電気電子情報数学及び演習Ⅱ－演習問題（２）

問題 1.4 (p.26)

４．　$f(z)=i/z^5$ に関し、極形式のコーシー・リーマンの方程式を用いて解析性を調べよ。
　　また、解析的である場合、導関数を求めよ。

６．　$f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ に関し、コーシー・リーマンの方程式を用いて解析性を調べよ。

１１．　$f(z)=\mathrm{Re}(z^3)$ に関し、コーシー・リーマンの方程式を用いて解析性を調べよ。
　　また、解析的である場合、導関数を求めよ。

２１．　$v(x,y)=-e^{-x}\sin y$ が調和関数であるかどうか調べよ。
　　もし調和関数ならば、対応する解析関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ を求めよ。

問題 1.5 (p.31)

６．複素数 $z=x+iy$ とするとき、$x>0, y<0$の領域をz平面上に図示せよ。
　また、$w=f(z)=z^2$ とするとき、$x>0, y<0$ の領域の像を求めてw 平面上に図示せよ。

問題 1.6 (p.36)

z がつぎの場合の $w=e^z$ を計算し、実部 $\mathrm{Re}\{w\}$、虚部 $\mathrm{Im}\{w\}$、及び$|w|$を求めよ。

２．　$z=1+i$　　　　５．　$z=-\pi i/2$

１２．$e^{2z}=2$ のすべての解を求めよ。

問題 1.7 (p.41)

１．$\cosh z=\dfrac{1}{2}(e^z+e^{-z})$、　$\sinh z=\dfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})$ を利用して、次式がなりたつことを示せ。

$$\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$$
$$\sinh z=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$$

$u+iv$ の形で、つぎを求めよ。

４．　$w=\cos(1+i)$

１０．　$\cosh z=0$ の解を全て求めよ。
　　ヒント：　$\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$ を利用する。

問題 1.8 (p.46)

z について解け。

１６． $\ln z = -2 - \dfrac{3i}{2}$

問題（教科書外）：

対数関数 $w = \ln z$ の解析性を調べ、その導関数を求めよ。ただし、$z = x + iy$ とする。

ヒント：$w = \ln z = \ln|z| + i\arg(z) = u + iv$

$$\ln|z| = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

$$\arg(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

コーシー・リーマンの方程式を満足するか？

1.4 (p.26)

4. $f(z) = \dfrac{i}{z^5}$

$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ として

$$f(z) = \frac{i}{r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)} = \frac{i}{r^5}\cdot\frac{\cos 5\theta - i\sin 5\theta}{(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)(\cos 5\theta - i\sin 5\theta)}$$

$$= \frac{i}{r^5}\,\frac{\cos 5\theta - i\sin 5\theta}{\cos^2 5\theta + \sin^2 5\theta} = \frac{i}{r^5}(\cos 5\theta - i\sin 5\theta) = \frac{1}{r^5}(\sin 5\theta + i\cos 5\theta)$$

$u = \dfrac{1}{r^3}\sin 5\theta$, $v = \dfrac{1}{r^5}\cos 5\theta$

$\dfrac{\partial u}{\partial r} = -\dfrac{5}{r^6}\sin 5\theta \qquad \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{5}{r^6}\cos 5\theta$

$\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \dfrac{5}{r^5}\cos 5\theta \qquad \dfrac{\partial v}{\partial \theta} = -\dfrac{5}{r^5}\sin\theta$

$\longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ となる.

∴ 解析的である.

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

$$= e^{-i\theta}\cdot\left(-\frac{5}{r^6}\right)(\sin 5\theta + i\cos 5\theta) = e^{-i\theta}\cdot\left(-\frac{5}{r^6}\right)\cdot i\,(\cos 5\theta - i\sin 5\theta)$$

$$= -i5e^{-i\theta}\cdot r^{-6}e^{-i5\theta} = -i5r^{-6}e^{-i6\theta} = -i5(re^{i\theta})^{-6} = -i5z^{-6}$$

$$= -i\frac{5}{z^6}$$

1.4 (p.26)

6. $f(z) = z + \frac{1}{z} = (x+iy) + \frac{1}{x+iy} = (x+iy) + \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$= x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$u = x + \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = y - \frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2-y^2)^2} = 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ $\rightarrow$ 解析的である //

11. $f(z) = Re(z^3)$

$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot iy + 3\cdot x \cdot (-y^2) - iy^3$

$\therefore Re(z^3) = x^3 - 3xy^2 \longrightarrow u = x^3 - 3xy^2$, $v = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\therefore$ 解析的でない //

21. $v(x,y) = -e^{-x}\sin y$

$$v_x = e^{-x}\sin y \qquad v_{xx} = -e^{-x}\sin y$$
$$v_y = -e^{-x}\cos y \qquad v_{yy} = e^{-x}\sin y$$

$\rightarrow \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

→ラプラス方程式を満たすので調和関数

コーシー・リーマンの方程式より

$$u_x = v_y = -e^{-x}\cos y \;,\quad u_y = -v_x = -e^{-x}\sin y$$

を満たす u を見つければよい。

$$u = \int u_x dx = -\cos y \int e^{-x} dx = e^{-x}\cos y + h(y)$$

これを y で微分して

$$u_y = -e^{-x}\sin y + \frac{dh(y)}{dy}$$

$$\frac{dh(y)}{dy} = 0 > h(y) = c$$

$$\therefore u = e^{-x}\cos y + c$$

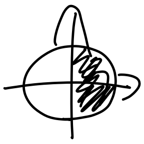
よって $f(z)$ は

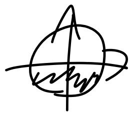
$$f(z) = e^{-x}\cos y - i e^{-x}\sin y + c$$
$$= e^{-x}(\cos y - i\sin y) + c$$
$$= e^{-x}\cdot e^{-iy} + c$$
$$= e^{-(x+iy)} + c$$

