

Appunti di Topologia Algebrica

Gianluca Bande (Università di Cagliari)

Andrea Loi (Università di Cagliari)

Indice

Prefazione	vii
I Omotopia e gruppo fondamentale	1
1 Omotopia	3
1.1 Omotopia tra funzioni continue	3
1.2 Omotopia relativa	5
1.3 Alcune proprietà dell'omotopia	6
1.4 Spazi omotopicamente equivalenti	10
1.5 Esercizi	14
2 Il gruppo fondamentale	17
2.1 Prodotto di archi	17
2.2 Il gruppo fondamentale	23
2.3 Omomorfismo indotto da un'applicazione continua	24
2.4 Invarianza omotopica del gruppo fondamentale	26
2.5 Il gruppo fondamentale della sfera	28
2.6 Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi	30
2.7 Un cenno sui gruppi di omotopia	31
2.8 Esercizi	33
3 Rivestimenti	35
3.1 Rivestimenti	35
3.2 Rivestimenti e omeomorfismi locali	38
3.3 Sollevamenti di archi e omotopie	42
3.4 Esercizi	50
4 Applicazioni della teoria dei rivestimenti	51
4.1 Il teorema di Borsuk–Ulam	51

4.2	Il gruppo fondamentale del cerchio	56
4.3	Il gruppo fondamentale del proiettivo reale	60
4.4	Esercizi	61
5	Categorie e funtori	63
5.1	Categorie	63
5.2	Funtori	65
5.3	Prodotti e coprodotti	67
5.4	Il prodotto libero di gruppi	71
5.5	Esercizi	75
6	Gruppi liberi, presentazioni e abelianizzazioni	77
6.1	Gruppi liberi	77
6.2	Presentazione di gruppi	80
6.3	Abelianizzazioni	83
6.4	Esercizi	88
7	Il Teorema di Seifert–Van Kampen	91
7.1	Enunciato e dimostrazione parziale	91
7.2	Prima applicazione	95
7.3	Seconda applicazione	97
7.4	Terza applicazione: U_2 semplicemente connesso	101
7.5	Esercizi	105
8	Classificazione delle superfici	107
8.1	Somma connessa di due superfici	107
8.2	Presentazioni poligonali	115
8.3	Dimostrazione del teorema di classificazione	120
8.4	Orientabilità e genere di una superficie	123
8.5	Classificazione delle superfici con bordo	124
8.6	Caratteristica di Eulero	126
8.6.1	Solidi convessi	131
8.7	Esercizi	133
9	Classificazione dei rivestimenti	135
9.1	Azioni di gruppi su spazi topologici	135
9.2	Rivestimenti e gruppo fondamentale	139
9.3	Teoremi di sollevamento per rivestimenti	141
9.4	Omomorfismi e Isomorfismi tra rivestimenti	145

9.5	Rivestimenti universali e esistenza di rivestimenti	147
9.6	Automorfismi di un rivestimento	149
9.7	Rivestimenti regolari	151
9.8	Monodromia di un rivestimento	153
9.9	Esercizi	154
II	Omologia singolare	157
10	Omologia singolare	159
10.1	Simplessi	159
10.1.1	Simplessi in \mathbb{R}^n	159
10.1.2	Simplessi singolari su spazi topologici	162
10.1.3	Gruppo delle q -catene	163
10.2	Gruppi di omologia singolare	165
10.2.1	Invarianza topologica dell'omologia singolare	166
10.2.2	Omologia di spazi connessi per archi	168
10.2.3	Omologia ridotta	170
10.3	Esercizi	171
11	Successioni esatte e complessi di catene	173
11.1	Gruppi abeliani liberi	173
11.2	Complessi di catene	177
11.2.1	Omologia relativa	179
11.3	La successione esatta lunga dell'omologia relativa	182
11.4	Esercizi	188
12	L'omomorfismo di Hurewicz	189
13	Il teorema di escissione e la successione di Mayer-Vietoris	193
13.0.1	Omologia della sfera	195
13.0.2	Applicazioni	196
13.0.3	Un generatore di $H_1(\mathbb{S}^1)$	197
13.0.4	Omologia delle superfici compatte	197
13.0.5	Omologia del toro bidimensionale	198
13.0.6	Omologia delle superfici compatte	200
13.1	Escissione	201
13.1.1	Omologia locale e invarianza del dominio	203
13.2	Esercizi	204

14 Il grado di un'applicazione	205
14.1 Esercizi	208
15 Il Teorema di separazione di Jordan-Brower	209
A Componenti connesse e connesse per archi	213
A.1 Componenti connesse e connesse per archi	213
A.2 Esercizi	215
B Spazi localmente compatti	217
B.1 Definizioni e prime proprietà	217
B.2 Altre proprietà degli spazi localmente compatti	219
B.3 Compattificazioni di Alexandrov	220
B.4 Esercizi	222
C Numero di Lebesgue	223
C.1 Esercizi	224
D Spazi metrici completi e la curva di Peano	225
D.1 Spazi metrici completi	225
D.2 La curva di Peano	227
D.3 Esercizi	230
E Azioni di gruppi su insiemi	231

Prefazione

Nell'ottavo capitolo daremo un'idea della classificazione delle superfici. Il lettore è rinviato a [9] e [13] in bibliografia per una descrizione più completa e dettagliata.

Nel nono capitolo utilizzeremo il gruppo fondamentale e i suoi sottogruppi per classificare i rivestimenti di un dato spazio topologico X .

Nel decimo capitolo verrà trattata la teoria dell'omologia singolare.

Parte I

Omotopia e gruppo fondamentale

Capitolo 1

Omotopia

1.1 Omotopia tra funzioni continue

Siano X e Y due spazi topologici. Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono dette **omotope** se esiste un' applicazione continua

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad I = [0, 1],$$

detta **omotopia** tra f_0 e f_1 , tale che

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x), \quad \forall x \in X.$$

($X \times I$ denota il prodotto cartesiano tra X e I dotato della topologia prodotto).

Interpretazione meccanica dell'omotopia

Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra funzioni continue. Dato $t \in I$ consideriamo l'applicazione continua

$$f_t : X \rightarrow Y$$

definita da

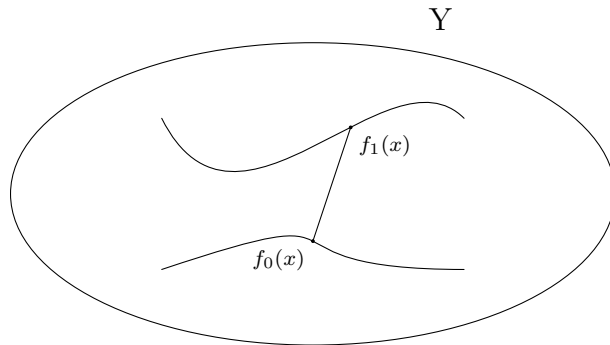
$$f_t(x) = F(x, t).$$

Al variare di $t \in I$, considerato come il tempo, otteniamo quindi una famiglia di funzioni continue che al tempo $t = 0$ vale f_0 e al tempo $t = 1$ vale f_1 . In modo intuitivo possiamo pensare che f_1 si possa ottenere da f_0 attraverso una “deformazione temporale” (il fatto che il tempo vari con continuità si riflette sulla continuità dell'omotopia F).

Esempio 1.1.1. Sia Y un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n e sia X uno spazio topologico qualunque. Allora due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono omotope. Infatti possiamo considerare l'applicazione continua (l'omotopia lineare)

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x). \quad (1.1)$$

Più in generale se $f_0, f_1 : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n$ sono due funzioni continue tali che il segmento di retta che congiunge $f_0(x)$ e $f_1(x)$ sia contenuto in Y per ogni $x \in X$ allora f_0 e f_1 sono omotope tramite l'omotopia F definita da (1.1).



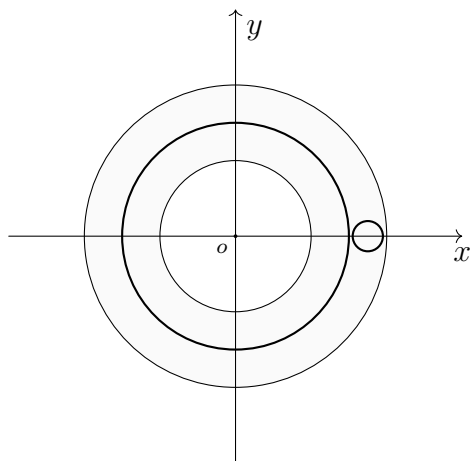
Esempio 1.1.2. (funzioni non omotope) Sia

$$X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

il cerchio unitario e

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

la corona circolare di centro l'origine, raggio interno 1 e raggio esterno 2. Consideriamo le applicazioni continue $f_0 : X \rightarrow Y$, $f_0((\cos t, \sin t)) = \frac{3}{2}(\cos t, \sin t)$ (la cui immagine è il cerchio di centro l'origine e raggio $\frac{3}{2}$) e $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_1((\cos t, \sin t)) = \frac{1}{5}(\cos t - \frac{7}{4}, \sin t)$ (la cui immagine è il cerchio di centro $(\frac{7}{4}, 0)$ e raggio $\frac{1}{5}$).



Allora si vede intuitivamente che f_0 non è omotopa a f_1 (per deformare con continuità f_0 su f_1 si deve passare attraverso il buco). Una dimostrazione rigorosa che f_0 e f_1 non sono omotope seguirà dagli strumenti sviluppati nel Capitolo 4 (si veda l'Esercizio 4.1).

Esempio 1.1.3. (applicazione antipodale) Sia S^n la sfera unitaria di dimensione n e sia $A : S^n \rightarrow S^n$ l' **applicazione antipodale**, cioè $A(x) = -x$. Se n è dispari allora $\text{id}_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$, $\text{id}_{S^n}(x) = x$, $\forall x \in S^n$, è omotopa all'applicazione antipodale. Infatti sia $n = 2k - 1$. Allora, usando la notazione complessa e l'identificazione $\mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$, possiamo scrivere

$$S^{2k-1} = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\|^2 = 1\}$$

e l'applicazione

$$F : S^{2k-1} \times I \rightarrow S^{2k-1}, (z, t) \mapsto F(z, t) = e^{i\pi t} z$$

è un'omotopia tra $\text{id}_{S^{2k-1}}$ e A .

Osservazione 1.1.4. Se n è pari allora l'applicazione antipodale $A : S^n \rightarrow S^n$ non è omotopa all'applicazione id_{S^n} . La dimostrazione di questo fatto si può ottenere, per esempio, usando la teoria dell'omologia (si veda il Capitolo **XXX**).

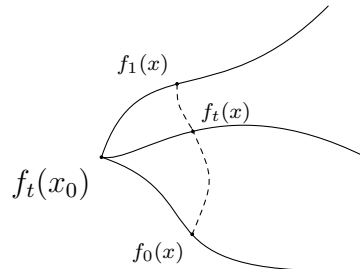
1.2 Omotopia relativa

Un insieme importante di applicazioni continue si ottiene quando $X = I$. In questo caso un'applicazione $f : I \rightarrow Y$ è chiamato **arco** di estremi $f(0)$ e $f(1)$. Il concetto di omotopia è banale nel caso di archi, in quanto un arco $f : I \rightarrow Y$ è sempre omotopo all'arco costante $\epsilon_y : I \rightarrow Y$, $\epsilon_y(I) = y = f(0)$. Infatti $F : I \times I \rightarrow Y$ definita da $F(x, t) = f((1-t)x)$ è un'omotopia tra f e ϵ_y . Per questo motivo introduciamo un concetto più generale di omotopia quello di **omotopia relativa**. Siano X e Y due spazi topologici e $A \subseteq X$ un sottoinsieme di X . Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono dette **omotope relativamente ad A** se esiste un'omotopia (detta **omotopia relativa ad A**)

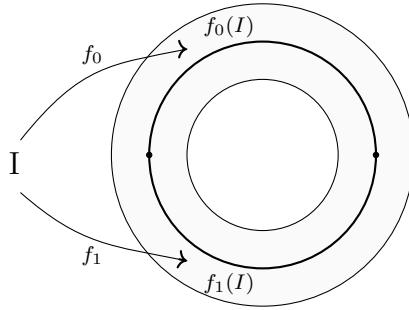
$$F : X \times I \rightarrow Y,$$

tra f_0 e f_1 , tale che $F(a, t)$ non dipende da t per ogni $a \in A$. Osserviamo che se $A = \emptyset$ allora il concetto di omotopia relativa coincide con quello di omotopia.

Esempio 1.2.1. Sia $A = \{x_0\} \subseteq X = I$. Allora l'omotopia relativa al punto $\{x_0\}$ può essere visualizzata come segue:



Esempio 1.2.2. Descriviamo ora un esempio di funzioni omotope ma non relativamente omotope. Sia $X = I$ e $A = \{0, 1\} \subseteq X$, $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Consideriamo le applicazioni continue $f_0 : I \rightarrow Y$, $f_0(t) = \frac{3}{2}(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ e $f_1 : I \rightarrow Y$, $f_1(t) = \frac{3}{2}(\cos(\pi t), -\sin(\pi t))$.



Allora si può dimostrare che f_0 e f_1 sono omotope ma non lo sono relativamente ad A (anche qui rinviamo lo studente all'Esercizio 4.1).

Notazione: scriveremo $f_0 \sim_A f_1$ (risp. $f_0 \sim f_1$) per indicare che due funzioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono omotope relativamente ad A (risp. omotope).

Questa notazione è giustificata dalla seguente:

Proposizione 1.2.3. Siano X e Y due spazi topologici e $A \subseteq X$. Allora \sim_A definisce una relazione di equivalenza sull'insieme $C(X, Y)$ delle applicazioni continue da X in Y .

Dimostrazione: Sia $f \in C(X, Y)$. La riflessività di \sim_A si ottiene ponendo $F(x, t) = f(x)$, $\forall x \in X$. Se $f \sim_A g$ tramite l'omotopia $F(x, t)$ allora $g \sim_A f$ tramite l'omotopia $G(x, t) = F(x, 1 - t)$, e questo mostra la simmetria di \sim_A . Infine, per dimostrare la transitività, sia $f \sim_A g$ tramite F e $g \sim_A h$ tramite G . Allora $H(x, t)$ definita da $F(x, 2t)$, per $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, e $G(x, 2t - 1)$, per $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, è un'omotopia relativa ad A tra f e h . \square

1.3 Alcune proprietà dell'omotopia

Siano X e Y due spazi topologici. Allora l'insieme $C(X, Y)$ delle applicazioni continue da X a Y può essere dotato della struttura di spazio topologico introducendo la **topologia dei compatti-aperti** come segue.

Siano $K \subset X$ un compatto e $W \subseteq Y$ un aperto e sia $S(K, W)$ il sottoinsieme di $C(X, Y)$ definito come:

$$S(K, W) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subseteq W\}.$$

Sia \mathcal{S} la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $C(X, Y)$ costituita da $C(X, Y)$, il vuoto e da tutti gli insiemi della forma $S(K, W)$ al variare di $K \subset X$, K compatto, e $W \subseteq Y$, W aperto. Nella topologia dei compatti-aperti $\mathcal{U} \subseteq C(X, Y)$ è aperto se e solo se $\mathcal{U} = C(X, Y)$, $\mathcal{U} = \emptyset$ oppure se per ogni $f \in \mathcal{U}$ esistono sottoinsiemi S_1, \dots, S_k di \mathcal{S} tali che

$$f \in S_1 \cap \dots \cap S_k \subseteq \mathcal{U}.$$

La verifica che si tratti di una topologia è un esercizio per lo studente (cfr. Esercizio 1.1). In particolare, per K compatto in X e W aperto in Y , $S(K, W)$ è aperto in $C(X, Y)$. Da ora in poi $C(X, Y)$ sarà dotato della topologia dei compatti-aperti.

Osservazione 1.3.1. Sia (Y, d) uno spazio metrico e X uno spazio compatto e di Hausdorff. Consideriamo la **topologia uniforme** su $C(X, Y)$, cioè la topologia indotta dalla metrica (si veda anche (D.1) in Appendice D)

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Si può dimostrare (la dimostrazione non fa parte di queste note) che la topologia uniforme coincide con la topologia dei compatti-aperti.

Data un'omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tra due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ possiamo definire un'applicazione

$$\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$$

definita da:

$$\hat{F}(t)(x) = F(x, t) \tag{1.2}$$

e quindi $\hat{F}(0) = f_0$ e $\hat{F}(1) = f_1$. È naturale chiedersi se \hat{F} definisce un arco tra f_0 e f_1 cioè se \hat{F} è continua, dove $C(X, Y)$ è dotato della topologia dei compatti-aperti. La seguente proposizione mostra che questo è vero e, inoltre, se X è localmente compatto e di Hausdorff (lo studente è rinviato all'Appendice B per il materiale sugli spazi localmente compatti e le loro proprietà) e $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è continua allora $F : X \times I \rightarrow Y$ definita dalla (1.2), e cioè $F(x, t) = \hat{F}(t)(x)$, è continua.

Proposizione 1.3.2. *Siano X e Y due spazi topologici. Siano $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ due applicazioni continue. Se f_0 e f_1 sono omotope tramite un'omotopia F allora $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ data da (1.2) definisce un arco tra f_0 e f_1 in $C(X, Y)$. Viceversa, se X è localmente compatto e di Hausdorff e se $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è un arco di estremi f_0 e f_1 , allora $F : X \times I \rightarrow Y$ data da (1.2) è un'omotopia tra f_0 e f_1 .*

Per la dimostrazione della proposizione abbiamo bisogno di un lemma.

Lemma 1.3.3. *Sia X uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e Y uno spazio topologico arbitrario. Allora la funzione valutazione*

$$e_v : X \times C(X, Y) \rightarrow Y, (x, f) \mapsto e_v(x, f) := f(x)$$

è continua.

Dimostrazione: Sia $(x, f) \in X \times C(X, Y)$ e $W \subseteq Y$ un aperto tale che $e_v(x, f) = f(x) \in W$. Vorremo trovare un aperto $\mathcal{U} \subseteq X \times C(X, Y)$ tale che $e_v(\mathcal{U}) \subseteq W$ (questo mostrerebbe che e_v è continua nel punto (x, f)). Siccome $f : X \rightarrow Y$ è continua in x esiste un aperto $U, x \in U$, tale che $f(U) \subseteq W$. Essendo X localmente compatto e di Hausdorff segue dal Teorema B.2.1 dell'Appendice B.2 che esiste V intorno aperto di x tale che \bar{V} è compatto e $\bar{V} \subseteq U$. Quindi $f(\bar{V}) \subseteq f(U) \subseteq W$. Consideriamo l'aperto $\mathcal{U} = V \times S(\bar{V}, W)$ di $X \times C(X, Y)$. Allora $(x, f) \in \mathcal{U}$ e $e_v(\mathcal{U}) \subseteq W$; infatti se $(x', f') \in \mathcal{U}$ allora $e_v(x', f') = f'(x') \in W$. □

Dimostrazione della Proposizione 1.3.2 Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra f_0 e f_1 . Vogliamo mostrare che $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è continua. Sia $t \in I$ e sia $S(K, W) \subseteq C(X, Y)$ (K compatto in X e W aperto di Y) tale che $\hat{F}(t) \in S(K, W)$. Per dimostare che \hat{F} è continua in t è sufficiente mostrare che esiste un aperto $A \subseteq I, t \in A$, tale che $\hat{F}(A) \subseteq S(K, W)$. Ora $\hat{F}(t) \in S(K, W)$ significa che $\hat{F}(t)(K) \subseteq W$, ossia $F(K \times \{t\}) \subseteq W$. Segue che $K \times \{t\} \subseteq F^{-1}(W)$, il quale è un sottoinsieme aperto di $X \times I$ per la continuità di F . Dal momento che $K \times \{t\}$ è compatto esiste un aperto $A \subseteq I$ tale che $K \times A \subseteq F^{-1}(W)$. Segue che $F(K \times A) \subseteq W$, ossia $\hat{F}(A) \subseteq S(K, W)$.

Viceversa supponiamo che $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ sia continua. Allora $F : X \times I \rightarrow Y$ è continua in quanto composizione dell'applicazione continua

$$\text{id}_X \times \hat{F} : X \times I \rightarrow X \times C(X, Y), (x, t) \mapsto (x, \hat{F}(t))$$

con l'applicazione valutazione e_v (che è continua per il Lemma 1.3.3). □

Osservazione 1.3.4. Nella prima parte della Proposizione 1.3.2 abbiamo usato il fatto (vedi [7, Proposizione 10.1.4]) che se X e Y sono spazi topologici con Y compatto e B è un aperto di $X \times Y$ che contiene $x_0 \times Y, x_0 \in X$, allora esiste un aperto A di $X, x_0 \in A$, tale che $A \times Y \subseteq B$. Osserviamo inoltre che l'intervallo I non gioca nessun ruolo importante nella dimostrazione della proposizione e può

essere sostituito da un qualunque spazio topologico Z . In effetti si può dimostrare (la dimostrazione non fa parte di queste note) qualcosa di ancora più forte e cioè che se X è uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e Y, Z sono spazi topologici arbitrari allora l'applicazione

$$C(Z, C(X, Y)) \rightarrow C(X \times Z, Y), \hat{F} \mapsto F, F(x, z) := \hat{F}(z)(x)$$

è un omeomorfismo.

Proposizione 1.3.5. (*stabilità dell'omotopia rispetto alle composizioni*) Siano X, Y, Z spazi topologici, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ e $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ applicazioni continue. Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$ allora $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.

Dimostrazione: Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ l'omotopia tra f_0 e f_1 e $G : Y \times I \rightarrow Z$ un'omotopia tra g_0 e g_1 . Allora si verifica facilmente che l'applicazione $H : X \times I \rightarrow Z$ definita da $H(x, t) = G(F(x, t), t)$ è un'omotopia tra $g_0 \circ f_0$ e $g_1 \circ f_1$. \square

Proposizione 1.3.6. Sia X uno spazio topologico e $f : S^1 \rightarrow X$ un'applicazione continua. Allora f è omotopa all'applicazione costante se e solo se f ammette un'estensione continua dal disco unitario $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ a X .

Dimostrazione: Supponiamo dapprima che $g : D^2 \rightarrow X$ sia un'estensione continua di f , cioè $g|_{\partial D^2 = S^1} = f$. Definiamo un'omotopia $H : D^2 \times I \rightarrow X$ tra ϵ_q , $q = g(0)$, e g ponendo $H(x, t) = g(tx)$. Sia $F : S^1 \times I \rightarrow X$ la restrizione di H a $S^1 \times I$. Allora F è un'omotopia tra $\epsilon_q = F(x, 0)$ e $f(x) = F(x, 1) = H(x, 1)$. Viceversa supponiamo che $F : S^1 \times I \rightarrow X$ sia un'omotopia tra $\epsilon_q = F(x, 0)$ e $f(x) = F(x, 1)$. Consideriamo l'applicazione continua $h : S^1 \times I \rightarrow D^2$ definita da $h(x, t) = tx$. Osserviamo che h è un'identificazione¹ (continua, suriettiva e chiusa). D'altra parte F passa al quoziente rispetto a h , cioè se $h(x, t) = h(y, s)$ allora $F(x, t) = F(y, s)$. Infatti $h(x, t) = h(y, s)$ se e solo se $tx = sy$ e, passando alle norme, si ottiene $t = s$. Distinguiamo i due casi: se $t = s = 0$ allora $F(x, 0) = F(y, 0) = \epsilon_q$; se invece $t = s \neq 0$ allora $x = y$ e quindi $F(x, t) = F(y, s)$. Segue da [7, Corollario 11.2.3] che esiste un'unica applicazione continua $g : D^2 \rightarrow X$ tale che $g \circ h = F$:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times I & \xrightarrow{F} & X \\ & \searrow h & \uparrow g \\ & & D^2 \end{array}$$

¹Il lettore potrà consultare [7, Cap.11] per i dettagli sulla topologia quoziente e le identificazioni.

Allora

$$f(x) = F(x, 1) = g(h(x, 1)) = g(x), \quad \forall x \in S^1,$$

e quindi g è un'estensione continua di f . \square

1.4 Spazi omotopicamente equivalenti

L'omotopia tra funzioni continue induce una relazione d'equivalenza tra spazi topologici come segue. Due spazi topologici X e Y sono detti **omotopicamente equivalenti** o **omotopi** se esistono due funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che

$$g \circ f \sim \text{id}_X, \quad f \circ g \sim \text{id}_Y,$$

dove $\text{id}_X : X \rightarrow X$ (risp. $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$) denota l'identità di X (risp. Y). Diremo anche che gli spazi X e Y hanno lo **stesso tipo di omotopia**. Resta così definita una relazione di equivalenza sull'insieme di tutti gli spazi topologici definendo $X \sim Y$ se e solo se X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

Notazione: scriveremo $X \sim Y$ quando X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

Due applicazioni f e g che soddisfano le condizioni precedenti sono chiamate **equivalenze omotopiche**.

Osserviamo che due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Il viceversa non è vero come mostra l'esempio che segue.

Esempio 1.4.1. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Allora X è omotopo allo spazio $\{x_0\}$ costituito da un solo punto $x_0 \in X$. Infatti l'inclusione $i : \{x_0\} \rightarrow X$ e l'applicazione costante $\epsilon_{x_0} : X \rightarrow \{x_0\}$ sono equivalenze omotopiche. Infatti $\epsilon_{x_0} \circ i = \text{id}_{\{x_0\}}$ mentre $\text{id}_X \sim i \circ \epsilon_{x_0}$ tramite l'omotopia lineare (cfr. Esempio 1.1.1)

$$F : X \times I \rightarrow X, \quad F(x, t) = (1 - t) \text{id}_X(x) + t(i \circ \epsilon_{x_0})(x) = (1 - t)x + tx_0.$$

Diremo che uno spazio topologico X è **contraibile** se X è omotopicamente equivalente ad uno spazio topologico costituito da un solo punto. L'esempio precedente mostra che un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n è contraibile. In particolare \mathbb{R}^n stesso o il disco unitario $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ sono esempi di spazi topologici contraibili. Più in generale un sottospazio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto ad un suo punto x_0 , è contraibile (X è stellato rispetto a $x_0 \in X$ se il segmento di retta che unisce x_0 e x è contenuto in X , $\forall x \in X$).

Proposizione 1.4.2. *Uno spazio topologico X è contraibile se e solo se id_X è omotopa all'applicazione costante.*

Dimostrazione: Si veda l'Esercizio 1.4. \square

Osservazione 1.4.3. Quando parleremo del gruppo fondamentale mostreremo che il cerchio unitario S^1 non è contraibile. In effetti si riesce a dimostrare che S^n non è contraibile per $n \geq 1$ (si veda l'Osservazione 2.7.2 del Paragrafo 2.7 del Capitolo 2).

Esempio 1.4.4. Il cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

e il cerchio

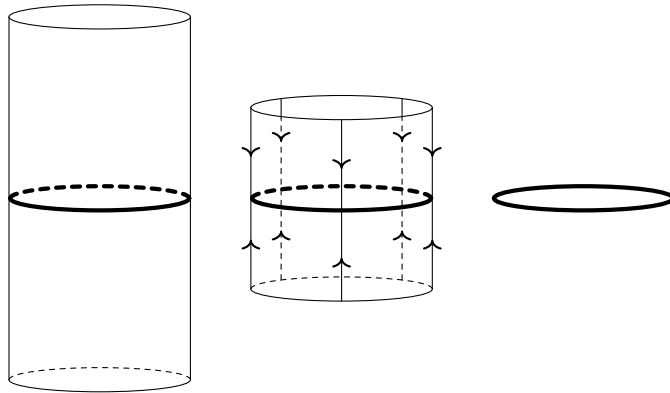
$$S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

sono omotopicamente equivalenti. Infatti siano $r : C \rightarrow S^1$, $r(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $i : S^1 \rightarrow C$, i inclusione naturale. Allora $r \circ i = \text{id}_{S^1}$ e $\text{id}_C \sim i \circ r$. La prima uguaglianza è immediata. Per dimostrare che $\text{id}_C \sim i \circ r$ definiamo l'applicazione continua $F : C \times I \rightarrow C$, $F(x, y, z; t) = (x, y, (1 - t)z)$. Allora

$$F(x, y, z; 0) = (x, y, z) = \text{id}_C(x, y, z)$$

e

$$F(x, y, z; 1) = (x, y, 0) = (i \circ r)(x, y, z).$$



L'esempio precedente suggerisce qualche definizione. Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un sottoinsieme di X .

A è un **retrato** di X se esiste una funzione continua $r : X \rightarrow A$, chiamata **retrazione** di X su A , tale che $r \circ i = \text{id}_A$ (equivalentemente $r|_A = \text{id}_A$) dove $i : A \rightarrow X$ è l'inclusione.

A è un **retrato di deformazione** di X se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $\text{id}_X \sim i \circ r$. Quindi $A \subseteq X$ è un retratto di deformazione se e solo se esiste $F : X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A$, $\forall x \in X$, $F(a, 1) = a$, $\forall a \in A$.

Osservazione 1.4.5. Se $A \subseteq X$ è un retratto di deformazione allora $X \sim A$. Esistono però sottoinsiemi $A \subseteq X$ di uno spazio topologico X che sono omotopicamente equivalenti a X ma che non sono retratti di X . Per esempio l'intervallo aperto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ è omotopo a \mathbb{R} (entrambi sono contraibili) ma non può esistere una retrazione di \mathbb{R} in $(0, 1)$ in quanto $(0, 1)$ è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R} (cfr. Esercizio 1.9).

Osservazione 1.4.6. Se $r : X \rightarrow A$ è una retrazione non è detto che A sia un retratto di deformazione di X . Infatti ogni spazio si retrae ad un suo punto ma non è detto che X sia contraibile (cfr. Esercizio 1.5).

A è un **retratto forte di deformazione** di X se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $\text{id}_X \sim_A i \circ r$. Quindi $A \subseteq X$ è un retratto forte di deformazione se e solo se esiste $F : X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A$, $\forall x \in X$, $F(a, t) = a$, $\forall a \in A$, $\forall t \in I$.

Intuitivamente $A \subseteq X$ è un retratto (forte) di deformazione se X può essere deformato con continuità su A fino a farlo coincidere con A mantenendo fisso A (ogni punto $a \in A$) durante il processo di deformazione. Ovviamente un retratto forte di deformazione è un retratto di deformazione ma non vale il viceversa (si veda l'Esercizio 1.15).

Esempio 1.4.7. Il cerchio S^1 è un retratto forte di deformazione del cilindro C come si deduce dall'Esempio 1.4.4.

Esempio 1.4.8. La sfera n -dimensionale S^n è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Si consideri infatti la retrazione

$$r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n, \quad r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Allora $r \circ i = \text{id}_{S^n}$ mentre

$$i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad (i \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

è omotopa (relativamente a S^n) a $\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ tramite l'omotopia $F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definita da:

$$F(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|},$$

che soddisfa $F(a, t) = a$, $\forall a \in S^n$ e $\forall t \in I$.

Esempio 1.4.9. Sia L l'unione di due lati di un triangolo T . Allora L è un retratto forte di deformazione di T . Per dimostrare quest'affermazione possiamo supporre che T sia il triangolo nel piano di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e dimostrare che l'insieme L , unione dei segmenti che uniscono $(0, 0)$ e $(1, 0)$ e $(0, 0)$ e $(0, 1)$, è un retratto forte di deformazione di T .

Definiamo la retrazione $r : T \rightarrow L$,

$$r(x, y) = \begin{cases} (0, y - x) & \text{se } x \leq y \\ (x - y, 0) & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

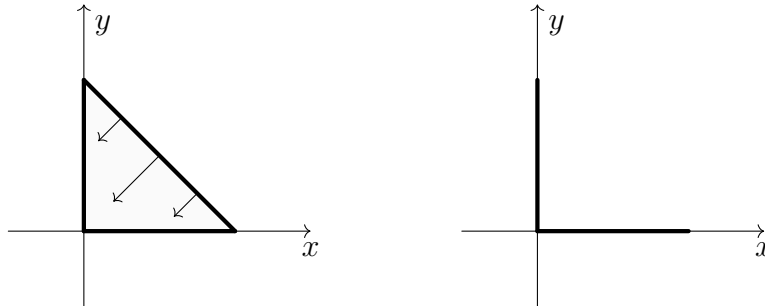
o, equivalentemente,

$$r(x, y) = (x - \min(x, y), y - \min(x, y)).$$

Allora $F : T \times I \rightarrow T$,

$$F(x, y; t) = (1 - t)(x, y) + t(i \circ r)((x, y))$$

è tale che $F(x, y; 0) = (x, y) = \text{id}_T((x, y))$ e $F(x, y; 1) = (i \circ r)((x, y))$, $F(a, b; t) = (a, b)$ per ogni $(a, b) \in L$ (infatti se $(a, b) \in L$ allora $\min(a, b) = 0$).



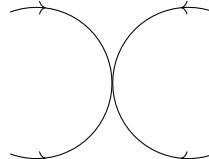
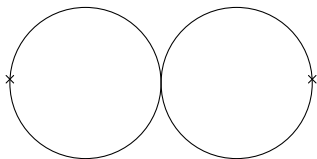
Esempio 1.4.10. Consideriamo la figura $\infty = C_1 \cup C_2$, dove

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\} = \{(\cos(\pi(s+1)) + 1, \sin(\pi(s+1))) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [-1, 1]\},$$

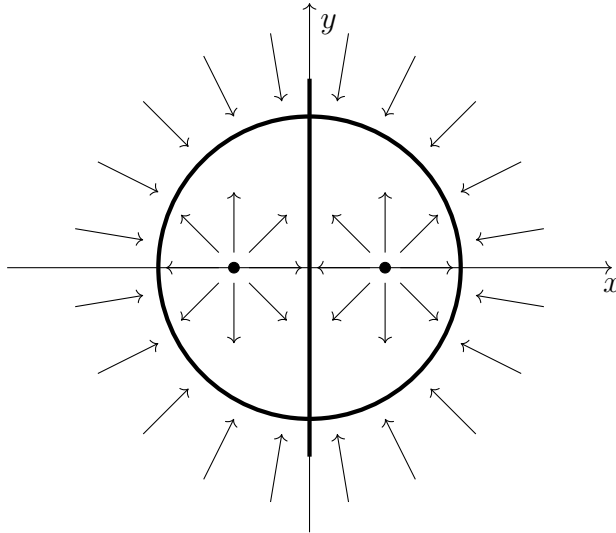
$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\} = \{(\cos(\pi s) - 1, \sin(\pi s)) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [-1, 1]\}.$$

Lo spazio $X = \infty \setminus \{(-2, 0), (2, 0)\}$ si retrae per deformazione forte all'origine $(0, 0)$ tramite l'omotopia $F : X \times I \rightarrow X$

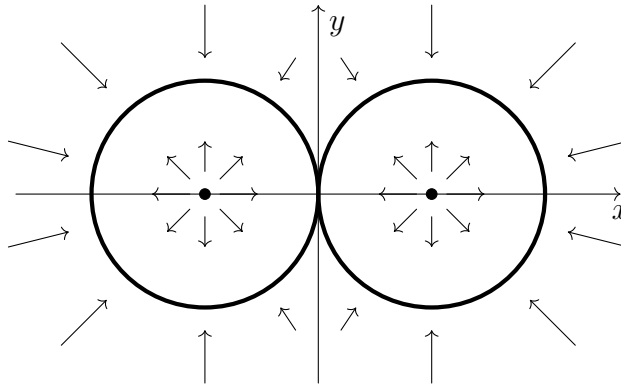
$$F(x, t) = \begin{cases} (\cos(\pi((1-t)s + 1)) + 1, \sin(\pi((1-t)s + 1))) & \text{su } C_1 \setminus \{(2, 0)\} \\ (\cos(\pi s(1-t)) - 1, \sin(\pi s(1-t))) & \text{su } C_2 \setminus \{(-2, 0)\} \end{cases}$$



Esempio 1.4.11. La figura Θ è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$.



Esempio 1.4.12. La figura ∞ è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$.



Osservazione 1.4.13. Dagli ultimi due esempi e dalla proprietà transitiva dell'omotopia si deduce che $\infty \sim \Theta$. Questo è un fatto generale. Un teorema di Fuchs afferma infatti che due spazi topologici X e Y sono omotopicamente equivalenti se e solo se sono (omeomorfi a) retratti di deformazione di uno stesso spazio Z .

1.5 Esercizi

Esercizio 1.1. Dimostrare che la topologia dei compatto-aperti è effettivamente una topologia e che $\mathcal{U} \subseteq C(X, Y)$ è aperto in questa topologia se e solo se $\mathcal{U} = C(X, Y)$, $\mathcal{U} = \emptyset$ oppure \mathcal{U} può essere scritto come unione di intersezioni finite di elementi di \mathcal{S} .

Esercizio 1.2. Siano X e Y due spazi omotopicamente equivalenti e sia $f : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Un'applicazione $g : Y \rightarrow X$ tale che $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$ è detta un'**inversa omotopica** di f . Dimostrare che un'inversa omotopica di f è unica a meno di omotopie.

Esercizio 1.3. Dimostrare che nel nastro di Möbius N esiste una circonferenza che risulta essere un retrato forte di deformazione di N . Dedurne che N è omotopicamente equivalente al cilindro.

Esercizio 1.4. Dimostrare la Proposizione 1.4.2.

Esercizio 1.5. Dimostrare che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio connesso (risp. connesso per archi) è connesso (risp. connesso per archi).

Esercizio 1.6. E' vero che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio compatto è compatto?

Esercizio 1.7. Dimostrare che un retrato di uno spazio compatto (risp. connesso, connesso per archi) è compatto (risp. connesso, connesso per archi).

Esercizio 1.8. Si dimostri che un retrato di uno spazio contraibile è contraibile.

Esercizio 1.9. Dimostrare che un retrato di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Esercizio 1.10. Sia \mathbb{T}^2 il toro e X il complementare di un suo punto. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente alla figura ∞ . Dedurne che il complementare di tre punti distinti in S^2 è omotopicamente equivalente a X .

Esercizio 1.11. Sia X uno spazio topologico e $f, g : X \rightarrow S^n$ due funzioni continue tali che $f(x) \neq -g(x)$, per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è omotopa a g .

Esercizio 1.12. Dimostrare che $SL(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante uguale a 1) è un retrato forte di deformazione di $GL^+(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante strettamente positivo).

Esercizio 1.13. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico X . Supponiamo che A sia un retrato (forte) di deformazione di X . Sia $r : X \rightarrow A$ una qualsiasi retrazione (cioè $r \circ i = id_A$) dimostrare che r è una retrazione (forte) per deformazione di X su A (cioè $i \circ r \sim_A id_X$).

Esercizio 1.14. Dimostrare che il bicchiere vuoto A è un retrato forte di deformazione del bicchiere pieno X . In termini matematici dimostrare che $A = (D^2 \times \{0\}) \cup S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ è un retrato forte di deformazione di $X = D^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.15. Dare un esempio di un sottoinsieme di uno spazio topologico che sia un retratto di deformazione ma non un retratto forte di deformazione. (Suggerimento: sia Y lo spazio descritto nell'Osservazione A.1.3 dell'Appendice A e sia $P_0 = (0, 1)$. Supponiamo che esista un'applicazione continua $F : Y \times I \rightarrow Y$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = P_0$, $F(P_0, t) = P_0$ per ogni $t \in I$ e per ogni $x \in Y$. Consideriamo il punto P_n di coordinate $P_n = (\frac{1}{n}, 1)$. Ovviamente $P_n \rightarrow P_0$. Per ogni n esiste un $t_n \in I$ tale che $y(F(P_n, t_n)) = 0$, dove $y(P)$ denota l'ordinata del punto P (infatti consideriamo l'arco $F(P_n, t)$, quest'arco soddisfa $F(P_n, 0) = P_n$ e $F(P_n, 1) = P_0$ e dato che il punto P_0 rimane fisso dovrà esistere un tale t_n). Ma allora essendo I compatto esisterà una sottosuccessione, chiamiamola ancora t_n , che converge ad un punto $t_0 \in I$. Segue che $(P_n, t_n) \rightarrow (P_0, t_0)$ e quindi $0 = y(F(P_n, t_n)) \rightarrow y(F(P_0, t_0)) = y(P_0) = 1 \neq 0$ che è assurdo.)

Capitolo 2

Il gruppo fondamentale

2.1 Prodotto di archi

Siano $f, g : I \rightarrow X$ due archi in uno spazio topologico X , tali che $f(1) = g(0)$. Il loro prodotto (o concatenazione) è l'arco $f \cdot g : I \rightarrow X$ definito come:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

La continuità dell'applicazione $f \cdot g : I \rightarrow X$ segue dal lemma di incollamento (cfr. [7]). Due archi $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sono omotopi relativamente al sottoinsieme $\{0, 1\} \subset I$ se esiste un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ ossia un'applicazione continua

$$F : I \times I \rightarrow X, (t, s) \mapsto F(t, s)$$

tale che $F(t, 0) = f_0(t)$, $F(t, 1) = f_1(t)$, $F(0, s) = f_0(0)$, $F(1, s) = f_0(1)$ per ogni $s \in I$. Quindi, necessariamente il punto iniziale e il punto finale degli archi f_0 e f_1 coincidono, cioè $f_0(0) = f_1(0)$ e $f_0(1) = f_1(1)$.

Notiamo che, a differenza del capitolo precedente, stiamo usando il parametro s come parametro della deformazione (ossia come tempo) e t come parametro degli archi.

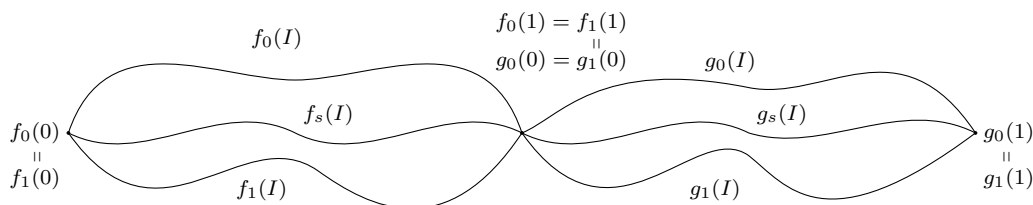
Da ora in poi diremo che due archi f_0 e f_1 tali che $f_0(0) = f_1(0)$ e $f_0(1) = f_1(1)$ sono **equivalenti** se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$ e scriveremo $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$. Scriveremo $f_0 \sim_{\{0,1\},F} f_1$ quando vorremo sottolineare l'omotopia F relativa a $\{0, 1\}$ tra f_0 e f_1 . Dato un arco $f : I \rightarrow X$ denoteremo con $[f]$ la classe di equivalenza relativa alla relazione d'equivalenza definita da $\sim_{\{0,1\}}$, cioè dato un arco $g : I \rightarrow X$ ($g(0) = f(0)$, $g(1) = f(1)$) $g \in [f]$ se e solo se $g \sim_{\{0,1\}} f$.

Il seguente lemma mostra che la concatenazione conserva l'omotopia tra archi.

Lemma 2.1.1. *Sia X uno spazio topologico e siano $f_0, f_1, g_0, g_1 : I \rightarrow X$ quattro archi tali che $f_1(1) = g_0(0)$. Supponiamo che $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$ e $g_0 \sim_{\{0,1\}} g_1$. Allora $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdot g_1$.*

Dimostrazione: Sia F un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra f_0 e f_1 e sia G un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra g_0 e g_1 . Definiamo

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Allora H è continua per il lemma di incollamento. Inoltre, si verifica immediatamente, che $H(t, 0) = (f_0 \cdot g_0)(t)$, $H(t, 1) = (f_1 \cdot g_1)(t)$ e che $H(0, s) = F(0, s)$ e $H(1, s) = G(1, s)$ non dipendono da s . Segue che $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\}, H} f_1 \cdot g_1$. \square

Dal lemma otteniamo che se f e g sono due archi in X tali che $f(1) = g(0)$, possiamo definire un “prodotto”

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g] \quad (2.2)$$

tra le rispettive classi di equivalenza. Notiamo che il primo “ \cdot ” è il prodotto che stiamo definendo mentre il secondo “ \cdot ” denota la concatenazione tra f e g . Le principali proprietà di questo prodotto sono riassunte nel seguente teorema.

Teorema 2.1.2. *Siano $f, g, h : I \rightarrow X$ tre archi in uno spazio topologico X tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Sia $x = f(0)$ e $y = f(1)$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$ (associatività);
2. $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f]$, $[f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$ (elemento neutro sinistro e destro);
3. $[f] \cdot [i(f)] = [\epsilon_x]$, $[i(f)] \cdot [f] = [\epsilon_y]$ (inverso sinistro e destro),

dove ϵ_x (risp. ϵ_y) è l'arco costante e $i(f) : I \rightarrow X$ è l'arco definito da $i(f)(t) = f(1 - t)$ (che inizia in y e finisce in x).

Osservazione 2.1.3. Se $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sono due archi in uno spazio topologico X allora $f_0 \sim_{\{0,1\}, F} f_1$ se e solo se $i(f_0) \sim_{\{0,1\}, G} i(f_1)$, dove $G(t, s) = F(1 - t, s)$. Quindi, per un arco $f : I \rightarrow X$, la classe $[i(f)]$ in 3. è ben definita.

Osservazione 2.1.4. Il teorema precedente mostra che il prodotto definito in (2.2) soddisfa proprietà simili a quelle di un gruppo. Bisogna però fare attenzione che non si tratta di un gruppo in quanto il prodotto ha senso solo tra classi di equivalenza di archi f e g che soddisfano la condizione $f(1) = g(0)$ (cioè l'arco g inizia dove finisce l'arco f); si noti inoltre che l'elemento neutro sinistro è diverso da quello destro.

Dimostrazione: Nella dimostrazione del teorema faremo uso dei tre seguenti fatti (2.3), (2.4) e (2.5) la cui verifica è lasciata allo studente (cfr. Esercizio 2.1). Siano $f, g : I \rightarrow X$ due archi tali che $f(1) = g(0)$ e $k \in C(X, Y)$. Allora

$$k \circ (f \cdot g) = (k \circ f) \cdot (k \circ g) \quad (2.3)$$

e

$$k \circ (i(f)) = i(k \circ f). \quad (2.4)$$

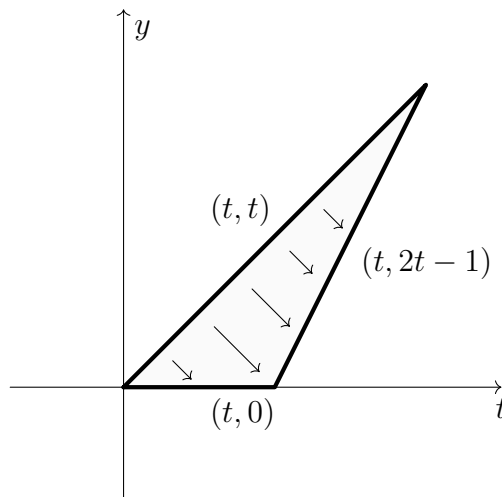
Se $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sono due archi e $k \in C(X, Y)$ tali che $f_0 \sim_{\{0,1\},F} f_1$, allora

$$(k \circ f_0) \sim_{\{0,1\},k \circ F} (k \circ f_1). \quad (2.5)$$

Iniziamo a dimostrare la 2. Sia $\epsilon_0 : I \rightarrow I$ l'arco costante, $\epsilon_0(t) = 0, \forall t \in I$, e sia $\text{id} : I \rightarrow I$ l'applicazione identica, $\text{id}(t) = t$ per ogni $t \in I$. Allora

$$\epsilon_0 \cdot \text{id} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un arco che congiunge $(\epsilon_0 \cdot \text{id})(0) = 0$ con $(\epsilon_0 \cdot \text{id})(1) = 1$.



Siccome I è convesso $\text{id} \sim_{\{0,1\},G} (\epsilon_0 \cdot \text{id})$, cioè esiste un'omotopia $G : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0, 1\}$ tra id e $\epsilon_0 \cdot \text{id}$ ¹. Dalla (2.3) si ha

$$f \circ (\epsilon_0 \cdot \text{id}) = (f \circ \epsilon_0) \cdot (f \circ \text{id}) = \epsilon_x \cdot f, \quad x = f(0),$$

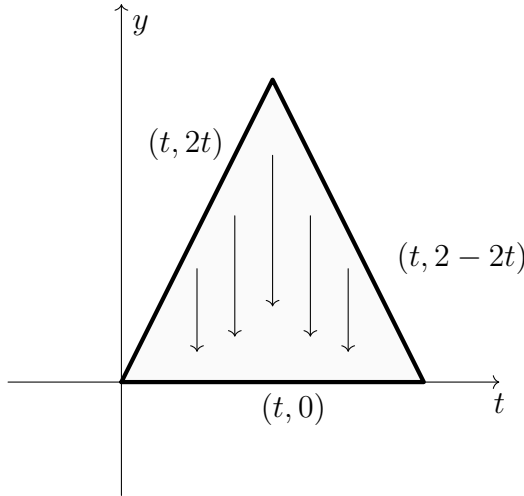
e applicando la (2.5) a $\text{id} \sim_{\{0,1\},G} (\epsilon_0 \cdot \text{id})$ si ottiene

$$f \sim_{\{0,1\},F} (\epsilon_x \cdot f),$$

dove $F = f \circ G$.² Quindi $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f]$. La dimostrazione che $(f \cdot \epsilon_y) \sim_{\{0,1\}} f$, cioè $[f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$, si ottiene in modo simile considerando l'arco costante $\epsilon_1 : I \rightarrow I$ usando $\text{id} \sim_{\{0,1\}} (\text{id} \cdot \epsilon_1)$ la quale induce un'omotopia $f \sim_{\{0,1\}} (f \cdot \epsilon_y)$.

Dimostriamo la 3. Ci limitiamo anche a dimostrare che $(f \cdot i(f)) \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$ (cioè $[f][i(f)] = [\epsilon_x]$) l'uguaglianza $[i(f)] \cdot [f] = \epsilon_y$ seguirà in modo del tutto simile. Consideriamo la concatenazione tra id e $i(\text{id})$, cioè

$$(\text{id} \cdot i(\text{id}))(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2t & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Questo rappresenta un laccio in I di base 0 che è quindi omotopo (sempre perché I è convesso) tramite un'omotopia $H : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0, 1\}$ all'arco costante

¹Un esempio di tale omotopia è l'omotopia lineare (cfr. Esempio 1.1.1 del Capitolo 1)

$$G(t, s) = (1-s)\text{id}(t) + s(\epsilon_0 \cdot \text{id})(t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1-s)t + s(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

²Possiamo scrivere una tale omotopia $F = f \circ G : I \times I \rightarrow X$ esplicitamente come:

$$F(t, s) = \begin{cases} f((1-s)t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f((1-s)t + s(2t-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$\epsilon_0 : I \rightarrow I$, cioè $(\text{id} \cdot i(\text{id})) \sim_{\{0,1\},H} \epsilon_0$ (lasciamo allo studente il compito di scrivere una tale omotopia H esplicitamente). Dalla (2.3) e (2.4) si ha

$$f \circ (\text{id} \cdot i(\text{id})) = (f \circ \text{id}) \cdot (f \circ i(\text{id})) = (f \circ \text{id}) \cdot (i(f \circ \text{id})) = f \cdot i(f)$$

e applicando la (2.5) a $(\text{id} \cdot i(\text{id})) \sim_{\{0,1\},H} \epsilon_0$ e usando il fatto che $\epsilon_x = f \circ \epsilon_0$ si ottiene $f \cdot i(f) \sim_{\{0,1\},F} \epsilon_x$, dove $F = f \circ H$ (lo studente è invitato a scrivere una tale F esplicitamente).

Infine dimostriamo la 1., cioè l'associatività à. Introduciamo qualche terminologia. Dati $[a, b]$ e $[c, d]$ in $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ definiamo **l'applicazione lineare positiva da $[a, b]$ in $[c, d]$** come l'applicazione

$$L_{[a,b],[c,d]} : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

della forma

$$L_{[a,b],[c,d]}(t) = mt + q, \quad m > 0,$$

tale che $L_{[a,b],[c,d]}(a) = c$ e $L_{[a,b],[c,d]}(b) = d$ (un'espressione esplicita è $L_{[a,b],[c,d]}(t) = \frac{d-c}{b-a}(t-a) + c$, il cui grafico è l'equazione della retta che passa per i punti (a, c) e (b, d)). La composizione di applicazioni lineari positive è ancora un'applicazione lineare positiva, più precisamente:

$$L_{[a,b],[e,f]} = L_{[c,d],[e,f]} \circ L_{[a,b],[c,d]}.$$

Per esempio, con questa terminologia, possiamo interpretare la concatenazione (2.1) $f \cdot g : I \rightarrow X$ tra due archi $f, g : I \rightarrow X$, $f(1) = g(0)$ nel seguente modo: $f \cdot g$ nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ è l'applicazione lineare positiva da $[0, \frac{1}{2}]$ a $[0, 1]$ ($L_{[0,\frac{1}{2}],[0,1]}(t) = 2t$) seguita da f , mentre $f \cdot g$ nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ è l'applicazione lineare positiva da $[\frac{1}{2}, 1]$ a $[0, 1]$ ($L_{[\frac{1}{2},1],[0,1]}(t) = 2t - 1$) seguita da g ; in simboli:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(L_{[0,\frac{1}{2}],[0,1]}(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(L_{[\frac{1}{2},1],[0,1]}(t)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Siano ora $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a < b < 1$ e $f, g, h : I \rightarrow X$ tre archi tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Definiamo un arco $K_{a,b}(f, g, h) : I \rightarrow X$ nel seguente modo:

$$K_{a,b}(f, g, h)(t) = \begin{cases} f(L_{[0,a],[0,1]}(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ g(L_{[a,b],[0,1]}(t)) & \text{se } a \leq t \leq b \\ h(L_{[b,1],[0,1]}(t)) & \text{se } b \leq t \leq 1. \end{cases}$$

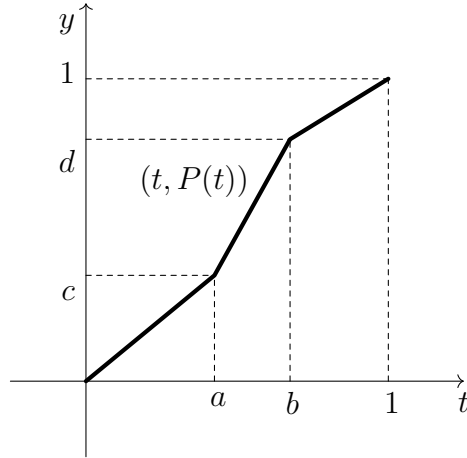
Vogliamo mostrare che

$$K_{a,b}(f, g, h) \sim_{\{0,1\}} K_{c,d}(f, g, h) \quad (2.6)$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a < b < 1$, $0 < c < d < 1$. Da questa seguirà l'associatività se si osserva che $(f \cdot g) \cdot h = K_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(f, g, h)$ e $f \cdot (g \cdot h) = K_{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}}(f, g, h)$.

Fissiamo tali a, b, c, d e sia $P : I \rightarrow I$ l'applicazione continua definita da:

$$P(t) = \begin{cases} L_{[0,a],[0,c]}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ L_{[a,b],[c,d]}(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ L_{[b,1],[d,1]}(t) & \text{se } b \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Segue immediatamente che:

$$K_{c,d}(f, g, h) \circ P = K_{a,b}(f, g, h). \quad (2.7)$$

D'altra parte P è un arco in I con estremi 0 e 1 e quindi esiste un'omotopia $G : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0, 1\}$ tra P e id , cioè $P \sim_{\{0,1\}, G} \text{id}$. Segue allora dalla (2.5) e dalla (2.7), ponendo $p = K_{c,d}(f, g, h)$, che:

$$K_{a,b}(f, g, h) = (K_{c,d}(f, g, h) \circ P) \sim_{\{0,1\}, p \circ G} (K_{c,d}(f, g, h) \circ \text{id}) = K_{c,d}(f, g, h)$$

la quale dimostra la (2.6) e conclude la dimostrazione del teorema. \square

La dimostrazione dell'associatività nel teorema precedente ci permette di ottenere anche il seguente risultato.

Teorema 2.1.5. *(del minestrone omotopico) Sia $f : I \rightarrow X$ un arco in uno spazio topologico X . Siano $a_0, a_1, \dots, a_q \in I$, $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_q = 1$. Per ogni $\alpha = 1, \dots, q$ sia $f_\alpha : I \rightarrow X$ l'arco definito da:*

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha).$$

Allora $[f] = [f_1] \cdots [f_q]$ o, equivalentemente, $f \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots f_q$.

2.2 Il gruppo fondamentale

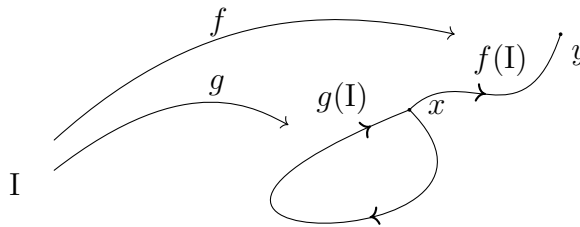
Sia X uno spazio topologico. Un arco $f : I \rightarrow X$ è detto **arco chiuso** o **laccio di base** x se $f(0) = f(1) = x$. Ricordiamo che due archi chiusi f e g di base x ($f(0) = f(1) = x = g(0) = g(1)$) sono equivalenti se $f \sim_{\{0,1\}} g$. Come nel paragrafo precedente indicheremo con $[f]$ la classe di equivalenza dell'arco chiuso f rispetto a questa relazione di equivalenza. Segue immediatamente dal Teorema 2.1.2 che l'insieme delle classi di equivalenza dei lacci chiusi di base x nello spazio topologico X con il prodotto dato da (2.2) ha la struttura di gruppo (cfr. l' Osservazione 2.1.4). Questo gruppo, denotato con $\pi_1(X, x)$, si chiama il **gruppo fondamentale** di X basato nel punto x (x viene anche detto **punto base**). Il gruppo $\pi_1(X, x)$ viene anche chiamato il **primo gruppo di omotopia** o **gruppo di Poincaré** in onore del suo inventore.

Osservazione 2.2.1. Visto che l'intervallo I con gli estremi identificati è omeomorfo al cerchio S^1 allora $\pi_1(X, x)$ può essere descritto anche come l'insieme delle classi di equivalenza delle applicazioni continue da S^1 a X che mandano il punto $(1, 0) \in S^1$ nel punto x e dove due applicazioni sono equivalenti se sono omotope relativamente al punto $(1, 0)$ (cfr. Esercizio 2.2).

Sia X uno spazio topologico e $x, y \in X$ due punti distinti. Non esiste in generale un legame tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$. Tuttavia vale il seguente risultato:

Proposizione 2.2.2. *Se esiste un arco che unisce x e y allora $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ sono gruppi isomorfi.*

Dimostrazione: Sia $f : I \rightarrow X$ un arco che congiunge $f(0) = x$ a $f(1) = y$ e sia $g : I \rightarrow X$ un laccio di base x . Allora $i(f) \cdot g \cdot f$ (dove $i(f)(t) = f(1 - t)$) definisce un laccio di base y .



Definiamo:

$$u_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), \quad u_f([g]) = [i(f) \cdot g \cdot f] \quad (2.8)$$

e osserviamo che u_f è ben definita: infatti segue dal Lemma 2.1.1 che se $g \sim_{\{0,1\}} g'$ allora $(i(f) \cdot g \cdot f) \sim_{\{0,1\}} (i(f) \cdot g' \cdot f)$. Si verifica facilmente che u_f è un omomorfismo

di gruppi. Infatti se $[g], [h] \in \pi_1(X, x)$ allora, ancora per il Lemma 2.1.1, si ottiene

$$\begin{aligned} u_f([g] \cdot [h]) &= u_f([g \cdot h]) = [i(f) \cdot g \cdot h \cdot f] = [i(f) \cdot g \cdot f \cdot i(f) \cdot h \cdot f] \\ &= [i(f) \cdot g \cdot f] \cdot [i(f) \cdot h \cdot f] = u_f([g]) \cdot u_f([h]). \end{aligned}$$

Inoltre u_f è invertibile. La sua inversa è data da

$$u_{i(f)} : \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x), \quad u_{i(f)}([k]) = [f \cdot k \cdot i(f)], \quad \forall [k] \in \pi_1(X, y),$$

come si verifica facilmente. Quindi u_f definisce un isomorfismo tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$. \square

Corollario 2.2.3. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Allora $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ sono isomorfi per ogni coppia di punti $x, y \in X$.*

In virtù del corollario precedente se X è connesso per archi useremo la notazione $\pi_1(X)$ per indicare il gruppo fondamentale di X .

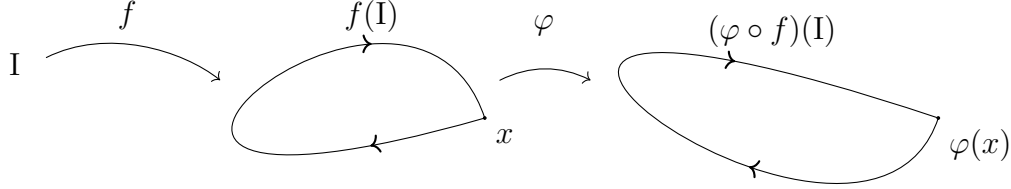
Osservazione 2.2.4. Se non esiste un arco che unisce x e y i gruppi fondamentali $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ potrebbero non essere isomorfi. Per esempio sia $X = S^1 \cup \{(-2, 0)\}$ il sottospazio di \mathbb{R}^2 dato da l'unione del cerchio unitario e del punto $(-2, 0)$. Allora $\pi_1(X, (-2, 0))$ è il gruppo banale mentre (dimostriamo nel prossimo capitolo che) $\pi_1(X, (1, 0)) = \mathbb{Z}$. Anche se lo spazio X è connesso (ma non connesso per archi) il gruppo fondamentale può dipendere dal punto scelto (vedi Esercizio 2.4). Osserviamo inoltre che se lo spazio X è connesso per archi l'isomorfismo u_f (2.8) della Proposizione 2.2.2 non è canonico, ovvero dipende dall'arco f . In effetti si riesce a dimostrare che l'isomorfismo u_f non dipende dall'arco f se e solo se $\pi_1(X, x)$ è abeliano (cfr. l'Esercizio 2.6).

2.3 Omomorfismo indotto da un'applicazione continua

Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici X e Y e sia $x \in X$. Se f è un laccio di base x in X allora $\varphi \circ f$ è un laccio di base $\varphi(x)$ in Y . Inoltre segue dalla (2.5) che se f_0 e f_1 sono due lacci di base x tali che $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$ allora $(\varphi \circ f_0) \sim_{\{0,1\}} (\varphi \circ f_1)$. Quindi l'applicazione

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)), \quad \varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

è ben definita.



