電気電子情報
数学及び演習 II

2020/05/18

講義の予定(前半):

1回:　複素数の基礎、解析関数(1)
2回:　解析関数(2)、zの初等関数
3回:　複素平面における積分法
4回:　複素項の級数
5回:　テイラー展開・ローラン展開
6回:　留数積分

本日のポイント:

■ コーシー・リーマンの方程式:
複素関数の微分に関する判定条件

■ 初等関数
・指数関数(三角関数)
・対数関数
・これらの四則演算・合成によって表現できる関数

1.4 コーシー・リーマンの方程式(p.22)

【コーシー・リーマンの方程式】
解析的(正則)であるための必要十分条件

複素関数: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\left.\begin{array}{ll} u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x}, & v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right\}$$ としたとき、

$$\boxed{u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x,}$$

➡ $f(z)$ は領域 D で解析的(正則)

正則ならば導関数が存在

導関数: $\dfrac{dw}{dz} = f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

例

$$w = f(z) = x + iy = z$$

$$\boxed{w \equiv u + iv}$$

が，解析的であるか
コーシー・リーマンの方程式を使って確認する

【解答】

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

$u_x = v_y,\ u_y = -v_x,$ を満たすので解析的である。

導関数: $\dfrac{dw}{dz} = f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1$

予行演習

$$w = f(z) = x - iy = \bar{z}$$

$$\boxed{w \equiv u + iv}$$

が，解析的であるか
コーシー・リーマンの方程式を使って確認する

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \longrightarrow \text{解析的でない．}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

コーシー・リーマンの方程式(証明)

複素関数:　$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

微分形式:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

ただし、$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

- $\boldsymbol{\Delta y = 0}$**の場合**

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

<u>x に関する偏微分形式</u>

- $\boldsymbol{\Delta x = 0}$**の場合**

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \right]$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

<u>y に関する偏微分形式</u>

導関数が存在するには，両者が等しいことが必要！

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

よって，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$(u_x = v_y, \qquad v_x = -u_y)$$

コーシー・リーマンの方程式

◆ コーシー・リーマンの方程式を満足する場合のみ導関数が存在
→その領域D ＝ 解析（正則）領域

◆ $f(z_0)$について、z_0で解析的ではないが、z_0のあらゆる近傍で解析的である場合、z_0を特異点と呼ぶ

極形式のコーシー・リーマンの方程式

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$w = f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \left(\ u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta\ \right)\end{gathered}}$$

極形式のコーシー・リーマンの方程式

導関数： $\dfrac{dw}{dz} = f'(z) = e^{-i\theta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + i\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)$

例

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - i2xy - y^2$

$$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$\boxed{w = u + iv}$$

が，解析的であるか確認する

$u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$とすると

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \qquad v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

コーシー・リーマンの方程式($u_x = v_y$, $v_x = -u_y$)

を満たすので解析的である。

ちなみに、導関数は, $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ より

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z$$

【極形式で判定してみる】

$$z = re^{i\theta}, \quad w = f(z) = z^2 = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos 2\theta\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = 2r\sin 2\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r^2 2\sin 2\theta\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = r^2\, 2\cos 2\theta$$

極形式のコーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 2r\cos 2\theta\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2r\sin 2\theta$$

が成り立つので解析的である！

ちなみに、導関数は,

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}(2r\cos 2\theta + i2r\sin 2\theta)$$

$$= e^{-i\theta}\left(2re^{i2\theta}\right) = 2re^{i\theta} = 2z$$

ラプラス方程式・調和関数(p.25)

複素関数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

コーシー・リーマンの方程式を満たす

領域 D で解析的ならば,

u,v ともにLaplace方程式を満足する

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

u,vがx,yの2階偏導関数を持つLaplace方程式の解：
調和関数 v は u の共役調和関数と呼ばれる

例

$u = x^2 - y^2 - y$が調和関数であることを示し、
共役調和関数 v を求めよ　　Laplace方程式を利用

コーシー・リーマンの方程式を利用

u, v ともにLaplace方程式を満たせばよい

２階微分を求めると

$$u_x = 2x, \qquad u_{xx} = 2$$

$$u_y = -2y - 1, \qquad u_{yy} = -2$$

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

u はLaplace方程式を満足する調和関数である。

$$u = x^2 - y^2 - y$$

コーシー・リーマンの方程式を利用

$$\boxed{\begin{aligned} u_x = v_y &= 2x \quad \cdots (1) \\ -u_y = v_x &= 2y + 1 \quad \cdots (2) \end{aligned}}$$

