



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

**MODELOS DE REGRESIÓN LOG-LOG COMO
ESTRATEGIA DE PRECIOS PARA LA EMPRESA
DIT SPA**

SANTIAGO URQUIZO ROMO

Proyecto de investigación presentado como parte de los requisitos para optar al
grado de Magíster en Estadística

Profesora guía:

MARÍA CONSTANZA PRADO

Santiago de Chile, diciembre 2022

© MMXXII, SANTIAGO EMANUEL URQUIZO ROMO

ÍNDICE GENERAL

1	Introducción	1
1.1	Problemática	1
1.2	Antecedentes	2
1.3	Objetivos de la investigación	4
1.3.1	Objetivo general	4
1.3.2	Objetivos específicos	4
2	Metodología	5
2.1	Marco teórico	5
2.1.1	Precio	5
2.1.2	Demanda	5
2.1.3	Elasticidad	6
2.1.4	Elasticidad precio de la demanda	6
2.1.5	Modelo de regresión	7
2.1.6	Regresiones Log-Log	8
2.1.7	Métodos de validación	9
2.2	Descripción de la base de datos	11
3	Aplicación	12
3.1	Análisis exploratorio	12
3.2	Ajuste y validación de los modelos	15
4	Resultados	19
4.1	Interpretación de los modelos	19
5	Conclusiones	20
5.1	Estrategias de precios	20
5.2	Discusión y recomendaciones	20
6	Referencias	21
6.1	Bibliografía	21

Resumen

Fijar precios es una de las tareas más importantes y complejas que enfrentan las empresas a nivel mundial. El presente proyecto analiza el caso de Dit Spa, un centro de manufactura dental ubicado en Chile que busca mejorar de forma analítica su metodología actual de fijación de precios.

En la primera parte se establece el marco teórico a utilizar, se definen conceptos claves como precio, elasticidad, demanda y toda la metodología estadística a utilizar. El estudio plantea modelar la elasticidad precio de la demanda mediante modelos de regresión Log-Log como mecanismo para definir una estrategia de precios.

En el siguiente capítulo se realiza un análisis exploratorio de las ventas de los últimos veinte meses de la empresa, se comprueba el cumplimiento de supuesto y se obtienen dos modelos de regresión para la demanda de estructuras dentales producidas en metal y zirconio.

Finalmente se concluye que la demanda de los productos fabricados por la empresa Dit Spa son principalmente inelásticas, responden muy levemente a la variación del precio y están muy interrelacionadas con los distintos tipos de materiales de fabricación, se sugiere no disminuir los precios de manera aislada y considerar factores externos a la empresa.

Palabras claves

Precio, Elasticidad, Regresión Log-Log.

1 Introducción

1.1 Problemática

Las empresas independientemente de su tamaño, antigüedad o actividad económica enfrentan el desafío de fijar el mejor precio posible para sus productos y servicios. Existe una amplia variedad de metodologías y factores que intervienen a la hora de definir un precio, es por eso que encontrar y aplicar la estrategia de fijación de precios correcta figura entre las decisiones más complejas y fundamentales para el éxito de un negocio (Ferrell & Hartine, 2012).

Los enfoques para abordar dicha problemática dependen completamente de los objetivos de la empresa y su situación actual. Esto implica que la metodología de fijación de precios cambia a través del tiempo a medida que la empresa madura y el mercado se transforma. Es importante recalcar que la forma de fijar un precio evoluciona y no siempre la técnica o modelo que actualmente utiliza la empresa garantizará los mejores resultados a futuro.

Según (Vohra & Krishnamurthi, 2012) la fijación de precios o “pricing” en inglés maneja tres de los elementos más importantes para el éxito de un negocio: los ingresos y beneficios, el comportamiento del consumidor y la imagen de la marca. De igual manera el precio se ve influenciado por diferentes actores como son los competidores, los clientes y el mercado, quienes según su ubicación geográfica e industria en la que se encuentra poseen diferentes comportamientos.

En el presente proyecto se analizará el caso de Dit Spa, empresa especializada en la manufactura dental digital y localizada en la ciudad de Santiago de Chile. Dicha compañía en sus últimos años ha aplicado diferentes metodologías y estrategias para fijar los precios a sus productos y servicios, pero últimamente, debido a los constantes cambios en los actores y elementos mencionados anteriormente, se encuentra en la necesidad de mejorar la forma de precisar sus precios para aumentar la rentabilidad y asegurar así su continuidad.

Es de interés plantear una alternativa metodológica para analizar precios y definir estrategias que mejor se adapte a la realidad de la empresa abordando la problemática desde un enfoque más estadístico, complementando así los estudios económicos y de mercado que ha realizado la empresa en el pasado.

En la primera parte de este documento se definen los conceptos y generalidades claves detrás la fijación de precios. Luego se presentará la metodología estadística a utilizar para el caso, los supuestos de evaluación y la forma en que será aplicada en el estudio.

En la segunda parte, se realizará la preparación y análisis preliminares de la base de datos proporcionada por la empresa. Luego en base a la información encontrado se construirá el modelo estadístico y se revisarán todos los supuestos para validar la metodología escogida.

En el apartado final se discutirá el impacto de la metodología escogida para la fijación de precios, se interpretará los resultados obtenidos y finalmente se planteará las estrategias y lineamientos a seguir.

1.2 Antecedentes

Dit Spa o Ditchile es un centro de manufactura dental digital y de comercio electrónico de aditamentos, materiales, software y equipos especializados para laboratorios, universidades y clínicas dentales de Chile y Latinoamérica. Tiene una trayectoria de más de diez años en el sector y es líder en el mercado de soluciones de rehabilitación y prótesis dentales.

Su cartera de productos se agrupa en seis grandes categorías:

1. Centro de manufactura de estructuras dentales: es la principal y más grande área de negocio de la empresa por volumen de facturación, esta se subdivide a su vez por material de fabricación y tipo de rehabilitación. Los productos de esta categoría son únicos para cada paciente y dependen de un archivo digital 3D para su fabricación.
2. Consumibles: abarca todos los materiales en bruto como discos, bloques o repuestos que requieren los laboratorios para manufacturar por sí mismos las estructuras dentales.
3. Componentes dentales: fabricación y venta de aditamentos genéricos elaborados de titanio o polímeros destinados para rehabilitaciones dentales. Estos productos son estándares y pueden fabricarse en lotes.
4. Software: reventa de licencias anuales o permanentes de software especializado para el desarrollo de aplicaciones dentales, estos sistemas son indispensable para el diseño 3D de la pieza dental que luego se manufacturará.
5. Hardware: importación y venta de máquinas como fresadoras, escáneres e impresoras 3D de origen europeo o americano. Los productos de esta categoría tienen un valor mucho más alto que el resto de las categorías y requieren un proceso de negociación con el cliente.
6. Servicios: capacitaciones, mantenimiento de equipos, soporte técnico, despachos y demás servicios complementarios al negocio.