1.5 (p.31)

$z = re^{i\theta}$ として

$x > 0,\ y < 0$

$x = r\cos\theta > 0 \rightarrow$ 

$y = r\sin\theta < 0 \rightarrow$ 

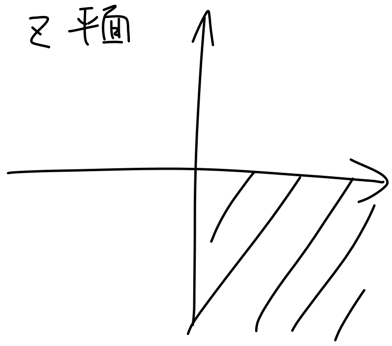
$\therefore -\frac{\pi}{2} < \theta < 0,\ r > 0$

$w = z^2 = r^2 e^{i2\theta}$

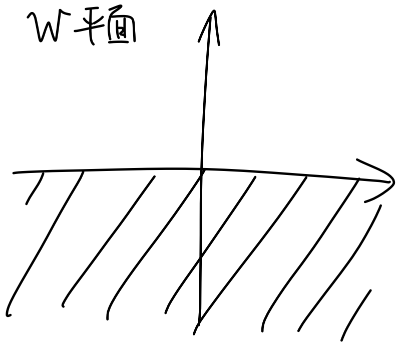
θ の値域は

$2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \theta < 2\cdot 0 \rightarrow -\pi < \theta < 0$

z平面



w平面



1.6 (p.36)

2、 $w = e^{1+i} = e\cdot e^{i} = e(\cos 1 + i\sin 1)$

$\therefore\ \mathrm{Re}\{w\} = \underline{e\cos 1}$ //

$\mathrm{Im}\{w\} = \underline{e\sin 1}$ //

$|w| = \sqrt{e^2(\cos^2 1 + \sin^2 1)} = \sqrt{e^2} = \underline{e}$ //

5、 $w = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = 0 - i\cdot 1 = -i$

$\therefore\ \mathrm{Re}\{w\} = \underline{0}$ //

$\mathrm{Im}\{w\} = \underline{-1}$ //

$|w| = \underline{1}$ //

1.6 (p36)

12. $e^{2z}=2$

$$e^{2(x+iy)} = e^{2x+i2y} = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y)$$

$$\therefore e^{2x}\cdot\cos 2y = 2 \quad , \quad e^{2x}\cdot\sin 2y = 0$$

$$\hookrightarrow y = \pm n\pi$$

$$e^{2x}=2 \rightarrow \log e^{2x} = \log 2 \rightarrow 2x = \log 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\therefore z = \frac{1}{2}\log 2 \pm i n\pi \quad (n:整数)$$ //

1.7

$$\cosh(x+iy) = \frac{1}{2}(e^{x+iy}+e^{-x-iy}) = \frac{1}{2}(e^{x}(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y))$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x}\cos y + e^{-x}\cos y + i(e^{x}\sin y - e^{-x}\sin y))$$

$$= \cos y\cdot\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) + i\sin y\cdot\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$$

$$= \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y$$ //

$$\sinh(x+iy) = \frac{1}{2}(e^{x+iy} - e^{-x-iy})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x}(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y))$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x}\cos y - e^{-x}\cos y + i(e^{x}\sin y + e^{-x}\sin y))$$

$$= \cos y\cdot\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) + i\sin y\cdot\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

$$= \sinh x\cos y + i\cosh x\cdot\sin y$$ //

1.7 (p.41)

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$$

4. $w = \cos(1+i)$

$$= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}) = \frac{1}{2}(e^{i-1} + e^{-i+1})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{i} \cdot e^{-1} + e^{-i} \cdot e)$$

$$= \frac{1}{2}((\cos 1 + i \sin 1)e^{-1} + (\cos 1 - i \sin 1)e)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-1}\cos 1 + i e^{-1} \sin 1 + e \cos 1 - i e \sin 1)$$

$$= \frac{1}{2}((e^{-1}+e)\cdot \cos 1 + i(e^{-1}-e)\sin 1)$$

$$= \frac{e^{-1}+e}{2} \cdot \cos 1 - i \frac{e - e^{-1}}{2} \sin 1$$

$$= \cosh 1 \cdot \cos 1 - i \sinh 1 \cdot \sin 1$$

10. $\cosh z = 0$

$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x + \sin y = 0$

実部、虚部共に0なので、

$$\begin{cases} \cosh x \cdot \cos y = 0 \rightarrow y = \frac{2n-1}{2}\pi \\ \sinh x \cdot \sin y = 0 \rightarrow \sinh = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\therefore z = x + iy = 0 + i\frac{\pi}{2}(2n-1)$$

$$= i\frac{\pi}{2}(2n-1)$$

1.8 (p. 46)

16. $\ln z = -2 - \frac{3i}{2}$

$$z = e^{-2-\frac{3i}{2} \pm 2n\pi i} = \underline{e^{-2-\frac{3i}{2}}} \ /\!/$$

教科書外

$$w = \ln z = \ln|z| + i\arg(z)$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + i\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ → 解析的である。

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{x+iy} = \underline{\frac{1}{z}} \ /\!/$$