電気電子情報数学及び演習Ⅱ－演習問題（３）

問題 2.1（p.69）

積分路 C に沿って以下の積分を行え。

１５．$\displaystyle\int_C \mathrm{Re}\{z\}\,dz$ 、C は、$1+i$ から $3+2i$ までの最短路(直線で結ぶ経路)

１９．$\displaystyle\int_C \mathrm{Re}(\,z^2)\,dz$、$C$ は単位円$(r=1)$、反時計回り。（ヒント： $\cos y = \dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$ を利用する）

問題 2.2（p.78）

つぎの計算をせよ。

２０．$\displaystyle\oint_C \mathrm{Re}\{z\}\,dz$ 、Cは図 2.16 の周。

ヒント：積分経路 Cを-1から1までの直線 C1 と、
1から-1までの弧 C2 に分けて考える。

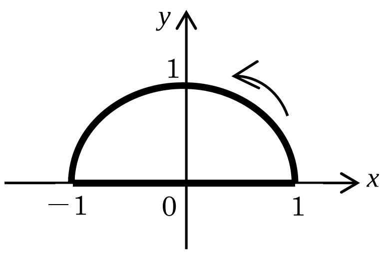


図 2.16

問題 2.3（p.82）

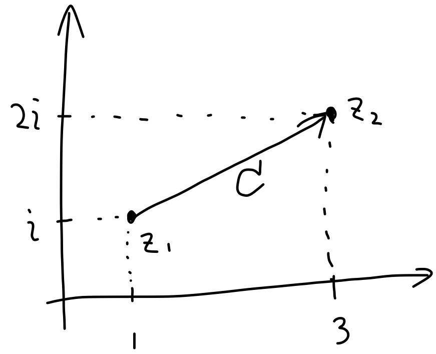
３．$\dfrac{z^2}{z^4-1}$ を$|z|=0.9$ の円に沿って反時計回りに積分せよ。

また、被積分項の極と、各積分経路との位置関係を複素平面上に図示せよ。

５．コーシーの積分公式 を用いて、$\dfrac{z^3}{2z-i}$ を単位円に沿って反時計回りに積分せよ。

2.1 (p69)

15. $\int_C \mathrm{Re}\{z\}\,dz$ （C：$1+i$ から $3+2i$ までの最短路）



$z_1 = 1+i$ ，$z_2 = 3+2i$ とする

点の動き方は（$t: 0 \to 1$ として）

$$\begin{cases} x(t) = (3-1)t+1 = 2t+1 \\ y(t) = (2-1)t+1 = t+1 \end{cases}$$

$\therefore z(t) = x(t) + iy(t)$

$= (2t+1) + i(t+1)$ （$t: 0 \to 1$）

$$\therefore \int_C \mathrm{Re}\{f(z)\}\,dz = \int_a^b f[z(t)]\,\frac{dz(t)}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^1 (2t+1)\cdot\frac{d}{dt}\left((2t+1)+i(t+1)\right)dt$$

$$= \int_0^1 (2t+1)\cdot(2+i)\,dt$$

$$= (2+i)\left[t^2+t\right]_0^1$$

$$= (2+i)\cdot 2$$

$$= 4+i2$$

2.1 (p69)

19. $\int_C \mathrm{Re}\{z^2\}\, dz$ (C：単位円, ccw)

$z = e^{it}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$\oint_C \mathrm{Re}\{z^2\}\, dz = \oint_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)] \cdot \frac{dz(t)}{dt}\, dt$$

$$f[z(t)] = \mathrm{Re}\{e^{i2t}\} = \mathrm{Re}\{\cos 2t + i\sin 2t\} = \cos 2t$$

$$\therefore \oint_C \mathrm{Re}\{z^2\}\, dz = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cdot ie^{it}\, dt = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2} \cdot e^{it}\, dt$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} e^{i3t} + e^{-it}\, dt = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{3i}e^{i3t} + \frac{1}{-i}e^{-it}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{3i}e^{i6\pi} + \frac{1}{-i}e^{-i2\pi} - 2\right) = 0$$

2.2 (p78)

$z = e^{it}$ $(t: 0 \to \pi)$ $z = t$ $(t: -1 \to 1)$

$f[z(t)] = \mathrm{Re}\{e^{it}\} = \mathrm{Re}\{\cos t + i\sin t\} = \cos t$

$$\oint_C R\{z\}\, dz = \int_0^{\pi} \cos t \cdot ie^{it}\, dt + \int_{-1}^{1} t\, dt$$

$$= i\int_0^{\pi} \frac{e^{it}+e^{it}}{2} \cdot e^{it}\, dt + \frac{1}{2}[t^2]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^{\pi} (e^{it} + 1)\, dt + \frac{1}{2}(1 - 1)$$

$$= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{i}e^{it} + t\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{i}{2}\left(\left(\frac{1}{i} + \pi\right) - \left(\frac{1}{i} + 0\right)\right)$$

$$= \frac{i\pi}{2}$$

2.3 (p82)

$$\frac{z^2}{z^4-1} \quad (C : |z| = 0.9)$$

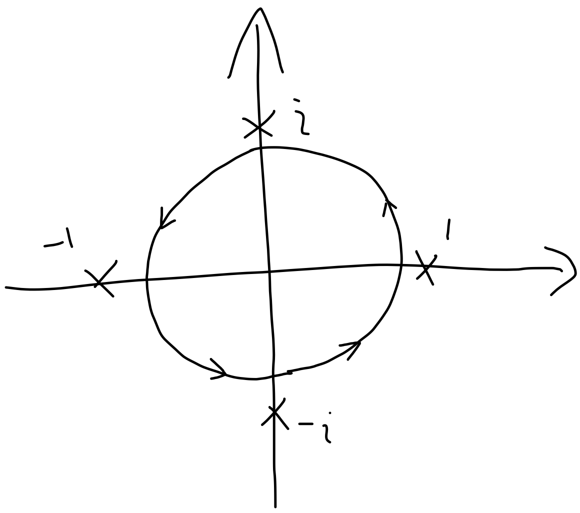
$$z = 0.9e^{it} \quad (t : 0 \to 2\pi)$$

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4-1} = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-1)} = \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)}$$

$$\oint_C \frac{z^2}{z^4-1}dz = \int_0^{2\pi} \frac{(0.9e^{it})^2 \cdot i\,0.9e^{it}}{(0.9e^{it})^4-1}dt = i\int_0^{2\pi}\frac{(0.9e^{it})^3}{(0.9e^{it})^4-1}dt$$

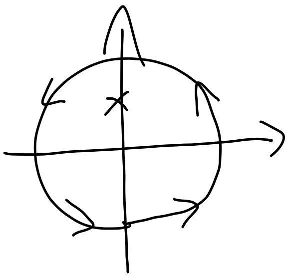
$$= \frac{i}{4}\Big[\log|(0.9e^{it})^4-1|\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\log|0.9^4-1| - \log|0.9^4-1|\right) = 0$$



2.3 (p.82)

5. $\frac{z^3}{2z-i}$ → 極は $2z-i=0$ → $2z=i$ → $z=\frac{i}{2}$



積分路内部で解析的でない

コーシーの積分公式を使う

$$\oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

$z_0 = \frac{i}{2}$

$f(z) = z^3$ とすると

$$\oint_c \frac{z^3}{2z-i}\,dz = \oint_c f(z)\cdot\frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{i}{2}}\,dz$$

コーシーの積分公式

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\, f(z_0)$$

$$= \pi i\left(\frac{i}{2}\right)^3$$

$$= \pi i\cdot\frac{-i}{8}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$ //