線形代数 - ベクトル

○ 線形代数

代数的 → 数を並べて扱う

線形 → 直線，平面（まっすぐなもの）

○ ベクトル

→ 数を一列に並べたもの.

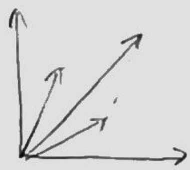
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

↑ 2次元　↑ 3次元

○ 演算規則

1. 和

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$



2. スカラ倍

→ スカラ = scale (スケールと同義)

向きを変えずに大きさだけ変える.

$$c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

線形代数 - 行列

- 行列
  → 数を縦、横に並べたもの。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{行}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \downarrow \text{列}$$

2×2行列　　2×4行列。

記法 - [A, B, …]

- m × 1 行列
  → m次元 列ベクトル
- 1 × n 行列
  → n次元行ベクトル

- 演算規則

1. 和

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}+y_{11} & \cdots & x_{1n}+y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1}+y_{m1} & \cdots & x_{mn}+y_{mn} \end{bmatrix}$$

2. スカラ倍

$$C\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx_{11} & \cdots & Cx_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cx_{m1} & \cdots & Cx_{mn} \end{bmatrix}$$

3. 積

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{l1} & \cdots & x_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{11}y_{11}+\cdots+x_{1m}y_{m1}) & \cdots & (x_{11}y_{1k}+\cdots+x_{1m}y_{mk}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{l1}y_{11}+\cdots+x_{lm}y_{m1}) & \cdots & (x_{l1}y_{1k}+\cdots+x_{lm}y_{mk}) \end{bmatrix}$$

$l \times m$ 行列　　$m \times k$ 行列

一致

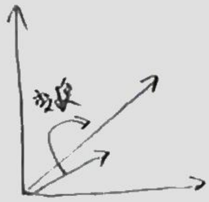
一般に $AB \neq BA$ （非可換性）

線形代数 - 線形変換

○線形変換

→ 行列はベクトルを他のベクトルに変換するもの。

$$\underbrace{\overset{A}{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}}}_{\text{変換}}\ \underbrace{\overset{x}{\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}}}_{\text{旧}} = \underbrace{\overset{x'}{\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}}}_{\text{新}}$$



一般に

$$x' = Ax$$

と表されるものを線形変換という。

○行列の演算性質

$$\text{和}\begin{cases}(A+B)+C = A+(B+C)\\ A+B = B+A\end{cases}$$

$$\text{スカラー倍}\begin{cases}k(A+B) = kA+kB\\ (k+l)A = kA+lA\\ (kl)A = k(lA)\end{cases}$$

$$\text{積}\begin{cases}(AB)C = A(BC)\\ A(B+C) = AB+AC\\ (A+B)C = AC+BC\end{cases}$$

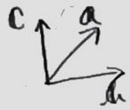
線形代数 - 線形独立,線形従属

2次元

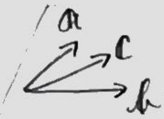
線形独立

線形従属

3次元



線形独立



線形従属

すべてのベクトルが
同一平面上にある

一般に

いずれも0でないベクトル $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ について

$$\underbrace{c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \cdots + c_n a_n}_{\text{線形結合}} = 0$$

が成り立つのが $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$ だけの場合、
$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ を線形独立という。それ以外は線形従属。

◦表現の一意性

あるベクトルが線形独立なベクトル $a_1, a_2, \cdots a_n$ の線形結合で表されるとき、その表し方は1通りである

$$b = \overbrace{3a_1 + 4a_2}^{\text{線形結合}}$$

あるベクトル $b = c_1 a_1 + c_2 a_2$

$\Downarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 4 \end{cases}$ 以外の係数は存在しない