
教科書 p. 35，問題 1.5，2

$u(x,y)$ が与えられたとき，完全微分方程式 $du=0$ を求め，いくつかの解曲線 $u(x,y)=$一定 を描け。

$\boxed{u=x^2-y^2}$

解）

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=2x\,dx-2y\,dy$$

$du=0$ として，

$$x\,dx-y\,dy=0$$

が求める完全微分方程式である。

解曲線は， $c=x^2-y^2$ を陽関数表示として，

$$y=\pm\sqrt{x^2-c}$$

とすれば描きやすい。例えば，$c=0$ のとき $y=\pm x$，$c=1$ のとき $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ となるが，これらを図 1 に示す。

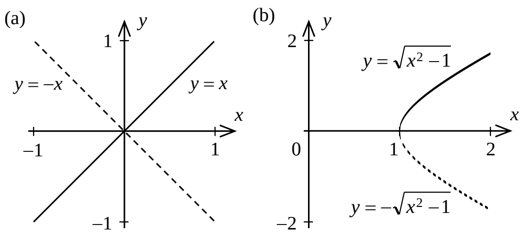

図 1　特殊解(a) $c=0$，(b) $c=1$。

教科書 p. 35，問題 1.5，8

次の方程式が完全であることを示し，解を求めよ。

$\boxed{-yx^{-2}dx+x^{-1}dy=0}$

解）

$M=-yx^{-2}$， $N=x^{-1}$ として，

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x^{-2},\ \frac{\partial N}{\partial x}=-x^{-2}$$

$$\therefore\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

従って，与式は完全形といえる。

ここで，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-yx^{-2}$$

とすると，両辺を積分して，

$$u=-y\int x^{-2}dx+k(y)=yx^{-1}+k(y)$$

となる。この u を，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{-1}$$

に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[yx^{-1}+k(y)\right]=x^{-1}$$

$$x^{-1}+\frac{dk}{dy}=x^{-1}$$

$$\frac{dk}{dy}=0$$

$$\therefore k=c$$

$$\therefore u=yx^{-1}+c$$

完全形 $du=0$ においては， $u=c$ であるから，

$$x^{-1}y=c$$

$$\therefore y=cx$$

教科書 p. 35，問題 1.5，14

以下の方程式は完全か。初期値問題を解け。

$\boxed{2y^{-1}\cos 2x\,dx=y^{-2}\sin 2x\,dy,\ \ y(\pi/4)=3.8}$

解）

$M=2y^{-1}\cos 2x$， $N=-y^{-2}\sin 2x$ として，

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2y^{-2}\cos 2x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=-2y^{-2}\cos 2x$$

$$\therefore\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

従って，与式は完全形である。

ここで，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2y^{-1}\cos 2x$$

とすると，両辺を積分して，

$$u=\int 2y^{-1}\cos 2x\,dx+k(y)=y^{-1}\sin 2x+k(y)$$

が得られる。この u を，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-y^{-2}\sin 2x$$

に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{-1}\sin 2x+k(y)\right]=-y^{-2}\sin 2x$$

$$-y^{-2}\sin 2x+\frac{dk}{dy}=-y^{-2}\sin 2x$$

$$\frac{dk}{dy}=0$$

$$\therefore k=c$$

$$\therefore u=y^{-1}\sin 2x+c$$

完全形 $du = 0$ においては，$u = c$ であるから，

$$y^{-1}\sin 2x = c$$
$$\therefore y = c\sin 2x$$

初期条件 $y(\pi/4) = 3.8$ より，

$$3.8 = c\sin(\pi/2)$$
$$\therefore c = 3.8$$
$$\therefore y = 3.8\sin 2x$$

教科書 p. 35，問題 1.5，16

以下の方程式は完全か。初期値問題を解け。

$$\boxed{ye^x dx + (2y + e^x)dy = 0,\ y(0) = -1}$$

解）

$M = ye^x$，　$N = 2y + e^x$ として，

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x,\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^x$$
$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

従って，与式は完全形といえる。

ここで，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^x$$

とすると，両辺を積分して，

$$u = \int ye^x\, dx + k(y) = ye^x + k(y)$$

が得られる。この u を，

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + e^x$$

に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[ye^x + k(y)\right] = 2y + e^x$$
$$e^x + \frac{dk}{dy} = 2y + e^x$$
$$\frac{dk}{dy} = 2y$$
$$\therefore k = y^2 + c$$
$$\therefore u = ye^x + y^2 + c$$

完全形 $du = 0$ においては，$u = c$ であるから，

$$ye^x + y^2 = c$$

初期条件 $y(0) = -1$ より，

$$-1 \cdot e^0 + (-1)^2 = c$$
$$\therefore c = 0$$
$$\therefore ye^x + y^2 = 0$$
$$\therefore y = -e^x$$

第 1 章小テスト解答例

次の方程式の一般解を求め，陽関数形で表せ。

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1-2y}{x}}$$

解）

与式を変形すると，

$$\frac{dy}{1-2y} = \frac{dx}{x}$$

両辺を積分して，

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2y| = \ln|x| + c$$
$$\ln\left|(1-2y)x^2\right| = c$$
$$(1-2y)x^2 = c$$
$$1 - 2y = \frac{c}{x^2}$$
$$y = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{2}$$
