電気磁気学

2019 年 3 月 21 日

概要

一関高専電気情報工学科の電気磁気学I，電気磁気学II，電気磁気学IIIの講義をまとめたもの
構成を少し変えてるため，授業の板書と一致しない

1　電荷と電界（p.1）

1.1　電荷（p.1）

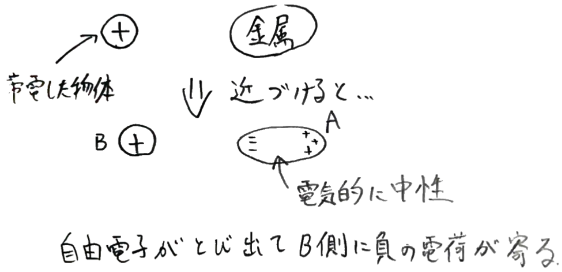
・帯電　：電気を帯びる，もつ
・帯電体：電気を帯びた物体
・電荷　：電気の実態
・電荷量：電荷の大きさ$[C] = [A \cdot s]$（クーロン）
・電荷は正，負の二種.
　→同種は反発し合い，異種は引き合う.
・帯電していない
　→正負の電荷を等量持っている.
　　→電気的中性
・陽子は電子の1800倍の質量

	電荷量	質量
陽子	$-1.6 \times 10^{-19}C$	$9.1 \times 10^{-31}kg$
電子	$+1.6 \times 10^{-19}C$	$1.7 \times 10^{-27}kg$

1.2　物質の電気的性質（p.2）

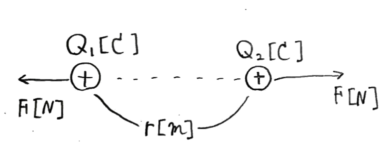
・導体：電荷をよく通す
・不導体：電荷をよく保持する
・半導体：上二つの中間的性質をもつ

1.3　静電誘導（p.4）



静電誘導：帯電体の接近によって，物質内の電荷分布が変化する現象.

1.4　クーロンの法則（p.5）



点電荷：十分に小さく，点とみなせるような帯電体

クーロンの法則

帯電体の間に働く力を表す法則.

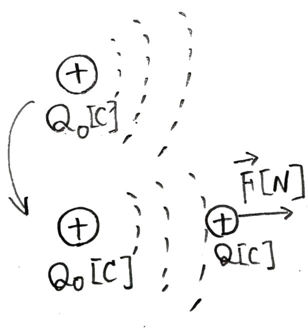
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2}\,[\mathrm{N}] \tag{1.1}$$

$$\fallingdotseq 9 \times 10^9 \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2}\,[\mathrm{N}] \tag{1.2}$$

$$\epsilon_0 = 真空の誘電率\,[\mathrm{F/m}] \tag{1.3}$$

このFをクーロン力や静電力ともいう.

1.5　電界（p.8）



はじめにQ_0の電荷を置く
　→周辺の空間が電気的に歪む

次にQの電荷を置くと力が働く
　→Q_0によって歪んだ空間にQを置くと力が働く.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_0| \cdot |Q|}{r^2} \text{ [N]} \tag{1.4}$$

$$= \frac{|Q_0|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot |Q| \text{ [N]} \tag{1.5}$$

ここで$F = E \cdot |Q|$と置くと

$$E = \frac{|Q_0|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ [N/C]} \tag{1.6}$$

電界はベクトル量であるから

電界（電場）

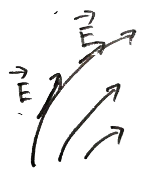
電荷を置くことで生じる空間の電気的な歪み.
電界$\overrightarrow{E}[N/C]$の中に置かれた電荷$Q[C]$に働くクーロン力Fは

$$\overrightarrow{F} = Q \cdot \overrightarrow{E} \text{ [N/C]} \tag{1.7}$$

この関係はどのような電界でも使える

一般に，電界が存在するとき，$+1C$の点電荷を置いたなら，
電界の大きさ：力の大きさ
電界の向き　：力の向き

1.6　電気力線（p.24）

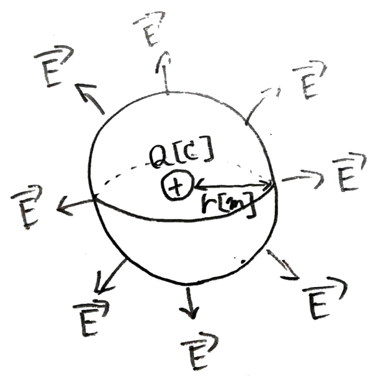


その曲線のある点における接線の向きが電界の向きと一致するように書いた曲線.
電界の大きさは電気力線の密度で表す.

