2020 年 6 月 2 日 (火)，4 時限目

電気電子情報数学及び演習 1 演習問題 5

注意事項：

- 解答用エクセルファイルに，解答を記入したファイル名を学籍番号 (半角数字).xlsx として次週の 13 時までに提出すること
- 本演習に関して質問がある場合には，授業時間内に演習担当者もしくは kazumasa@vos.nagaokaut.ac.jp(高橋) 宛にメールすること.

---

1. 次の 2 つのベクトルの長さおよびなす角を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\|\boldsymbol{a}\| =$ ①, $\|\boldsymbol{b}\| =$ ②, $\theta =$ ③

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ $\|\boldsymbol{a}\| =$ ④, $\|\boldsymbol{b}\| =$ ⑤, $\theta =$ ⑥

2. (1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ から $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底を作れ.

{[⑦ ⑧ ⑨], [⑩ ⑪ ⑫], [⑬ ⑭ ⑮]}

(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ から $\boldsymbol{R}^4$ の正規直交基底を作れ.

{[⑯ ⑰ ⑱ ⑲], [⑳ ㉑ ㉒ ㉓], [㉔ ㉕ ㉖ ㉗], [㉘ ㉙ ㉚ ㉛]}

3. $\boldsymbol{R}^3$ で，

(1) ベクトル $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ を含む正規直交基底をつくれ. 残り 2 つのベクトル: [㉜ ㉝ ㉞] [㉟ ㊱ ㊲]

(2) ベクトル $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ を含む正規直交基底をつくれ. 残り 1 つのベクトル: [㊳ ㊴ ㊵]

4. $\boldsymbol{R}^3$ において，

(1) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ とするとき，W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ. $W^{\perp} =$ ⟨[㊶ ㊷ ㊸]⟩

(2) $W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ とするとき，W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ. $W^{\perp} =$ ⟨[㊹ ㊺ ㊻]⟩

5. $\boldsymbol{R}^3$ において $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ とするとき，$\boldsymbol{a}$ の W への正射影および W の直交補空間 $W^{\perp}$ への正射影を求めよ. $\boldsymbol{a}$ の W への正射影は [㊼ ㊽ ㊾], $\boldsymbol{a}$ の $W^{\perp}$ への正射影は [㊿ 51 52]

数学1　6/4

1. (1) $a = [-1 \ \ 1 \ \ 2]$, $b = [1 \ \ 0 \ \ -1]$

$\|a\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ //, $\|b\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ //

$\cos\theta = \dfrac{(a, b)}{\|a\| \cdot \|b\|} = \dfrac{-3}{\sqrt{12}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \theta = \dfrac{5}{6}\pi$ //

(2) $a = [2 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 0]$, $b = [1 \ \ 1 \ \ -3 \ \ -1]$

$\|a\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ //

$\|b\| = \sqrt{1+1+9+1} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ //

$\cos\theta = \dfrac{(a, b)}{\|a\| \cdot \|b\|} = \dfrac{2+1+3}{2\sqrt{18}} = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}$ //

2. $a_1 = [1 \ \ -1 \ \ 0]$, $a_2 = [0 \ \ 1 \ \ 1]$, $a_3 = [1 \ \ 1 \ \ 0]$　　Orthogonalise

グラムシュミットの直交化を行う。

$b_1 = a_1 = [1 \ \ -1 \ \ 0]$

$b_2 = a_2 - \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = [0 \ \ 1 \ \ 1] - \dfrac{-1}{2}[1 \ \ -1 \ \ 0] = [\frac{1}{2} \ \ \frac{1}{2} \ \ 1]$

$b_3 = a_3 - \dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = [1 \ \ 1 \ \ 0] - \dfrac{0}{2}[1 \ \ -1 \ \ 0] - \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}[\frac{1}{2} \ \ \frac{1}{2} \ \ 1]$

$= [1 \ \ 1 \ \ 0] - \dfrac{1}{\frac{3}{2}}[\frac{1}{2} \ \ \frac{1}{2} \ \ 1] = [1 \ \ 1 \ \ 0] - \dfrac{2}{3}[\frac{1}{2} \ \ \frac{1}{2} \ \ 1] = [1 \ \ 1 \ \ 0] - [\frac{1}{3} \ \ \frac{1}{3} \ \ \frac{2}{3}]$

$= [\frac{2}{3} \ \ \frac{2}{3} \ \ -\frac{2}{3}]$

$c_1 = \dfrac{b_1}{\|b_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[1 \ \ -1 \ \ 0]$ //　　$c_2 = \dfrac{b_2}{\|b_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}[\frac{1}{2} \ \ \frac{1}{2} \ \ 1] = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}[\frac{1}{2} \ \ \frac{1}{2} \ \ 1]$

$= [\frac{1}{\sqrt{6}} \ \ \frac{1}{\sqrt{6}} \ \ \frac{2}{\sqrt{6}}] = \dfrac{1}{\sqrt{6}}[1 \ \ 1 \ \ 2]$ //

$c_3 = \dfrac{b_3}{\|b_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}(2^2+2^2+2^2)}} \cdot \dfrac{2}{3}[1 \ \ 1 \ \ -1] = \dfrac{2}{3 \cdot \frac{\sqrt{12}}{3}}[1 \ \ 1 \ \ -1] = \dfrac{2}{2\sqrt{3}}[1 \ \ 1 \ \ -1] = \dfrac{1}{\sqrt{3}}[1 \ \ 1 \ \ -1]$ //

9.

