電気電子情報数学及び演習線形代数

質問とお願い(1)

•教科書を購入した人は?

・教科書を購入できない人は、<u>同じ内容</u>を自分の地域で入手できる「線形代数」の教科書を使って勉強してください

質問とお願い(2)

- •時間が少ないので、講義資料をILIASにアップロードします
- •問題は、紙に書いて解きますので、あとで動画でゆっくりチェックしてください

1. 行列の基本

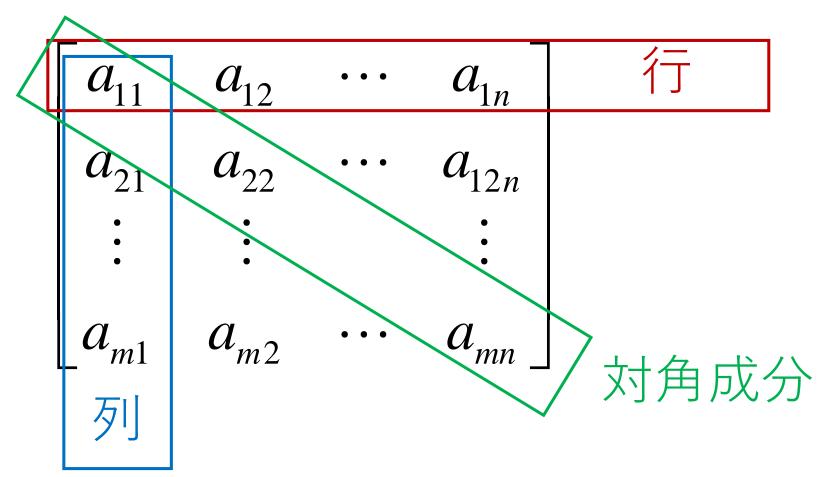
教科書P.1

本章のねらい

- 行列の基本的な知識を身につける
- 行列の計算ができる
- 特別な行列を知る
- 行列の操作について知る

行列 (matrix, matrices)

• m×nの行列



ベクトル (vector)

• m次元列ベクトル

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

• n次元行ベクトル

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

演算法則

$$A + B = B + A$$

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$$

$$(\lambda \mu) A = \lambda (\mu) A$$

$$A (BC) = (AB) C$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$1A = A$$

$$A (B + C) = AB + AC$$

$$\lambda (AB) = (\lambda A) B = A (\lambda B)$$

• 乗法の順番は交換不可

p.6 例題1 (2)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

• 次を計算せよ

$$(3C)A-C(2B)$$

• 解答

$$\begin{bmatrix} -25 & 8 \\ 50 & 22 \end{bmatrix}$$

特別な行列(1)

• 零行列

- 正方行列
 - 単位行列 *I, E*
- 基本ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2次の正方行列

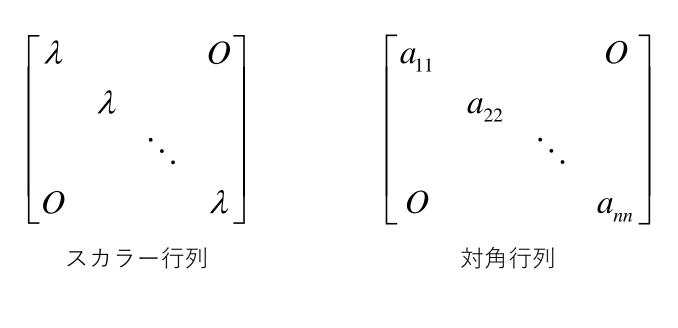
$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

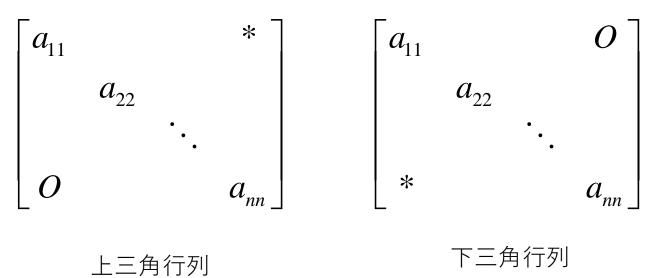
3次の正方行列

$$e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
 上から m番目

特別な行列(2)