En la siguiente tabla se indica la cantidad de productos o ítems que se venden en cada una de las categorías que posee la empresa, el peso que representa en el volumen total de ventas y un análisis descriptivo de sus precios:

Tabla 1. Análisis descriptivo de los precios de la cartera de productos de Dit Spa

CATEGORÍA DEL PRODUCTO	CANTIDAD DE ÍTEMS	FACTURACIÓN ANUAL (%)	UNIDADES VENDIDAS	PRINCIPALES ESTADÍSTICA DE LOS PRECIOS	
Centro de Manufactura	115	60,08%	26.460	Mínimo	\$ 2.100
				Media	\$ 20.380
				Mediana	\$ 16.900
				Máximo	\$ 584.000
				Desviación estándar	\$ 26.810
Consumibles	16	1,76%	98	Mínimo	\$ 50.000
				Media	\$ 117.190
				Mediana	\$ 67.990
				Máximo	\$ 323.500
				Desviación estándar	\$ 91.960
Componentes Dentales	48	8,32%	5.186	Mínimo	\$ 5.000
				Media	\$ 17.480
				Mediana	\$ 13.900
				Máximo	\$ 43.800
				Desviación estándar	\$ 11.450
Hardware	3	20,34%	16	Mínimo	\$ 4.000.000
				Media	\$ 9.346.200
				Mediana	\$ 4.990.000
				Máximo	\$ 23.800.000
				Desviación estándar	\$ 8.464.330
Software	10	6,27%	105	Mínimo	\$ 184.000
				Media	\$ 441.700
				Mediana	\$ 229.400
				Máximo	\$ 7.900.000
				Desviación estándar	\$ 921.890
Servicios	23	3,23%	5.026	Mínimo	\$ 2.000
				Media	\$ 5.100
				Mediana	\$ 2.900
				Máximo	\$ 297.600
				Desviación estándar	\$ 12.370
TOTAL	215	100,00%	36.891		

Nota: Periodo de análisis comprendido entre enero del 2021 a agosto 2022 (20 meses)

La estrategia de precios actual es muy variada y depende de la categoría en la que cada producto se encuentra. A la fecha en que se realiza el presente trabajo los métodos de fijación de precios más usados en la empresa se basan en dos aspectos fundamentales: el análisis de los costos y la competencia.

El primer método de fijación de precios que usa la empresa depende enteramente de aspectos internos. Se toma elementos como las materias primas y los sueldos que impactan en el coste del producto y a partir de ello se considera el margen de contribución. Los productos del centro de manufactura y componentes dentales usan esta metodología.

El segundo método que utiliza Dit Spa para fijar sus precios implica un seguimiento exhaustivo y en tiempo real de la competencia. Este método consiste en conocer el precio y la calidad que los competidores han dado a un producto o servicio similar a fin de establecer los propios. Los productos de las categorías de consumibles, equipos y software utilizan esta metodología.

La empresa actualmente maneja dos canales para realizar sus ventas, la primera es a través de su plataforma de comercio electrónico llamada ditdental.com, la segunda forma implica el esfuerzo del equipo comercial, la cual se enfoca principalmente en los productos de mayor valor y ventas en volumen.

Sobre el mercado cabe destacar que funciona como un oligopolio ya que existe un pequeño número de grandes competidores y las barreras de entrada son altas debido al costo y “know-how” que se necesita para manejar adecuadamente todos los equipos y sistemas requeridos para fabricar una estructura dental.

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

El objetivo general del presente proyecto es mejorar de forma analítica la metodología actual de fijación de precios que utiliza la empresa Dit Spa, abordando la problemática desde un enfoque estadístico a fin de maximizar las ventas y en consecuencia su rentabilidad.

1.3.2 Objetivos específicos

- Establecer un marco teórico sobre los conceptos más importantes relacionados a análisis de precios.
- Identificar los principales factores que influyen en el precio de las principales áreas de negocio de la empresa Dit Spa.
- Ajustar un modelo que considere la demanda en función al precio y validar que se cumplan los supuestos estadísticos pertinentes.
- Definir estrategias para los precios de los productos de la empresa en base a los resultados obtenidos.
- Determinar la factibilidad de uso de la metodología en la empresa Dit Spa.

2 Metodología

2.1 Marco teórico

Antes de ahondar en técnicas y modelos estadísticos para fijar un adecuado precio es importante tener claro ciertos conceptos que permitirán en capítulos siguientes entender la metodología utilizada y alcanzar los objetivos planteados.

2.1.1 Precio

Según (Cabrejos, 1980) el precio es el valor monetario, que para el individuo que realiza la compra, representa los ingresos que debe destinar para obtener beneficios derivados de la adquisición del bien o servicio que necesita.

En cambio, para la persona que realiza la venta, el precio representa el valor monetario por el cual está dispuesto a participar en el proceso de intercambio del bien o servicio interesado por el primer individuo.

El precio no solo es de vital importancia en las operaciones de intercambio, también es un elemento fundamental para garantizar las utilidades de una empresa, cubrir los costos de producción, absorber los gastos administrativos y de ventas, y sobre todo contribuir a la sostenibilidad del negocio. De aquí su importancia a la hora de fijar adecuadamente el precio.

2.1.2 Demanda

La demanda determina cuántas unidades de un bien o servicio consumirá el mercado para cada nivel de precio. La demanda no está determinada por la cantidad que se produce, si no por la cantidad que se desea y puede consumir del bien. Es el precio de este bien el principal factor que produce cambios en la cantidad demandada.

La demanda también puede ser influida por el nivel de ingresos del comprador, sus gustos o preferencias, precios de bienes y servicios relacionados, expectativas de los consumidores y la cantidad de consumidores potenciales.

Según la ley de la demanda, la cual establece que hay una relación negativa e inversa entre el precio del bien y la cantidad demandada del mismo, a medida que el precio aumenta la cantidad demandada del bien se reduce y cuando el precio disminuye, la cantidad demandada aumenta (Guillén, 2011).

2.1.3 Elasticidad

Las elasticidades son una manera de profundizar las relaciones entre variables. En economía la elasticidad es una medida que indica la proporción en que varía una variable cuando cambia otra en una determinada proporción (Guillén, 2011). Es decir, la elasticidad muestra la relación y los efectos que la variación de una produce en la otra.

2.1.4 Elasticidad precio de la demanda

La elasticidad precio de la demanda probablemente es el concepto más importante para tratar en el presente proyecto. Éste no solo ofrece un camino para resumir cómo responden los clientes ante la variación de los precios de una amplia variedad de productos o servicios, sino que también es un concepto clave de la teoría de cómo reaccionan las empresas ante la curva de demanda que afronta (Nicholson, 2008).

La elasticidad precio de la demanda mide la relación entre el cambio en la cantidad demandada y el cambio en el precio de un producto. El cálculo de este término ayuda a determinar hasta donde estaría dispuesto el consumidor a pagar por un bien después de un alza de precios o en cuanto se incrementaría la demanda después de una baja de precios. (Guerrero & Hernández, 2012).