を満たす v を見つければよい

$$v = \int v_y \, dy = \int (2x) \, dy = 2xy + h(x)$$

$$v_x = 2y + \frac{dh(x)}{dx} \quad \cdots (3)$$

式(2)(3)の比較から $\dfrac{dh(x)}{dx} = 1 \Rightarrow h(x) = x + c$

よって、$v = 2xy + x + c$

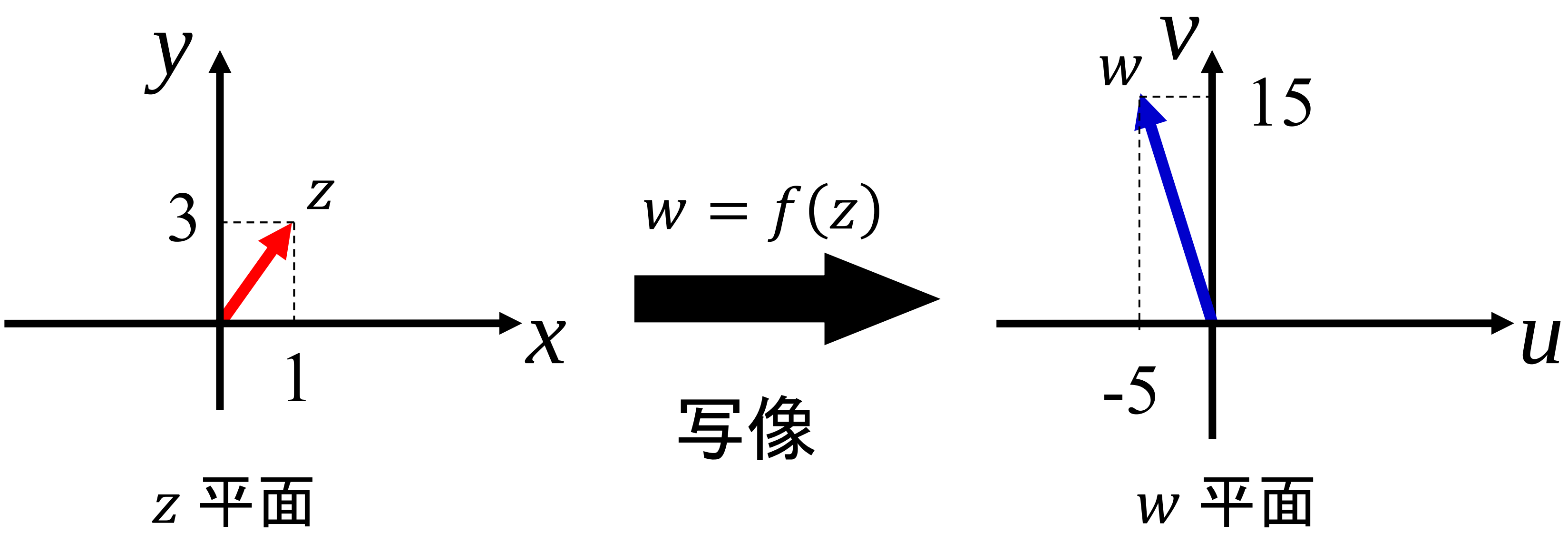
1.5 解析関数の幾何学(p.27)

$w = f(z) = z^2 + 3z$

$z = 1 + 3i$ に対する w を求めよ。

また、z と w をそれぞれ図示せよ。

$$\begin{aligned} w = f(z) &= f(1+3i) \\ &= (1+3i)^2 + 3(1+3i) \\ &= 1 - 9 + 6i + 3 + 9i \\ &= -5 + 15i \end{aligned}$$