Si verifica facilmente che φ_* è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per ogni $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ si ha:

$$\varphi_*([f] \cdot [g]) = \varphi_*([f \cdot g]) = [\varphi \circ (f \cdot g)] = [(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \cdot \varphi_*([g]).$$

Dato $x \in X$, l'omomorfismo φ_* si chiama l'**omomorfismo indotto** da φ sui gruppi fondamentali $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(Y, \varphi(x))$. Le principali proprietà di quest'omomorfismo sono riassunte nel seguente:

Teorema 2.3.1. *Siano X, Y e Z spazi topologici, $\varphi \in C(X, Y)$ e $\psi \in C(Y, Z)$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$;
2. $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$, per ogni $x \in X$;
3. se φ è un omeomorfismo con inversa $\psi : Y \rightarrow X$ allora, per ogni $x \in X$, $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo con inversa $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, x)$.

Dimostrazione: Sia $[f] \in \pi_1(X, x)$. Allora

$$(\psi \circ \varphi)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi \circ (\varphi \circ f)] = \psi_*([\varphi \circ f]) = \psi_*(\varphi_*([f])) = (\psi_* \circ \varphi_*)([f])$$

e

$$(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f].$$

le quali mostrano la 1. e la 2. Per dimostrare la 3: applichiamo la 1. e la 2. alle uguaglianze $\psi \circ \varphi = id_X$ e $\varphi \circ \psi = id_Y$ e otteniamo che, per ogni $x \in X$,

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$$

e

$$\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y, \varphi(x))}.$$

Quindi $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, x)$ è l'inversa di $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ e questo conclude la dimostrazione del punto 3. e del teorema. \square

2.4 Invarianza omotopica del gruppo fondamentale

In questo paragrafo studieremo gli omomorfismi indotti da applicazioni continue che sono omotope.

Lemma 2.4.1. *Siano X e Y due spazi topologici e siano $\varphi, \psi \in C(X, Y)$. Se $\varphi \sim_F \psi$ allora, per ogni $x \in X$, il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x)) \\ & \searrow \psi_* & \downarrow u_f \\ & & \pi_1(Y, \psi(x)) \end{array}$$

dove $u_f : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x))$ è l'isomorfismo (cfr. (2.8)) associato all'arco $f : I \rightarrow Y$ di estremi $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ definito da $f(t) := F(x, t)$.

Dimostrazione: Vogliamo mostrare che per ogni laccio g in X di base x

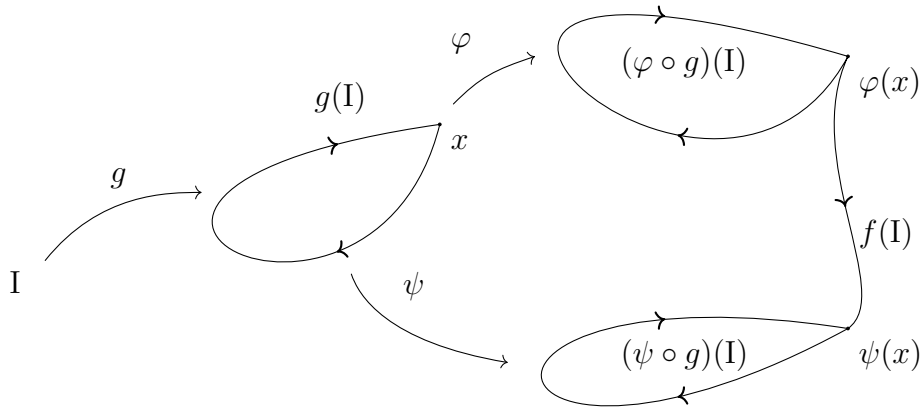
$$[\psi \circ g] = \psi_*([g]) = u_f(\varphi_*([g])) = [i(f) \cdot (\varphi \circ g) \cdot f]$$

o, equivalentemente,

$$(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\psi \circ g).$$

Osserviamo che $\psi \circ g : I \rightarrow Y$ è un arco chiuso di base $\psi(x)$. Sarà quindi sufficiente mostrare (per il Teorema 2.1.2) che

$$(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$$



Osserviamo che

$$((i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f)(t) = \begin{cases} f(1-4t) = F(x, 1-4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\varphi \circ g)(4t-1) = F(g(4t-1), 0) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) = F(x, 2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$((\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)})(t) = \begin{cases} \psi(x) = F(x, 1) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\psi \circ g)(4t-1) = F(g(4t-1), 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(x) = F(x, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica allora facilmente che l'applicazione

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x, (1-4t)(1-s) + s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), s) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, (2t-1)(1-s) + s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definisce un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f$ e $(\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$.

□

Una conseguenza notevole della proposizione precedente è il seguente:

Teorema 2.4.2. (*invarianza omotopica del gruppo fondamentale*) Siano X e Y due spazi topologici e $\varphi : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo, per ogni $x \in X$.

Dimostrazione: Sia $\psi : Y \rightarrow X$ tale che $\varphi \circ \psi \sim \text{id}_Y$ e $\psi \circ \varphi \sim \text{id}_X$. Sia $y \in Y$, allora per il Lemma 2.4.1 esiste un arco $f : I \rightarrow Y$ di estremi $\varphi(\psi(y))$ e y tale che

$$u_f \circ (\varphi \circ \psi)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y)}.$$

Siccome u_f è un isomorfismo segue che $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo e che quindi ψ_* è iniettiva e φ_* è suriettiva. In modo analogo si dimostra che $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ è un isomorfismo e che quindi ψ_* è suriettiva e φ_* è iniettiva.

□

Combinando il Teorema 2.4.2 con il Corollario 2.2.3 e l'Esercizio 1.5 del Capitolo 1 si ottengono i due corollari seguenti.

Corollario 2.4.3. Siano X e Y due spazi topologici con X connesso per archi. Supponiamo che X e Y siano omotopicamente equivalenti. Allora Y è connesso per archi e $\pi_1(X)$ è isomorfo a $\pi_1(Y)$.

Corollario 2.4.4. *Sia X uno spazio topologico contraibile allora $\pi_1(X)$ è il gruppo banale.*

Uno spazio topologico X si dice **semplicemente connesso** se X è connesso per archi e se $\pi_1(X)$ è il gruppo banale. Quindi uno spazio contraibile è semplicemente connesso. Possiamo esprimere la semplice connessione di uno spazio X in quattro modi equivalenti. Questo è espresso nel lemma seguente la cui dimostrazione è lasciata come esercizio allo studente (cfr. Esercizio 2.3).

Lemma 2.4.5. *Sia X uno spazio topologico. Allora i seguenti fatti sono equivalenti.*

- (a) X è semplicemente connesso;
- (b) X è connesso per archi e per ogni coppia di archi $f, g : I \rightarrow X$ tali che $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$ si ha che $f \sim_{\{0,1\}} g$;
- (c) X è connesso per archi e ogni applicazione continua $f : S^1 \rightarrow X$ è omotopa ad un'applicazione costante³;
- (d) X è connesso per archi e ogni applicazione continua $f : S^1 \rightarrow X$ ammette un'estensione continua $g : D^2 \rightarrow X$.

2.5 Il gruppo fondamentale della sfera

In questo paragrafo mostreremo il seguente:

Teorema 2.5.1. *La sfera n -dimensionale S^n è semplicemente connessa per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione: Dal corso di topologia generale sappiamo che S^n è connessa per archi quindi ci rimane da dimostrare che il suo gruppo fondamentale $\pi_1(S^n, x)$ è il gruppo banale per $x \in S^n$. Per il Corollario 2.2.3 possiamo assumere che x sia diverso dal polo nord $N = (0, 0, \dots, 1)$ e dal polo sud $S = (0, 0, \dots, -1)$. Sia $f : I \rightarrow S^n$, $f(0) = f(1) = x$, un laccio di base x . Mostreremo che esiste un laccio $g : I \rightarrow S^n$ di base x tale che $N \notin g(I)$ e $g \sim_{\{0,1\}} f$. L'esistenza di un tale laccio e il fatto che $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso implicherà allora che $f \sim_{\{0,1\}} g \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$ e quindi $\pi_1(S^n, x)$ è banale. L'arco g si ottiene a partire da f come segue. Sia $\{U, V\}$ il ricoprimento aperto di S^n dato da $U = S^n \setminus \{N\}$ e $V =$

³Intuitivamente quest'affermazione può esprimersi dicendo che ogni laccio in X può essere deformato con continuità al suo punto base.

$S^n \setminus \{S\}$. Esiste una suddivisione di I , a_0, a_1, \dots, a_q , $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_q = 1$ con la seguente proprietà: dato $\alpha = 1, 2, \dots, q$, $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$ è contenuto in U o in V . Infatti, se $\delta > 0$ è il numero di Lebesgue (vedi Appendice C) associato al ricoprimento aperto di I dato da $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$, è sufficiente prendere gli a_α tali che $a_\alpha - a_{\alpha-1} < \delta$, $\alpha = 1, 2, \dots, q$.

Possiamo anche assumere, eliminando eventualmente qualche a_α dalla suddivisione di I , che $f(a_\alpha) \in U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}$, per ogni $\alpha = 1, \dots, q-1$ (per a_q questo è automatico in quanto $f(a_q) = x \in U \cap V$). Sia infatti $\alpha = 1, \dots, q-1$ tale che $f(a_\alpha)$ appartiene a U ma non a V (lo stesso ragionamento si applica se $f(a_\alpha) \in V$ e $f(a_\alpha) \notin U$) allora $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha]) \subseteq U$ e $f([a_\alpha, a_{\alpha+1}]) \subseteq U$. Quindi $f([a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1}]) \subseteq U$ e possiamo quindi eliminare il punto a_α dalla suddivisione di I . Sia ora $f_\alpha : I \rightarrow S^n$ l'arco definito da:

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Se per ogni α , $f_\alpha(I) = f([a_{\alpha-1}, a_\alpha]) \subseteq U$ allora $f(I) \subseteq U$ e quindi è sufficiente definire $g = f$. Supponiamo invece che esista α , $\alpha = 1, \dots, q$, tale che $N \in f_\alpha(I)$. Segue che $f_\alpha(I) \subseteq V$. Sia $g_\alpha : I \rightarrow V$ un arco tale che $g_\alpha(0) = f_\alpha(0)$, $g_\alpha(1) = f_\alpha(1)$ e $N \notin g_\alpha(I)$. Un tale arco esiste in quanto $f_\alpha(0) = f(a_{\alpha-1})$ e $f_\alpha(1) = f(a_\alpha)$ appartengono a $U \cap V = V \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ che è connesso per archi per $n \geq 2$. Allora $g_\alpha \sim_{\{0,1\}} f_\alpha$ in quanto $V \cong \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso (per (a) del Lemma 2.4.5). Segue allora dal Lemma 2.1.1 e dal Teorema 2.1.5 che

$$f \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots f_\alpha \cdots f_q \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots g_\alpha \cdots f_q.$$

Applicando lo stesso ragionamento a tutti gli f_α , $\alpha = 1, \dots, q$, tali che $N \in f_\alpha(I)$ si ottiene il laccio g desiderato. \square

Osservazione 2.5.2. La costruzione del laccio g (tale che $N \notin g(I)$) nella dimostrazione del teorema è inevitabile. Infatti esistono lacci $f : I \rightarrow S^n$ tali che $f(0) = f(1) = x$ e $f(I) = S^n$. Un tale laccio può essere costruito come segue. Sia $p : I \rightarrow I^2$ la curva di Peano descritta in Appendice D, cioè $p : I \rightarrow I^2$ è un arco in I^2 tale che $p(I) = I^2$. Consideriamo l'applicazione

$$p \times p : I^2 \rightarrow I^4 : (t, s) \mapsto (p(t), p(s)).$$

Segue che

$$p_2 = (p \times p) \circ p : I \rightarrow I^2 \times I^2 = I^4,$$

soddisfa $p_2(I) = I^4$. Iterando questo procedimento possiamo trovare s naturale tale che $2^s \geq n$ e un arco suriettivo $p_s : I \rightarrow I^{2^s}$. Sia $q : I^{2^s} \rightarrow I^n$ la proiezione

naturale e $\pi : I^n \cong D^n \rightarrow S^n = D^n/S^{n-1}$ l'identificazione (suriettiva) data dal Corollario B.3.3 della Appendice B.3. Allora $k := \pi \circ q \circ p_s : I \rightarrow S^n$ è un'applicazione continua e suriettiva. Se $k(0) = k(1)$ abbiamo finito ponendo $f = k$. Altrimenti consideriamo $h : I \rightarrow S^n$ un arco tale che $h(0) = k(1)$ e $h(1) = k(0)$ (h esiste perché S^n è connessa per archi) e la concatenazione $f = h \cdot k : I \rightarrow S^n$ è un arco chiuso di base $x = h(0)$ tale che $f(I) = S^n$.

Corollario 2.5.3. *Sia $n \geq 3$ allora $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso.*

Dimostrazione: La sfera S^{n-1} è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ per ogni $n \geq 1$ (cfr. Esempio 1.4.8). Il risultato segue allora dal Teorema 2.5.1 e dal Corollario 2.4.3. \square

2.6 Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi

Teorema 2.6.1. *(gruppo fondamentale del prodotto) Siano X e Y due spazi topologici connessi per archi. Allora il gruppo fondamentale del prodotto $X \times Y$ è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali di X e Y .*

Nell'enunciato del teorema non stiamo specificando nessun punto base in quanto gli spazi X e Y (e quindi $X \times Y$) sono connessi per archi.

Dimostrazione: Siano $p : X \times Y \rightarrow X$ e $q : X \times Y \rightarrow Y$ le proiezioni canoniche, $x \in X$ e $y \in Y$. Definiamo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y), \quad \Phi([f]) := (p_*([f]), q_*([f])).$$

Mostriamo che Φ è suriettiva. Sia $([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ e sia $f : I \rightarrow X \times Y$, $f(t) := (f_1(t), f_2(t))$, dove f_1 e f_2 sono due rappresentanti delle classi $[f_1]$ e $[f_2]$ rispettivamente. Segue che:

$$\Phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([f_1], [f_2]).$$

Per dimostrare che Φ è iniettiva supponiamo che $\Phi([f]) = \Phi([g])$. Allora $[p \circ f] = [p \circ g]$ e $[q \circ f] = [q \circ g]$. Equivalentemente $(p \circ f) \sim_{\{0,1\}, F_1} (p \circ g)$ e $(q \circ f) \sim_{\{0,1\}, F_2} (q \circ g)$, dove $F_1 : I \times I \rightarrow X$ (risp. $F_2 : I \times I \rightarrow Y$) è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $p \circ f$ e $p \circ g$ (risp. $q \circ f$ e $q \circ g$). Segue allora che $f \sim_{\{0,1\}, F} g$ dove $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ è definita da $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$.

Infine dimostriamo che Φ è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, x \times y)$ si ha:

$$\begin{aligned}\Phi([f] \cdot [g]) &= \Phi([f \cdot g]) = (p_*([f \cdot g]), q_*([f \cdot g])) = (p_*([f]) \cdot p_*([g]), q_*([f]) \cdot q_*([g])) \\ &= (p_*([f]), q_*([f])) \cdot (p_*([g]), q_*([g]))\end{aligned}$$

dove “ \cdot ” nell’ultima riga rappresenta il prodotto del prodotto diretto in $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. \square

2.7 Un cenno sui gruppi di omotopia

Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Come suggerito dalla notazione $\pi_1(X, x)$, il gruppo fondamentale appartiene ad una successione di gruppi $\pi_n(X, x)$ associati ad uno spazio topologico X , che misurano in un certo senso i “buchi n -dimensionali” dello spazio X .

Dato n numero intero positivo (eventualmente nullo) sia $I^n = I \times \cdots \times I$ e ∂I^n la sua frontiera, cioè:

$$\partial I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid t_j \in \{0, 1\}, \text{ per qualche } j\}.$$

Per $x \in X$, denotiamo con $\pi_n(X, x)$ l’insieme delle classi di omotopia relativa a ∂I^n delle funzioni continue $f : I^n \rightarrow X$ tali che $f(\partial I^n) = x$.

Siccome I^n è omeomorfo a D^n e $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (si veda Corollario B.3.3 nell’Appendice B), possiamo equivalentemente pensare a $\pi_n(X, x)$ come l’insieme delle classi di equivalenza delle applicazioni da S^n in X che portano $(1, 0, \dots, 0)$ in x , modulo l’omotopia relativa al punto $(1, 0, \dots, 0)$ (cfr. Osservazione 2.2.1).

Il caso più semplice si ha quando $n = 0$. Dal momento che $S^0 = \{\pm 1\}$, un’applicazione da S^0 a X che manda il punto 1 nel punto base x è univocamente determinata da dove invia il punto -1 . Due applicazioni $f, g : S^0 \rightarrow X$, tali che $f(1) = g(1) = x$, sono omotope relativamente a 1 se e solo se esiste un arco in X che congiunge $f(-1)$ con $g(-1)$ cioè se e solo se $f(-1)$ e $g(-1)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di X . Non esiste una struttura di gruppo su $\pi_0(X, x)$: è solo un insieme con un elemento ben distinto e cioè la componente connessa che contiene x . Di solito il punto x viene omissso dalla notazione e si scrive $\pi_0(X)$ per denotare l’insieme delle componenti connesse per archi di X (cfr. Appendice A per maggiori dettagli sulle componenti connesse per archi). Per $n \geq 1$ possiamo definire un prodotto su $\pi_n(X, x)$ come segue (per $n = 1$ è esattamente il prodotto definito su $\pi_1(X, x)$). Se $f, g : I^n \rightarrow X$, $f(\partial I^n) =$

$g(\partial I^n) = x$ possiamo definire la loro **concatenazione** come quell'applicazione continua $f \cdot_1 g : I^n \rightarrow X$ definita da:

$$(f \cdot_1 g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

All' applicazione $f : I^n \rightarrow X$ possiamo associare $i(f) : I^n \rightarrow X$ data da

$$i(f)(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Si dimostra (analogamente a quanto fatto nel Lemma 2.1.1 e nell'Osservazione 2.1.3) che se f_0 è omotopa a f_1 relativamente a ∂I^n e g_0 è omotopa a g_1 relativamente a ∂I^n allora $f_0 \cdot_1 f_1$ è omotopa a $g_0 \cdot_1 g_1$ relativamente a ∂I^n e $i(f_0)$ è omotopa a $i(f_1)$ relativamente a ∂I^n . Resta così definito un prodotto \cdot_1 sulle classi $[f]$ e $[g]$ in $\pi_n(X, x)$ come:

$$[f] \cdot_1 [g] := [f \cdot_1 g] \quad (2.9)$$

Il seguente teorema mostra che $\pi_n(X, x)$ è un gruppo che viene chiamato **n -esimo gruppo di omotopia** dello spazio topologico X basato nel punto $x \in X$.

Teorema 2.7.1. *Supponiamo $n \geq 1$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $\pi_n(X, x)$ è un gruppo rispetto al prodotto (2.9) con elemento neutro $[\epsilon_x]$;
2. $\pi_n(X, x)$ è un gruppo abeliano per $n > 1$ ⁴;
3. se f è un arco in X che unisce x a y allora $\pi_n(X, x)$ è isomorfo a $\pi_n(X, y)$ tramite l'isomorfismo

$$u_f : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$$

definito da:

$$u_f([g]) = [i(f_1) \cdot_1 g \cdot_1 f_1],$$

dove

$$f_1 : I^n \rightarrow X, f_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_1);$$

4. per ogni $\varphi \in C(X, Y)$ resta definito un omomorfismo di gruppi (chiamato **omomorfismo indotto sull' n -esimo gruppo di omotopia**)

$$\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x)), [g] \mapsto [\varphi \circ g];$$

⁴Vedremo esempi di spazi X con gruppo fondamentale non abeliano nei capitoli successivi.

5. $\pi_n(X, x)$ è un invariante omotopico (e quindi topologico).

Dimostrazione: Le dimostrazioni di 1., 3., 4., e 5. sono analoghe a quella per il gruppo fondamentale e sono lasciate per esercizio (cfr. Esercizio 2.9). La 2., ossia l'abelianità di $\pi_n(X, x)$ per $n > 1$, si dimostra come segue. Siano $f, g : I^n \rightarrow X$, $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = x$, possiamo definire un prodotto $f \cdot_2 g : I^n \rightarrow X$ analogo a \cdot_1 che, come suggerito dalla notazione, agisce sulla seconda coordinata:

$$(f \cdot_2 g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{cases}$$

Questo prodotto (esattamente come \cdot_1) rende $\pi_n(X, x)$ un gruppo definendo il prodotto

$$[f] \cdot_2 [g] = [f \cdot_2 g], \quad (2.10)$$

Osserviamo che $[\epsilon_x]$ è l'elemento neutro per entrambe le operazioni binarie \cdot_1 e \cdot_2 su $\pi_n(X, x)$ e, non è difficile vedere che (Esercizio 2.10)

$$([f] \cdot_1 [g]) \cdot_2 ([h] \cdot_1 [k]) = ([f] \cdot_2 [h]) \cdot_1 ([g] \cdot_2 [k]), \quad \forall [f], [g], [h], [k] \in \pi_n(X, x) \quad (2.11)$$

la quale implica (Esercizio 2.11) $[f] \cdot_1 [g] = [g] \cdot_1 [f]$ per ogni $[f]$ e $[g]$. \square

Osservazione 2.7.2. Si può dimostrare che $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, per ogni $n \geq 1$, e quindi S^n non è contraibile (il caso $n = 1$ verrà trattato nel Capitolo 4). Calcolare $\pi_n(S^k)$ è molto complicato e esistono valori di k e n per i quali non si è ancora riusciti a farlo. Stranamente, esistono $n > k$ tali che il gruppo di omotopia $\pi_n(S^k)$ è diverso da zero. Per esempio si può dimostrare che $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ e quindi esistono in S^2 dei “buchi” 3-dimensionali.

2.8 Esercizi

Esercizio 2.1. Dimostrare le (2.3), (2.4) e (2.5).

Esercizio 2.2. Giustificare in dettaglio le affermazioni fatte nell'Osservazione 2.2.1.

Esercizio 2.3. Dimostrare il Lemma 2.4.5.

Esercizio 2.4. Dare un esempio di uno spazio topologico connesso X dove $\pi_1(X, x)$ dipende dal punto base $x \in X$. (Suggerimento: usare lo spazio descritto nell'Appendice A con l'aggiunta di un cerchio che passa per il punto $(0, 1)$).

Esercizio 2.5. Dimostrare che se uno spazio ha la topologia discreta allora $\pi_1(X, x) = \{1\}$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 2.6. Dimostrare che due archi $f, g : I \rightarrow X$ da x a y danno luogo allo stesso isomorfismo da $\pi_1(X, x)$ a $\pi_1(X, y)$ (cioè $u_f = u_g$) se e solo se $[g \cdot i(f)]$ appartiene al centro di $\pi_1(X, x)$. Dedurre che l'isomorfismo $u_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ (associato ad un arco f da x a y) è indipendente da f se e solo se $\pi_1(X, x)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 2.7. Dimostrare che se A è un retratto forte di deformazione di uno spazio X , allora l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$, per ogni $a \in A$.

Esercizio 2.8. Si dimostri che un retratto di uno spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso.

Esercizio 2.9. Dimostrare il Teorema 2.7.1.

Esercizio 2.10. Dimostrare la formula (2.11).

Esercizio 2.11. Sia G un insieme dotato di due operazioni binarie \cdot_1 e \cdot_2 con lo stesso elemento unità ϵ (cioè $a \cdot_1 \epsilon = \epsilon \cdot_1 a = a \cdot_2 \epsilon = \epsilon \cdot_2 a = a$, per ogni $a \in G$). Supponiamo che:

$$(a \cdot_1 b) \cdot_2 (c \cdot_1 d) = (a \cdot_2 c) \cdot_1 (b \cdot_2 d), \quad \forall a, b, c, d \in G.$$

Allora le due operazioni coincidono e sono commutative, cioè $a \cdot_1 b = a \cdot_2 b$ e $a \cdot_1 b = b \cdot_1 a$, per ogni $a, b \in G$.

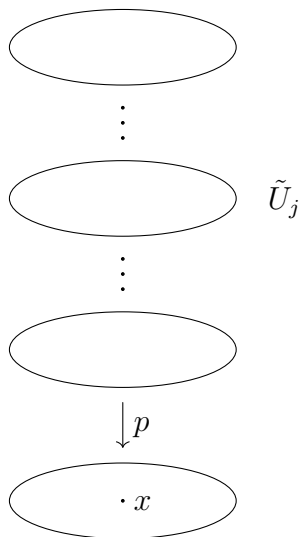
Capitolo 3

Rivestimenti

3.1 Rivestimenti

Siano \tilde{X} e X due spazi topologici. Diremo che un'applicazione continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un **rivestimento** se valgono i seguenti fatti:

1. p è suriettiva;
2. per ogni $x \in X$ esiste un aperto U di X contenente x e una famiglia $\{\tilde{U}_j\}_{j \in J}$ di aperti di \tilde{X} tali che:
 - (a) $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} \tilde{U}_j$;
 - (b) $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k = \emptyset$ per ogni $j, k \in J$ con $j \neq k$.
 - (c) $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J$.



L' applicazione $p : \tilde{X} \rightarrow X$ si chiama anche **proiezione**, X **spazio base** e \tilde{X} **spazio totale** del rivestimento. Dato $x \in X$ la sua controimmagine $p^{-1}(x)$ tramite p si chiama la **fibra** del punto x . Se le fibre $p^{-1}(x)$ hanno tutte la stessa cardinalità al variare di $x \in X$ la cardinalità della fibra viene detta **grado** del rivestimento p .

Data un'applicazione continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ diremo che un aperto $U \subseteq X$ è **ben ricoperto** da p ovvero che U è un **aperto banalizzante** per p se la controimmagine $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di \tilde{X} , ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite p . Quindi un'applicazione continua e suriettiva $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento se e solo se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ di x che sia ben ricoperto da p .

La definizione di rivestimento ha svariate applicazioni. In queste note ne vedremo alcune legate alla topologia ma il concetto di rivestimento e le sue generalizzazioni di **rivestimento ramificato** e di **fibrato**, giocano un ruolo importante sia in geometria che in topologia.

Osservazione 3.1.1. Se un aperto U è ben ricoperto da un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ allora anche un aperto V contenuto in U è ben ricoperto da p .

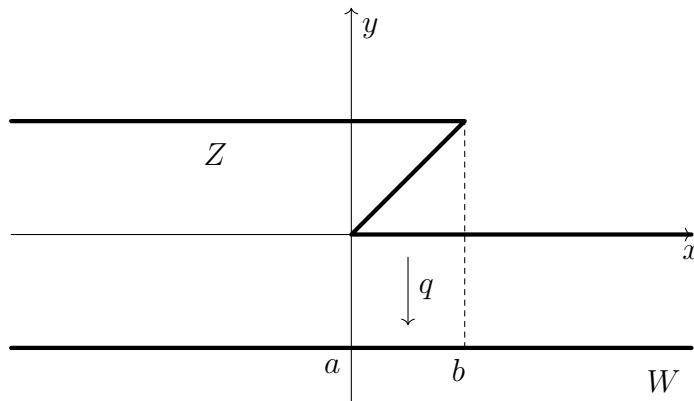
Esempio 3.1.2. Ogni omeomorfismo tra due spazi topologici è un rivestimento di grado 1.

Esempio 3.1.3. Sia Y uno spazio topologico discreto (la topologia su Y è quella discreta). Allora per ogni spazio topologico X la proiezione sul primo fattore $p : X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$ è un rivestimento. In questo caso il grado di p è uguale alla cardinalità di Y .

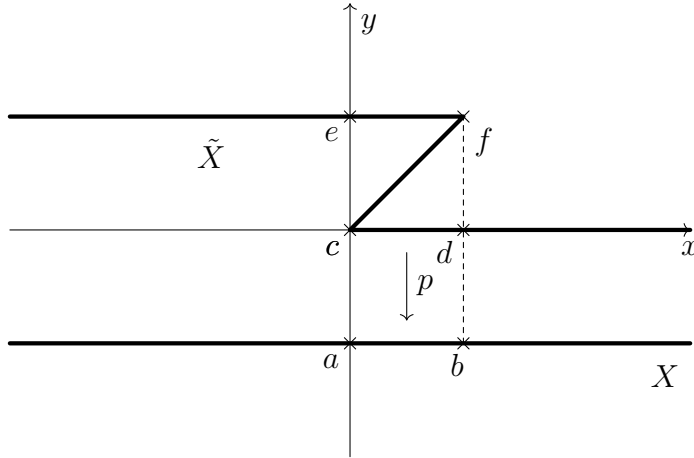
Esempio 3.1.4. Siano Z e W i sottoinsiemi dei punti (x, y) di \mathbb{R}^2 definiti da:

$$Z = \{(x, 1), x \leq 1\} \cup \{x = y | 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 0) | x \geq 0\}, \quad W = \{(x, -1) | x \in \mathbb{R}\}$$

e sia $q : Z \rightarrow W$ definita $q(x, y) = (x, -1)$.



Allora q non è un rivestimento. Infatti si verifica facilmente che non esiste un intorno aperto ben ricoperto dei punti $a = (0, -1)$ e $b = (1, -1)$. Consideriamo la restrizione $p : \tilde{X} = Z \setminus \{c, d, e, f\} \rightarrow X = W \setminus \{a, b\}$ di q a $Z \setminus \{c, d, e, f\}$, dove $c = (0, 0)$, $d = (1, 0)$, $e = (0, 1)$, $f = (1, 1)$.



Allora p è un rivestimento con spazio totale \tilde{X} e base X non connessi (\tilde{X} è costituito da 5 componenti connesse mentre X da 3). Osserviamo che in questo caso non si può parlare di grado del rivestimento p infatti la cardinalità della fibra di un punto x dipende dalla componente connessa alla quale appartiene x (è uguale a 1 per $x < a$ e $x > b$ ed è uguale a 3 per $a < x < b$).

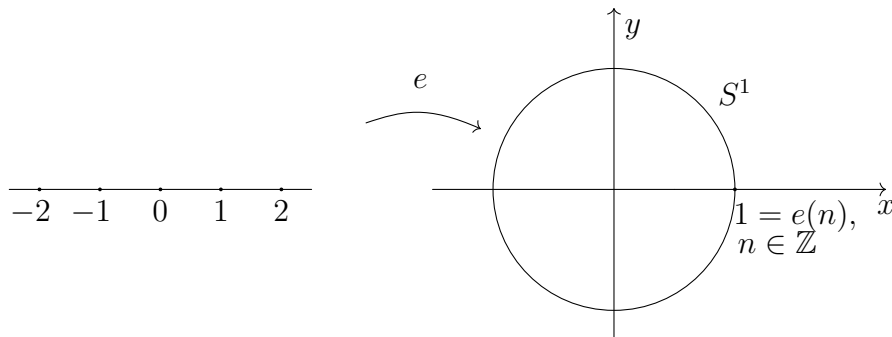
Esempio 3.1.5. Consideriamo l'applicazione continua

$$e : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t),$$

dove i denota l'unità immaginaria e stiamo pensando al cerchio unitario come

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}.$$

Intuitivamente, l'applicazione e “avvolge” la retta reale \mathbb{R} sul cerchio S^1 e durante questo processo porta l'intervallo $[n, n+1]$ su S^1 .



Vogliamo mostrare che e è un rivestimento. Ovviamente e è suriettiva. Sia $x \in S^1$ e supponiamo che $x \neq 1$. Prendiamo l'aperto $U = S^1 \setminus \{1\}$ di S^1 che contiene il punto x (nel caso $x = 1$ si prenderà, per esempio, l'aperto $V = S^1 \setminus \{-1\}$ e si procederà in modo analogo). La fibra del punto 1 è costituita da tutti gli interi, $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, inoltre

$$e^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1).$$

Quindi $e^{-1}(U)$ è l'unione disgiunta degli aperti $(n, n+1)$ di \mathbb{R} al variare di $n \in \mathbb{Z}$. L'applicazione

$$e_n := e|_{(n, n+1)} : (n, n+1) \rightarrow S^1 \setminus \{1\} = U$$

è continua e bigettiva. Inoltre e_n è un'applicazione chiusa. Infatti dato $C \subseteq (n, n+1)$ chiuso in $(n, n+1)$ allora la sua chiusura \overline{C} è un chiuso in $[n, n+1]$ e quindi compatto. Quindi la sua immagine $e(\overline{C})$ è un compatto e quindi chiuso in S^1 . Dal momento che $e_n(C) = e(\overline{C}) \cap U$ segue che $e_n(C)$ è chiuso in U . Quindi e_n è un omeomorfismo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e quindi e è un rivestimento. Il rivestimento e ha grado infinito numerabile.

3.2 Rivestimenti e omeomorfismi locali

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici X e Y . Diremo che f è un **omeomorfismo locale** se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto $A \subseteq X$ di x tale che $f(A)$ è aperto in Y e $f|_A : A \rightarrow f(A)$ è un omeomorfismo.

Le principali proprietà degli omeomorfismi locali sono riassunte nella seguente:

Proposizione 3.2.1. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo locale. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *Sia $U \subseteq X$ un aperto. Allora la restrizione $f|_U : U \rightarrow Y$ è un omeomorfismo locale;*
2. *f è un'applicazione aperta;*
3. *sia $y \in Y$ tale che $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, allora la topologia indotta da X su $f^{-1}(y)$ è quella discreta.*

Dimostrazione: Sia $x \in U$ e A un aperto di X tale che $x \in A$, $f(A)$ sia aperto in Y e $f|_A : A \rightarrow f(A)$ sia un omeomorfismo. Allora $f|_{U \cap A} : U \cap A \rightarrow f(U \cap A)$ è un omeomorfismo dall'aperto $U \cap A$ di U all'aperto $f(U \cap A)$ di $f(A)$

e quindi di Y . Questo mostra il punto 1. Per dimostrare la 2 ossia che f è aperta sia U un aperto non vuoto e $x \in U$. Essendo f un omeomorfismo locale esiste un intorno aperto A_x di x tale che $f(A_x)$ è aperto in Y e $f|_{A_x} : A_x \rightarrow f(A_x)$ è un omeomorfismo. Segue che $f|_{A_x \cap U}$ porta l'aperto $A_x \cap U$ di A_x nell'aperto $f(A_x \cap U)$ di $f(A_x)$. Siccome $f(A_x)$ è aperto in Y anche $f(A_x \cap U)$ è aperto in Y . Quindi

$$f(U) = f(\cup_{x \in U} (A_x \cap U)) = \cup_{x \in U} f(A_x \cap U)$$

è un aperto di Y e quindi f è aperta. Infine dimostriamo il punto 3. Se $f^{-1}(y) = \emptyset$ non c'è niente da dimostrare. Altrimenti sia $x \in f^{-1}(y)$. Essendo f un omeomorfismo locale esiste A un intorno aperto di x tale che $f|_A : A \rightarrow f(A)$ sia un omeomorfismo. In particolare, $f|_A$ è iniettiva e quindi $A \cap f^{-1}(y) = \{x\}$. Questo mostra che x è aperto in $f^{-1}(y)$ (nella topologia indotta da X) e che quindi la topologia di $f^{-1}(y)$ è quella discreta. \square

Il legame tra i rivestimenti e gli omeomorfismi locali è espresso dalla seguente:

Proposizione 3.2.2. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Allora p è un omeomorfismo locale e un'identificazione aperta. In particolare la fibra $p^{-1}(x)$ è discreta per ogni $x \in X$.*

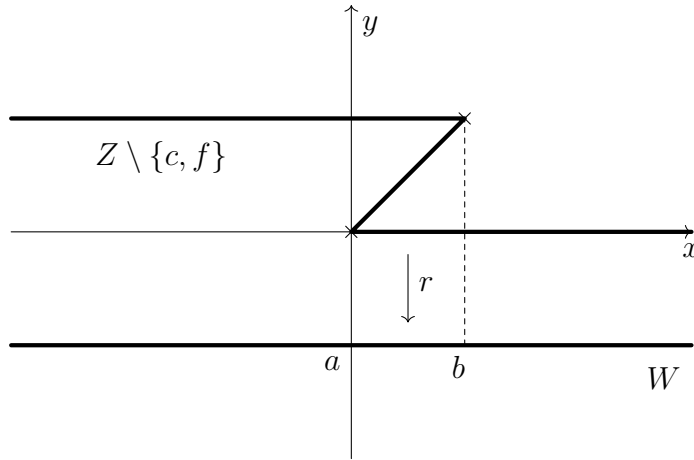
Dimostrazione: Sia \tilde{x} un punto di \tilde{X} . Allora esiste un intorno aperto U di $x = p(\tilde{x})$ in X banalizzante per p . Segue dalla definizione di rivestimento che esiste un aperto \tilde{U} di \tilde{X} che contiene \tilde{x} tale che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Essendo \tilde{x} arbitrario otteniamo che p è un omeomorfismo locale. D'altra parte per il punto 2 della Proposizione 3.2.1, p è un'applicazione aperta, e quindi, essendo continua e suriettiva, è un'identificazione. L'ultima parte segue dal punto 3 della Proposizione 3.2.1. \square

Corollario 3.2.3. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Allora p è iniettiva se e solo se p ha grado 1 se e solo se p è un omeomorfismo.*

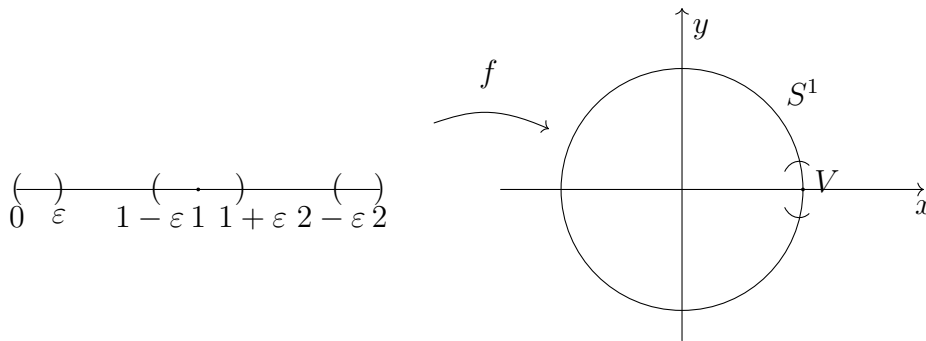
Dimostrazione: Il rivestimento p è iniettivo se e solo se la fibra di ogni suo punto ha cardinalità 1 ossia se e solo se p ha grado 1. Per la Proposizione 3.2.2 i rivestimenti sono applicazioni continue aperte e suriettive quindi sono omeomorfismi se e solo se sono applicazioni iniettive. \square

Esistono omeomorfismi locali suriettivi che non sono rivestimenti. Per esempio, consideriamo la restrizione $r = q|_{Z \setminus \{c, f\}} : Z \setminus \{c, f\} \rightarrow W$ dell'applicazione q

dell'Esempio 3.1.4.



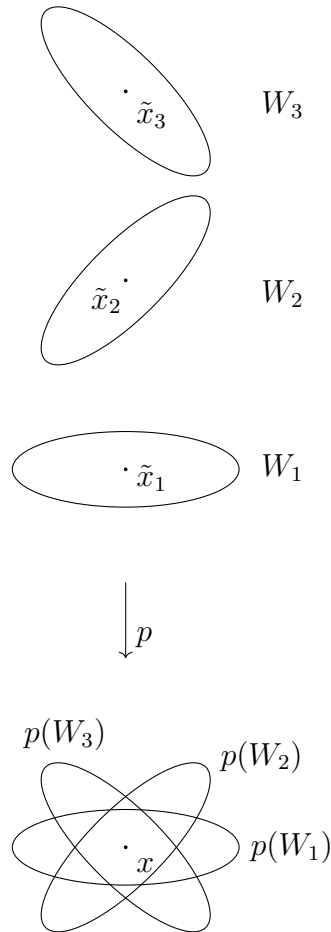
è un omeomorfismo locale suriettivo ma non è un rivestimento. In quest'esempio il dominio non è connesso (consiste di tre componenti connesse). Per ottenere un esempio con dominio connesso si consideri, l'applicazione continua e suriettiva $f : (0, 2) \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ (cioè la restrizione del rivestimento $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dell'Esempio 3.1.5 all'intervallo aperto $(0, 2) \subset \mathbb{R}$). Si noti che f è un omeomorfismo locale in quanto restrizione dell'omeomorfismo locale e (rivestimento e quindi omeomorfismo locale per la Proposizione 3.2.2) all'aperto $(0, 2)$ (per il punto 1 della Proposizione 3.2.1). D'altra parte f non è un rivestimento in quanto il punto $1 \in S^1$ non ammette un intorno aperto ben ricoperto. Infatti se U fosse un tale intorno allora per l'Osservazione 3.1.1 esisterebbero $V \subseteq U$ aperto di S^1 che contiene 1 e ben ricoperto da f e $\epsilon > 0$ tali che $f^{-1}(V) = (0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \cup (2 - \epsilon, 2)$. Ma l'aperto $(0, \epsilon)$ (così come $(2 - \epsilon, 2)$) non può essere omeomorfo a V tramite f in quanto non contiene nessun punto la cui immagine sia 1.



Viene allora naturale chiedersi sotto quali condizioni un omeomorfismo locale sia un rivestimento. Una possibile risposta a tale domanda è contenuta nel seguente (cfr. anche l'Esercizio 3.6):

Teorema 3.2.4. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale tra due spazi topologici \tilde{X} e X . Se \tilde{X} è compatto e di Hausdorff e X è connesso e di Hausdorff allora p è un rivestimento di grado finito.*

Dimostrazione: Osserviamo che $p(\tilde{X})$ è immagine di un compatto in uno spazio di Hausdorff e quindi chiuso. D'altra parte, per la 2. della Proposizione 3.2.1, $p(\tilde{X})$ è anche aperto. Segue che $p(\tilde{X})$ è sia aperto che chiuso in X . Essendo X connesso segue che $p(\tilde{X}) = X$ e quindi p è suriettiva. Sia $x \in X$ allora la fibra $p^{-1}(x)$ è uno spazio topologico discreto (per il punto 3 della Proposizione 3.2.1) e compatto (sottoinsieme chiuso di un compatto). Allora la cardinalità di $p^{-1}(x)$ è finita (un sottoinsieme discreto di un compatto è finito). Sia $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$. Dal momento che \tilde{X} è di Hausdorff e p è un omeomorfismo locale è possibile trovare W_1, \dots, W_k aperti disgiunti tali che $\tilde{x}_j \in W_j$, $j = 1, \dots, k$, e $p|_{W_j} : W_j \rightarrow p(W_j)$ sia un omeomorfismo.



Poniamo $V := \bigcap_{j=1}^k p(W_j)$, $W := \bigcup_{j=1}^k W_j$ e $U := V \setminus p(\tilde{X} \setminus W)$. Allora U è un sottoinsieme aperto di X (infatti V è un aperto di X e $p(\tilde{X} \setminus W)$ è un chiuso di

X in quanto immagine tramite l'applicazione chiusa p del chiuso $\tilde{X} \setminus W$). Inoltre x appartiene a U , o equivalentemente, $x \notin p(\tilde{X} \setminus W)$ (infatti se $x \in p(\tilde{X} \setminus W)$ allora dovrebbe esistere $\tilde{y} \in \tilde{X} \setminus W$ tale che $p(\tilde{y}) = x$; ma $p^{-1}(x) \subseteq W$ mentre $\tilde{y} \notin W$). Infine dimostriamo che U è un aperto banalizzante per p . Prendendo la controimmagine di U tramite p si ottiene:

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(V) \setminus p^{-1}(p(\tilde{X} \setminus W)) \subseteq p^{-1}(V) \setminus (\tilde{X} \setminus W) = p^{-1}(V) \cap W$$

e quindi

$$p^{-1}(U) \subseteq W = \cup_{j=1}^k W_j. \quad (3.1)$$

Poniamo allora

$$\tilde{U}_j := p^{-1}(U) \cap W_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Segue allora dalla (3.1) e dal fatto che i W_j sono disgiunti che $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta degli aperti \tilde{U}_j . Inoltre, per ogni $j = 1, \dots, k$,

$$p(\tilde{U}_j) = p(p^{-1}(U) \cap W_j) = p(p^{-1}(U)) \cap p(W_j) = U \cap p(W_j) = U$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla bigettività di p ristretta a W_j (e quindi ristretta a $p^{-1}(U) \cap W_j$), la terza uguaglianza segue dalla suriettività di p mentre l'ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che, per definizione, $U \subseteq V = \cap_{j=1}^k p(W_j)$ e quindi $U \subseteq p(W_j)$, per ogni $j = 1, \dots, k$. Questo mostra che U è un aperto ben ricoperto da p e che p è un rivestimento. Per dimostrare che il rivestimento ha grado finito bisogna dimostrare che la cardinalità (finita) della fibra di un punto x non dipende dal punto x scelto. Consideriamo la funzione $c : X \rightarrow \mathbb{N}$ che ad un punto $x \in X$ associa la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$. Questa funzione è localmente costante infatti per ogni punto $x \in X$ i punti di un aperto banalizzante U che contiene x hanno tutti fibre della stessa cardinalità. Quindi c è un'applicazione continua tra X e \mathbb{N} con la topologia discreta. Essendo X connesso, $c(X)$ è connesso e quindi c deve essere costante. Dunque la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$ non dipende dal punto x scelto. \square

3.3 Sollevamenti di archi e omotopie

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Diremo che un'applicazione continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ è un **sollevamento** di f se $f = p \circ \tilde{f}$, ossia se il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

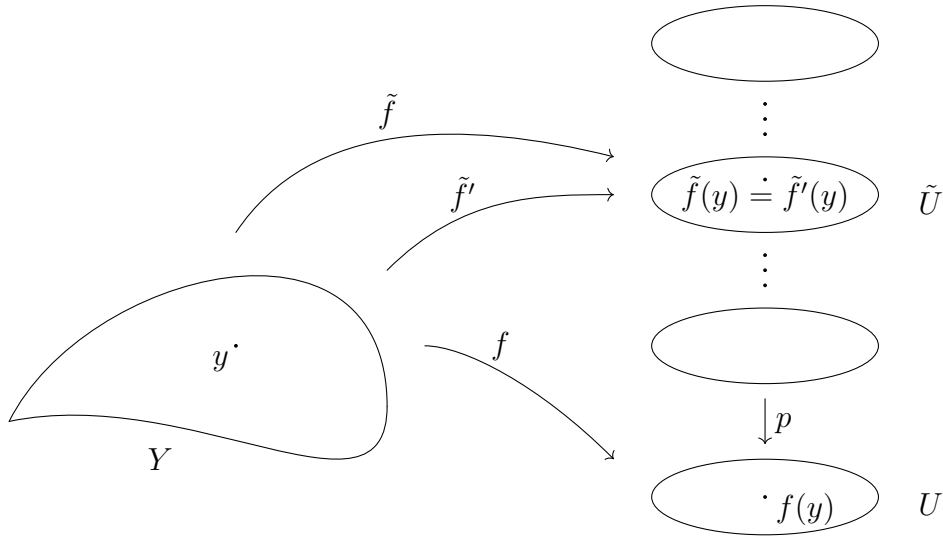
In questo paragrafo dimostreremo tre risultati fondamentali sui sollevamenti: l'unicità del sollevamento (Proposizione 3.3.1), il sollevamento degli archi (Proposizione 3.3.2) e il sollevamento delle omotopie (Proposizione 3.3.4) e alcune delle loro conseguenze.

Proposizione 3.3.1. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua da uno spazio topologico connesso Y in X . Siano $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ e $\tilde{f}' : Y \rightarrow \tilde{X}$ due sollevamenti di f . Se esiste un punto $y_0 \in Y$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$. Allora $\tilde{f} = \tilde{f}'$.*

Dimostrazione: Consideriamo il sottoinsieme di $Y' \subseteq Y$ definito come segue:

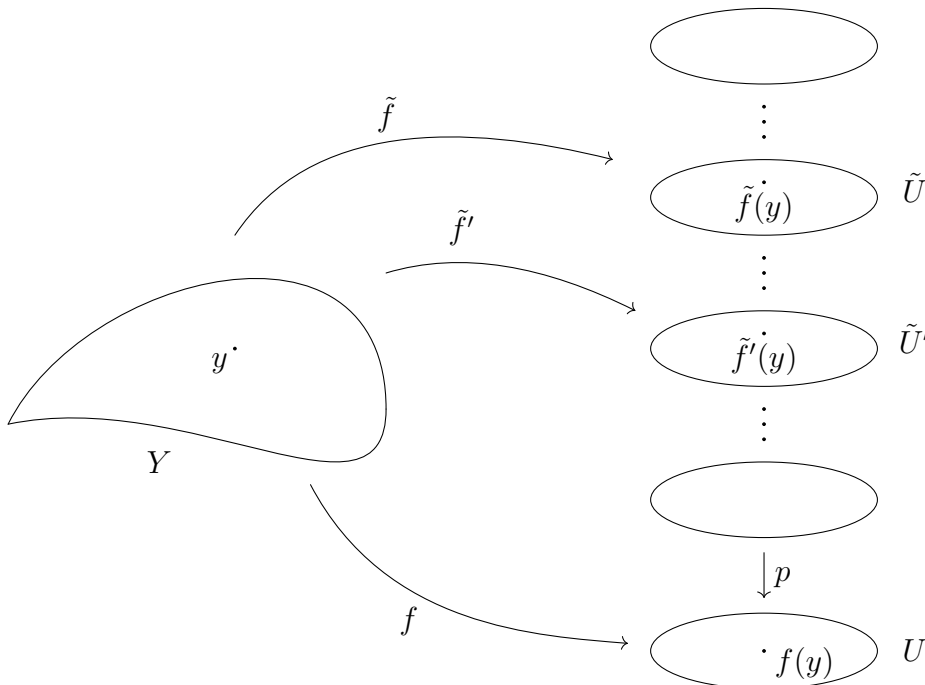
$$Y' = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}.$$

Dobbiamo dimostrare che $Y' = Y$. Osserviamo che $Y' \neq \emptyset$ in quanto $y_0 \in Y'$. Essendo Y connesso basterà allora dimostrare che Y' è sia aperto che chiuso. Sia dunque $y \in Y'$, U un intorno aperto di $f(y)$ ben ricoperto da p e $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ un intorno aperto di $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$ tale che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ sia un omeomorfismo.



Consideriamo l'intorno aperto di y dato da $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}) \subseteq Y$. Vogliamo mostrare che quest'intorno è contenuto in Y' (e questo mostrerà che Y' è aperto). Sia $z \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U})$ allora $\tilde{f}(z) \in \tilde{U}$ e $\tilde{f}'(z) \in \tilde{U}$ e $p(\tilde{f}(z)) = p(\tilde{f}'(z)) = f(z)$. Dal momento che p ristretta a \tilde{U} è iniettiva segue che $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(z)$ e quindi $z \in Y'$. Per mostrare che Y' è chiuso sia $y \in Y \setminus Y'$ e quindi $\tilde{f}(y) \neq \tilde{f}'(y)$. Sia inoltre U un intorno aperto di $f(y)$ ben ricoperto da p . Esistono allora due intorni aperti e disgiunti $\tilde{U}, \tilde{U}' \subseteq \tilde{X}$ di $\tilde{f}(y)$ e di $\tilde{f}'(y)$ tali che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ e $p|_{\tilde{U}'} : \tilde{U}' \rightarrow U$ siano

omeomorfismi $(p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{f}'(y)) = f(y))$.



Allora $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}')$ è un intorno aperto di y contenuto in $Y \setminus Y'$. Infatti se $z \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}')$ si ha $\tilde{f}(z) \in \tilde{U}$ e $\tilde{f}'(z) \in \tilde{U}'$ e quindi $\tilde{f}(z) \neq \tilde{f}'(z)$ essendo \tilde{U} e \tilde{U}' disgiunti. \square

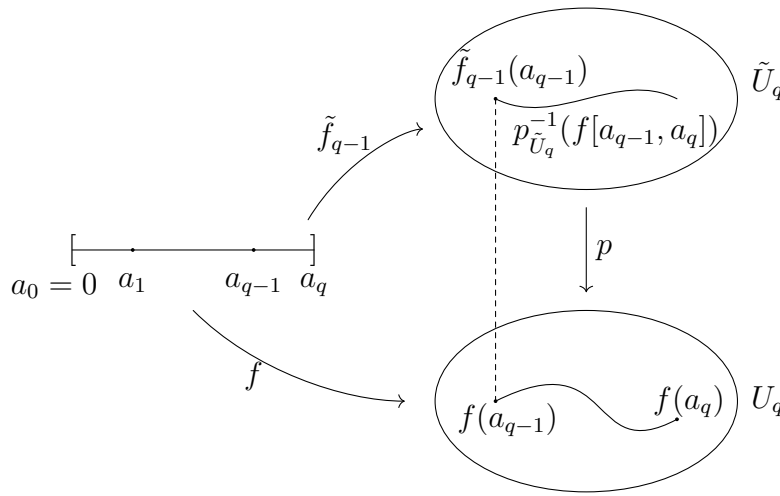
Proposizione 3.3.2. (sollevamento degli archi) Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ un punto sulla fibra di x_0 , cioè $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Allora ogni arco $f : I \rightarrow X$ tale che $f(0) = x_0$ ammette un unico sollevamento $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.

Dimostrazione: L'unicità di un sollevamento \tilde{f} di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ segue dalla Proposizione 3.3.1 e dalla connessione di I . Dimostriamo dunque l'esistenza di \tilde{f} . Consideriamo un ricoprimento di X fatto da aperti banalizzanti. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.5.1 e usando l'esistenza del numero di Lebesgue (vedi Appendice C) possiamo trovare una suddivisione dell'intervallo I , $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$ tale che per ogni $\alpha = 1, \dots, q$, $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$ sia contenuto in uno degli aperti banalizzanti scelti. Vogliamo dimostrare per induzione che: per ogni $\alpha = 1, \dots, q$ esiste un sollevamento $\tilde{f}_\alpha : [0, a_\alpha] \rightarrow \tilde{X}$ di $f|_{[0, a_\alpha]}$ (cioè $p \circ \tilde{f}_\alpha = f|_{[0, a_\alpha]}$) tale che $\tilde{f}_\alpha(0) = \tilde{x}_0$. Il sollevamento desiderato si otterrà allora per $\alpha = q$ cioè $\tilde{f} = \tilde{f}_q$. La base dell'induzione, $\alpha = 1$, si ottiene come segue. Sia U_1 un aperto banalizzante che contiene $f(0)$ e sia \tilde{U}_1 un intorno aperto di \tilde{x}_0 tale che $p|_{\tilde{U}_1} : \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ sia un omeomorfismo. Definiamo $\tilde{f}_1 : [0, a_1] \rightarrow \tilde{X}$, $\tilde{f}_1(0) = \tilde{x}_0$, come $\tilde{f}_1 = p|_{\tilde{U}_1}^{-1} \circ f$. Supponiamo di aver definito un sollevamento

$\tilde{f}_{q-1} : [0, a_{q-1}] \rightarrow \tilde{X}$ di $f|_{[0, a_{q-1}]}$ tale che $\tilde{f}_{q-1}(0) = \tilde{x}_0$ e sia U_q un aperto banalizzante per p tale che $f([a_{q-1}, a_q]) \subseteq U_q$. Esisterà allora un intorno aperto \tilde{U}_q di $\tilde{f}_{q-1}(a_{q-1})$ tale che $p|_{\tilde{U}_q} : \tilde{U}_q \rightarrow U_q$ sia un omeomorfismo e $p(\tilde{f}_{q-1}(a_{q-1})) = f(a_{q-1})$. Estendiamo allora \tilde{f}_{q-1} ad un sollevamento $\tilde{f}_q : I = [0, a_q] \rightarrow \tilde{X}$ di $f : I \rightarrow X$ tale che $\tilde{f}_q(0) = \tilde{x}_0$ ponendo:

$$\tilde{f}_q(t) = \begin{cases} \tilde{f}_{q-1}(t) & \text{se } t \in [0, a_{q-1}] \\ p|_{\tilde{U}_q}^{-1}(f(t)) & \text{se } t \in [a_{q-1}, a_q], \end{cases}$$

il quale è continuo per il lemma di incollamento.



□

Corollario 3.3.3. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Se X è connesso per archi allora la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$ non dipende dal punto $x \in X$.*

Dimostrazione: Siano x_0 e x_1 due punti di X . Sia \tilde{x}_0 un punto di $p^{-1}(x_0)$ e sia $f : I \rightarrow X$ un arco tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Allora $\tilde{f}(1)$ appartiene a $p^{-1}(x_1)$. Quindi resta definita un'applicazione

$$\Phi : p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$$

che al punto \tilde{x}_0 associa il punto $\Phi(\tilde{x}_0) = \tilde{f}(1)$. Analogamente definiamo un'applicazione

$$\Psi : p^{-1}(x_1) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

che al punto \tilde{x}_1 associa il punto $\tilde{g}(1)$, dove $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di $i(f) : I \rightarrow X$ ($i(f)(t) = f(1-t)$) tale che $\tilde{g}(0) = \tilde{x}_1$. Non è difficile mostrare che Ψ è l'inversa di Φ (cfr. Esercizio 3.7). □

Proposizione 3.3.4. *(sollevamento delle omotopie) Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Sia $F : I \times I \rightarrow X$ un'applicazione continua tale che $F(0,0) = x_0$. Allora F ammette un unico sollevamento $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$. Se inoltre F è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra i due archi $t \rightarrow F(t,0)$ e $t \rightarrow F(t,1)$ allora \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra i due archi $t \rightarrow \tilde{F}(t,0)$ e $t \rightarrow \tilde{F}(t,1)$.*

Dimostrazione: L'unicità di \tilde{F} segue dalla Proposizione 3.3.1. Prima di tutto osserviamo che esiste un sollevamento $\tilde{F}_L : L \rightarrow \tilde{X}$ di $F|_L$ dove $L := (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I)$. Infatti \tilde{F}_L si può ottenere dalla Proposizione 3.3.2 come $\tilde{F}_L(t,0) = \tilde{f}(t)$, $t \in I$ e $\tilde{F}_L(0,s) = \tilde{g}(s)$, $s \in I$, dove \tilde{f} e \tilde{g} sono i sollevamenti rispettivamente degli archi $t \rightarrow F(t,0)$ e $s \rightarrow F(0,s)$ tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$. Estendiamo ora \tilde{F}_L a tutto $I \times I$ come segue. Consideriamo un ricoprimento di X costituito da aperti banalizzanti. Usando l'esistenza del numero di Lebesgue possiamo trovare una suddivisione dei fattori di $I \times I$, $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$, $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{r-1} < b_r = 1$ tale che per ogni $\alpha = 1, \dots, q$ e per ogni $\beta = 1, \dots, r$, $F(I_\alpha \times J_\beta)$ sia contenuto in uno degli aperti banalizzanti scelti, dove $I_\alpha = [a_{\alpha-1}, a_\alpha]$ e $J_\beta = [b_{\beta-1}, b_\beta]$. Nella figura seguente è illustrato il caso $q = 3$ e $r = 2$.

$I_1 \times J_2$	$I_2 \times J_2$	$I_3 \times J_2$
$I_1 \times J_1$	$I_2 \times J_1$	$I_3 \times J_1$

Ordiniamo le coppie (α, β) come segue:

$$(1,1) < (2,1) < \dots < (q,1) < (1,2) < (2,2) < \dots < (q,2) < \dots < (1,r) < (2,r) < \dots < (q,r).$$

Vogliamo dimostrare per induzione che: *per ogni $(\alpha, \beta) = (1,1), (2,1), \dots, (q,r)$ esiste un sollevamento*

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} : L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (\alpha,\beta)} (I_\gamma \times J_\delta) \rightarrow \tilde{X}$$

di F ristretta all'insieme $L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (\alpha,\beta)} (I_\gamma \times J_\delta)$ tale che $\tilde{F}_{\alpha\beta}(0,0) = \tilde{x}_0$. Il sollevamento desiderato si otterrà allora per $(\alpha, \beta) = (q, r)$ cioè $\tilde{F} = \tilde{F}_{qr}$. Sia U_{11}

un aperto banalizzante per p tale che $F(I_1 \times J_1) \subseteq U_{11}$ e sia $L_{11} = L \cap (I_1 \times J_1)$. Dato che L_{11} è connesso esisterà un aperto \tilde{U}_{11} di \tilde{X} tale che $\tilde{F}_L(L_{11}) \subseteq \tilde{U}_{11}$, $p|_{\tilde{U}_{11}} : \tilde{U}_{11} \rightarrow U_{11}$ sia un omeomorfismo e $p(\tilde{F}_L(t, s)) = F(t, s)$ per ogni $(t, s) \in L_{11}$. La base dell'induzione si ottiene allora definendo $\tilde{F}_{11} : L \cup (I_1 \times J_1) \rightarrow \tilde{X}$ come:

$$\tilde{F}_{11}(t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_L(t, s) & \text{se } (t, s) \in L \\ p|_{\tilde{U}_{11}}^{-1}(F(t, s)) & \text{se } (t, s) \in I_1 \times J_1 \end{cases}$$

che è continua per il lemma di incollamento.