Para propósitos prácticos la elasticidad precio de la demanda se interpreta como el porcentaje de caída de la demanda por cada aumento del uno por ciento en el precio. Su fórmula puntual es la siguiente:

$$\varepsilon_d = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}}{\frac{P_2 - P_1}{P_1}} = \frac{(\Delta Q)P_1}{(\Delta P)Q_1}. \quad (1)$$

Donde:

- ε_d : Elasticidad precio de la demanda
- P_1 : Precio inicial (de referencia)
- P_2 : Precio final
- Q_1 : Demanda inicial (de referencia)
- Q_2 : Demanda obtenida después del cambio de precio

El cálculo del coeficiente de elasticidad puntual da como resultado valores negativos por la relación inversa que tienen la demanda y el precio, para efectos de análisis se suele emplear el valor absoluto.

La elasticidad se dice elástica, inelástica o de elasticidad unitaria, en un punto P_1 , si en ese punto el valor absoluto de la elasticidad es mayor, menor o igual a uno respectivamente.

En la siguiente tabla se muestra el efecto que tiene el aumento o la disminución del precio en la cantidad demanda de un bien a diferentes valores de elasticidad:

Tabla 2. Impacto de la elasticidad en el valor económico de las transacciones

Valor absoluto del coeficiente de elasticidad	La demanda es:	Descripción	Impacto en los ingresos ($P \times Q$)	
			Aumento de precios	Disminución de precios
$\epsilon_d > 1$	Elástica o relativamente elástica	La cantidad demandada cambia en un porcentaje mayor con la variación del precio	Los ingresos totales decrecen	Los ingresos totales incrementan
$\epsilon_d = 1$	Nula o elasticidad unitaria	La cantidad demandada cambia en el mismo porcentaje que el precio	Los ingresos totales permanecen sin cambios	Los ingresos totales permanecen sin cambios
$\epsilon_d < 1$	Inelástica o relativamente inelástica	La cantidad demandada responde muy levemente a la variación del precio	Los ingresos totales incrementan	Los ingresos totales decrecen

Es importante tener en cuenta que la elasticidad de la demanda de un producto puede ser muy diferente de la elasticidad de la demanda de la versión de ese mismo producto vendido por un vendedor en particular. Debido a que la presencia de sustitutos y complementos afectará la demanda de un producto.

2.1.5 Modelo de regresión

Un modelo de regresión es una manera formal de expresar una dispersión de puntos mediante una función o relación estadística entre la variable respuesta Y con la variable de predicción X de forma sistemática. (Kutner, 2005)

Los modelos de regresión lineal usualmente son utilizados para representar la elasticidad, una manera natural de relacionar la demanda esperada y el precio. Este enfoque impone al menos dos requisitos. Primero, creer que la relación entre la demanda esperada y el precio sea lineal. La segunda es tener varios datos en forma de pares entre la demanda y el precio.

La relación lineal que se espera en la primera condición no siempre es posible cumplir debido al comportamiento natural de las variables asociadas. La segunda condición por el contrario se cumple con facilidad ya que es posible disponer mediante el histórico de ventas los precios de cada semana y su demanda asociada.

2.1.6 Regresiones Log-Log

Cuando una regresión lineal es inapropiada, es usual considerar una regresión log-log donde tanto la variable dependiente como la independiente están en forma de logaritmo natural. (Gelman, Hill, & Aki, 2020)

El coeficiente de la pendiente de estos modelos puede ser interpretado como el impacto porcentual en Y que surge de un cambio porcentual en X . Para un adecuado análisis se debe ajustar por cada producto o grupo de productos relacionados un modelo diferente de elasticidad.

Los modelos log-log se representan de la forma:

$$\ln(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 \times \ln(X_i) + u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Donde:

- $\ln(Y_i)$: logaritmo natural de la demanda del producto i .
- β_0 : Intercepto o también llamado termino constante.
- β_1 : parámetro que representa la elasticidad.
- $\ln(X_i)$: logaritmo natural del precio del producto i .
- u_i : denota el error o termino de perturbación.

En un modelo log-log, un 1% de cambio en X (*precio*) es asociada con un estimado β_1 % de cambio en la variable Y (*demanda*).

El modelo de regresión del logaritmo de la demanda contra el logaritmo del precio da lugar a la siguiente curva de la demanda que suele usarse en la práctica:

$$D_i(p) = a_i p_i^{-b_i} \prod_{j \neq i} p_j^{b_{ij}}, \quad \text{donde } b_i > 1. \quad (3)$$

Donde:

- $D_i(p)$: es la demanda del producto i , dada la matriz de precios $p = (p_1, \dots, p_n)$.
- p_i : es precio unitario del producto i .
- b_i : el coeficiente describe como la demanda varía con el cambio de precio.
- b_{ij} : describe como la demanda i varía con un cambio en el precio j .

La distribución de probabilidad correspondiente a una regresión log-log es exponencial, $\ln D = a - b \ln p$, donde b es la elasticidad.

2.1.7 Métodos de validación

Algunos estadísticos para evaluar la calidad de un modelo son los siguientes:

R^2 ajustado: representa el porcentaje de variación de la respuesta que es explicada por la regresión (Wiley, 2005). Se define el estadístico como:

$$R_{adj}^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p} \right) (1 - R^2) \quad (4)$$

Donde p es número de coeficientes del modelo, n el número de observaciones y R^2 es la división entre la suma de cuadrados de la regresión y la suma de cuadrados totales. El coeficiente R^2 ajustado penaliza el número de coeficientes utilizados, en principio, se busca valores altos cercanos a 1.

Criterio de Valores de Akaike o AIC: es un estimador de error de predicción y de calidad relativa del modelo (Burnham & Anderson, 2002). El criterio se define como:

$$AIC = -2 \log L(\hat{\theta}, x) + 2k \quad (5)$$

Donde:

- $\hat{\theta}$: corresponde al estimador de máxima verosimilitud de θ .
- k : al número de parámetros del modelo.

Valores pequeños de este estadístico representan modelos con alta verosimilitud y pocos parámetros y, por tanto, son deseables.

Un modelo también debe cumplir con los supuestos de Gauss-Markov. Este teorema establece que un modelo lineal general debe cumplir con un conjunto de condiciones para garantizar un buen ajuste, minimizar la varianza y obtener estimadores lineales óptimos e insesgados que permitan realizar buenas predicciones (Carmona, 2003).

Las condiciones que establece Gauss-Markov son las siguientes:

- 1) Linealidad en los parámetros: Este supuesto implica que un cambio unitario en la variable X tiene el mismo efecto sobre la variable Y con independencia del valor inicial de X. Los parámetros del modelo de regresión deben ser de naturaleza numérica y lineal.