1.7　電気力線の密度と電界（p.25）

$$\text{電気力線の密度} = \frac{\text{その板を通る電気力線の数 [本]}}{\text{仮想的な板の面積 [m}^2\text{]}} \tag{1.8}$$

$$\text{電界の大きさ}\,[\mathrm{N/C}] = \text{電気力線の密度}\,[\text{本}/\mathrm{m}^2] \tag{1.9}$$



$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{x}{4\pi r^2} \tag{1.10}$$

$$x = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.11}$$

1.8　電束と電束密度（p.27）

電束

形状は電気力線と同じ.

媒質の誘電率ϵに関係なく，$1C$の電荷から1本発生する.

→電気力線のϵ_0倍.

$+1\,[\mathrm{C}]$の点電荷から出る本数

電気力線：$1/\epsilon_0\,[\text{本}]$

電束：$1\,[\text{本}]$

電束密度

単位球面上の単位面積当たりの電束数.

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E}\,[\mathrm{C/m}^2] \tag{1.12}$$

1.9　ガウスの法則（p.29）

ガウスの法則

ある閉曲面を通って外に出る電気力線の総数はその閉曲面に含まれる電荷の総量のQ [C]をϵ_0で割ったものに等しい.

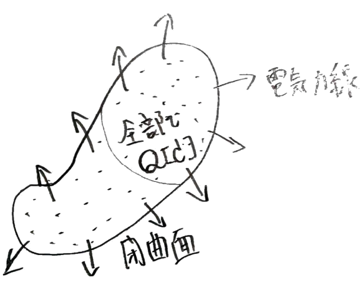
↓

ある閉曲面上で電界を面積分したものはその閉曲面上に含まれる電荷の総量Q [C]をϵ_0で割ったものに等しい.

閉曲面S_0を通って外に出る電荷の総量を$Q[C]$とすると

$$\oint_{S_0} EdS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.13}$$

面積分



電気力線の本数

$$E_1 \times \Delta S_1 + E_2 \times \Delta S_2 + \dots \ [\text{本}/\mathrm{m}^2] \times [\mathrm{m}^2] \tag{1.14}$$

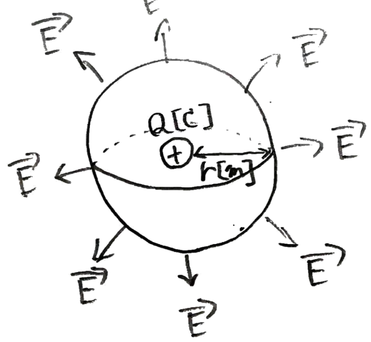
電界の面積分

$$E_1 \times \Delta S_1 + E_2 \times \Delta S_2 + \dots \ [\mathrm{N/C}] \times [\mathrm{m}^2] \tag{1.15}$$

$$= \oint_{S_0} EdS \tag{1.16}$$

1.10　ガウスの法則を用いた計算

1.10.1　点電荷（p.31）



点電荷を中心とする半径r [m]の球面上の電界の大きさをEとする．
ガウスの法則により

$$\oint_{S_0} EdS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.17}$$

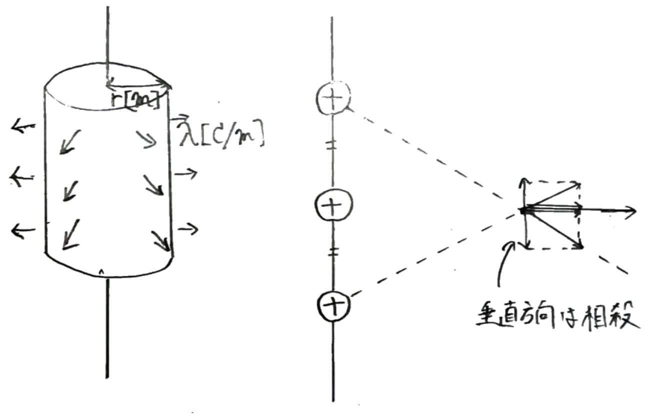
$$E \times \Delta S_1 + E \times \Delta S_2 + \ldots E \times \Delta S_n = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.18}$$

$$E\left(\Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.19}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.20}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,[N/C] \tag{1.21}$$