Supponiamo di aver definito il sollevamento

$$\tilde{F}_{q-1,r} : L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \rightarrow \tilde{X}$$

di F ristretta a all'insieme $L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta)$ tale che $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$. Sia U_{qr} un aperto banalizzante per p tale che $F(I_q \times J_r) \subseteq U_{qr}$ e sia

$$L_{qr} = \left(L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \right) \cap (I_q \times J_r).$$

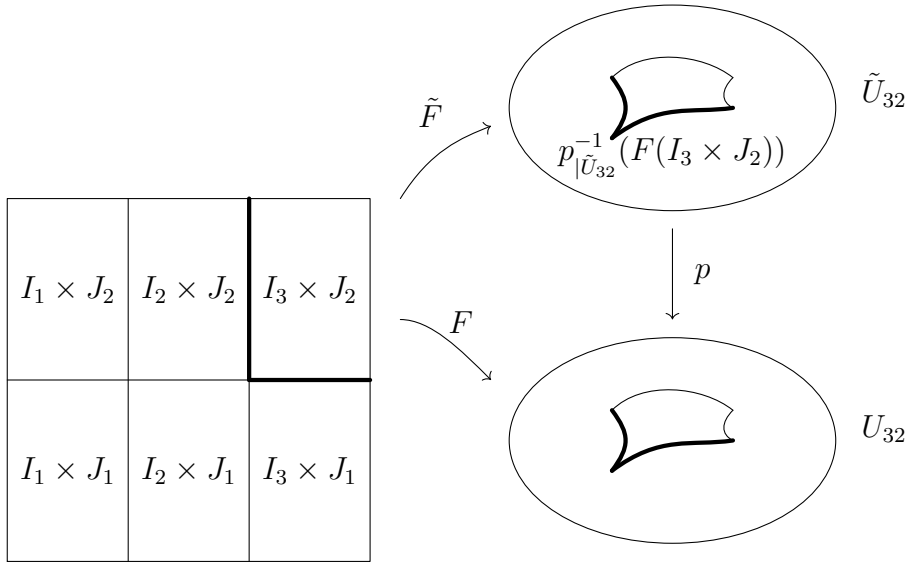
Per la connessione di L_{qr} esisterà allora un aperto $\tilde{U}_{qr} \subseteq \tilde{X}$ tale che $\tilde{F}_{q-1,r}(L_{qr}) \subseteq \tilde{U}_{qr}$, $p|_{\tilde{U}_{qr}} : \tilde{U}_{qr} \rightarrow U_{qr}$ sia un omeomorfismo e $p(\tilde{F}_{q-1,r}(t, s)) = F(t, s)$ per ogni $(t, s) \in L_{qr}$. Definiamo allora il sollevamento

$$\tilde{F}_{qr} : \left(L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \right) \cup (I_q \times J_r) \rightarrow \tilde{X}$$

come:

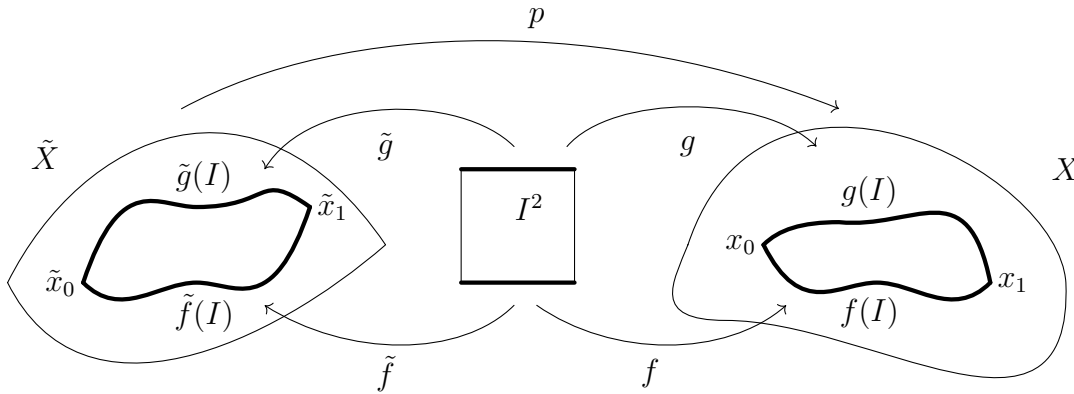
$$\tilde{F}(t, s) = \tilde{F}_{qr}(t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_{q-1,r}(t, s) & \text{se } (t, s) \in L \cup \bigcup_{(\gamma,\delta) \leq (q-1,r)} (I_\gamma \times J_\delta) \\ p|_{\tilde{U}_{qr}}^{-1}(F(t, s)) & \text{se } (t, s) \in I_q \times J_r \end{cases}$$

che è continuo per il lemma di incollamento. Nella figura seguente è illustrato il caso $q = 3$ e $r = 2$.



Supponiamo, infine, che F sia un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra gli archi $t \rightarrow F(t, 0)$ e $t \rightarrow F(t, 1)$ tale che $F(0, 0) = F(0, 1) = x_0$, $F(1, 0) = F(1, 1) = x_1$, $F(0, s) = x_0$ e $F(1, s) = x_1$ per ogni $s \in I$. Segue che $F(\{0\} \times I) = p(\tilde{F}(\{0\} \times I)) = x_0$ (risp. $F(\{1\} \times I) = p(\tilde{F}(\{1\} \times I)) = x_1$). Quindi $\tilde{F}(\{0\} \times I) \in p^{-1}(x_0)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I) \in p^{-1}(x_1)$). Essendo la fibra $p^{-1}(x_0)$ (risp. $p^{-1}(x_1)$) discreta e $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I)$) connesso segue che $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I)$) è costituito da un solo punto \tilde{x}_0 tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$ (risp. \tilde{x}_1 tale che $p(\tilde{x}_1) = x_1$). Quindi \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra gli archi $t \rightarrow \tilde{F}(t, 0)$ e $t \rightarrow \tilde{F}(t, 1)$ (cioè $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{F}(0, 1) = \tilde{x}_0$, $\tilde{F}(1, 0) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{x}_1$, $\tilde{F}(0, s) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{F}(1, s) = \tilde{x}_1$ per ogni $s \in I$). \square

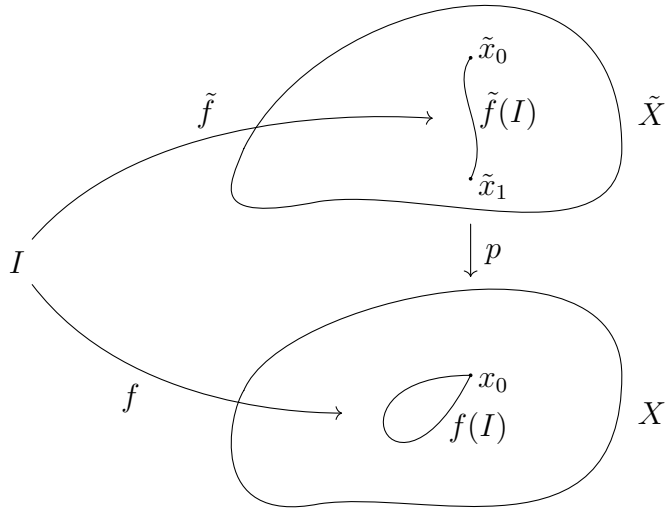
Corollario 3.3.5. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Siano $f : I \rightarrow X$ e $g : I \rightarrow X$ due archi tali che $f(0) = g(0) = x_0$ e siano $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ e $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$ i due (unici) sollevamenti di f e g tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$. Se $f \sim_{\{0,1\}} g$ allora $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$, in particolare $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.



Dimostrazione: Sia $F : I \times I \rightarrow X$, $F(0,0) = x_0$, un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra f e g e sia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$, $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$, l'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra gli archi $t \rightarrow \tilde{F}(t,0)$ e $t \rightarrow \tilde{F}(t,1)$ la cui esistenza segue dalla Proposizione 3.3.4. Quindi $\tilde{F}(0,s) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{F}(1,s) = \tilde{x}_1$, per ogni $s \in I$, dove \tilde{x}_1 è un punto sulla fibra di $x_1 = f(1) = g(1)$. Osserviamo che $t \rightarrow \tilde{F}(t,0)$ (risp. $t \rightarrow \tilde{F}(t,1)$) è un arco in \tilde{X} tale che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$ (risp. $\tilde{F}(0,1) = \tilde{x}_0$) e $p(\tilde{F}(t,0)) = F(t,0) = f(t)$ (risp. $p(\tilde{F}(t,1)) = F(t,1) = g(t)$). Segue allora dalla Proposizione 3.3.2 che $\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}(t)$ e $\tilde{F}(t,1) = \tilde{g}(t)$ e quindi $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$ e $\tilde{f}(1) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{g}(1)$. \square

Teorema 3.3.6. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Se \tilde{X} è connesso per archi e X è semplicemente connesso allora p è un omeomorfismo.*

Dimostrazione: Per il Corollario 3.2.3 possiamo limitarci a dimostrare che p è iniettiva. Siano dunque \tilde{x}_0 e \tilde{x}_1 due punti di \tilde{X} tali che $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0 \in X$. Sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ un arco tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Allora $f = p \circ \tilde{f}$ è un laccio in X di base x_0 .



Essendo X semplicemente connesso $f \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$. Ma i sollevamenti di f e ϵ_{x_0} che iniziano in \tilde{x}_0 sono rispettivamente \tilde{f} e $\epsilon_{\tilde{x}_0}$ e per il corollario precedente

$$\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1) = \epsilon_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0,$$

e quindi p è iniettiva. \square

3.4 Esercizi

Esercizio 3.1. Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ due rivestimenti. Si dimostri che

$$p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y, (\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto (p(\tilde{x}), q(\tilde{y}))$$

è un rivestimento.

Esercizio 3.2. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento tra due spazi topologici \tilde{X} e X e sia $X_0 \subseteq X$ un sottoinsieme di X . Sia $\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$. Si dimostri che la restrizione di p a \tilde{X}_0 , $p|_{\tilde{X}_0} : \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$, è ancora un rivestimento.

Esercizio 3.3. Usare l'Esercizio 3.1 per costruire un rivestimento $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ e dedurre dall'Esercizio 3.2 l'esistenza di un rivestimento tra il reticolo unitario standard di \mathbb{R}^2 e la figura ∞ (individuare la figura 1.4.10 ∞ nel toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$).

Esercizio 3.4. Sia n un intero non nullo. Dimostrare che l'applicazione $p : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ è un rivestimento (qui stiamo pensando a $S^1 \subset \mathbb{C}$).

Esercizio 3.5. Dimostrare che il gruppo fondamentale di S^1 non è banale. (Suggerimento: usare il Teorema 3.3.6).

Esercizio 3.6. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale tra due varietà topologiche \tilde{X} e X connesse. Assumiamo che p sia propria (cioè $p^{-1}(K)$ è compatto per ogni sottoinsieme K compatto di X). Dimostrare che p è un rivestimento di grado finito.

Esercizio 3.7. Dimostrare che le applicazioni Ψ e Φ definite nella dimostrazione del Corollario 3.3.3 sono una l'inversa dell'altra.

Esercizio 3.8. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento tra due spazi topologici \tilde{X} e X e sia $Y \subseteq \tilde{X}$ una componente connessa di \tilde{X} . Se X è connesso e localmente connesso¹ allora la restrizione $p|_Y : Y \rightarrow X$ è un rivestimento.

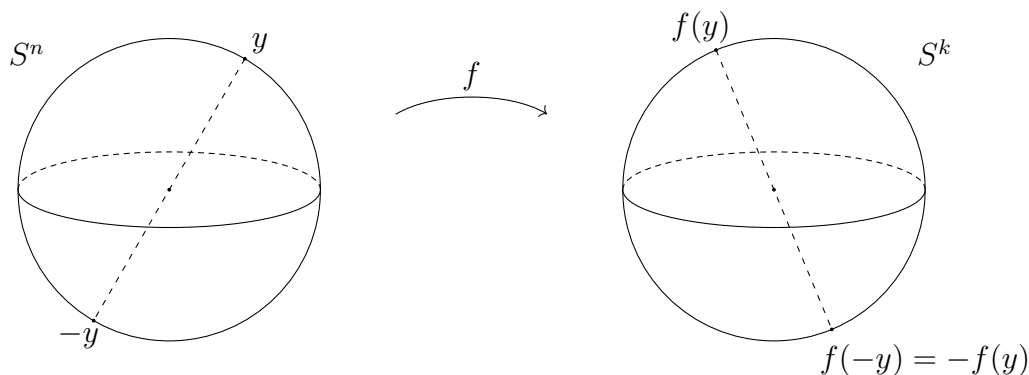
¹Uno spazio topologico X è **localmente connesso** se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno aperto U di x esiste un intorno connesso di x contenuto in U (cfr. Appendice A per maggiori dettagli).

Capitolo 4

Applicazioni della teoria dei rivestimenti

4.1 Il teorema di Borsuk–Ulam

Siano n e k due numeri naturali. Diremo che un'applicazione $f : S^n \rightarrow S^k$ preserva i punti antipodali se $f(-y) = -f(y)$, per ogni $y \in S^n$.



Teorema 4.1.1. (*Borsuk–Ulam per $n = 2$*) Non esistono applicazioni continue $f : S^2 \rightarrow S^1$ che preservano i punti antipodali.

Osservazione 4.1.2. Il teorema si generalizza a sfere di dimensione arbitraria. Si può infatti dimostrare che non esistono applicazioni continue $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ che conservano in punti antipodali per ogni $n \geq 1$. Per $n = 1$ la dimostrazione segue dal fatto che S^1 è connesso mentre $S^0 = \{\pm 1\}$ non lo è. Per $n \geq 3$ si utilizza la teoria dell'omologia (cfr. [5] in bibliografia).

Per dimostrare il Teorema di Borsuk–Ulam abbiamo bisogno dei due lemmi seguenti.

Lemma 4.1.3. *Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : S^2 \rightarrow X$ un'applicazione continua. Sia $y_0 \in S^2$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(f(y_0))$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{X}$ di f tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

Dimostrazione: L'unicità del sollevamento \tilde{f} segue dalla connessione della sfera S^2 e dalla Proposizione 3.3.1. Ora costruiamo il sollevamento di f . Dal momento che $I^2 \cong D^2$ allora, per il Corollario B.3.3 dell'Appendice B, esiste un'identificazione $q : I^2 \rightarrow S^2$ tale che $q(\partial I^2) = y_0$ e $q|_{\text{Int } I^2} : \text{Int } I^2 \rightarrow S^2 \setminus \{y_0\}$ sia un omeomorfismo. Per la Proposizione 3.3.4 esiste un unico sollevamento $h : I^2 \rightarrow \tilde{X}$ di $f \circ q : I^2 \rightarrow X$ tale che $h(0,0) = \tilde{x}_0$. Quindi $p \circ h = f \circ q$ e il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ q \downarrow & \searrow f \circ q & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Segue che

$$p(h(\partial I^2)) = f(q(\partial I^2)) = f(y_0)$$

e quindi $h(\partial I^2) \subset p^{-1}(f(y_0))$. Ma la fibra di $f(y_0)$ è discreta e quindi essendo ∂I^2 connesso e h continua segue che $h(\partial I^2) = \tilde{x}_0$. Segue allora che h scende al quoziente rispetto all'identificazione q . Esiste quindi un'unica applicazione $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{X}$ continua tale che $\tilde{f} \circ q = h$.

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

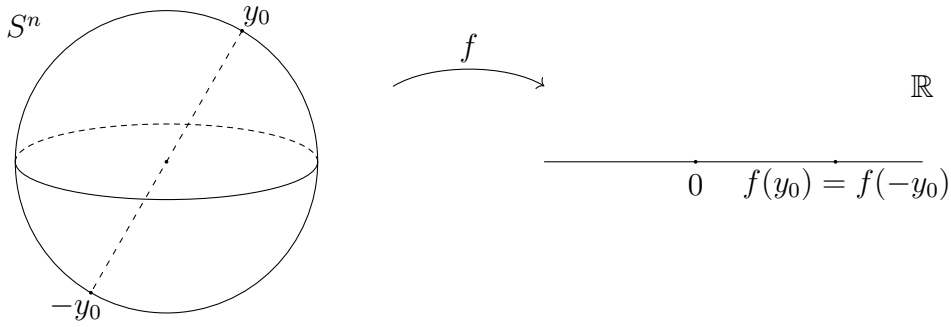
Allora

$$\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(q(0,0)) = h(0,0) = \tilde{x}_0.$$

Inoltre $p \circ \tilde{f} \circ q = p \circ h = f \circ q$ e siccome q è suriettiva allora $p \circ \tilde{f} = f$; questo conclude la dimostrazione del lemma. \square

Osservazione 4.1.4. Si può dimostrare che il lemma precedente vale anche per S^n con $n \geq 2$ e, più in generale, per ogni varietà topologica semplicemente connessa.

Lemma 4.1.5. *Sia $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Allora esiste un punto $y_0 \in S^2$ tale che $f(y_0) = f(-y_0)$.*



Dimostrazione: Sia $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione continua definita da

$$g(y) := f(y) - f(-y).$$

Osserviamo che $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$. Dal momento che S^2 è connesso allora $g(S^2)$ è un sottoinsieme connesso di \mathbb{R} e quindi $g(S^2)$ è un punto oppure un intervallo di \mathbb{R} . Se $g(S^2)$ è un punto allora g è l'applicazione nulla. Infatti $g(y) = g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$ implica che $g(y) = 0$ per ogni $y \in S^2$. Quindi, in questo caso, $f(y) = f(-y) = 0$ per ogni $y \in S^2$. Se invece $g(S^2)$ è un intervallo (diverso da un punto) possiamo trovare $y_1 \in S^2$ tale che $g(y_1) \neq g(-y_1)$. Ma essendo $g(S^2)$ convesso il punto

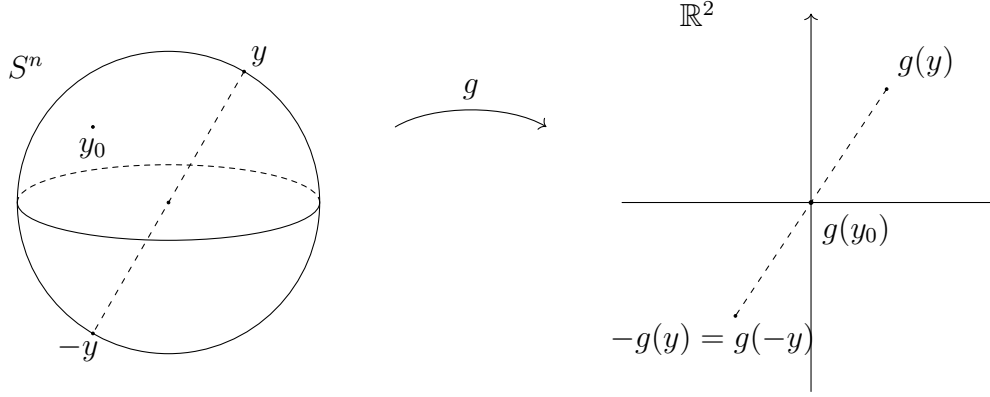
$$\frac{1}{2} (g(y_1) + g(-y_1)) = \frac{1}{2} (g(y_1) - g(y_1)) = 0$$

appartiene ancora a $g(S^2)$. Quindi esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$, ossia $f(y_0) = f(-y_0)$. \square

Osservazione 4.1.6. Il Lemma 4.1.5 si estende (con una dimostrazione analoga) a tutte le applicazioni continue da S^n a \mathbb{R} , $n \geq 1$.

Dimostrazione del Teorema 4.1.1 Sia $f : S^2 \rightarrow S^1$ un'applicazione continua. Consideriamo il rivestimento $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ descritto nell'Esempio 3.1.5 del Capitolo 3. Per il Lemma 4.1.3 esiste un'applicazione continua $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $e \circ \tilde{f} = f$. Per il Lemma 4.1.5 esiste $y_0 \in S^2$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(-y_0)$. Segue che $f(y_0) = e(\tilde{f}(y_0)) = e(\tilde{f}(-y_0)) = f(-y_0)$ e quindi $f(-y_0) \neq -f(y_0)$ (in quanto $f(y_0) \in S^1$). Quindi l'applicazione f non preserva i punti antipodali. \square

Corollario 4.1.7. *Sia $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua tale che $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$. Allora esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$.*

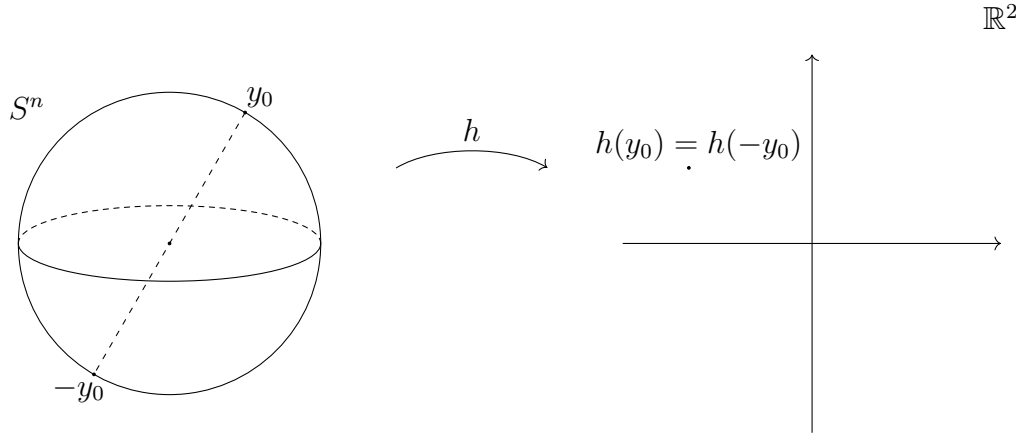


Dimostrazione: Se per assurdo $g(y) \neq 0$ per ogni $y \in S^2$ allora l'applicazione continua $f : S^2 \rightarrow S^1$ definita da

$$f(y) := \frac{g(y)}{\|g(y)\|}, y \in S^2$$

è tale che $f(-y) = -f(y)$ per ogni $y \in S^2$, in contrasto con il Teorema di 4.1.1. \square

Corollario 4.1.8. *Sia $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua. Allora esiste $y_0 \in S^2$ tale che $h(y_0) = h(-y_0)$. In particolare h non è iniettiva.*



Dimostrazione: Sia per assurdo $h(y) \neq h(-y)$ per ogni $y \in S^2$. Allora l'applicazione continua $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$g(y) := h(y) - h(-y), y \in S^2$$

soddisfa $g(-y) = -g(y)$. Segue quindi dal Corollario 4.1.7 che esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$ e quindi $h(y_0) = h(-y_0)$. \square

Osservazione 4.1.9. Il Corollario 4.1.8 ha la seguente interpretazione meteorologica: in ogni istante, esistono sulla superficie terrestre due punti antipodali con la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica.

Corollario 4.1.10. *La sfera S^2 non è omeomorfa a nessun sottospazio di \mathbb{R}^2 .*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che esista un S sottospazio di \mathbb{R}^2 e un omeomorfismo $g : S^2 \rightarrow S$. Se $i : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ denota l'inclusione di S in \mathbb{R}^2 allora $h = i \circ g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'applicazione continua e iniettiva, in contrasto con il Corollario 4.1.8. \square

Corollario 4.1.11. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto. Allora ogni applicazione continua da A in \mathbb{R}^2 non è iniettiva.*

Dimostrazione: Supponiamo, per assurdo, che $g : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ sia un'applicazione continua e iniettiva. Siccome A è aperto in \mathbb{R}^3 contiene un sottospazio omeomorfo a S^2 . Allora l'applicazione $g|_{S^2} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'applicazione continua e iniettiva in contrasto con il Corollario 4.1.8. \square

Corollario 4.1.12. *Dati tre sottoinsiemi limitati e misurabili di \mathbb{R}^3 esiste un piano di \mathbb{R}^3 che divide ognuno dei tre insiemi in due insiemi dello stesso volume.*

Dimostrazione: Siano A , B e C i tre insiemi. Per ogni $y \in S^2$ consideriamo il piano P_y perpendicolare al vettore $0y$ e che divide A in due insiemi dello stesso volume (questo piano esiste per il teorema del valor medio e perché il volume è una funzione continua). Indichiamo inoltre, con P_y^+ e P_y^- i due semispazi nei quali il piano P_y divide lo spazio.

Dato $y \in S^2$ siano $B^+(y) \subset P_y^+$ e $B^-(y) \subset P_y^-$ (risp. $C^+(y) \subset P_y^+$ e $C^-(y) \subset P_y^-$) i sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 nei quali risulta suddiviso B (risp. C) dal piano P_y . Siano inoltre $\text{vol}(B^+(y))$ e $\text{vol}(B^-(y))$ (risp. $\text{vol}(C^+(y))$ e $\text{vol}(C^-(y))$) i loro volumi. Consideriamo l'applicazione continua

$$g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto (\text{vol}(B^+(y)) - \text{vol}(B^-(y)), \text{vol}(C^+(y)) - \text{vol}(C^-(y))).$$

Per costruzione $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$. Segue dal Corollario 4.1.7 che esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$ ossia $\text{vol}(B^+(y_0)) = \text{vol}(B^-(y_0))$ e $\text{vol}(C^+(y_0)) = \text{vol}(C^-(y_0))$. Quindi P_{y_0} è il piano che divide ognuno dei tre insiemi A , B e C in due insiemi dello stesso volume. \square

Osservazione 4.1.13. Il Corollario 4.1.12 prende anche il nome dal *problema della divisione di un panino al prosciutto*, dove per panino al prosciutto si intende l'insieme costituito da due fette di pane e da una fetta di prosciutto. Il corollario

mostra che è possibile dividere un panino al prosciutto con un solo taglio netto in modo che la fetta di pane inferiore, la fetta di prosciutto e la fetta di pane superiore siano simultaneamente tagliate esattamente a metà. Osserviamo, inoltre, che gli insiemi A , B e C non devono essere necessariamente connessi.

4.2 Il gruppo fondamentale del cerchio

In questo paragrafo calcoleremo il gruppo fondamentale del cerchio S^1 . Fissiamo il punto base $(1, 0)$ che in notazione complessa è il punto 1.

In questo paragrafo dimostreremo il seguente:

Teorema 4.2.1. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrazione: L'idea che sta alla base di questo isomorfismo di gruppi è che ogni arco chiuso $f : I \rightarrow S^1$ di base 1 “gira” un certo numero di volte su S^1 . Questo numero intero si può pensare ottenuto euristicamente come segue: ogni volta che abbiamo compiuto un giro completo in senso antiorario registriamo un valore 1; se invece si è compiuto un giro completo ma in senso orario registriamo un valore -1 . La somma di questi valori è l'intero cercato. Per dimostrare che effettivamente $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ bisogna dimostrare che se f e g sono due archi chiusi di base 1 tali che $f \sim_{\{0,1\}} g$ allora l'intero associato a f è lo stesso dell'intero associato a g e che questo avviene tramite un isomorfismo di gruppi.

Per ottenere un'applicazione che a $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ associa il numero intero che tiene conto di quante volte $[f]$ gira intorno a 1, usiamo il rivestimento $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dell'Esempio 3.1.5 del Capitolo 3 e i risultati sui sollevamenti degli archi. Dato $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ e sia $f \in [f]$ un suo rappresentante. Consideriamo $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = 0$. Possiamo definire allora

$$\Phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}, [f] \mapsto \Phi([f]) = \tilde{f}(1) \quad (4.1)$$

Segue dal Corollario 3.3.5 del Capitolo 3 che Φ è ben definita.

Per dimostrare il Teorema 4.2.1 faremo vedere che Φ è un isomorfismo di gruppi. Introduciamo qualche notazione. Dato un laccio f in S^1 di base 1 e $a \in \mathbb{Z} = e^{-1}(1)$, denotiamo con $\ell_a(f)$ l'unico sollevamento di f che inizia in a , cioè $e \circ \ell_a(f) = f$ e $\ell_a(f)(0) = a$. Ovviamente se \tilde{f} è il sollevamento di f che inizia in 0 allora $\ell_0(f) = \tilde{f}$ e quindi $\Phi([f]) = \ell_0(f)(1)$. Inoltre

$$\ell_a(f) = \ell_0(f) + \epsilon_a, \quad (4.2)$$

dove $\epsilon_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ è l'arco costante $\epsilon_a(t) = a$. Infatti

$$\ell_a(f)(0) = a = \ell_0(f)(0) + \epsilon_a(0)$$

e

$$e \circ \ell_a(f) = f = f\epsilon_1 = e(\ell_0(f))e(\epsilon_a) = e \circ (\ell_0(f) + \epsilon_a)$$

e la (4.2) segue dall'unicità del sollevamento di archi con lo stesso punto iniziale (cfr. Proposizione 3.3.2). Inoltre, se f e g sono due lacci in S^1 di base 1 e $a \in \mathbb{Z} = e^{-1}(1)$ vale la seguente formula che lega il sollevamento di due lacci con la loro concatenazione $f \cdot g$:

$$\ell_a(f \cdot g) = \ell_a(f) \cdot \ell_b(g), \quad b = \ell_a(f)(1). \quad (4.3)$$

Infatti

$$(\ell_a(f) \cdot \ell_b(g))(0) = \ell_a(f)(0) = a$$

e

$$e \circ (\ell_a(f) \cdot \ell_b(g)) = (e \circ \ell_a(f)) \cdot (e \circ \ell_b(g)) = f \cdot g,$$

e la (4.3) segue ancora una volta dall'unicità del sollevamento degli archi. Possiamo ora dimostrare che Φ è un omomorfismo. Dati $[f], [g] \in \pi_1(S^1, 1)$ allora, per la (4.3),

$$\Phi([f] \cdot [g]) = \Phi([f \cdot g]) = \ell_0(f \cdot g)(1) = (\ell_0(f) \cdot \ell_b(g))(1) = \ell_b(g)(1),$$

dove $b = \ell_0(f)(1)$. D'altra parte, per la (4.2),

$$\ell_b(g)(1) = \ell_0(g)(1) + b = \ell_0(g)(1) + \ell_0(f)(1) = \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) = \Phi([f]) + \Phi([g]).$$

Mostriamo ora che Φ è suriettivo. Sia k intero e $f : I \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2ik\pi t}$. Sia $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto kt$. Allora $f = e \circ \tilde{f}$ è un laccio di base 1 e il suo (unico) sollevamento che inizia in 0 è esattamente \tilde{f} . Segue che $\Phi([f]) = \tilde{f}(1) = k$.

Infine dimostriamo l'iniettività di Φ . Sia $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ tale che $\Phi([f]) = 0$. Allora, per definizione di Φ , $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$. Essendo \mathbb{R} semplicemente connesso esiste un'omotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ relativa a $\{0, 1\}$ tale che $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \epsilon_0$. Allora $f = (e \circ \tilde{f}) \sim_{\{0,1\}} (e \circ \epsilon_0) = \epsilon_1$, cioè $[f] = [\epsilon_1]$, quindi Φ è iniettiva. \square

Corollario 4.2.2. *Non esiste una retrazione da D^2 a S^1 .*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che esista una retrazione $r : D^2 \rightarrow S^1$ cioè un'applicazione continua tale che $r \circ i = \text{id}_{S^1}$ dove $i : S^1 \rightarrow D^2$ denota

l'inclusione. Segue dalle proprietà degli omomorfismi indotti (cfr. Teorema 2.3.1) che

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, 1)}$$

In particolare $i_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(D^2, 1)$ dev'essere iniettiva. Ma questo è assurdo in quanto non può esistere un'applicazione iniettiva da $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ a $\pi_1(D^2, 1) = \{1\}$. \square

Corollario 4.2.3. *Il toro n -dimensionale \mathbb{T}^n ha gruppo fondamentale dato dal prodotto diretto di n copie di \mathbb{Z} . Conseguentemente \mathbb{T}^n e la sfera S^n non sono omotopicamente equivalenti per $n \geq 2$.*

Dimostrazione: segue dal Teorema 4.2.1, dal Teorema 2.6.1 e dal Teorema 2.5.1. \square

Corollario 4.2.4. *(il teorema fondamentale dell'algebra) Ogni polinomio di grado $k \geq 1$ a coefficienti in \mathbb{C} ha una radice in \mathbb{C}*

Dimostrazione: Senza ledere alla generalità della dimostrazione possiamo assumere che il coefficiente che moltiplica z^k sia uguale a 1 cioè che il polinomio sia delle forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k.$$

Supponiamo per assurdo che p non abbia radici, cioè $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora l'applicazione

$$G : I \times [0, +\infty) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$$

definita da

$$G(t, r) = \frac{p(re^{2\pi i t})}{|p(re^{2\pi i t})|} \frac{|p(r)|}{p(r)}$$

è continua. Consideriamo l'applicazione $F : I \times I \rightarrow S^1$ definita da:

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, \frac{s}{1-s}) & \text{se } t \in I, 0 \leq s < 1 \\ e^{2\pi i k t} & \text{se } t \in I, s = 1. \end{cases}$$

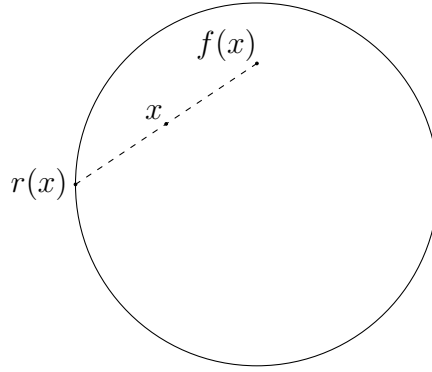
Non è difficile vedere che F è continua. Infatti, un calcolo diretto mostra che

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} F(t, s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} G(t, \frac{s}{1-s}) = \lim_{r \rightarrow +\infty} G(t, r) = e^{2\pi i k t}$$

Inoltre $F(t, 0) = 1$, $F(t, 1) = e^{2\pi i k t}$, $F(0, s) = F(1, s) = 1$, per ogni $s \in I$. Quindi F definisce un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra il laccio costante ϵ_1 e il laccio $f(t) = e^{2\pi i k t}$ (lacci basati in $1 \in S^1$). Osserviamo che il sollevamento di ϵ_1 che inizia in 0 è ϵ_0 , mentre il sollevamento di f che inizia in 0 è $\tilde{f} = kt$. Quindi $0 = \epsilon_0(1) \neq \tilde{f}(1) = k$ in contrasto con il Corollario 3.3.5. \square

Corollario 4.2.5 (il teorema del punto fisso di Brouwer). *Sia $f : D^2 \rightarrow D^2$ un'applicazione continua. Allora f ha un punto fisso, cioè esiste $x_0 \in D^2$ tale che $f(x_0) = x_0$.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^2$. Allora possiamo definire un'applicazione $r : D^2 \rightarrow S^1$ che al punto $x \in D^2$ associa l'intersezione della semiretta affine di \mathbb{R}^2 con origine in x e vettore direttore $x - f(x)$, con la frontiera di D^2 (cioè S^1).



Non è difficile scrivere l'espressione analitica di r e verificare che è continua. Infatti, un'equazione parametrica della semiretta in questione è la seguente:

$$s(x) = x + tg(x), \quad t \geq 0, \quad g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

L'intersezione di tale semiretta con S^1 si ottiene per quei valori di t tali che $\|s(x)\|^2 = 1$ cioè:

$$t^2 + 2tx \cdot g(x) + \|x\|^2 = 1$$

dove “ \cdot ” denota il prodotto scalare di \mathbb{R}^2 . L'unica soluzione positiva di quest'equazione è:

$$t = -x \cdot g(x) + \sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2}$$

e quindi l'espressione analitica di $r : D^2 \rightarrow S^1$ diventa:

$$r(x) = x + \left(\sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2} - x \cdot g(x) \right) g(x),$$

dalla quale si vede che r è continua. Osserviamo infine che r è un retrazione da D^2 a S^1 (come si verifica facilmente dalla sua espressione analitica o dalla sua costruzione geometrica). Questo è in contrasto con il Corollario 4.2.2 e mostra che deve esistere un punto fisso per f . \square

Corollario 4.2.6. *(il Teorema di Frobenius) Sia A un matrice 3×3 con entrate strettamente positive. Allora A ammette un autovalore reale positivo.*

Dimostrazione: Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $T(x, y, z) = A(x, y, z)^T$. Consideriamo il sottospazio di \mathbb{R}^3 ottenuto dall'intersezione di S^2 con il primo ottante e cioè:

$$B = S^2 \cap \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Osserviamo che, per le ipotesi sulla matrice A , dato $p \in B$, $T(p) \in \mathbb{R}^3$ è non nullo e tutte le sue componenti sono maggiori o uguali a zero. Resta così definita un'applicazione continua $p \mapsto \frac{T(p)}{\|T(p)\|}$ da B in B . Essendo B omeomorfo a D^2 per il Teorema di Brouwer (cfr. Esercizio 4.10) esiste $p_0 \in B$ tale che $\frac{T(p_0)}{\|T(p_0)\|} = p_0$, o equivalentemente $T(p_0) = \|T(p_0)\|p_0$ e quindi $\|T(p_0)\|$ è un autovalore positivo di A . \square

Osservazione 4.2.7. Il Teorema del punto fisso di Brouwer può essere generalizzato al disco D^n , per ogni n , usando la teoria dell'omologia. Una dimostrazione geniale di questo teorema che fa uso del teorema delle funzione inversa è stata ottenuta da John Milnor in [11].

4.3 Il gruppo fondamentale del proiettivo reale

Le tecniche usate nel calcolo del gruppo fondamentale di S^1 possono essere usate per calcolare il gruppo fondamentale del proiettivo reale \mathbb{RP}^n n -dimensionale. Per $n = 1$, $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, del quale abbiamo già calcolato il gruppo fondamentale. Quindi possiamo assumere $n \geq 2$. Dimostriamo dapprima una proprietà generale sui rivestimenti che generalizza il Teorema 3.3.6. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, sia $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ un punto fissato della fibra di x_0 . Analogamente a quanto fatto per il calcolo del gruppo fondamentale di S^1 possiamo definire un'applicazione

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0), [f] \mapsto \tilde{f}(1) \quad (4.4)$$

dove $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Segue dal Corollario 3.3.5 del Capitolo 3 che Φ è un'applicazione ben definita. Il risultato del quale abbiamo bisogno è il seguente:

Teorema 4.3.1. *Se \tilde{X} è connesso per archi allora Φ è suriettiva. Se inoltre \tilde{X} è semplicemente connesso allora Φ è una bigezione.*

Dimostrazione: Dato $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ un arco che unisce $\tilde{x}_0 = \tilde{f}(0)$ con $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1)$. Allora $f := p \circ \tilde{f} : I \rightarrow X$ è un laccio di base x_0 in X e, per definizione di Φ , $\Phi([f]) = \tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Questo mostra che Φ è suriettiva.

Supponiamo ora che \tilde{X} sia semplicemente connesso. Allora \tilde{X} è connesso per archi e Φ è suriettiva per la prima parte. Resta da dimostrare che Φ è iniettiva. Siano $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ tali che $\Phi([f]) = \Phi([g])$. Equivalentemente $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ dove \tilde{f} e \tilde{g} sono i sollevamenti rispettivamente di f e g tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Siccome \tilde{X} è semplicemente connesso $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$ tramite un'omotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ (cfr. (a) in Lemma 2.4.5). Segue che $f \sim_{\{0,1\}, F} g$ tramite l'omotopia $F := p \circ \tilde{F} : I \times I \rightarrow X$. Quindi $[f] = [g]$ e Φ è una bigezione. \square

Teorema 4.3.2. *Il gruppo fondamentale di \mathbb{RP}^n , $n \geq 2$, è il gruppo ciclico \mathbb{Z}_2 .*

Dimostrazione: Consideriamo l'identificazione $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, x \mapsto [x]$ tale che $y \in [x]$ se e solo se $y = \pm x$. Allora p è un omeomorfismo locale. Infatti per ogni punto $x \in S^n$ sia V un aperto di S^n che contiene x e tale che $V \cap (-V) = \emptyset$, $-V = \{-x \mid x \in V\}$. Allora la restrizione $p|_V : V \rightarrow p(V)$ è un omeomorfismo tra V e l'aperto $p(V)$ di \mathbb{RP}^n ($p(V)$ è aperto in quanto $p^{-1}(p(V)) = V \cup (-V)$ aperto di S^n). Segue allora dal Teorema 3.2.4 del Capitolo 3 che p è un rivestimento di grado due. Usando il fatto che S^n è semplicemente connessa (cfr. Proposizione 2.5.1) e il Teorema 4.3.1 segue che $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ è un gruppo con due elementi e quindi isomorfo a \mathbb{Z}_2 . \square

Osservazione 4.3.3. Dal Teorema 4.3.2 e dal Corollario 4.2.3 deduciamo che le superfici S^2 , \mathbb{T}^2 e \mathbb{RP}^2 sono topologicamente distinte. Nel Capitolo 8 calcoleremo il gruppo fondamentale di tutte le superfici compatte e connesse.

4.4 Esercizi

Esercizio 4.1. Si dimostrino le affermazioni fatte negli Esempi 1.1.2 e 1.2.2 del Capitolo 1.

Esercizio 4.2. Si dimostri che il nastro di Möbius ha gruppo fondamentale isomorfo a \mathbb{Z} .

Esercizio 4.3. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ non esiste un'applicazione continua $f : S^n \rightarrow S^1$ tale che $f(-x) = -f(x)$. (Suggerimento: imitare la dimostrazione del Teorema di Borsuk–Ulam ($n = 2$)).

Esercizio 4.4. Dimostrare che dati due insiemi misurabili nel piano esiste una retta che divide ognuno di essi in due parti della stessa area.

Esercizio 4.5. Trovare due spazi topologici X e Y e una funzione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ iniettiva (risp. suriettiva) tale che φ_* non sia iniettiva (risp. non sia suriettiva).

Esercizio 4.6. Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti sottospazi di \mathbb{R}^2 : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$; $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$; $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$, dove $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Esercizio 4.7. Calcolare il gruppo fondamentale di $S^n \times S^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.8. Dimostrare che \mathbb{R}^2 non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Esercizio 4.9. Si dimostri che uno spazio topologico non può essere contemporaneamente una 2-varietà e una n -varietà per $n > 2$.

Esercizio 4.10. Sia B uno spazio topologico omeomorfo al disco D^2 . Dimostrare che un'applicazione continua $f : B \rightarrow B$ ha un punto fisso.

Esercizio 4.11. Sia A un retratto del disco D^2 . Dimostrare che un'applicazione continua $f : A \rightarrow A$ ha un punto fisso.

Esercizio 4.12. Sia n un numero naturale positivo. Dimostrare che un'applicazione continua da D^n a se stesso ha un punto fisso usando il fatto che $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ per ogni $n \geq 2$, dove $\pi_n(S^n)$ denota l' n -esimo gruppo di omotopia della sfera S^n .

Esercizio 4.13. Sia n un numero naturale positivo. Dimostrare che un'applicazione continua dall'interno del disco D^n a se stesso non ha necessariamente un punto fisso.

Capitolo 5

Categorie e funtori

5.1 Categorie

Per maggiori informazioni sulle categorie lo studente potrà consultare [10] in bibliografia.

Una categoria \mathcal{C} consiste di:

- una classe di **oggetti**;
- per ogni coppia di oggetti X, Y un insieme $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (eventualmente vuoto) di **morfismi**;
- per ogni terna X, Y, Z di oggetti una funzione, chiamata **composizione**,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), (\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

1. la composizione è associativa: $\eta \circ (\psi \circ \varphi) = (\eta \circ \psi) \circ \varphi$ ogniqualvolta i due membri dell'uguaglianza hanno senso;
2. per ogni oggetto X , $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ contiene un morfismo id_X , detto **identità**, tale che per ogni morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ si ha

$$\text{id}_Y \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \text{id}_X.$$

Notazione: indicheremo con $\varphi : X \rightarrow Y$ oppure con $X \xrightarrow{\varphi} Y$ un morfismo, ossia un elemento di $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. In generale non è detto che la freccia “ \rightarrow ” rappresenti un'applicazione dall'oggetto X all'oggetto Y nel senso usuale del termine.

Descriviamo ora alcuni esempi di categorie (le verifica che si tratti effettivamente di categorie è lasciata come esercizio per lo studente).

Esempi

1. La categoria \mathcal{Ins} i cui oggetti sono gli insiemi, i cui morfismi sono le applicazioni di insiemi e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
2. La categoria \mathcal{G} i cui oggetti sono i gruppi, i cui morfismi sono gli omomorfismi di gruppi e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
3. La categoria \mathcal{Ab} i cui oggetti sono i gruppi abeliani, i cui morfismi sono gli omomorfismi di gruppi abeliani e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
4. La categoria \mathcal{An} i cui oggetti sono gli anelli, i cui morfismi sono gli omomorfismi di anelli e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
5. La categoria \mathcal{An}_{Ab} i cui oggetti sono gli anelli commutativi, i cui morfismi sono gli omomorfismi di anelli commutativi e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
6. La categoria \mathcal{K} i cui oggetti sono i campi, i cui morfismi sono gli omomorfismi di campi e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
7. La categoria \mathcal{Vett} i cui oggetti sono gli spazi vettoriali su \mathbb{R} , i cui morfismi sono le applicazioni \mathbb{R} -lineari e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
8. La categoria \mathcal{Top} i cui oggetti sono gli spazi topologici, i cui morfismi sono le applicazioni continue e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
9. La categoria \mathcal{Top}_* i cui oggetti sono gli spazi topologici con un punto fissato (cioè le coppie (X, x) , X spazio topologico e $x \in X$), i cui morfismi sono le applicazioni continue che mandano il punto fissato di uno spazio nel punto fissato dell'altro e la composizione di morfismi è l'usuale composizione di applicazioni.
10. La categoria \mathcal{HTop} i cui oggetti sono gli spazi topologici, i cui morfismi sono le classi di omotopia di applicazioni continue. La composizione tra due classi di equivalenza $[\varphi]$, $[\psi]$, $\varphi \in C(X, Y)$, $\psi \in C(Y, Z)$, è definita come $[\psi \circ \varphi]$.
11. La categoria \mathcal{HTop}_* i cui oggetti sono gli spazi topologici con un punto fissato e i cui morfismi sono le classi d'equivalenza di applicazioni continue modulo omotopia relativa al punto fissato. La composizione di due classi è definita come nell'esempio precedente.

Osserviamo che in tutti gli esempi precedenti, tranne negli ultimi due, le categorie sono costituite da insiemi dotati di una struttura che viene rispettata dai rispettivi morfismi. Esempi di categorie siffatte sono chiamate **concrete**.

Sia \mathcal{C} una categoria. Un morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ è detto **isomorfismo** se esiste un morfismo $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tale che $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$ e $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$. Per esempio nella categoria \mathcal{Ins} gli isomorfismi sono le bigezioni, nella categoria \mathcal{G} sono gli isomorfismi di gruppi, nella categoria \mathcal{Vett} gli isomorfismi sono gli isomorfismi di spazi vettoriali, nella categoria \mathcal{Top} sono gli omeomorfismi e nella categoria \mathcal{HTop} sono le classi di equivalenze omotopiche.

Una **sottocategoria** \mathcal{D} di una categoria \mathcal{C} è una categoria i cui oggetti sono alcuni degli oggetti della categoria \mathcal{C} e i cui morfismi sono un sottoinsieme dei morfismi di \mathcal{C} con la legge di composizione e le identità di \mathcal{C} . La sottocategoria \mathcal{D} di \mathcal{C} è detta **piena** se $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \mathcal{D}$. Per esempio \mathcal{Ab} è una sottocategoria piena di \mathcal{G} mentre \mathcal{G} è una sottocategoria di \mathcal{Ins} che non è piena.

Esempio 5.1.1. (gruppi come categorie) Supponiamo che \mathcal{C} sia una categoria con un solo oggetto X , dove ogni morfismo sia un isomorfismo. Tutta la struttura della categoria è contenuta nell'insieme dei morfismi $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ e nelle loro composizioni. Gli assiomi di una categoria ci dicono che due morfismi possono essere composti per ottenere un altro morfismo, che la composizione è associativa e che esiste un morfismo identità. Dal momento che stiamo assumendo che tutti i morfismi siano isomorfismi allora ogni morfismo è invertibile. Quindi $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ ha la struttura di gruppo rispetto alla composizione. Viceversa ogni gruppo G può essere identificato con una categoria. Basta pensare il gruppo G come una sottocategoria di \mathcal{Ins} che consiste di un solo oggetto G e delle applicazioni $L_g : G \rightarrow G$ definite da $L_g(h) = gh$, per ogni $h \in G$.

5.2 Funtori

Per maggiori informazioni sui funtori si veda [10]. Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due categorie. Un **funtore covariante** (risp. **controvariante**) \mathcal{F} da \mathcal{C} a \mathcal{D} è una coppia di applicazioni (ciascuna delle quali verrà indicata ancora con \mathcal{F}) la prima delle quali associa a ogni oggetto X di \mathcal{C} un oggetto $\mathcal{F}(X)$ di \mathcal{D} e la seconda associa ad ogni morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un **morfismo indotto** $\mathcal{F}(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ (risp. $\mathcal{F}(\varphi) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$) tale che:

$$\mathcal{F}(\eta \circ \psi) = \mathcal{F}(\eta) \circ \mathcal{F}(\psi) \quad (\text{risp. } \mathcal{F}(\eta \circ \psi) = \mathcal{F}(\psi) \circ \mathcal{F}(\eta)); \quad \mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}.$$

Il morfismo indotto $\mathcal{F}(\varphi)$ viene solitamente denotato con φ_* se \mathcal{F} è un funtore covariante e con φ^* se \mathcal{F} è un funtore controvariante.

Esempi

1. Data una categoria \mathcal{C} il funtore covariante identità $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ per il quale $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $\text{id}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \varphi$ per ogni oggetto X di \mathcal{C} e ogni $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

2. Il funtore covariante **distratto** dalla categoria $\mathcal{T}op$ alla categoria $\mathcal{I}ns$ che associa ad ogni spazio topologico il suo supporto e ad ogni applicazione continua l'applicazione stessa. Lo studente potrà costruire altri esempi di funtori covarianti “distratti” dagli esempi di categorie descritti sopra.

3. Il funtore covariante 0-esimo **gruppo di omotopia** $\pi_0 : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{I}ns$ che assegna ad ogni spazio topologico X l'insieme $\pi_0(X)$ delle sue componenti connesse per archi (cfr. Paragrafo 2.7) e ad ogni applicazione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ l'applicazione indotta $\varphi_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ che porta la componente connessa C di X nella componente connessa di Y che contiene $\varphi(C)$.

4. Il funtore covariante **gruppo fondamentale** $\pi_1 : \mathcal{T}op_* \rightarrow \mathcal{G}$ che assegna ad ogni spazio topologico (X, x) il suo gruppo fondamentale $\pi_1(X, x)$ e per ogni applicazione continua $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ tale che $\varphi(x) = y$ l'omomorfismo indotto $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$. Il fatto che π_1 sia un funtore covariante segue dal Teorema 2.3.1. Osserviamo che, per il Teorema 2.4.2, resta definito anche un funtore covariante $\pi_1 : \mathcal{H}Top_* \rightarrow \mathcal{G}$.

5. Il funtore covariante n -esimo **gruppo di omotopia** $\pi_n : \mathcal{T}op_* \rightarrow \mathcal{A}b$, $n \geq 2$, che assegna ad ogni spazio topologico (X, x) il suo n -esimo gruppo di omotopia $\pi_n(X, x)$ basato in x e per ogni applicazione continua $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ tale che $\varphi(x) = y$ l'omomorfismo indotto $\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$. Il fatto che π_n sia un funtore covariante segue dal punto 4. del Teorema 2.7.1. Osserviamo che allo stesso modo resta anche definito un funtore covariante $\pi_n : \mathcal{H}Top_* \rightarrow \mathcal{A}b$, $n \geq 2$.

6. Il funtore controvariante da $\mathcal{V}ett$ in se stesso che associa ad ogni spazio vettoriale V il suo spazio duale V^* (l'insieme delle applicazioni \mathbb{R} -lineari da V in \mathbb{R}) e ad ogni applicazione \mathbb{R} -lineare $\varphi : V \rightarrow W$ la sua applicazione duale $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ definita da $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$ per ogni $f \in W^*$.

7. Il funtore controvariante $C : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{A}n_{\mathcal{A}b}$ che ad ogni spazio topologico X associa l'anello commutativo $C(X, \mathbb{R})$ delle funzioni continue da X in \mathbb{R} e ad ogni funzione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ il morfismo indotto $\varphi^* : C(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ definito da $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ per ogni $f \in C(Y, \mathbb{R})$.

8. Sia H un gruppo abeliano fissato. Definiamo un funtore controvariante da $\mathcal{A}b$ a se stesso tale che ad ogni gruppo abeliano G associa il gruppo $\text{Hom}(G, H)$ (gruppo abeliano degli omomorfismi da G a H) e ad ogni omomorfismo $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ l'omomorfismo duale $\varphi^* : \text{Hom}(G_2, H) \rightarrow \text{Hom}(G_1, H)$ definito da $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ per ogni $f \in \text{Hom}(G_2, H)$.

5.3 Prodotti e coprodotti

Sia $\{X_j\}_{j \in J}$ una famiglia di oggetti di una categoria \mathcal{C} . Un oggetto P di \mathcal{C} con un insieme di morfismi $\pi_j : P \rightarrow X_j$, per ogni $j \in J$, chiamati **proiezioni**, è detto un **prodotto** ovvero **prodotto categoriale** degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ se è soddisfatta la seguente *proprietà universale*: dati un qualunque oggetto Y di \mathcal{C} e una famiglia di morfismi $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$, esiste un *unico* morfismo $\varphi : Y \rightarrow P$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \varphi \nearrow & \downarrow \pi_j & \\ Y & \xrightarrow{\varphi_j} & X_j \end{array}$$

In una data categoria \mathcal{C} non è detto che un prodotto esista. Se però esiste esso è unico, a meno di isomorfismi, come mostra la seguente:

Proposizione 5.3.1. *Sia \mathcal{C} una categoria, $\{X_j\}_{j \in J}$ una sua famiglia di oggetti. Se (P, π_j) e (P', π'_j) sono prodotti degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ allora esiste un unico isomorfismo $\varphi : P \rightarrow P'$ che rispetta le proiezioni cioè $\pi'_j \circ \varphi = \pi_j$.*

Dimostrazione: Per la proprietà universale del prodotto esistono due morfismi $\varphi : P \rightarrow P'$ e $\varphi' : P' \rightarrow P$ che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} & P' & \\ \varphi \nearrow & \downarrow \pi'_j & \\ P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P & \\ \varphi' \nearrow & \downarrow \pi_j & \\ P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j \end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \varphi' \circ \varphi \nearrow & \downarrow \pi_j & \\ P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P' & \\ \varphi \circ \varphi' \nearrow & \downarrow \pi'_j & \\ P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j \end{array}$$

D'altra parte i seguenti diagrammi commutano (banalmente)

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \text{id}_P \nearrow & \downarrow \pi_j & \\ P & \xrightarrow{\pi_j} & X_j \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P' & \\ \text{id}_{P'} \nearrow & \downarrow \pi'_j & \\ P' & \xrightarrow{\pi'_j} & X_j \end{array}$$

Segue allora dall'unicità che $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_P$ e $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_{P'}$. Quindi φ (risp. φ') è l'unico isomorfismo che soddisfa $\pi'_j \circ \varphi = \pi_j$ (risp. $\pi_j \circ \varphi' = \pi'_j$) per ogni $j \in J$. \square

Esempio 5.3.2. (prodotto categoriale in $\mathcal{I}ns$) Sia $\{X_j\}$ una famiglia di insiemi. Ricordiamo che il prodotto cartesiano $\prod_{j \in J} X_j$ di una famiglia di insiemi $\{X_j\}_{j \in J}$ (J non necessariamente finito o numerabile) è dato da:

$$\prod_{j \in J} X_j = \{f : J \rightarrow \cup_{j \in J} X_j \mid f(j) \in X_j, j \in J\}$$

cioè come l'insieme delle funzioni definite su J che mandano ogni elemento $j \in J$ in un elemento di X_j . Osserviamo che l'affermazione “il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto” è equivalente all'assioma di scelta. Ovviamente se J è finito, $J = \{1, \dots, n\}$, si ottiene la definizione usuale di prodotto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_n$. Denotiamo con $\pi_k : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_k$ la proiezione nel fattore k -esimo definita da:

$$\pi_k(f) := f(k), f \in \prod_{j \in J} X_j. \quad (5.1)$$

Allora la coppia $(\prod_{j \in J} X_j, \{\pi_j\}_{j \in J})$ è il prodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria $\mathcal{I}ns$. Infatti dato un insieme qualunque Y e una famiglia di applicazioni $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$ allora l'applicazione $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ che a $y \in Y$ associa $\varphi(y) \in \prod_{j \in J} X_j$ definita da

$$\varphi(y)(j) := \varphi_j(y), \forall j \in J \quad (5.2)$$

soddisfa $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$, per ogni $j \in J$ ed è chiaramente unica per il modo in cui è stata definita.

Esempio 5.3.3. (prodotto categoriale in $\mathcal{T}op$) Sia $\{X_j\}$ una famiglia di spazi topologici. Consideriamo la famiglia di insiemi di $\prod_{j \in J} X_j$ costituita dal prodotto degli insiemi della forma $\prod_{j \in J} U_j$, dove U_j è aperto in X_j e $U_j = X_j$ per ogni $j \in J$, tranne per al più un numero finito di j . Questa famiglia di insiemi è un ricoprimento di $\prod_{j \in J} X_j$ e le intersezioni di due elementi qualunque di questa famiglia è ancora un elemento della famiglia. Segue allora da [7, Cap. 4] che esiste un'unica topologia, chiamata **la topologia prodotto**¹, che ha questa famiglia di aperti come base. Nel caso J sia finito si tratta della topologia prodotto che lo studente ha incontrato nel corso di topologia generale (cfr. [7,

¹Nella topologia prodotto vale il sorprendente teorema di Tychonoff che asserisce che il prodotto di un numero arbitrario di spazi topologici compatti è uno spazio topologico compatto.

Cap. 8]). Osserviamo che le proiezioni $\pi_k : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_k$, definite da (5.1), sono applicazioni continue in quanto la controimmagine $\pi_k^{-1}(U)$ di un aperto U di X_k è data da $\pi_k^{-1}(U) = \prod_{j \in J} U_j$ con $U_k = U$ e $U_j = X_j$, per $j \neq k$, che è un aperto (di base) nella topologia prodotto. La coppia $(\prod_{j \in J} X_j, \{\pi_j\}_{j \in J})$ è il prodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria $\mathcal{T}op$. Infatti dato uno spazio topologico Y e una famiglia di applicazioni continue $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$ allora l'applicazione $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ definita da (5.2) è continua (cfr. Esercizio 5.5) e soddisfa la relazione $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$.

Esempio 5.3.4. (prodotto categoriale in \mathcal{G}) Sia $\{G_j\}_{j \in J}$ una famiglia di gruppi. Ricordiamo che il loro prodotto diretto è il gruppo ottenuto considerando il loro prodotto cartesiano $\prod_{j \in J} G_j$ con il prodotto componente per componente

$$(g \cdot h)(j) := g(j) \cdot h(j), \quad g, h \in \prod_{j \in J} G_j,$$

cioè la componente j -esima del prodotto è il prodotto delle componenti j -esime dei singoli fattori. Osserviamo che per ogni $k \in J$ il prodotto diretto $\prod_{j \in J} G_j$ ha un sottogruppo isomorfo a G_k ossia il sottogruppo dove tutti i G_j sono uguali all'identità per $j \neq k$ e $G_j = G_k$. Indicheremo questo sottogruppo con G_k . Per $k \neq l$ è immediato verificare che i due sottogruppi G_k e G_l commutano.

Si verifica facilmente che la proiezione $\pi_k : \prod_{j \in J} G_j \rightarrow G_k$ definita da (5.1) è un omomorfismo di gruppi e quindi un morfismo nella categoria \mathcal{G} . Allora $(\prod_{j \in J} G_j, \{\pi_j\}_{j \in J})$ definisce il prodotto categoriale degli oggetti $\{G_j\}_{j \in J}$ nella categoria \mathcal{G} . Infatti, dato un gruppo G e una famiglia di omomorfismi $\varphi_j : G \rightarrow G_j$ allora l'applicazione $\varphi : G \rightarrow \prod_{j \in J} G_j$ definita da $\varphi(g)(j) = \varphi_j(g)$, per ogni $j \in J$, è un omomorfismo:

$$\varphi(gh)(j) = \varphi_j(gh) = \varphi_j(g)\varphi_j(h) = \varphi(g)(j)\varphi(h)(j) = (\varphi(g)\varphi(h))(j)$$

e $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$.

Il concetto di coprodotto si ottiene invertendo tutte le frecce nella definizione di prodotto come segue. Sia $\{X_j\}_{j \in J}$ una famiglia di oggetti di una categoria \mathcal{C} . Un oggetto S di \mathcal{C} con un insieme di morfismi $i_j : X_j \rightarrow S$, per ogni $j \in J$, chiamati **inclusioni**, è detto un **coprodotto** ovvero **coprodotto categoriale** degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ se è soddisfatta la seguente *proprietà universale*: dati un qualunque oggetto Y di \mathcal{C} e una famiglia di morfismi $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$, esiste un unico morfismo $\varphi : S \rightarrow Y$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
& S & \\
i_j \uparrow & \searrow \varphi & \\
X_j & \xrightarrow{\varphi_j} & Y
\end{array}$$

In una data categoria \mathcal{C} non è detto che un coprodotto esista. Se però esiste esso è unico (a meno di isomorfismi) come mostra la seguente:

Proposizione 5.3.5. *Sia \mathcal{C} una categoria, $\{X_j\}_{j \in J}$ una famiglia di oggetti. Se (S, i_j) e (S', i'_j) sono coprodotti degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ allora esiste un isomorfismo $\varphi : S' \rightarrow S$ che rispetta le inclusioni cioè $\varphi \circ i'_j = i_j$.*

Dimostrazione: Per la proprietà universale del coprodotto esistono due morfismi $\varphi : S' \rightarrow S$ e $\varphi' : S \rightarrow S'$ che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
S' & & S \\
i'_j \uparrow & \searrow \varphi & \uparrow \\
X_j & \xrightarrow{i_j} & S
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
S & & S' \\
i_j \uparrow & \searrow \varphi' & \uparrow \\
X_j & \xrightarrow{i'_j} & S'
\end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
S & & S \\
i_j \uparrow & \searrow \varphi \circ \varphi' & \uparrow \\
X_j & \xrightarrow{i_j} & S
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
S' & & S' \\
i'_j \uparrow & \searrow \varphi' \circ \varphi & \uparrow \\
X_j & \xrightarrow{i'_j} & S'
\end{array}$$

Segue allora dall'unicità che $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_S$ e $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_{S'}$. Quindi φ (risp. φ') è l'unico isomorfismo che soddisfa $\varphi \circ i'_j = i_j$ (risp. $\varphi' \circ i_j = i'_j$) per ogni $j \in J$. \square

Esempio 5.3.6. (coprodotto categoriale in \mathbf{Ins}) Consideriamo l'unione disgiunta $S = \bigcup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$ di una famiglia di insiemi $\{X_j\}_{j \in J}$ e le inclusioni naturali

$$i_j : X_j \rightarrow S, \quad x \mapsto i_j(x) := (x, j).$$

Allora la coppia $(S, \{i_j\}_{j \in J})$ è il coprodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria \mathbf{Ins} . Infatti dato un insieme qualunque Y e una famiglia di applicazioni $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$ allora l'applicazione $\varphi : S \rightarrow Y$ che a $s = (x, j) \in X_j \times \{j\} \subseteq S$ associa $\varphi(s) = \varphi_j(x)$ è tale che $\varphi \circ i_j = \varphi_j$, per ogni $j \in J$.

