電気電子情報数学及び演習 1 演習問題 1

注意事項：

- 解答用エクセルファイルに，解答を記入したファイル名を学籍番号 (半角数字).xlsx として次週の 13 時までに提出すること
- 本演習に関して質問がある場合には，授業時間内に演習担当者もしくは kazumasa@vos.nagaokaut.ac.jp(高橋) 宛にメールすること．

---

1. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき，行列 ${}^tAA$ を求めよ．

$${}^tAA = \begin{bmatrix} ① & ② & ③ \\ ④ & ⑤ & ⑥ \\ ⑦ & ⑧ & ⑨ \end{bmatrix}$$

2. 次の行列 B を求めよ．$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 5 & -10 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} ⑩ & ⑪ \\ ⑫ & ⑬ \\ ⑭ & ⑮ \end{bmatrix}$$

3. 行列 $G = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$H = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ のとき，$\begin{cases} X - 2Y = G \\ X - 3Y = H \end{cases}$ を満たす行列 X と Y を求めよ。

$$X = \begin{bmatrix} ⑯ & ⑰ \\ ⑱ & ⑲ \\ ⑳ & ㉑ \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} ㉒ & ㉓ \\ ㉔ & ㉕ \\ ㉖ & ㉗ \end{bmatrix}$$

4. 次の行列 A について A^n を求めよ。

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^n = \begin{bmatrix} ㉘ & ㉙ & ㉚ \\ ㉛ & ㉜ & ㉝ \\ ㉞ & ㉟ & ㊱ \end{bmatrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^n = \begin{bmatrix} ㊲ & ㊳ & ㊴ \\ ㊵ & ㊶ & ㊷ \\ ㊸ & ㊹ & ㊺ \end{bmatrix}$$

5. 行列 $J = \begin{bmatrix} x & a & 4 \\ 5 & y & c \\ b & -1 & z \end{bmatrix}$ において，次の場合の a, b, c, x, y, z を求めよ。

(a) J が対称行列のとき

$a =$ ㊻, $b =$ ㊼, $c =$ ㊽, $x =$ ㊾, $y =$ ㊿, $z =$ 51

(b) J が交代行列のとき

$a =$ 52, $b =$ 53, $c =$ 54, $x =$ 55, $y =$ 56, $z =$ 57

6. 行列 $K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ を対称行列と交代行列の和として表せ。

$$A = \frac{1}{\textcircled{58}} \begin{bmatrix} \textcircled{59} & \textcircled{60} & \textcircled{61} & \textcircled{62} \\ \textcircled{60} & \textcircled{63} & \textcircled{64} & \textcircled{65} \\ \textcircled{61} & \textcircled{64} & \textcircled{66} & \textcircled{67} \\ \textcircled{62} & \textcircled{65} & \textcircled{67} & \textcircled{68} \end{bmatrix} + \frac{1}{\textcircled{69}} \begin{bmatrix} \textcircled{70} & \textcircled{71} & \textcircled{72} & \textcircled{73} \\ -\textcircled{71} & \textcircled{74} & \textcircled{75} & \textcircled{76} \\ -\textcircled{72} & -\textcircled{75} & \textcircled{77} & \textcircled{78} \\ -\textcircled{73} & -\textcircled{76} & -\textcircled{78} & \textcircled{79} \end{bmatrix}$$

(注：答えの数字がマイナスの場合、−− のようになる箇所もありますが気にしないでください。)

7. 次の行列の階数を求めよ。

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 　　 $\mathrm{rank}A = \textcircled{80}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 　　 $\mathrm{rank}B = \textcircled{81}$

8. 次の行列の逆行列を求めよ。

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 　　 $D^{-1} = \begin{bmatrix} \textcircled{82} & \textcircled{83} & \textcircled{84} \\ \textcircled{85} & \textcircled{86} & \textcircled{87} \\ \textcircled{88} & \textcircled{89} & \textcircled{90} \end{bmatrix}$

9. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x - ay - 2z = 2 \\ ax + 2y + z = 1 \\ 4x - ay - 3z = 5 \end{cases}$ がそれぞれ

(1) ただ 1 組の解をもつ

$a \neq \textcircled{91}, \textcircled{92}$

(2) 解をもたない

$a = \textcircled{93}$

(3) 無限に多くの解をもつ

$a = \textcircled{94}$

ように実数 a の値を定めよ。

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

2.

$$AB = C$$

$$\begin{array}{ccc} -1+4 & -2 & 1 \\ 1+6 & -2-3 & 4-1 \\ 2+3 & -4 & 2 \end{array}$$

$$A^{-1}AB = A^{-1}C$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2+2+3-8} \begin{bmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = A^{-1}C$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 5 & -10 \\ 9 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+35-45 & 24-70+45 \\ 8+25-36 & 16-50+36 \\ 4+15-18 & 8-30+18 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{array}{rl} & X - 2Y = G \\ -) & X - 3Y = H \\ \hline & Y = G - H \end{array}$$

$$X - 2G + 2H = G$$

$$X = 3G - 2H$$

$$\therefore X = 3G - 2H = 3\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 7 & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Y = G - H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

//

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 3a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4a & 6a^2 \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^n = \begin{bmatrix} 1 & an & \frac{1}{2}n(n-1)a^2 \\ 0 & 1 & an \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

//

5、 (a) 対称行列 $\rightarrow {}^tJ = J$

$$\begin{bmatrix} x & a & 4 \\ 5 & y & c \\ b & -1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 5 & b \\ a & y & -1 \\ 4 & c & z \end{bmatrix}$$

$\therefore a = 5,\ b = 4,\ c = -1,\ x = x,\ y = y,\ z = z$ //

(b) 交代行列 ${}^tA = -A$

$$\begin{bmatrix} -x & -a & -4 \\ -5 & -y & -c \\ -b & -1 & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 5 & b \\ a & y & -1 \\ 4 & c & z \end{bmatrix}$$

$\therefore a = -5,\ b = -4,\ c = -1,\ x = -x,\ y = -y,\ z = -z$ //

6.

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow {}^tK = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$T = K + {}^tK$, $U = K - {}^tK$ とすると.

$T + U = 2K \rightarrow K = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}U$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 10 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ //

7. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \text{rank } A = 2$ //

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \text{rank } B = 2$ //

8. $\det(D) = 6 + 1 - 8 = -1$

$\begin{matrix} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{matrix}$

$D^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ //

9.
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -a & -2 & 2 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -a & -3 & 5 \end{array}\right]$$
A　B

(1)
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -a & -2 & 2 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -a & -3 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -a & -2 & 2 \\ 0 & a^2+2 & 2a+1 & -2a+1 \\ 0 & 3a & 5 & -3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \dfrac{a-4}{a^2+2} & \dfrac{a+4}{a^2+2} \\ 0 & a^2+2 & 2a+1 & -2a+1 \\ 0 & 0 & \dfrac{-a^2-3a+10}{a^2+2} & \dfrac{3a^2-3a-6}{a^2+2} \end{array}\right]$$

このとき, 方程式が不定 or 不能となるのは rank A = 2 のときであるから

$a^2+3a+10=0$

$(a+5)(a-2)=0$

$\to a=-5, 2$ のときに不定 or 不能となる.

∴ ただ1つの解をもつのは, $a \neq -5, 2$ のとき. //

(2) 不能となるのは rank B = 2 のときだから rank B = 2 となるのは

$a^2-a-2 \neq 0$

$(a-2)(a+1) \neq 0$

$\to a \neq 2, -1$

(1) の結果のうち, $a=2$ のときは解を持ってしまうので

$a=-5$ //

(3) 不定となるのは. rank A = 2 ∩ rank B = 3 であるから

$a=2$ //