1.10.2 無限長の線電荷



線密度$\lambda\,[C/m]$の無限長の線電荷が作る電界を求める．
線電荷と中心軸が一致する半径が$r\,[m]$，長さ$l\,[m]$の円筒の側面上の電界をEとする．

ガウスの法則より

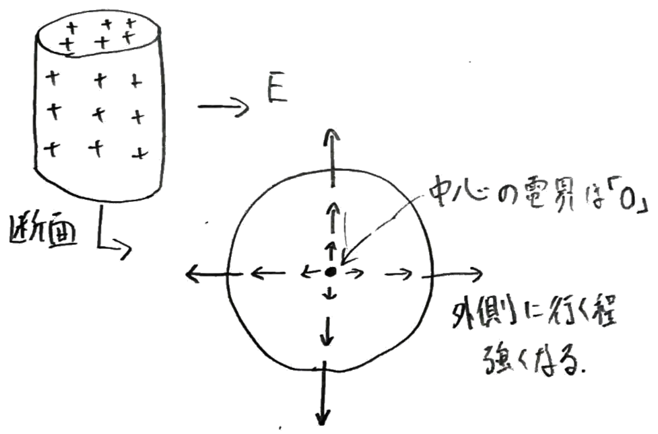
$$E \times 2\pi rl + 0 \times \pi r^2 + 0 \times \pi r^2 = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \tag{1.22}$$

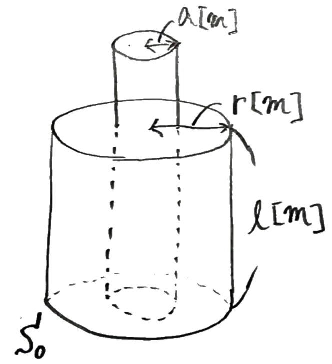
$$E \cdot l \cdot 2\pi r = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \tag{1.23}$$

$$E \cdot 2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \tag{1.24}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,[N/C] \tag{1.25}$$

1.10.3　一様に帯電した無限長の円柱（p.89）





単位長さあたり$\lambda\,[C/m]$の電荷が一様に分布した円柱の内部と外部の電界の大きさを求める．
円柱と同じ中心軸をもつ半径が$r\,[m]$，長さ$l\,[m]$の円筒の側面上の電界をEとする．

・外部$(r > a)$
ガウスの法則より

$$\oint_{S_0} EdS = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \tag{1.26}$$

$$E \times 2\pi rl + 0 \times \Delta S_n = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \tag{1.27}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.28}$$

・内部$(0 \leqq r \leqq a)$
まず，体積比を利用して閉曲面の側面を出ていく電荷量$Q[C]$を求める．

$$\pi a^2 l : \pi r^2 l \tag{1.29}$$

$$\frac{\lambda l}{\pi a^2 l} = \frac{Q}{\pi r^2 l} \tag{1.30}$$

$$Q = \frac{\lambda l}{\pi a^2 l} \times \pi r^2 l = \lambda l \frac{r^2}{a^2}\,[C] \tag{1.31}$$

	体積	電荷
全体	$\pi a^2 l$	λl
求めるところ	$\pi r^2 l$	$\lambda l \dfrac{r^2}{a^2}$

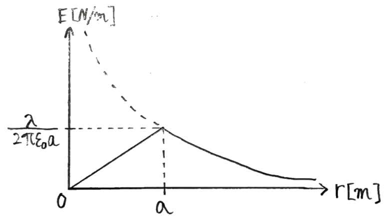
ガウスの法則より

$$\oint_{s_0} EdS = \frac{\lambda l + \dfrac{r^2}{a^2}}{\varepsilon_0} \tag{1.32}$$

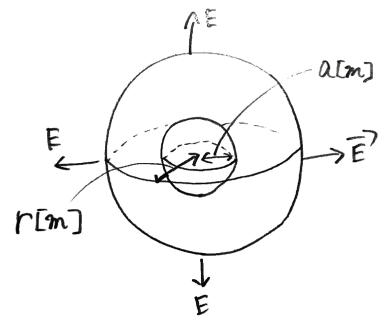
$$E \cdot 2\pi rl + 0 \cdot \pi r^2 + 0 \cdot \pi r^2 = \frac{\lambda l r^2}{\varepsilon_0 a^2} \tag{1.33}$$

$$E = \frac{\lambda l r^2}{2\pi rl \cdot \varepsilon_0 a^2} \tag{1.34}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a^2} r \tag{1.35}$$