Esempio 5.3.7. (coprodotto categoriale in \mathbf{Top}) Sia $\{X_j\}$ una famiglia di spazi topologici. Consideriamo la **topologia dell'unione disgiunta** sull'insieme $S = \bigcup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$ definita come quella topologia dove un insieme $U \subseteq S$ è aperto se e solo se $U \cap (X_j \times \{j\})$ è aperto in X_j per ogni $j \in J$. Si verifica facilmente

che le inclusioni naturali $i_j : X_j \rightarrow S, x \mapsto (x, j)$ sono continue rispetto a questa topologia e che la coppia $(S, \{i_j\}_{j \in J})$ è il coprodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria \mathcal{Top} . Infatti, dato uno spazio topologico Y e una famiglia di applicazioni continue $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$, allora l'applicazione $\varphi : S \rightarrow Y : (x, j) \mapsto \varphi_j(x)$ è continua e soddisfa $\varphi \circ i_j = \varphi_j$ (cfr. Esercizio 5.6).

5.4 Il prodotto libero di gruppi

Come abbiamo visto nell'Esempio 5.3.4 data una famiglia $\{G_j\}_{j \in J}$ di gruppi possiamo definire il loro prodotto diretto $\prod_{j \in J} G_j$ che rappresenta il prodotto categoriale in \mathcal{G} . Inoltre per ogni j il gruppo G_j è (isomorfo a) un sottogruppo di $\prod_{j \in J} G_j$ e G_k e G_l , per $k \neq l$, commutano. In questo paragrafo definiremo un prodotto più complicato, chiamato prodotto libero, denotato $*_{j \in J} G_j$, tra i gruppi G_j che corrisponde al coprodotto categoriale in \mathcal{G} e dove per ogni k il gruppo G_k è (isomorfo a) un sottogruppo di $*_{j \in J} G_j$; inoltre, per $k \neq l$, G_k e G_l non commutano.

Un **parola** in $\{G_j\}_{j \in J}$ è una stringa di lunghezza m , $m \geq 0$, di elementi dell'unione disgiunta $\cup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$. Equivalentemente una parola è una m -upla della forma (g_1, \dots, g_m) dove ogni elemento g_i appartiene a un qualche G_j .

Osservazione 5.4.1. Ricordiamo che un elemento dell'unione disgiunta $\cup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$ è della forma (g, j) , dove j è un indice per ricordarci da quale gruppo proviene g . Nella nostra notazione stiamo denotando l'elemento (g, j) con la lettera g ma bisogna tenere a mente che gruppi corrispondenti a indici diversi si devono considerare diversi anche se i gruppi sono gli stessi.

La stringa di lunghezza zero, chiamata la *parola vuota* sarà denotata come $()$. Sia \mathcal{W} l'insieme di tutte le parole in $\cup_{j \in J} (G_j \times \{j\})$. Definiamo un prodotto in \mathcal{W} per giustapposizione:

$$(g_1, \dots, g_m)(h_1, \dots, h_n) = (g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n).$$

Chiaramente questo prodotto è associativo e la parola vuota è l'elemento neutro sinistro e destro. D'altra parte \mathcal{W} con questo prodotto è un monoide ma non è un gruppo (non esiste l'inverso). Per superare questo problema definiamo una relazione d'equivalenza sull'insieme delle parole come segue. Una **riduzione elementare** è un'operazione di uno dei due tipi che seguono:

1. $(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_m) \mapsto (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_m)$ se g_i, g_{i+1} appartengono a qualche G_k ;

2. $(g_1, \dots, g_{i-1}, 1_k, g_{i+1}, \dots, g_m) \mapsto (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_m)$, dove 1_k denota l'elemento neutro in $G_k, k \in J$.

La prima operazione moltiplica due entrate consecutive se appartengono allo stesso gruppo; la seconda operazione cancella un elemento identità che appare in una data parola.

Diremo che due parole $W, W' \in \mathcal{W}$ sono equivalenti e scriveremo $W \sim W'$ se W può essere ottenuta da W' attraverso una successione finita di operazioni elementari o delle loro inverse. E' facile vedere che \sim definisce una relazione d'equivalenza su \mathcal{W} . L'insieme delle classi di equivalenza è chiamato il **prodotto libero** dei gruppi $\{G_j\}_{j \in J}$, e verrà denotato con $*_{j \in J} G_j$ e se J è finito, $J = \{1, \dots, n\}$, verrà denotato con $G_1 * \dots * G_n$. Le classe d'equivalenza di una parola $V \in \mathcal{W}$ verrà denotata con $[V]$.

Teorema 5.4.2. *Data una famiglia di gruppi $\{G_j\}_{j \in J}$ il loro prodotto libero $*_{j \in J} G_j$ è un gruppo rispetto al prodotto indotto dalla giustapposizione di parole. Equivalentemente, se $[V]$ e $[W]$ sono due elementi in $*_{j \in J} G_j$, allora $[V][W] = [VW]$ definisce la struttura di gruppo in $*_{j \in J} G_j$.*

Dimostrazione: La prima cosa da verificare è che il prodotto in $*_{j \in J} G_j$ rispetta la relazione d'equivalenza, cioè se $V \sim V'$ e $W \sim W'$ allora $VW \sim V'W'$. Osserviamo che se la parola V' si ottiene da V con una sola riduzione elementare allora $V'W$ si ottiene da VW con una sola riduzione elementare (che agisce su V e lascia invariata W). Quindi per induzione sul numero di operazioni elementari si ottiene che se $V \sim V'$ allora

$$VW \sim V'W.$$

Analogamente se la parola W' si ottiene da W con una singola riduzione elementare allora $V'W'$ si ottiene da $V'W$ con una sola riduzione elementare. Quindi, come prima, per induzione sul numero di operazioni elementari si ottiene che se $W \sim W'$, allora

$$V'W \sim V'W'.$$

Segue che se $V \sim V'$, $W \sim W'$, allora

$$VW \sim V'W \sim V'W'$$

che è quello che volevamo dimostrare.

L'associatività del prodotto segue dal fatto che la giustapposizione è associativa. La classe d'equivalenza della parola vuota $()$ è chiaramente l'elemento neutro

(sinistro e destro per quest'operazione). Infine, il fatto che

$$(g_1, \dots, g_m)(g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1}) = () = (g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1})(g_1, \dots, g_m)$$

mostra che la classe d'equivalenza della parola $(g_m^{-1}, \dots, g_1^{-1})$ è l'inversa della classe d'equivalenza della parola (g_1, \dots, g_m) . \square

Vogliamo ora vedere che ogni G_k è (isomorfo ad) un sottogruppo di $*_{j \in J} G_j$. Per fare questo (e per altri motivi) vogliamo descrivere un modo per trovare un unico rappresentante di una data classe di equivalenza in $*_{j \in J} G_j$. Diremo che una parola (g_1, \dots, g_m) è *ridotta* se non è possibile “accorciarla” tramite operazioni elementari, cioè nessun elemento g_i è l'identità e ogni coppia di elementi consecutivi g_i, g_{i+1} non appartiene allo stesso gruppo. Ogni parola è equivalente ad un parola ridotta: basta applicare una successione finita di operazioni elementari fino a quando la parola non è ridotta. Inoltre si può dimostrare (noi non lo faremo) che la parola ridotta che rappresenta una data classe di equivalenza è unica, come espresso dal seguente:

Teorema 5.4.3. *Ogni elemento del gruppo libero $*_{j \in J} G_j$ è rappresentato da un'unica parola ridotta.*

Osservazione 5.4.4. La dimostrazione del Teorema 5.4.3, pur non essendo particolarmente complicata non aggiunge niente all'intuizione della definizione di prodotto libero. Questo è uno dei motivi per i quali è stata omessa.

Per ogni $k \in J$, definiamo l'**inclusione canonica** $i_k : G_k \rightarrow *_{j \in J} G_j$, $g \mapsto [(g)]$ che associa a $g \in G_k$ la classe d'equivalenza della parola (g) che lo rappresenta.

Corollario 5.4.5. *L'inclusione canonica i_k è un omomorfismo iniettivo di gruppi.*

Dimostrazione: Siano $g_1, g_2 \in G_k$. Allora

$$i_k(g_1 g_2) = [(g_1 g_2)] = [(g_1)(g_2)] = [(g_1)][(g_2)] = i_k(g_1) i_k(g_2),$$

dove la seconda uguaglianza segue da $(g_1 g_2) \sim (g_1)(g_2)$ e la terza dal fatto che il prodotto libero è compatibile con la giustapposizione di parole (cfr. Teorema 5.4.2). Questo mostra che i_k è un omomorfismo di gruppi. Mostriamo che i_k è iniettivo: sia $g \in G_k$, $g \neq 1_k$, allora $i_k(g) = [(g)]$ è la classe d'equivalenza della parola ridotta (g) e $i_k(1_k) = [()]$ è la classe d'equivalenza della parola (ridotta) vuota. Essendo $g \neq 1_k$ segue dal Teorema 5.4.3 che $i_k(g) \neq i_k(1_k)$. \square

Quindi ogni G_k è isomorfo ad un sottogruppo (che indicheremo ancora con G_k) del prodotto libero $*_{j \in J} G_j$. In questo caso due sottogruppi non banali G_k e G_l di $*_{j \in J} G_j$ non commutano tra loro (cfr. Esercizio 5.7).

Notazione: Denoteremo la classe d'equivalenza $[(g)]$ della parola (g) semplicemente con g e la classe d'equivalenza $[(g_1, g_2, \dots, g_m)]$ della parola (g_1, g_2, \dots, g_m) con $g_1 g_2 \cdots g_m$. Inoltre, il prodotto tra due classi $g_1 g_2 \cdots g_m$ e $h_1 h_2 \cdots h_n$ si denoterà semplicemente con la giustapposizione $g_1 g_2 \cdots g_m h_1 h_2 \cdots h_n$.

Teorema 5.4.6. *Sia $\{G_j\}_{j \in J}$ una famiglia di gruppi. Allora il prodotto libero $*_{j \in J} G_j$ insieme alle inclusioni canoniche $i_k : G_k \rightarrow *_{j \in J} G_j$ è il coprodotto nella categoria \mathcal{G} .*

Dimostrazione: dobbiamo dimostrare che è soddisfatta la proprietà universale del coprodotto e cioè che per ogni gruppo G e per ogni famiglia di omomorfismi $\varphi_k : G_k \rightarrow G$ esiste un unico omomorfismo $\varphi : *_{j \in J} G_j \rightarrow G$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & *_{j \in J} G_j & \\ i_k \uparrow & \searrow \varphi & \\ G_k & \xrightarrow{\varphi_k} & G \end{array}$$

Se una tale φ esiste è unica. Infatti dalla commutatività del diagramma si ha $\varphi \circ i_k = \varphi_k$. Allora

$$\varphi(g) = \varphi_k(g), \quad \forall g \in G_k, \quad (5.3)$$

dove stiamo identificando G_k con la sua immagine tramite i_k . Il fatto che φ sia un omomorfismo ci dice che

$$\varphi(g_1 \cdots g_m) = \varphi(g_1) \cdots \varphi(g_m). \quad (5.4)$$

Le condizioni (5.3) e (5.4) implicano che φ è univocamente determinata.

Dimostriamo ora l'esistenza di φ . Data $g_1 \cdots g_m \in *_{j \in J} G_j$ definiamo $\varphi : *_{j \in J} G_j \rightarrow G$ usando le (5.3) e (5.4). Bisogna allora verificare che φ è ben definita sulle classi d'equivalenza ossia che il valore di φ non dipende dalle riduzioni elementari (il fatto che sia un omomorfismo che rende commutativo il diagramma segue da come φ è definita). Rispetto alla prima riduzione elementare dobbiamo verificare che se g_i e g_{i+1} appartengono allo stesso gruppo G_k allora $\varphi(g_i g_{i+1}) = \varphi(g_i) \varphi(g_{i+1})$. Infatti

$$\varphi(g_i g_{i+1}) = \varphi_k(g_i g_{i+1}) = \varphi_k(g_i) \varphi_k(g_{i+1}) = \varphi(g_i) \varphi(g_{i+1}).$$

Inoltre se 1_k denota l'elemento neutro in G_k e 1_G l'elemento neutro di G allora

$$\varphi(1_k) = \varphi_k(1_k) = 1_G$$

la quale mostra che φ non dipende da riduzioni elementari del secondo tipo e conclude la dimostrazione del teorema. \square

5.5 Esercizi

Esercizio 5.1. Dimostrare che le categorie descritte negli Esempi 1-11 del Paragrafo 5.1 sono effettivamente categorie.

Esercizio 5.2. Dimostrare che i funtori descritti negli Esempi 1-8 del Paragrafo 5.2 sono effettivamente funtori.

Esercizio 5.3. Dimostrare che un funtore (covariante o controvariante) da una categoria \mathcal{C} ad una categoria \mathcal{D} porta gli isomorfismi di \mathcal{C} negli isomorfismi di \mathcal{D} . (Suggerimento: si imiti la dimostrazione del Teorema 2.3.1).

Esercizio 5.4. Dimostrare che \mathcal{K} è una sottocategoria non piena di $\mathcal{A}n_{Ab}$.

Esercizio 5.5. Dimostrare che l'applicazione $\varphi : Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ dell'Esempio 5.3.3 è continua se e solo se le sue componenti $\varphi_j : Y \rightarrow X_j$ sono continue.

Esercizio 5.6. Dimostrare che la topologia dell'unione disgiunta (cfr. Esempio 5.3.7) è effettivamente una topologia. Dimostrare inoltre che tale topologia è la più fine tra tutte le topologia sull'insieme $S = \cup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$ rispetto alle quali le inclusioni naturali $i_j : X_j \rightarrow S, x_j \mapsto (x_j, j)$ sono continue. Dimostrare che (S, i_j) è il coprodotto categoriale degli oggetti $\{X_j\}_{j \in J}$ nella categoria \mathcal{Top} .

Esercizio 5.7. Dimostrare che il prodotto libero di due o più gruppi non banali non è abeliano.

Capitolo 6

Gruppi liberi, presentazioni e abelianizzazioni

6.1 Gruppi liberi

Sia G un gruppo e $S \subseteq G$ un suo sottoinsieme. Diremo che S **genera** G e gli elementi di S verranno chiamati **generatori** di G , se ogni elemento di G può essere scritto come prodotto di un numero finito di elementi di S e dei loro inversi. In altre parole se $S \subseteq G$ genera G allora ogni elemento di G può essere scritto come prodotto finito di potenze intere di elementi di S . Diremo che G è **finitamente generato** se esiste un insieme finito S che genera G . Chiaramente ogni gruppo ha un insieme di generatori dati dal gruppo stesso. Solitamente si cerca un numero di generatori che sia minimale. Un esempio semplice ma importante è quello di gruppo ciclico che ha precisamente un generatore (e quindi è finitamente generato). Segue dai corsi di algebra che un gruppo ciclico è isomorfo a \mathbb{Z} (gruppo ciclico infinito) oppure a \mathbb{Z}_n per qualche n (gruppo ciclico finito). Dato un qualunque simbolo x possiamo formare il gruppo ciclico infinito generato da x (e quindi isomorfo \mathbb{Z}) e denotato con $F(x)$. Gli elementi di $F(x)$ sono le potenze intere di x con la moltiplicazione $x^m x^n = x^{m+n}$ ed elemento neutro x^0 .

I gruppi abeliani finitamente generati sono classificati.

Teorema 6.1.1. (*classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati*) Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Allora G è isomorfo al prodotto diretto:

$$\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}},$$

dove i p_j sono numeri primi non necessariamente distinti ¹. Inoltre il prodotto

¹Per esempio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ non è isomorfo a \mathbb{Z}_4 . Infatti $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ se e solo se m e n sono primi tra loro.

diretto è unico a meno di permutazione dei fattori e quindi il numero dei fattori \mathbb{Z} è unico e le potenze $p_j^{r_j}$ sono uniche.

Dimostrazione: Lo studente interessato potrà trovare una dimostrazione in [2, Cap II, par. 11]). \square

Il numero dei fattori \mathbb{Z} che appaiono nel teorema è chiamato il **rango** di G e il gruppo $\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}$, il **sottogruppo di torsione** di G .

Sia S un insieme. Definiamo il **gruppo libero sull'insieme** S , denotato con $F(S)$, come il prodotto libero di tutti i gruppi ciclici infiniti generati da elementi di S , cioè: $F(S) = *_{x \in S} F(x)$. Chiaramente se S è in biezione con S' allora $F(S)$ è isomorfo a $F(S')$. Osserviamo che esiste un'inclusione naturale $i : S \rightarrow F(S)$ che invia ogni $x \in S$ nella parola $x \in F(S)$ e quindi possiamo pensare S come un sottoinsieme di $F(S)$. Per il Teorema 5.4.3, ogni elemento di $F(S)$ può essere scritto come una parola ridotta cioè come:

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m},$$

dove gli x_j sono elementi di S , $x_j \neq x_{j+1}$ per ogni j e n_j sono numeri interi. La moltiplicazione nel gruppo $F(S)$ si ottiene semplicemente per giustapposizione e sostituendo potenze consecutive dello stesso x_j come $x_j^m x_j^n = x_j^{m+n}$. Nel caso che $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ sia un insieme finito denoteremo il gruppo libero generato da S con il simbolo $F(x_1, \dots, x_m) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ (m fattori). Gli x_j si chiamano i **generatori liberi** del gruppo libero generato da $S = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Osservazione 6.1.2. Esistono gruppi che non sono liberi. Ad esempio ogni gruppo finito non è libero in quanto ogni gruppo libero ha un numero infinito di elementi.

La seguente proposizione mostra che il gruppo libero $F(S)$ soddisfa una proprietà universale.

Proposizione 6.1.3. *Sia S un'insieme. Il gruppo libero $F(S)$ soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni gruppo G e per ogni applicazione $\varphi : S \rightarrow G$ esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : F(S) \rightarrow G$ che rende commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} F(S) & & \\ \uparrow i & \searrow \tilde{\varphi} & \\ S & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

Dimostrazione: Sia $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} \in F(S)$ una parola non necessariamente ridotta. Definiamo

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}) = \varphi(x_1)^{n_1} \varphi(x_2)^{n_2} \cdots \varphi(x_m)^{n_m}. \quad (6.1)$$

L'applicazione $\tilde{\varphi}$ è ben definita. Infatti:

$$\tilde{\varphi}(x_j^{m+n}) = \varphi(x_j)^{m+n} = \varphi(x_j)^m \varphi(x_j)^n = \tilde{\varphi}(x_j^m) \tilde{\varphi}(x_j^n)$$

Inoltre, per costruzione, $\tilde{\varphi}$ è l'unico omomorfismo di gruppi tale che $\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$. \square

Il gruppo libero $F(S)$ su un insieme S è caratterizzato dalla precedente proprietà universale.

Proposizione 6.1.4. *Sia S un insieme, H un gruppo e $j : S \rightarrow H$ un'applicazione tale che per ogni gruppo G e per ogni applicazione $\psi : S \rightarrow G$ esiste un unico omomorfismo $\tilde{\psi} : H \rightarrow G$ che rende commutativo il seguente diagramma.*

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ j \uparrow & \searrow \tilde{\psi} & \\ S & \xrightarrow{\psi} & G \end{array}$$

Allora esiste un unico isomorfismo $\tilde{j} : F(S) \rightarrow H$ tale che $\tilde{j} \circ i = j$.

Dimostrazione: Per la proprietà universale di $F(S)$ e per le ipotesi esistono due morfismi $\tilde{i} : H \rightarrow F(S)$ e $\tilde{j} : F(S) \rightarrow H$ che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} H & & F(S) \\ j \uparrow & \searrow \tilde{i} & \uparrow i \\ S & \xrightarrow{i} & F(S) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(S) & & H \\ i \uparrow & \searrow \tilde{j} & \xrightarrow{j} S \end{array}$$

Si ottengono quindi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} H & & F(S) \\ j \uparrow & \searrow \tilde{j} \circ \tilde{i} & \uparrow i \\ S & \xrightarrow{j} & H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(S) & & F(S) \\ i \uparrow & \searrow \tilde{i} \circ \tilde{j} & \xrightarrow{i} S \end{array}$$

Segue allora dall'unicità che $\tilde{i} \circ \tilde{j} = \text{id}_H$ e $\tilde{j} \circ \tilde{i} = \text{id}_{F(S)}$. Quindi \tilde{j} (risp. \tilde{i}) è l'unico isomorfismo che soddisfa $\tilde{j} \circ i = j$ (risp. $\tilde{i} \circ j = i$). \square

6.2 Presentazione di gruppi

A volte è utile descrivere un dato gruppo specificando un insieme di suoi “generatori” soggetti ad alcune “relazioni” che ci dicono come moltiplicare i generatori tra loro. Per esempio il gruppo ciclico di ordine n generato da x può essere descritto come il gruppo generato da x tramite la relazione $x^n = 1$. Le altre relazioni “seguono” da questa, per esempio $x^{2n} = 1$. Oppure il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ può essere descritto da due generatori x e y con la relazione $xy = yx$. Il gruppo $F(x, y) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ può essere descritto dai generatori x, y senza relazioni (cf. Esempio 6.2.3). In effetti il fatto che alcune relazioni “seguano” da altre può essere reso rigoroso tramite il concetto di presentazione di gruppo. Per definirla abbiamo bisogno del concetto di chiusura normale. Sia G un gruppo e $R \subseteq G$ un suo sottoinsieme. La **chiusura normale** $N(R)$ di R in G è l’intersezione di tutti i sottogruppi normali di G che contengono R o, equivalentemente, come il più piccolo sottogruppo normale di G che contiene R .

Una descrizione equivalente di $N(R)$ è la seguente:

Proposizione 6.2.1. *Sia G un gruppo e R un suo sottoinsieme. Allora $N(R)$ è generato da tutti i coniugati di elementi di R .*

Dimostrazione: Sia N' il sottogruppo di G generato da tutti i coniugati di elementi di R (ossia elementi della forma grg^{-1} oppure $gr^{-1}g^{-1}$ con $g \in G$ e $r \in R$). Vogliamo far vedere che $N' = N(R)$. Chiaramente $N' \subseteq N(R)$ in quanto $N(R)$ è normale in G e contiene R . Resta da far vedere che N' è normale in G e cioè che $gn'g^{-1}$ appartiene a N' per ogni $g \in G$ e $n' \in N'$. Ogni $n' \in N'$ è il prodotto $n' = g_1x_1g_1^{-1}g_2x_2g_2^{-1} \cdots g_mx_mg_m^{-1}$, $g_j \in G$ e $x_j \in R$ oppure $x_j \in R^{-1} = \{r^{-1} \mid r \in R\}$. Segue che $gn'g^{-1}$ è uguale a:

$$g(g_1x_1g_1^{-1}g_2x_2g_2^{-1} \cdots g_mx_mg_m^{-1})g^{-1} = gg_1x_1(gg_1)^{-1}gg_2x_2(gg_2)^{-1} \cdots gg_mx_m(gg_m)^{-1}$$

che è ancora un elemento di N' . □

Sia ora S un insieme. Sia R un sottoinsieme del gruppo libero $F(S)$ sull’insieme S . Consideriamo il gruppo $\langle S \mid R \rangle$ definito come il quoziente

$$\langle S \mid R \rangle = F(S)/N(R),$$

dove $N(R)$ è la chiusura normale di R in $F(S)$. La coppia (S, R) è detta una **presentazione** del gruppo $\langle S \mid R \rangle$, gli elementi di S sono chiamati i **generatori** e gli elementi di R le **relazioni** della presentazione. Ovviamente se $R = \emptyset$ allora $\langle S \mid R \rangle = \langle S \mid \emptyset \rangle = F(S)$.

Diremo che un gruppo G è **presentato** da una coppia (S, R) con $R \subseteq F(S)$, se G è isomorfo al gruppo $\langle S \mid R \rangle$. Il gruppo $\langle S \mid R \rangle$ si può pensare come il più grande gruppo quoziente di $F(S)$ dove gli elementi di R si identificano con l'identità. Osserviamo che ogni gruppo G ammette una presentazione. Infatti gli elementi di G chiaramente generano G . Inoltre, per la proprietà universale dei gruppi liberi, l'identità di G si estende in modo unico ad un omomorfismo suriettivo $\tilde{\varphi} : F(G) \rightarrow G$. Se $R = N(R)$ denota il nucleo di $\tilde{\varphi}$ allora per il primo teorema di isomorfismo

$$G \cong F(G)/N(R) = \langle G \mid R \rangle.$$

Ovviamente questa presentazione non è molto efficiente: ci piacerebbe avere delle presentazioni con il minor numero di generatori e relazioni. Se un gruppo G ammette una presentazione $\langle S \mid R \rangle$ dove S e R sono finiti, diremo che G è **finitamente presentato**. In questo caso scriveremo la presentazione come $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Useremo anche la notazione

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 = q_1, \dots, r_m = q_m \rangle$$

per indicare $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 q_1^{-1}, \dots, r_m q_m^{-1} \rangle$.

Esempio 6.2.2. Il gruppo libero $F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ (n fattori) ha una presentazione

$$F(x_1, \dots, x_n) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid \emptyset \rangle.$$

Esempio 6.2.3. Il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ha una presentazione

$$\langle x, y \mid xy = yx \rangle = \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle.$$

Diamo una dimostrazione di questo fatto. Osserviamo che i simboli x e y sono i generatori del gruppo libero $F(x, y)$ oppure possono essere visti nel quoziente $\langle x, y \mid xy = yx \rangle = F(x, y)/N(R)$ dove R è costituito da una sola parola $R = \{xyx^{-1}y^{-1}\}$. Usando la relazione R si deduce facilmente (con un ragionamento induttivo) che il gruppo $F(x, y)/N(R)$ è abeliano. Consideriamo l'applicazione $\varphi : \{x, y\} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $\varphi(x) = (1, 0)$ e $\varphi(y) = (0, 1)$. Per la proprietà universale dei gruppi liberi (Proposizione 6.1.3) esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : F(x, y) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dato da (cfr. (6.1)):

$$\tilde{\varphi}(x^{m_1}y^{n_1} \dots x^{m_k}y^{n_k}) = m_1\varphi(x) + n_1\varphi(y) + \dots + m_k\varphi(x) + n_k\varphi(y) =$$

$$(m_1, 0) + (0, n_1) + \dots + (m_k, 0) + (0, n_k) = (m_1 + \dots + m_k, n_1 + \dots + n_k)$$

Segue che il $R \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$ e quindi $N(R) \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$. Resta così definito un omomorfismo

$$\tilde{\Phi} : F(x, y)/N(R) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x^{m_1}y^{n_1} \cdots x^{m_k}y^{n_k} \mapsto (m_1 + \cdots + m_k, n_1 + \cdots + n_k),$$

dove questa volta $x^{m_1}y^{n_1} \cdots x^{m_k}y^{n_k}$ denota la classe d'equivalenza nel quoziente $F(x, y)/N(R)$. Definiamo un'applicazione

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow F(x, y)/N(R), \quad (m, n) \mapsto x^m y^n$$

(anche qui $x^m y^n$ denota la classe d'equivalenza nel quoziente $F(x, y)/N(R)$). Il fatto che $F(x, y)/N(R)$ sia abeliano implica che $\tilde{\Psi}$ è un omomorfismo. Inoltre è immediato verificare che $\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi} = \text{id}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ e $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi}) = \text{id}_{F(x, y)/N(R)}$, le quali mostrano che $\tilde{\Phi}$ è un isomorfismo di gruppi con inversa $\tilde{\Psi}$.

Esempio 6.2.4. Il gruppo ciclico \mathbb{Z}_n ha una presentazione $\mathbb{Z}_n \cong \langle x \mid x^n = 1 \rangle$. La verifica è lasciata allo studente.

Esempio 6.2.5. Il gruppo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ha una presentazione

$$\langle x, y \mid x^n = 1, y^m = 1, xy = yx \rangle$$

la verifica è lasciata allo studente.

Esempio 6.2.6. I due gruppi $G = \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$ e $H = \langle a, c \mid a^2c^2 \rangle$ sono isomorfi. Sia

$$\varphi : \{a, b\} \rightarrow H$$

definita da $\varphi(a) = a$ e $\varphi(b) = ca$, dove nei secondi membri a e ca denotano le classi di a e ca (elementi di $F(a, c)$) in $H = F(a, c)/N(R_2)$, $R_2 = \{a^2c^2\}$. Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : F(a, b) \rightarrow H$ tale che $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a) = a$ e $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(b) = ca$. Osserviamo che $baba^{-1} \in \text{Ker } \tilde{\varphi}$. Infatti, usando la (6.1),

$$\tilde{\varphi}(baba^{-1}) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1} = caacaa^{-1} = ca^2c = c(a^2c^2)c^{-1} = cc^{-1} = 1.$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione $a^2c^2 = 1$ valida in H . Quindi, essendo $G = F(a, b)/N(R_1)$, $R_1 = \{baba^{-1}\}$ allora $N(R_1) \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$ e quindi resta definito un unico omomorfismo $\tilde{\Phi} : G \rightarrow H$ tale che $\tilde{\Phi}(a) = a$ e $\tilde{\Phi}(b) = ca$, dove a e b al primo membro denotano le classi di a e b in $G = F(a, b)/N(R_1)$. Per costruire l'inversa di $\tilde{\Phi}$, sia

$$\psi : \{a, c\} \rightarrow G$$

definita da $\psi(a) = a$ e $\psi(c) = ba^{-1}$ (dove nei secondi membri a e ba^{-1} rappresentano le classi di a e ba^{-1} in G). Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo $\tilde{\psi} : F(a, c) \rightarrow G$ tale che $\tilde{\psi}(a) = \psi(a) = a$ e $\tilde{\psi}(c) = \psi(c) = ba^{-1}$. Osserviamo che $a^2c^2 \in \text{Ker } \tilde{\psi}$. Infatti, sempre per la (6.1),

$$\tilde{\psi}(a^2c^2) = \psi(a)^2\psi(c)^2 = a^2ba^{-1}ba^{-1} = ab^{-1}(baba^{-1})ba^{-1} = ab^{-1}ba^{-1} = 1.$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione $baba^{-1} = 1$ valida in G . Quindi, $N(R_2) \subseteq \text{Ker } \tilde{\psi}$ e resta definito un unico omomorfismo $\tilde{\Psi} : H \rightarrow G$ tale che $\tilde{\Psi}(a) = a$ e $\tilde{\Psi}(c) = ba^{-1}$ (dove a e c al primo membro rappresentano le classi di a e c in H). Osserviamo, infine, che $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})(a) = a$, $(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})(b) = b$, $(\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi})(a) = a$, $(\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi})(c) = c$, le quali mostrano che $\tilde{\Phi}$ è un isomorfismo con inversa $\tilde{\Psi}$.

Concludiamo questo paragrafo osservando che, nonostante le presentazioni finite di un gruppo forniscano un modo semplice e concreto per il suo studio, molte delle questioni basilari riguardanti il gruppo in questione non sono facilmente accessibili. Intorno al 1910, appena dopo l'invenzione del gruppo fondamentale, i due topologi Henrich Tietze e Max Dehn posero i seguenti problemi:

- **Il problema dell'isomorfismo:** date due presentazioni finite di due gruppi capire se i gruppi sono isomorfi;
- **Il problema della parola:** data una presentazione finita $\langle S \mid R \rangle$ e una parola $s \in F(S)$ capire quando $s = 1$ in $\langle S \mid R \rangle$ (equivalentemente capire quando due parole sono uguali).

Non esiste una procedura generale che permetta di risolvere nessuno dei due problemi. Per esempio la presentazione

$$\langle x, y \mid xy^2x^{-1}y^{-3}, yx^2y^{-1}x^{-3} \rangle$$

è isomorfa al gruppo banale ma la dimostrazione è tutt'altro che immediata (provare per credere!).

6.3 Abelianizzazioni

Sia G un gruppo e S un suo sottoinsieme. Ricordiamo che il sottogruppo $\langle S \rangle$ di G generato da S è il più piccolo sottogruppo che contiene S o equivalentemente, l'intersezione di tutti i sottogruppi di G che contengono S . Siano $x, y \in G$.

Denotiamo con $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ il **commutatore** di x e y . Consideriamo il sottogruppo $G' \subseteq G$ generato dal sottoinsieme S di G costituito da tutti i commutatori di G , ossia

$$G' = \langle [x, y], x, y \in G \rangle.$$

Chiameremo G' il **commutatore** del gruppo G . Chiaramente G' è banale se e solo se G è abeliano. La seguente proposizione riassume le proprietà principali del commutatore.

Proposizione 6.3.1. *Sia G un gruppo e G' il suo commutatore. Valgono i seguenti fatti:*

- 1) G' è un sottogruppo normale di G ;
- 2) il quoziente G/G' è un gruppo abeliano, il quale verrà chiamato **l'abelianizzazione** di G e indicato con $Ab(G)$;
- 3) se N è un sottogruppo normale di G e G/N è abeliano allora $G' \subseteq N$;
- 4) se G_1 e G_2 sono due gruppi isomorfi allora $Ab(G_1)$ è isomorfo a $Ab(G_2)$;
- 5) vale la seguente proprietà universale: per ogni gruppo abeliano H e per ogni omomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : Ab(G) \rightarrow H$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ Ab(G) & & \end{array}$$

dove $\pi : G \rightarrow Ab(G)$ denota la proiezione sul quoziente;

- 6) $Ab(G)$ è univocamente determinato a meno di isomorfismi dalla precedente proprietà universale.

Dimostrazione: Per dimostrare la 1) ossia che G' è un sottogruppo normale di G bisogna verificare che gzg^{-1} appartiene a G' per ogni $z \in G'$ e $g \in G$. Osserviamo che ogni $z \in G'$ è il prodotto di commutatori e dei loro inversi e siccome $[x, y]^{-1} = [y, x]$ allora z è prodotto di commutatori, ossia $z = z_1 \dots z_n$ dove z_j sono commutatori. Segue che

$$gzg^{-1} = (gz_1g^{-1}) \cdots (gz_ng^{-1})$$

e per dimostrare la 1) è sufficiente verificare che il coniugato $g[x, y]g^{-1}$ di un commutatore $[x, y]$ appartiene a G' per ogni $x, y, g \in G$. Ma $g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}] \in G'$.

Dimostriamo la 2) ossia che $\text{Ab}(G)$ è un gruppo abeliano. Siano xG', yG' due elementi arbitrari di $\text{Ab}(G)$. Allora $\text{Ab}(G)$ è abeliano se e solo se $xyG' = yxG'$ ossia $xyx^{-1}y^{-1}G' = [x, y]G' = G'$. Questo è equivalente al fatto che $[x, y] \in G'$ che è vero per la definizione di G' .

La 3) e la 4) sono lasciate come esercizio per lo studente.

Per dimostrare la 5) osserviamo che essendo H abeliano allora $G' \subseteq \text{Ker } \varphi$. Quindi, per il primo teorema di isomorfismo, esiste un unico omomorfismo $\tilde{\varphi} : \text{Ab}(G) = G/G' \rightarrow H$ tale che $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Infine per dimostrare la 6) supponiamo che esista un gruppo abeliano A e un omomorfismo $\pi' : G \rightarrow A$ tale che per ogni gruppo abeliano K e per ogni omomorfismo $\psi : G \rightarrow K$ esista un unico omomorfismo $\tilde{\psi} : A \rightarrow K$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & K \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\psi} & \\ A & & \end{array}$$

Allora per la proprietà universale (punto 5)) si ottengono i due diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & A \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi}' & \\ \text{Ab}(G) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \text{Ab}(G) \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ A & & \end{array}$$

i quali implicano

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \text{Ab}(G) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} \circ \tilde{\pi}' & \\ \text{Ab}(G) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & A \\ \pi' \downarrow & \nearrow \tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi} & \\ A & & \end{array}$$

Segue dall'unicità che $\tilde{\pi} \circ \tilde{\pi}' = \text{id}_{\text{Ab}(G)}$ e $\tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi} = \text{id}_A$ e quindi $\tilde{\pi}$ è un isomorfismo con inversa $\tilde{\pi}'$ (e quindi $\text{Ab}(G)$ è unico a meno di isomorfismi). \square

Osservazione 6.3.2. Se G è un gruppo e N un suo sottogruppo normale tale che G/N sia abeliano. Allora segue dalla 3) del teorema precedente che $G/N \subseteq \text{Ab}(G)$. Quindi $\text{Ab}(G)$ è il “più grande” quoziente abeliano di G .

I due esempi che seguono saranno importanti per la classificazione delle superfici compatte nel Capitolo 8.

Esempio 6.3.3. Sia g un numero naturale positivo. Consideriamo la presentazione data da:

$$G = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Vogliamo mostrare che $\text{Ab}(G) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Cominciamo a definire un'applicazione

$$\varphi : \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g\} \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}, \quad \varphi(a_j) := e_j, \quad \varphi(b_j) := e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g,$$

dove e_k , $k = 1, \dots, 2g$ è l'elemento in \mathbb{Z}^{2g} con 1 nella posizione k -esima e 0 altrove. Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo

$$\tilde{\varphi} : F(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$$

definito dall'equazione:

$$\tilde{\varphi}(a_j) = \varphi(a_j) = e_j, \quad \tilde{\varphi}(b_j) = \varphi(b_j) = e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g$$

e dalla (6.1), cioè

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) = n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2) + \dots + n_m \varphi(x_m).$$

dove gli x_r sono uguali a qualche a_j oppure b_j . Segue facilmente che

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \in \text{Ker } \tilde{\varphi}.$$

Siccome

$$G = F(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g) / N(R), \quad R = \{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}\},$$

si deduce che $N(R) \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$ e quindi resta definito un unico omomorfismo $\tilde{\Phi} : G \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ tale che

$$\tilde{\Phi}(a_j) = e_j, \quad \tilde{\Phi}(b_j) = e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g,$$

dove a_j e b_j denotano le classi d'equivalenza nel gruppo G .

Per la proprietà universale delle abelianizzazioni (punto 5) della Proposizione 6.3.1) esiste un unico omomorfismo $\tilde{\tilde{\Phi}} : \text{Ab}(G) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ tale che $\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \pi = \tilde{\Phi}$, dove $\pi : G \rightarrow \text{Ab}(G)$ è l'applicazione quoziente. In particolare,

$$\tilde{\tilde{\Phi}}([a_j]) = e_j, \quad \tilde{\tilde{\Phi}}([b_j]) = e_{j+g}, \quad j = 1, \dots, g,$$

dove le parentesi quadre rappresentano le classi d'equivalenza in $\text{Ab}(G)$. Sia ora $\tilde{\tilde{\Psi}} : \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \text{Ab}(G)$ l'omomorfismo univocamente determinato dalle equazioni:

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(e_k) = \begin{cases} [a_k] & \text{se } 1 \leq k \leq g \\ [b_{k-g}] & \text{se } g+1 \leq k \leq 2g, \end{cases}$$

e

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(m_1 e_1 + \dots + m_{2g} e_{2g}) = \tilde{\tilde{\Psi}}(e_1)^{m_1} \dots \tilde{\tilde{\Psi}}(e_{2g})^{m_{2g}}, \quad \forall m_j \in \mathbb{Z}.$$

Si verifica immediatamente che:

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})([a_j]) = [a_j], \quad (\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})([b_j]) = [b_j], \quad j = 1, \dots, g,$$

e

$$(\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{\tilde{\Psi}})(e_k) = e_k, \quad k = 1, \dots, 2g,$$

dalle quali segue che $\tilde{\tilde{\Phi}}$ è un isomorfismo con inversa $\tilde{\tilde{\Psi}}$.

Esempio 6.3.4. Sia g un numero naturale positivo. Consideriamo la presentazione data da:

$$H = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 \rangle.$$

Vogliamo mostrare che $\text{Ab}(H) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$. Definiamo un'applicazione

$$\varphi : \{a_1, a_2, \dots, a_g\} \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2,$$

come:

$$\varphi(a_k) = \begin{cases} e_k & \text{se } 1 \leq k \leq g-1 \\ f - e_1 - \dots - e_{g-1} & \text{se } k = g, \end{cases}$$

dove e_k , $k = 1, \dots, g-1$ è l'elemento in \mathbb{Z}^g con 1 nella posizione k -esima e 0 altrove e $f = (0, \dots, 0, [1]) \in \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$. Per la proprietà universale dei gruppi liberi esiste un unico omomorfismo

$$\tilde{\varphi} : F(a_1, a_2, \dots, a_g) \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$$

definito dall'equazione:

$$\tilde{\varphi}(a_k) = \varphi(a_k) = e_k, \quad \tilde{\varphi}(a_g) = \varphi(a_g) = f - e_1 - \dots - e_{g-1}, \quad k = 1, \dots, g-1$$

e dalla (6.1), cioè

$$\tilde{\varphi}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) = n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2) + \dots + n_m \varphi(x_m).$$

dove gli x_r sono uguali a qualche a_j . Si verifica facilmente che $\tilde{\varphi}(a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2) = 0$ e quindi $a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 \in \text{Ker } \tilde{\varphi}$. Siccome

$$H = F(a_1, a_2, \dots, a_g) / N(R), \quad R = \{a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2\}$$

segue che $N(R) \subseteq \text{Ker } \tilde{\varphi}$ e resta quindi così definito un unico omomorfismo $\tilde{\Phi} : H \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ tale che

$$\tilde{\Phi}(a_k) = \begin{cases} e_k & \text{se } 1 \leq k \leq g-1 \\ f - e_1 - \cdots - e_{g-1} & \text{se } k = g, \end{cases}$$

dove gli a_k denotano le classi d'equivalenza nel gruppo H .

Per la proprietà universale delle abelianizzazioni esiste un unico omomorfismo $\tilde{\tilde{\Phi}} : \text{Ab}(H) \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ tale che $\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \pi = \tilde{\Phi}$, dove $\pi : H \rightarrow \text{Ab}(H)$ è l'applicazione quoziente. Sia ora $\tilde{\tilde{\Psi}} : \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Ab}(H)$ l'omomorfismo definito dalle equazioni:

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(e_k) = [a_k], \quad k = 1, \dots, g-1, \quad \tilde{\tilde{\Psi}}(f) = [a_1 \cdots a_g]$$

e

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(m_1 e_1 + \cdots + m_{g-1} e_{g-1} + m f) = \tilde{\tilde{\Psi}}(e_1)^{m_1} \cdots \tilde{\tilde{\Psi}}(e_{g-1})^{m_{g-1}} \tilde{\tilde{\Psi}}(f)^m, \quad \forall m_j, m \in \mathbb{Z},$$

dove le parentesi quadre rappresentano le classi d'equivalenza in $\text{Ab}(H)$. Si verifica immediatamente che

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})([a_k]) = [a_k], \quad (\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{\tilde{\Psi}})(e_k) = e_k, \quad k = 1, \dots, g-1,$$

$$(\tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\tilde{\Phi}})([a_g]) = [a_g], \quad (\tilde{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{\tilde{\Psi}})(f) = f$$

e quindi $\tilde{\tilde{\Psi}}$ è l'inversa di $\tilde{\tilde{\Phi}}$.

6.4 Esercizi

Esercizio 6.1. Sia S un sottoinsieme di un gruppo G . Dimostrare che S genera G se e solo se S non è contenuto in nessun sottogruppo proprio di G .

Esercizio 6.2. Dimostrare gli isomorfismi degli Esempi 6.2.4 e 6.2.5.

Esercizio 6.3. Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ è isomorfo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

Esercizio 6.4. Siano S_1 e S_2 due insiemi disgiunti e $R_1 \subseteq F(S_1)$ e $R_2 \subseteq F(S_2)$. Dimostrare che $\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ è una presentazione del gruppo $\langle S_1 \mid R_1 \rangle * \langle S_2 \mid R_2 \rangle$.

Esercizio 6.5. Dimostrare la (3) e la (4) della Proposizione 6.3.1.

Esercizio 6.6. Sia $\langle S \mid R \rangle$ una presentazione di un gruppo G . Sia $\tilde{R} \subset F(S)$ l'insieme $\tilde{R} = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in F(S)\}$. Dimostrare che $\langle S \mid R \cup \tilde{R} \rangle$ è una presentazione del gruppo $\text{Ab}(G)$.

Esercizio 6.7. Dimostrare che il gruppo $G = \langle a, b \mid a^4ba^{-3}b^{-1}, a^5b^2a^{-4}b^{-2} \rangle$ non è il gruppo banale.

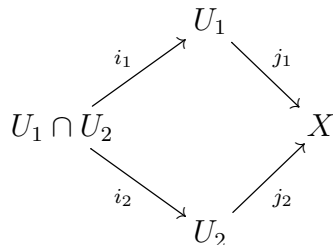
Esercizio 6.8. Dimostrare che l'abelianizzazione definisce un funtore covariante dalla categoria dei gruppi \mathcal{G} a quella dei gruppi abeliani \mathcal{Ab} .

Capitolo 7

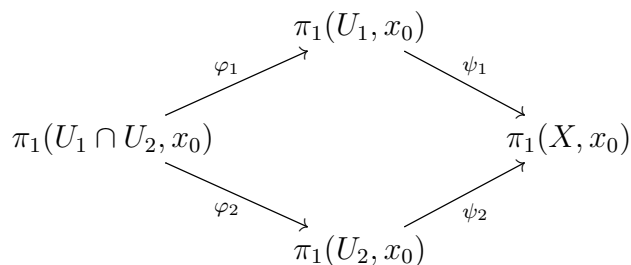
Il Teorema di Seifert–Van Kampen

7.1 Enunciato e dimostrazione parziale

Sia X uno spazio topologico connesso per archi e siano U_1 e U_2 due suoi sottoinsiemi aperti e connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e la cui intersezione $U_1 \cap U_2$ sia non vuota e connessa per archi. Consideriamo le inclusioni naturali $i_1 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$, $i_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$, $j_1 : U_1 \rightarrow X$, $j_2 : U_2 \rightarrow X$ e il diagramma:



Sia $x_0 \in U_1 \cap U_2$, allora si ottiene il seguente diagramma sui gruppi fondamentali:



dove $\varphi_1 = (i_1)_*$, $\varphi_2 = (i_2)_*$, $\psi_1 = (j_1)_*$, $\psi_2 = (j_2)_*$ sono le applicazioni indotte sui rispettivi gruppi fondamentali. Inseriamo nel mezzo del diagramma il prodotto libero $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ e siano $i_{U_j} : \pi_1(U_j, x_0) \rightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$, $j = 1, 2$, le inclusioni canoniche. Per la proprietà universale del prodotto libero

(cfr. Teorema 5.4.6) esiste un unico omomorfismo

$$\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad (7.1)$$

che rende commutativo la parte destra del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(U_1, x_0) & & \\
 & \nearrow \varphi_1 & \downarrow i_{U_1} & \nwarrow \psi_1 & \\
 \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \xrightarrow{F} & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(X, x_0) \\
 & \searrow \varphi_2 & \uparrow i_{U_2} & \swarrow \psi_2 & \\
 & & \pi_1(U_2, x_0) & &
 \end{array}$$

Definiamo inoltre un'applicazione (la quale non è un omomorfismo)

$$F : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

che a $\gamma \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ associa $F(\gamma) = \varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma)^{-1}$, dove stiamo identificando $\varphi_j(\gamma)$ con $i_{U_j}(\varphi_j(\gamma))$, $j = 1, 2$. Consideriamo l'immagine di F ,

$$F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)) = \{\varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma)^{-1} \mid \gamma \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)\}$$

e sia

$$N_F := N(F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))) \subseteq \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$$

la sua chiusura normale in $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$. Possiamo ora enunciare il risultato principale di questo capitolo che risulterà uno strumento utilissimo per il calcolo del gruppo fondamentale di vari spazi.

Teorema 7.1.1. (*Seifert–Van Kampen*¹) *Sia X uno spazio topologico e U_1 e U_2 due sottoinsiemi aperti di X connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2$ sia non vuoto e connessi per archi. Allora per ogni $x_0 \in U_1 \cap U_2$ l'omomorfismo definito in (7.1) è suriettivo e il suo nucleo è N_F . Conseguentemente*

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)) / N_F.$$

Notazioni. Prima di dimostrare (parzialmente) il teorema introduciamo alcune notazioni. Se f e g sono due archi in $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ oppure X scriveremo

$$f \sim_{U_1} g, f \sim_{U_2} g, f \sim_{U_1 \cap U_2} g, f \sim_X g$$

¹Herbert Seifert e Egbert Van Kampen dimostrarono il teorema indipendentemente agli inizi del 1930.

per indicare che f è omotopo relativamente a $\{0, 1\}$ a g in U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ oppure in X . Scriveremo anche $[f]_{U_1}, [f]_{U_2}, [f]_{U_1 \cap U_2}$ o $[f]_X$ per indicare la classe di equivalenza di omotopia dell'arco f relativa a $\{0, 1\}$ in U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ o X . Inoltre denoteremo il prodotto libero con uno $*$. Consideriamo per esempio un elemento

$$[g_1]_{U_1} * [g_2]_{U_2} * \cdots * [g_{q-1}]_{U_1} * [g_q]_{U_2}$$

di $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$, allora

$$\begin{aligned} \Phi([g_1]_{U_1} * [g_2]_{U_2} * \cdots * [g_{q-1}]_{U_1} * [g_q]_{U_2}) &= \psi_1([g_1]_{U_1}) \psi_2([g_2]_{U_2}) \cdots \psi_1([g_{q-1}]_{U_1}) \psi_2([g_q]_{U_2}) \\ &= [g_1]_X [g_2]_X \cdots [g_{q-1}]_X [g_q]_X = [g_1 \cdot g_2 \cdots g_{q-1} \cdot g_q]_X, \end{aligned} \quad (7.2)$$

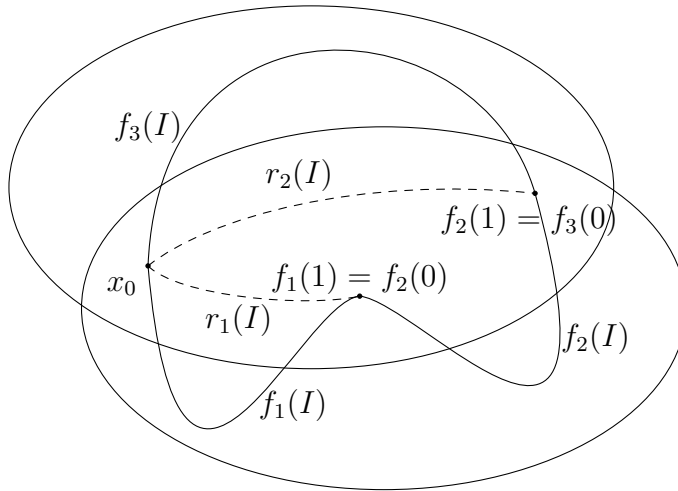
dove $g_1 \cdot g_2 \cdots g_{q-1} \cdot g_q$ denota la concatenazione dei lacci g_j .

Dimostrazione parziale del Teorema 7.1.1 Mostriamo che Φ è suriettiva.

Sia $f : I \rightarrow X$ un laccio di base x_0 in X , $f(0) = f(1) = x_0$. Ragionando come nel Teorema 2.5.1 possiamo trovare una suddivisione di I , $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_q = 1$, tale che per ogni $\alpha = 1, 2, \dots, q$, $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$ sia contenuto in U_1 o in U_2 e inoltre $f(a_\alpha) \in U_1 \cap U_2$. Sia ora $f_\alpha : I \rightarrow X$ l'arco definito da:

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Dal Teorema 2.1.5 segue che $f \sim_X f_1 \cdots f_q$ o, equivalentemente, $[f]_X = [f_1 \cdots f_q]_X$. Ciascuno degli archi f_α non è un laccio basato in x_0 . Per rimediare a questo fatto usiamo la connessione per archi di $U_1 \cap U_2$ e definiamo un arco $r_\alpha : I \rightarrow U_1 \cap U_2$ da $x_0 \in U_1 \cap U_2$ a $f(a_\alpha) = f_\alpha(1)$ per ogni $\alpha = 1, \dots, q-1$, e poniamo $r_0 = r_q = \epsilon_{x_0}$ (arco costante di base x_0). In figura è illustrato il caso $q = 3$.



Segue dal Lemma 2.1.1 che

$$r_0 \cdot f_1 \cdot i(r_1) \cdot r_1 \cdot f_2 \cdot i(r_2) \cdots r_{q-1} \cdot f_q \cdot i(r_q) \sim_X f$$

e quindi $[f]_X = [g_1 \cdots g_q]_X$ dove $g_\alpha = r_{\alpha-1} \cdot f_\alpha \cdot i(r_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, q$, è un laccio di base x_0 interamente contenuto in U_1 o in U_2 . Supponiamo, per esempio, che g_1 sia contenuto in U_1 , g_2 in U_2, \dots , g_{q-1} in U_1 e g_q in U_2 e consideriamo l'elemento

$$s = [g_1]_{U_1} * [g_2]_{U_2} * \cdots * [g_{q-1}]_{U_1} * [g_q]_{U_2}$$

Allora, per la (7.2), si ottiene

$$\Phi(s) = [g_1 \cdots g_q]_X = [f]_X$$

e quindi Φ è suriettiva. Vogliamo dimostrare adesso che $N_F = \text{Ker } \Phi$. La dimostrazione dell'inclusione $\text{Ker } \Phi \subseteq N_F$ è la parte più delicata del teorema e non verrà dimostrata (lo studente è rinviato a [9] in bibliografia). Dimostreremo solo l'inclusione $N_F \subseteq \text{Ker } \Phi$. Per fare questo è sufficiente dimostrare che $F(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)) \subseteq \text{Ker } \Phi$. Sia dunque $[f]_{U_1 \cap U_2} \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$. Allora

$$\begin{aligned} \Phi(F([f]_{U_1 \cap U_2})) &= \Phi(\varphi_1([f]_{U_1 \cap U_2}) * \varphi_2([f]_{U_1 \cap U_2})^{-1}) = \\ &= \Phi([f]_{U_1} * [i(f)]_{U_2}) = [f]_X [i(f)]_X = 1 \end{aligned}$$

che è quello che si voleva dimostrare. \square

Quando i gruppi fondamentali coinvolti hanno una presentazione finita il Teorema di Seifert–Van Kampen può essere espresso in termini di generatori e relazioni.

Proposizione 7.1.2. *Nelle stesse ipotesi del Teorema 7.1.1 supponiamo inoltre che i gruppi fondamentali di U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ abbiano le presentazioni finite:*

$$\begin{aligned} \pi_1(U_1, x_0) &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r \rangle; \\ \pi_1(U_2, x_0) &= \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle; \\ \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) &= \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \tau_1, \dots, \tau_t \rangle. \end{aligned}$$

Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ può essere presentato come:

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \mid \rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s, u_1 = v_1, \dots, u_p = v_p \rangle$$

dove, per ogni $\alpha = 1, \dots, p$, u_α è un'espressione di $\varphi_1(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_1, x_0)$ rispetto ai generatori $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ e v_α è un'espressione di $\varphi_2(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_2, x_0)$ rispetto ai generatori $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Dimostrazione: la dimostrazione verrà ommessa (si veda [9] in bibliografia). \square

Osservazione 7.1.3. Notiamo che le relazioni $\{\tau_1, \dots, \tau_t\}$ della presentazione del gruppo $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ non giocano alcun ruolo nel calcolo di $\pi_1(X, x_0)$.

7.2 Prima applicazione

Il corollario che segue è una conseguenza immediata del Teorema 7.1.1.

Corollario 7.2.1. *Sia X uno spazio topologico che possa essere scritto come unione di due aperti semplicemente connessi U_1 e U_2 la cui intersezione è non vuota e connessa per archi. Allora X è semplicemente connesso.*

Vogliamo usare il corollario per (ri)dimostrare che la sfera, il complementare di un numero finito di punti di \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, e il proiettivo complesso sono semplicemente connessi.

Esempio 7.2.2. Siano N e S il polo nord e il polo sud della sfera S^n , $n \geq 2$. Allora gli aperti $U_1 = S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ e $U_2 = S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$ e $U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ soddisfano le ipotesi del Corollario 7.2.1 e quindi S^n è semplicemente connessa, in accordo con il Teorema 2.5.1.

Esempio 7.2.3. Siano p_1, \dots, p_k un numero finito di punti distinti di \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Sia $X = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Per dimostrare che X è semplicemente connesso, ragioniamo per induzione sul numero k dei punti in questione. Se $k = 0$, \mathbb{R}^n è semplicemente connesso (addirittura convesso e quindi contraibile). Per $k = 1$, $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1\}$ è semplicemente connessa per il Corollario 2.5.3. Sia quindi $k \geq 2$ e supponiamo che $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\}$ sia semplicemente connesso per tutti gli $s < k$. Consideriamo un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(p_1) \neq h(p_2)$. Scambiando eventualmente p_1 con p_2 possiamo assumere $h(p_1) < h(p_2)$. Allora $U_1 = \{x \in X \mid h(x) > h(p_1)\}$, $U_2 = \{x \in X \mid h(x) < h(p_2)\}$ e $U_1 \cap U_2 = \{x \in X \mid h(p_1) < h(x) < h(p_2)\}$ sono tutti omeomorfi rispettivamente a $\mathbb{R}^n \setminus \{s_1 \text{ punti}\}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{s_2 \text{ punti}\}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{s_3 \text{ punti}\}$ con $s_j < k$, $j = 1, 2, 3$. Applicando l'ipotesi induttiva e il Corollario 7.2.1 si deduce allora che X è semplicemente connesso.

Esempio 7.2.4. (lo spazio proiettivo complesso) La definizione dello spazio proiettivo complesso è simile a quella dello spazio proiettivo reale estesa al caso dei numeri complessi. Sia $n \geq 0$ un numero naturale e sia $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Definiamo una relazione di equivalenza \sim su X dichiarando $z \sim w$ se e solo se esiste

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $w = \lambda z$. Lo spazio quoziente (con la topologia quoziente) si chiama **lo spazio proiettivo complesso n -dimensionale** e verrà indicato con \mathbb{CP}^n . Un punto di \mathbb{CP}^n verrà denotato con $[z]$. Se restringiamo la relazione d'equivalenza alla sfera unitaria in $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ possiamo pensare a \mathbb{CP}^n come l'insieme delle classi d'equivalenza in S^{2n+1} dove $z \sim w$, $z, w \in S^{2n+1}$ se e solo se esiste $\lambda \in S^1$ tale che $w = \lambda z$. Esattamente come nel caso di \mathbb{RP}^n (cfr. Teorema 11.5.1 di [7] in bibliografia) si dimostra che \mathbb{CP}^n è una varietà topologica compatta e connessa di dimensione $2n$ (i dettagli sono lasciati come esercizio per lo studente). Analogamente al caso di \mathbb{RP}^n , l'atlante canonico $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=0, \dots, n}$ è dato dagli aperti

$$U_j = \{[z] = [z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{CP}^n \mid z_j \neq 0\},$$

insieme alle carte

$$\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, [z] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right). \quad (7.3)$$

Osserviamo che per $n = 0$, \mathbb{CP}^0 si riduce ad un punto. Mentre, per $n = 1$, \mathbb{CP}^1 è omeomorfo alla sfera S^2 . Per vedere questo fatto diamo una descrizione esplicita delle carte φ_0 e φ_1 dell'atlante canonico $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=0,1}$ di \mathbb{CP}^1 . Da (7.3) otteniamo:

$$\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}, [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0} = z = x + iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}, [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1} = w = u + iv \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

Mentre le loro inverse sono:

$$\varphi_0^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_0, z \mapsto [1, z],$$

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_1, w \mapsto [w, 1].$$

Siano $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ il polo nord e il polo sud della sfera

$$S^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1\} = \{(z, t) \mid |z|^2 + t^2 = 1\}, \quad z = x + iy.$$

Consideriamo l'atlante su S^2 costituito dalle due carte $(U_N = S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$ e $(U_S = S^2 \setminus \{S\}, \bar{\varphi}_S)$ di S^2 date da:

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, (x, y, t) \mapsto \left(\frac{x}{1-t}, \frac{y}{1-t} \right) = \frac{z}{1-t}$$

$$\bar{\varphi}_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, (x, y, t) \mapsto \left(\frac{x}{1+t}, \frac{-y}{1+t} \right) = \frac{\bar{z}}{1+t},$$

dove $z = x + iy$. Lo studente avrà notato che φ_N è esattamente la proiezione stereografica dal polo nord mentre $\bar{\varphi}_S$ è la coniugata della proiezione stereografica φ_S dal polo sud. Osserviamo che per

$$(z, t) \in U_N \cap U_S = \{(z, t) \mid |z|^2 + t^2 = 1, \ t \neq \pm 1\}$$

si ha:

$$\frac{z}{1-t} = \frac{1+t}{\bar{z}}.$$

Segue che l'applicazione $F : S^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$

$$F(z, t) = \begin{cases} \varphi_0^{-1}(\varphi_N(z, t)) = [1, \frac{z}{1-t}] & \text{se } (z, t) \in U_N \\ \varphi_1^{-1}(\bar{\varphi}_S(z, t)) = [\frac{\bar{z}}{1+t}, 1] & \text{se } (z, t) \in U_S, \end{cases}$$

definisce un omeomorfismo da S^2 a \mathbb{CP}^1 .

Per dimostrare che \mathbb{CP}^n è semplicemente connesso consideriamo i due aperti $U_0 = \{[(z_0, \dots, z_n)] \in \mathbb{CP}^n \mid z_0 \neq 0\} = \mathbb{CP}^n \setminus H$, dove $H = \{[(z_0, \dots, z_n)] \in \mathbb{CP}^n \mid z_0 = 0\}$, e $V = \mathbb{CP}^n \setminus \{p_0\}$, $p_0 = [1, 0, \dots, 0]$. Ora $U_0 \cong \mathbb{R}^{2n}$ e $U_0 \cap V = \mathbb{CP}^n \setminus \{H \cup p_0\} \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ che è connesso per archi e non vuoto per ogni $n \geq 1$. Inoltre V si retrae per deformazione forte su $H \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ tramite la retrazione

$$r : V \rightarrow H, \ r([z_0, z_1, \dots, z_n]) = [0, z_1, \dots, z_n].$$

Infatti l'omotopia

$$F : V \times I \rightarrow V, F([z], t) = [(1-t)z_0, z_1, \dots, z_n], \ [z] = [z_0, z_1, \dots, z_n], \quad (7.4)$$

soddisfa $F([z], 0) = [z]$, $F([z], 1) = [0, z_1, \dots, z_n] \in H$ e $F([w], t) = [w]$, $\forall [w] \in H$ e $\forall t \in I$. Con un ragionamento induttivo su $n \geq 1$ e usando il Corollario 7.2.1 si ottiene allora che \mathbb{CP}^n è semplicemente connesso.