- 2) Aleatoriedad: los datos de la muestra deben ser recopilados de la población a través de un mecanismo aleatorio y probabilístico. Si la muestra es aleatoria no existirá autocorrelación y las observaciones serán independientes entre sí.
- 3) El número de observaciones debe ser mayor que el número de predictores o variables para prevenir que una variable resulte más influyente de lo que en la realidad es.
- 4) Normalidad: los residuos deben estar normalmente distribuidos siguiendo una distribución de campana de Gauss. La normalidad se puede comprobar mediante pruebas de hipótesis como la de Shapiro-Wilk o de forma gráfica mediante un diagrama de Q-Q que compara los cuantiles de los datos con los cuantiles teóricos de la distribución normal estándar.
- 5) No Colinealidad: significa que no debería existir una relación lineal perfecta entre los predictores o las variables explicativas de los regresores. Se suele utilizar el factor de inflación de varianza como métrica para evaluar dicho supuesto.
- 6) Media nula y Exogeneidad: implica que el valor medio del error condicionado a las explicativas debe ser igual al valor esperado no condicionado y este deber ser igual a cero $E(\epsilon_i) = 0$. Esto significa que los regresores no pueden correlacionarse con el término de error.
- 7) Homocedasticidad: se busca que la varianza alrededor de la línea de regresión sea la misma para todos los valores de la variable predictora independientemente de los valores de nuestros regresores. Si la varianza de los errores crece con cada observación se presenta una situación anómala llamada heterocedasticidad.
- 8) Otra situación que se pretende prevenir es la presencia de puntos influyentes y atípicos. Estos puntos corresponden a observaciones en que el predictor está muy alejado de los valores de los predictores del grueso de las observaciones. Un punto influyente se puede descubrir calculando la distancia de Cook o midiendo la influencia de cada observación sobre sus valores ajustados.

2.2 Descripción de la base de datos

La base de datos utilizada en el presente proyecto fue obtenida del sistema contable de Dit Spa, la cual fue exportado en un archivo CSV (valores separados por comas) para su revisión preliminar y limpieza. La base de datos cuenta con 16.531 registro de ventas realizadas entre enero del 2021 y agosto del 2022.

Los datos fueron tratados a fin de dar la estructura necesaria para el análisis y modelamiento. Primero se eliminó el nombre del cliente por temas de confidencialidad y se retiraron las variables irrelevantes para el estudio como el número de identificación de la factura, tipo de documento y fecha de vencimiento.

Los productos de las categorías de consumibles, software y hardware fueron excluidos de la base de datos ya que se encontraron productos discontinuados, productos con precios estáticos en el tiempo debido a contratos y productos con ventas únicas que impiden realizar un análisis adecuado.

Luego de la limpieza preliminar se agruparon los productos por material y área de negocio, se revisó que no existan valores atípicos usando como parámetros los cuantiles ± 1.5 veces el rango intercuartil (Rincón, 2019) y se calculó la demanda mensual en unidades junto al precio promedio de cada uno de los grupos.

En la siguiente tabla se presenta la estructura final de la base de datos a utilizar para el modelamiento y las variables a considerar:

Tabla 3. Descripción de variables de la base de datos a utilizar

Variable	Tipo	Descripción
FECHA	Fecha	Tiempo i en meses
PS	Numérico	Precio promedio del servicio de envío o despacho en el mes i
PP	Numérico	Precio promedio de los productos de la categoría estructuras provisorias en el mes i
PC	Numérico	Precio promedio de los productos de la categoría componentes dentales en el mes i
DM	Numérico	Demanda o unidades vendidas de la categoría estructuras de metal en el mes i
PM	Numérico	Precio promedio de los productos de la categoría estructuras de metal en el mes i
DZ	Numérico	Demanda o unidades vendidas de la categoría estructuras de zirconio en el mes i
PZ	Numérico	Precio promedio de los productos de la categoría estructuras de zirconio en el mes i
TEMP	Booleano	Indicador de mes con ventas bajas por periodo de vacaciones en el rubro

Las variables de interés a modelar serán la demanda de estructuras de metal y de zirconio. El resto de las categorías como servicios, provisorios y componentes son productos complementarios y dependen de las dos primeras categorías, por lo que serán de utilidad para ayudar a explicar las ventas de estas dos importantes áreas del negocio.

3 Aplicación

3.1 Análisis exploratorio

En este apartado se presenta un análisis descriptivo de los datos previamente transformados de la empresa Dit Spa con el fin de obtener una mejor comprensión del conjunto de datos y averiguar la relación que existe entre las variables.

La base de datos final tiene una dimensión de veinte observaciones por cada una de las nueve variables construidas. El estudio se centrará en determinar la demanda de las dos áreas de negocio más importantes para la empresa (estructuras de metal y zirconio) y su relación con el resto de las variables que son complementarias o adicionales a la demanda de dichas áreas.

La primera variable de interés a modelar es la demanda de estructuras dentales fabricadas en zirconio cuya relación con su precio promedio mensual se muestra en la siguiente figura:

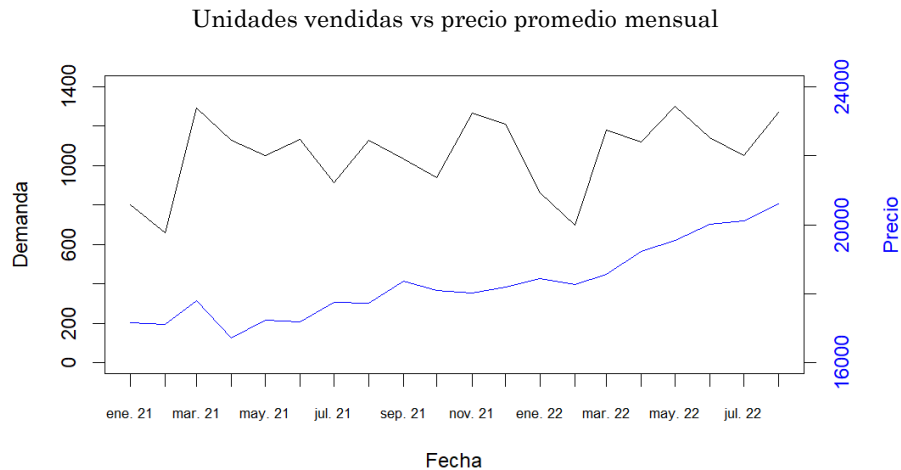


Figura 1. Relación entre la demanda y el precio promedio mensual en las estructuras de zirconio

En la figura 1 se observa que la demanda mensual de estructuras de zirconio es estable en el tiempo, pero se evidencia una estacionalidad provocada por el periodo de vacaciones de verano en los meses de febrero que disminuye considerablemente la demanda. Dicho fenómeno se encuentra representado en la variable TEMP.

En cuanto al precio promedio mensual, se observa una tendencia al alza que no parece afectar a la demanda y podría ser un indicador que la venta de este tipo de productos es susceptible a otros factores más allá de su precio.