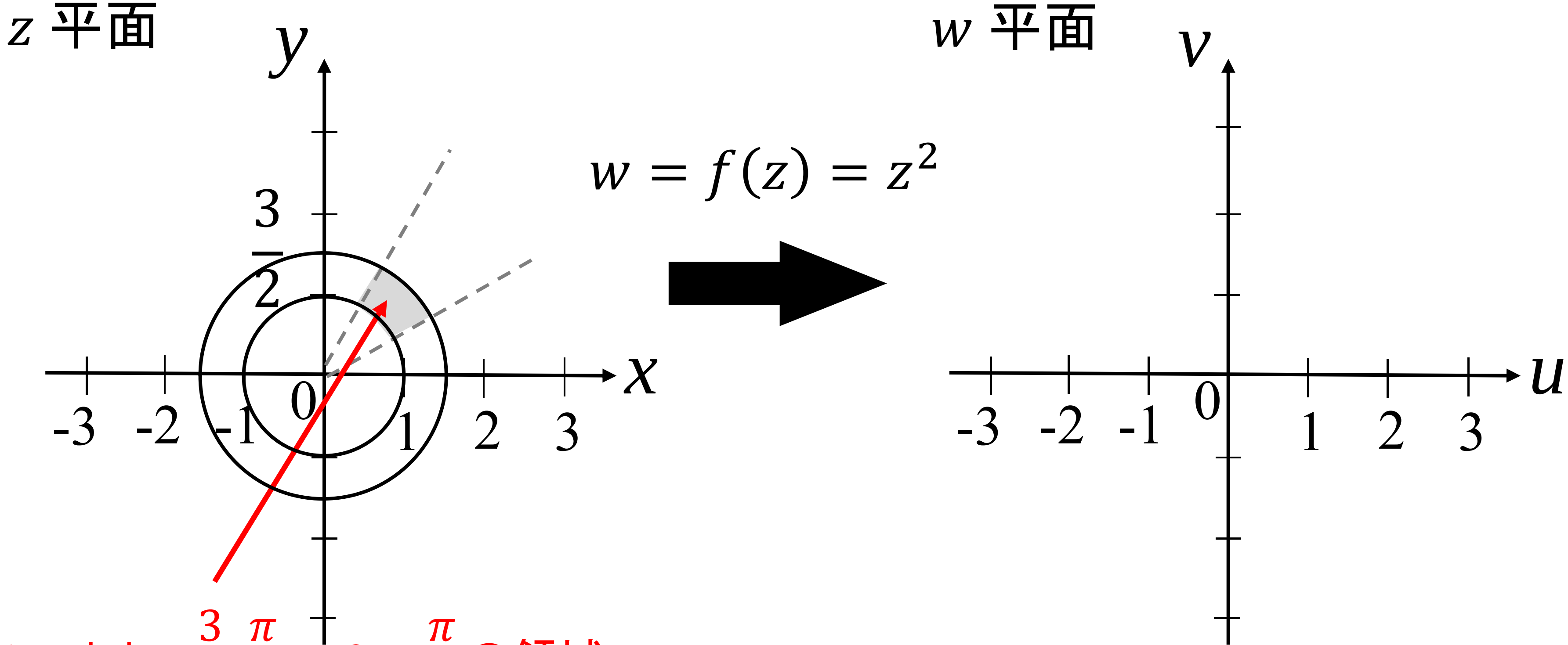
$w_0 = f(z_0)$ ： f に関する z_0 の像

例（p.28 例1）

$w = f(z) = z^2$ によって

$1 \leq |z| \leq \frac{3}{2}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ の領域は w 平面上のどこに写像されるか

ただし、$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$



$1 \leq |z| \leq \frac{3}{2}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ の領域