1.10.4 一様に帯電した球（p.82）



半径$a[m]$の球に$Q[C]$の電荷が一様に分布している球と同じ中心をもつ半径$r[m]$の球面上の電界の大きさをEとする．

・外部$(a < r)$

ガウスの法則より

$$\oint_{S_0} EdS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.36}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.37}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ [N/C] \tag{1.38}$$

・内部$(a < r)$

	体積	電荷
全体	$\frac{4}{3}\pi a^3$	Q
求めるところ	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$Q\frac{r^3}{a^3}$

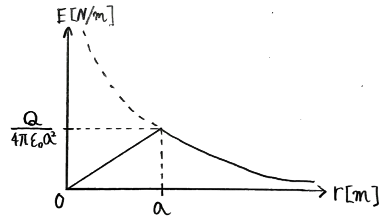
$$\because \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \cdot \frac{r^3}{a^3} \tag{1.39}$$

ガウスの法則より

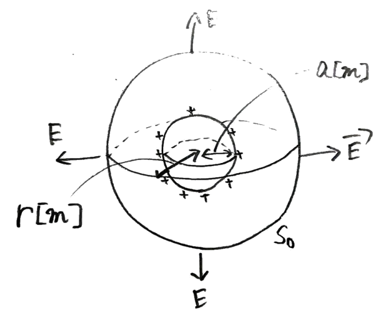
$$\oint_{S_0} EdS = \frac{Q\frac{r^3}{a^3}}{\varepsilon_0} \tag{1.40}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^3} \tag{1.41}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r \tag{1.42}$$



1.10.5 表面が一様に帯電した導体球（p.87）



半径$a[m]$の導体球の表面上に$Q[C]$の電荷が一様に分布している球
導体球と同じ中心をもつ半径$r[m]$の球面上の電界の大きさをEとする.

・外部$(r > a)$
ガウスの法則より

$$\oint_{S_0} EdS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.43}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.44}$$

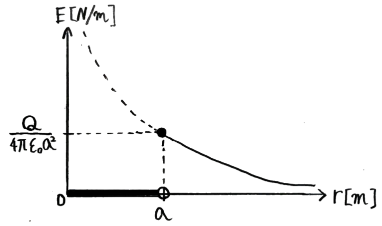
$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,[N/C] \tag{1.45}$$

・内部$(0 \leqq r < a)$

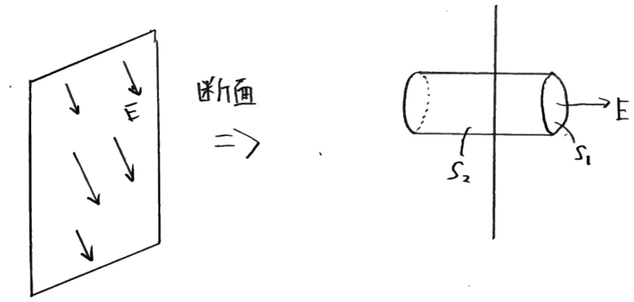
$$\oint_{s_0} EdS = \frac{0}{\varepsilon_0} \tag{1.46}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0 \tag{1.47}$$

$$\therefore E = 0\,[N/C] \tag{1.48}$$



1.10.6　一様に帯電した誘電体平面（p.94）



単位面積当たりの電荷量を$\sigma\left[C/m^2\right]$とする．ガウスの法則より

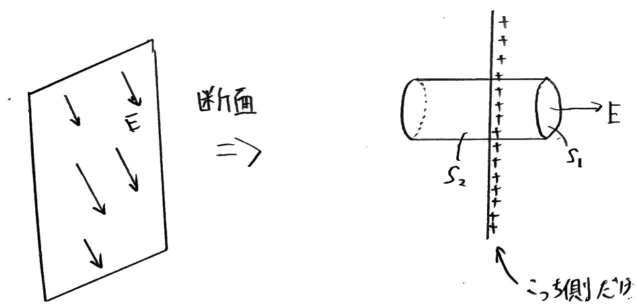
$$\oint_{s_0} EdS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \tag{1.49}$$

$$E \times S_1 \times 2 + 0 \times S_2 = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \tag{1.50}$$

$$2ES_1 = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \tag{1.51}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,[N/C] \tag{1.52}$$