La segunda variable de interés es la demanda de estructuras dentales de metal. En la siguiente figura se muestra su relación con su precio promedio mensual:

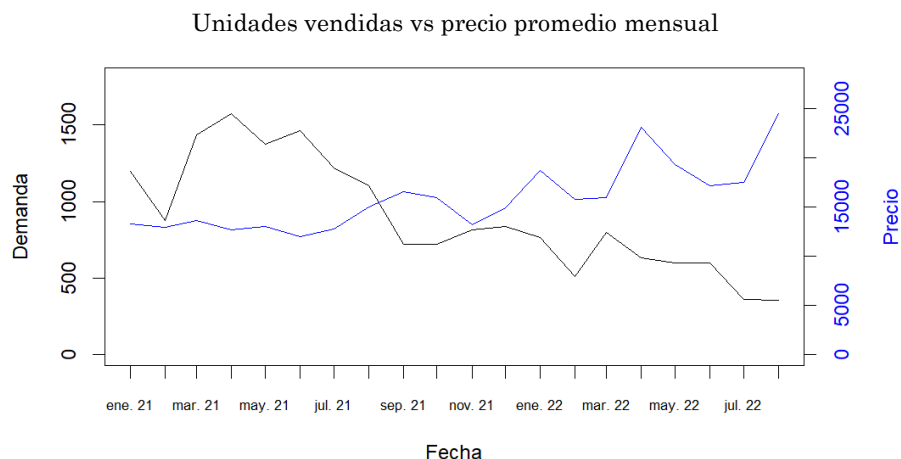


Figura 2. Relación entre la demanda y el precio promedio mensual en las estructuras de metal

En la figura 2 notamos que la demanda de estructuras de metal esta a la baja desde el segundo trimestre del 2021 mientras que los precios han ido en aumento. Esta variación ocilante que se observa en el precio promedio mensual se debe a que los precios de los productos dentro de esta área de negocio son muy diferentes entre ellos y hay una disminución considerable de casos de estructuras unitarias que tienen un precio menor frente a los casos de estructuras complejas que tienen un precio mucho mayor. En esta categoria de productos tambien se observa una estacionalidad en los meses de febrero por el periodo de vacaciones.

Sobre el precio promedio mensual de las demas variables tenemos el siguiente comportamiento en el tiempo:

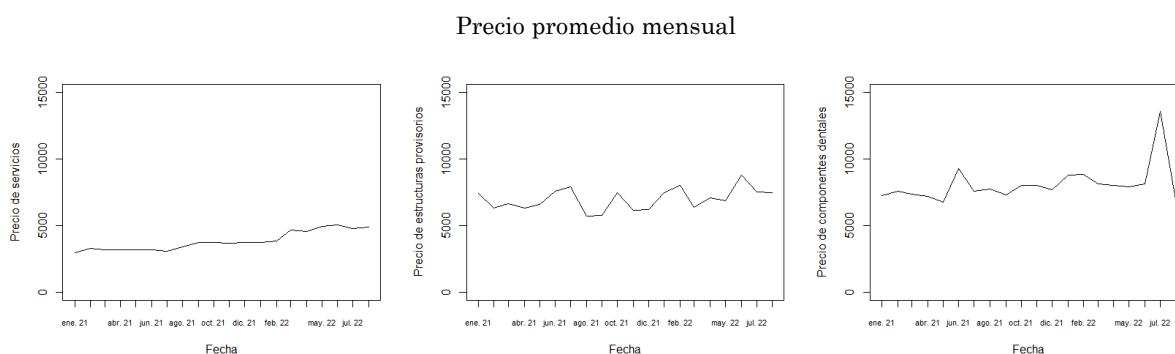


Figura 3. Panel izquierdo: evolución de precios de la categoría servicios. Panel central: evolución de precios de la categoría de estructura provisorias. Panel derecho: evolución de precios de la categoría de componentes dentales

Al igual que el resto de las variables, los precios promedio de los productos de la categoría servicios, estructuras provisionarias y componentes dentales han aumentado con el paso del tiempo. Este fenómeno se puede explicar por la inflación y al aumento del costo de la materia prima que sufre el sector.

Cabe notar que hay una observación atípica en la variable de precios de los componentes dentales. En julio del 2022 se observa un aumento drástico en el precio el cual, investigando en la base de datos original, se encontró que corresponde a una venta excepcional de 200 unidades de un producto con el precio más alto de esta categoría. Dicha observación al ser única será retirada con la finalidad de no afectar en el proceso de modelamiento posterior.

Otro aspecto por considerar es la relación que existe entre todas las variables, para ello se calculó la Correlación de Pearson representa en la siguiente figura:

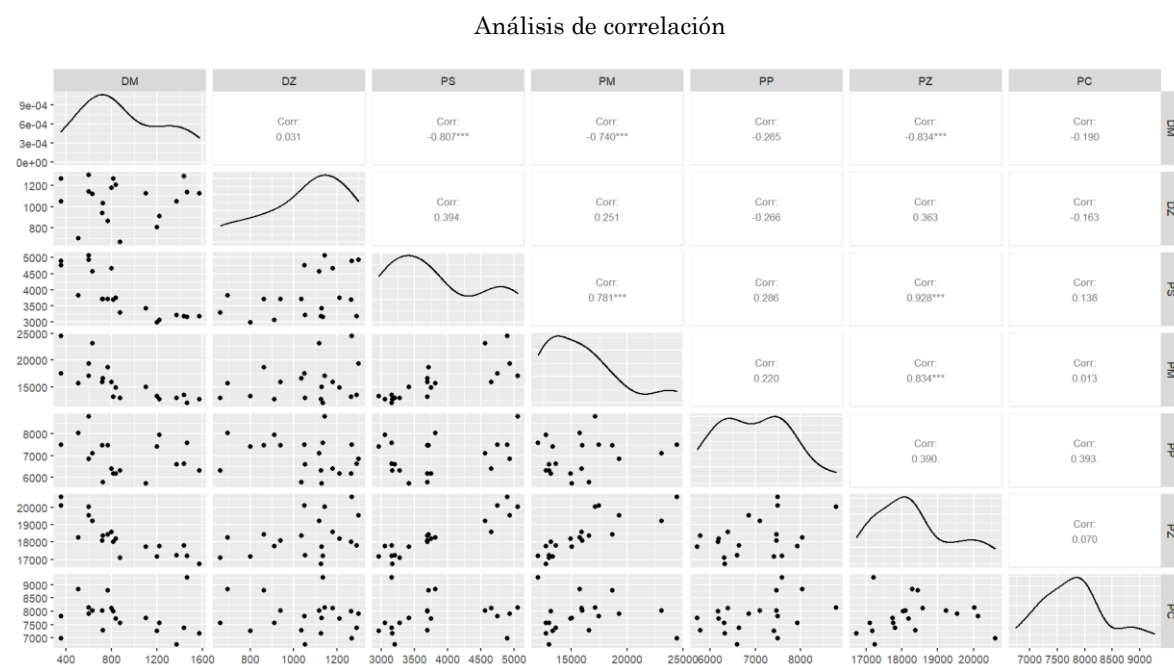


Figura 4. Paneles superiores: correlación entre variables. Paneles inferiores: diagramas de dispersión.
Diagonal: gráficos de densidad

Se puede observar que la demanda de las estructuras de metal está altamente correlacionada con el precio de los servicios y el precio de las estructuras zirconio, mientras que la demanda de estructuras de zirconio tiene una baja correlación con las otras variables del estudio. Sobre los precios de las estructuras cabe destacar la relación fuerte que existe entre el precio de los servicios, metales y el zirconio. El precio de los componentes dentales y productos provisionarios parecen no estar relacionado a la demanda ni el precio de las estructuras de interés. Finalmente se ve que no existe una relación lineal en las variables y requerirán una transformación para asegurar un buen ajuste en el modelo.