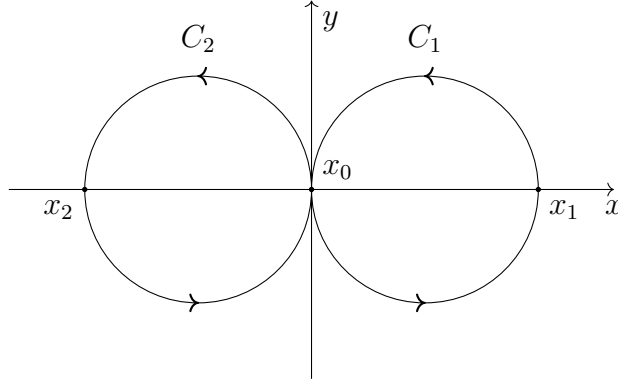
7.3 Seconda applicazione

Se $U_1 \cap U_2$ è semplicemente connesso dal Teorema 7.1.1 si ottiene immediatamente il seguente risultato.

Corollario 7.3.1. *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 7.1.1 e che $U_1 \cap U_2$ sia semplicemente connesso. Allora l'omomorfismo $\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è un isomorfismo.*

Di seguito calcoleremo il gruppo fondamentale di alcuni spazi usando il Corollario 7.3.1.

Esempio 7.3.2. Sia $X = C_1 \cup C_2$ la figura ∞ come dell'Esempio 1.4.10. Siano $x_1 \in C_1$ e $x_2 \in C_2$ due punti diversi dal punto x_0 .

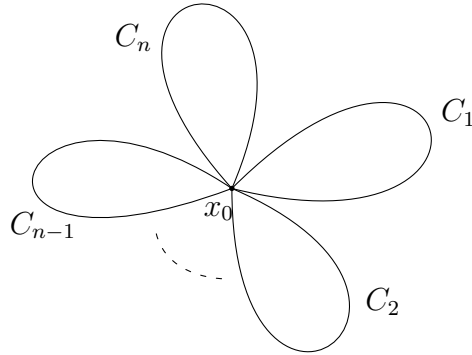


Allora $U_1 = X \setminus \{x_2\}$ e $U_2 = X \setminus \{x_1\}$ sono due aperti di X connessi per archi e $U_1 \cap U_2$ è un aperto che si retrae per deformazione al punto x_0 e quindi semplicemente connesso. D'altra parte U_j si retrae per deformazione a $C_j \cong S^1$, $j = 1, 2$ e quindi $\pi_1(U_j, x_0) \cong \pi_1(C_j, x_0) \cong \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$. Applicando il Corollario 7.3.1 si ottiene

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) = \pi_1(C_2, x_0) * \pi_1(C_1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

I due generatori liberi di $\pi_1(X, x_0)$ sono rappresentati da due lacci chiusi di base x_0 che girano una volta intorno ai punti $(-1, 0)$ e $(0, 1)$.

Esempio 7.3.3. Più in generale, consideriamo lo spazio X_n unione di numero finito C_1, \dots, C_n di spazi omeomorfi a S^1 con un solo punto x_0 in comune.



Lo spazio X_n è chiamato il **il bouquet di n cerchi**. Ci proponiamo di dimostrare che il gruppo fondamentale di X_n è il gruppo libero su n generatori. La dimostrazione si ottiene per induzione sul numero n , $n \geq 2$, di circonferenze.

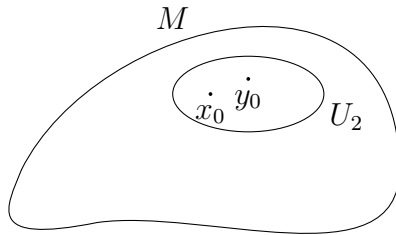
Sappiamo, dall'esempio precedente, che il risultato è vero per $n = 2$. Supponiamo che l'affermazione sia vera per $2 \leq k < n$, cioè $\pi_1(X_k, x_0) \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ (k fattori). Siano $x_j \in C_j$ tali che $x_j \neq x_0$, $j = 1, \dots, n$. Consideriamo i due sottoinsiemi aperti e connessi per archi di X_n dati da $U_1 = X_n \setminus \{x_n\}$ e $U_2 = X_n \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Allora U_1 si retrae per deformazione a X_{n-1} , U_2 si retrae per deformazione a $C_n \cong S^1$ e $U_1 \cap U_2 = X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ è non vuoto e semplicemente connesso (si retrae per deformazione al punto x_0). Applicando allora il Corollario 7.3.1 e l'ipotesi induttiva si ottiene:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_{n-1}, x_0) * \pi_1(C_n, x_0) = (\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z} \quad (n \text{ fattori}).$$

Osserviamo, infine, che ogni generatore γ_j , $j = 1, \dots, n$, di $\pi_1(X_n, x_0)$ è rappresentato da un laccio di base x_0 che gira intorno al cerchio C_j una volta.

Esempio 7.3.4. Siano p_1, \dots, p_k un numero finito di punti distinti in \mathbb{R}^2 e sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Non è difficile vedere che lo spazio X si retrae per deformazione forte su un bouquet di k cerchi (cfr. Esempio 1.4.10 nel Capitolo 1 per il caso $k = 2$). Per l'Esempio precedente il gruppo fondamentale di X è il gruppo libero con k generatori. Ogni generatore è rappresentato da un laccio α_j , $j = 1, \dots, k$, ottenuto percorrendo una sola volta un cerchio C_j centrato in p_j e di raggio $r_j < \inf_{k \neq j} d(p_j, p_k)$.

Esempio 7.3.5. Sia M una varietà topologica connessa (e quindi connessa per archi) di dimensione $n \geq 3$. Ci proponiamo di dimostrare che il gruppo fondamentale di M è lo stesso del gruppo fondamentale di M privata di un suo punto. Siano dunque $y_0 \in M$, U_2 un aperto che contiene y_0 tale che $U_2 \cong \mathbb{R}^n$ (un tale aperto esiste in quanto M è localmente euclidea), $x_0 \in U_2$ tale che $x_0 \neq y_0$ e $U_1 = M \setminus \{y_0\}$.



I due aperti U_1 e U_2 sono connessi per archi e la loro intersezione $U_1 \cap U_2 = U_2 \setminus \{y_0\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è non vuota e semplicemente connessa per $n \geq 3$ (cfr. Corollario 2.5.3). Possiamo allora applicare il Corollario 7.3.1 e dedurre che:

$$\pi_1(M, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) = \pi_1(M \setminus \{y_0\}, x_0). \quad (7.5)$$

Osserviamo che il risultato vale per qualunque $x_0 \in M$ in quanto sia M che $M \setminus \{y_0\}$ sono connesse per archi (per questo è sufficiente l'ipotesi $n \geq 2$).

Esempio 7.3.6. Sia C una circonferenza di \mathbb{R}^3 e sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$. Vogliamo calcolare il gruppo fondamentale di $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$. Per fare questo calcoliamo preliminarmente il gruppo fondamentale di $Y = \mathbb{R}^3 \setminus L$, dove L è una retta affine di \mathbb{R}^3 . Possiamo supporre L sia l'asse x_3 ($x_1 = x_2 = 0$). Consideriamo il semipiano aperto $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 > 0, x_1 = 0\}$ di \mathbb{R}^3 . Lo spazio ottenuto tramite una rotazione completa di S intorno all'asse x_3 è omeomorfo allo spazio Y . Quindi $Y \cong S \times S^1$. Il gruppo fondamentale di Y è quindi

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(S \times S^1) \cong \pi_1(S) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

in quanto S è semplicemente connesso (S è convesso) e $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Un generatore di $\pi_1(Y, y)$, $y \in Y$, è rappresentato da un laccio basato in y e gira una volta intorno alla retta L .

Passiamo ora al calcolo del gruppo fondamentale $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$. Consideriamo la proiezione stereografica

$$\pi_N : S^3 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right)$$

della sfera unitaria $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ privata del polo nord $N = (0, 0, 0, 1)$ allo spazio \mathbb{R}^3 considerato come lo spazio equatoriale $\mathbb{R}^3 = \{x_4 = 0\}$. Assumiamo che il cerchio C sia il cerchio di centro l'origine e raggio 1 nel piano $x_3 = 0$ di \mathbb{R}^3 e cioè

$$C = \{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Osserviamo che C giace nello spazio equatoriale $x_4 = 0$ di S^3 (C vista in S^3 ha equazione $C = \{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = x_4 = 0\}$) e che quindi $\pi_N^{-1}(C) = C$. Si ottiene allora

$$\pi_N^{-1}(X) \cong S^3 \setminus \{N \cup C\}$$

e quindi

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^3 \setminus \{N \cup C\}) \cong \pi_1(S^3 \setminus C)$$

dove l'ultimo isomorfismo segue dall'Esempio 7.3.5 in quanto $S^3 \setminus C$ è una varietà topologica tridimensionale. Ora $S^3 \setminus C$ è omeomorfa a $S^3 \setminus \tilde{C}$ dove \tilde{C} è la circonferenza di S^3 data da:

$$\tilde{C} = \{x_3^2 + x_4^2 = 1, x_1 = x_2 = 0\}.$$

Osserviamo che $N \in \tilde{C}$ e quindi

$$S^3 \setminus \tilde{C} = S^3 \setminus (N \cup \tilde{C}) \cong \mathbb{R}^3 \setminus \pi_N(\tilde{C} \setminus N).$$

Inoltre $\pi_N(\tilde{C} \setminus N) = L$, dove L è l'asse x_3 in \mathbb{R}^3 . Quindi

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(S^3 \setminus C) \cong \pi_1(S^3 \setminus \tilde{C}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong \mathbb{Z},$$

dove l'ultimo isomorfismo segue da quanto detto sopra. Un generatore di $\pi_1(X, x_0)$, $x_0 \in X$, è rappresentato da un laccio basato in x_0 che gira una volta intorno alla circonferenza C .

Osservazione 7.3.7. Nell'esempio precedente è importante che la circonferenza C sia effettivamente una circonferenza euclidea e non semplicemente uno spazio omeomorfo a S^1 . Infatti il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 di uno spazio omeomorfo a S^1 può essere molto complicato. Uno spazio topologico $K \subset \mathbb{R}^3$ omeomorfo a S^1 si chiama **nodo** e il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus K$ si chiama il gruppo fondamentale del nodo. La teoria dei nodi è una branca importantissima della topologia di **dimensione bassa** cioè di quella teoria che studia le varietà topologiche di dimensione ≤ 4 . In queste note non tratteremo questa affascinante teoria. Lo studente interessato potrà consultare il classico testo [15] in bibliografia.

7.4 Terza applicazione: U_2 semplicemente connesso

Dalla Proposizione 7.1.2 si ottiene immediatamente il seguente risultato.

Corollario 7.4.1. *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 7.1.1, U_2 sia semplicemente connesso e siano*

$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r \rangle;$$

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \tau_1, \dots, \tau_t \rangle$$

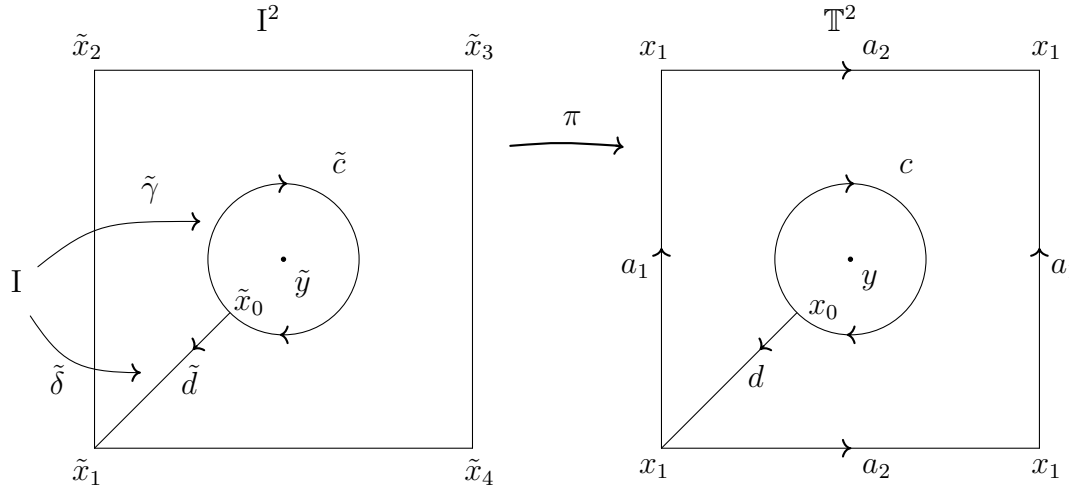
presentazioni finite dei gruppi fondamentali U_1 e $U_1 \cap U_2$. Allora $\pi_1(X, x_0)$ ha la presentazione finita

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \rho_1, \dots, \rho_r, u_1, \dots, u_p \rangle,$$

dove per ogni $\alpha = 1, \dots, p$, u_α è un'espressione di $\varphi_1(\gamma_\alpha) \in \pi_1(U_1, x_0)$ rispetto ai generatori $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.

Useremo questo corollario per ricalcolare il gruppo fondamentale del toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ e del proiettivo \mathbb{RP}^n , $n \geq 2$, senza l'ausilio della teoria dei rivestimenti. Le tecniche sviluppate in questi esempi ci permetteranno di calcolare il gruppo fondamentale delle superfici compatte nel prossimo capitolo.

Esempio 7.4.2. (gruppo fondamentale del toro) Pensiamo al toro \mathbb{T}^2 come al quadrato I^2 con i lati identificati come in figura e sia $\pi : I^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la proiezione sul quoziente.



Nella figura i vertici del quadrato I^2 e cioè $\tilde{x}_1 = (0, 0)$, $\tilde{x}_2 = (0, 1)$, $\tilde{x}_3 = (1, 1)$ e $\tilde{x}_4 = (1, 0)$ si identificano tutti a $x_1 \in \mathbb{T}^2$ così come i lati verticali $\{0\} \times I$ e $\{1\} \times I$ (risp. orizzontali $I \times \{0\}$ e $I \times \{1\}$) di I^2 corrispondono ad un laccio $a_1 = \pi(\{0\} \times I)$ (risp. $a_2 = \pi(I \times \{1\})$) di \mathbb{T}^2 di base x_1 . Osserviamo che l'interno del quadrato $\text{Int}(I^2)$ è omeomorfo a $\mathbb{T}^2 \setminus \{a_1 \cup a_2\}$ tramite π . Sia $\tilde{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in I^2$ il centro del quadrato e $y = \pi(\tilde{y}) \in \mathbb{T}^2$. Consideriamo i due aperti connessi per archi $\tilde{U}_1 = I^2 \setminus \{\tilde{y}\}$ e $\tilde{U}_2 = \text{Int}(I^2)$ di I^2 . Allora $U_1 = \pi(\tilde{U}_1) = \mathbb{T}^2 \setminus \{y\}$ e $U_2 = \pi(\tilde{U}_2) = \mathbb{T}^2 \setminus \{a_1 \cup a_2\}$ sono due aperti connessi per archi di \mathbb{T}^2 tali che $\mathbb{T}^2 = U_1 \cup U_2$. La loro intersezione è l'aperto $U_1 \cap U_2 = \mathbb{T}^2 \setminus \{y \cup a_1 \cup a_2\}$ di \mathbb{T}^2 il quale è connesso per archi in quanto immagine del connesso per archi $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \text{Int}(I^2) \setminus \{\tilde{y}\}$ tramite π . Sia $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Calcoliamo i gruppi fondamentali $\pi_1(U_1, x_0)$, $\pi_1(U_2, x_0)$ e $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$.

L'aperto U_2 è semplicemente connesso essendo omeomorfo al convesso $\text{Int}(I^2)$. L'aperto U_1 si retrae per deformazione (forte) ad un bouquet di due cerchi basati in x_1 (cfr. Esercizio 1.10 del Capitolo 1). Segue allora dall'Esempio 7.3.2 che

$$\pi_1(U_1, x_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle [\alpha_1], [\alpha_2] \rangle,$$

dove $[\alpha_j]$, $j = 1, 2$, denota la classe in $\pi_1(U_1, x_1)$ del laccio $\alpha_j : I \rightarrow U_1$ di base x_1 ottenuto percorrendo a_j e compiendo un singolo giro. Sia $\tilde{\delta} : I \rightarrow I^2$ l'arco nel quadrato I^2 che si ottiene percorrendo il segmento di retta \tilde{d} che unisce \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 , dove \tilde{x}_0 è l'unico punto di I^2 tale che $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$. Siano $\delta : I \rightarrow \mathbb{T}^2$, $\delta = \pi \circ \tilde{\delta}$ e $d = \pi(\tilde{d})$ le loro immagini nel quoziente. Segue che

$$\pi_1(U_1, x_0) = \langle A_1, A_2 \rangle,$$

dove

$$A_j = [\delta \cdot \alpha_j \cdot i(\delta)], \quad j = 1, 2, \quad (7.6)$$

è la classe in $\pi_1(U_1, x_0)$ del laccio $\delta \cdot \alpha_j \cdot i(\delta) : I \rightarrow \mathbb{T}^2$ di base x_0 (qui, come al solito, “ \cdot ” denota la concatenazione e $i(\delta)$ l’arco definito da $i(\delta)(t) = \delta(1-t)$).

Sia \tilde{c} il cerchio di I^2 passante per \tilde{x}_0 centrato in \tilde{y} . Allora $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ si retrae per deformazione (forte) a \tilde{c} e quindi $U_1 \cap U_2$ si retrae per deformazione (forte) a $c = \pi(\tilde{c})$. Si ha quindi che

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \cong \langle [\gamma] \rangle,$$

dove $\gamma : I \rightarrow \mathbb{T}^2$ è il laccio di base x_0 dato da $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$ e $\tilde{\gamma} : I \rightarrow I^2$ è il laccio di base \tilde{x}_0 ottenuto percorrendo \tilde{c} e compiendo un singolo giro.

Siamo nelle ipotesi del Corollario 7.4.1. Dobbiamo quindi scrivere $\varphi_1([\gamma])$ in termini dei generatori A_1 e A_2 di $\pi_1(U_1, x_0)$, dove gli A_j sono dati dalla (7.6). Vogliamo dimostrare che

$$\varphi_1([\gamma]) = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}. \quad (7.7)$$

Per fare questo, sia $\tilde{\sigma} : I \rightarrow I^2$ il laccio di base \tilde{x}_0 ottenuto come concatenazione $\tilde{\delta} \cdot q \cdot i(\tilde{\delta})$ dove $q : I \rightarrow I^2$ è il laccio di base $\tilde{x}_1 = (0, 0)$ ottenuto percorrendo una volta in senso orario il bordo del quadrato. Allora esiste un’omotopia $\tilde{F} : I^2 \rightarrow \tilde{U}_1$ relativa a $\{0, 1\}$ tra $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\sigma}$ cioè, con le notazioni della dimostrazione dal Teorema 7.1.1, $\tilde{\gamma} \sim_{\tilde{U}_1} \tilde{\sigma}$. Segue che $\gamma \sim_{U_1} \sigma$, $\sigma = \pi(\tilde{\sigma})$, tramite l’omotopia $F = \pi \circ \tilde{F} : I^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Osserviamo che $\sigma : I \rightarrow U_1$ è il laccio di base x_0 dato da

$$\sigma = \delta \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot i(\alpha_1) \cdot i(\alpha_2) \cdot i(\delta).$$

Allora

$$\gamma \sim_{U_1} \sigma \sim_{U_1} \delta \cdot \alpha_1 \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot \alpha_2 \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot i(\alpha_1) \cdot i(\delta) \cdot \delta \cdot i(\alpha_2) \cdot i(\delta)$$

e quindi

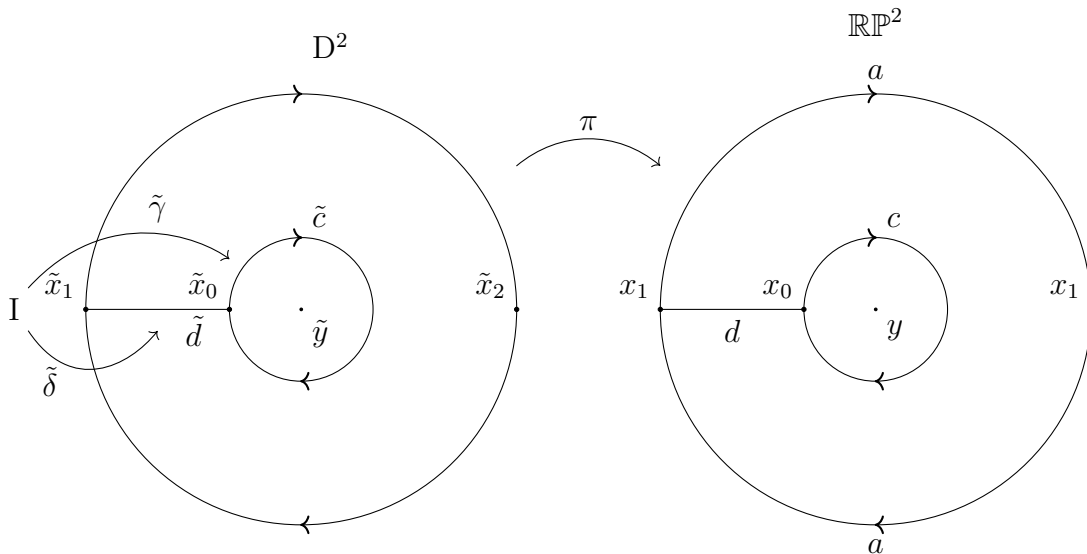
$$\varphi_1([\gamma]) = [\gamma]_{U_1} = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}$$

ossia la (7.7). Segue allora dal Corollario 7.4.1 che

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \langle A_1, A_2 \mid A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \rangle$$

il quale, per l’Esempio 6.3.3 è omeomorfo, a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Abbiamo così ottenuto una dimostrazione alternativa del fatto che il gruppo fondamentale di \mathbb{T}^2 è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in accordo con il Corollario 4.2.3.

Esempio 7.4.3. (gruppo fondamentale del proiettivo reale) Calcoliamo, infine, il gruppo fondamentale del proiettivo reale \mathbb{RP}^n , $n \geq 2$. Cominciamo dal caso $n = 2$. Con un ragionamento simile a quello del punto precedente e seguendo le indicazioni del seguente disegno



non è difficile dimostrare che:

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) = \langle A \mid A^2 \rangle = \mathbb{Z}_2.$$

I dettagli sono lasciati come esercizio allo studente (Esercizio 7.12).

Per calcolare $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$, per $n \geq 3$, osserviamo che per la (7.5) abbiamo che

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\})$$

dove y_0 è un punto qualunque di \mathbb{RP}^n . Sia $y_0 = [1, 0, \dots, 0]$. Allora $\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\}$ si retrae per deformazione su $\mathbb{RP}^{n-1} \cong H = \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \mid x_0 = 0\}$ tramite la retrazione

$$r : \mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1} \cong H : [x_0, \dots, x_n] \mapsto [0, x_1, \dots, x_n].$$

Infatti il fatto che r sia una retrazione per deformazione si ottiene tramite l'omotopia $F : \mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\} \times I \rightarrow \mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\}$ definita da:

$$F([x], t) = [(1-t)x_0, x_1, \dots, x_n], \quad [x] = [x_0, x_1, \dots, x_n],$$

analogamente a quello fatto per il proiettivo complesso (cfr. (7.4)). Segue che

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^n \setminus \{y_0\}) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^{n-1}).$$

Quindi, per induzione su $n \geq 2$, si ottiene che $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ in accordo con il Teorema 4.3.2.

7.5 Esercizi

Esercizio 7.1. Sia $X = U_1 \cup U_2$ uno spazio topologico connesso per archi unione di due aperti U_1 e U_2 . Dimostrare che se $U_1 \cap U_2$ è connesso per archi allora U_1 e U_2 sono connessi per archi. (Suggerimento: imitare la dimostrazione della prima parte del Teorema 7.1.1).

Esercizio 7.2. Dimostrare che lo spazio proiettivo complesso \mathbb{CP}^n è una varietà topologica compatta e connessa di dimensione $2n$ (cfr. Esempio 7.2.4).

Esercizio 7.3. Calcolare il gruppo fondamentale dello spazio X unione di n circonferenze di \mathbb{R}^2 di centro i punti P_j dell'asse delle ascisse di coordinate $P_j = (2j - 1, 0)$, $j = 1, \dots, n$, e di raggio unitario.

Esercizio 7.4. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare di k punti in S^2 .

Esercizio 7.5. Dimostrare che la “salsiccia” $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \sin^2(\pi z)\}$ e la “collana” $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \max(0, \sin(\pi z))\}$ sono semplicemente connessi.

Esercizio 7.6. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 dell'unione dei 3 semiassi coordinati

$$\{y = z = 0, x \geq 0\} \cup \{z = x = 0, y \geq 0\} \cup \{y = x = 0, z \geq 0\}.$$

Esercizio 7.7. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 dell'unione dei 3 semiassi positivi coordinati

$$\{y = z = 0, x > 0\} \cup \{z = x = 0, y > 0\} \cup \{y = x = 0, z > 0\}.$$

Esercizio 7.8. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 di

$$\{z = y = 0, x \geq 1\} \cup \{y = 0, x^2 + z^2 = 1\}.$$

(Suggerimento: usare le idee sviluppate nell'Esempio 7.3.6).

Esercizio 7.9. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 dell'unione di una retta e di un cerchio distinguendo tutte le possibilità che si possono presentare. (Suggerimento: stesso dell'esercizio precedente).

Esercizio 7.10. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in \mathbb{R}^3 di due rette (risp. due cerchi) distinguendo tutte le possibilità che si possono presentare. (Suggerimento: stesso dell'esercizio precedente).

Esercizio 7.11. Siano X_1 e X_2 due spazi topologici connessi per archi con gruppi fondamentali rispettivamente G_1 e G_2 . Costruire uno spazio topologico con gruppo fondamentale $G_1 * G_2$ (Suggerimento: considerare lo spazio topologico X ottenuto come unione disgiunta dei tre spazi X_1 , X_2 e $[0, 1]$ con la relazione d'equivalenza che identifica un punto $x_1 \in X_1$ con il punto $0 \in [0, 1]$, un punto $x_2 \in X_2$ con il punto $1 \in [0, 1]$ e che identifica gli altri punti a se stessi).

Esercizio 7.12. Dimostrare che $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2$ usando il Corollario 7.4.1 e le indicazioni fornite nell'Esempio 7.4.3.

Capitolo 8

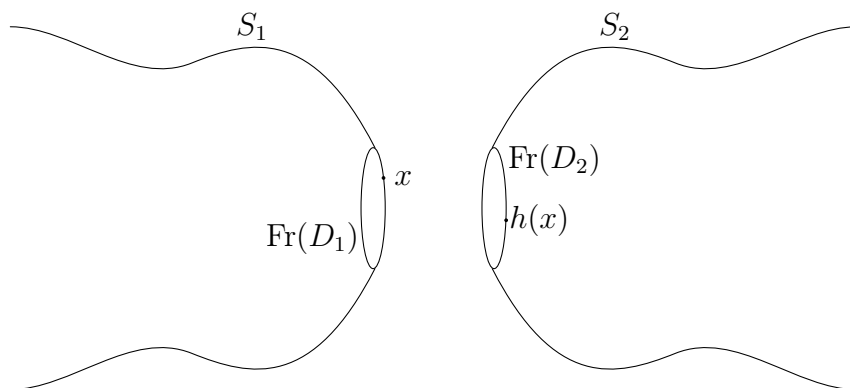
Classificazione delle superfici

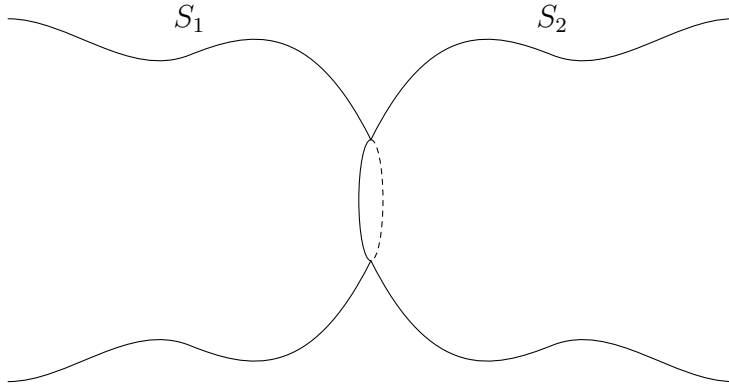
8.1 Somma connessa di due superfici

Date due superfici S_1 e S_2 possiamo costruire una nuova superficie, chiamata la **somma connessa** di S_1 e S_2 e denotata con $S_1 \# S_2$ come quella superficie ottenuta togliendo un disco aperto da ognuna delle superfici e poi incollando insieme i bordi dei due dischi. Più precisamente scegliamo $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ entrambi omeomorfi al disco unitario $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $S'_1 = S_1 \setminus \text{Int}(D_1)$ e $S'_2 = S_2 \setminus \text{Int}(D_2)$ e $h : \text{Fr}(D_1) \rightarrow \text{Fr}(D_2)$ un omeomorfismo. La **somma connessa** di S_1 e S_2 è definita come lo spazio quoziente

$$S_1 \# S_2 = S'_1 \times \{1\} \cup S'_2 \times \{2\} / \sim_h,$$

dove \sim_h è la relazione d'equivalenza che identifica i punti delle frontiere di D_1 e D_2 cioè $x \sim h(x)$ per ogni $x \in \text{Fr}(D_1)$ (i punti di $S'_1 \times \{1\}$ e di $S'_2 \times \{2\}$ vengono identificati a se stessi).





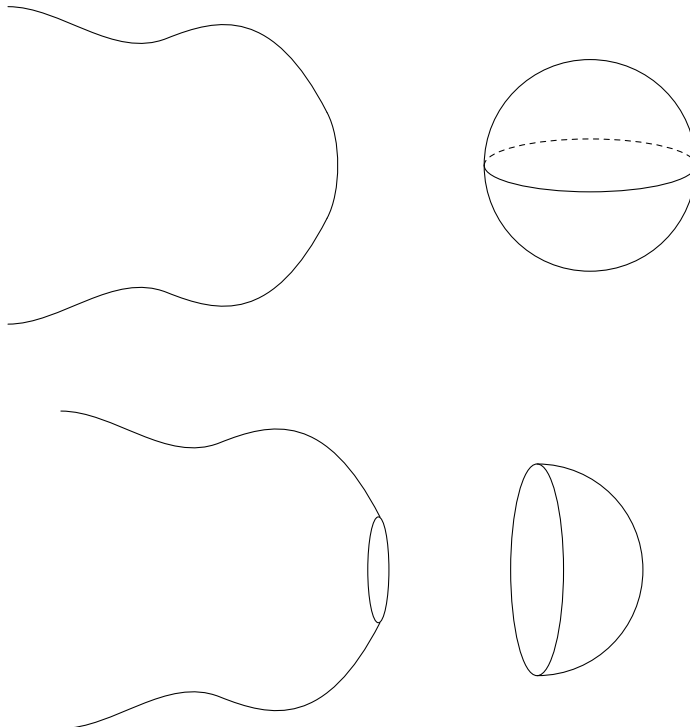
Vale il seguente fondamentale risultato che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 8.1.1. *Siano S_1 e S_2 due superfici. La loro somma connessa $S_1 \# S_2$ è una superficie. Inoltre il tipo topologico¹ di $S_1 \# S_2$ non dipende nè dai dischi D_1 e D_2 scelti né dall'omeomorfismo $h : Fr(D_1) \rightarrow Fr(D_2)$.*

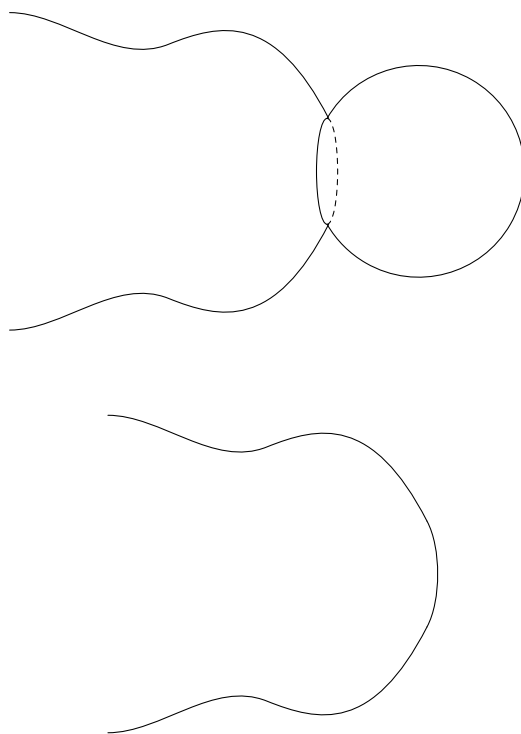
Esempio 8.1.2. Per ogni superficie S si ha:

$$S \# S^2 \cong S.$$

Questo segue dal fatto che se tolgo dalla sfera S^2 il disco aperto $D_2 = S^2 \cap \{z > 0\}$ si ottiene un disco chiuso.



¹Due superfici hanno lo stesso **tipo topologico** se sono omeomorfe.

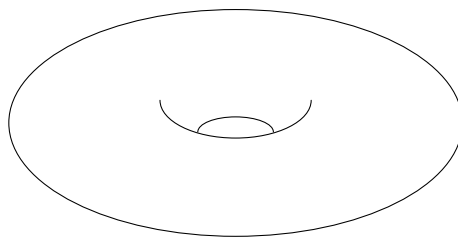


Osservazione 8.1.3. Osserviamo che la somma connessa definisce una struttura di monoide commutativo sull'insieme di tutte le superfici compatte e connesse. Infatti vale l'associatività

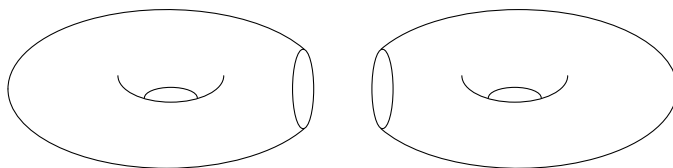
$$(S_1 \# S_2) \# S_3 \cong S_1 \# (S_2 \# S_3),$$

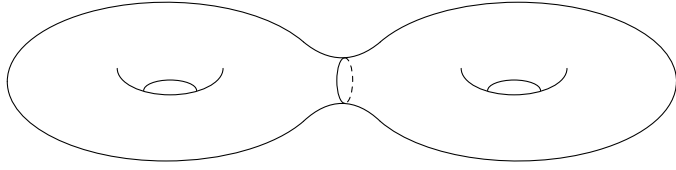
la commutatività $S_1 \# S_2 \cong S_2 \# S_1$ e l'elemento neutro è la sfera (per l'Esempio 8.1.2). Questo monoide non è un gruppo non esistendo l'inverso di una data superficie diversa dalla sfera.

Esempio 8.1.4. Siano $S_1 = S_2 \cong \mathbb{T}^2$

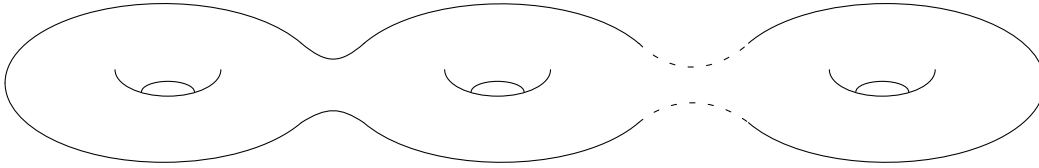
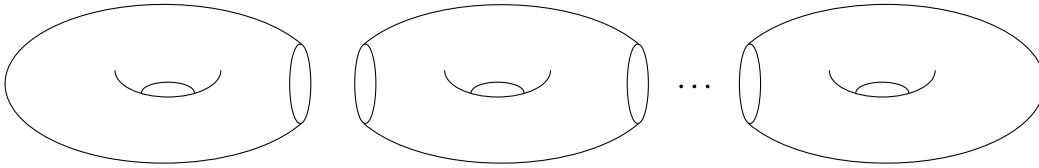


Allora la superficie $S_1 \# S_2$ è un toro con due buchi.

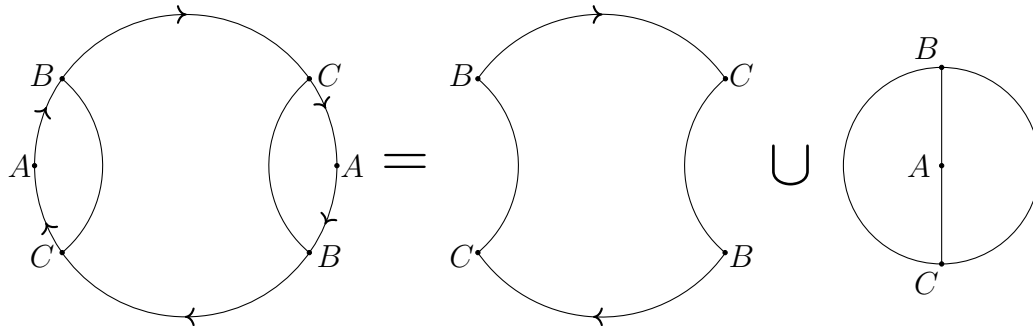




Più in generale se $S_1 = \dots = S_g \cong \mathbb{T}^2$ allora si ottiene un toro con g buchi.

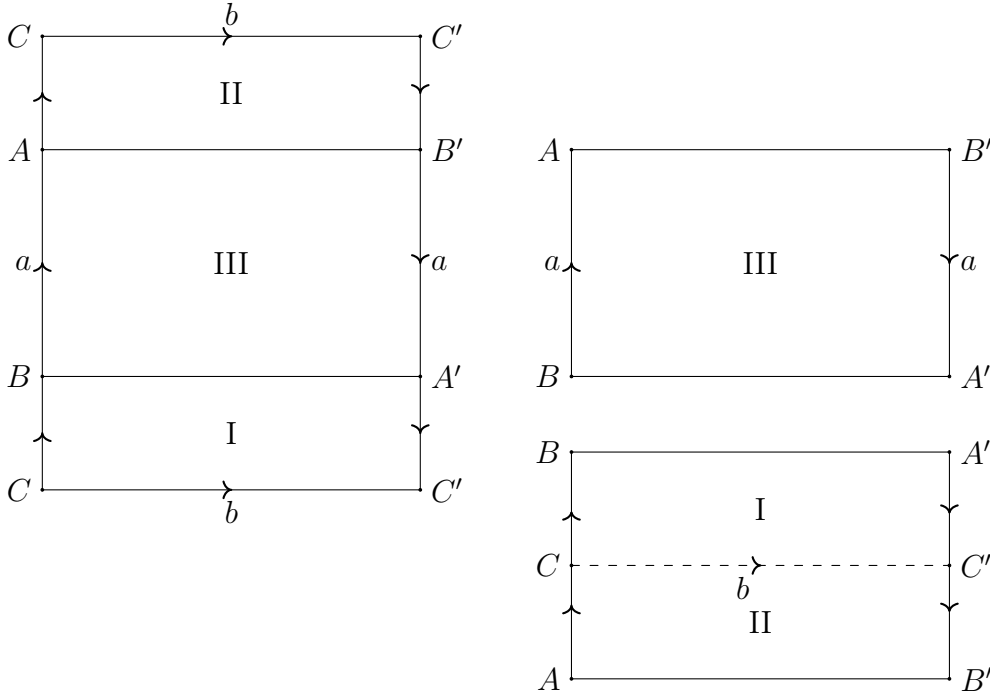


Esempio 8.1.5. Sia \mathbb{RP}^2 il piano proiettivo reale e S una superficie. Allora la somma connessa $S \# \mathbb{RP}^2$ si ottiene togliendo un disco aperto di S e incollando la frontiera del nastro di Möbius (che è omeomorfa a S^1) alla frontiera di tale disco. Infatti se D è un disco in \mathbb{RP}^2 allora $\mathbb{RP}^2 \setminus \text{Int}(D)$ è omeomorfo ad un nastro di Möbius N :



Esempio 8.1.6. La somma connessa $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ è omeomorfa alla bottiglia di Klein, in simboli $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong \text{Klein}$. Infatti, dall'esempio precedente, $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ si ottiene unendo due nastri di Möbius lungo la loro frontiera. D'altra parte anche la bottiglia di *Klein* si può ottenere come somma connessa di due nastri

di Möbius uniti lungo la loro frontiera come mostra la seguente figura:



La seguente proposizione mostra che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo reale è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi reali (si veda anche l'Esempio 8.6.11).

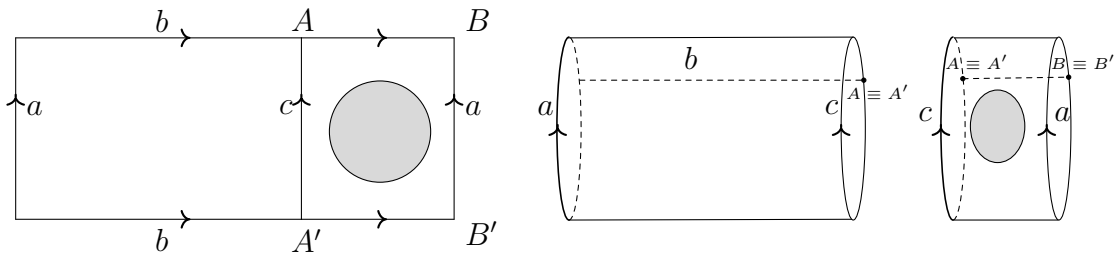
Proposizione 8.1.7.

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2.$$

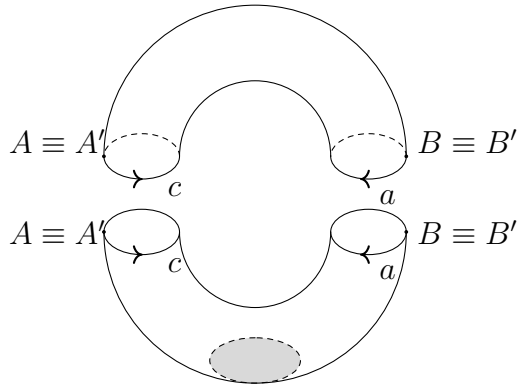
Dimostrazione: Dall'Esempio 8.1.6 sappiamo che $Klein \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$. Basta allora dimostrare che

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong Klein \# \mathbb{RP}^2.$$

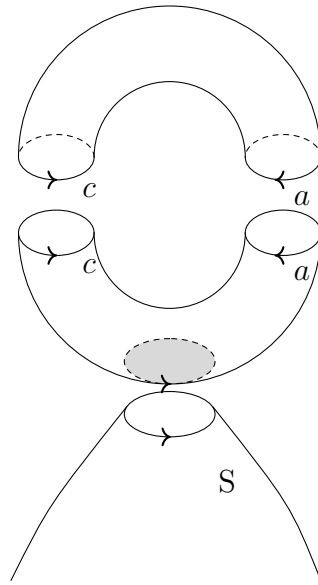
Cominciamo a vedere come si ottiene la somma connessa $\mathbb{T}^2 \# S$ con una superficie S (non necessariamente \mathbb{RP}^2). Questa somma connessa si ottiene togliendo un disco aperto $\text{Int } D_1$ da \mathbb{T}^2 togliendo un disco aperto $\text{Int } D_2$ dalla superficie S e incollando il bordo dei due dischi lungo la loro frontiera. Possiamo visualizzare $\mathbb{T}^2 \setminus \text{Int}(D_1)$ come segue:



dove il disco D_1 è rappresentato dalla zona ombreggiata. Oppure come:



La somma connessa $\mathbb{T}^2 \# S$ può essere visualizzata come segue:

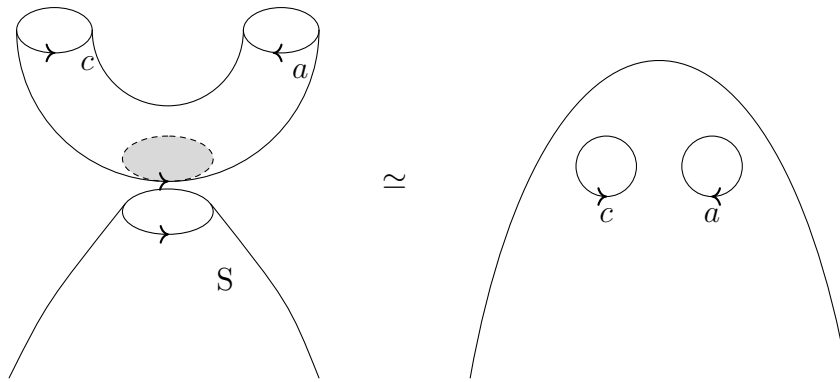


Quindi $\mathbb{T}^2 \# S$ può essere ottenuta in due fasi:

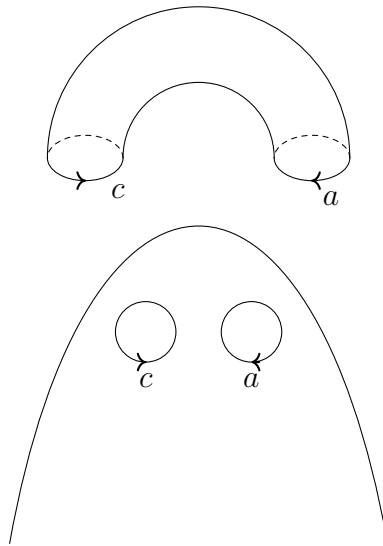
- nella prima fase uniamo la parte di \mathbb{T}^2 data da $ABA'B' \setminus \text{Int } D_1$ alla superficie $S \setminus \text{Int } D_2$;
- nella seconda fase uniamo il resto di \mathbb{T}^2 cioè $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$.

Nella prima fase stiamo facendo la somma connessa del tubo $ABA'B'$ con la superficie S . Questo tubo è omeomorfo alla sfera S^2 con due buchi (cioè S^2 meno due dischi aperti). Visto che S^2 è l'elemento neutro rispetto alla somma connessa

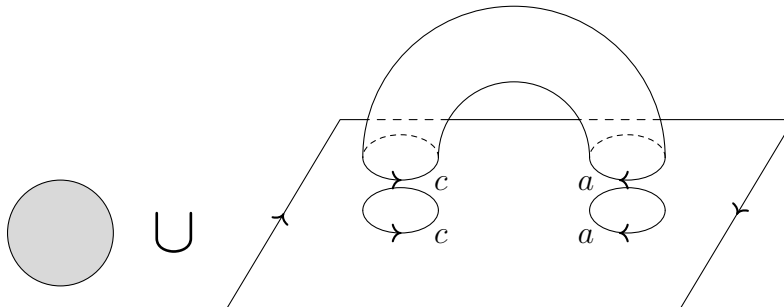
si ottiene semplicemente la superficie S con due buchi:



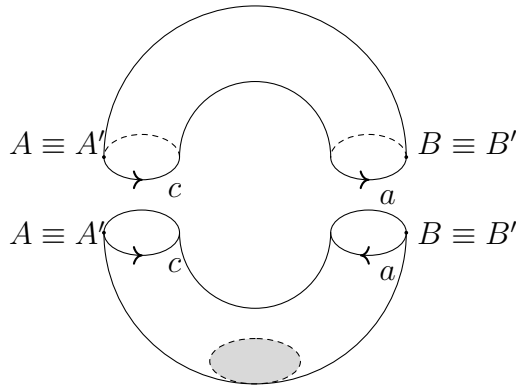
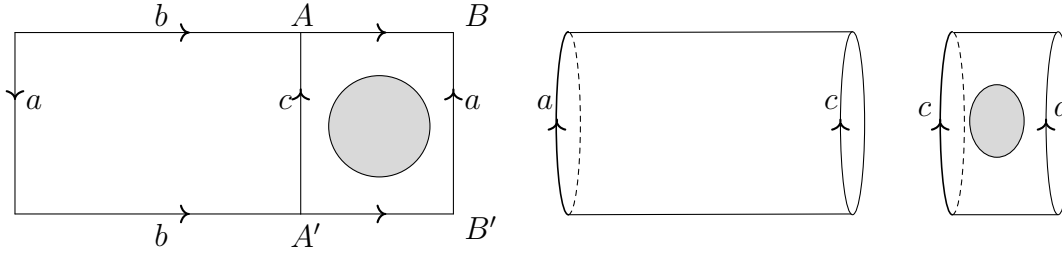
La seconda fase consiste nel connettere insieme la superficie S con due buchi con un tubo costituito da $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$:



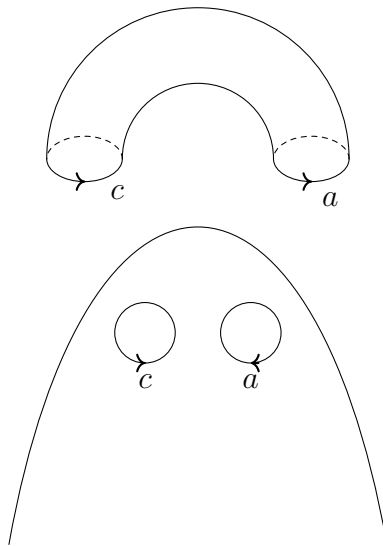
Consideriamo ora il caso $S = \mathbb{RP}^2$. Se togliamo da \mathbb{RP}^2 un disco aperto otteniamo un nastro di Möbius (cfr. Esempio 8.1.5). Quindi la somma connessa di $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$ si può ottenere togliendo due dischi aperti dal nastro di Möbius e attaccandoci $\mathbb{T}^2 \setminus ABA'B'$ e poi dopo riattaccando il disco alla frontiera del nastro di Möbius. Il tutto è visualizzato nella seguente figura:



Analogamente possiamo visualizzare $Klein \setminus \text{Int } D_1$ come nelle figure seguenti (si notino le orientazioni di a):

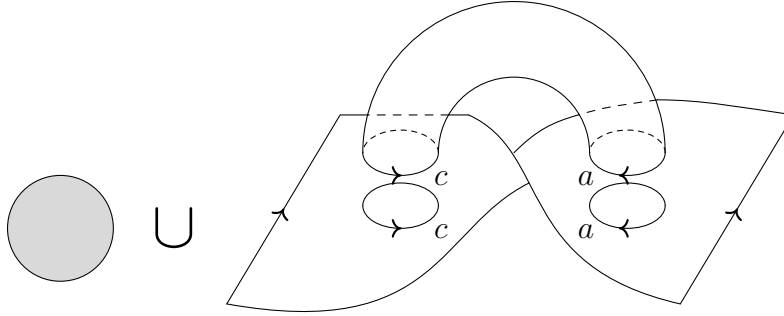


Con un ragionamento simile a quello precedente la somma connessa $Klein \# S$ della bottiglia di Klein con una superficie S consiste nel connettere insieme la superficie S con due buchi con un tubo costituito da $Klein \setminus ABA'B'$:



Quindi (analogamente al caso precedente) la somma connessa di $Klein \# \mathbb{RP}^2$ si può ottenere togliendo due dischi aperti dal nastro di Möbius e attaccandoci

$Klein \setminus ABA'B'$ e poi dopo riattaccando il disco alla frontiera del nastro di Möbius. Il tutto è visualizzato nella seguente figura:



Confrontando i Disegni 1 e 2 si deduce che $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong Klein \# \mathbb{RP}^2$, quello che si voleva dimostrare. \square

Il seguente fondamentale teorema mostra che ogni superficie compatta e connessa può essere ottenuta come somma connessa di un numero finito di copie di \mathbb{T}^2 e \mathbb{RP}^2 e che il numero di copie utilizzate determina la superficie a meno di omeomorfismi (un'idea della dimostrazione di questo teorema verrà fornita nel Paragrafo 8.3).

Teorema 8.1.8. (*classificazione delle superfici compatte e connesse*) Una superficie compatta e connessa è omeomorfa ad una e una sola delle seguenti superfici:

- la sfera S^2 ;
- la somma connessa di numero finito di tori;
- la somma connessa di un numero finito di piani proiettivi reali.

8.2 Presentazioni poligonali

Consideriamo una **regione poligonale** P chiusa nel piano di vertici p_0, \dots, p_n , $p_0 = p_n$. Il segmento che unisce p_i con p_{i+1} si chiama un **lato** di P . L'unione dei lati di P verrà chiamato il **bordo** di P e sarà indicato con ∂P ; $P \setminus \partial P$ verrà chiamato l'**interno** di P e denotato con $\text{Int } P$.

Sia L un segmento di \mathbb{R}^2 . Un'**orientazione** di L è semplicemente un ordine dei suoi estremi. Il primo vertice p è chiamato il **punto iniziale** mentre il secondo vertice q è chiamato il **punto finale** del segmento orientato. Diremo che L è orientato da p a q e disegneremo l'orientazione tramite un freccia che va da p a q . Se \tilde{L} è un altro segmento orientato da \tilde{p} a \tilde{q} denoteremo con $h : L \rightarrow \tilde{L}$

l'omeomorfismo di \mathbb{R}^2 che porta il punto $x = (1 - t)p + tq$ nel punto $h(x) = (1 - t)\tilde{p} + t\tilde{q}$ e chiameremo quest'omeomorfismo l'**applicazione lineare positiva** da L a \tilde{L} .

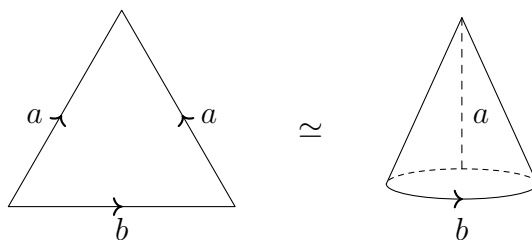
Sia P una regione poligonale nel piano. Un'**etichettatura** dei lati di P è un'applicazione dall'insieme dei lati di P ad un insieme detto *insieme delle etichette*. Data un'orientazione di ogni lato ed un'etichettatura definiamo una relazione d'equivalenza sui punti di P generata come segue:

- ogni punto $\text{Int } P$ è equivalente a se stesso;
- due lati L e \tilde{L} che hanno la stessa etichetta vengono identificati tramite l'applicazione lineare positiva da L a \tilde{L} , cioè $x \in L$ è equivalente a $h(x) \in \tilde{L}$.

Lo spazio quoziente X ottenuto da questa relazione d'equivalenza, dotato della topologia quoziente si dirà ottenuto da P **incollando i lati insieme** in accordo con le relative orientazioni e etichette.

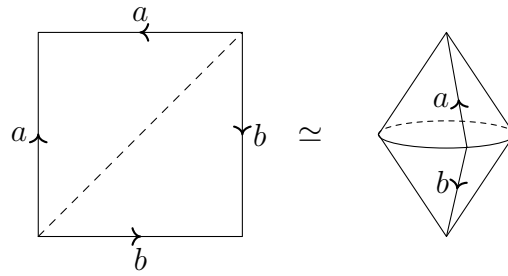
Sia P una regione poligonale chiusa di vertici p_0, \dots, p_n , $p_0 = p_n$. Fissate le orientazioni dei segmenti di ∂P e una loro etichettatura, denotiamo con a_1, \dots, a_m le etichette distinte assegnate ad ogni lato di P . Per ogni k , $k = 1, \dots, n$, sia a_{i_k} l'etichetta associata al lato $p_{k-1}p_k$ e sia $\epsilon_k = +1$ (risp. -1) se l'orientazione assegnata al lato va da p_{k-1} a p_k (risp. da p_k a p_{k-1}). Allora il numero dei lati, le loro etichettature e la loro orientazione sono completamente determinati dal simbolo $a_{i_1}^{\epsilon_1} a_{i_2}^{\epsilon_2} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}$. Chiameremo questo simbolo una **presentazione poligonale di lunghezza n** dello spazio quoziente X . Di solito non scriveremo l'esponente che è uguale a 1. Osserviamo che una permutazione ciclica dei termini di un'etichettatura cambierà lo spazio quoziente S solo a meno di omeomorfismi.

Esempio 8.2.1. Il disco unitario D^2 può essere descritto dalla presentazione poligonale di lunghezza tre $aa^{-1}b^{-1}$:



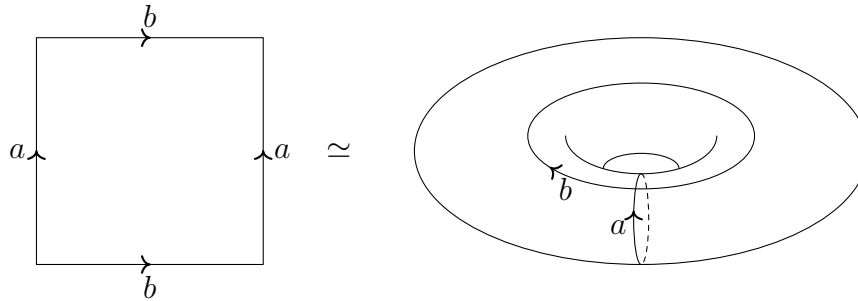
presentazione poligonale del disco

Esempio 8.2.2. La sfera S^2 può essere descritta dalla presentazione poligonale di lunghezza quattro $aa^{-1}bb^{-1}$:



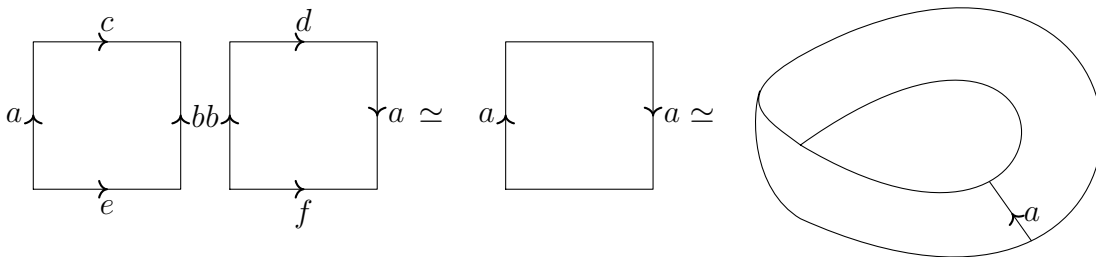
presentazione poligonale della sfera

Esempio 8.2.3. Per quanto riguarda il toro conosciamo già (cfr. [7]) una sua presentazione poligonale di lunghezza 4 e cioè $aba^{-1}b^{-1}$:

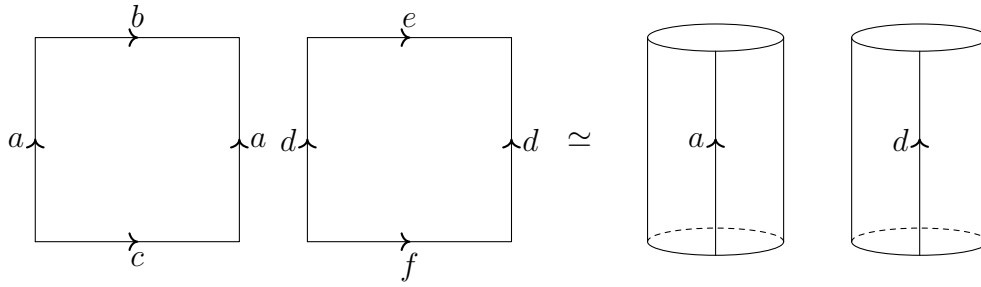


presentazione poligonale del toro

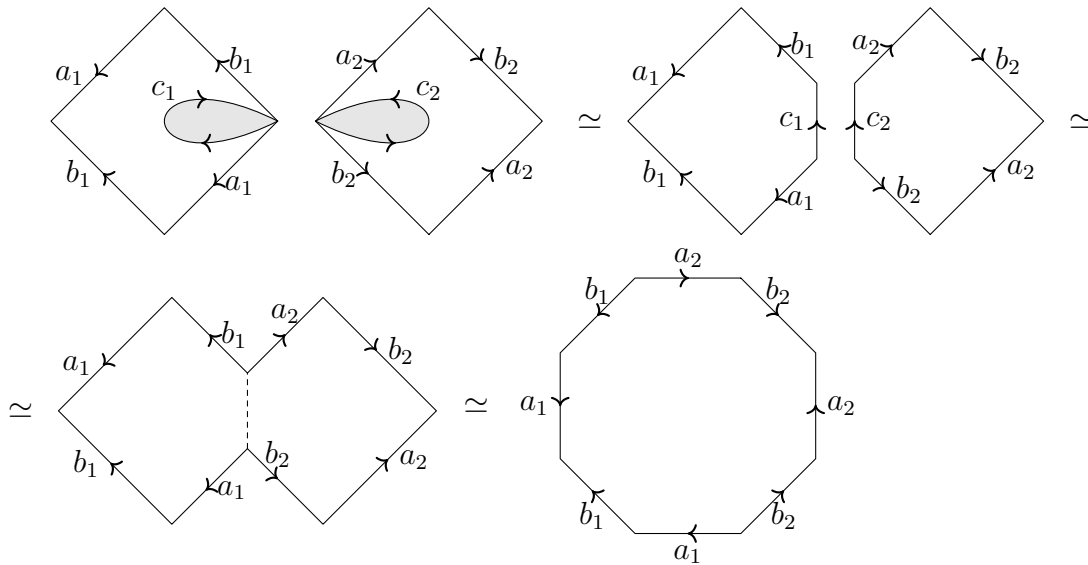
Esempio 8.2.4. Non c'è nessun motivo per considerare una sola regione poligonale. Dato un numero finito P_1, \dots, P_k di regioni poligonali disgiunte, con etichettature e con i lati orientati si può considerare lo spazio quoziente X ottenuto incollando i lati come nel caso di una sola regione poligonale. Lo spazio X potrebbe essere connesso oppure no. Per esempio il nastro di Möbius si può rappresentare come:



Oppure due cilindri disgiunti posso essere ottenuti come:



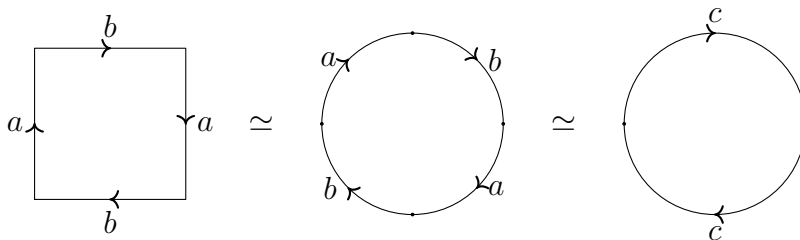
Esempio 8.2.5. La somma connessa di due tori ha la presentazione poligonale di lunghezza otto, $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$:



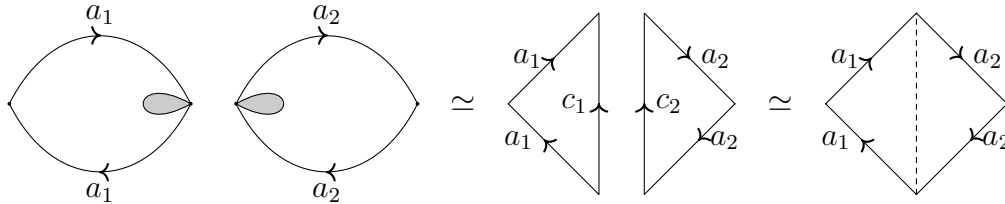
Si deduce allora facilmente che la somma connessa di g tori potrà essere descritta come la seguente presentazione poligonale di lunghezza $4g$:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \quad (8.1)$$

Esempio 8.2.6. Una presentazione poligonale di \mathbb{RP}^2 di lunghezza quattro è data da $abab$:



Esempio 8.2.7. La somma connessa di due copie di \mathbb{RP}^2 (che è omeomorfa alla bottiglia di Klein per l'Esempio 8.1.6) ha la seguente presentazione poligonale di lunghezza quattro: $a_1a_1a_2a_2$:



In generale la somma connessa di g copie di \mathbb{RP}^2 ha una presentazione poligonale di lunghezza $2g$:

$$a_1a_1a_2a_2 \cdots a_ga_g. \quad (8.2)$$

Osserviamo che nelle presentazioni poligonali fino ad ora descritte, se si tratta di una superficie, allora ogni lato viene identificato esattamente ad un altro lato. Ci si potrebbe chiedere se questo fatto determina una superficie. E in effetti la risposta positiva è data dal seguente risultato.