1.10.7　一様に帯電した無限大の導体平面（p.95）



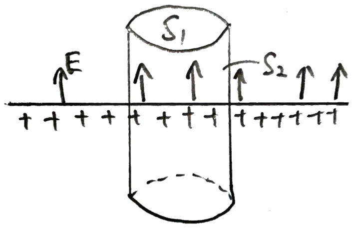
単位面積当たりの電荷量を$\sigma\left[C/m^2\right]$とする.

$$\oint_{s_0} EdS = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \tag{1.53}$$

$$E \times S_1 + 0 \times S_2 + 0 \times S_2 = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \tag{1.54}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,[N/C] \tag{1.55}$$

1.10.8　一様に帯電した導体表面上の電界（p.96）



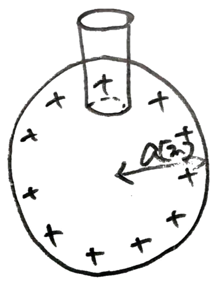
導体表面における電界は表面に対して垂直である.
なぜなら，水平方向の成分があると表面に永久電流が流れてしまうから.

$$E \therefore S_1 + 0 \times S_2 + 0 \times S_1 = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \tag{1.56}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.57}$$

応用例

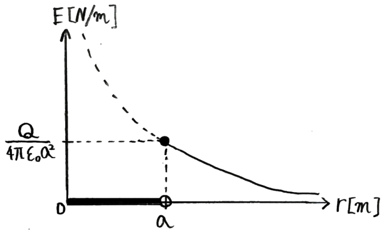
半径$a[m]$，電荷量$Q[C]$を持った球の表面上の電界の大きさ



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.58}$$

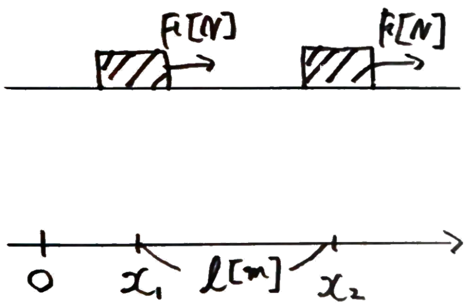
$$= \frac{\frac{Q}{4\pi\varepsilon a^2}}{\varepsilon_0} \tag{1.59}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{1.60}$$


E[N/m]
Q/4πε₀a²
0
a
r[m]

2　電位（p.49）

2.1　電界中で電荷を移動するのに要する仕事（p.49）



力$F[N]$が物体にした仕事$W[J]$は

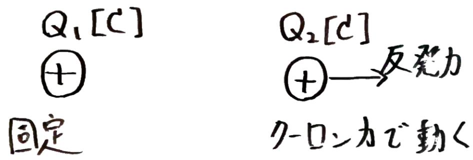
$$W = Fl[J] \tag{2.1}$$

ここで移動距離を細かく分けてみる

$$\begin{aligned} W &= F(\Delta l + \Delta l + \Delta l + \ldots + \Delta l) \quad (2.2)\\ &= F\Delta l + F\Delta l + F\Delta l + \ldots + F\Delta l \quad (2.3) \end{aligned}$$

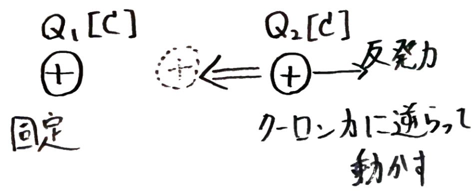
2.2　電荷を運ぶのに要する仕事（p.49）

2.2.1　ケース1



Q_1の作る電界がQ_2に対して仕事をした.
　→仕事の符号は「負」となる.

2.2.2　ケース2

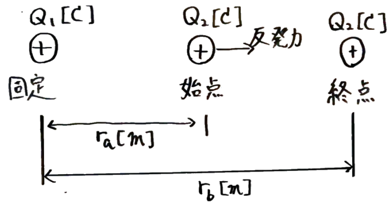


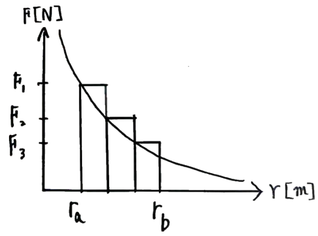
外部からQ_2に対して仕事をした.