3.2 Ajuste y validación de los modelos

Considerando todas las posibles variables explicativas descritas en el apartado anterior, ahora se busca el mejor modelo posible con ellas. Se explorará la combinación de variables que permita el mejor ajuste en los datos y que a la vez permita un equilibrio entre bondad de ajuste y sencillez.

Para este trabajo se realizó la selección de modelos mediante el método stepwise que consisten en iniciar con un modelo sin variables y añadir una a una aquella variable que proporciona el mejor ajuste en cada paso, luego todos los predictores introducidos en el modelo se reevalúan a través de pruebas de Fisher parciales para verificar su validez. (Araneda, 2021).

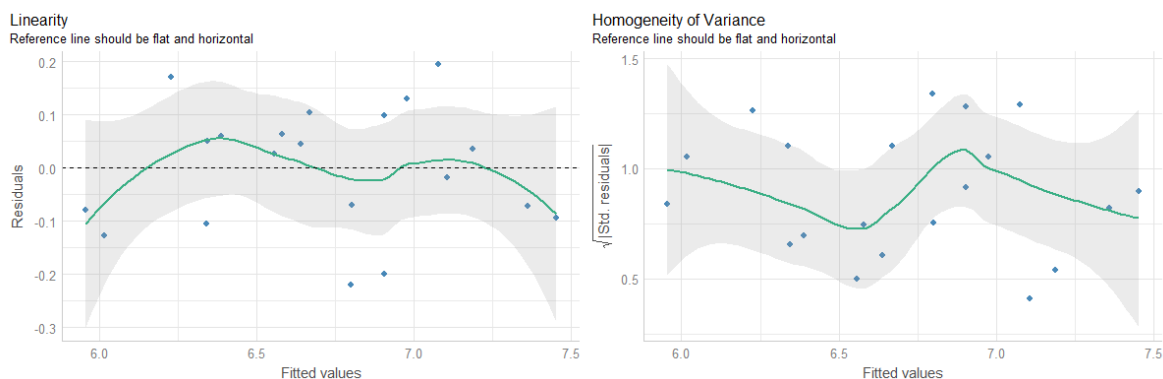
Antes de realizar el modelamiento se realizó una transformación logarítmica a las variables con la finalidad de ajustar un modelo de regresión log-log y obtener directamente la elasticidad a partir de los coeficientes estimados.

El modelo para la demanda de estructuras de metal que se obtuvo luego de tres interacciones con la metodología seleccionada se ajustó finalmente con cuatro coeficientes que resultaron significativos. En la siguiente tabla se muestra los resultados obtenidos:

Tabla 4. Resumen estadístico del modelo ajustado para la demanda de estructuras de metal

Variable	Estimador	Error estándar	Estadístico t	P-Valor
Intercepto	75.46	5.144	14.67	2.66×10^{-10}
DZ	0.722	0.273	2.641	0.0185
PP	0.713	0.323	2.207	0.0433
PZ	-8.157	0.661	-12.343	2.94×10^{-9}
TEMP1	-0.214	0.152	-1.408	0.1795

Al modelo seleccionado se realizó un diagnóstico de los residuos mediante diferentes pruebas de hipótesis y gráficos obteniendo los siguientes resultados:



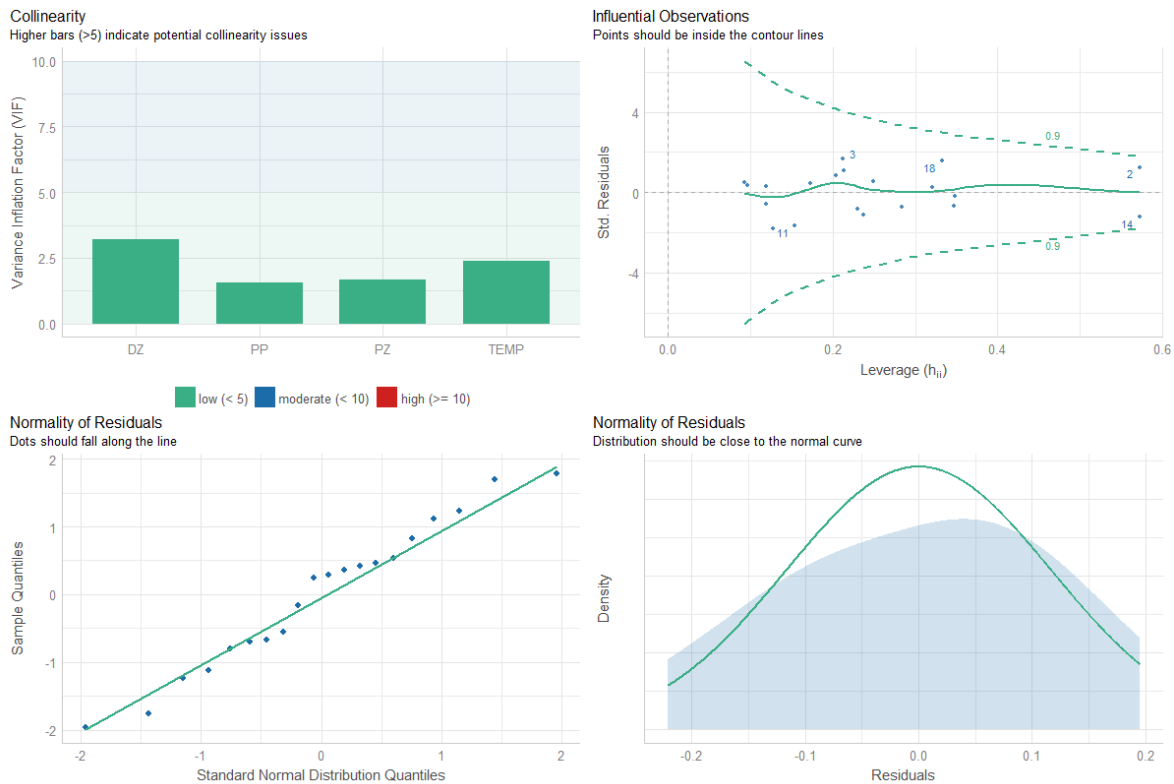


Figura 5. Diagnóstico del modelo de demanda de estructuras de metal

Sobre la normalidad determinamos mediante una prueba de Shapiro-Wilk que no tenemos evidencia para rechazar que la muestra provenga de una población normalmente distribuida, de igual manera observamos a través del gráfico QQ-Plot que los datos se comportan normales.

Sobre la homogeneidad de la varianza vemos que no se observan patrones que indiquen heterocedasticidad en la muestra, para confirmar se realizó una prueba de Breusch-Pagan para suponer homogeneidad de varianzas.

En el modelo no hay presencia de colinealidad ya que el factor de inflación de la varianza es menor a cinco en cada una de las variables seleccionadas.

No hay presencia de punto atípicos que puedan influir en la predicción, aunque se encontró mediante coeficientes de H_{ii} y distancias de Cook que las observaciones 2 y 14 (meses de febrero) son influyentes.

