

電気電子情報数学及び演習 1 演習問題 3

注意事項:

- 解答用エクセルファイルに, 解答を記入したファイル名を学籍番号 (半角数字).xlsx として次週の 13 時までに提出すること
- 本演習に関して質問がある場合には, 授業時間内に演習担当者もしくは kazumasa@vos.nagaokaut.ac.jp (高橋) 宛にメールすること。

1. 次のベクトルを $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

の 1 次結合で表せ。

(1) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{p} = \textcircled{1}\mathbf{a}_1 + \textcircled{2}\mathbf{a}_2$

(2) $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{q} = \textcircled{3}\mathbf{a}_1 + \textcircled{4}\mathbf{a}_2$

*ただし, 1 次結合で表せない場合は”解なし”と記入。

2. 次のベクトルの組は 1 次独立か, 1 次従属か。”1 次独立”または”1 次従属”と記入。

(1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\textcircled{5}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\textcircled{6}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\textcircled{7}$

3. \mathbf{R}^4 において, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ の生成する部分空間 U の次元を求め, 1 組の基底を以下の a d の選択肢から選べ。

選択肢 (a: $\{\mathbf{a}_1\}$, b: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, c: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$,
 d: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$)

dim $U = \textcircled{8}$ 1 組の基底: $\textcircled{9}$

4. 次の同次連立 1 次方程式の解空間 U の次元と基底を求めよ。

(1)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

dim $U = \textcircled{10}$, 基底: $\left\{ \begin{bmatrix} \textcircled{11} \\ \textcircled{12} \\ \textcircled{13} \\ \textcircled{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textcircled{15} \\ \textcircled{16} \\ \textcircled{17} \\ \textcircled{18} \end{bmatrix} \right\}$

(2)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

dim $U = \textcircled{19}$, 基底: $\left\{ \begin{bmatrix} \textcircled{20} \\ \textcircled{21} \\ \textcircled{22} \\ \textcircled{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textcircled{24} \\ \textcircled{25} \\ \textcircled{26} \\ \textcircled{27} \end{bmatrix} \right\}$

(3)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

dim $U = \textcircled{28}$, 基底: $\left\{ \begin{bmatrix} \textcircled{29} \\ \textcircled{30} \\ \textcircled{31} \\ \textcircled{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textcircled{33} \\ \textcircled{34} \\ \textcircled{35} \\ \textcircled{36} \end{bmatrix} \right\}$

(4)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

dim $U = \textcircled{37}$, 基底: $\left\{ \begin{bmatrix} \textcircled{38} \\ \textcircled{39} \\ \textcircled{40} \\ \textcircled{41} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textcircled{42} \\ \textcircled{43} \\ \textcircled{44} \\ \textcircled{45} \end{bmatrix} \right\}$

5. 次の \mathbf{R}^3 の部分空間 W の次元を求めよ。

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

dim $W = \textcircled{46}$

$$1. \quad a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad p = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & -4 & \vdots & -7 \\ 1 & 3 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 & -8 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \alpha = -\frac{5}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 2 & -4 & \vdots & 5 \\ 1 & 3 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & 33 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

\therefore 解なし

2. (1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{rank } A = 3 \rightarrow$ 1次独立 //

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{rank } A = 2 \rightarrow$ 1次従属 //

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{rank } A = 3 \rightarrow$ 1次独立 //

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\dim U = 3 \quad U \text{ の基底は } C: \{a_1, a_2, a_3\} \quad \#$$

4.

$$\begin{aligned}
 (1) A = & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{rank } A = 2$$

$$\dim U = (\text{未知数の個数}) - \text{rank } A = 4 - 2 = \underline{2} \quad \#$$

$$\therefore \text{基底} : \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

4.

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } A = 2 \quad \dim U = 4 - 2 = 2 //$$

$$\therefore W \text{ の基底} : \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -8 & 11 \\ 1 & -5 & 4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -6 & 8 \\ 0 & -6 & 6 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } A = 2, \rightarrow \dim U = 4 - 2 = 2 //$$

$$\therefore \text{基底} : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5/3 \\ -5/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

4.

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } A = 2 \rightarrow \underline{\dim W = 2}$$

$$\therefore \text{基底} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

5.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{\dim W = 2}$$