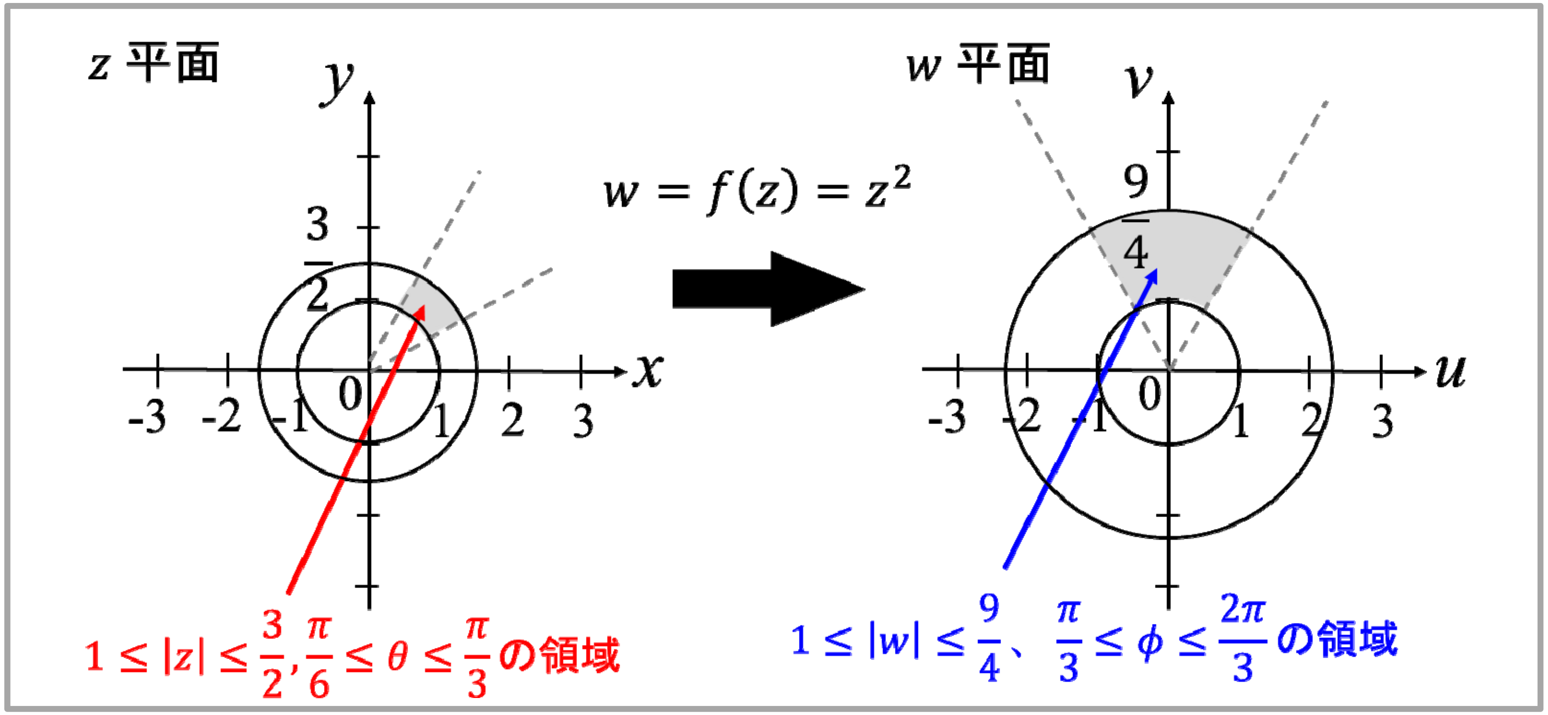
$w = Re^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi) = u + iv$ とすると

$w = f(z) = z^2 = r^2 e^{i2\theta} = Re^{i\phi}$となる。

これより、$1 \le r \le \dfrac{3}{2}$ は $1 \le R \le \dfrac{9}{4}$ に、

$\dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$ は $\dfrac{\pi}{3} \le \phi \le \dfrac{2\pi}{3}$ への写像となる

よって、$1 \le R \le \dfrac{9}{4}$、$\dfrac{\pi}{3} \le \phi \le \dfrac{2\pi}{3}$ の領域に写像される