正方行列であれば





特別な行列(3)

ベキ乗

$$A^k = AA...A$$

$$A^0 = I$$

• ベキ等行列

$$A^2 = A$$

• ベキ零行列

$$A^k = O$$
 k はある自然数

p.8 例題3

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{のn乗を求めよ}.$$

ヒント・解答

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 とおくと $A = \lambda I + \Delta$ と表せる。 $\Delta^3 = \Delta^4 = \dots = O$ だから

二項定理を使って

項定理を使って
$$A^{n} = (\lambda I + \Delta)^{n} = \lambda^{n} I + {}_{n}C_{1}\lambda^{n-1}\Delta + {}_{n}C_{2}\lambda^{n-2}\Delta^{2} + \dots + {}_{n}C_{n}\Delta^{n} = \begin{bmatrix} \lambda^{n} & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n} & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{n} \end{bmatrix}$$

転置

• 転置は t(transpose, transposition)で表す

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -9 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \bullet \qquad ^{t}A = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

例題 6

• 定理

$$t(t^{t}A) = A$$

$$t(A + B) = t^{t}A + t^{t}B$$

$$t(AB) = t^{t}B + t^{t}A$$

$$t(AA) = \lambda t^{t}A$$

• 対称行列

$$tA = A \rightarrow インダクタンス行列$$

• 交代行列(対角成分は0)

$${}^t A = -A$$

• 直交行列

$$A^{t}A = {}^{t}AA = I$$

対称行列, 交代行列

- 任意のn×n行列Aに対して
- $A + {}^tA$ は対称行列 ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A$
- ${}^t\!A A$ は対称行列 ${}^t({}^t\!AA) = {}^t\!A \, {}^t({}^t\!A) = {}^t\!A \, A$
- $A {}^{t}A$ は交代行列 ${}^{t}(A - {}^{t}A) = {}^{t}A - {}^{t}({}^{t}A) = {}^{t}A - A = -(A - {}^{t}A)$
- 任意の正方行列Aは対称行列と交代行列の和で表現可能

$$A = \frac{1}{2} \left(\underline{A + {}^{t} A} \right) + \frac{1}{2} \left(\underline{A - {}^{t} A} \right)$$

p.13 例題7 (2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$
 を対称行列と交代行列の和として表わせ

・ヒント

$$A = \frac{1}{2} (\underline{A + {}^{t}A}) + \frac{1}{2} (\underline{A - {}^{t}A})$$
 なので
対称行列 交代行列

$$A = \frac{1}{2} \underbrace{(A + {}^{t}A) + \frac{1}{2} \underbrace{(A - {}^{t}A)}_{\text{TO}}} \quad \text{TO TO} \quad \frac{1}{2} \underbrace{(A + {}^{t}A) = \frac{1}{2}} \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \right]$$

同様に $\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ を求める。

解答

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

対称行列

交代行列

正則行列

• 逆行列が存在する正方行列

逆行列 (inverse) A-1 (求め方は後の講義で解説する)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 $({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$

$\vdash \lor \neg \exists$ (trace)

• n次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の対角成分の和 $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$

• 分割行列の積(小行列間で和と積が定義されている必要あり)

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{b_{I.}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{b_1} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{b_1} & \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{b_{I}} \\ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{b_1} & \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{b_{I}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{b_1} & \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{b_{I}} \end{bmatrix}$$

p.17 例題11

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} J & 2I \\ 3I & 4J \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} J & 2I \\ 3I & 4J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & -J \\ -2J & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5J & -I \\ -11I & -3J \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -I & -J \\ -2J & O \end{bmatrix}$$

$$:: J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$