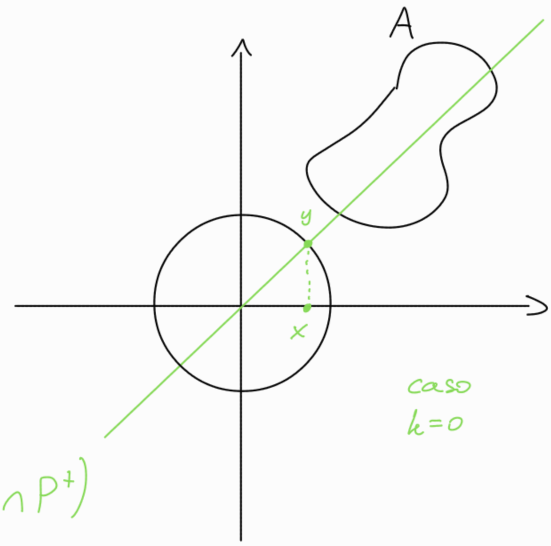
4. Dati due insiemi misurabili nel piano, esiste una retta che divide ognuno di essi in due parti della stessa area

$A, B \subset \mathbb{R}^2$ insiemi misurabili

$a : U \to \mathbb{R}$ applicazione area (continua), $U \subset \mathbb{R}^2$



Sia $S^1_k := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-k)^2 = 1\}$

$$f : [-1,1] \to S^1_k \qquad \text{continua}$$
$$x \mapsto (x, k + \sqrt{1-x^2})$$

$$g : S^1_k \to [0,1] \subset \mathbb{R}$$
$$y \mapsto \frac{a(A^+_y)}{a(A)}$$

A^+_y porzione di $A \subset P^+$ $(A \cap P^+)$

$P^+ \sqcup P^- = \mathbb{R}^2$ semipiani divisi dalla retta che va da $(0,k)$ a y

$h := g \circ f : [-1,1] \to [0,1] \subset \mathbb{R}$

Teorema valor medio

$\Rightarrow \exists x_0 \in [-1,1] \mid h(x_0) = \frac{1}{2}$

h strettamente monotona $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}^+, \exists! r_y$ retta $\mid y_0 \in r_y,\ g(y_0) = \frac{1}{2}$

Preso k, troviamo r_y che divide a metà A

$$p : \mathbb{R}^+ \to [0,1] \subset \mathbb{R}$$
$$k \mapsto \frac{a(B^+)}{a(B)}$$

r_y dividerà anche B

Analogamente ad A, $\exists k_0 \in \mathbb{R}^+ \mid p(k_0) = \frac{1}{2}$, dunque abbiamo ottenuto una retta passante per k_0 e y_0 che divida simultaneamente a metà A e B