予行演習

$w = f(z) = 4z$ とするとき、

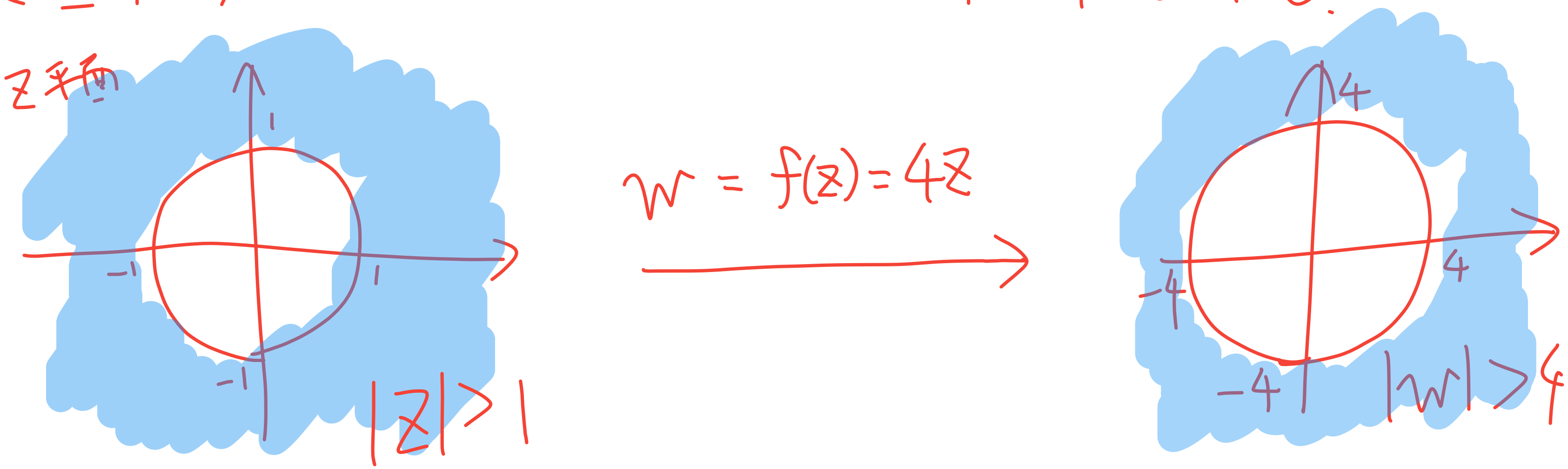
$|z| \geq 1$の領域の像を求めて w 平面上に図示せよ。

$z = re^{i\theta}$ とすると，$|z| \geq 1$ の領域は $r \geq 1$，$-\pi < \theta \leq \pi$ と同じ.

$w = Re^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi) = u + iv$ とすると.

$w = f(z) = 4z = 4re^{i\theta} = Re^{i\phi}$ となる.

$R \geq 4$，$-\pi < \phi \leq \pi$ なので，$|w| \geq 4$ である.



1.6 指数関数(p.32)

◆複素指数関数: $w = f(z) = e^z$　　ただし、$z = x + iy$

$$\Updownarrow$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$= u(x,y) + iv(x,y)$$

e^z の重要な性質

1)　$\mathrm{Im}(z) = 0$ のとき、$e^z = e^x$

2)　e^z :解析的

3)　$\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$

【性質の確認】

条件 a) $\mathrm{Im}(z) = 0$ のとき、$e^z = e^x$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^z|_{\mathrm{Im}(z)=0} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$$

条件 b) e^z :解析的

コーシー・リーマンの方程式

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y & \qquad \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y & \qquad \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y \end{aligned}\right\} \text{解析的}$$

条件 c)　$\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$

$$\boxed{\text{導関数:}\quad \frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$= e^x e^{iy} = e^{(x+iy)} = e^z$$

