「電気電子情報数学及び演習 I」課題 2

問 1. 以下の問いに答えよ。

(1) 区間 $[-1,1]$ 上の一様分布に従う確率変数を X とする。X の確率密度関数 $f(x)$，期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $D(X)$，累積分布関数 $F(x)$，モーメント母関数 $M_X(t)$ を求めよ。

(2) 確率密度関数 (5.10)（教科書 p.91）を持つ指数分布に従う確率変数を X とする。X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $D(X)$，累積分布関数 $F(x)$，モーメント母関数 $M_X(t)$ を求めよ。

問 2. 教科書 p.100, 表 5.5 の確率分布に従う確率変数を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X 期待値 $E(X)$ を求めよ。

(2) X の分散 $V(X)$ を求めよ。

問 3. コインを投げて初めて 表(おもて) が出たときの試行回数を X とする。例えば，裏，裏，表 となったとすると 3 回目に初めて表が出たので，この場合 $X=3$ である。以下の問いに答えよ。

(1) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(2) X の分散 $V(X)$ を求めよ。

問 4. 区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(2) X の分散 $V(X)$ を求めよ。

(3) X の標準化 Z を求めよ。

(4) Z はどのような分布に従うか？

問 5. 教科書 p.91, 式 (5.10) の確率密度関数 $f(x)$ を持つ指数分布に従う確率変数を X とする。ただし，簡単のため $\lambda=1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) X の累積分布関数 $F_X(x)$ を求めよ。

(2) $Y=X/2$ と変数変換する。Y の累積分布関数 $F_Y(y)$ を求めよ。

(3) Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求め，そのグラフを書け。

解答　問 1 (1) $f(x)=\begin{cases} 1/2, & -1\le x\le 1, \\ 0, & \text{それ以外}, \end{cases}$ $E(X)=0$，$V(X)=1/3$，$D(X)=1/\sqrt{3}$，

$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ (x+1)/2, & -1\le x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$ $M_X(t)=(e^t-e^{-t})/2t.$ (2) $E(X)=1/\lambda$，$V(X)=1/\lambda^2$，$D(X)=1/\lambda$，$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases}$ $M_X(t)=\lambda/(\lambda-t),\ t<\lambda.$

問 2 (1) $E(X)=5/3$　(2) $V(X)=10/9$

問 3 (1) $E(X)=2$　(2) $V(X)=2$

問 4 (1) $E(X)=1/2$　(2) $V(X)=1/12$　(3) $Z=2\sqrt{3}(X-1/2)$　(4) Z は区間 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ 上の一様分布に従う。

問 5 (1) $F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-x}, & x\ge 0. \end{cases}$ (2) $F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ 1-e^{-2y}, & y\ge 0. \end{cases}$

(3) $f_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ 2e^{-2y}, & y\ge 0. \end{cases}$ グラフは省略