El coeficiente R^2 ajustado obtenido con el modelo fue de 0.9094

De esta manera, se demuestra que existe evidencia de que el modelo obtenido cumple con los supuestos necesarios y es significativo.

Para la demanda de estructuras de zirconio se realizó un procedimiento similar al utilizado para modelar la demanda de estructura de metal. A diferencia del primer modelo la selección de variables se realizó mediante la metodología de forward, es decir se inició con un modelo nulo y se fue agregando las variables más significativas en cada paso.

Este cambio de metodología se realizó debido a que utilizando la anterior técnica se obtenía un modelo con problemas de colinealidad.

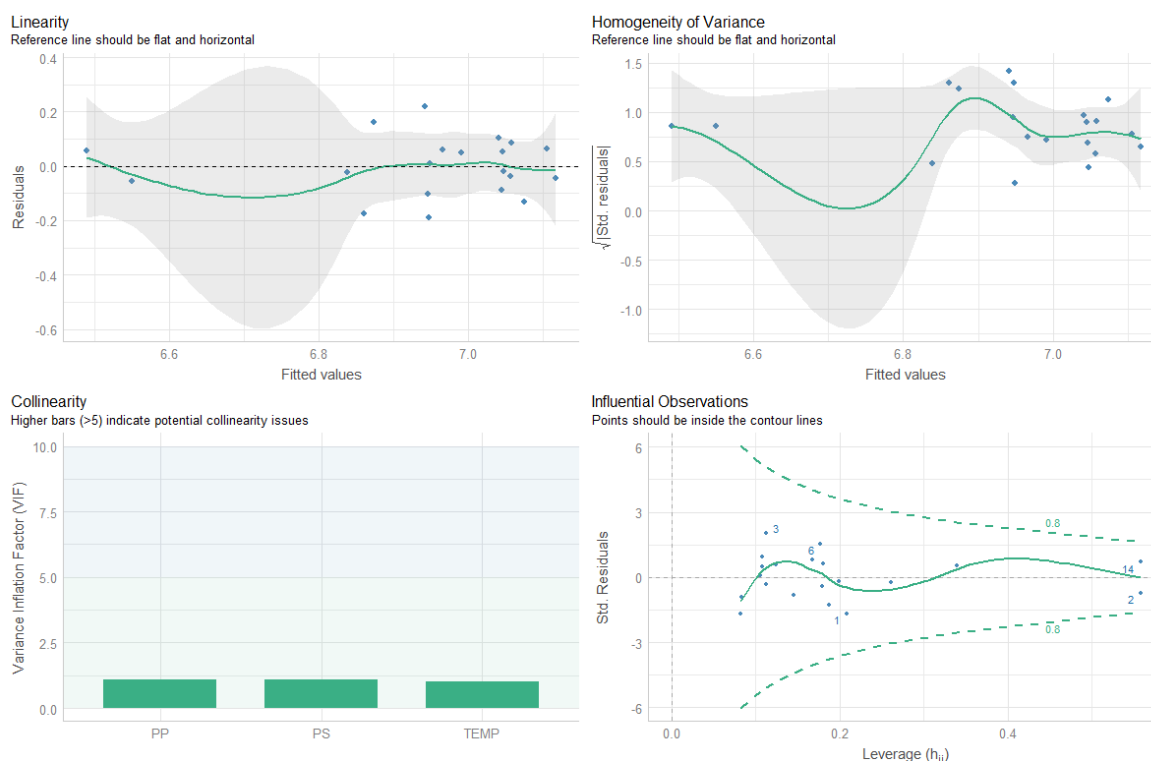
Luego de tres interacciones se escogieron las siguientes variables:

Tabla 5. Resumen estadístico del modelo ajustado para la demanda de estructuras de zirconio

Variable	Estimador	Error estándar	Estadístico t	P-Valor
Intercepto	8.0654	2.1518	3.748	0.0017
PS	0.4039	0.1551	2.604	0.0192
PP	-0.4976	0.2377	-2.093	0.0526
TEMP1	-0.4316	0.0880	-4.904	0.0002

El coeficiente R^2 ajustado obtenido en el modelo fue de 0.6534

Para este modelo de igual manera se comprobó que se cumplan los supuestos de Gauss-Markov, en la siguiente figura se muestran los hallazgos encontrados:



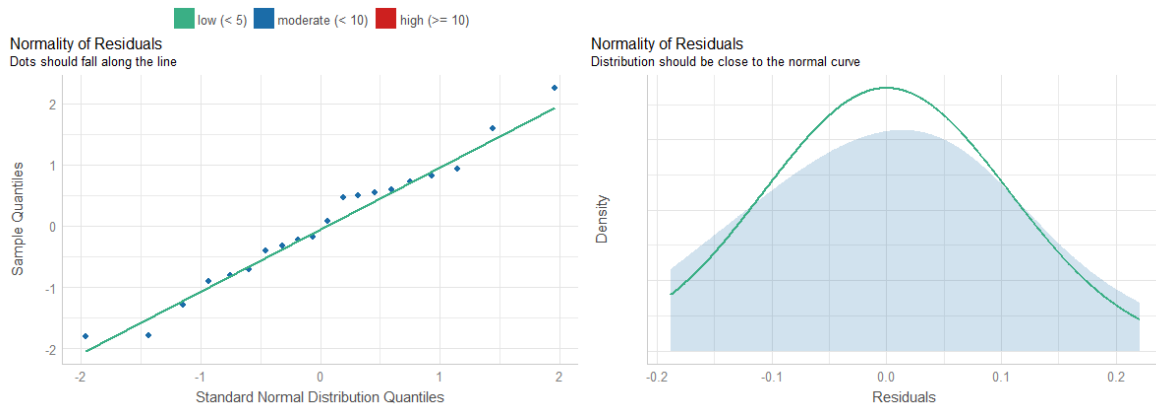


Figura 6. Diagnóstico del modelo de demanda de estructuras de zirconio

Sobre la linealidad se observa al comparar los residuos y valores ajustados que hay una nube de puntos uniforme y no se observa algún patrón. Esto sugiere que la media está bien especificada. Se ve dos puntos que se alejan de los demás y se puede conjeturar que hay presencia de outliers.

En cuanto a la aleatoriedad, se asume que los datos fueron muestreados aleatoriamente de la población encogiando el lapso de los últimos veinte meses.

Se observa que no hay colinealidad, los regresores que se calculan no están perfectamente correlacionados entre sí. Las tres variables que resultaron del modelo tienen un factor de inflación de la varianza inferior a cinco.

En cuanto a la normalidad se observa en el gráfico que los puntos parecen seguir bastante bien la recta y la densidad de los residuos se acerca bastante a una curva con distribución normal. Mediante la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov se obtuvo un p-valor de 0.8294 y tenemos evidencia para decir que muestra proviene una distribución normal.

En el gráfico de homogeneidad de la varianza que compara los residuos estandarizados versus los valores ajustados se observa que a la derecha la amplitud vertical es menor y bastante horizontal, sin embargo, hay puntos a la izquierda que afectan el comportamiento del gráfico. Mediante una prueba de hipótesis de Breush-Pagan se obtuvo un p-valor de 0.2185 y es mayor al nivel de significancia del 5%, por ende, podría considerarse que la homocedasticidad se cumple.