【 e^z のその他の性質】

◆ $z_1 = x_1 + iy_1$， $z_2 = x_2 + iy_2$，に対して以下が成立

$$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}}$$

実数での以下に対応

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$$

【確認】

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{z_1+z_2}$$

◆ $z = iy$, $(x = 0)$ に対して以下が成立

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

オイラーの公式

◆ 複素数の極形式を指数関数で表現可能

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= re^{i\theta}$$

◆ 重要な公式

- $e^{2\pi i} = e^0(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1$
- $e^{\pi i} = -1$ • $e^{-\pi i} = -1$
- $e^{\frac{\pi i}{2}} = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$ • $e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$

例

$e^z = 1$ のすべての解を求めよ。
また、その中で、$|z| \leq 15$ を満たすものを複素平面上に記せ。

$z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = 1$$

$$e^x \cos y = 1 \quad \cdots (1)$$

$$e^x \sin y = 0 \quad \cdots (2)$$

$e^x > 0$ なので、
式(2)より $\sin y = 0$, 式(1)より $\cos y > 0$ である必要がある。

よって　$y = \pm 2\pi n \qquad (n = 0,1,2 \cdots)$

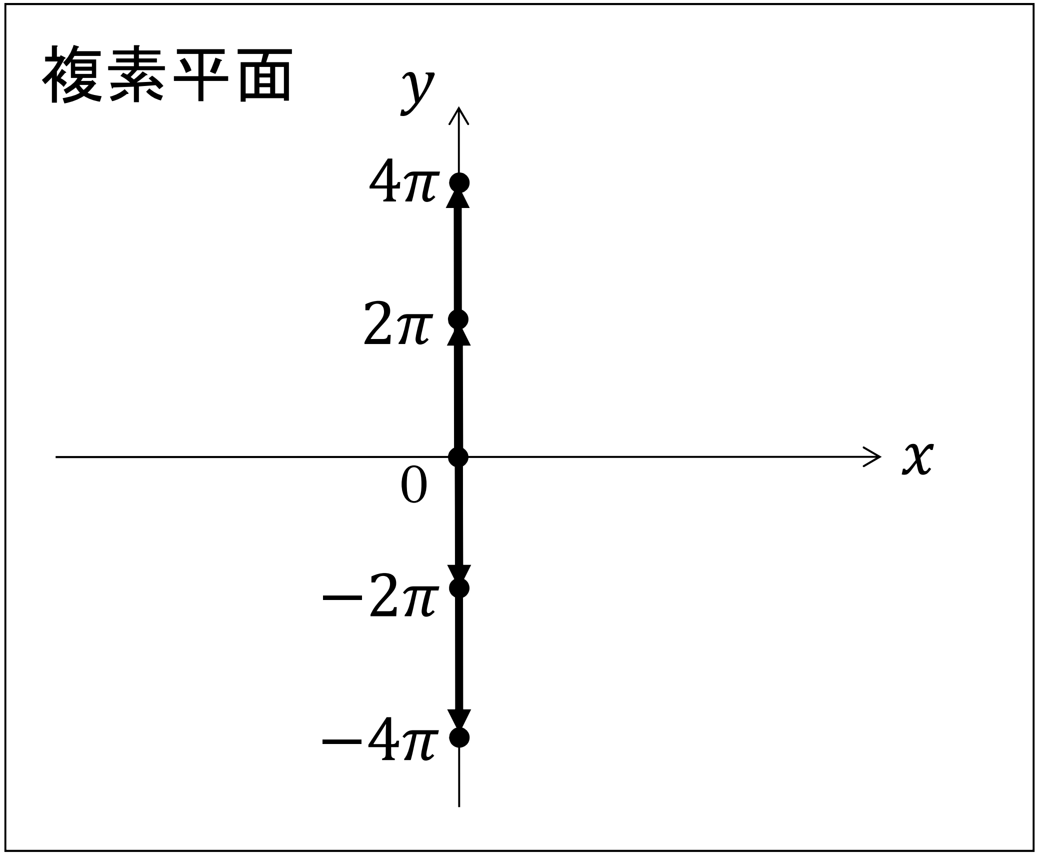
式(1)において、$\cos y = \cos(\pm 2\pi n) = 1$ となり、$e^x = 1$

