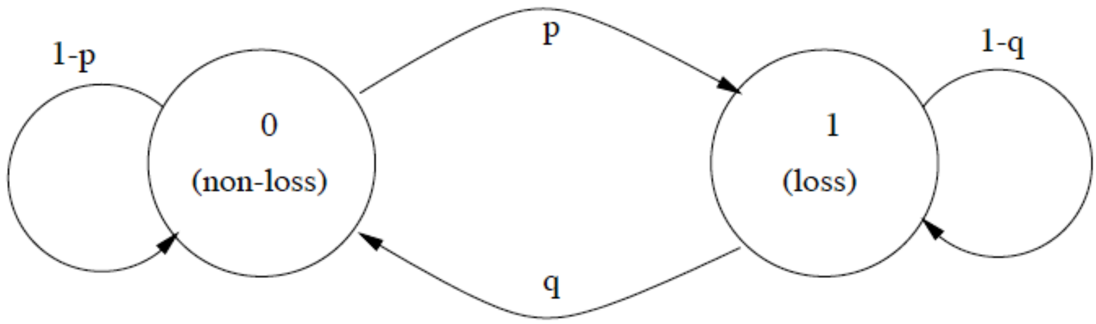
Burst丢包：Gillbert Model分析

作者：@sebliu

$Gillbert$ 模型介绍

$Gillbert$ 模型，也称 $2-stateMarkov$ 模型，是最简单的模拟burst丢包的模型。其结构如下图所示



其中，0状态(non-loss)也叫 $Good$ 状态，此状态下默认不丢包，1状态(loss)状态也叫 Bad 状态，此状态下默认必丢包，处于0状态时，有 p 的概率进入1状态，或者以 $1-p$ 的状态维持原状态，处于1状态时，有 q 的概率进入0状态，或者以 $1-q$ 的概率维持原状态。由于实际网络链路中的丢包一般为burst丢包，即如果上一时刻发生了丢包事件，则当前时刻更有可能发生丢包，如果Gillbert模型中满足 $1-q>p$，则说明上一时刻发生的丢包事件增加了当前的丢包率(丢包率由 p 增加至$1-q$)

基于以上分析，使用 $Gillbert$ 模型作为网络中的丢包模拟具有一定的合理性

在简单版的 $Gillbert$ 模型中($Good$状态必不丢包，Bad状态必丢包)，由 p,q 两个参数唯一确定。现在，假设网络中的丢包模型即为 简单版的 $Gillbert$ 模型。探讨如何通过检测的丢包事件来确定 参数 p,q。

计算 $Gillbert$ 模型参数

为了简单起见，这里采用"01"序列来表示包裹到达状态，1表示包裹丢失，0表示包裹正常接收。对于一段时间内形如：$seq=000111000\cdots$的包裹达到状态，并记$m_i(i=1,2,\cdots n-1)$ 表示连续出现 i 个 1 的次数，也即表示长度为i 的 $burst$ 丢包的次数($n-1$为最长连续丢包)。并记总包裹数为 $total\_packets$。

在该模型一共可能发生四种事件，分别对应 $Gillbert$ 模型中的四条转移边，记为 $E=\{event|event=1-p,p,1-q,q\}$，分别对应 seq 中的 $\overset{\curvearrowright}{00}$，$\overset{\curvearrowright}{01}$，$\overset{\curvearrowright}{11}$，$\overset{\curvearrowright}{10}$ 四种模式，因此要计算 $p.q$ ，只需要计算 $\overset{\curvearrowright}{01}$ 和 $\overset{\curvearrowright}{10}$ 出现的次数，于是有(#表示$\cdots$的数量)

$$p=\frac{\#\,of\,\overset{\curvearrowright}{01}}{\#\,of\,\overset{\curvearrowright}{01}+\#\,of\,\overset{\curvearrowright}{00}} \tag{1}$$

同理

$$q=\frac{\#\,of\,\overset{\curvearrowright}{10}}{\#\,of\,\overset{\curvearrowright}{10}+\#\,of\,\overset{\curvearrowright}{11}} \tag{2}$$

实际上不难发现 $\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{01} = \#\ of\ \overset{\curvearrowright}{10} \pm 1$ 或者 $\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{01} = \#\ of\ \overset{\curvearrowright}{10}$(取决于$\#\ of\ burst$ '0's和 $\#\ of\ burst$ '1's是否相等)，随着 seq 的长度增加，可以认为 $\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{01} \approx \#\ of\ \overset{\curvearrowright}{10}$。

而 $\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{01}$ 即为从状态0进入状态1的次数，即 $burst$ 发生的次数，因此有

$$\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{01} = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \tag{3}$$

而 $\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{10} + \#\ of\ \overset{\curvearrowright}{11}$ 为丢失的包裹数，同理$\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{01} + \#\ of\ \overset{\curvearrowright}{00}$ 为正常接收的包裹数，于是可以计算出丢失包裹数为

$$\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{10} + \#\ of\ \overset{\curvearrowright}{11} = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot m_i \tag{4}$$

正常接收包裹数为

$$\#\ of\ \overset{\curvearrowright}{01} + \#\ of\ \overset{\curvearrowright}{00} = total\_packets - \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot m_i \tag{5}$$

当seq长度足够大时，结合式(1)(2)(3)(4)(5)可以得出

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}{total\_packets - \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot m_i} \tag{6}$$

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}{\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot m_i} \tag{7}$$

进一步，综合丢包率可以通过 p, q 来表达

$$\begin{aligned} loss\_rate &= \frac{lossed\_packets}{total\_packets} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot m_i}{total\_packets} \\ &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}{total\_packets - \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot m_i}}{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}{total\_packets - \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot m_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}{\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot m_i}} \\ &= \frac{p}{p+q} \end{aligned} \tag{8}$$

最后，计算 $burst$ 连续丢包长度的期望值，易知产生一个长度为 k 的连续 1 的概率为 $Pr(len = k) = q \cdot (1-q)^{k-1}$，为几何分布，于是有

$$\begin{aligned} \lim_{n->+\infty} E(len) &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot q \cdot (1-q)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot q \cdot (1-q)^{k-1} \end{aligned} \tag{9}$$

记式(9)为$f(1-q) = \frac{\lim_{n->+\infty} E(len)}{q}$，于是有

$$
\begin{aligned}
f(1-q) &= \frac{d[\int_0^{1-q} f(1-q)d(1-q)]}{d(1-q)} \\
&= \frac{d}{d(1-q)}(\sum_{k=1}^{+\infty}(1-q)^k) \\
&= \frac{d}{d(1-q)}(\frac{1}{1-(1-q)}) \\
&= \frac{d\frac{1}{q}}{d(1-q)} \\
&= \frac{1}{q^2}
\end{aligned} \tag{10}
$$

因此最终 $burst$ 丢包期望长度为

$$
\lim_{n->+\infty} E(len) = f(1-q) \cdot q = \frac{1}{q} \tag{11}
$$

参考文献

Toral H, Torres D, Estrada L. Simulation and modeling of packet loss on VoIP traffic: a power-law model[J]. WSEAS Transactions on Communications, 2009, 8(10): 1053-1063.

Jiang W, Schulzrinne H. Modeling of Packet Loss and Delay and their E# ect on Real-Time Multimedia Service Quality[C]//In Proceedings of NOSSDAV'2000. 2000.