Teorema 8.2.8. *Sia X uno spazio topologico che ammette una presentazione poligonale $a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$, $\epsilon_j = \pm 1$, e siano a_1, \dots, a_m le etichette distinte. Allora X è una superficie compatta e connessa se e solo se ogni lato si identifica esattamente con un altro lato (quindi $n = 2m$). Se inoltre i vertici di P vengono identificati tutti ad uno stesso punto allora il gruppo fondamentale di X ha la seguente presentazione:*

$$\pi_1(X) \cong \langle A_1, \dots, A_m \mid A_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots A_{i_n}^{\epsilon_n} \rangle.$$

Dimostrazione: Diamo un'idea della dimostrazione lasciando i dettagli allo studente volenteroso. Lo spazio topologico X con la topologia quoziente è compatto e connesso in quanto quoziente di P che è compatto e connesso. Si verifica facilmente che l'applicazione quoziente $\pi : P \rightarrow X$ è chiusa, ossia che se C è un chiuso in P non è difficile vedere che $\pi^{-1}(\pi(C))$ è chiuso in P . Segue allora dal seguente Lemma 8.2.9 che X è di Hausdorff. Il fatto che X sia localmente euclideo di dimensione due se e solo i lati della regione poligonale sono pari si verifica considerando separatamente i vertici e i lati della poligonazione. La seconda parte del teorema si ottiene seguendo la falsariga del calcolo del gruppo fondamentale di \mathbb{T}^2 e \mathbb{RP}^2 (cfr. Esempi 7.4.2 e 7.4.3). \square

Lemma 8.2.9. *Siano X e Y spazi topologici, X compatto e di Hausdorff. Sia $\pi : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, suriettiva e chiusa. Allora Y è compatto e di Hausdorff.*

Dimostrazione: Lo spazio topologico Y è compatto in quanto immagine del compatto X tramite l'applicazione continua π . Per dimostrare che Y è di Hausdorff siano y_1 e y_2 due punti distinti di Y . Allora esistono due punti x_1 e x_2 in X tali che $y_1 = \pi(x_1)$ e $y_2 = \pi(x_2)$. Siccome X è di Hausdorff i suoi punti sono chiusi e quindi y_1 e y_2 sono chiusi essendo l'immagine di due chiusi x_1 e x_2 tramite π che è chiusa. Quindi $\pi^{-1}(y_1)$ e $\pi^{-1}(y_2)$ sono due chiusi disgiunti di X . Essendo X compatto e di Hausdorff allora X è normale (si veda il corso di topologia generale). Quindi esistono due aperti disgiunti U_1 e U_2 di X tali che $\pi^{-1}(y_1) \subset U_1$ e $\pi^{-1}(y_2) \subset U_2$. Poiché π è chiusa $\pi(X \setminus U_1)$ e $\pi(X \setminus U_2)$ sono due chiusi in Y tali che $y_j \notin \pi(X \setminus U_j)$, $j = 1, 2$. Segue che $W_1 = Y \setminus \pi(X \setminus U_1)$ e $W_2 = Y \setminus \pi(X \setminus U_2)$ sono due aperti di Y che contengono rispettivamente y_1 e y_2 . Resta da far vedere che $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Supponiamo per assurdo che esista $y \in W_1 \cap W_2 = Y \setminus (\pi(X \setminus U_1) \cup \pi(X \setminus U_2))$. Allora $y \notin \pi(X \setminus U_1) \cup \pi(X \setminus U_2)$. Segue che $\pi^{-1}(y) \cap (X \setminus U_j) = \emptyset$, $j = 1, 2$, quindi $\pi^{-1}(y) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$, che è assurdo. \square

Nel seguito indicheremo con $g\mathbb{T}^2$, $g \geq 0$, la somma connessa di g tori con la convenzione che $0\mathbb{T}^2 \cong S^2$. Analogamente indicheremo con $g\mathbb{RP}^2$, $g \geq 1$, la somma di g piani proiettivi reali. Osserviamo che la presentazioni poligonali di $g\mathbb{T}^2$ data da (8.1) e di $g\mathbb{RP}^2$ data da (8.2) identificano i vertici della regione poligonale tutti ad uno stesso punto. Dal Teorema 8.2.8 si ottiene allora il seguente risultato:

Corollario 8.2.10. *Il gruppo fondamentale di $g\mathbb{T}^2$ ha la seguente presentazione:*

$$\pi_1(g\mathbb{T}^2) = \langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g \mid A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} \rangle \quad (8.3)$$

mentre il gruppo fondamentale di $g\mathbb{RP}^2$ ha la seguente presentazione:

$$\pi_1(g\mathbb{RP}^2) = \langle A_1, A_2, \dots, A_g \mid A_1^2 A_2^2 \dots A_g^2 \rangle. \quad (8.4)$$

8.3 Dimostrazione del teorema di classificazione

Possiamo ora dare un'idea della dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici.

Dimostrazione del Teorema 8.1.8

Sia S una superficie compatta e connessa. Supponiamo che esista una curva $C \subset S$ chiusa e semplice (cioè senza autointersezioni) che non separi S (cioè tale che $S \setminus C$ sia connesso). Si può dimostrare che un intorno di C in S è omeomorfo ad un cilindro o ad un nastro di Möbius. Rimuoviamo il cilindro o il nastro di

Möbius tranne il loro bordo (due cerchi nel caso del cilindro e un cerchio nel caso del nastro di Möbius) dalla superficie S e ricuciamoci sopra due dischi nel caso del cilindro o un disco nel caso del nastro di Möbius. Otteniamo così una nuova superficie S_1 . Quindi S si ottiene da S_1 togliendoci l'interno di due dischi e attaccandoci un cilindro lungo il bordo (due cerchi) oppure togliendoci l'interno di un disco e attaccandoci un nastro di Möbius lungo il bordo (un cerchio). Si hanno dunque tre possibilità (cfr. dimostrazione della Proposizione 8.1.7)

$$S = S_1 \# \mathbb{T}^2, \quad S = S_1 \# Klein, \quad S = S_1 \# \mathbb{RP}^2.$$

Consideriamo una curva chiusa semplice in S_1 che non separi S_1 . Ripetendo il procedimento precedente si ottiene una superficie S_2 tale che

$$S_1 = S_2 \# \mathbb{T}^2, \quad S_1 = S_2 \# Klein, \quad S_1 = S_2 \# \mathbb{RP}^2.$$

Iterando il procedimento si ottiene dopo j passi una superficie S_j tale che

$$S = S_j \# j_1 \mathbb{T}^2 \# j_2 Klein \# j_3 \mathbb{RP}^2, \quad j = j_1 + j_2 + j_3,$$

dove stiamo indicando con $j_1 \mathbb{T}^2$ (risp. $j_2 Klein$ e $j_3 \mathbb{RP}^2$) la somma connessa di j_1 tori (risp. j_2 bottiglie di Klein e j_3 piani proiettivi). Si dimostra che dopo un numero finito k di passi il procedimento termina e cioè che ogni curva semplice chiusa in S_k separa S_k . Inoltre si dimostra ² che l'unica superficie separata da ogni curva chiusa semplice è la sfera S^2 . Otteniamo quindi che:

$$S = S^2 \# p \mathbb{T}^2 \# q Klein \# r \mathbb{RP}^2 \cong p \mathbb{T}^2 \# q Klein \# r \mathbb{RP}^2, \quad p, q, r \geq 0, \quad p + q + r = k.$$

Dalla Proposizione 8.1.7 e dall'Esempio 8.1.6 segue allora che:

$$S \cong \begin{cases} p \mathbb{T}^2 & \text{se } q + r = 0 \\ (2p + 2q + r) \mathbb{RP}^2 & \text{se } q + r > 0, \end{cases}$$

Quindi S è omeomorfa ad una somma connessa di un numero finito di tori o di piani proiettivi reali. Resta da dimostrare che S è omeomorfa ad una sola di queste superfici e quindi i seguenti fatti:

1. siano $g, \tilde{g} \geq 0$, se $g \mathbb{T}^2$ è omeomorfo a $\tilde{g} \mathbb{T}^2$ allora $g = \tilde{g}$;
2. siano $g, \tilde{g} \geq 1$, se $g \mathbb{RP}^2$ è omeomorfo a $\tilde{g} \mathbb{RP}^2$ allora $g = \tilde{g}$;
3. sia $g \geq 0$ e $\tilde{g} \geq 1$, $g \mathbb{T}^2$ non è omeomorfa a $\tilde{g} \mathbb{RP}^2$ per nessun g e \tilde{g} .

²Quest'affermazione anche se intuitivamente plausibile è un famoso teorema dovuto a Schönflies.

Supponiamo $g\mathbb{T}^2 \cong \tilde{g}\mathbb{T}^2$ (risp. $g\mathbb{RP}^2 \cong \tilde{g}\mathbb{RP}^2$). Segue dell'invarianza topologica del gruppo fondamentale (Teorema 2.3.1), da (8.3) (risp. (8.4)) e dall'Esempio 6.3.3 (risp. dall'Esempio 6.3.4) che

$$\mathbb{Z}^{2g} \cong \text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{T}^2)) \cong \text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^{2\tilde{g}}$$

(risp.

$$\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 \cong \text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{RP}^2)) \cong \text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{RP}^2)) \cong \mathbb{Z}^{\tilde{g}-1} \times \mathbb{Z}_2)$$

e quindi $g = \tilde{g}$ (cfr. la classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati, Teorema 6.1.1). D'altra parte $\text{Ab}(\pi_1(g\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ non può essere isomorfo a $\text{Ab}(\pi_1(\tilde{g}\mathbb{RP}^2)) \cong \mathbb{Z}^{\tilde{g}-1} \times \mathbb{Z}_2$ per nessun g e \tilde{g} ($\mathbb{Z}^{\tilde{g}-1} \times \mathbb{Z}_2$ ha, a differenza di \mathbb{Z}^{2g} , un elemento di ordine 2). Questo conclude la dimostrazione del teorema. \square

Osservazione 8.3.1. L'abelianizzazione $\text{Ab}(\pi_1(S))$ del gruppo fondamentale $\pi_1(S)$ di una superficie compatta e connessa si chiama il **primo gruppo omologia** della superficie S . Più in generale, il primo gruppo di omologia di uno spazio topologico connesso per archi X è dato da $\text{Ab}(\pi_1(X))$, l'abelianizzazione del suo gruppo fondamentale ³.

La dimostrazione del Teorema 8.1.8 insieme all'invarianza omotopica del gruppo fondamentale (Corollario 2.4.3) mostra la validità del seguente risultato.

Corollario 8.3.2. *Due superfici compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se sono omotopicamente equivalenti.*

Osservazione 8.3.3. La classificazione delle varietà topologiche di dimensione 3 (soluzione della **congettura di geometrizzazione di Thurston**) è stata ottenuta nei primi anni del 2000 da Gregori Perelman tramite l'uso di tecniche sofisticate di Geometria Riemanniana. Osserviamo che in dimensione 3 non è più vero come per le superfici (Corollario 8.3.2) che due varietà compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se sono omotopicamente equivalenti. Dal risultato di Perelman si può dedurre (in modo non banale) che S^3 è, a meno di omeomorfismi, l'unica varietà di dimensione 3 compatta e semplicemente connessa. Questo fornisce una soluzione ad una famosa **congettura di Poincaré**. In dimensione due l'analogo della congettura di Poincaré (cioè che una superficie compatta e semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera S^2) segue immediatamente dal

³Lo studente che seguirà un corso sull'omologia incontrerà una definizione molto diversa del primo gruppo di omologia di uno spazio topologico.

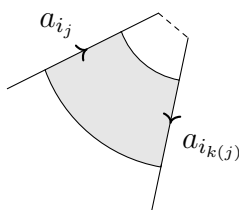
Teorema 8.1.8. In dimensione maggiore o uguale a 4 esistono varietà compatte e semplicemente connesse che non sono omeomorfe alla sfera (per esempio $S^2 \times S^2$). La **congettura di Poincaré generalizzata** asserisce che una varietà n -dimensionale compatta e omotopicamente equivalente a S^n è omeomorfa a S^n . Questa congettura è stata dimostrata in dimensione $n \geq 5$ da Stephen Smale agli inizi degli anni 60 e in dimensione 4 da Michael Freedman agli inizi degli anni 80. Entrambi vinsero la medaglia Fields per i loro risultati. Per quanto riguarda le varietà di dimensione maggiore o uguale a 4 si dimostra che non esiste una loro classificazione. In effetti si dimostrano i seguenti fatti: 1) non esiste una classificazione delle presentazioni finite di gruppi; 2) per ogni presentazione finita $\langle S \mid R \rangle$ esiste una varietà M di dimensione 4 compatta e connessa tale che $\pi_1(M) \cong \langle S \mid R \rangle$.

Osservazione 8.3.4. Non esiste una classificazione delle superfici non compatte. Si presenta una grande quantità di tali superfici (si pensi che un aperto qualunque di una superficie compatta e connessa è ancora una superficie). Se una superficie non compatta è semplicemente connessa un famoso teorema dovuto a Riemann asserisce che allora la superficie è omeomorfa a \mathbb{R}^2 .

8.4 Orientabilità e genere di una superficie

Sia S una superficie compatta e connessa. Diremo che S è **orientabile** se non esiste un embedding $N \rightarrow S$ dove N è un nastro di Möbius. Segue immediatamente che l'orientabilità di una superficie è un invariante topologico.

L'orientabilità può essere espressa in termini di presentazione poligonale. Infatti sia $a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$, $\epsilon_j = \pm 1$, una presentazione poligonale della superficie S . Dal Teorema 8.2.8 segue che $n = 2m$ e, per ogni $j = 1, \dots, n$, esiste un unico $k(j) \neq j$ tale che $a_{i_j} = a_{i_{k(j)}}$. Allora, S è orientabile se e solo se per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha $\epsilon_j = -\epsilon_{k(j)}$. Infatti, se j è tale che $\epsilon_j = \epsilon_{k(j)}$, allora esiste un nastro di Möbius $N \rightarrow S$:



D'altra parte, non è difficile convincersi che se esiste un embedding $N \rightarrow S$ (di un nastro di Möbius N) allora se esiste un j tale che $\epsilon_j = \epsilon_{k(j)}$.

Dalle presentazioni poligonali della sfera, del toro e del proiettivo si deduce che S^2 e \mathbb{T}^2 sono superfici orientabili mentre \mathbb{RP}^2 non è orientabile. Inoltre la somma connessa $S_1 \# S_2$ di due superfici è orientabile se e solo se S_1 e S_2 sono entrambe orientabili. Quindi la somma connessa di un numero finito di tori è una superficie orientabile mentre la superficie ottenuta come somma connessa di un numero finito di piani proiettivi reali non è orientabile.

Diremo che la sfera S^2 ha **genere zero** e la somma connessa di g tori (risp. g piani proiettivi reali) ha **genere g** . Quindi, per esempio, il genere della bottiglia di Klein è due, come segue dall'Esempio 8.1.6. Il genere di una superficie orientabile si può pensare anche come il numero di “buchi” della superficie. Si può dimostrare che nel caso la superficie sia orientabile il genere rappresenta il massimo numero di curve chiuse semplici (senza autointersezioni) e disgiunte della superficie che non separino la superficie. Osserviamo che il genere di una superficie non è un invariante topologico. Un fatto notevole è che il genere di una superficie insieme alla sua orientabilità costituiscono un **sistema completo di invarianti** cioè caratterizzano una superficie a meno di omeomorfismi, come espresso dal seguente teorema che segue immediatamente dal Teorema 8.1.8.

Teorema 8.4.1. *Due superfici compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se valgono i seguenti fatti:*

1. *sono entrambe orientabili o non orientabili;*
2. *hanno lo stesso genere.*

8.5 Classificazione delle superfici con bordo

Sia $h > 0$ un numero naturale. Una superficie S compatta e connessa con bordo si ottiene (per definizione) da una superficie \tilde{S} compatta e connessa alla quale sono stati rimossi h dischi aperti disgiunti con frontiere (cerchi) disgiunte. Le circonferenze frontiere di questi dischi sono chiamate le **componenti di bordo** di S . Il **genere** di S è per definizione il genere della superficie \tilde{S} . Diremo che S è **orientabile** (risp. **non orientabile**) se \tilde{S} è orientabile (risp. non orientabile).

Esempio 8.5.1. Il disco D^2 è una superficie orientabile di genere zero con una componente di bordo (si veda l'Esempio 8.1.2).

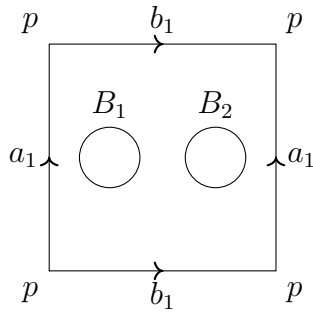
Esempio 8.5.2. Il nastro di Möbius è una superficie non orientabile di genere uno con una componente di bordo, come segue dalla prima parte dell'Esempio 8.1.6.

Il risultato seguente è l'analogo del Teorema 8.4.1 (la dimostrazione viene lasciata come esercizio allo studente volenteroso).

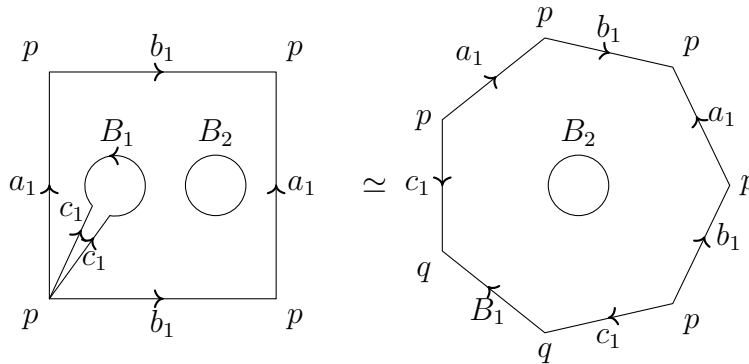
Teorema 8.5.3. *Due superfici compatte e connesse con bordo sono omeomorfe se e solo se e valgono i seguenti fatti:*

1. *hanno lo stesso numero di componenti di bordo;*
2. *sono entrambe orientabili o non orientabili;*
3. *hanno lo stesso genere.*

Il calcolo del gruppo fondamentale di una superficie compatta e connessa con bordo si può ottenere tramite una sua **presentazione poligonale con buchi** come segue. Consideriamo, per esempio, il caso di una superficie compatta, connessa con bordo orientabile di genere $g = 1$ con $h = 2$ componenti di bordo. Una sua presentazione poligonale con due buchi è la seguente:



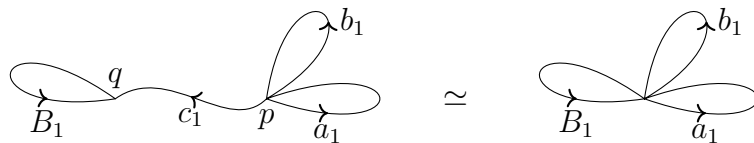
Applicando la seguente operazione



Otteniamo che la superficie in questione ha la presentazione poligonale con un buco

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} c_1 B_1 c_1^{-1}$$

ed è omotopicamente equivalente ad un bouquet di tre circonferenze:



Iterando questo procedimento su tutti i buchi meno uno si ottiene che una superficie compatta connessa con bordo orientabile di genere g e h componenti di bordo ha una “presentazione poligonale con un buco” data da:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 B_1 c_1^{-1} \cdots c_{h-1} B_{h-1} c_{h-1}^{-1}.$$

Con lo stesso ragionamento una superficie compatta connessa con bordo non orientabile di genere g e h componenti di bordo ha la presentazione poligonale con un buco

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g c_1 B_1 c_1^{-1} \cdots c_{h-1} B_{h-1} c_{h-1}^{-1}.$$

Indichiamo con Σ_g^h la superficie compatta, connessa con bordo di genere g con h componenti di bordo. Segue allora che Σ_g^h è omotopicamente equivalente ad un bouquet di $2g + h - 1$ circonferenze nel caso orientabile e ad un bouquet di $g + h - 1$ circonferenze nel caso non orientabile. Si ottiene allora dall'Esempio 7.3.3 che:

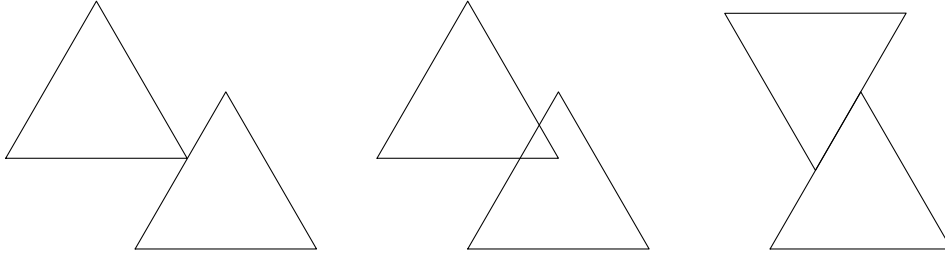
$$\pi_1(\Sigma_g^h) = \begin{cases} *^{2g+h-1} \mathbb{Z} & \text{se } g \geq 0, \text{ se } \Sigma_g^h \text{ è orientabile} \\ *^{g+h-1} \mathbb{Z} & \text{se } g \geq 1, \text{ se } \Sigma_g^h \text{ non è orientabile.} \end{cases}$$

Osservazione 8.5.4. Date due superfici con bordo non possiamo concludere (come nel Corollario 8.3.2) che esse sono omeomorfe se sono omotopicamente equivalenti. Si consideri, per esempio, la sfera S^2 meno tre dischi aperti e il toro \mathbb{T}^2 meno un disco aperto. Queste superfici con bordo sono orientabili non sono omeomorfe (hanno genere diverso) ma sono omotopicamente equivalenti ad un bouquet di due circonferenze. Un altro esempio è dato dalla sfera S^2 meno due dischi aperti e \mathbb{RP}^2 meno un disco aperto (ossia un nastro di Möbius). Queste superfici sono omotopicamente equivalenti a S^1 ma non sono omeomorfe (hanno genere diverso e la prima è orientabile e la seconda no).

8.6 Caratteristica di Eulero

Sia S una superficie compatta e connessa. Un **triangolo** T di S è l'immagine di un embedding $f : \tau \rightarrow S$, $T = f(\tau)$, dove τ un triangolo di \mathbb{R}^2 . I **vertici** e i **lati**

del triangolo T sono rispettivamente le immagini dei vertici e dei lati di τ . Una **triangolazione** \mathcal{T} di S è una famiglia finita di triangoli di S che ricoprono S tali che due triangoli di questa famiglia o hanno intersezione vuota o si intersecano in un vertice o hanno esattamente un lato in comune. Vogliamo quindi escludere situazioni come quelle in figura:



Più in generale, si dice **poligono** P di una superficie compatta e connessa S l'immagine di un poligono p di \mathbb{R}^2 tramite un embedding $g : p \rightarrow S$, $P = g(p)$. Una **poligonazione** della superficie S è una famiglia finita di poligoni di S , che ricoprono S , tali che due poligoni o hanno intersezione vuota, o si intersecano in un vertice o hanno esattamente un lato in comune. Vale il seguente importante risultato.

Teorema 8.6.1. *Sia S una superficie compatta. Allora esiste un triangolazione di S .*

Questo teorema è stato dimostrato per la prima volta da Tibor Radò nel 1925. La dimostrazione è molto tecnica. Lo studente interessato potrà trovare la dimostrazione nel libro [12] in bibliografia.

Sia S una superficie compatta e connessa e sia \mathcal{T} una sua triangolazione. La **caratteristica di Eulero** $\chi(\mathcal{T})$ di \mathcal{T} è il numero intero dato da:

$$\chi(T) = F - L + V, \quad (8.5)$$

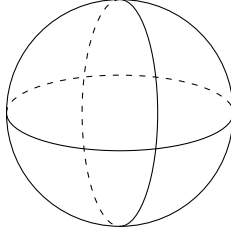
dove F rappresenta il numero dei triangoli, L il numero di lati e V il numero di vertici della triangolazione. Vale il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 8.6.2. *Siano \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 due triangolazioni di una superficie compatta S . Allora $\chi(\mathcal{T}_1) = \chi(\mathcal{T}_2)$.*

In virtù dei teoremi precedenti possiamo quindi definire la **caratteristica di Eulero** di una superficie compatta S , che indicheremo con $\chi(S)$, come la caratteristica di Eulero di una sua triangolazione. Il seguente teorema è di immediata dimostrazione.

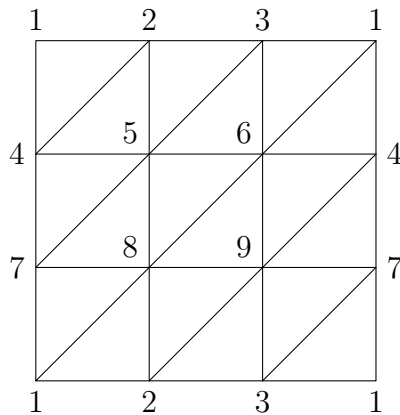
Teorema 8.6.3. *Siano S e \tilde{S} due superfici compatte e connesse. Se S è omeomorfa a \tilde{S} allora $\chi(S) = \chi(\tilde{S})$.*

Esempio 8.6.4. Una triangolazione della sfera S^2 è data da:



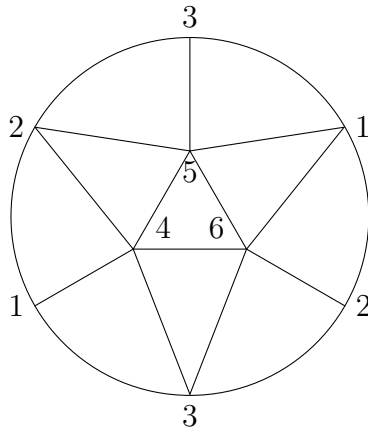
Questa triangolazione consiste di 8 facce, 12 lati e 6 vertici e quindi $\chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2$.

Esempio 8.6.5. Una triangolazione del toro è data da:



Questa triangolazione consiste di 18 facce, 27 lati e 9 vertici e quindi $\chi(\mathbb{T}^2) = 18 - 27 + 9 = 0$.

Esempio 8.6.6. Il piano proiettivo reale può essere triangolato come in figura:



Questa triangolazione consiste di 10 facce, 15 lati e 6 vertici e quindi $\chi(\mathbb{RP}^2) = 10 - 15 + 6 = 1$.

Proposizione 8.6.7. *Siano S_1 e S_2 due superficie compatte e connesse e $S_1 \# S_2$ la loro somma connessa. Allora*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Dimostrazione: Consideriamo due triangolazioni delle superfici S_1 e S_2 . Dal momento che un triangolo è omeomorfo ad un disco per ottenere la somma connessa di S_1 e S_2 possiamo rimuovere l'interno di un triangolo T_1 della triangolazione di S_1 e l'interno di un triangolo T_2 della superficie S_2 e incollare insieme i bordi di questi triangoli. Otteniamo quindi che la somma connessa $S_1 \# S_2$ ha $F_1 + F_2 - 2$ triangoli, $L_1 + L_2 - 3$ lati e $V_1 + V_2 - 3$ vertici dove F_1 , L_1 e V_1 (risp. F_2 , L_2 e V_2) rappresentano il numero di triangoli, lati e vertici della triangolazione di S_1 (risp. S_2). Allora

$$\chi(S_1 \# S_2) = (F_1 + F_2 - 2) - (L_1 + L_2 - 3) + (V_1 + V_2 - 3) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2,$$

che è quello che si voleva dimostrare. \square

Usando la Proposizione 8.6.7, gli esempi che la precedono e il Teorema 8.1.8, possiamo calcolare la caratteristica di Eulero di una qualunque superficie compatta e connessa:

Corollario 8.6.8. *Sia $g\mathbb{T}^2$, $g \geq 0$ la superficie compatta e connessa orientabile di genere g (somma connessa di g tori) e $g\mathbb{RP}^2$, $g \geq 1$, la superficie compatta e connessa non orientabile di genere g (somma connessa di g piani proiettivi reali). Allora*

$$\chi(g\mathbb{T}^2) = 2 - 2g$$

mentre

$$\chi(g\mathbb{RP}^2) = 2 - g.$$

e quindi il genere g è dato da:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(g\mathbb{T}^2)) & \text{se } g \geq 0, \\ 2 - \chi(g\mathbb{RP}^2) & \text{se } g \geq 1. \end{cases} \quad (8.6)$$

Dal corollario e dal Teorema 8.4.1 si ottiene anche il seguente:

Corollario 8.6.9. *Due superficie compatte e connesse sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa caratteristica di Eulero e sono entrambi orientabili o non orientabili.*

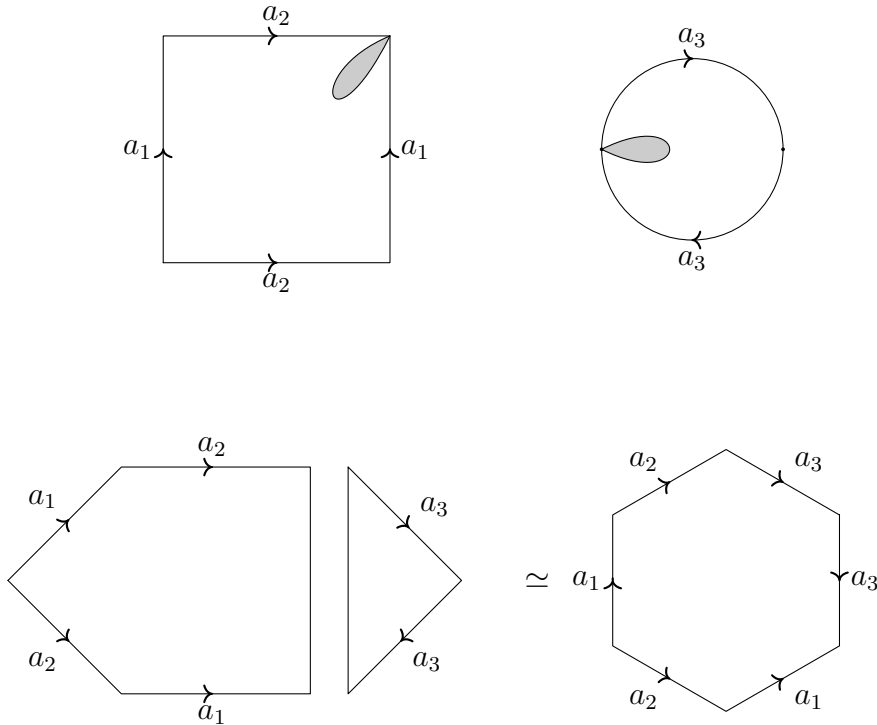
Concludiamo questo paragrafo con il seguente risultato che descrive come trovare la caratteristica di Eulero di una superficie conoscendo una sua presentazione poligonale.

Proposizione 8.6.10. *Sia $a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$, $\epsilon_j = \pm 1$ una presentazione poligonale di una superficie S compatta e connessa e siano a_1, \dots, a_m , $2m = n$, le etichette distinte (cfr. Teorema 8.2.8). Sia v il numero di punti distinti di S ottenuti identificando i vertici della poligonale. Allora*

$$\chi(S) = 1 - m + v.$$

Dimostrazione: si veda l'Esercizio 8.5. □

Esempio 8.6.11. Vogliamo verificare in due modi differenti che la presentazione poligonale: $a_1 a_2 a_3 a_3 a_1^{-1} a_2^{-1}$ rappresenta $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ (cfr. Proposizione 8.1.7). Il primo modo è tramite le seguenti figure:



Il secondo modo usa il Teorema 8.6.10. Osserviamo che lo spazio in questione è una superficie non orientabile e quindi per il teorema di classificazione è della forma $g\mathbb{RP}^2$. D'altra parte, per la Proposizione 8.6.10, la sua caratteristica di Eulero è -1 (i vertici della poligonale vengono identificati tutti ad uno stesso punto). Segue quindi da (8.6) che $g = 3$.

8.6.1 Solidi convessi

Concludiamo questo capitolo con la dimostrazione che esistono esattamente cinque solidi convessi e regolari nello spazio i cosiddetti **solidi platonici**. Un **solido convesso** S è un sottoinsieme limitato dello spazio \mathbb{R}^3 definito dalle due condizioni seguenti:

- S non è contenuto in un sottospazio affine proprio di \mathbb{R}^3 ;
- S è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di \mathbb{R}^3 .

Un solido convesso S è effettivamente un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^3 in quanto intersezione di semispazi di \mathbb{R}^3 che sono convessi. Inoltre S è compatto in quanto chiuso e limitato.

Sia S un solido convesso di \mathbb{R}^3 e α un piano di \mathbb{R}^3 tale che S sia contenuto in uno dei due semispazi chiusi definiti da α . Si hanno le seguenti possibilità:

- $S \cap \alpha = \emptyset$;
- $S \cap \alpha$ è un punto che si chiama **vertice** di S ;
- $S \cap \alpha$ è un segmento che si chiama **spigolo** o **lato** di S ;
- $S \cap \alpha$ è un poligono, che si chiama **faccia** di S .

Dal momento che S è intersezione di un numero finito di semispazi segue che esso possiede un numero finito di vertici V , di lati L e di facce F . Inoltre ogni spigolo è un lato di due facce e ogni vertice è vertice di almeno tre facce e di altrettanti spigoli. Vale il seguente risultato che era già noto a Cartesio nel 1640 ma che fu poi dimostrato da Eulero nel 1752.

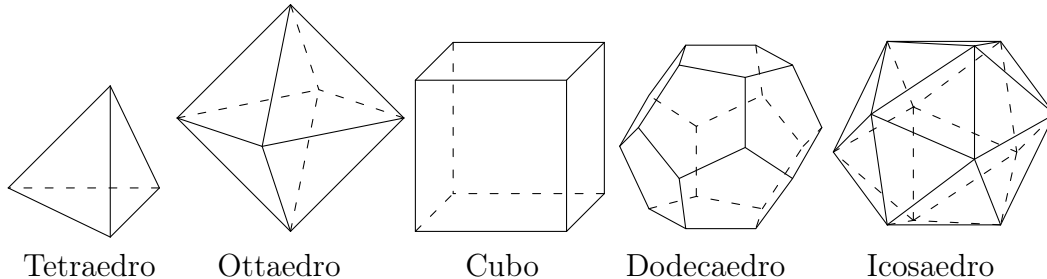
Teorema 8.6.12. *Sia S un solido convesso di \mathbb{R}^3 e siano V , L e F come sopra. Allora*

$$V - L + F = 2.$$

Dimostrazione: Consideriamo un omeomorfismo $f : S \rightarrow D^3$ tale che $f|_{\text{Fr}(S)} : \text{Fr}(S) \rightarrow S^2$. Otteniamo quindi che la sfera S^2 ammette una poligonazione con lo stesso numero di vertici, lati e facce del poligono S . Il risultato segue allora dall'Esercizio 8.4 e dal fatto che $\chi(S^2) = 2$. \square

Un **solido regolare** è un solido convesso di \mathbb{R}^3 avente per facce poligoni regolari tutti uguali tra loro e con lo stesso numero di lati uscenti da ogni vertice

(quindi lo stesso numero di facce che si incontrano in un vertice). Esempi di solidi regolari sono: il **tetraedro**, l'**ottaedro**, il **cubo**, il **dodecaedro** e l'**icosaedro**.



Questi sono chiamati anche **solidi platonici** in quanto Platone ne parla nel Timeo. Di essi tratta il XIII libro (l'ultimo) degli **Elementi** di Euclide dove si fornisce una dimostrazione della loro esistenza. Il fatto notevole, che a differenza dei poligoni regolari (che sono infiniti), i solidi platonici sono precisamente i 5 appena descritti. La dimostrazione di questo fatto si può ottenere tramite l'uso della caratteristica di Eulero. Sia infatti S un solido platonico. Denotiamo con n , $n \geq 3$, il numero di lati di ogni faccia (e quindi il numero di vertici in ogni faccia) e con m , $m \geq 3$, il numero di lati uscenti da un vertice (e quindi il numero di facce che si incontrano in un vertice). Si osservi che n e m non dipendono dalla faccia o dal vertice scelto perché il solido è, per ipotesi, regolare. Dal momento che ogni lato ha in comune due facce si ottiene allora che il numero di lati L e il numero di vertici V si possono scrivere in funzione del numero di facce F del poligono come segue:

$$L = \frac{nF}{2}, \quad V = \frac{nF}{m}.$$

Per il Teorema 8.6.12 si ottiene allora:

$$F - L + V = F \left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 \right) = 2.$$

e quindi $F = \frac{4m}{2n-mn+2m}$ dalla quale segue (essendo $F > 0$) che

$$\frac{2n}{n-2} > m. \quad (8.7)$$

Usando questa disuguaglianza e il fatto che $m \geq 3$ si ottiene che $n < 6$ e $m < 6$. Dalla (8.7) le uniche possibilità per le coppie (n, m) con $3 \leq n < 6$ e $3 \leq m < 6$ sono cinque e cioè:

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$$

che corrispondono rispettivamente al tetraedro, all'ottaedro, all'icosaedro, al cubo e al dodecaedro.

8.7 Esercizi

Esercizio 8.1. Dimostrare che i gruppi $G = \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$ e $H = \langle a, c \mid a^2c^2 \rangle$ dell'Esempio 6.2.6 sono isomorfi mostrando le presentazioni poligonali $baba^{-1}$ e a^2c^2 sono omeomorfe alla bottiglia di Klein.

Esercizio 8.2. Calcolare il gruppo fondamentale della seguente presentazione poligonale $a \cdot a \cdots a$ (n fattori).

Esercizio 8.3. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Dimostrare che esiste uno spazio topologico X connesso per archi tale che $\pi_1(X) \cong G$. (Suggerimento: usare l'esercizio precedente e il Teorema 6.1.1).

Esercizio 8.4. Sia S una superficie compatta e connessa e sia \mathcal{P} una sua poligonazione costituita da un numero finito di facce F , di lati L e di vertici V . Dimostrare che

$$\chi(S) = F - L + V.$$

(Suggerimento: suddividere i poligoni di \mathcal{P} in triangoli).

Esercizio 8.5. Dimostrare la Proposizione 8.6.10 (Suggerimento: usare l'Esercizio 8.4).

Esercizio 8.6. Calcolare la caratteristica di Eulero $\chi(\Sigma_g^h)$ di una superficie Σ_g^h compatta, connessa di genere g e h componenti di bordo distinguendo il caso orientabile dal caso non orientabile.

Esercizio 8.7. Calcolare la caratteristica di Eulero di una superficie ottenuta come somma connessa di un piano proiettivo e di n tori e la caratteristica di Eulero della somma connessa di una bottiglia di Klein con n tori.

Esercizio 8.8. Dimostrare che $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ è una presentazione poligonale di \mathbb{T}^2 .

Esercizio 8.9. Dimostrare che $a_1 \cdots a_n a_1 \cdots a_n$ è una presentazione poligonale di \mathbb{RP}^2 . (Suggerimento: osservare che i vertici del poligono vengono identificati con n punti).

Esercizio 8.10. I lati di un ottagono regolare sono identificati in modo tale che il quoziente sia una superficie. Dimostrare che la caratteristica di Eulero di questa superficie è ≥ -2 . Dimostrare, inoltre, che ogni superficie orientabile o non orientabile la cui caratteristica di Eulero è ≥ -2 può essere ottenuta identificando opportunamente i lati di un ottagono regolare.

Esercizio 8.11. Cosa rappresenta la presentazione poligonale $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$?

Esercizio 8.12. Dimostrare che la presentazione poligonale

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n$$

è omeomorfa alla somma connessa di n piani proiettivi reali. (Suggerimento: osservare che i vertici del poligono vengono identificati tutti ad uno stesso punto).

Esercizio 8.13. Cosa rappresenta la presentazione poligonale

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}?$$

(Suggerimento: osservare che se n è dispari i vertici del poligono vengono identificati con due punti mentre se n è pari vengono identificati ad uno stesso punto).

Esercizio 8.14. Dimostrare che non esiste una poligonazione della sfera dove le facce sono tutti esagoni e da ogni vertice escono almeno tre lati.

Esercizio 8.15. Una palla da calcio è formata da pentagoni e esagoni tali che tre facce si incontrano in un vertice e due facce distinte si incontrano al più in un vertice o in un lato. Mostrare che il numero di pentagoni è 12.

Esercizio 8.16. Sia P un solido convesso in \mathbb{R}^3 dove tutte le facce sono triangoli e da ogni vertice escono cinque o sei lati. Dimostrare che P ha esattamente 12 vertici dai quali escono 5 lati.

Capitolo 9

Classificazione dei rivestimenti

9.1 Azioni di gruppi su spazi topologici

Sia X uno spazio topologico e G un gruppo. Lo spazio X è detto un G -spazio (che da ora in poi sarà sinistro) se X è un G -insieme sinistro (vedi Appendice E) e l'applicazione bigettiva

$$L_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$$

è un omeomorfismo (in effetti è sufficiente richiedere che sia continua e la sua inversa $L_{g^{-1}}$ risulta automaticamente continua). Equivalentemente si ha un omomorfismo di G nel gruppo $\text{Omeo}(X)$ degli omeomorfismi di X che associa a g l'omeomorfismo L_g . Possiamo allora dotare lo spazio quoziente X/G della topologia quoziente rispetto alla proiezione canonica $\pi : X \rightarrow X/G$ (U è aperto in X/G se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in X). Alcune proprietà topologiche dello spazio quoziente sono descritte nella seguente proposizione.

Proposizione 9.1.1. *Sia X un G -spazio e $\pi : X \rightarrow X/G$ la proiezione sul quoziente. Allora π è aperta e se G è un gruppo finito allora π è anche chiusa. Inoltre X/G è di Hausdorff se e solo se l'insieme*

$$K = \{(x, g \cdot x) \in X \times X \mid x \in X, g \in G\}$$

è chiuso in $X \times X$.

Dimostrazione: Sia U un aperto di X . Allora

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U)\} = \{x \in X \mid \pi(x) = \pi(y), \text{ per qualche } y \in U\} \\ &= \{x \in X \mid x = g \cdot y \text{ per qualche } y \in U \text{ e per qualche } g \in G\} \end{aligned}$$

$$= \{x \in X \mid x \in g \cdot U \text{ per qualche } g \in G\} = \cup_{g \in G} g \cdot U = \cup_{g \in G} L_g(U).$$

Dal momento che L_g è un omeomorfismo e U è aperto segue che $L_g(U)$ è un aperto di X e quindi $\pi(\pi^{-1}(U))$ è aperto in quanto unione di aperti e quindi π è aperta.

Se A è un sottoinsieme chiuso di X e G è finito allora allo stesso modo si ottiene:

$$\pi(\pi^{-1}(A)) = \cup_{g \in G} L_g(A)$$

che è un chiuso in quanto unione finita di chiusi.

Infine osserviamo che l'applicazione

$$f : X \times X \rightarrow X/G \times X/G, (x, y) \mapsto (\pi(x), \pi(y)).$$

è aperta e suriettiva e quindi un'identificazione.

Se $\Delta \subset X/G \times X/G$ è la diagonale in X/G (cioè i punti della forma (z, z)) allora X/G è di Hausdorff se e solo se Δ è chiuso in $X/G \times G/K$ o, equivalentemente, se e solo se

$$f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\} = \{(x, y) \in X \times X \mid y = g \cdot x\} = K$$

è chiuso in $X \times X$. □

Sia X un G -spazio. Diremo che l'azione di G su X è **propriamente discontinua** se per ogni $x \in X$ esiste un aperto U contenente x tale che

$$(g_1 \cdot U) \cap (g_2 \cdot U) = \emptyset, \quad \forall g_1, g_2 \in G. \quad (9.1)$$

Ovviamente un'azione propriamente discontinua è anche propria. Osserviamo anche che l'azione di G su X è propriamente discontinua se e solo se per ogni $x \in X$ esiste un aperto U contenente x tale che

$$(g \cdot U) \cap U = \emptyset, \quad \forall g \in G. \quad (9.2)$$

Infatti la (9.1) implica la (9.2) ponendo $g_2 = 1$. Mentre se vale la (9.2) allora si ottiene la (9.1):

$$(g_1 \cdot U) \cap (g_2 \cdot U) = g_2[(g_2^{-1}g_1U) \cap U] = \emptyset, \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Osservazione 9.1.2. Lo spazio quoziente di uno spazio di Hausdorff per un'azione propriamente discontinua non è in generale di Hausdorff. Massey ha costruito un esempio del gruppo \mathbb{Z} che agisce in modo propriamente discontinuo su \mathbb{R}^2 ma \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} non è di Hausdorff.

L'interesse per le azioni propriamente discontinue è giustificato dal seguente:

Teorema 9.1.3. *Sia X un G -spazio. L'azione (a sinistra) di G su X è propriamente discontinua se e solo se $\pi : X \rightarrow X/G$ è un rivestimento.*

Dimostrazione: Supponiamo che l'azione di G sia propriamente discontinua. Dalla Proposizione 9.1.1 l'applicazione π è continua, aperta e suriettiva. Sia $x \in X$ e U un aperto di X contenente x dove vale la (9.2). Allora $\pi(U)$ è un aperto contenente $\pi(x)$. Se mostriamo che $\pi(U)$ è ben ricoperto da π seguirà che π è un rivestimento. Abbiamo già visto nella dimostrazione della Proposizione 9.1.1 che $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_g L_g(U)$. Quindi è sufficiente dimostrare che $\pi|_{L_g(U)} : L_g(U) \rightarrow \pi(L_g(U)) = \pi(U)$ è un omeomorfismo. Quest'applicazione è la composizione dell'omeomorfismo $L_{g^{-1}} : L_g(U) \rightarrow U$ con l'applicazione $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$. Ma quest'ultima è una bigezione (iniettiva per la (9.2)) continua (restrizione di un'applicazione continua) e aperta in quanto π è aperta e quindi un omeomorfismo.

Viceversa supponiamo che $\pi : X \rightarrow X/G$ sia un rivestimento. Dato $x \in X$ sia V un aperto di $\pi(x)$ ben ricoperto da π . Allora $\pi^{-1}(V) = \cup U_j$ e $\pi|_{U_j} : U_j \rightarrow V$ è un omeomorfismo. Sia U_{j_0} l'aperto che contiene x . Per ogni $g \in G$ l'aperto $g \cdot U_{j_0}$ dev'essere disgiunto da U_{j_0} altrimenti due punti di U_{j_0} sarebbero nella stessa orbita rispetto all'azione di G e la restrizione di π a U_{j_0} non sarebbe iniettiva. Quindi la (9.2) è soddisfatta e l'azione di G è propriamente discontinua. \square

Segue una lista di esempi di azioni propriamente discontinue. Lo studente è invitato a dimostrare i dettagli.

Esempio 9.1.4. Il sottogruppo di $\text{Omeo}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ generato dalla moltiplicazione per $\lambda > 0$, $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ agisce a sinistra su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in maniera propriamente discontinua.

Esempio 9.1.5. Sia $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}$. Allora ponendo $m \cdot x = m + x$, $x \in \mathbb{R}$ si definisce un'azione sinistra propriamente discontinua di G su X . Otteniamo quindi un rivestimento $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$.

Esempio 9.1.6. Sia $G = \mathbb{Z}^2$ e $X = \mathbb{R}^2$. Allora ponendo

$$(m, n) \cdot (x, y) = (x + m, y + n), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

si definisce un'azione sinistra propriamente discontinua di G su X . Equivalentemente si sarebbe potuto considerare l'azione sinistra del sottogruppo H di $\text{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ generato dalle isometrie (traslazioni) $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ e $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$. Otteniamo quindi un rivestimento $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Esempio 9.1.7. Sia $G = \mathbb{Z}$ e $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ una striscia infinita. Allora ponendo

$$m \cdot (x, y) = (x + m, (-1)^m y).$$

si definisce un'azione sinistra propriamente discontinua di G su X . Lo spazio quoziente X/G è omeomorfo al nastro di Mobius e $\pi : X \rightarrow X/G$ è un rivestimento.

Esempio 9.1.8. Consideriamo l'azione sinistra del sottogruppo H di $\text{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ generata dalle isometrie (traslazioni) $(x, y) \mapsto (x + 1, 1 - y)$ e $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$. Quindi H è costituito dalle isometrie della forma $(x, y) \mapsto (x + m, (-1)^m y + n)$. Equivalentemente si è definita un'azione sinistra propriamente discontinua di H su X . Lo spazio quoziente X/H è omeomorfo alla bottiglia di Klein e $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Klein}$ è un rivestimento.

Esempio 9.1.9. Sia $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ e $X = S^n$ la sfera unitaria centrata nell'origine. Allora ponendo $\pm 1 \cdot x = \pm x$, $x \in S^n$ si definisce un'azione propriamente discontinua di G su X . Otteniamo quindi un rivestimento $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$.

Se il gruppo G che agisce su uno spazio X è finito allora abbiamo un criterio utile per controllare se l'azione sia propriamente discontinua.

Teorema 9.1.10. *Sia G un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff X . Allora l'azione di G su X è propriamente discontinua.*

Dimostrazione: Siano $g_0 = 1, g_1, \dots, g_n$ gli elementi di G e sia $x \in X$. Allora i punti $g_1 \cdot x, \dots, g_n \cdot x$ sono tutti distinti da $g_0 \cdot x = x$ in quanto l'azione è libera. Siccome X è di Hausdorff esistono aperti U_0, \dots, U_n contenenti $x, g_1 \cdot x, \dots, g_n \cdot x$ rispettivamente tali che $U_0 \cap U_j = \emptyset$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Allora

$$U = \bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j$$

è un aperto contenente x e che soddisfa la (9.2). Infatti, sia $g \in G$, $g \neq 1$, allora $g = g_k \in G$, $k \neq 0$, e si ha:

$$g_k \cdot U = g_k \cdot \left(\bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j \right) = \left(\bigcap_{j=0}^n g_k g_j^{-1} \cdot U_j \right) \subset U_k,$$

in quanto $g_j^{-1} \cdot U_j \subset U_0$ e $g_k \cdot U_0 \subset U_k$. Ma $U \subset U_0$ e $g_k \cdot U \subset U_k$ e siccome $U \cap U_k = \emptyset$ allora $(g_k \cdot U) \cap U = \emptyset$. \square

Esempio 9.1.11. Sia $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$. Consideriamo l'applicazione

$$h : S^3 \rightarrow S^3, (z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2),$$

dove p e q sono interi positivi primi fra loro e $1 \leq q < p$. L'applicazione h è un omeomorfismo con inverso

$$h^{-1} : S^3 \rightarrow S^3, (z_1, z_2) \mapsto (e^{-2\pi i/p} z_1, e^{-2\pi i q/p} z_2)$$

e $h^p = \text{id}_{S^3}$. Possiamo quindi definire un'azione di \mathbb{Z}_p su S^3 come segue:

$$\mathbb{Z}_p \times S^3 \rightarrow S^3, [n]_p \cdot (z_1, z_2) := h^n((z_1, z_2)) = (e^{2\pi i n/p} z_1, e^{2\pi i q n/p} z_2).$$

Quest'azione è libera: infatti se $e^{2\pi i n/p} z_1 = z_1$ e $e^{2\pi i q n/p} z_2 = z_2$ e $z_1 \neq 0$ allora $e^{2\pi i n/p} = 1$ e quindi $p|n$; se invece $z_1 = 0$ allora $z_2 \neq 0$ e $e^{2\pi i q n/p} = 1$ e quindi $p|nq$ ed essendo p e q primi $p|n$. Quindi per il Teorema 9.1.10 l'azione è propriamente discontinua. Il quoziente S^3/\mathbb{Z}_p è quindi uno spazio topologico chiamato **spazio lenticolare** e per il Teorema 9.1.10 esiste un rivestimento $S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_p$.

Osservazione 9.1.12. Si può dimostrare che dato il disco unitario $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e un intero $g \geq 2$ esiste un sottogruppo $\Gamma_g \subset \text{Omeo}(D^2)$ che agisce in modo propriamente discontinuo su D^2 e tale che lo spazio quoziente D^2/Γ_g è omeomorfo a Σ_g superficie compatta e connessa e orientabile di genere g . Quindi esiste un rivestimento $\pi : D^2 \rightarrow \Sigma_g$.

9.2 Rivestimenti e gruppo fondamentale

In questo paragrafo studieremo alcuni legami tra un dato rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e i gruppi fondamentali dello spazio totale \tilde{X} e lo spazio di base X . Sia $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0) \in X$. Ricordiamo (si veda 4.4) che possiamo definire un'applicazione che chiameremo *lifting correspondence*,

$$L : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0), [f] \mapsto \tilde{f}(1) \quad (9.3)$$

dove $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Ricordiamo anche il Teorema 4.3.1:

Teorema 9.2.1. *Se \tilde{X} è connesso per archi allora L è suriettiva. Se inoltre \tilde{X} è semplicemente connesso allora L è una bigezione.*

Vale anche il seguente risultato.

Teorema 9.2.2. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento.*

1. *L'omomorfismo $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ indotto da p è iniettivo (e quindi $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ isomorfo a $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$);*

2. La lifting correspondence L induce un'applicazione iniettiva

$$\Phi : \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)} \rightarrow p^{-1}(x_0) \quad (9.4)$$

dall'insieme delle classi laterali destre di $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ alla fibra $p^{-1}(x_0)$; Φ è bigettiva se \tilde{X} è connesso per archi.

3. Se f è un laccio di X basato in x_0 , allora $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se e solo se f si solleva ad un laccio di \tilde{X} basato in \tilde{x}_0 .

Dimostrazione: 1. Sia \tilde{f} un laccio in \tilde{X} basato in \tilde{x}_0 e supponiamo che $p_*([\tilde{f}]) = [\epsilon_{x_0}]$. Sia F un omotopia relativamente a $\{0, 1\}$ tra $p \circ \tilde{f}$ e ϵ_{x_0} . Se \tilde{F} è il sollevamento di F in \tilde{X} tale che $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$ allora \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra \tilde{f} e $\epsilon_{\tilde{x}_0}$.

2. L'iniettività di Φ è equivalente a:

$$L([f]) = L([g]) \Leftrightarrow [f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g], \forall [f], [g] \in \pi_1(X, x_0), \quad (9.5)$$

dove L è la lifting correspondence (9.3).

Supponiamo che esistano $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ tali che $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g]$. Esiste quindi un laccio \tilde{h} in \tilde{X} basato in \tilde{x}_0 tale che se $h = p \circ \tilde{h}$ allora $[f] = [h \cdot g]$. Osserviamo che l'arco $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$ è il sollevamento di $h \cdot g$ che inizia in \tilde{x}_0 . Dal momento che $[f] = [h \cdot g]$ allora \tilde{f} e $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$ (che iniziano in \tilde{x}_0) finiscono nello stesso punto di \tilde{X} . Quindi anche \tilde{f} e \tilde{g} terminano nello stesso punto e quindi $L([f]) = L([g])$.

Viceversa se $L([f]) = L([g])$. Quindi \tilde{f} e \tilde{g} terminano nello stesso punto \tilde{x}_0 . Segue che $\tilde{h} = \tilde{f} \cdot i(\tilde{g})$ è un laccio chiuso basato in \tilde{x}_0 e quindi $[\tilde{h} \cdot \tilde{g}] = [\tilde{f}]$. Se \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ in \tilde{X} tra i lacci $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$ e \tilde{f} allora $p \circ \tilde{F}$ è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $h \cdot g$ e f in X , dove $h = p \circ \tilde{h}$. Segue che $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g]$. Infine se \tilde{X} è connesso per archi allora L è suriettiva e quindi anche Φ .

3. Applicando la (9.5) al caso dove g è il laccio costante basato in x_0 si ottiene che $L([f]) = \tilde{x}_0$ se e solo se $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Ma $L([f]) = \tilde{x}_0$ se e solo se il sollevamento di f che inizia in \tilde{x}_0 termina in \tilde{x}_0 . \square

Corollario 9.2.3. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X} connesso per archi. Allora p è un omeomorfismo se e solo se $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi_1(X, x_0)$.

Corollario 9.2.4. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X} connesso per archi. Allora il grado del rivestimento è uguale a n se e solo se l'indice di $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ è n , per ogni $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Nella proposizione che segue ci proponiamo di capire come sono legati i due gruppi $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ per scelte diverse di $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ tali che $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$.

Proposizione 9.2.5. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X} connesso per archi e $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ appartenenti alla fibra di $x_0 \in X$.*

1. *sia \tilde{f} è un arco tra \tilde{x}_0 e \tilde{x}_1 e $f = p \circ \tilde{f}$ è il corrispondente laccio in X basato in x_0 , allora*

$$[f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1), \quad (9.6)$$

e quindi $p_\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ sono sottogruppi coniugati di $\pi_1(X, x_0)$;*

2. *viceversa se H è un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ coniugato a $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ allora esiste $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$, $p(\tilde{x}_1) = x_0$, tale che*

$$H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

Dimostrazione: 1. Osserviamo che $u_{\tilde{f}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, dove $u_{\tilde{f}}$ è l'isomorfismo

$$u_{\tilde{f}} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) : [\tilde{g}] \mapsto [i(\tilde{f}) \cdot \tilde{g} \cdot \tilde{f}].$$

Applicando p_* si ha: $p_*u_{\tilde{f}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. D'altra parte

$$p_*u_{\tilde{f}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = u_f p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = [i(f)]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

e la conclusione segue da $[i(f)] = [f]^{-1}$.

2. Se H è coniugato a $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ allora $H = [f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f]$ per un certo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Sia \tilde{f} un sollevamento di f che inizia in \tilde{x}_0 e sia $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1)$. Per la parte 1. $[f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ e quindi $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. \square

Osservazione 9.2.6. Le classi di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$ sono invarianti algebrici del rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Mostriamo nel Corollario 9.5.4 che queste determinano il rivestimento a meno di isomorfismi.

9.3 Teoremi di sollevamento per rivestimenti

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sia Y uno spazio topologico, $y_0 \in Y$ e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua tale che $f(y_0) = x_0$.

Domanda: *Quando esiste un unico sollevamento \tilde{f} di f rispetto a p (cioè una funzione continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$, tale che $p \circ \tilde{f} = f$) tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$?*

Dalla Proposizione 3.3.1 sappiamo che se Y è connesso allora se un tale sollevamento esiste è unico. Inoltre sappiamo che un tale sollevamento esiste nel caso $Y = I$ (Proposizione 3.3.2) e $Y = I^2$ (Proposizione 3.3.4).

Per capire quando un sollevamento esiste in generale osserviamo che se esiste un sollevamento $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ di $f : Y \rightarrow X$ allora

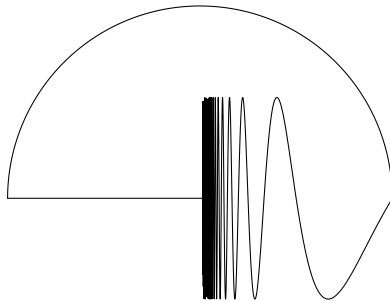
$$f_*\pi(Y, y_0) = p_*\tilde{f}_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Quindi la condizione

$$f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \quad (9.7)$$

è necessaria per l'esistenza di un sollevamento \tilde{f} di f rispetto a p tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Il seguente esempio mostra che in generale questa condizione non è sufficiente.

Esempio 9.3.1. Sia Y il cosiddetto *cerchio polacco*, $Y = A \cup B \cup C$, dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{x}\}$.



Si verifica facilmente che Y è semplicemente connesso (in effetti è contraibile).

Consideriamo il rivestimento $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $y_0 = (1, 0) \in Y$, $\tilde{x}_0 = 0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = (1, 0) \in S^1$ e la funzione continua $f : Y \rightarrow S^1$ definita da:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ (x, -\sqrt{1-x^2}) & \text{se } (x, y) \in B \cup C. \end{cases}$$

Scegliamo una funzione continua $p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\cos p(x) = x, \sin p(x) \geq 0, p(-1) = \pi, p(1) = 0.$$

(è sufficiente prendere l'inversa di $y = \cos x$ nell'intervallo $[0, \pi]$).

Analogamente consideriamo una funzione continua $q : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\cos q(x) = x, \sin q(x) \leq 0, q(-1) = -\pi, q(1) = 0.$$

(è sufficiente prendere l'inversa di $y = \cos x$ nell'intervallo $[-\pi, 0]$).

Vogliamo mostrare che f non ammette un sollevamento $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(y_0) = x_0$. Se per assurdo un tale \tilde{f} esistesse allora, per ogni $(x, y) \in A$ si avrebbe:

$$\exp \tilde{f}(x, y) = f(x, y) = (x, y) = (x, \sqrt{1-x^2}) = (\cos p(x), \sin p(x)) = \exp p(x)$$

e quindi

$$\tilde{f}(x, y) = p(x) + 2\pi n(x, y),$$

dove n è una funzione a valori interi definita su A . Essendo n continua perchè differenza di funzione continue segue che n è costante:

$$\tilde{f}(x, y) = p(x) + 2\pi n, \quad \forall (x, y) \in A \quad (9.8)$$

Analogamente per ogni $(x, y) \in B \cup C$ si avrebbe

$$\exp \tilde{f}(x, y) = f(x, y) = (x, y) = (x, -\sqrt{1-x^2}) = (\cos q(x), \sin q(x)) = \exp q(x)$$

e quindi

$$\tilde{f}(x, y) = q(x) + 2\pi m, \quad \forall (x, y) \in B \cup C. \quad (9.9)$$

per una certa costante intera m .

