電気電子情報数学及び演習Ⅱ－演習問題（１）解答例

<u>問題 1.1 (p.8)</u>

$z_1 = 4 + 3i$、$z_2 = 2 - 5i$ とする。つぎの演算で得られる複素数を $x + iy$ の形で求めよ。

４．$(3z_1 - z_2)^2$

（解答例）　$(3z_1 - z_2)^2 = (12 + 9i - 2 + 5i)^2 = (10 + 14i)^2$

$= (100 + 280i - 196) = -96 + 280i$

１０．$\dfrac{1}{z_1^2}$、$\dfrac{1}{\bar{z}_1^2}$

（解答例）

$$\frac{1}{{z_1}^2} = \frac{1}{(4+3i)^2} = \frac{1}{16-9+24i} = \frac{7-24i}{(7+24i)(7-24i)} = \frac{7-24i}{49+576} = \frac{7-24i}{625}$$

$$\frac{1}{{\bar{z}_1}^2} = \frac{1}{(4-3i)^2} = \frac{1}{16-9-24i} = \frac{7+24i}{(7-24i)(7+24i)} = \frac{7+24i}{49+576} = \frac{7+24i}{625}$$

１２．$z_2\overline{z_2}/(z_1\overline{z_1})$

（解答例）

$$\frac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_1}} = \frac{(2-5i)(2+5i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{4+25}{16+9} = \frac{29}{25}$$

$z = x + iy$とする。計算の詳細を示してつぎを計算せよ。

１６．$\mathrm{Re}(z/\bar{z})$

（解答例）

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(x+iy)(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{x^2+i2xy-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

<u>問題 1.2 (pp.13-14)</u>

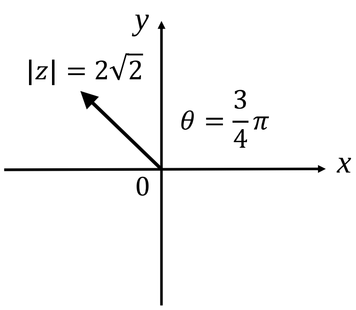
つぎの複素数を極形式で表し、複素平面上に図示せよ。

２．　$z = -2 + 2i$

（解答例）$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$



複素平面

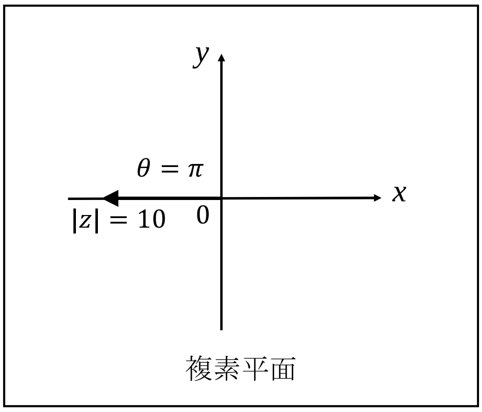
※大きさと角度が分かること

４．　$z = -10$

（解答例）$|z| = 10$

$$\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-10}\right) = \pi$$

$$z = 10e^{i\pi}$$



８．　$z = \dfrac{i}{3+3i}$

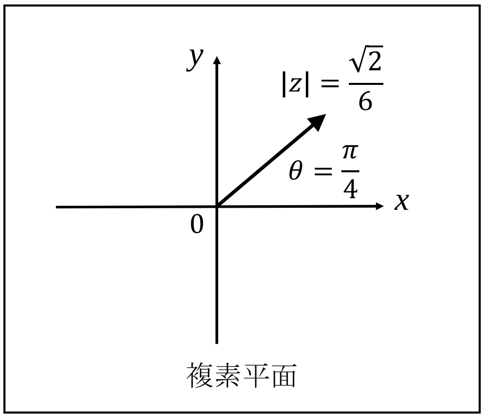
（解答例）

$$z = \frac{i}{3+3i} = \frac{i(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{3+3i}{18} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1/6}{1/6}\right) = \pi/4$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$$



すべてのべき根を求めて図示せよ。

２２．　$w = \sqrt[3]{8i}$

（解答例）

$z = 8i$とおき、極形式で表現すると、

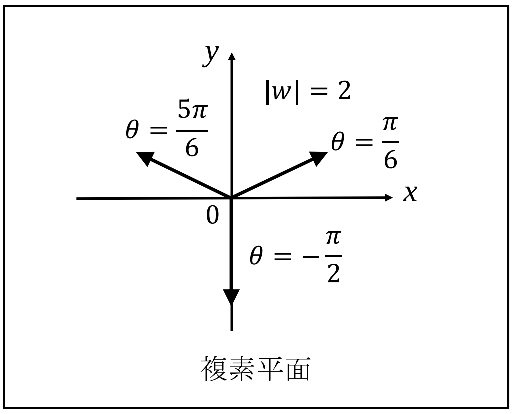
$$z = 8i = 8e^{i(\theta + 2n\pi)} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 8e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}$$

$$w = z^{1/3} = \left[8e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}\right]^{1/3} = 2e^{i\left(\frac{\pi + 4n\pi}{6}\right)}$$

