２．連立１次方程式

教科書P.20

本章のねらい

- 階段行列の理解とその求め方である掃き出し法を身につける
- 逆行列，連立１次方程式の解法である掃き出し法を身につける
- 階数と解の存在条件の関係を理解する

連立１次方程式をどうやって解くか？

- つるかめ算
- ２元１次方程式（変形して代入する）
- 逆行列

例１：2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

$x_1 = -2x_2 + 5$ を第1式に代入

$$2(-2x_2 + 5) + 3x_2 = 8 \Rightarrow -x_2 = -2 \quad \therefore x_2 = 2$$

$$\Rightarrow \therefore x_1 = -2 * 2 + 5 = 1$$

例２：2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を求める．

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ だから（正則を仮定）

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ではn元連立１次方程式をどうやって解くか？

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{12n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

基本行列１と基本変形(1)

基本行列１

$$P_i(c)=\begin{array}{cc} & \text{第}i\text{列} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & O & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & c & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & O & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{bmatrix} & \text{第}i\text{行} \end{array}$$

$P_i(c)$は，単位行列で，（i, i）成分をc (≠0) に変えたもの

・正則である

・逆行列は$P_i(c^{-1})$

- 左からAに乗ずる($P_i(c)\,A$)とAの第i行をc (≠0)倍した行列になる
- 右からAに乗ずる($AP_i(c)$)とAの第i列をc(≠0)倍した行列になる

左から基本行列をかけることを「行基本動作」
右から基本行列をかけることを「列基本動作」

基本行列１と基本変形(2)

$$P_i(c)A=\begin{array}{c}\text{第}i\text{列}\\ \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & O & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & c & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & O & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{l}\text{第}i\text{行}\\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\end{array} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{ii} & ca_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \text{第}i\text{行} \end{array}$$

$$AP_i(c)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & O & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & c & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & O & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & ca_{ii} & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ca_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \text{第}i\text{列} \end{array}$$

- 左からAに乗ずる($P_i(c)\,A$)とAの第i行を$c\,(\neq 0)$倍した行列になる
- 右からAに乗ずる($AP_i(c)$)とAの第i列を$c(\neq 0)$倍した行列になる

基本行列２と基本変形(1)

基本行列２

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{第}j\text{列} \\
P_{ij}(c) = & \begin{bmatrix}
1 & & & \vdots & & \\
 & \ddots & & \vdots & O & \\
 & & 1 & \cdots & c & \cdots & \cdots \\
 & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & 1 & \\
 & O & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix} & \text{第}i\text{行}
\end{array}
$$

$P_{ij}(c)$は，単位行列で，(i, j) $(i \neq j)$ 成分をc $(\neq 0)$ に変えたもの

・正則である

・逆行列は$P_{ij}(- c)$

- 左からAに乗ずる($P_{ij}(c)\,A$) とAの第i行に第j行をc 倍したものを足した行列になる
- 右からAに乗ずる($AP_{ij}(c)$)とAの第i列に第j列をc倍したものを足した行列になる

基本行列2と基本変形(2)

$$
P_{ij}(c)A=
\begin{array}{cc}
 & \text{第}j\text{列} \\
\text{第}i\text{行} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & \vdots & & \\
 & \ddots & & & \vdots & O & \\
\cdots & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & \cdots \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & O & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & \\
 & & \ddots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i1}+ca_{j1} & a_{ii}+ca_{ji} & a_{in}+ca_{jn} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

第i行+第j行$\times c$

$$
AP_i(c)=
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & \\
 & & \ddots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & & & & \vdots & & \\
 & \ddots & & & \vdots & O & \\
\cdots & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & \cdots \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & O & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i}+ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{ii}+ca_{ij} & & \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mi}+ca_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

第i列+第j列$\times c$

基本行列３と基本変形（１）

基本行列３

第i列 ⟷ 第j列

$$
P_{ij}=\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \text{第}i\text{列} & & & & \text{第}j\text{列} & & & \\
\end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right] &
\begin{array}{c}
 \\ \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \updownarrow \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

P_{ij}は，単位行列で，第i列と第j列を交換したもの

- 正則である
- 逆行列は$P_{ij}^{-1}=P_{ij}$

- 左からAに乗ずる($P_{ij}A$)とAの第i行と第j行を交換した行列になる
- 右からAに乗ずる(AP_{ij})とAの第i列と第j列を交換した行列になる

基本行列3と基本変形(2)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & \text{第}i\text{列} & & & & \text{第}j\text{列} & & & \end{array} \\
P_{ij}A = &
\begin{bmatrix}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & \\
 & & \ddots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
 \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
AP_{ij} =
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & \\
 & & \ddots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

第i列⇔第j列

行基本操作

1. 第i行をc倍する
2. 第i行に第j行のc倍を加える
3. 第i行と第j行を入れ替える

列基本操作も同様に行うことができる

階段行列とは（１）

- $m \times n$の行列Bが次の3つの条件を満たすとき階段行列という

1. あるk($1 \leqq k \leqq m$)に対して，Bの第1行目から第k行目まではいずれも零ベクトルでなく，残りの(m-k)個の行は全て零ベクトル
2. 第i行($i = 1,2, \ldots, k$)の成分を左から順に見ていくと，0でない最初の成分は1であり，この1が第q_i列にあるとすれば

$$q_1 < q_2 < \cdots < q_k$$

3. 第q_i列($i = 1,2, \ldots, k$)はm次元基本ベクトルe_i

階段行列とは

- m×nの行列Bについて（k=2, q_1=2, q_2=4の例）

(2) 1 が出てくるのが 2 列目: $q_1 = 2$

(2) 次に 1 が出てくるのが 4 列目: $q_4 = 4$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1)ここまで零行ベクトルじゃない: k=2