(2) $a_1 = [1\ 1\ 0\ 0]$ $a_2 = [0\ 1\ 1\ 0]$, $a_3 = [0\ 0\ 1\ 1]$, $a_4 = [1\ 1\ 0\ 1]$

$b_1 = a_1 = [1\ 1\ 0\ 0]$

$b_2 = a_2 - \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = [0\ 1\ 1\ 0] - \dfrac{1}{2}[1\ 1\ 0\ 0] = [-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0]$

$b_3 = a_3 - \dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = [0\ 0\ 1\ 1] - 0 - \dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}[-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0]$

$= [0\ 0\ 1\ 1] - \frac{2}{3}[-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0] = [0\ 0\ 1\ 1] - [-\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ 0]$

$= [\tfrac{1}{3}\ -\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ 1]$

$b_4 = a_4 - \dfrac{(a_4, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \dfrac{(a_4, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \dfrac{(a_4, b_3)}{(b_3, b_3)} b_3$

$= [1\ 1\ 0\ 1] - \frac{2}{2}[1\ 1\ 0\ 0] - \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}[-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0] - \dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}[\tfrac{1}{3}\ -\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ 1]$

$= [0\ 0\ 0\ 1] - \frac{3}{4}[\tfrac{1}{3}\ -\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ 1]$

$= [0\ 0\ 0\ 1] - [\tfrac{1}{4}\ -\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{3}{4}] = [-\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ -\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}]$

$c_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1\ 0\ 0]$ //

$c_2 = \dfrac{a_2}{\|a_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}}[-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0] = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \cdot \dfrac{1}{2}[-1\ 1\ 2\ 0] = \dfrac{1}{\sqrt{6}}[-1\ 1\ 2\ 0]$ //

$c_3 = \dfrac{a_3}{\|a_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{9}+1}} \cdot \dfrac{1}{3}[1\ -1\ 1\ 3] = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}[1\ -1\ 1\ 3]$ //

$c_4 = \dfrac{a_4}{\|a_4\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{4}{16}}} \cdot \dfrac{1}{4}[-1\ 1\ -1\ 1] = \dfrac{1}{2}[-1\ 1\ -1\ 1]$ //

3.

(1) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

$a_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ として グラムシュミットの正規直交化法を使うと

$$b_1 = a_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+4+4}{9}} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}8\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{\frac{2}{3}}{1} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} - \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} \cdot \frac{1}{9}\begin{bmatrix}8\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\4\\4\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}8\\-2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-3\\-4\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & +4\\-6 & -1\\-8 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-7\\-9\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{64+4+4}{81}}} \cdot \frac{2}{9}\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2}{9}\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\end{bmatrix}} \mathbin{/\!/}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \mathbin{/\!/}$$

3.

(2) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ としてグラムシュミットの直交法を用いる.

$$b_1 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore c_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4+1+1}{9}}} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$ //

4.

(1) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$

Wの直交補空間 $W^\perp$ の任意のベクトルを $a = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ と定める.

直交条件より

$$(a_1, a) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(a_2, a) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = 0$$

$z = \lambda$とおいて

$$\begin{cases} x - 2\lambda = 0 \\ y - 2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow a = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore W^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(2) $W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

$$\begin{cases} (a_1, a) = -x + z = 0 \\ (a_2, a) = x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$z = \lambda$ とおいて

$-x + \lambda = 0 \rightarrow x = \lambda$

$\lambda - y + 2\lambda = 0 \Rightarrow -y + 3\lambda = 0 \Rightarrow y = 3\lambda$

$a = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore W^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ //

5、 グラムシュミットの方法より，Wへの正規直交基底を得る.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって aのWへの正射影 dは

$$d = (a, c_1)c_1 + (a, c_2)c_2 = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}} /\!/$$

$W^\perp$ は

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{とおくと}]{\lambda = z} y + \lambda = 0 \Rightarrow y = -\lambda \Rightarrow e = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore W^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

aの $W^\perp$ への正射影 fは

$$f = \frac{(W^\perp, a)}{\|W^\perp\|^2} W^\perp = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} /\!/$$