$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$、$w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$、$w_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$



２３．$w = \sqrt[3]{216}$

（解答例）

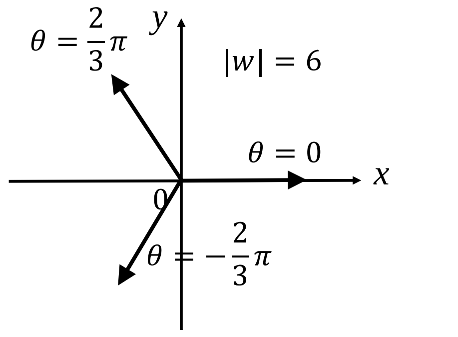
$z = 216$とおき、極形式で表現すると、

$$z = 216 = 216e^{i(\theta+2n\pi)} \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0}{216} = 0$$

$$w = z^{1/3} = \left[216e^{i(2n\pi)}\right]^{1/3} = 6e^{i\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$$

$$w_1 = 6、w_2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}、w_3 = 6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$



複素平面

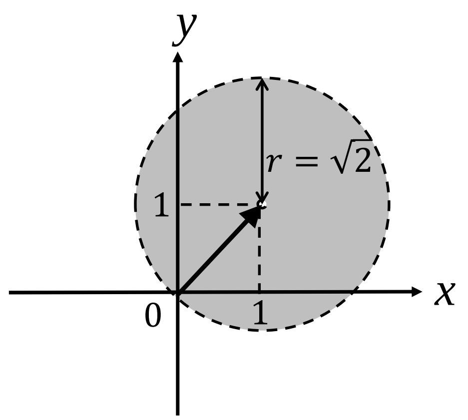
<u>問題 1.3 (p.21)</u>

４．つぎの不等式で定義される集合を複素平面上に図示せよ。

$$0 < |\ z - 1 - i\ | < \sqrt{2}$$

（解答例）

中心：$(x, y) = (1,1)$、領域の半径：$0 < r < \sqrt{2}$



複素平面

１２． $f(z) = (z-2)/(z+2)$において、$z = 4i$ でのRe$\{f(z)\}$、Im$\{f(z)\}$を求めよ。

（解答例）

$$f(z) = \frac{4i-2}{4i+2} = \frac{(4i-2)(-4i+2)}{(4i+2)(-4i+2)} = \frac{16-4+(8+8)i}{16+4} = \frac{12+16i}{20} = \frac{3+4i}{5}$$

$$\mathrm{Re}\{f(z)\} = \frac{3}{5}、\quad \mathrm{Im}\{f(z)\} = \frac{4}{5}$$

$f(0) = 0$で$z \neq 0$に対して関数 f が以下に等しいとき、$f(z)$が$z = 0$で連続であるかどうか調べよ。

１４． $f(z) = \dfrac{(\mathrm{Re}\,z^2)}{|z|}$

（解答例） $z = x + iy$とおくと、

$$f(z) = \frac{Re\{z^2\}}{|z|} = \frac{Re\{x^2 - y^2 + i2xy\}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{z\to0} f(z) = \lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0} f(z)\right] = \lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \lim_{y\to0}\left[\frac{-y^2}{\sqrt{y^2}}\right] = 0$$

$$\lim_{z\to0} f(z) = \lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0} f(z)\right] = \lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \lim_{x\to0}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\right] = 0$$

また、題意より$f(0) = 0$である。ゆえに、$f(z)$は $z = 0$ で連続である。

つぎの導関数の値を求めよ。

１７．　i　における$f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$

（解答例）

$$f'(z)\big|_{z=i}=\lim_{z\to i}\frac{f(z)-f(i)}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{\frac{z-i}{z+i}-\frac{i-i}{i+i}}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{i+i}=\frac{1}{2i}=\frac{-i}{2}$$

（別解）

$f(z)=\dfrac{q(z)}{g(z)}$のとき、$f'(z)\ =\dfrac{q'(z)g(z)-q(z)f'(z)}{\{g(z)\}^2}$なので

$$f'(z)=\frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2}=\frac{1}{z+i}-\frac{z-i}{(z+i)^2}$$

$z=i$　を代入すると、$f'(i)=\dfrac{1}{i+i}-\dfrac{i-i}{(i+i)^2}=\dfrac{1}{2i}=\dfrac{-i}{2}$