電気電子情報数学及び演習
線形代数

質問とお願い (1)

- 教科書を購入した人は？
- 教科書を購入できない人は，同じ内容を自分の地域で入手できる「線形代数」の教科書を使って勉強してください

質問とお願い (2)

- 時間が少ないので，講義資料をILIASにアップロードします
- 問題は，紙に書いて解きますので，あとで動画でゆっくりチェックしてください

１．行列の基本

教科書P.1

本章のねらい

- 行列の基本的な知識を身につける
- 行列の計算ができる
- 特別な行列を知る
- 行列の操作について知る

行列 (matrix, matrices)

- $m \times n$の行列

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{12n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

行

列

対角成分

ベクトル (vector)

- m次元列ベクトル

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- n次元行ベクトル

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

演算法則

$A + B = B + A$

$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

$(\lambda \mu) A = \lambda (\mu) A$

$A (BC) = (AB) C$

$(A + B)C = AC + BC$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

$1A = A$

$A (B + C) = AB + AC$

$\lambda (AB) = (\lambda A) B = A (\lambda B)$

- 乗法の順番は交換不可

p.6 例題1 (2)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- 次を計算せよ

$$(3C)A - C(2B)$$

- 解答

$$\begin{bmatrix} -25 & 8 \\ 50 & 22 \end{bmatrix}$$

特別な行列(1)

- 零行列
- 正方行列
  - 単位行列 I, E
- 基本ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2次の正方行列

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

3次の正方行列

$$e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

上からm番目

特別な行列(2)

- **正方行列**であれば

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & O \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda \end{bmatrix}$$

スカラー行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

対角行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

上三角行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

下三角行列

特別な行列(3)

- ベキ乗

$$A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k\text{個}}$$

$$A^0 = I$$

- ベキ等行列

$$A^2 = A$$

- ベキ零行列

$$A^k = O \qquad k \text{ はある自然数}$$

p.8 例題3

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$ の n 乗を求めよ。

- ヒント・解答

$$\Delta=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ とおくと $A=\lambda I+\Delta$ と表せる。 $\Delta^3=\Delta^4=\cdots=O$ だから

二項定理を使って

$$A^n=(\lambda I+\Delta)^n=\underline{\lambda^n I+{}_nC_1\lambda^{n-1}\Delta+{}_nC_2\lambda^{n-2}\Delta^2}\underbrace{+\cdots+{}_nC_n\Delta^n}_{O}=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$$

転置

- 転置は ^{t} (transpose, transposition)で表す

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -9 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{t}A = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

転置行列の演算

例題 6

- 定理

$$ {}^t({}^tA) = A $$

$$ {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB $$

$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA $$

$$ {}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA $$

- 対称行列

$ {}^tA = A $　→ インダクタンス行列

- 交代行列（対角成分は0）

$$ {}^tA = -A $$

- 直交行列

$$ A\,{}^tA = {}^tAA = I $$

対称行列，　交代行列

例題7，　8

- 任意のn x n行列Aに対して
- $A + {}^tA$ は対称行列

  ${}^t(A+{}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A$
- ${}^tA\,A$は対称行列

  ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tA\,A$
- $A - {}^tA$は交代行列

  ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$

- 任意の正方行列Aは対称行列と交代行列の和で表現可能

$$A = \frac{1}{2}\underline{\left(A + {}^tA\right)} + \frac{1}{2}\underline{\left(A - {}^tA\right)}$$

p.13 例題7 (2)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\1&0&-5\end{bmatrix}$$ を対称行列と交代行列の和として表わせ

- ヒント

$$A=\underbrace{\frac{1}{2}(A+{}^tA)}_{\text{対称行列}}+\underbrace{\frac{1}{2}(A-{}^tA)}_{\text{交代行列}}$$ なので

$$\frac{1}{2}(A+{}^tA)=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\1&0&-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-1&2&-5\end{bmatrix}\right\}$$

同様に $\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ を求める。

解答

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&-5\end{bmatrix}}_{\text{対称行列}}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}}_{\text{交代行列}}$$

正則行列

- 逆行列が存在する正方行列

- 逆行列（inverse） A^{-1}（求め方は後の講義で解説する）

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

トレース (trace)

- n次正方行列$A = [a_{ij}]$ の対角成分の和

$$\mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

行列の分割

例題10，11

- 分割行列の積（小行列間で和と積が定義されている必要あり）

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{b}_1 & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{b}_l \\ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{b}_l \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{b}_l \end{bmatrix}$$

p.17 例題11

$$A=\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&1&2&0&0&0\\0&0&1&0&0&2&0&0\\0&1&0&0&0&0&2&0\\1&0&0&0&0&0&0&2\\\hline 3&0&0&0&0&0&0&4\\0&3&0&0&0&0&4&0\\0&0&3&0&0&4&0&0\\0&0&0&3&4&0&0&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}J&2I\\3I&4J\end{bmatrix}$$

$$B=\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&0&0&0&0&0&0&-1\\0&-1&0&0&0&0&-1&0\\0&0&-1&0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&-1&0&0&0\\\hline 0&0&0&-2&0&0&0&0\\0&0&-2&0&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0&0&0&0\\-2&0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}-I&-J\\-2J&O\end{bmatrix}$$

$$\because J=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad AB=\begin{bmatrix}J&2I\\3I&4J\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-I&-J\\-2J&O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5J&-I\\-11I&-3J\end{bmatrix}$$