→仕事の符号は「正」となる．

2.3　仕事の計算（p.49）

2.3.1　ケース1





$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{2.4}$$

Q_2の電荷が$r = r_a$から$r = r_b$まで動くとき，Q_1による電界がQ_2にした仕事Wの近似値は

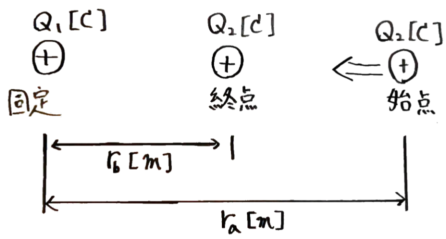
$$W = -F_1 \times \Delta r_1 - F_2 \times \Delta r_2 \ldots \tag{2.5}$$

$$= -\sum_{k=1}^{3} F_k \Delta r_k \tag{2.6}$$

分割を限りなく細かくすると，積分を用いてWを正確に求めることができる．

$$W = -\int_{r_a}^{r_b} F dr \, [J] \tag{2.7}$$

2.3.2　ケース2



クーロン力に逆らって，外部からQ_2にした仕事Wは

$$W = \int_{r_b}^{r_a} F dr \, [J] \tag{2.8}$$

$$= -\int_{r_a}^{r_b} F dr \, [J] \tag{2.9}$$

2.3.3 まとめ

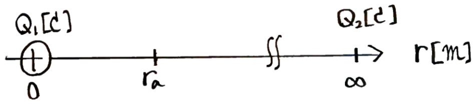
2つのケースのいずれの場合でも，以下のように表せる．

$$W = -\int_{始点}^{終点} (クーロン力) dr \, [J] \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} W < 0 : 電界がした力 \\ W > 0 : 外部がした力 \end{cases} \tag{2.11}$$

2.4 電位（p.54）

2.4.1 無限遠点から電荷を運ぶのに要する仕事



$$W = -\int_{\infty}^{r_a} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \tag{2.12}$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left[r^{-1} \right]_{\infty}^{r_a} \tag{2.13}$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - 0 \right) \tag{2.14}$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_a} \, [J] \tag{2.15}$$

2.4.2 無限遠点から$+1C$の電荷を運ぶのに要する仕事

前問において，$Q_2 = 1[C]$とすればよい．

$$\therefore W = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_a} \, [J] \tag{2.16}$$

$$= -\int_{\infty}^{r_a} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \tag{2.17}$$

$$= -\int_{\infty}^{r_a} E Q_2 dr \tag{2.18}$$

ここで$Q_2 = 1[C]$だから

$$W = -\int_{\infty}^{r_a} E dr \tag{2.19}$$

2.4.3　電位

電位

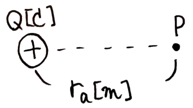
無限遠点から$+1C$の電荷を運ぶのに要する仕事を$r = r_a$における電位と定義する．
単位は$[V]$を使用する．

$$V_a = -\int_{\infty}^{r_a} E dr \, [V] \tag{2.20}$$

2.4.4　電位の基準

1. 電気磁気学：無限遠点
2. 電力　　　：大地
3. 回路　　　：任意

2.4.5　点電荷による電界

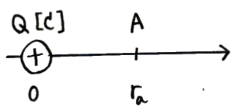


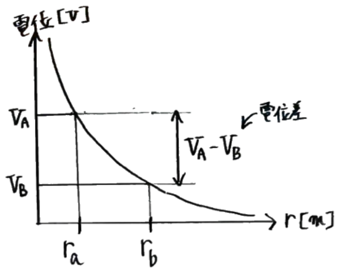
点Pの電位は

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_a} \, [V] \tag{2.21}$$

2.5　電位差（p.56）

2.5.1　電位差





$V_a - V_b$を点Bに対する点Aの電位差という．
　→点Bから点Aに$+1C$を運ぶのに要する仕事．
電位差を電圧ともいう．

2.5.2　計算方法

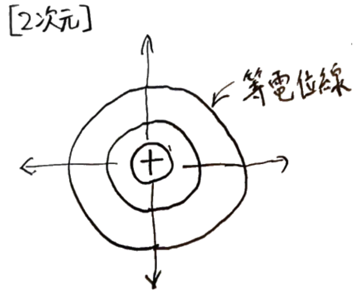
点Bに対する点Aの電位差V_{AB}は

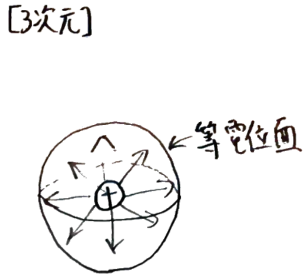
$$V_{AB} = -\int_{r_b}^{r_a} (\text{電界})dr \tag{2.22}$$

