられる。

次に，微分方程式をたて，解いてみる。含水量を m ，時間を t とすると，含水量に比例した速度で水分を失うのであるから， $m(t)$ について

$$-am = \frac{dm}{dt}$$

が成り立つ。ここで， a は比例定数であり， $a > 0$ とする。左辺の負符号は減少することを表す。この微分方程式を変形すると，

$$dt = -\frac{1}{am}dm$$

$$\therefore t = -\frac{1}{a}\ln|m| + c$$

$$\therefore \ln|m| = -at + c$$

$$\therefore m = ce^{-at}$$

ここで，上式の c は $t = 0$ における含水量であり， $c = m(0)$ である。

$$\therefore m = m(0)e^{-at}$$

はじめの 10 分で半分になるので，

$$\frac{1}{2}m(0) = m(0)e^{-10a}$$

$$0.5 = e^{-10a}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{10}\ln 0.5 \cong 0.0693(1/\min)$$

含水量が当初の 99%となるのは，含水量が $0.01m(0)$ となることと同義だから，求めるべき時間は，

$$0.01m(0) = m(0)e^{-0.0693t}$$

$$\therefore t \cong 66\min$$

となり，予想と整合する。