(1)あとは零行ベクトル

(3) 1が出てくる列が基本ベクトル

階段行列への変形

- 行基本変形を繰り返すと階段行列Bに変形できる

$$P_n P_{n-1} \cdots P_1 A = PA = B$$

掃き出し

$$A' = \begin{bmatrix} & 0 & \\ * & \vdots & * \\ & 0 & \\ * & 1 & * \\ & 0 & \\ * & \vdots & * \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

ある列の成分をもとにして，行基本操作2によって同じ列の他の成分を０にする

- 教科書では１つの列のある成分をαとして掃き出すとしているが，一般的にはまずその成分を１にしてから他の成分を掃き出す

階段行列の一意性

- 任意の行列Aは，行基本操作の使い方に関係なく，ただ一つの階段行列Bをもつ

階数（ランク，rank）

- 行列Aの階段行列をBとするとき，Bの階段の数（すなわち零ベクトルでない行の個数）kを行列Aの階数とよび，$\mathrm{rank}\,A = k$で表す

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}\,A = 2$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}\,B = 3$$

p.27 例題3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 6 & -8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$ の階数を求めよ。

- ポイント：行列の階数＝階段行列の零ベクトルでない行の個数

- 解答：$\mathrm{rank}\, A = 3$

正則性と階段行列

Aがn次の正方行列のとき，次の３つは同値である

1. Aは正則
2. $\operatorname{rank} A = n$
3. Aの階段行列は単位行列I_n

逆行列の計算

- 行列Aの逆行列A^{-1}の求め方

1. 行列$[A, I_n]$を作る
2. 行基本操作を繰り返して，AがI_nとなるようにする
3. $[I_n, A^{-1}]$となるので，A^{-1}が求まる．

p.28 例題 4

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ の逆行列を求めよ。

- ポイント：$[A,\ I]$を作り，$[I,\ A^{-1}]$を求める

- 解答：

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 13 & 5 & -40 \\ -5 & -2 & 16 \\ -3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

連立１次方程式の解法(1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

係数行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

連立１次方程式の解法(２)

- 拡大係数行列を作る

$$[A,\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ddots & & & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- 階段行列Bに変形する(掃き出し法)

$$\left[A,\mathbf{b}\right] = \left[B,\tilde{\mathbf{b}}\right]$$

Aが正則である場合,
Bは単位行列になる

同次（斉次）連立１次方程式

- 右辺のベクトル$\mathbf{b}$が$\mathbf{0}$の場合を同次連立1次方程式という

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- $\mathbf{x}$ =0は常にこの方程式の解である．これを自明な解と呼ぶ．
- $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$が同次方程式$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$の解であるならば，それらの線形結合$\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k$も明らかに$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$の解である

- rank A = 未知数の個数 ⇒ 自明な解のみ
- rank A ≠未知数の個数 ⇒ 無数の解

（任意定数の個数）=（未知数の個数）- rank A

解の存在条件

- 連立1次方程式$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$が解をもつための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\left[A, \mathbf{b}\right] = \mathrm{rank}\, A$$

が成り立つことである．

方程式の解と係数行列の階数の関係(1)

N個の未知数を含む連立1次方程式$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$が解をもつとする

1. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$がただ1つの解をもつ ⇔ $\mathrm{rank}\, A = n$
2. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$が無限に多くの解をもつ ⇔ $\mathrm{rank}\, A < n$

方程式の解と係数行列の階数の関係(2)

連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は

1. $\mathrm{rank}[A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\, A =$ 未知数の個数⇒ただ一つの解

2. $\mathrm{rank}[A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\, A <$ 未知数の個数⇒無数の解

   （任意定数の個数）=（未知数の個数）- $\mathrm{rank}\, A$

3. $\mathrm{rank}[A, \boldsymbol{b}] \neq \mathrm{rank}\, A$ ⇒解なし

p.29 例題 5

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ x-2y+2z=2 \\ 2x-y+2z=-1 \end{cases}$$ を解け。

- ポイント：$[A,\ \boldsymbol{b}]$を作り，$[I,\ \boldsymbol{x}]$を求める

- 解を求めたら，代入して確かめよう！
- 解答：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

p.30 例題 6

$$\begin{cases} x+3y+8z=-9 \\ 3x+5y+2z=-1 \\ x+y-3z=4 \end{cases}$$ を解け。

- 解を求めたら，代入して確かめよう！
- 解答：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{21}{2}+\dfrac{17}{2}c \\ -\dfrac{13}{2}-\dfrac{11}{2}c \\ c \end{bmatrix}$$

- cは任意定数

p.31 例題 7

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - 9z = 4 \end{cases}$$ を解け。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$ とすると，

$\mathrm{rank}[A, \boldsymbol{b}] = 3$

$\mathrm{rank}\, A = 2$

$\mathrm{rank}[A, \boldsymbol{b}] \neq \mathrm{rank}\, A$ なので，解をもたない

p.32 例題8

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ 2x-y+z-2w=0 \\ 8x+y+9z+2w=0 \end{cases}$$ を解け。

- 解答：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

- a, bは任意定数

p.33 例題9

$$\begin{cases} -x+3y+2z=a+1 \\ 2x+y=2 \\ 4x+9y+4z=-a \end{cases}$$

が解をもつように，aの値を定めよ。

- 解答：

rank$[A, \boldsymbol{b}]$ = rank A を満たすように決定する

$$a=-\frac{8}{3}$$