原点に$Q[C]$がある場合は

$$V_{AB} = -\int_{r_b}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}dr \tag{2.23}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[r^{-1}\right]_{r_b}^{r_a} \tag{2.24}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)[V] \tag{2.25}$$

2.5.3　等電位線と電気力線の関係

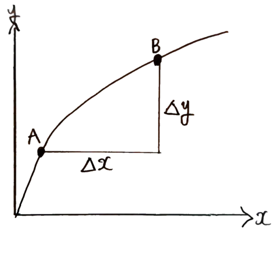




・電界中で，電位Vの等しい点を連ねて作った仮想的な線を等電位線という.
・二次元の時は等電位線，三次元の時は等電位面.
・等電位線と電気力線は垂直に交わる.
・電位の山を下る時，最も急な傾斜が電界の向き.
・等電位線に沿って電荷を動かした時，仕事はしない.
・動かす方向に力はない.

2.6　電位の傾き（p.59）

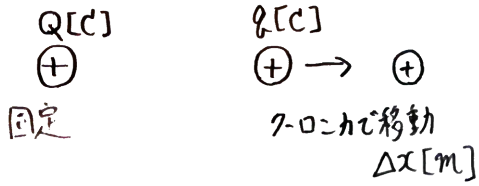
2.6.1　勾配



$$\text{平均変化率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.26}$$

$$\text{勾配} = \frac{dy}{dx}\left[(\text{yの単位})/m\right] \tag{2.27}$$

2.6.2　電位の傾き



Qによる電界Eが行った仕事ΔWは

$$\begin{aligned} \Delta W &= -(\text{力}) \times (\text{距離}) \qquad (2.28)\\ &= -qE \times \Delta x \qquad (2.29) \end{aligned}$$

この時，Eが一定とみなせるほどΔxは小さい．
$q = 1C$なら，ΔWは電位差ΔVと置き換えられる．

$$\Delta V = -E \times \Delta x \tag{2.30}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = -E \tag{2.31}$$

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x}\,[V/m] \tag{2.32}$$

Δxが限りなく小さければ

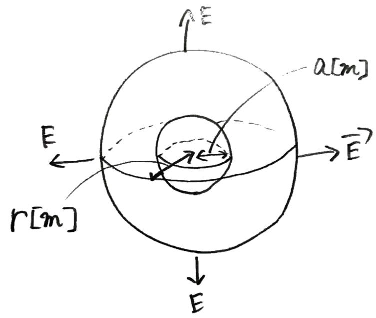
$$E = -\frac{dV}{dx}\,[V/m]\,[N/C] \tag{2.33}$$

すなわち，電界は電位の勾配にマイナスをつけたもの．
　→$[N/C] = [V/m]$

3　様々な帯電体による電界，電位（p.78）

3.1　一様に帯電した球（p.82）

3.1.1　電界



1.10.4と同様に，半径$a[m]$の球に$Q[C]$の電荷が一様に分布している球と同じ中心をもつ半径$r[m]$の球面上の電界の大きさをEとする．

・外部$(a < r)$

ガウスの法則より

$$\oint_{S_0} EdS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.1}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.2}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,[V/m] \tag{3.3}$$

・内部$(a < r)$

	体積	電荷
全体	$\frac{4}{3}\pi a^3$	Q
求めるところ	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$Q\frac{r^3}{a^3}$

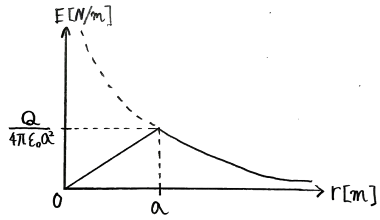
$$\because \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \cdot \frac{r^3}{a^3} \tag{3.4}$$

ガウスの法則より

$$\oint_{S_0} EdS = \frac{Q\frac{r^3}{a^3}}{\varepsilon_0} \tag{3.5}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^3} \tag{3.6}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r \tag{3.7}$$



3.1.2　電位

誘電体球の中心から$R[m]$離れた点の電位をV_Rとする.