よって　$x = 0$

したがって、$z = x + iy = 0 \pm i2\pi n = \pm i2\pi n \quad (n = 0,1,2 \cdots)$

$z = \pm i2\pi n \quad (n = 0,1,2\cdots)$より、

$|z| \leq 15$を満たすものは、$z = 0, \pm i2\pi, \pm i4\pi$



1.7 三角関数，双曲線関数(p.36)

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

$x = 0$ とすると

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y$$

$$\begin{array}{rl} & e^{iy} = \cos y + i\sin y \\ + & e^{-iy} = \cos y - i\sin y \\ \hline & e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y \end{array}$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\begin{array}{rl} & e^{iy} = \cos y + i\sin y \\ - & e^{-iy} = \cos y - i\sin y \\ \hline & e^{iy} - e^{-iy} = 2i\sin y \end{array}$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$\Rightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz}$$

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z}$$

複素数でのオイラーの公式

予行演習

$w = \sin i$ を $u + iv$ の形で求めよ

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$w = \sin i$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i(i)} - e^{-i(i)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-1} - e^{1}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

//

複素三角関数の性質

【実関数と同様の性質の例】

- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
- $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z$
- $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z$

◆ $$\cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2}$$

$$= \cos x \boxed{\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2}} - i\sin x \boxed{\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}}$$

$$= \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$$

◆ $$\sin z = \sin(x+iy)$$
$$= \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$$

複素関数 $f(z) = \sin z$ に対して

$|\sin z| \leq 1$ が成り立つか？？

$z = x + iy$

実関数 $f(x) = \sin x$ ならば $|\sin x| \leq 1$

$\sin z = u + iv$ を求める。

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i}$$

$$= \frac{\{\cos x + i\sin x\}e^{-y} - \{\cos x - i\sin x\}e^{y}}{2i}$$

$\sin z = u + iv$を求める。

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i}$$

$$= \frac{\{\cos x + i \sin x\}e^{-y} - \{\cos x - i \sin x\}e^{y}}{2i}$$

$$= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \cos x$$

$$|\sin z| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x\right)^2 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 \sin^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 (1 - \sin^2 x)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{e^{2y} + 2e^y e^{-y} + e^{-2y}}{4}\right)\sin^2 x + \left(\frac{e^{2y} - 2e^y e^{-y} + e^{-2y}}{4}\right)(1 - \sin^2 x)}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x + \frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4}} = \sqrt{\sin^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2}$$

ここで、$z = x + iy$であり、xとyは任意の実数なので、 $\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \geq 0$

