「電気電子情報数学及び演習Ⅰ」課題２解答

問 1.

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{それ以外} // \end{cases}$ $\quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^{1} x \frac{1}{2} dx = 0$ //

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2} dx - 0^2 = \frac{1}{3}$ // $\quad D(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ //

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_{-1}^{x} \frac{1}{2} dt, & -1 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & -1 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases} //$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_{-1}^{1} e^{tx} \frac{1}{2} dx = \frac{e^t - e^{-t}}{2t} //$$

(2) $E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$ //（部分積分による）

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} //$$

$D(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\lambda}$ // $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt, & x \ge 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$ //

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t},\ t < \lambda //$$

問 2. (1) $E(X) = 0 \times \frac{32}{243} + 1 \times \frac{80}{243} + 2 \times \frac{80}{243} + 3 \times \frac{40}{243} + 4 \times \frac{10}{243} + 5 \times \frac{1}{243} = \frac{5}{3}$ //

(2) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= 0^2 \times \frac{32}{243} + 1^2 \times \frac{80}{243} + 2^2 \times \frac{80}{243} + 3^2 \times \frac{40}{243} + 4^2 \times \frac{10}{243} + 5^2 \times \frac{1}{243} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{9} //$$

問 3. (1) $P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, $n = 1, 2, \cdots$ となる。下記の公式より，

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 //$$

(2) 下記の公式を利用する。$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(X = n) - 2^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 = 6 - 4 = 2 //$$

公式： $|p| < 1$ のとき $\quad \sum_{n=0}^{\infty} n p^n = \frac{p}{(1-p)^2}$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p^n = \frac{p(1+p)}{(1-p)^3}$

問 4. (1) $E(X) = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2}$ //

(2) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$ //

(3) $Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$ //

(4) Z の累積分布関数を $F_Z(z)$ とおくと，

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right) \le z\right) = P\left(X \le \frac{1}{2} + \frac{z}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & z < -\sqrt{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{z}{2\sqrt{3}}, & -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}, \\ 1, & z > \sqrt{3}. \end{cases}$$

したがって，Z の確率密度関数 $f_Z(z)$ は

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}, \\ 0, & z < -\sqrt{3}, \sqrt{3} < z \end{cases}$$

となる。よって，Z は区間 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 上の一様分布に従う。//

問 5. (1)（問 1 参照）

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$ //

(2) $y \ge 0$ のとき，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\frac{X}{2} \le y\right) = P(X \le 2y) = 1 - e^{-2y}$.　また，$y < 0$ のとき $F_Y(y) = 0$

したがって，$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-2y}, & y \ge 0 \end{cases}$ //

(3) $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 2e^{-2y}, & y \ge 0 \end{cases}$ //

グラフは下図の通り。