Valutando le equazioni (9.8) e (9.9) nei punti $A \cap (B \cup C) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ si ha:

$$\tilde{f}(-1, 0) = p(-1) + 2\pi n = q(-1) + 2\pi m$$

$$\tilde{f}(1, 0) = p(1) + 2\pi n = q(1) + 2\pi m$$

Le quali implicano rispettivamente:

$$2\pi = \pi - (-\pi) = p(-1) - q(-1) = 2\pi(n - m) \Rightarrow n = m + 1$$

$$0 = 0 - 0 = p(1) - q(1) = 2\pi(n - m) \Rightarrow n = m.$$

Questa contraddizione mostra che \tilde{f} non può esistere.

Se si analizza il cerchio polacco ci si accorge che non è localmente connesso per archi nell'origine. In effetti questo è il motivo topologico per il quale il sollevamento di f non esiste. Vale infatti il seguente:

Teorema 9.3.2. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, Sia inoltre Y uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi, $y_0 \in Y$ e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua tale che $f(y_0) = x_0$. Allora esiste un unico sollevamento \tilde{f} di f rispetto a p se e solo se vale la (9.7).*

Dimostrazione: Abbiamo già visto che la condizione (9.7) è necessaria per l'esistenza di un rivestimento. Mostriamo ora che, insieme al fatto che Y è localmente connesso per archi, esiste un sollevamento \tilde{f} di f tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ (l'unicità di \tilde{f} segue dalla connessione di Y).

Costruiamo \tilde{f} usando la connessione per archi di Y (la locale connessione per archi verrà usata per dimostrare le continuità di \tilde{f}). Sia $y \in Y$ e sia $\varphi : I \rightarrow Y$ un arco tale che $\varphi(0) = y_0$ e $\varphi(1) = y$. Osserviamo che l'arco $f \circ \varphi$ inizia in x_0 quindi per il teorema del sollevamento degli archi esiste un suo unico sollevamento $\widetilde{f \circ \varphi}$ tale che $\widetilde{f \circ \varphi}(0) = \tilde{x}_0$. L'applicazione $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ è definita come il punto finale dell'arco $\widetilde{f \circ \varphi}$ cioè:

$$\tilde{f}(y) := \widetilde{f \circ \varphi}(1). \quad (9.10)$$

Dobbiamo dimostrare che \tilde{f} è ben definita, cioè che non dipende dall'arco φ scelto. Sia dunque $\psi : I \rightarrow Y$ un altro arco in Y tale che $\psi(0) = y_0$ e $\psi(1) = y$. Allora $\varphi \cdot i(\psi)$ è un laccio basato in y_0 e quindi $[\varphi \cdot i(\psi)] \in \pi_1(Y, y_0)$. L'ipotesi (9.7) implica l'esistenza di un laccio chiuso α in \tilde{X} basato in \tilde{x}_0 tale che

$$f_*[\varphi \cdot i(\psi)] = [f \circ (\varphi \cdot i(\psi))] = [(f \circ \varphi) \cdot (f \circ i(\psi))] = p_*[\alpha] = [p \circ \alpha].$$

Segue che:

$$f \circ \varphi \sim_{\{0,1\}} (f \circ \varphi) \cdot \epsilon_{f(y)} \sim_{\{0,1\}} (f \circ \varphi) \cdot (f \circ i(\psi)) \cdot (f \circ \psi) \sim_{\{0,1\}} (p \circ \alpha) \cdot (f \circ \psi).$$

Per il teorema di sollevamento delle omotopie, i sollevamenti degli archi $f \circ \varphi$ e $(p \circ \alpha) \cdot (f \circ \psi)$ che iniziano in \tilde{x}_0 finiscono nello stesso punto. Ma il sollevamento di $f \circ \varphi$ è $\widetilde{f \circ \varphi}$ mentre quello di $(p \circ \alpha) \cdot (f \circ \psi)$ è $\alpha \cdot \widetilde{f \circ \psi}$, dove $\widetilde{f \circ \psi}$ è il sollevamento di $f \circ \psi$ che inizia in $\alpha(1) = \tilde{x}_0$. Segue che:

$$\widetilde{f \circ \varphi}(1) = \widetilde{f \circ \psi}(1)$$

e quindi la definizione di \tilde{f} non dipende dall'arco scelto.

Mostriamo ora che \tilde{f} è continua. Sia $y \in Y$ e \tilde{U} un aperto arbitrario di \tilde{X} contenente $\tilde{f}(y)$. Vogliamo trovare un aperto V di Y tale che $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$. Siccome p è aperta allora $p(\tilde{U})$ è aperto in X . Esiste quindi $U \subseteq p(\tilde{U})$ ben ricoperto da p , cioè $p^{-1}(U) = \cup_j \tilde{U}_j$ e $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ è un omeomorfismo. Sia quindi \tilde{U}_k un aperto contenente $\tilde{f}(y)$ tale che $p|_{\tilde{U}_k} : \tilde{U}_k \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Segue che $f^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k))$ è un aperto di Y contenente y . Essendo Y localmente connesso per archi esiste un aperto V connesso per archi e contenente y tale che

$$V \subseteq f^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k)).$$

Mostriamo che

$$\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{U}_k \subseteq \tilde{U}$$

e questo mostrerà la continuità di \tilde{f} . Scegliamo $y' \in V$. Sia ψ un arco in Y tra y_0 e y e sia φ un arco in V tra y e y' . Ora $\tilde{f}(y')$ è dato dal sollevamento di $f \circ (\psi \cdot \varphi) = (f \circ \psi) \cdot (f \circ \varphi)$ che comincia in \tilde{x}_0 . Questo sollevamento è dato da $\widetilde{f \circ \psi} \cdot \beta$, dove $\widetilde{f \circ \psi}$ è il sollevamento di $f \circ \psi$ che comincia in \tilde{x}_0 e β è quello di $f \circ \varphi$ che comincia in $\widetilde{f \circ \psi}(0) = \tilde{f}(y)$. Per definizione $\tilde{f}(y') = \beta(1)$. Dobbiamo quindi dimostrare che $\beta(1) \in \tilde{U} \cap \tilde{U}_k$. Mostriamo che $\beta(I) \subset \tilde{U} \cap \tilde{U}_k$. Osserviamo che:

$$\beta(I) \subset p^{-1}(f(\varphi(I))) \subset p^{-1}(f(V)) \subseteq p^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k)) \subseteq p^{-1}(U) = \cup_j \tilde{U}_j.$$

Siccome $\beta(0) \in \tilde{U}_k$ allora $\beta(I) \subset \tilde{U}_k$. Inoltre

$$p(\beta(I)) = f(\varphi(I)) \subset f(V) \subseteq p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k)$$

e quindi essendo p ristretta a \tilde{U}_k iniettiva e $\beta(I) \subset \tilde{U}_k$ segue che $\beta(I) \subset \tilde{U} \cap \tilde{U}_k$. \square

Corollario 9.3.3. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, Sia inoltre Y semplicemente connesso e localmente connesso per archi, $y_0 \in Y$ e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua tale che $f(y_0) = x_0$. Allora esiste un unico sollevamento \tilde{f} di f rispetto a p tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

9.4 Omomorfismi e Isomorfismi tra rivestimenti

In questo paragrafo gli spazi topologici \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 e X saranno connessi e localmente connessi per archi.

Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ due rivestimenti sullo stesso spazio X . Un **omomorfismo** tra i due rivestimenti è un'applicazione continua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $p_1 = p_2 \circ \varphi$. Si verifica immediatamente che la composizione di omomorfismi è un omomorfismo e che se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento $id_{\tilde{X}} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ è un omomorfismo.

Un **omomorfismo** $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tra due rivestimenti $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ è un **isomorfismo** ovvero un'**equivalenza** se esiste un omomorfismo $\psi : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $\psi \circ \varphi = id_{\tilde{X}_1}$ e $\varphi \circ \psi = id_{\tilde{X}_2}$. Quindi un omomorfismo tra rivestimenti è un isomorfismo se e solo se è un omeomorfismo. Due rivestimenti saranno detti **isomorfi** ovvero **equivalenti** se esiste un isomorfismo che li lega.

Teorema 9.4.1. *Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ due rivestimenti e $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ tali che $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Esiste un unico isomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se e solo se $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.*

Dimostrazione: Sia $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ un isomorfismo allora essendo un omeomorfismo

$$\varphi_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$$

e dal momento che $p_1 = p_2 \circ \varphi$ si deduce che

$$p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\varphi_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2).$$

Viceversa supponiamo che $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. Applicando il Teorema sui sollevamenti al rivestimento p_2 esiste un'unica applicazione continua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $p_1 = p_2 \circ \varphi$ e $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Allo stesso modo, scambiando il ruolo tra \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 , esiste un'unica applicazione continua $\psi : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $p_1 = p_2 \circ \varphi$ e $\psi(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$. Ora l'applicazione $\psi \circ \varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ è un sollevamento di p_1 e $\psi(\varphi(\tilde{x}_1)) = \tilde{x}_1$, lo stesso vale per $\text{id}_{\tilde{X}_1}$. Segue che $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\tilde{X}_1}$. Analogamente $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\tilde{X}_2}$. \square

Osservazione 9.4.2. Segue dalla dimostrazione del teorema precedente che se $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ sono due rivestimenti e $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ tali che $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$, allora esiste un omomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se e solo se $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subseteq p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.

Osserviamo che il Teorema 9.4.1 non risolve il problema di quando due rivestimenti sono isomorfi. Potrebbe capitare infatti che non esista un isomorfismo che manda il punto \tilde{x}_1 su \tilde{x}_2 nonostante i due rivestimenti siano isomorfi. Il seguente teorema tiene conto di questo.

Teorema 9.4.3. *Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ due rivestimenti e $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ tali che $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$. Esiste un isomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ se e solo se i sottogruppi $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ di $\pi_1(X, x_0)$ sono coniugati.*

Dimostrazione: Sia $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ un isomorfismo e $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$. Per il teorema precedente $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$ e per la 1. della Proposizione 9.2.5 $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$ è coniugato a $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ e quindi $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ sono coniugati. Viceversa se $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ sono coniugati allora per la 2. della Proposizione 9.2.5 esiste \tilde{x}'_2 tale che $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$ e per il teorema precedente esiste un unico isomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$. \square

9.5 Rivestimenti universali e esistenza di rivestimenti

Supponiamo che $p : \tilde{X} \rightarrow X$ sia un rivestimento con $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Se \tilde{X} è semplicemente connesso, allora \tilde{X} è chiamato un **rivestimento universale** di X . Dal momento che $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$, segue dal Teorema 9.4.3 che due rivestimenti universali sono isomorfi. Per questo motivo \tilde{X} si chiamerà il *rivestimento universale*. L'aggettivo universale nasce dal risultato seguente.

Proposizione 9.5.1. *Siano \tilde{X} , X e \tilde{X}_1 tre spazi topologici connessi e localmente connessi per archi, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento con \tilde{X} semplicemente connesso. Se $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ è un altro rivestimento allora esiste un rivestimento $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $p = p_1 \circ \tilde{p}$.*

Dimostrazione: Siccome $\{1\} = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subseteq p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1)$ segue dal teorema di sollevamento che esiste $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $p = p_1 \circ \tilde{p}$. Per il punto 1. dell'Esercizio 9.3 si deduce che \tilde{p} è un rivestimento. \square

Domanda: *Sia X uno spazio topologico. Sotto quali condizioni esiste un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$, con \tilde{X} semplicemente connesso?*

Andiamo alla ricerca di condizioni necessarie. Supponiamo quindi che $p : \tilde{X} \rightarrow X$, sia un rivestimento con \tilde{X} semplicemente connesso. Sia $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 \in X$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$ e U un aperto banalizzante che contiene x_0 . Esiste quindi un aperto V di \tilde{X} che contiene \tilde{x}_0 tale che $p|_V : V \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Denotiamo con $i : U \rightarrow X$ e $j : V \rightarrow \tilde{X}$ le inclusioni. Allora $i \circ p|_V = p \circ j$. Passando alle applicazioni indotte sui gruppi fondamentali e usando il fatto che \tilde{X} è semplicemente connesso si deduce che:

$$i_*\pi_1(U, x_0) = p_*j_*\pi_1(V, \tilde{x}_0) = \{1\}.$$

Equivalentemente $i_*([f]) = [\epsilon_{x_0}]$ per ogni $[f] \in \pi_1(U, x_0)$.

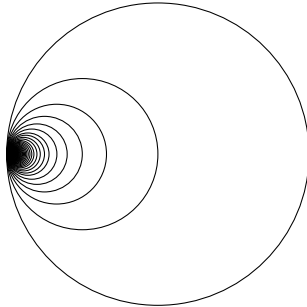
Quindi se X ammette un rivestimento universale allora soddisfa la seguente proprietà:

ogni punto $x_0 \in X$ ha un intorno aperto U tale che l'omomorfismo indotto dall'inclusione $i_ : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è banale.*

Detto diversamente questo significa che ogni laccio in U basato in x_0 è equivalente all'arco costante ϵ_{x_0} (tramite un'omotopia che non avviene necessariamente in U). Uno spazio topologico che soddisfa questa proprietà è detto **semilocalmente semplicemente connesso**. Dalla definizione risulta chiaro che questa

proprietà è locale (cioè vale per ogni altro intorno aperto di x_0 contenuto in U). Osserviamo che uno spazio semplicemente connesso è anche semilocalmente semplicemente connesso.

Esistono spazi topologici connessi e localmente connessi per archi che non sono semilocalmente semplicemente connessi. Consideriamo per esempio l'*orecchino hawaiano* ossia $X = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$, dove C_n è la circonferenza di raggio $\frac{1}{n}$ e centro nel punto $(\frac{1}{n}, 0)$ in \mathbb{R}^2 .



Si verifica immediatamente che X è connesso e localmente connesso per archi ma non è semilocalmente semplicemente connesso. Infatti sia U un intorno aperto dell'origine $x_0 = (0, 0)$ di X . Per n sufficientemente grande $C_n \subset U$. Fissiamo un tale n e consideriamo la retrazione di X su C_n che invia tutti i cerchi C_m con $n \neq m$ nell'origine e lascia fisso C_n . Quindi l'inclusione $j : C_n \rightarrow X$ induce un omomorfismo iniettivo $j_* : \pi_1(C_n, x_0) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Siano $i : U \rightarrow X$ e $k : C_n \rightarrow U$ le inclusioni. Segue che $i \circ k = j$ e quindi $i_* \circ k_* = j_*$. Ora se X fosse semilocalmente semplicemente connesso allora i_* dovrebbe essere l'omomorfismo banale e quindi j_* dovrebbe essere banale, in contrasto con quello appena dimostrato.

In effetti l'essere semilocalmente semplicemente connesso è anche una condizione sufficiente per l'esistenza di un rivestimento universale:

Teorema 9.5.2. *Sia X uno spazio connesso e localmente connesso per archi. Allora esso ammette un rivestimento universale se e solo se X è semilocalmente semplicemente connesso.*

In generale vale il seguente teorema (di cui il teorema precedente è un corollario immediato quando applicato al gruppo banale) che fornisce una risposta (algebrica) completa per l'esistenza di un rivestimento di uno spazio topologico dato.

Teorema 9.5.3. *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso e sia $x_0 \in X$. Sia H un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$. Allora esiste un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e un punto $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ tale che $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$.*

Dimostrazione: Diamo solo un'idea della dimostrazione rinviando il lettore a [13] per dettagli. Sia \mathcal{P} l'insieme costituito da tutti gli archi di X che iniziano in x_0 e definiamo una relazione d'equivalenza su \mathcal{P} definendo $f \sim g$ se e solo se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

- $f(1) = g(1)$;
- $[f \cdot i(g)] \in H$.

Denotiamo con $f^\#$ la classe di equivalenza del cammino $f \in \mathcal{P}$. Sia \tilde{X} l'insieme delle classi d'equivalenza e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ definita come:

$$p(f^\#) = f(1).$$

Dal momento che X è connesso per archi l'applicazione p è suriettiva. Si dimostra che se dotiamo \mathcal{P} con la topologia dei compatto-aperti e \tilde{X} con la topologia quoziente, l'applicazione p è un rivestimento e $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$. \square

Come conseguenza del Teorema 9.4.3 e del Teorema 9.5.3 otteniamo una classificazione algebrica dei rivestimenti di uno spazio topologico (cfr. Esercizio 9.5):

Corollario 9.5.4. *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Sia $x_0 \in X$. Esiste una corrispondenza biunivoca tra le classi di isomorfismo di rivestimenti di X e le classi di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.*

9.6 Automorfismi di un rivestimento

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Un **automorfismo** è un isomorfismo dal rivestimento in se stesso. L'insieme degli automorfismi, chiamati anche **trasformazioni di rivestimento** (oppure **deck transformations**) è un gruppo rispetto alla composizione e verrà denotato con $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$. Nel prossimo teorema dimostriamo che $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ è determinato da $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Ricordiamo che se H è un sottogruppo di un gruppo G il *normalizzatore* di H in G è il sottogruppo di G definito da:

$$\text{Norm}(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Osserviamo che $\text{Norm}(H)$ è il più grande sottogruppo di G che contiene H come sottogruppo normale (H è normale in G se e solo se $G = N(H)$).

Teorema 9.6.1. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X} e X connessi e localmente connessi per archi. Dato $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ il gruppo $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ è isomorfo al gruppo quoziente $\frac{\text{Norm}(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$.*

Dimostrazione: Consideriamo la bigezione

$$\Phi : \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)} \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

data da (9.4) e l'applicazione

$$\Psi : \text{Aut}(\tilde{X}, p) \rightarrow p^{-1}(x_0), \quad \Psi(\varphi) = \varphi(\tilde{x}_0),$$

(ben definita in quanto $p \circ \varphi = p$). Osserviamo che Ψ è iniettiva in quanto l'automorfismo φ è univocamente determinato dal valore che assume in \tilde{x}_0 .

Ricordiamo che, dato $[f]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \in \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$ con $[f] \in \pi_1(X, x_0)$

$$\Phi([f]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \tilde{f}(1),$$

dove \tilde{f} è l'unico sollevamento dell'arco f che inizia in \tilde{x}_0 .

Cominciamo a dimostrare che l'immagine di Ψ è uguale all'immagine del sottogruppo $\frac{\text{Norm}(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$ di $\frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$ tramite Φ . Questo è equivalente a dimostrare che $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{f}(1)$ se e solo se $[f] \in \text{Norm}(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. In effetti per il Teorema 9.4.1 un tale automorfismo φ esiste se e solo se $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, dove $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(0)$. D'altra parte, per la Proposizione 9.2.5, $[f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Quindi φ esiste se e solo se $[f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ossia $[f] \in N(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, che dimostra l'asserto.

Segue che l'applicazione

$$\Phi^{-1} \circ \Psi : \text{Aut}(\tilde{X}, p) \rightarrow \frac{\text{Norm}(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$$

è una bigezione. Dimostriamo che quest'applicazione è un omomorfismo di gruppi e questo concluderà la dimostrazione del teorema.

Siano φ_1 e φ_2 due automorfismi di \tilde{X} tali che $\varphi_1(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ e $\varphi_2(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_2$ e quindi $\Psi(\varphi_1) = \tilde{x}_1$ e $\Psi(\varphi_2) = \tilde{x}_2$. Sia \tilde{f}_1 (resp. \tilde{f}_2) un arco in \tilde{X} da \tilde{x}_0 in \tilde{x}_1 (resp. \tilde{x}_2) e $f_1 = p \circ \tilde{f}_1$ (resp. $f_2 = p \circ \tilde{f}_2$) il laccio chiuso in X basato in x_0 . Allora $\Phi([f_1]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \tilde{x}_1$ e $\Phi([f_2]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \tilde{x}_2$. Sia $\tilde{x}_3 = \varphi_1(\varphi_2(\tilde{x}_0)) = \varphi_1(\tilde{x}_2)$. Allora $\Psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \tilde{x}_3$. Per dimostrare che $\Phi^{-1} \circ \Psi$ è un omomorfismo dobbiamo far vedere che

$$\Phi^{-1}(\Psi(\varphi_1 \circ \varphi_2)) = \Phi^{-1}(\Psi(\varphi_1))\Phi^{-1}(\Psi(\varphi_2))$$

ossia:

$$\Phi^{-1}(\tilde{x}_3) = \Phi^{-1}(\tilde{x}_1)\Phi^{-1}(\tilde{x}_2) = [f_1]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_2]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = [f_1 \cdot f_2]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Equivalentemente, dobbiamo mostrare che:

$$\Phi([f_1 \cdot f_2]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \tilde{x}_3.$$

Siccome \tilde{f}_2 è un arco tra \tilde{x}_0 a \tilde{x}_2 segue che $\varphi_1 \circ \tilde{f}_2$ è un arco tra $\varphi_1(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ e $\varphi_1(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_3$. Ha senso quindi considerare l'arco $\tilde{f}_1 \cdot (\varphi_1 \circ \tilde{f}_2)$ in \tilde{X} che è il sollevamento di $f_1 \cdot f_2$ che inizia in \tilde{x}_0 , in quanto $p \circ \tilde{f}_1 = f_1$ e $p \circ \varphi_1 \circ \tilde{f}_2 = p \circ \tilde{f}_2 = f_2$. Quindi

$$\Phi([f_1 \cdot f_2]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = (\tilde{f}_1 \cdot (\varphi_1 \circ \tilde{f}_2))(1) = \varphi_1(\tilde{f}_2(1)) = \tilde{x}_3,$$

che conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 9.6.2. Se consideriamo l'applicazione

$$\text{Aut}(\tilde{X}) \times p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0), \quad (\varphi, \tilde{x}_0) \mapsto \varphi(\tilde{x}_0),$$

è immediato verificare che questa è un'azione del gruppo $\text{Aut}(\tilde{X})$ sulla fibra $p^{-1}(x_0)$.

9.7 Rivestimenti regolari

Diremo che un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ con \tilde{X} connesso per archi è **regolare** (**normale** o **di Galois**) se dato $x_0 \in X$ esiste \tilde{x}_0 tale che $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$. Non è difficile verificare che questa definizione non dipende dalla scelta del punto x_0 o dal punto \tilde{x}_0 sulla sua fibra (cfr. Esercizio 9.7). Dal Teorema 9.4.3 otteniamo quindi il seguente:

Corollario 9.7.1. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X} , X connessi e localmente connessi per archi, $x_0 \in X$. Il rivestimento è regolare se e solo se per ogni $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ esiste $\varphi \in \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. In questo caso esiste un isomorfismo tra $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ e $\frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$.*

In particolare se \tilde{X} è semplicemente connesso allora il rivestimento è regolare e $\text{Aut}(\tilde{X}, p) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Osservazione 9.7.2. Un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ (\tilde{X} e X connessi e localmente connessi per archi) è un'applicazione aperta e quindi un'identificazione e quindi esiste una relazione d'equivalenza su \tilde{X} che identifica i punti che stanno sulle

stesse fibre. Non è detto però che quest'identificazione avvenga tramite l'azione di un gruppo. Questo capita se e solo se il rivestimento è regolare e il gruppo che identifica i punti delle fibre è esattamente il gruppo degli automorfismi del rivestimento.

La prima parte del Corollario 9.7.1 si può esprimere dicendo che il rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è regolare se e solo se l'azione definita nell'Osservazione 1.6.2 è transitiva.

Esempi di rivestimenti regolari si ottengono quando $\pi_1(X, x_0)$ è abeliano, oppure quando il rivestimento ha grado due.

Vogliamo mostrare che i rivestimenti regolari non sono altro che i rivestimenti che nascono da un'azione propriamente discontinua di un gruppo G su uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Abbiamo già visto (cfr. Teorema 9.1.3) che l'applicazione quoziente $\pi : X \rightarrow X/G$ associata ad un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X è un rivestimento se e solo se l'azione è propriamente discontinua. Nella proposizione seguente mostriamo che un tale rivestimento è regolare (se X è connesso e localmente connesso per archi) e che G è il suo gruppo di automorfismi.

Proposizione 9.7.3. *Sia G un gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua su uno spazio topologico X connesso e localmente connesso per archi. Allora $\pi : X \rightarrow X/G$ è un rivestimento regolare e $\text{Aut}(X, \pi) = G$.*

Dimostrazione: Sappiamo già che π è un rivestimento. Mostriamo prima che $\text{Aut}(X, \pi) = G$.

L'inclusione $G \subseteq \text{Aut}(X, \pi)$: dato $g \in G$ si ha che $\pi \circ g = \pi$.

L'inclusione $\text{Aut}(X, \pi) \subseteq G$: dato $\varphi \in \text{Aut}(X, \pi)$ si ha che $\pi \circ \varphi = \pi$. Quindi $\varphi(x_1) = x_2$ e $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Esiste quindi $g \in G$ tale che $g \cdot x_1 = x_2$. Per l'unicità $\varphi = g$.

Infine se x_1 e x_2 sono tali che $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ allora esiste $g \in G = \text{Aut}(X, \pi)$ tale che $g \cdot x_1 = x_2$ e il rivestimento è regolare per il Corollario 9.7.1. \square

Dal Corollario 9.7.1 otteniamo quindi:

Corollario 9.7.4. *Siano G e X come nella Proposizione 9.7.3. Allora*

$$G \cong \pi_1(X/G, p(x_0))/p_*\pi_1(X, x_0). \quad (9.11)$$

Quindi se X è semplicemente connesso

$$G \cong \pi_1(X/G, p(x_0)). \quad (9.12)$$

Domanda: *E' vero che tutti i rivestimenti regolari nascono da un'azione propriamente discontinua di qualche gruppo G ?*

Nel Teorema 9.7.6 daremo una risposta positiva a questa domanda. Dimostriamo prima un fatto generale.

Proposizione 9.7.5. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento (non necessariamente regolare) allora il gruppo $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ agisce in modo propriamente discontinuo su \tilde{X} .*

Dimostrazione: Sia \tilde{U} un aperto di \tilde{X} tale che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow p(\tilde{U})$ sia un omeomorfismo. Allora

$$\tilde{U} \cap \varphi(\tilde{U}) = \emptyset, \forall \varphi \in \text{Aut}(\tilde{X}, p), \varphi \neq \text{id}_{\tilde{X}}.$$

Infatti se esistesse $\tilde{x} \in \tilde{U}$ tale che $\varphi(\tilde{x}) \in \tilde{U}$, allora $p(\tilde{x}) = p(\varphi(\tilde{x}))$ e (per l'iniettività di $p|_{\tilde{U}}$) $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$ e quindi $\varphi = \text{id}_{\tilde{X}}$. \square

Teorema 9.7.6. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento regolare e sia $\pi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} / \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ il rivestimento dato dall'azione propriamente discontinua di $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ su \tilde{X} . Allora esiste un omeomorfismo $F : X \rightarrow \tilde{X} / \text{Aut}(\tilde{X}, p)$, tale che $F \circ p = \pi$.*

Dimostrazione: Definiamo $F : X \rightarrow \tilde{X} / \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ come $F(x) = \pi(\tilde{x})$, dove \tilde{x} è un punto di $p^{-1}(x)$. Quest'applicazione è ben definita in quanto se $\tilde{x}' \in p^{-1}(x)$ allora esiste $\varphi \in \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ e quindi $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}')$.

Segue che $F \circ p = \pi$.

F è iniettiva: se $F(x) = F(y)$ allora $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$. Esiste allora $\varphi \in \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$ e quindi

$$x = p(\tilde{x}) = p(\varphi(\tilde{x})) = p(\tilde{y}) = y.$$

F è suriettiva: sia $[\tilde{x}]$ una classe in $\tilde{X} / \text{Aut}(\tilde{X}, p)$, sia \tilde{x} un rappresentante di questa classe e $x = p(\tilde{x})$. Allora $F(x) = \pi(\tilde{x}) = [\tilde{x}]$.

F è continua: in quanto p è un'identificazione e π è continua.

F^{-1} è continua: in quanto π è un'identificazione e p è continua.

\square

9.8 Monodromia di un rivestimento

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$. Possiamo definire un'applicazione

$$p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0), (\tilde{x}_0, [f]) \mapsto \tilde{f}(1),$$

dove \tilde{f} è il sollevamento di un rappresentante $f \in [f]$ che inizia in \tilde{x}_0 . Quest' applicazione non dipende dal rappresentante scelto e definisce un'azione destra (cfr. Esercizio 9.9) del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ sulla fibra chiamata **azione di monodromia** o semplicemente **monodromia** del rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Le principali proprietà della monodromia sono riassunte nella proposizione seguente lasciata come esercizio per il lettore (cfr. Esercizio 9.10).

Proposizione 9.8.1. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$. Allora*

1. *l'azione di monodromia è transitiva se e solo se $p^{-1}(x_0)$ appartiene alla stessa componente connessa per archi di \tilde{X} (in particolare se \tilde{X} è connesso per archi allora l'azione di monodromia è transitiva sulla fibra di un qualunque punto di X);*
2. *\tilde{X} è semplicemente connesso se e solo se l'azione di monodromia è transitiva e libera;*
3. *il gruppo di isotropia del punto $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ è $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$;*
4. *esiste una bigezione equivariante tra la fibra $p^{-1}(x_0)$ e le classi laterali destre $\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Osservazione 9.8.2. Il punto 4 della Proposizione precedente fornisce una dimostrazione alternativa del Teorema 9.2.2.

La monodromia di un rivestimento determina il rivestimento come mostra il seguente teorema (si veda [8] per una dimostrazione).

Teorema 9.8.3. *Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso e sia $x_0 \in X$. Per ogni insieme T e per ogni azione destra di $\pi_1(X, x_0)$ su T esiste un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ed una bigezione $\Phi : T \rightarrow p^{-1}(x_0)$ tale che*

$$\Phi(t \cdot [f]) = \Phi(t) \cdot [f], \quad \forall t \in T, \forall [f] \in \pi_1(X, x_0).$$

Inoltre la coppia (p, Φ) è unica a meno di isomorfismi, cioè per ogni altra coppia $(\hat{p}, \hat{\Phi})$ ($\hat{p} : \hat{X} \rightarrow X$ rivestimento e $\hat{\Phi} : T \rightarrow p^{-1}(x_0)$ bigezione), esiste un isomorfismo di rivestimenti $X \rightarrow \hat{X}$ che estende $\hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}$.

9.9 Esercizi

Esercizio 9.1. Sia S_g una superficie non orientabile compatta e connessa di genere g . Allora esiste un rivestimento doppio $p : \Sigma_{g-1} \rightarrow S_g$, dove Σ_{g-1} è la

superficie orientabile compatta e connessa di genere $g - 1$. (Suggerimento: se g è dispari si consideri il rivestimento $p : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ e si faccia la somma connessa con dei tori; se g è pari si costruisca prima un rivestimento doppio $\mathbb{T}^2 \rightarrow Klein$ e si faccia la somma connessa con dei tori).

Esercizio 9.2. Classificare tutti i rivestimenti di S^1 .

Esercizio 9.3. (composizione di rivestimenti) Siano X, Y, Z spazi topologici connessi e localmente connessi per archi. Siano $q : X \rightarrow Y$ e $r : Y \rightarrow Z$ applicazioni continue e sia $p = r \circ q : X \rightarrow Z$. Dimostrare che:

1. se p e r sono rivestimenti allora q è un rivestimento;
2. se p e q sono rivestimenti allora r è un rivestimento;
3. se $r^{-1}(z)$ è finita per ogni $z \in Z$ e r e q sono rivestimenti allora p è un rivestimento;
4. se Z ha un rivestimento universale e r e q sono rivestimenti allora p è un rivestimento;

Esercizio 9.4. Uno spazio topologico X è detto localmente semplicemente connesso se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno aperto U di x esiste un intorno V di x , $V \subset U$, con V semplicemente connesso. Trovare uno spazio topologico semi-localmente semplicemente connesso ma non localmente semplicemente connesso. (Suggerimento: sia X l'orecchio hawaiano in \mathbb{R}^2 e si consideri il cono $C(X)$ su X , ossia il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 costituito da tutti i segmenti che uniscono in punti di $X \times \{0\}$ al punto $(0, 0, 1)$).

Esercizio 9.5. Dimostrare il Corollario 9.5.4.

Esercizio 9.6. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X}, X connessi e localmente connessi per archi e $\pi : \tilde{X} \rightarrow \frac{\tilde{X}}{\text{Aut}(\tilde{X}, p)}$ l'applicazione quoziente indotta dall'azione (propriamente discontinua) di $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ su \tilde{X} . Dimostrare che esiste un rivestimento $r : \frac{\tilde{X}}{\text{Aut}(\tilde{X}, p)} \rightarrow X$ tale che $p = r \circ \pi$.

Esercizio 9.7. Dimostrare che la definizione di rivestimento regolare non dipende dalle scelte fatte.

Esercizio 9.8. Dimostrare che le azioni descritte negli Esempi 9.1.4-9.1.7 sono propriamente discontinue e gli spazi quozienti ottenuti sono quelli indicati. Usare la (9.12) per (ri)calcolare il gruppo fondamentale del cerchio S^1 , del il toro \mathbb{T}^2 , del nastro di Moebius N , della bottiglia di Klein, dello spazio proiettivo reale e degli spazi lenticolari (si veda l'Esempio 9.1.11).

Esercizio 9.9. Dimostrare che l'azione di monodromia è effettivamente un'azione nel senso dell'Appendice E.

Esercizio 9.10. Dimostrare la Proposizione 9.8.1.

Parte II

Omologia singolare

Capitolo 10

Omologia singolare

Ricordiamo che in uno spazio affine $q + 1$ punti (P_0, \dots, P_q) sono detti *linearmente indipendenti* se lo sono i q vettori

$$P_1 - P_0, \dots, P_q - P_0.$$

Dati $n + 1$ punti (P_0, \dots, P_n) di uno spazio affine \mathcal{A} di dimensione n , e $n + 1$ punti (Q_0, \dots, Q_n) di uno spazio affine \mathcal{B} , esiste un'unica applicazione affine $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tale che $f(P_i) = Q_i$.

Dati due punti P, Q in uno spazio affine \mathcal{A} , il segmento che congiunge P a Q è l'insieme

$$\overline{PQ} = \{(1 - t)P + tQ \in \mathcal{A} | t \in [0, 1]\}.$$

Un sottoinsieme $X \subset \mathcal{A}$ è detto *convesso* se per ogni coppia di punti $P, Q \in X$ si ha $\overline{PQ} \subset X$.

10.1 Simplessi

D'ora in avanti considereremo \mathbb{R}^n con l'usuale struttura di spazio affine e introdurremo il concetto di simpleso di \mathbb{R}^n , per poi definire il concetto di *simpleso singolare* su uno spazio topologico.

10.1.1 Simplessi in \mathbb{R}^n

Dato un insieme x_0, \dots, x_q di $q + 1$ punti di \mathbb{R}^n il loro *inviluppo convesso* $[x_0, \dots, x_q]$ è il più piccolo insieme convesso che contiene i punti x_0, \dots, x_q .

Si ha inoltre (verificare!) che

$$[x_0, \dots, x_q] = \left\{ \sum_{i=0}^q t_i x_i \mid \sum_{i=0}^q t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i = 0, \dots, q \right\}.$$

Definizione 10.1.1 (q-simplesso). *Un q-simplesso di R^n è la chiusura convessa di un insieme di $q+1$ punti linearmente indipendenti.*

Esempio 10.1.2.

- $[x_0]$ è il punto x_0 ;
- $[x_0, x_1]$ è il segmento che unisce i punti x_0 e x_1 ;
- $[x_0, x_1, x_2]$ è il triangolo di vertici x_0, x_1 e x_2 .

Proposizione 10.1.3. *Dato l'insieme $\{x_0, \dots, x_q\} \subset R^n$, i suoi punti sono linearmente indipendenti se e solo se la condizione seguente è soddisfatta*

$$\sum_{i=0}^q t_i x_i = \sum_{i=0}^q s_i x_i \quad e \quad \sum_{i=0}^q t_i = \sum_{i=0}^q s_i \quad \implies \quad t_i = s_i, \quad i = 0, \dots, q.$$

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni:

(\Rightarrow) Siano $\{x_0, \dots, x_q\}$ punti linearmente indipendenti, con

$$\sum_{i=0}^q t_i x_i = \sum_{i=0}^q s_i x_i, \tag{10.1}$$

$$\sum_{i=0}^q t_i = \sum_{i=0}^q s_i. \tag{10.2}$$

Dalla 10.2 si ha $\sum_{i=0}^q (s_i - t_i) = 0 = \sum_{i=0}^q (s_i - t_i)x_0$, e dalla 10.1 si ha $\sum_{i=0}^q (s_i - t_i)x_i = 0$, da cui

$$\sum_{i=1}^q (s_i - t_i)(x_i - x_0) = 0.$$

Poichè i vettori $\{x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0\}$ sono linearmente indipendenti, si deve avere $t_i = s_i$ per $i = 1, \dots, q$ e dunque, per la 10.2, anche $t_0 = s_0$.

(\Leftarrow) Consideriamo ora la seguente combinazione lineare

$$\sum_{i=1}^q a_i (x_i - x_0) = 0,$$

e definiamo

$$a_0 = - \sum_{i=1}^q a_i.$$

Allora

$$\sum_{i=0}^q a_i x_i = \sum_{i=0}^q a_i x_0 = 0 = \sum_{i=0}^q 0 \cdot x_i,$$

e, per come abbiamo definito a_0 , si ha chiaramente $\sum_{i=0}^q a_i = 0 = \sum_{i=0}^q 0$. Per ipotesi, possiamo dedurre che $a_i = 0$ per tutti gli indici e concludere che i vettori $\{x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0\}$ sono linearmente indipendenti. \square

I punti x_i sono detti *vertici* del semplice. Ogni punto x di un q -simpleso $[x_0, \dots, x_q]$ si scrive in modo unico nel modo seguente

$$x = \sum_{i=0}^q t_i x_i$$

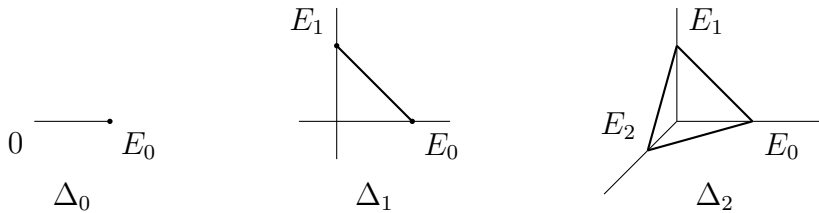
dove $t_0, \dots, t_q \in \mathbb{R}$ sono tali che $\sum_{i=0}^q t_i = 1$ e $t_i \geq 0$ per ogni $i = 0, 1, \dots, q$. I numeri reali t_0, \dots, t_q sono detti *coordinate baricentriche* di x .

Definizione 10.1.4. È detto *q -simpleso standard di \mathbb{R}^{q+1}* il semplice ordinato

$$\Delta_q = [E_0, \dots, E_q],$$

dove $E_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_q = (0, \dots, 0, 1)$.

Si osservi che Δ_q , munito della topologia indotta da \mathbb{R}^{q+1} , è omeomorfo al disco \mathbb{D}^n .



Dati P_0, \dots, P_q punti di \mathbb{R}^n , indichiamo con (P_0, \dots, P_q) la restrizione a Δ_q dell'unica applicazione affine $f: \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ che porta E_i in P_i per ogni $i = 0, \dots, q$. In particolare porremo $\delta_q = (E_0, \dots, E_q) = id_{\Delta_q}$.

10.1.2 Simplesse singolari su spazi topologici

Sia ora X uno spazio topologico

Definizione 10.1.5. *Un q -simpleso singolare su X è un'applicazione continua $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$.*

Osservazione 10.1.6. *Non bisogna confondere un q -simpleso singolare, che è una applicazione, con la sua immagine in X . Inoltre è facile rendersi conto che l'immagine di un simpleso singolare non è necessariamente omeomorfa ad un simpleso standard (basta ad esempio considerare una applicazione costante) e ciò giustifica il nome di simpleso singolare.*

Esempio 10.1.7. *Uno 0-simpleso singolare può essere identificato con un punto in X , mentre un 1-simpleso singolare è un arco in X .*

Fissato un vertice di un simpleso standard, la faccia geometrica opposta a tale vertice è ancora un simpleso e quindi definisce un simpleso singolare come segue:

Definizione 10.1.8 (Faccia di q -simplessi standard). *Dato un q -simpleso standard $[E_0, \dots, E_q]$, definiamo la sua i -esima faccia come la restrizione a Δ_{q-1} dell'unica applicazione affine $F_q^i: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q+1}$ tale che si abbia:*

$$F_q^i(E_j) = \begin{cases} E_j & \text{se } j < i \\ E_{j+1} & \text{se } j \geq i \end{cases}$$

Tale applicazione verrà spesso denotata con $(E_0, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_q)$, dove \hat{E}_i indica l'omissione dell' i -esimo vertice del simpleso Δ_q . In Figura 10.1 sono raffigurate le facce del 2-simpleso standard.

Utilizzando le facce dei simplessi standard si possono definire le facce di un simpleso singolare come segue:

Definizione 10.1.9 (Faccia di q -simplessi singolare). *Dato un q -simpleso singolare $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$, la sua i -esima faccia è il $(q-1)$ -simpleso singolare σ^i definito come segue::*

$$\sigma^i := \sigma \circ F_q^i.$$

La seguente proposizione sarà utile in seguito:

Lemma 10.1.10. *Se $i > j$ vale la seguente proprietà:*

$$F_q^i \circ F_{q-1}^j = F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1}$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

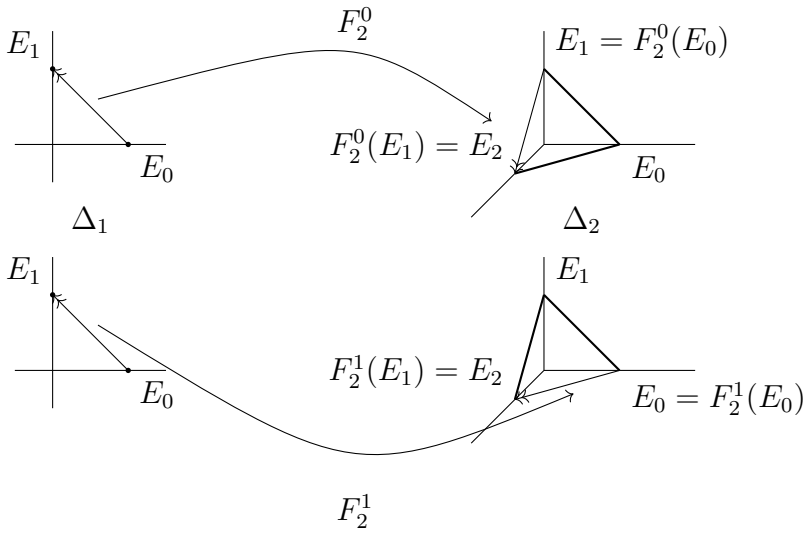


Figura 10.1: Facce del 2-simplesso standard

10.1.3 Gruppo delle q -catene

Indichiamo con $S_q(X)$ il gruppo abeliano libero generato dai q -simplessi (singolari). Un elemento $c \in S_q(X)$ è chiamato *catena q -dimensionale*, o *q -catena*, e si esprime come somma formale finita di simplessi singolari, a coefficienti interi:

$$c = \sum_{i \in I} a_i \sigma_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Definiremo ora un operatore da $S_q(X)$ in $S_{q-1}(X)$. Per far ciò sarà sufficiente definirlo sui generatori di $S_q(X)$ e quindi estenderlo per linearità su tutto $S_q(X)$.

Definizione 10.1.11 (Operatore bordo). *Si definisce operatore bordo l'applicazione che sui generatori è definita come segue:*

$$\begin{aligned} \partial_q: S_q(X) &\rightarrow S_{q-1}(X) \\ \sigma &\mapsto \partial_q \sigma := \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)} = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ F_q^i. \end{aligned}$$

Si pone $\partial_0 := 0$.

Per $c = \sum_i a_i \sigma_i$ si ha dunque

$$\partial_q \left(\sum_i a_i \sigma_i \right) = \sum_i a_i \partial_q \sigma_i.$$

Osservazione 10.1.12. *Quando risulterà chiaro dal contesto ometteremo l'indice all'operatore di bordo, indicandolo semplicemente con ∂ .*

Esempio 10.1.13. Consideriamo il 2-simplesso (singolare) (E_0, E_1, E_2) . Il suo bordo sarà dato da

$$\partial(E_0, E_1, E_2) = (E_1, E_2) - (E_0, E_2) + (E_0, E_1).$$

Esempio 10.1.14. Più in generale, il bordo del simplexso (singolare) (P_0, \dots, P_q) di R^q sarà

$$\partial_q(P_0, \dots, P_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_q).$$

Questo esprime il fatto che il bordo geometrico del simplexso $[P_0, \dots, P_q]$ è la somma delle sue facce.

Esempio 10.1.15. Un 1-simplesso singolare $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$ non è altro che un cammino in X . Il suo bordo sarà dato da $\sigma(E_1) - \sigma(E_0)$, ossia la differenza dell'estremo finale meno quello iniziale. In particolare si osservi che se il cammino è chiuso allora il suo bordo è 0.

Lemma 10.1.16. Si ha $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Dimostrazione. Per verificare la proprietà è sufficiente dimostrare che è vera sui generatori, ossia i simplexsi singolari.

Per un simplexso singolare $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ avremo:

$$\begin{aligned} 2(\partial_{q-1} \circ \partial_q)\sigma &= \partial_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ F_q^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q-1}(\sigma \circ F_q^i) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j) \\ &= \sum_{j < i=1}^q (-1)^{i+j} (\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j) + \sum_{0=i \leq j}^{q-1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j) \end{aligned}$$

Facendo la sostituzione $i' = j$, $j' = i - 1$ e rinominando gli indici nella seconda sommatoria dell'ultima uguaglianza, dopo aver utilizzato il Lemma 10.1.10, si ottiene l'opposto della prima sommatoria e quindi l'asserto. \square

D'ora in poi scriveremo semplicemente $\partial^2 = 0$.

10.2 Gruppi di omologia singolare

Consideriamo ora la successione di catene

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} S_{q-2}(X) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \longrightarrow 0.$$

In virtù del Lemma 10.1.16, per ogni q si ha

$$\text{Im } \partial_{q+1} \subseteq \text{Ker } \partial_q \triangleleft S_q(X).$$

Dunque possiamo dare la seguente

Definizione 10.2.1. *Il gruppo abeliano definito come segue*

$$H_q(X) = \frac{\text{Ker } \partial_q}{\text{Im } \partial_{q+1}},$$

è detto q -esimo gruppo di omologia singolare (a coefficienti in \mathbb{Z}) di X .

Osservazione 10.2.2. *Il fatto che si parli di coefficienti in \mathbb{Z} suggerisce che si possano definire dei gruppi di omologia singolare con altri coefficienti. In effetti la costruzione che abbiamo fatto funziona altrettanto bene se si sostituisce \mathbb{Z} con un qualunque anello commutativo unitario \mathcal{R} . In tal caso i gruppi di omologia saranno indicati con $H_q(X, \mathcal{R})$. In queste note non tratteremo il caso generale.*

Definizione 10.2.3. *Posto $B_q(X) = \text{Im } \partial_{q+1}$ e $Z_q(X) = \text{Ker } \partial_q$, gli elementi di $B_q(X)$ sono detti q -bordi (o semplicemente bordi), mentre gli elementi di $Z_q(X)$ sono detti q -cicli.*

Più esplicitamente la relazione di equivalenza sui cicli tramite cui si ottiene $H_q(X)$ è data da

$$c_1 \sim c_2 \iff \exists b \in S_{q+1}(X) \cap \partial_{q+1}^{-1}(S_q(X)) \quad \text{t.c.} \quad c_1 - c_2 = b,$$

e si dice che c_1 e c_2 sono *omologhi*.

Esempio 10.2.4 (Omologia del punto). *Sia $X = \{x\}$, e consideriamo un q -simpleso $\sigma_q: \Delta_q \rightarrow \{x\}$. Per ogni q esiste un unico q -simpleso su $\{x\}$, dato dall'applicazione costante. Allora il gruppo delle q -catene $S_q(x)$ è il gruppo ciclico generato dalla σ_q , ovvero $S_q(x) = \langle \sigma_q \rangle = \mathbb{Z} \cdot \sigma_q \simeq \mathbb{Z}$. Allora*

$$\partial \sigma_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_{q-1} = \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \right) \sigma_{q-1} = \begin{cases} 0 & \text{per } q \text{ dispari} \\ \sigma_{q-1} & \text{per } q \text{ pari} \end{cases}$$

Dunque $\partial_q: S_q(x) \rightarrow S_{q-1}(x)$ è

1. l'applicazione nulla, se q è dispari;
2. un isomorfismo, se q è pari.

Nel primo caso si ha $\partial_q = 0$, dunque $S_q(x) = \text{Ker } \partial_q = Z_q(x)$. Dato che $q+1$ è pari, ∂_{q+1} è un isomorfismo e dunque $S_q(x) = \text{Im } \partial_{q+1} = B_q(x)$. Allora

$$H_q(x) = \frac{Z_q(x)}{B_q(x)} = \frac{S_q(x)}{S_q(x)} = 0.$$

Nel secondo caso ci sono due possibilità:

- $q \neq 0$. ∂_q è un isomorfismo, dunque $\text{Ker } \partial_q = Z_q(x) = 0$. Allora

$$H_q(x) = \frac{Z_q(x)}{B_q(x)} = 0.$$

- $q = 0$. Per definizione $\partial_0 = 0$, dunque $S_0(x) = \text{Ker } \partial_0 = Z_0(x) \simeq \mathbb{Z}$. Inoltre $\partial_1 = 0$, dunque $\text{Im } \partial_1 = B_0(x) = 0$. Allora

$$H_0(x) = \frac{Z_0(x)}{B_0(x)} = Z_0(x) \cong \mathbb{Z}.$$

Riassumendo si ha:

$$H_q(\{x\}) = \begin{cases} 0 & \text{per } q \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{per } q = 0 \end{cases}.$$

10.2.1 Invarianza topologica dell'omologia singolare

Sia $f: X \rightarrow Y$ applicazione continua tra spazi topologici. Possiamo costruire in modo naturale un *morfismo indotto*

$$S_q(f): S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$$

procedendo come segue. Consideriamo inizialmente un simpleso singolare σ , e definiamo

$$S_q(f)(\sigma) = f \circ \sigma.$$

Poiché i semplici generano $S_q(X)$ possiamo estendere $S_q(f)$ per linearità su tutto $S_q(X)$. Quindi, data una catena $c = \sum a_i \sigma_i$, avremo

$$S_q(f)(c) = \sum a_i S_q(f)(\sigma_i) = \sum a_i (f \circ \sigma_i). \quad (10.3)$$

L'applicazione $S_q(f)$ è quindi un omomorfismo di gruppi e vale inoltre la seguente proprietà

Lemma 10.2.5. *Se $f: X \rightarrow Y$ è continua, per ogni $q \geq 1$ si ha:*

$$\partial_q \circ S_q(f) = S_{q-1}(f) \circ \partial_q.$$

Dimostrazione. Sarà sufficiente verificare la proprietà sui semplici singolari. Sia dunque σ un semplice. Avremo

$$\begin{aligned} \partial_q(S_q(f)(\sigma)) &= \partial_q(f \circ \sigma) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i (f \circ \sigma) \circ F_q^i \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i f \circ (\sigma \circ F_q^i) \\ &= S_{q-1}(f)(\partial_q \sigma) \end{aligned}$$

□

Si verifica inoltre facilmente che S_q è un funtore (verificare!).

Lemma 10.2.6. *Se $f: X \rightarrow Y$ è continua, per ogni q si ha*

1. $S_q(f)(Z_q(X)) \subseteq Z_q(Y)$;
2. $S_q(f)(B_q(X)) \subseteq B_q(Y)$.

Dimostrazione. 1. Sia $c \in Z_q(X)$, dunque $\partial_q c = 0$. Allora

$$\partial_q S_q(f)(c) = S_{q-1}(f)(\partial_q c) = 0,$$

da cui $S_q(f)(c) \in Z_q(Y)$.

2. Sia $c \in B_q(X)$, dunque $c = \partial_q b$ per un certo b . Allora

$$S_q(f)(c) = S_q(f)(\partial_q b) = \partial_q S_{q+1}(f)(b),$$

da cui $S_q(f)(c) \in B_q(Y)$.

□

Il Lemma 10.2.6 ci permette di definire l'applicazione indotta da f in omologia:

Definizione 10.2.7 (Indotta in omologia). *Si chiama indotta in omologia di $f: X \rightarrow Y$ l'applicazione*

$$\begin{aligned} H_q(f): H_q(X) &\rightarrow H_q(Y) \\ [c] &\mapsto H_q(f)[c] = [S_q(f)(c)]. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Anche per H_q valgono le proprietà funtoriali:

Proposizione 10.2.8. H_q è un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria dei gruppi abeliani.

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. \square

La proposizione precedente implica immediatamente che i gruppi di omologia sono invarianti topologici.

10.2.2 Omologia di spazi connessi per archi

Il gruppo di omologia di grado 0 fornisce l'informazione sul numero di componenti connesse per archi dello spazio topologico X . Infatti valgono i seguenti

Proposizione 10.2.9. *Se X è connesso per archi allora $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Presa una catena $c \in S_0(X)$, $c = \sum a_x x$, cerchiamo una condizione necessaria e sufficiente affinché $c = \partial b$ per un certo b .

- Se $\partial b = c$ e $b = \sum v_x \sigma_x$, dove i σ_x sono archi, si ha $\partial b = \sum v_x \partial \sigma_x = \sum v_x (\sigma_x(E_1) - \sigma_x(E_0)) = \sum v_x \sigma_x(E_1) + \sum (-v_x) \sigma_x(E_0) = c$. Dunque $c = \partial b \Rightarrow \sum a_x = 0$.
- Se $\sum a_x = 0$, consideriamo l'arco da x_0 a x (che esiste, in quanto X è connesso per archi) e lo pensiamo come un 1-simplexso.

$$\sigma_x: \Delta_1 \rightarrow X, \quad \text{con} \quad \sigma_x(E_0) = x_0 \quad \text{e} \quad \sigma_x(E_1) = x.$$

Allora $\partial \sigma_x = x - x_0$, e

$$\begin{aligned} c &= \sum a_x x - 0 \cdot x_0 = \sum a_x x - (\sum a_x) x_0 = \\ &= \sum a_x (x - x_0) = \sum a_x \partial \sigma_x = \partial (\sum a_x \sigma_x). \end{aligned}$$

Dunque una catena è un bordo se e solo se la somma dei coefficienti è zero. Ora, dato che $\partial_0 = 0$, $S_0(X) = \text{Ker } \partial_0 = Z_0(X)$.

Sia $\partial^\# : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ con $c = \sum a_x x \mapsto \sum a_x$. L'applicazione $\partial^\#$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi e, per quanto appena dimostrato, $\text{Ker } \partial^\# = B_0(X)$. Concludiamo, per il primo teorema di isomorfismo, che

$$\mathbb{Z} \cong \frac{S_0(X)}{\text{Ker } \partial^\#} \cong \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} \cong H_0(X).$$

□

Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ l'insieme delle componenti connesse per archi di X e σ un q -simplexso singolare su X . Poiché Δ_q è connesso per archi e lo sono anche le sue facce (come simplexsi standard) allora la sua immagine tramite σ è tutta contenuta in una componente connessa per archi X_j e quindi il bordo di σ è un elemento di $S_{q-1}(X_j)$. Si ha quindi

$$S_q(X) = \oplus_\alpha S_q(X_\alpha),$$

cioè ogni q -catena si scrive in modo unico come somma di un numero finito di catene sulle componenti connesse per archi.

Osserviamo inoltre che se $\sigma = \sum_{i=1}^k \sigma_i$, dove $\sigma_i \in S_q(X_i)$, allora $\partial\sigma = \sum_{i=1}^k \partial\sigma_i$ e $\partial\sigma_i \in S_q(X_i)$. Quindi σ è un ciclo se e solo se ogni σ_i è un ciclo.

Il seguente risultato è la chiave di svariati risultati che riguardano la connessione:

Proposizione 10.2.10. *Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è l'insieme delle componenti connesse per archi di X , per ogni q si ha*

$$H_q(X) = \oplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha).$$

Dimostrazione. Sfruttando la discussione che precede la proposizione, definiamo un omomorfismo

$$\phi : Z_q(X) \rightarrow \oplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha)$$

come segue. Dato $\sigma = \sum_{i=1}^k \sigma_i$

$$\phi(\sigma) = \sum_{i=1}^k [\sigma_i].$$

Poiché $\partial(S_{q+1}(X)) \subset \text{ker } \phi$, si ottiene un morfismo indotto $\bar{\phi} : H_q(X) \rightarrow \oplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha)$. Si verifica immediatamente che $\bar{\phi}$ è iniettivo e suriettivo e quindi un isomorfismo. □

In particolare lo 0-esimo gruppo di omologia è il gruppo abeliano generato dalle componenti connesse per archi dello spazio e quindi, tenendo conto della Proposizione 10.2.9

Corollario 10.2.11. *Uno spazio X è connesso per archi se e solo se $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

10.2.3 Omologia ridotta

Consideriamo la successione

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} S_{q-2}(X) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial^\#} \mathbb{Z},$$

dove $\partial^\#$ è l'applicazione definita nella dimostrazione della Proposizione 10.2.9, e definiamo i gruppi di *omologia ridotta* come

$$\tilde{H}_q(X) = H_q(X), \quad \text{se } q \geq 1,$$

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{\text{Ker } \partial^\#}{\text{Im } \partial_1}.$$

Dobbiamo verificare che $\partial^\# \circ \partial_1 = 0$. Per quanto visto nella dimostrazione della Proposizione 10.2.9 uno 0-simplexso che è un bordo ha somma dei coefficienti nulla e quindi $\text{Im } \partial_1 = B_0(X) \subset \text{Ker } \partial^\#$ che equivale a dire che $\partial^\# \circ \partial_1 = 0$.

Il legame tra $H_0(X)$ e $\tilde{H}_0(X)$ è espresso dalla seguente

Proposizione 10.2.12. $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Si veda l'osservazione dopo il Corollario 11.1.12. □

Il Corollario 10.2.11 si può quindi ritenere come segue:

Corollario 10.2.13. *Uno spazio topologico X è connesso per archi $\iff \tilde{H}_0(X) = 0$.*

Si osservi inoltre l'omologia ridotta del punto è sempre banale. Uno spazio X per il quale l'omologia ridotta è banale è detto **aciclico**.

10.3 Esercizi

Esercizio 10.1. Si dimostri che l'involuppo convesso dei punti $\{x_0, \dots, x_q\}$ è uguale all'insieme

$$\left\{ \sum_{i=0}^q t_i x_i \mid \sum_{i=0}^q t_i = 1, \ t_i \geq 0 \ \forall i = 0, \dots, q \right\}.$$

Esercizio 10.2. Si dimostri il Lemma 10.1.10.

Esercizio 10.3. Si dimostri la Proposizione 10.2.8.

Esercizio 10.4. Siano X uno spazio affine e A, B due suoi punti. I due 1-simplessi singolari (A, B) e (B, A) sono distinti e lo sono anche le due 1-catene (A, B) e $-(B, A)$. Si dimostri che $(A, B) + (B, A)$ è un bordo (quindi $(A, B) = -(B, A) + \partial\sigma$). (sugg: si calcoli il bordo del 2-simplesso singolare (A, B, A) e si sfrutti il fatto che l'1-simplesso costante è un bordo)

Esercizio 10.5. Siano A, B, C, D i vertici del quadrato $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ ordinati in senso antiorario a partire da $A = (0, 0)$. Consideriamo i due simplessi singolari $\sigma = (A, B, D)$ e $\tau = (B, C, D)$. Si calcoli il bordo di $\sigma + \tau$.

Capitolo 11

Successioni esatte e complessi di catene

In questo capitolo introdurremo il concetto di successione esatta che è lo strumento fondamentale per il calcolo dei gruppi di omologia e il concetto di complesso di catene che è il contesto naturale per discutere la teoria dell'omologia singolare.

11.1 Gruppi abeliani liberi

Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano. Ricordiamo che un sottoinsieme $\{g_i\}_{i \in I}$ è detto sistema di generatori per G se ogni elemento $g \in G$ si può scrivere come combinazione lineare finita a coefficienti in \mathbb{Z} dei g_i .

Definizione 11.1.1. *Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano. Un sottoinsieme $\{g_i\}_{i \in I}$ è detto libero se $\sum n_i g_i = 0$ se e solo se $n_i = 0$ per ogni i .*

È evidente che un sottoinsieme di un sistema libero è anch'esso libero.

Definizione 11.1.2. *Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano. Un sottoinsieme $B = \{g_i\}_{i \in I}$ è detto base per G se è libero ed è un sistema di generatori per G .*

Un gruppo abeliano si dice *libero* se ammette una base. È immediato verificare che, se $B = \{g_i\}_{i \in I}$ è una base allora ogni elemento $g \in G$ si scrive in modo unico come $\sum n_i g_i$.

Esempio 11.1.3. *Non tutti i gruppi abeliani ammettono una base: un esempio di tale situazione è dato dai gruppi ciclici \mathbb{Z}_n , in cui non esistono sottoinsiemi liberi.*

La seguente proposizione è l'analoga per i gruppi abeliani di quella nota per gli spazi vettoriali:

Proposizione 11.1.4 (Estensione lineare). *Sia G un gruppo abeliano di base B . Allora per ogni gruppo abeliano H e per ogni applicazione $\phi : B \rightarrow H$ esiste un unico omomorfismo $f : G \rightarrow H$ tale che $f|_B = \phi$.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. \square

Definizione 11.1.5. *Un elemento $g \in G$ è detto di torsione se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n \neq 0$ e $ng = 0$.*

L'insieme di tutti gli elementi di torsione di G è un sottogruppo (verificare!) detto sottogruppo di torsione e verrà denotato con $T(G)$. Si hanno inoltre le seguenti proprietà:

Proposizione 11.1.6. *Siano G e G' due gruppi abeliani.*

- *se $\phi : G \rightarrow G'$ è un omomorfismo allora $\phi(T(G)) \subset T(G')$;*
- *se $\phi : G \rightarrow G'$ è un isomorfismo allora $\phi_{T(G)} : T(G) \rightarrow T(G')$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. \square

La proposizione precedente implica immediatamente quanto segue:

Corollario 11.1.7. *Se $\phi : G \rightarrow G'$ è un isomorfismo di gruppi abeliani allora ϕ induce un isomorfismo $\tilde{\phi} : G/T(G) \rightarrow G'/T(G')$.*

Si osservi inoltre che il sottogruppo di torsione di $G/T(G)$ è banale (dimostrare!).