したがって、$|\sin z| \leq 1$ は必ずしも成立しない。

【実関数と異なる性質】

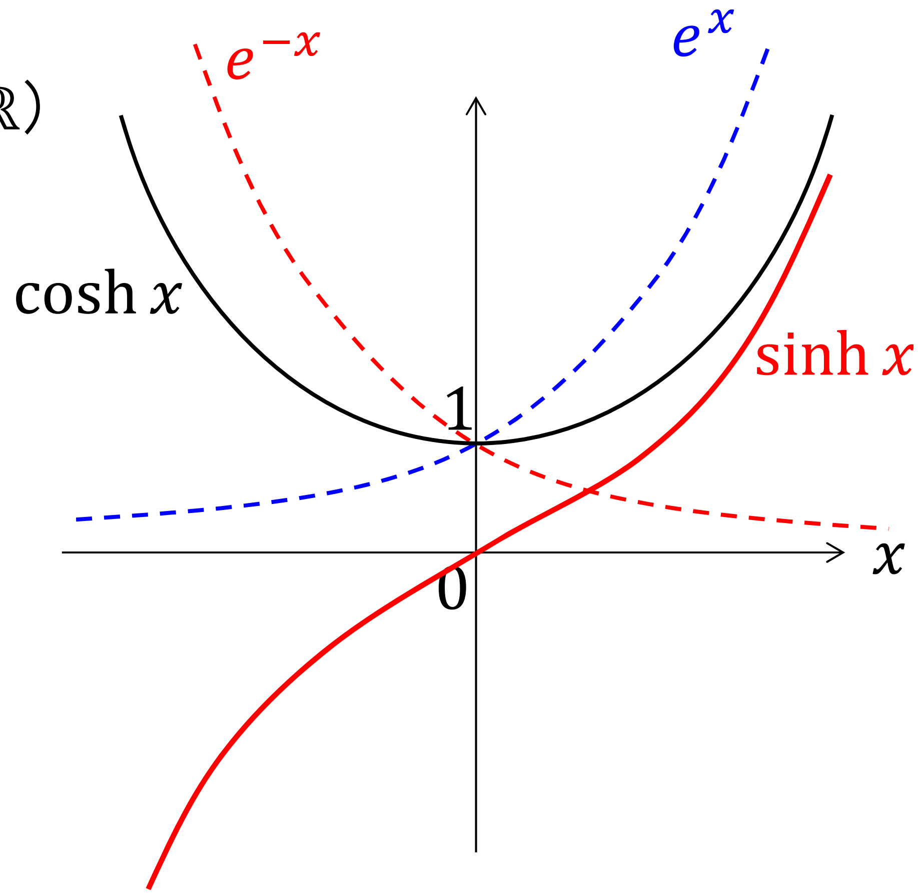
双曲線関数

◆（実数）双曲線関数の定義（$x \in \mathbb{R}$）

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



◆ 相互関係

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

◆（実数）双曲線関数の微分・積分

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \qquad \int \cosh x\, dx = \sinh x + C$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad \int \sinh x\, dx = \cosh x + C$$

◆（実数）逆双曲線関数（$x \in \mathbb{R}$）

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

ln: 自然対数

なぜ双曲線関数が必要なのか？

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ ？？　　2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$ ？？

1)については、 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ を知っていれば（気づけば）

$x = \sin t$ とおいて $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\cos t}\cos t\,dt$$

$$= \int 1\,dt = t + C = \sin^{-1}x + C$$

2)に対して、$1-\sin^2 t = \cos^2 t$ は使えそうにない

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = ？？$$

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$を知っていれば（気づけば）

$$x = \sinh t \qquad \frac{dx}{dt} = \cosh t$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\cosh t\, dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 t}}\cosh t\, dt = \int 1\, dt = \sinh^{-1} x + C$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

なぜ双曲線関数が必要なのか？

⇒ 計算が楽になるから

◆ 複素双曲線関数の定義（$z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$）

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

◆ 相互関係

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

◆ 微分

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \qquad \frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$$

<u>（積分については次回講義）</u>

◆ 逆双曲線関数

$$\cosh^{-1} z = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\sinh^{-1} z = \ln\left(x + \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

双曲線関数と三角関数

- $$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

- $$\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z$$

- $$\sinh iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\sin z$$

- $$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\sinh z$$

1.8 対数(p.41)

◆ 複素数 $z = x + iy = re^{i\theta}$ の自然対数:

$$w = \ln z, \ (z \neq 0), \quad \Rightarrow \quad z = e^{w}$$

例 $w = u + iv$ を求めたい

$$e^{w} = z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$e^{u+iv} = e^{u}e^{iv} = re^{i\theta}$$

$$e^{u} = r \quad \Rightarrow \quad u = \ln r = \ln|z|$$

$$v = \theta$$

$$w = \ln z = u + iv$$

$$= \ln r + i\theta \quad = \ln|z| + i\arg(z)$$

$$= \ln|z| + i\,(\theta + 2\pi n), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

<u>$w = \ln z$ は無限多価(多価関数)</u>

$-\pi < \arg(z) \leq \pi$ とするとき $\arg(z)$は1つに定まる: θ_1

（偏角の主値）

⬇

$w = \ln z$ も1つに定まる

（主値）

主値: $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\theta_1$

<u>$\mathrm{Ln}\, z$ は1価関数</u>

予行演習

対数関数 $w = \ln i$ の主値を求めよ。

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi n)$$

$z = i$, $|z| = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$w = \ln i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$$

$-\pi < \arg(z) \leq \pi$ のとき, $-\pi < \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \pi$ より. $n = 0$

よって $\ln i = \frac{\pi}{2} i$ //