・外部$(a < r)$

$$
\begin{aligned}
V_R &= -\int_{\infty}^{R} E dr && (3.8)\\
&= -\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr && (3.9)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R}\left(-r^2\right) dr && (3.10)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[r^{-1}\right]_{\infty}^{R} && (3.11)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - 0\right) && (3.12)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,[V] && (3.13)
\end{aligned}
$$

・内部$(a < r)$

$$
\begin{aligned}
V_R &= -\int_{\infty}^{R} E dr && (3.14)\\
&= -\left(\int_{\infty}^{a} E dr + \int_{a}^{R} E dr\right) && (3.15)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \times \int_{a}^{R} r dr && (3.16)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \times \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{a}^{R} dr && (3.17)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \times \frac{1}{2}\left(R^2 - a^2\right) && (3.18)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3} R^2 + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3} && (3.19)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3} R^2 + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3} && (3.20)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{R^2}{2a^2} + \frac{1}{2}\right) && (3.21)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{3}{2} - \frac{R^2}{2a^2}\right)[V] && (3.22)
\end{aligned}
$$

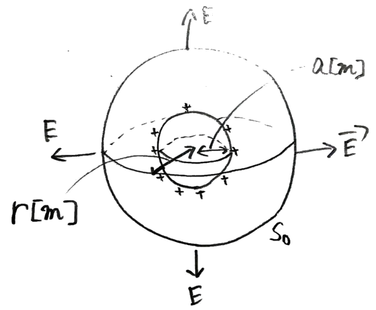
Rについて，

内部の電位は上に凸の放物線（$R = 0$の時に最大値をとる）

外部の電位は分数関数
したがって，グラフは

3.2　表面が一様に帯電した導体球（p.87）

3.2.1　電界



半径$a[m]$の導体球の表面上に$Q[C]$の電荷が一様に分布している球
導体球と同じ中心をもつ半径$r[m]$の球面上の電界の大きさをEとする．

・外部$(r > a)$
ガウスの法則より

$$\oint_{S_0} EdS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.23}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.24}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,[V/m] \tag{3.25}$$

・表面$(r = a)$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{Q}{4\pi a^2}}{\varepsilon_0} \tag{3.26}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,[V/m] \tag{3.27}$$

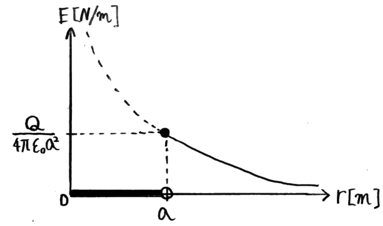
・内部$(0 \leqq r < a)$

$$\oint_{s_0} EdS = \frac{0}{\varepsilon_0} \tag{3.28}$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0 \tag{3.29}$$

$$\therefore E = 0\,[V/m] \tag{3.30}$$

外部と表面について，違う方法で求めたが，結果が同じになったので，同じ関数で表せるものとして扱う．
電界のグラフは，



3.2.2　電位

・表面，外部$(a \leqq r)$

$$V_R = -\int_{\infty}^{R} Edr \tag{3.31}$$
$$= -\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \tag{3.32}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} [V] \tag{3.33}$$

・内部$(0 \leqq r < a)$

$$V_R = -\int_{\infty}^{R} Edr \tag{3.34}$$
$$= -\left(\int_{\infty}^{a} Edr + \int_{a}^{R} Edr\right) \tag{3.35}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \int_{a}^{R} 0dr \tag{3.36}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} [V] \tag{3.37}$$

電位のグラフは，

Rが0から離れていく時，電位が大きくなることはない

このような問題を解くときのポイント
1.電荷の分布を決める
2.電界を内側から決める
3.電位は必ず無限遠点から決める

3.3　電気双極子（p.78）

3.3.1　電気双極子

電気双極子：大きさが等しく，符号が逆の極めて接近して存在するもの．

3.3.2　電気双極子により作られる電位

電位は各点電荷による電位の和をとれば良い

$+Q$，$-Q$の点電荷による電位V_pは

$$
\begin{aligned}
V_p &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\overline{AC}} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0\overline{BC}} && (3.38)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\overline{AC}} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\overline{BC}} && (3.39)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overline{BC} - \overline{AC}}{\overline{AC} \cdot \overline{BC}} && (3.40)\\
&\fallingdotseq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l \cdot \cos(\theta)}{r^2} && (3.41)\\
&= \frac{Ql\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,[V] && (3.42)
\end{aligned}
$$

3.3.3　双極子モーメント

ここで，$P = Ql[Cm]$と置くと，電気双極子により作られる電位は次のようになる．

$$V_p = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos(\theta)\,[V] \tag{3.43}$$

このPを双極子モーメントと呼ばれ，次のように定義される．大きさ：$P = Ql[Cm]$

向き：負から正の向き