Al igual que el modelo anterior se encontraron que las observaciones de los meses de febrero (punto 2 y 14) son influyentes, pero no son atípicos y el modelo cumple con todos los supuestos necesarios.

4 Resultados

4.1 Interpretación de los modelos

El modelo log-log final obtenido para la demanda de estructura de metal es el siguiente:

$$\ln(DM) = 75.5 + 0.72 \ln(DZ) + 0.71 \ln(PP) - 8.16 \ln(PZ) - 0.21 \ln(TEMP) + u_i \quad (6)$$

Donde los coeficientes tienen la siguiente interpretación:

- Con un aumento del 10% en la demanda de estructuras de zirconio se espera que la demanda de estructuras de metal aumente en un 7.2%.
- Un aumento del 10% en los precios de las estructuras provisionarias incrementaría la demanda de las estructuras de metal en un 7.1%.
- Por cada aumento del 1% en el precio promedio de las estructuras de zirconio disminuye la demanda de metal en un 8.16%.
- Los periodos de temporada baja como son los meses de febrero afectan en un 0.21% la demanda de estructuras de metal.

El modelo log-log final obtenido para la demanda de estructura de zirconio es el siguiente:

$$\ln(DZ) = 8.07 + 0.404 \ln(PS) - 0.498 \ln(PP) - 0.43 \ln(TEMP) + u_i \quad (7)$$

Donde los coeficientes se interpretan de la siguiente manera:

- Si aumentamos en un diez por ciento los precios de los servicios, la demanda de estructuras de zirconio incrementaría en un 4.04%
- Por cada disminución del diez por ciento en los precios de los provisionarios la demanda de estructuras de zirconio aumenta en un 4.98%.
- Los meses de febrero correspondientes a la temporada baja del sector afectan en un 0.43% la demanda de estructuras de zirconio.

Los resultados obtenidos pueden ser anti intuitivo desde una percepción de negocio, en el siguiente apartado se dará una posible interpretación de los resultados.

5 Conclusiones

5.1 Estrategias de precios

En base a los modelos obtenidos en el apartado anterior se concluye que la demanda de estructuras dentales de los diferentes materiales disponibles en la empresa Dit Spa están muy relacionadas entre sí. Para incrementar las ventas de un material en particular, esta se ve condicionada por el aumento de la demanda de los otros materiales. Como estrategia para incrementar las ventas se debe realizar campañas o promociones que motiven la compra en general (por ejemplo, disminuir el precio del envío o servicios complementarios) y no de un producto o material en específico.

En los periodos de baja demanda es contraproducente disminuir los precios con la intención de aumentar la demanda. El mercado es inelástico, lo que significa que responde muy levemente a la variación del precio, por lo que una disminución en el precio traería en consecuencia una caída en los ingresos totales de la empresa.

Se observó que el aumento de precios de servicios y estructuras provisionales afecta de manera diferente a la demanda de cada material. Se podría mitigar este efecto unificando productos y servicios en un mismo ítem para que la decisión de compra no se vea condicionada.

5.2 Discusión y recomendaciones

Se recomienda investigar otras variables que puedan influir en la demanda más allá de los expuestos en la presente investigación. Podría ser de interés analizar los precios de la competencia, la percepción de la calidad o el costo que conlleva al cliente fabricar por sí mismo las estructuras dentales de manera tradicional.

Los precios de las estructuras de metal deberían aumentar. Mantener un precio bajo mientras el resto de los materiales incrementa está provocando un efecto negativo. Se infiere que las decisiones de compra no se basan exclusivamente en el precio, si no en otras variables o preferencias que tenga el laboratorio o clínica. Hay que remarcar que Dit Spa a pesar de que se dedique a la manufactura digital sigue estando presente en el área de la salud y factores como la condición médica del paciente o el prestigio del laboratorio sean igual o más influyentes que el precio a la hora de decidir por cual tipo de estructura dental usar.

6 Referencias

6.1 Bibliografía

- [1] Araneda, A. M. (2021). *Modelos Lineales (Sección 6)*. Santiago de Chile: Facultad de Matemáticas - UC.
- [2] Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2002). *Model Selection and Multimodal Inference: A Practical Information Theoretic Approach* (Second Edition ed.). New York, Estados Unidos: Springer - Verlag.
- [3] Cabrejos, B. (1980). *El producto y el precio a su alcance*. Colombia: Norma.
- [4] Carmona, F. (2003). *Modelos Lineales*. Barcelona, España: Universitat de Barcelona - Departament d'Estadística.
- [5] Christensen, R. (2011). *Plane answers to complex questions. The theory of linear models*. New York: Springer Science. doi:<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9816-3>
- [6] Ferrell, O., & Hartine, M. (2012). *Estrategia de marketing* (Quinta ed.). México, D.F, Mexico: Cengage Learning. Obtenido de <https://elibro.net/es/ereader/bibliotecasuc/39976?page=260>.
- [7] Gelman, A., Hill, J., & Aki, V. (2020). *Regression and Other Stories*. Columbia: Cambridge University Press. Obtenido de <https://avehtari.github.io/ROS-Examples/>
- [8] Guerrero, P., & Hernández, D. (2012). Metodología para la fijación de precios mediante la utilización de la elasticidad precio-demanda. *Apuntes del CENES, Volumen 31 - N°. 54*(ISSN 0120-3053), 9-36.
- [9] Guillén, J. (2011). *Macroeconomía para los negocios: casos y aplicaciones*. México, D.F: Cengage Learning. Obtenido de <https://elibro.net/es/ereader/bibliotecasuc/76603?page=57>.
- [10] Hocking, R. (2013). *Methods and Applications of Linear Models: Regression and the Analysis of Variance* (3rd Edition ed.). Texas: Wiley.
- [11] James, G., Witten, D., & Hastie, T. (2021). *An Introduction to Statistical Learning with Applications in R* (Second Edition ed.). New York: Springer.
- [12] Kutner, M. H. (2005). *Applied Linear Statistical Models* (Fifth Edition ed.). New York: McGraw-Hill Irwin.

- [13] Nicholson, W. (2008). *Teoría microeconómica: principios básicos y aplicaciones* (9a. ed.). México, D.F: Cengage Learning. Obtenido de <https://elibro.net/es/ereader/bibliotecasuc/39928?page=156>.
- [14] Rincón, L. (2019). *Una introducción a la estadística inferencial* (1a. edición ed.). Ciudad de México, México: Universidad Nacional Autónoma de México. doi:ISBN: 978-607-30-2432-7
- [15] Vohra, R., & Krishnamurthi, L. (2012). *Principles of Pricing: An Analytical Approach*. Cambridge: Cambridge University. doi:10.1017/CBO9780511862557
- [16] Wiley, J. (2005). *Applied Linear Regression* (Third Edition ed.). New Jersey: Sanford Weisberg. doi:ISBN 0-471-66379-4