Il teorema di classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati (si veda Teorema 6.1.1) afferma che un gruppo abeliano finitamente generato G ha sottogruppo di torsione finito e G è isomorfo a $\mathbb{Z}^n \oplus T(G)$ per un certo $n \in \mathbb{Z}$.

Definizione 11.1.8. *Una successione di gruppi abeliani H, G, K e omomorfismi f, g*

$$H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K$$

si dice esatta in G se $\text{Im } f = \ker g$.

Una successione di gruppi abeliani $\{H_n\}$ e morfismi $\{f_n\}$

$$\dots \longrightarrow H_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} H_n \xrightarrow{f_n} H_{n-1} \longrightarrow \dots$$

si dice esatta se è esatta in ogni H_n .

Avere una successione esatta della forma

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{g} K$$

equivale a dire che g è iniettiva, mentre averne una della forma

$$G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

equivale a dire che g è suriettiva.

Definizione 11.1.9. *Una successione esatta corta di gruppi abeliani è una successione della forma*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0.$$

Data una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

si ha, per quanto osservato prima, che f è iniettiva e g è suriettiva. Quindi H è isomorfo a $f(H)$ e $G/H \cong K$.

Osservazione 11.1.10. *Nel caso delle successioni esatte di gruppi abeliani $G/H \cong K$ non implica che $G \cong H \oplus K$. Per esempio nella seguente successione esatta (dove 2 significa moltiplicazione per 2 e π è la proiezione sul quoziente) questo non accade:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Vedremo più avanti una condizione che ci permette di concludere in tal senso.

Lemma 11.1.11. *Data una successione esatta corta di gruppi abeliani*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. esiste un omomorfismo $h : G \rightarrow H$ tale che $h \circ f = id_H$;
2. esiste un omomorfismo $k : K \rightarrow G$ tale che $g \circ k = id_K$;
3. esiste un isomorfismo $\phi : G \rightarrow H \oplus K$ che fa commutare il seguente diagramma, dove i_H e π_K sono rispettivamente l'inclusione del primo addendo e la proiezione sul secondo addendo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & G & & & \\
 & & f \nearrow & \downarrow \phi & \searrow g & & \\
 0 \longrightarrow & H & \xrightarrow{i_H} & H \oplus K & \xrightarrow{\pi_K} & K & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Si dice che una tale successione è **spezzante**.

Dimostrazione. • 3) \implies 1), 2). Per questo è sufficiente definire $h := \pi_H \circ \phi$ e $k := \phi^{-1} \circ i_K$.

- 1) \implies 3). Definiamo $\phi : G \rightarrow H \oplus K$ come $\phi(x) = (h(x), g(x))$. Per ogni $x \in G$ si ha:

$$x = (x - f(h(x))) + f(h(x))$$

dove $x - f(h(x)) \in \ker h$ e $f(h(x)) \in \operatorname{Im} f$. Quindi $G = \ker h + \operatorname{Im} f$ e vogliamo dimostrare che la somma è diretta. Per far questo, sia $b \in \ker h \cap \operatorname{Im} f$, cioè $b = f(a)$ e $h(b) = 0$. Avremo dunque:

$$0 = h(b) = h(f(a)) = a$$

e quindi $b = 0$.

Mostriamo che ϕ è suriettiva. Sia $(x, y) \in H \oplus K$. Per la suriettività di g esiste $b \in G$ tale che $g(b) = y$. Poiché $G = \ker h \oplus \operatorname{Im} f$ si ha $b = f(x') + b'$, con $h(b') = 0$. Tenendo conto dell'esattezza della successione, avremo

$$y = g(b) = g(f(x') + b') = 0 + g(b') \text{ e } h(f(x') + b') = x.$$

Allora

$$\phi(f(x) + b') = (h(f(x) + b'), g(f(x) + b')) = (x, y)$$

e questo mostra che ϕ è suriettiva.

Per dimostrare l'iniettività di ϕ consideriamo $b \in \ker \phi$, ossia $(h(b), g(b)) = (0, 0)$. Per l'esattezza della successione $g(b) = 0$ implica che esiste $x \in H$ tale che $b = f(x)$. Da $0 = h(b) = h(f(x)) = x$ si deduce che $b = 0$ e quindi che ϕ è iniettiva.

- 2) \implies 3). Definiamo $\psi : H \oplus K \rightarrow G$ come $\psi(x, y) = f(x) + k(y)$. Si verifica facilmente che ψ è un isomorfismo che fa commutare il diagramma e $\phi := \psi^{-1}$ è l'applicazione cercata.

□

Corollario 11.1.12. *Se, nella successione esatta corta precedente, K è libero allora la successione è spezzante.*

Dimostrazione. Sia $\{b_i\}_{i \in I}$ una base di K . Per l'esattezza della successione, per ogni b_i esiste $x_i \in G$ tale che $b_i = g(x_i)$. Per la Proposizione 11.1.4 esiste un unico morfismo $k : K \rightarrow G$ tale che $k(b_i) = x_i$. Si verifica immediatamente che $g \circ k = \operatorname{id}_K$.

□

Osservazione 11.1.13. *Utilizzando il corollario precedente si deduce facilmente la Proposizione 10.2.12. Infatti dalla definizione di $\partial^\#$ e dalla dimostrazione della Proposizione 10.2.9 si deduce che $B_0(X) \subset \text{Ker } \partial^\#$. La successione esatta*

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \partial^\# \xrightarrow{i} S_0(X) \xrightarrow{\partial^\#} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

è spezzante in quanto \mathbb{Z} è libero e quindi si ha

$$S_0(X) \cong \text{Ker } \partial^\# \oplus \mathbb{Z}.$$

Quozientando rispetto a $B_0(X)$, poiché $B_0(X) \subset \text{Ker } \partial^\#$, si ottiene

$$H_0(X) \cong S_0(X)/B_0(X) \cong (\text{Ker } \partial^\# / B_0(X)) \oplus \mathbb{Z} \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

11.2 Complessi di catene

Definizione 11.2.1. *Un complesso di catene è una successione di coppie (C_q, ∂_q) , dove per ogni q si ha*

- C_q gruppo abeliano;
- $i \partial_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$ sono omomorfismi tali che $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

La seconda condizione equivale al fatto che $\text{Im } \partial_{q+1} \subseteq \text{Ker } \partial_q$.

Esempio 11.2.2. *La successione delle q -catene $(S_q(X))$ con gli operatori di bordo ∂_q , definiti nel capitolo precedente formano un complesso di catene.*

Poiché per un complesso di catene $C = \{(C_q, \partial_q)\}$ si ha $\text{Im } \partial_{q+1} \subseteq \text{Ker } \partial_q$, come nel caso delle catene singolari, si possono definire i gruppi di omologia del complesso di catene

$$H_q(C) = \frac{\text{Ker } \partial_q}{\text{Im } \partial_{q+1}}. \quad (11.1)$$

Definizione 11.2.3. *Una mappa di catene o morfismo di catene tra due complessi di catene $\{(C_q, \partial_q)\}$ e $\{(C'_q, \partial'_q)\}$ è una successione di omomorfismi $f_q: C_q \rightarrow C'_q$ tali che per ogni q si abbia*

$$\partial'_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q.$$

Si verifica facilmente che i complessi di catene formano una categoria i cui morfismi sono le mappe di catene.

Esempio 11.2.4. Per quanto visto nel capitolo precedente, una funzione continua tra due spazi topologici $f : X \rightarrow Y$ induce una mappa di catene $S(f) = \{S_q(f)\}_{q \in \mathbb{N}}$.

Come nel caso dell'omologia singolare, una mappa di catene $f = \{f_q\}$ induce dei morfismi in omologia $H_q(f) : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$, definiti come segue:

$$H_q(f)[c] = [f_q(c)].$$

È immediato verificare che H_q è un funtore dalla categoria dei complessi di catene a quella dei gruppi abeliani.

Il concetto di successione esatta corta tra gruppi abeliani si estende come segue al caso dei complessi di catene:

Definizione 11.2.5. Una successione di complessi di catene

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0$$

dove f e g sono morfismi di catene verrà detta esatta corta se nel seguente diagramma (commutativo)

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{f_q} & C_q & \xrightarrow{g_q} & C''_q \longrightarrow 0 \\ & & \partial_q \downarrow & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & C_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & C''_{q-1} \longrightarrow 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

ogni riga è una successione esatta corta di gruppi abeliani per ogni q .

Definizione 11.2.6. Una omotopia di catene tra due mappe di catene $f = \{f_q : C_q \rightarrow C'_q\}$ e $g = \{g_q : C_q \rightarrow C'_q\}$ è una successione di omomorfismi $f = \{D_q : C_q \rightarrow C'_{q+1}\}$ tali che per ogni q si abbia

$$\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = f_q - g_q,$$

cioè tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccc} C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \\ & \searrow D_q & \downarrow f_q - g_q & \swarrow D_{q-1} & \\ C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} \end{array}$$

Denoteremo con $f \simeq g$ l'omotopia di catene.

Proposizione 11.2.7. *Se $f \simeq g$ allora per ogni q f_q e g_q inducono lo stesso omomorfismo in omologia.*

Dimostrazione. Se $[c] \in H_q(C)$ allora $\partial c = 0$ e quindi si avrà

$$f_q(c) - g_q(c) = \partial'_{q+1}(D_q(c)) + D_{q-1}(\partial_q c) = \partial'_{q+1}(D_q(c))$$

e quindi $[f_q(c)] = [g_q(c)]$. □

Invarianza omotopica dell'omologia singolare

Data una omotopia tra funzioni continue f e g è possibile costruire una omotopia di catene tra i morfismi di catene $S(f)$ e $S(g)$. Questo permette di dimostrare il seguente risultato.

Teorema 11.2.8. *Se $f, g : X \rightarrow Y$ sono omotope allora per ogni q si ha $H_q(f) = H_q(g)$.*

Dimostrazione. Si veda [4] o [3]. □

Usando la funtorialità di H_q si ottiene immediatamente il seguente

Corollario 11.2.9 (Invarianza omotopica dell'omologia singolare). *Se $f : X \rightarrow Y$ è un'equivalenza d'omotopia allora $H_q(f)$ è un isomorfismo per ogni q .*

11.2.1 Omologia relativa

Dato uno spazio topologico X e un suo sottospazio $A \xrightarrow{i} X$, l'applicazione $S(i)$ indotta dall'inclusione i è anch'essa un'inclusione. Resta inoltre ben definita anche $\partial_{q, S_q(A)} S_q(A) \rightarrow S_{q-1}(A)$, perchè il bordo di una catena in A è ancora una catena in A . Possiamo allora considerare il complesso di catene $\{(S_q(A), \partial_q)\}$ e il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} S_q(A) & \xrightarrow{S_q(i)} & S_q(X) \\ \partial_q \downarrow & & \downarrow \partial_q \\ S_{q-1}(A) & \xrightarrow{S_{q-1}(i)} & S_{q-1}(X). \end{array}$$

L'applicazione $S_q(i)$ è iniettiva, perchè è un'inclusione. Dal momento che $S_q(A) \triangleleft S_q(X)$, possiamo considerare la proiezione sul quoziente $\pi_q : S_q(X) \rightarrow \frac{S_q(X)}{S_q(A)}$ e dunque ottenere per ogni q la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow S_q(A) \xrightarrow{S_q(i)} S_q(X) \xrightarrow{\pi_q} \frac{S_q(X)}{S_q(A)} \longrightarrow 0$$

Poichè $\partial_q(S_q(A)) \subseteq S_{q-1}(A)$, risulta ben definita l'applicazione

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_q: \frac{S_q(X)}{S_q(A)} &\rightarrow \frac{S_{q-1}(X)}{S_{q-1}(A)} \\ [c] &\mapsto \bar{\partial}_q[c] = [\partial_q(c)] \end{aligned}$$

che chiude il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\pi_q} & \frac{S_q(X)}{S_q(A)} \\ \partial_q \downarrow & & \downarrow \bar{\partial}_q \\ S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\pi_{q-1}} & \frac{S_{q-1}(X)}{S_{q-1}(A)}. \end{array}$$

Poniamo

$$\frac{S_q(X)}{S_q(A)} = S_q(X, A).$$

Quindi abbiamo un complesso di catene $\{S(X, A), \bar{\partial}\}$

$$\dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{q+1}} S_q(X, A) \xrightarrow{\bar{\partial}_q} S_{q-1}(X, A) \xrightarrow{\bar{\partial}_{q-1}} \dots$$

Definizione 11.2.10. *Il q -esimo gruppo di omologia relativa della coppia (X, A) è il q -esimo gruppo di omologia del complesso $\{S(X, A), \bar{\partial}\}$, ossia*

$$H_q(X, A) := H_q(S(X, A)) = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}_q}{\text{Im } \bar{\partial}_{q+1}}.$$

Per avere un'idea più geometrica dell'omologia relativa introduciamo

- i q -cicli modulo A

$$Z_q(X, A) = \{s \in S_q(X) \mid \partial_q s \in S_{q-1}(A)\}$$

- i q -bordi modulo A

$$B_q(X, A) = \{s \in S_q(X) \mid s = \partial_{q+1} s' + s_A, \quad s' \in S_{q+1}(X), s_A \in S_q(A)\}$$

Si osservi che $B_q(X, A)$ è un sottogruppo di $Z_q(X, A)$ e che valgono le seguenti inclusioni:

$$S_q(A) \subset B_q(X, A) \quad , \quad B_q(X) \subset B_q(X, A) \quad , \quad Z_q(X) \subset Z_q(X, A).$$

Possiamo ora enunciare la seguente

Proposizione 11.2.11. *Si ha*

$$H_q(X, A) \cong \frac{Z_q(X, A)}{B_q(X, A)}.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $\pi_q : S_q(X) \rightarrow \frac{S_q(X)}{S_q(A)}$ e osserviamo innanzitutto che $\pi_q(Z_q(X, A)) = \ker \bar{\partial}_q$. Infatti se $s \in Z_q(X, A)$ allora $\partial_q(s) \in S_{q-1}(A)$ e per definizione di $\bar{\partial}_q$ avremo $\bar{\partial}_q([s]) = [\partial_q s] = [0]$ e quindi $[s] \in \ker \bar{\partial}_q$. Viceversa, se $[s] \in \ker \bar{\partial}_q$ allora si ha

$$0 = \bar{\partial}_q([s]) = [\partial_q s]$$

cioè $\partial_q(s) \in S_{q-1}(A)$ e quindi $s \in Z_q(X, A)$.

Possiamo allora considerare la restrizione di π_q a $Z_q(X, A)$ e ottenere l'omomorfismo suriettivo

$$\pi_q : Z_q(X, A) \rightarrow \ker \bar{\partial}_q ,$$

il cui nucleo è $S_q(A)$. Per il primo teorema di isomorfismo possiamo concludere che

$$\frac{Z_q(X, A)}{S_q(A)} \cong \ker \bar{\partial}_q .$$

In modo del tutto analogo si dimostra che

$$\frac{B_q(X, A)}{S_q(A)} \cong \text{Im } \bar{\partial}_{q+1} .$$

Infine, per il terzo teorema di isomorfismo, avremo

$$H_q(X, A) \cong \frac{Z_q(X, A)}{B_q(X, A)} .$$

□

Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è l'insieme delle componenti connesse per archi di X , per l'omologia relativa vale un risultato analogo a quello della Proposizione 10.2.10:

Proposizione 11.2.12. *Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è l'insieme delle componenti connesse per archi di X e $A_\alpha = A \cap X_\alpha$, per ogni q si ha*

$$H_q(X, A) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha, A_\alpha) .$$

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella della Proposizione 10.2.10 e viene lasciata per esercizio. □

Nel caso dello 0-esimo gruppo di omologia relativa vale la seguente

Proposizione 11.2.13. *Se X è connesso per archi e $A \subset X$ è non vuoto, allora si ha*

$$H_0(X, A) = 0 .$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che $Z_0(X, A) = S_0(A)$ poichè $\partial_0 = 0$. Se A è non vuoto, fissiamo $x_0 \in A$ e consideriamo $c \in Z_0(X, A)$

$$c = \sum_x a_x x.$$

Sia σ_x un arco di estremo iniziale x_0 ed estremo finale x (σ_x esiste perché X è connesso per archi) e consideriamo la 1-catena

$$h = \sum_x a_x \sigma_x.$$

calcolando il bordo di h si ottiene:

$$\partial h = \sum_x a_x \partial \sigma_x = \sum_x a_x x - \left(\sum_x a_x \right) x_0 = c - \left(\sum_x a_x \right) x_0,$$

da cui si ottiene

$$c = \partial h + \left(\sum_x a_x \right) x_0,$$

e questo mostra che ogni 0-ciclo relativo è uno 0-bordo relativo e quindi $H_0(X, A) = 0$. \square

Combinando le proposizioni precedenti otteniamo

Corollario 11.2.14. *Il gruppo $H_0(X, A)$ è il gruppo abeliano libero generato dalle componenti connesse per archi di X che non intersecano A .*

11.3 La successione esatta lunga dell'omologia relativa

Dalla successione esatta corta di complessi di catene

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{S(i)} S(X) \xrightarrow{\pi_q} S(X, A) \longrightarrow 0$$

otteniamo per ogni q le successioni (in teoria non necessariamente esatte)

$$H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(\pi)} H_q(X, A).$$

Vogliamo costruire degli omomorfismi

$$\delta_q: H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A),$$

in modo da ottenere una successione esatta lunga.

In realtà questa costruzione vale per una qualunque successione esatta corta di complessi di catene e quindi dimostriamo direttamente il caso generale:

Lemma 11.3.1 (Lemma dello zig-zag). *Data una successione esatta corta di complessi di catene*

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0,$$

per ogni q esiste un omomorfismo di gruppi, detto omomorfismo di connessione,

$$\delta_q: H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C'),$$

tale che la successione

$$\dots \longrightarrow H_q(C') \xrightarrow{H(f_q)} H_q(C) \xrightarrow{H(g_q)} H_q(C'') \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(C') \longrightarrow \dots$$

sia esatta.

Dimostrazione. 1. Costruiamo per ogni q l'omomorfismo δ_q . Consideriamo una parte della successione esatta corta di complessi di catene

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{f_{q+1}} & C_{q+1} & \xrightarrow{g_{q+1}} & C''_{q+1} \longrightarrow 0 \\ & & \partial'_{q+1} \downarrow & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial''_{q+1} \\ 0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{f_q} & C_q & \xrightarrow{g_q} & C''_q \longrightarrow 0 \\ & & \partial'_q \downarrow & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial''_q \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & C_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & C''_{q-1} \longrightarrow 0 \\ & & \partial'_{q-1} \downarrow & & \downarrow \partial_{q-1} & & \downarrow \partial''_{q-1} \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q-2} & \xrightarrow{f_{q-2}} & C_{q-2} & \xrightarrow{g_{q-2}} & C''_{q-2} \longrightarrow 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Sia $z''_q \in C''_q$ un ciclo, e quindi $\partial''_q z''_q = 0$. Avremo

- g_q è suriettiva, dunque esiste $c_q \in C_q$ tale che $g_q(c_q) = z''_q$.
- Poiché il diagramma è commutativo, si ha $g_{q-1} \circ \partial_q = \partial''_q \circ g_q$. Dunque

$$g_{q-1}(\partial_q c_q) = \partial''_q(g_q(c_q)) = \partial''_q z''_q = 0,$$

e $\partial_q c_q \in \text{Ker } g_{q-1}$.

- Per l'esattezza, $\text{Ker } g_{q-1} = \text{Im } f_{q-1}$, quindi $\partial_q c_q \in \text{Im } f_{q-1}$.
- f_{q-1} è iniettiva, dunque esiste un unico $c'_{q-1} \in C'_{q-1}$ tale che

$$f_{q-1}(c'_{q-1}) = \partial_q c_q. \quad (11.2)$$

- c'_{q-1} è un ciclo. Infatti, per la commutatività del diagramma si ha $f_{q-2} \circ \partial'_{q-1} = \partial_{q-1} \circ f_{q-1}$, da cui

$$f_{q-2}(\partial'_{q-1}c'_{q-1}) = \partial_{q-1}(f_{q-1}(c'_{q-1})) = \partial_{q-1}(\partial_q c_q) = 0,$$

dove l'ultimo passaggio è vero per le proprietà del bordo. Dunque $\partial'_{q-1}c'_{q-1} \in \text{Ker } f_{q-2}$ il che implica necessariamente, essendo f_{q-2} iniettiva, che $\partial'_{q-1}c'_{q-1} = 0$.

Possiamo ora definire l'omomorfismo di connessione come segue

$$\begin{aligned} \delta_q: H_q(C'') &\rightarrow H_{q-1}(C') \\ [z''_q] &\mapsto \delta_q [z''_q] := [c'_{q-1}]. \end{aligned} \quad (11.3)$$

2. Verifichiamo che la δ_q non dipende:

- (a) dalla scelta della controimmagine c_q ;
- (b) dalla scelta del rappresentante z''_q .

- (a) sia $\bar{c}_q \in C_q$ tale che $g_q(\bar{c}_q) = g_q(c_q) = z''_q$. Allora $g_q(\bar{c}_q - c_q) = 0$, dunque $\bar{c}_q - c_q \in \text{Ker } g_q = \text{Im } f_q$.

Sia $b'_q \in C'_q$ tale che $f_q(b'_q) = \bar{c}_q - c_q$. Applichiamo ai due membri ∂_q ; da una parte, sempre grazie alla commutatività, si ottiene

$$\partial_q(f_q(b'_q)) = f_{q-1}(\partial'_q b'_q).$$

Siano c'_{q-1}, \bar{c}'_{q-1} gli unici elementi di C'_{q-1} tali che $\partial_q c_q = f_{q-1}(c'_{q-1})$ e $\partial_q \bar{c}_q = f_{q-1}(\bar{c}'_{q-1})$. Allora

$$\partial_q \bar{c}_q - \partial_q c_q = f_{q-1}(\bar{c}'_{q-1}) - f_{q-1}(c'_{q-1}) = f_{q-1}(\bar{c}'_{q-1} - c'_{q-1}).$$

Per l'iniettività di f_{q-1} , si ha

$$\partial'_q b'_q = \bar{c}'_{q-1} - c'_{q-1},$$

ovvero $[\bar{c}'_{q-1}] = [c'_{q-1}]$ e quindi la definizione di δ_q non dipende dalla controimmagine di z''_q .

- (b) Sia $c_q \in C_q$ tale che $z''_q = g_q(c_q)$ e sia c'_{q-1} l'unico elemento di C'_{q-1} tale che $f_{q-1}(c'_{q-1}) = \partial_q c_q$. Quindi $\delta_q[z''_q] = [c'_{q-1}]$ quando si definisce δ_q a partire dal rappresentante z''_q .

Sia $\bar{z}''_q \in [z''_q]$, dunque $\bar{z}''_q = z''_q + \partial''_{q+1}c''_{q+1}$ per un certo $c''_{q+1} \in C''_{q+1}$.

Dato che g_{q+1} è suriettiva, esiste $c_{q+1} \in C_{q+1}$ tale che $c''_{q+1} = g_{q+1}(c_{q+1})$. Allora

$$\partial''_{q+1} c''_{q+1} = \partial''_{q+1}(g_{q+1}(c_{q+1})) = g_q(\partial_{q+1} c_{q+1}),$$

e dunque, poiché $z''_q = g_q(c_q)$, si ha

$$\bar{z}''_q = z''_q + g_q(\partial_{q+1} c_{q+1}) = g_q(c_q + \partial_{q+1} c_{q+1}).$$

Sia b'_{q-1} l'unico elemento di C'_{q-1} tale che $f_{q-1}(b'_{q-1}) = \partial_q(c_q + \partial_{q+1} c_{q+1})$. Quindi $\delta_q[z''_q] = [b'_{q-1}]$ quando si definisce δ_q a partire dal rappresentante \bar{z}''_q .

D'altro canto si ha $\partial_q(c_q + \partial_{q+1} c_{q+1}) = \partial_q c_q$. Per l'iniettività di f_{q-1} , si ha necessariamente $b'_{q-1} = c'_{q-1}$ e quindi la definizione di δ_q non dipende dalla scelta del rappresentante di $[z''_q]$.

3. Mostriamo che δ_q è un omomorfismo. Dati $z''_q, \bar{z}''_q \in C''_q$, siano c_q, \bar{c}_q tali che $g_q(c_q) = z''_q$ e $g_q(\bar{c}_q) = \bar{z}''_q$: essendo g_q un omomorfismo, si ha $g_q(c_q + \bar{c}_q) = z''_q + \bar{z}''_q$. Anche ∂_q è un omomorfismo

$$\partial_q(c_q + \bar{c}_q) = \partial_q c_q + \partial_q \bar{c}_q.$$

ed esistono un unico c'_{q-1} e un unico \bar{c}'_{q-1} tali che $f_{q-1}(c'_{q-1}) = \partial_q c_q$ e $f_{q-1}(\bar{c}'_{q-1}) = \partial_q \bar{c}_q$. Da qui, $f_{q-1}(c'_{q-1} + \bar{c}'_{q-1}) = \partial_q c_q + \partial_q \bar{c}_q = \partial_q(c_q + \bar{c}_q)$ e dunque, per definizione di somma tra classi, si ha

$$\delta_q([z''_q] + [\bar{z}''_q]) = \delta_q[z''_q + \bar{z}''_q] = [c'_{q-1} + \bar{c}'_{q-1}] = [c'_{q-1}] + [\bar{c}'_{q-1}] = \delta_q[z''_q] + \delta_q[\bar{z}''_q].$$

Resta da verificare l'esattezza della successione

$$\dots \xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(C') \xrightarrow{H_q(f)} H_q(C) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(C'') \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(C') \xrightarrow{H_{q-1}(f)} \dots$$

Mostriamo l'esattezza in $H_q(C'')$, lasciando per esercizio la dimostrazione dell'esattezza in $H_q(C)$ e $H_q(C')$:

- ($\text{Im } H_q(g) \subseteq \text{Ker } \delta_q$) Sia $z_q \in H_q(C)$ un ciclo (quindi $\partial_q z_q = 0$) tale che $[z''_q] = H_q(g)[z_q] = [g_q(z_q)]$. Allora

$$\delta_q[z''_q] = \delta_q[g_q(z_q)] = [0],$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto alla definizione di δ_q , scegliendo z_q come controimmagine di $g_q(z_q)$, osservando che $\partial_q z_q = 0$ e sfruttando ancora una volta l'iniettività di f_{q-1} .

- ($\text{Im } H_q(g) \supseteq \text{Ker } \delta_q$) Sia $[z_q''] \in \text{Ker } \delta_q$. Ciò significa che esiste $z_q \in C_q$ tale che $g_q(z_q) = z_q''$ e tale che $\partial z_q = f_{q-1}(c'_{q-1})$ per un certo c'_{q-1} omologo a 0. Avremo quindi $c'_{q-1} = \partial'_q c'_q$. Utilizzando ancora la commutatività del diagramma si ottiene

$$\partial_q z_q = f_{q-1}(c'_{q-1}) = \partial_q(f_q(c'_q))$$

o equivalentemente $\partial_q(z_q - f_q(c'_q)) = 0$. Quindi $z_q - f_q(c'_q)$ è un ciclo e si ha

$$\begin{aligned} H_q(g)[z_q - f_q(c'_q)] &= [g_q(z_q - f_q(c'_q))] \\ &= [g_q(z_q) - g_q(f_q(c'_q))] \\ &= [g_q(z_q) - 0] \\ &= [g_q(z_q)] \\ &= [z_q''] \end{aligned}$$

dove si ha $g_q(f_q(c'_q)) = 0$ per via dell'esattezza delle righe della successione di complessi.

□

Osservazione 11.3.2. *Nel caso specifico dell'omologia della coppia il morfismo di connessione ha un'interpretazione molto semplice. Se $z \in Z_q(X, A)$ avremo:*

$$\delta_q[z] = [\partial_q z].$$

Esempio 11.3.3. *Consideriamo il disco \mathbb{D}^n e l'inclusione canonica $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$. Scriviamo una parte della successione esatta lunga della coppia $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$:*

$$\dots H_q(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{H_q(\pi)} H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_{q-1}(i)} H_{q-1}(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{H_{q-1}(\pi)} H_{q-1}(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \dots$$

Per l'invarianza omotopica dell'omologia singolare si ha che $H_q(\mathbb{D}^n) = 0$ per $q \neq 0$ e $H_0(\mathbb{D}^n) = \mathbb{Z}$. Quindi per $q \geq 2$ avremo

$$\dots 0 \longrightarrow H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_{q-1}(i)} 0 \dots$$

che, per l'esattezza della successione, implica che $H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Vedremo nei prossimi capitoli come calcolare $H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

Per $q = 1$, ricordando che $H_0(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$ per via della Proposizione 11.2.13, otteniamo la successione seguente

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta_1} H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(\mathbb{D}^n) \longrightarrow 0$$

e discutiamo i vari casi a seconda del valore di n .

Per $n \geq 2$ si ha che \mathbb{S}^n e \mathbb{D}^n sono connessi, ossia $H_0(\mathbb{D}^n) \cong \mathbb{Z} \cong H_0(\mathbb{S}^{n-1})$. La successione diventa allora

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{H_0(i)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ed è spezzante perché \mathbb{Z} è libero e quindi ne deduciamo che $H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$.

Per $n = 1$ invece si ha $H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e quindi, ancora per il fatto che la successione è spezzante si ottiene

$$H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}.$$

Applicazione ai retratti

Supponiamo che A sia un retratto di X e siano i ed r rispettivamente l'inclusione canonica e una retrazione. Si ha quindi $r \circ i = id_A$ e per la funtorialità di H_q otteniamo

$$H_q(r) \circ H_q(i) = id_{H_q(A)}.$$

Quindi $H_q(r)$ è suriettiva e $H_q(i)$ è iniettiva. Consideriamo allora la seguente parte della successione esatta della coppia

$$H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(\pi)} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A) \xrightarrow{H_q(i)} \dots$$

Per l'esattezza in $H_q(X, A)$ e per l'injectività di $H_q(i)$ abbiamo $\text{Im } \delta_q = \ker H_q(i) = 0$. Quindi possiamo riscrivere il tratto della successione come segue

$$0 \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(\pi)} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} 0.$$

Siccome abbiamo la relazione $H_q(r) \circ H_q(i) = id_{H_q(A)}$, il Lemma 11.1.11 implica che la successione è spezzante e quindi avremo

$$H_q(X) \cong H_q(A) \oplus H_q(X, A). \quad (11.4)$$

Possiamo applicare quanto appena dimostrato al calcolo di $H_q(X, x_0)$ dove x_0 è un punto di X . Poiché abbiamo la retrazione ovvia $r : X \rightarrow \{x_0\}$, otteniamo

$$H_q(X) \cong H_q(x_0) \oplus H_q(X, x_0).$$

Ricordando che tutti i gruppi di omologia del punto sono banali tranne lo 0-esimo si ottiene che $H_q(X) \cong H_q(X, x_0)$ per $q \geq 1$. Per $q = 0$ abbiamo $H_0(X, x_0)$ è isomorfo alla somma diretta di tante copie di \mathbb{Z} quante sono le componenti connesse per archi che non intersecano x_0 , cioè tutte meno una. Ma questo vale anche per lo 0-esimo gruppo di omologia ridotta di X e quindi in sintesi si ottiene

$$H_q(X, x_0) \cong \tilde{H}_q(X).$$

11.4 Esercizi

Esercizio 11.1. *Si dimostri la Proposizione 11.1.4.*

Esercizio 11.2. *Si dimostri la Proposizione 11.1.6.*

Esercizio 11.3. *Si dimostri che il quoziente di un gruppo abeliano rispetto al suo sottogruppo di torsione ha torsione banale.*

Esercizio 11.4. *Si dia un esempio di quoziente di un gruppo abeliano libero, che non sia libero.*

Esercizio 11.5. *Si concluda la dimostrazione del Lemma dello zig-zag, dimostrando l'esattezza della successione in $H_q(C)$ e $H_q(C')$.*

Capitolo 12

L'omomorfismo di Hurewicz

In questo capitolo mostreremo il legame tra gruppo fondamentale e primo gruppo di omologia singolare. Abbiamo già visto che un laccio in uno spazio topologico determina un 1-ciclo. Mostreremo che questa associazione determina in realtà un omomorfismo chiamato *omomorfismo di Hurewicz*.

Inizieremo col dimostrare alcune proprietà generali che riguardano i cammini. Per semplificare le notazioni, per dire che due cammini $f, g : I \rightarrow X$ sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$ scriveremo semplicemente $f \sim g$, mentre scriveremo $f \simeq g$ per dire che $f - g = \partial c$ (anche nel caso in cui f e g non siano cicli).

Proposizione 12.0.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. Se f è il cammino costante allora $f \simeq 0$;
2. se $f \sim g$ allora $f \simeq g$;
3. se f e g sono cammini tali che $f(1) = g(0)$ allora $f \cdot g - f - g$ è un ciclo e si ha $f \cdot g \simeq f + g$.

Dimostrazione. 1. Se f è l'1-simplesso costante tale che $f(t_0, t_1) = x \in X$, allora consideriamo il 2-simplesso costante σ tale che $\sigma(t_0, t_1, t_2) = x$. Calcolando il bordo di σ si ottiene

$$\partial\sigma = f - f + f = f,$$

e quindi f è un bordo.

2. se $f \sim g$, sia F l'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra f e g . Consideriamo l'applicazione continua $Q : I \times I \rightarrow \Delta_2$ definita come segue

$$Q(s, t) = (1 - t)[(1 - s)E_0 + sE_1] + t[(1 - s)E_0 + sE_2].$$

Per s fissato, l'immagine di $Q(s, t)$ è il segmento che unisce i punti $[(1 - s)E_0 + sE_1]$ $[(1 - s)E_0 + sE_2]$.

Si osservi che Q è un'identificazione, che per $s = 0$ si ha $Q(0, t) = E_0$, mentre per $s \neq 0$ la Q è iniettiva. Questo implica che F passa al quoziente rispetto Q e quindi esiste un unico $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$ tale che $\sigma \circ Q = F$.

Calcolando il bordo di σ si ottiene

$$\partial\sigma = f(1) - g + f$$

e poichè $f(1)$ è un bordo per la proprietà precedente si ha $f - g \simeq 0$.

3. Siano f e g cammini tali che $f(1) = g(0)$. La verifica che $f \cdot g - f - g$ è un ciclo è immediata ed è lasciata per esercizio.

Sia ora $p : \Delta_2 \rightarrow [E_0, E_2]$ la proiezione ortogonale sul lato $[E_0, E_2]$ del simpleso Δ_2 .

Sia $\gamma : [E_0, E_2] \rightarrow X$ definita da $\gamma[(1 - t)E_0 + tE_1] := f \cdot g(t)$. Definiamo un 2-simpleso $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$ come segue

$$\sigma := \gamma \circ p.$$

Si verifica facilmente che si ha

$$\partial\sigma = g - f \cdot g + f$$

e quindi l'asserto. □

Osservazione 12.0.2. *Dalle Proprietà 1 e 3 si deduce che se f è un cammino e $i(f)$ il cammino inverso, allora si ha $f + i(f) \simeq 0$.*

Per via delle proprietà dimostrate sopra è possibile definire una applicazione

$$h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

come $h(\alpha) = [c(\alpha)]$, dove $c(\alpha)[(1 - t)E_0 + tE_1] = \alpha(t)$.

Per un simpleso σ definiamo il cammino $\bar{c}(\sigma)$ come l'unico cammino tale che $\bar{c}(\sigma)(t) = \sigma(1 - t, t)$. Ovviamente si ha $c(\bar{c}(\sigma)) = \sigma$ e $\bar{c}(c(\alpha)) = \alpha$.

La Proposizione 12.0.1 ci assicura che h è ben definita e che si tratta di un omomorfismo di gruppi, chiamato *omomorfismo di Hurewicz*.

Il seguente risultato ci fornisce il legame tra il primo gruppo di omologia e il gruppo fondamentale di uno spazio connesso per archi:

Teorema 12.0.3 (Teorema di Hurewicz). *Se X è uno spazio topologico connesso per archi allora l'omomorfismo h è suriettivo e si ha che $\text{Ker } h$ coincide con il sottogruppo dei commutatori di $\pi_1(X)$ e quindi $H_1(X)$ è l'abelianizzato del gruppo fondamentale di X .*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto la suriettività di h . Per far questo scegliamo per ogni $x \in X$ un cammino da x_0 (il punto base scelto per il gruppo fondamentale) a x e denotiamolo con l_x . Per il punto base scegliamo il cammino costante, cioè $l_{x_0} = \epsilon_{x_0}$.

Ad un 1-simplesso σ associamo il laccio basato in x_0 definito come segue

$$l(\sigma) := l_{\sigma(E_0)} \cdot \bar{c}(\sigma) \cdot i(l_{\sigma(E_1)}).$$

Si osservi che per un laccio α basato in x_0 si ha

$$l(c(\alpha)) = l_{x_0} \cdot \alpha \cdot i(l_{x_0}) \sim \alpha.$$

Poiché h è un omomorfismo, se $\tau = h(\alpha)$ allora $n\tau = h(\alpha^n)$ per un qualunque intero n . Quindi, anziché trovare la controimmagine di cicli della forma $\sum n_i \sigma_i$, sarà sufficiente cercarla per cicli del tipo $\sum \sigma_i$ dove i σ_i sono semplici singolari.

Se $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ è un ciclo allora si ha $\sum_{i=1}^k (\sigma_i(E_1) - \sigma_i(E_0)) = 0$. Allora per σ_1 esisterà un certo σ_{i_0} che ha lo stesso estremo iniziale o finale di uno dei due estremi di σ_1 . Si può quindi considerare la concatenazione $\sigma_1 \cdot \sigma_{i_0}$ (o $\sigma_{i_0} \cdot \sigma_1$ a seconda di quali estremi coincidono). Per la Proposizione 12.0.1 avremo $\sigma_1 + \sigma_{i_0} \simeq \sigma_1 \cdot \sigma_{i_0}$ e quindi nel ciclo $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ è possibile sostituire $\sigma_1 + \sigma_{i_0}$ con $\sigma_1 \cdot \sigma_{i_0}$ ottenendo un ciclo che è omologo alla somma di $k - 1$ semplici. Continuando con lo stesso ragionamento si ha che il ciclo $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ è omologo a un 1-simplesso σ tale che $\sigma(E_1) = \sigma(E_2) = x$.

Possiamo ora considerare il laccio basato in x_0 dato da

$$l(\sigma) = l_x \cdot \bar{c}(\sigma) \cdot i(l_x)$$

per il quale abbiamo $h(l(\sigma)) \simeq \sigma$ e questo mostra la suriettività di h .

Per mostrare la seconda parte del teorema osserviamo che, poichè $H_1(X)$ è abeliano, $\text{Ker } h$ contiene il sottogruppo dei commutatori di $\pi_1(X, x_0)$. Resta quindi definito un omomorfismo suriettivo

$$\tilde{h} : \pi_1(X, x_0)_{ab} \rightarrow H_1(X).$$

Vogliamo dimostrare che \tilde{h} è un isomorfismo e per far questo dimostriamo che è iniettiva, costruendo una inversa sinistra.

Sia $l : S_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)_{ab}$ l'estensione lineare (si veda la Proposizione 11.1.4) dell'applicazione l definita precedentemente per gli 1-simplessi singolari. Denotiamo con $[x]$ gli elementi di $\pi_1(X, x_0)_{ab}$ e ricordiamo che per ogni coppia di lacci α e β , si ha $[\alpha \cdot \beta] = [\alpha] + [\beta]$.

Dimostriamo che $B_1(X) \subset \text{Ker } l$. Per far ciò è sufficiente verificarlo per il bordo dei 2-simplessi. Per un generico 2-simpleso σ avremo:

$$\begin{aligned}
 l(\partial\sigma) &= l(\sigma_{[E_1, E_2]} - \sigma_{[E_0, E_2]} + \sigma_{[E_0, E_1]}) \\
 &= [l_{\sigma(E_1)} \cdot \sigma_{[E_1, E_2]} \cdot i(l_{\sigma(E_2)})] - [l_{\sigma(E_0)} \cdot \sigma_{[E_0, E_2]} \cdot i(l_{\sigma(E_2)})] + [l_{\sigma(E_0)} \cdot \sigma_{[E_0, E_1]} \cdot i(l_{\sigma(E_1)})] \\
 &= [l_{\sigma(E_0)} \cdot \sigma_{[E_0, E_1]} \cdot i(l_{\sigma(E_1)})] + [l_{\sigma(E_1)} \cdot \sigma_{[E_1, E_2]} \cdot i(l_{\sigma(E_2)})] - [l_{\sigma(E_0)} \cdot \sigma_{[E_0, E_2]} \cdot i(l_{\sigma(E_2)})] \\
 &= [l_{\sigma(E_0)} \cdot \sigma_{[E_0, E_1]} \cdot \sigma_{[E_1, E_2]} \cdot i(\sigma_{[E_0, E_2]}) \cdot i(l_{\sigma(E_0)})] \\
 &= [l_{\sigma(E_0)} \cdot \sigma_{\partial\Delta_2} \cdot i(l_{\sigma(E_0)})] \\
 &= [\text{costante}] = 0,
 \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\sigma_{[E_0, E_1]} \cdot \sigma_{[E_1, E_2]} \cdot i(\sigma_{[E_0, E_2]}) = \sigma_{\partial\Delta_2}$ e che $\sigma_{\partial\Delta_2}$ è omotopo al laccio costante perchè è una applicazione della circonferenza (il bordo di Δ_2) in X che si estende al disco Δ_2 (si veda Proposizione 1.3.6).

Quanto dimostrato implica l'esistenza di un omomorfismo

$$\tilde{l} : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)_{ab}.$$

Per quanto osservato precedentemente per un laccio α basato in x_0 si ha $l(h(\alpha)) \simeq \alpha$ e quindi avremo $\tilde{l} \circ \tilde{h} = id$, cioè \tilde{l} è inversa a sinistra di \tilde{h} .

□

Capitolo 13

Il teorema di escissione e la successione di Mayer-Vietoris

Sia X uno spazio topologico e \mathcal{U} un ricoprimento aperto. Sia $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ il gruppo abeliano libero generato dai q -simplessi singolari $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ tali che $\sigma(\Delta_q)$ sia contenuto in qualche aperto di \mathcal{U} .

Poiché il bordo di un semplice singolare con immagine contenuta in qualche aperto di \mathcal{U} è una catena formata da simplessi con immagine in \mathcal{U} , $\{S^{\mathcal{U}}(X), \partial\}$ è un complesso di catene chiamato *complesso delle catene \mathcal{U} -piccole*. Si definisce il *complesso ridotto delle catene \mathcal{U} -piccole* come $\tilde{S}_q^{\mathcal{U}}(X) = S_q^{\mathcal{U}}(X) \cap \tilde{S}_q(X)$.

Utilizzando un procedimento detto di *suddivisione baricentrica* dei simplessi si dimostra il seguente risultato per la cui dimostrazione rimandiamo a [4]:

Teorema 13.0.1. *Le inclusioni $S^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S(X)$ e $\tilde{S}^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \tilde{S}(X)$ sono dei morfismi di catene che inducono isomorfismi in omologia.*

Dati due complessi di catene $C = \{(C_i, \partial_i)\}$ e $C' = \{(C'_i, \partial'_i)\}$: possiamo definire un nuovo complesso di catene

$$C \oplus C' = \{(C_i \oplus C'_i, \partial_i \oplus \partial'_i)\}, \quad (13.1)$$

dove

$$(\partial_i \oplus \partial'_i)(c \oplus c') = \partial_i(c) \oplus \partial'_i(c').$$

Consideriamo ora il caso in cui abbiamo un ricoprimento aperto di X formato da due aperti U, V . Avremo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_U} & U \\ i_V \downarrow & & \downarrow j_U \\ V & \xrightarrow{j_V} & X \end{array}$$

A livello di catene si ottiene quindi il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S(U \cap V) & \xrightarrow{S(i_U)} & S(U) \\ S(i_V) \downarrow & & \downarrow S(j_U) \\ S(V) & \xrightarrow{S(j_V)} & S(X) \end{array}$$

da cui otteniamo le successione esatta corta di complessi di catene

$$0 \longrightarrow S(U \cap V) \xrightarrow{(S(i_U), -S(i_V))} S(U) \oplus S(V) \xrightarrow{S(i_U) + S(i_V)} S^u(X) \longrightarrow 0 \quad (13.2)$$

Enunciamo dunque il

Teorema 13.0.2 (Successione di Mayer-Vietoris). *Dato uno spazio topologico X , se X_1 e X_2 sono due suoi sottospazi tali che $X = \text{Int}X_1 \cup \text{Int}X_2$, le seguenti successioni sono esatte*

$$\cdots \rightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\Phi_q} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\Psi_q} H_q(X) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\Phi_q} \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \xrightarrow{\Psi_q} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots$$

dove in entrambe

- δ_q è il morfismo di connessione definito nel Lemma 11.3.1;
- $\Phi_q = (H_q(i_U), -H_q(i_V))$;
- $\Psi_q = H_q(j_U) + H_q(j_V)$.

Dimostrazione. È sufficiente applicare il Lemma 11.3.1 alla successione esatta corta 13.2 e tener conto del Teorema 13.0.1 che assicura l'isomorfismo tra $H^u(X)$ e $H(X)$. Allo stesso modo si ottiene la successione per l'omologia ridotta. \square

Osservazione 13.0.3. *Il Teorema 13.0.1, nel caso di un ricoprimento formato da due aperti U e V , ci dice che per ogni classe $[z] \in H_q(X)$ esiste un rappresentante della forma $z = c + d$, dove c e d sono rispettivamente in $S_q(U)$ e $S_q(V)$. Poichè z è un ciclo si ha che $\partial c = -\partial d \in S_{q-1}(U \cap V)$. Ricordando la definizione di morfismo di connessione dato nel Lemma 11.3.1 si vede che $\delta[z] = [\partial c]$.*

13.0.1 Omologia della sfera

Vogliamo dimostrare che l'omologia ridotta della sfera è data da

$$\tilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La dimostrazione si fa per induzione su n .

Per $n = 0$ abbiamo che S_0 ha due componenti connesse, quindi $\tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$.

In più, sfruttando la Proposizione 10.2.10, si vede che

$$\tilde{H}_q(S^0) = \tilde{H}_q(\{-1, 1\}) = \tilde{H}_q(-1) \oplus \tilde{H}_q(1) = 0,$$

per ogni $q \neq 0$. Abbiamo dunque la base dell'induzione.

L'ipotesi induttiva è la seguente

$$\tilde{H}_q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = n - 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Scriviamo S^n come unione dei due aperti

$$E_+ = \left\{ x \in S^n \mid x_{n+1} > -\frac{1}{2} \right\},$$

$$E_- = \left\{ x \in S^n \mid x_{n+1} < \frac{1}{2} \right\}.$$

Ognuno dei due aperti è omeomorfo al disco D^n , dunque entrambi sono omeotopi al punto e la loro omologia ridotta è banale.

Poiché i due aperti E_+ e E_- hanno omologia ridotta banale, la successione di Mayer-Vietoris

$$\rightarrow \tilde{H}_q(E_+) \oplus \tilde{H}_q(E_-) \xrightarrow{\Psi_q} \tilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(E_+ \cap E_-) \xrightarrow{\Phi_q} \tilde{H}_{q-1}(E_+) \oplus \tilde{H}_{q-1}(E_-) \rightarrow$$

si riduce per ogni q alla successione esatta corta

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(E_+ \cap E_-) \rightarrow 0 \quad (13.3)$$

e quindi il morfismo di connessione è un isomorfismo. Inoltre si ha che $S^{n-1} \subset E_+ \cap E_-$ è un retratto di deformazione forte (verificare!) di $E_+ \cap E_-$ e si ha

$$\tilde{H}_{q-1}(E_+ \cap E_-) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}).$$

Dunque la 13.3 diventa

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0,$$

da cui $\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$. Ora, per ipotesi induttiva

$$\tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q-1 = n-1, \text{ i.e. se } q = n \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

il che conclude la dimostrazione.

Corollario 13.0.4. *La sfera \mathbb{S}^n è omotopicamente equivalente alla sfera \mathbb{S}^m se e solo se $m = n$.*

Dimostrazione. Se $m = n$ le sfere sono omeomorfe e quindi omotopicamente equivalenti. Viceversa se \mathbb{S}^n è omotopicamente equivalente alla sfera \mathbb{S}^m allora si deve avere $\mathbb{Z} \cong \tilde{H}_n(S^n) \cong \tilde{H}_n(S^m)$. ma questo può accadere solo se $m = n$. \square

Confrontando l'omologia ridotta del punto e quella della sfera si ottiene facilmente il seguente corollario:

Corollario 13.0.5. *La sfera \mathbb{S}^n non è contraibile.*

Utilizzando l'omologia della sfera e l'Esempio 11.3.3 è ora possibile terminare il calcolo dell'omologia della coppia $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, ottenendo quanto segue:

$$H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

13.0.2 Applicazioni

Possiamo utilizzare l'omologia della sfera appena calcolata per dimostrare in tutta generalità il Teorema del punto fisso di Brower. Per far questo occorre dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 13.0.6. *La sfera non è un retratto del disco.*

Dimostrazione. Se la sfera fosse un retratto del disco, per la 11.4 nel caso $q = n-1$ si avrebbe

$$H_{n-1}(\mathbb{D}^n) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \oplus H_{n-1}(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}),$$

ma il primo membro è il gruppo banale, mentre il secondo membro contiene il sottogruppo non banale $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. \square

Teorema 13.0.7 (Teorema del punto fisso di Brower). *Sia $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ continua. Allora f ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non abbia punti fissi. Allora argomentando come nel caso $n = 2$ (si veda Teorema 4.2.5) possiamo definire un'applicazione $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ che al punto $x \in D^n$ associa l'intersezione della semiretta affine di \mathbb{R}^n con origine in x e vettore direttore $x - f(x)$, con la frontiera di D^n (cioè S^{n-1}). Tale funzione è continua ed è una retrazione del disco sulla sfera e questo è assurdo per la Proposizione 13.0.6 \square

13.0.3 Un generatore di $H_1(\mathbb{S}^1)$

Abbiamo dimostrato che nella successione di Mayer-Vietoris della sfera il morfismo di connessione è un isomorfismo. Consideriamo ora il caso particolare di \mathbb{S}^1 .

Poichè $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \cong \tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}$, il morfismo di connessione δ_1 invia un generatore di $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^1)$ in un generatore di $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0)$.

Ricordiamo che $H_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}[\sigma_{-1}] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_1]$, dove σ_1 e σ_{-1} sono gli unici 0-simplessi con immagine rispettivamente 1 e -1 . Dalla definizione di $\partial_{\#}$ si deduce facilmente che $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0)$ è generato da $[\sigma_{-1} - \sigma_1]$.

Ora consideriamo i due seguenti 1-simplessi di \mathbb{S}^1 (definiti in coordinate baricentriche):

$$\sigma(t_0, t_1) = \exp^{\pi i t_1}, \quad \tau(t_0, t_1) = -\exp^{\pi i t_1}.$$

Si verifica immediatamente che $\sigma + \tau$ è un ciclo.

Se applichiamo il morfismo di connessione δ_1 alla classe di omologia $[\sigma + \tau]$ e otteniamo

$$\begin{aligned} \delta_1[\sigma + \tau] &= [\partial\sigma] \\ &= [\sigma_{-1} - \sigma_1]. \end{aligned}$$

Questo mostra che la classe $[\sigma + \tau]$ è controimmagine del generatore $[\sigma_{-1} - \sigma_1]$ tramite l'isomorfismo δ_1 e quindi genera $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^1)$.

Osservazione 13.0.8. *Per le proprietà dell'omomorfismo di Hurewicz la concatenazione $\sigma\tau$ è omologa a $\sigma + \tau$ e quindi è anch'essa un generatore.*

13.0.4 Omologia delle superfici compatte

Prima di calcolare l'omologia delle superfici compatte, utilizziamo la successione esatta di Mayer-Vietoris per calcolare l'omologia del bouquet di due spazi.

Consideriamo due spazi puntati, cioè due coppie (X, x_0) e (Y, y_0) dove X, Y sono spazi topologici e $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Sull'unione disgiunta dei due spazi consideriamo la (più piccola) relazione di equivalenza che identifica ogni punto con se stesso e x_0 con y_0 . Lo spazio quoziente rispetto a tale relazione verrà indicato con $X \vee Y$ e sarà detto *bouquet* di X e Y . Sia π la proiezione sul quoziente.

Supponiamo che esista in X un intorno aperto U di x_0 tale che x_0 sia un retrato forte di deformazione di U e in Y un intorno aperto V di y_0 tale che y_0 sia un retrato forte di deformazione di V . Diremo che gli spazi sono *ben puntati*.

Proposizione 13.0.9. *Se (X, x_0) e (Y, y_0) sono ben puntati allora per ogni q si ha:*

$$\tilde{H}_q(X \vee Y) \cong \tilde{H}_q(X) \oplus \tilde{H}_q(Y).$$

Dimostrazione. Consideriamo gli aperti di $X \vee Y$ definiti come segue:

$$A := \pi(X \cup V), \quad B := \pi(U \cup Y).$$

L'aperto A si ritrae per deformazione forte su $\pi(X) \cong X$, l'aperto B si ritrae per deformazione forte su $\pi(Y) \cong Y$, mentre l'aperto $A \cap B$ si ritrae per deformazione forte su $\pi(x_0) = \pi(y_0)$ (si veda Esercizio 13.3).

Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris per $A \cup B = X \vee Y$, tenendo conto delle considerazioni precedenti si ottiene immediatamente l'asserto. \square

Osservazione 13.0.10. *La definizione di bouquet si estende facilmente al caso di un numero finito di spazi topologici puntati. Se tutti gli spazi sono ben puntati vale la proposizione precedente.*

Esempio 13.0.11. *Utilizzando la proposizione precedente si ottiene*

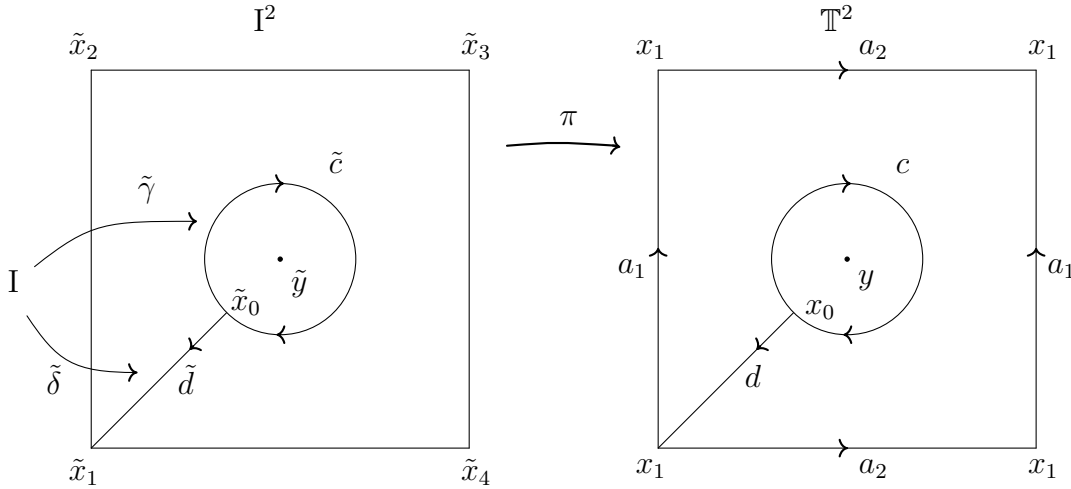
$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allo stesso modo si può calcolare l'omologia del bouquet di n circonferenze.

13.0.5 Omologia del toro bidimensionale

Per il calcolo dell'omologia del toro utilizzeremo le stesse notazioni utilizzate nell'Esempio 7.4.2.

Pensiamo al toro \mathbb{T}^2 come al quadrato I^2 con i lati identificati come in figura e sia $\pi : I^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la proiezione sul quoziente.



Siano $\tilde{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in I^2$, $y = \pi(\tilde{y}) \in \mathbb{T}^2$, $\tilde{U}_1 = I^2 \setminus \{\tilde{y}\}$ e $\tilde{U}_2 = \text{Int}(I^2)$. I due aperti del toro $U_1 = \pi(\tilde{U}_1) = \mathbb{T}^2 \setminus \{y\}$ e $U_2 = \pi(\tilde{U}_2) = \mathbb{T}^2 \setminus \{a_1 \cup a_2\}$ ricoprono il toro. La loro intersezione è l'aperto $U_1 \cap U_2 = \mathbb{T}^2 \setminus \{y \cup a_1 \cup a_2\}$ di \mathbb{T}^2 . Sia $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Sia $\tilde{\delta} : I \rightarrow I^2$ l'arco nel quadrato I^2 che si ottiene percorrendo il segmento di retta \tilde{d} che unisce \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 , dove \tilde{x}_0 è l'unico punto di I^2 tale che $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$. Siano $\delta : I \rightarrow \mathbb{T}^2$, $\delta = \pi \circ \tilde{\delta}$ e $d = \pi(\tilde{d})$ le loro immagini nel quoziente.

L'aperto U_2 è contraibile e quindi avremo $\tilde{H}_q(U_2) = 0$ per ogni $q \geq 0$.

L'aperto U_1 si ritrae per deformazione forte sul bouquet di due circonferenze e quindi $\tilde{H}_q(U_1) = 0$ per ogni $q \geq 2$, $\tilde{H}_0(U_1) = 0$ e $\tilde{H}_1(U_1) = \mathbb{Z}[a_1] \oplus \mathbb{Z}[a_2]$, dove a_1 e a_2 sono i lacci (visti come 1-simplessi singolari) immagine dei lati del quadrato.

Poiché $U_1 \cap U_2$ si ritrae per deformazione forte sulla circonferenza c immagine della circonferenza \tilde{c} centrata in \tilde{y} e passante per \tilde{x}_0 , si avrà $\tilde{H}_q(U_1 \cap U_2) = 0$ per ogni $q \neq 1$ e $\tilde{H}_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{Z}[b]$, dove b è il laccio basato in x_0 che fa un giro della circonferenza in senso antiorario.

La successione di Mayer-Vietoris per l'omologia ridotta per il ricoprimento del toro dato da $\{U_1, U_2\}$ sarà:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\Phi_q} \tilde{H}_q(U_1) \oplus \tilde{H}_q(U_2) \xrightarrow{\Psi_q} \tilde{H}_q(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \cdots$$

Per le osservazioni precedenti, se $q \geq 3$, ogni porzione della successione si riduce come segue:

$$0 \xrightarrow{\Phi_q} 0 \xrightarrow{\Psi_q} \tilde{H}_q(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\delta_q} 0,$$

da cui deduciamo che $\tilde{H}_q(\mathbb{T}^2) = 0$ per ogni $q \geq 3$. Sappiamo inoltre che $\tilde{H}_0(\mathbb{T}^2) = 0$ poiché il toro è connesso per archi.

Resta quindi da analizzare la seguente porzione della successione:

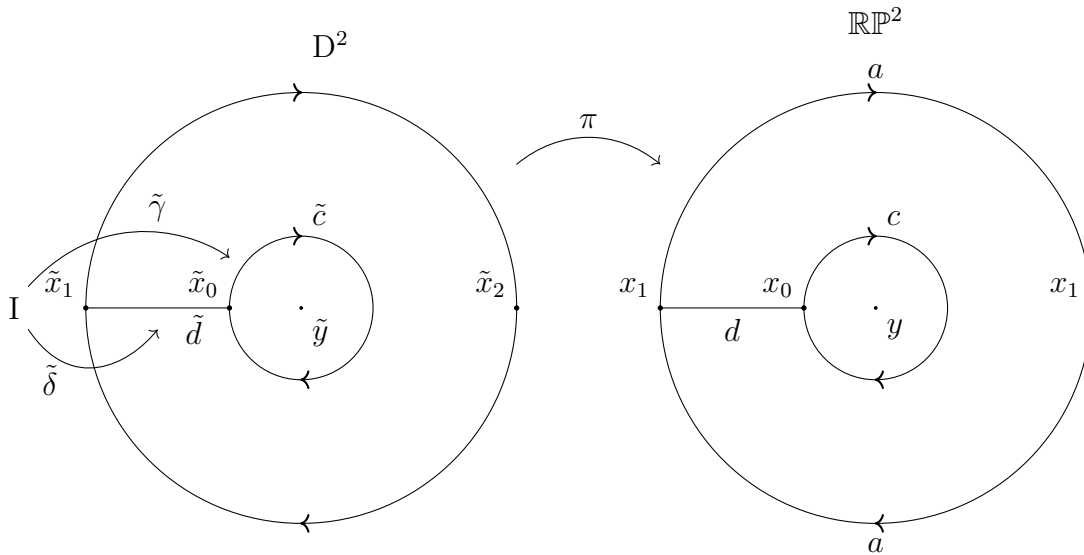
$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\delta_2} \tilde{H}_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\Phi_1} \tilde{H}_1(U_1) \oplus \tilde{H}_1(U_2) \xrightarrow{\Psi_1} \tilde{H}_1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\delta_1} 0.$$

Ricordiamo che $\Phi_1 = (H_1(i_{U_1}), -H_1(i_{U_2}))$ e che $\Psi_1 = H_1(j_{U_1}) + H_1(j_{U_2})$. Per calcolare Φ_1 sarà sufficiente calcolare l'immagine del generatore b . gli omomorfismi $H_1(i_{U_1})$ e $H_1(i_{U_2})$ sono indotti dalle inclusioni e quindi occorre calcolare la classe di omologia di b in $H_1(U_1)$ e in $H_1(U_2)$. Dato che $H_1(U_2) = 0$ si ha che $H_1(i_{U_2})$ è il morfismo nullo. Resta quindi da determinare la classe di omologia di b in $H_1(U_1)$.

Il laccio b è omologo a $\delta + i(\delta) + b$ (Osservazione 12.0.2) che è omologo alla concatenazione $i(\delta) \cdot b \cdot \delta$ per la Proposizione 12.0.1. Il laccio $i(\delta) \cdot b \cdot \delta$ è omotopo relativamente a $\{0, 1\}$ al laccio $a_1 \cdot a_2 \cdot (a_1)^{-1} \cdot (a_2)^{-1}$ che è omologo alla catena $a_1 + a_2 - a_1 - a_2 = 0$. Questo implica che $H_1(i_{U_1})$ è l'omomorfismo nullo e quindi anche Φ_1 è l'omomorfismo nullo. Allora nella successione esatta δ_2 e Ψ_1 sono isomorfismi e in conclusione si ha $\tilde{H}_2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}$ e $\tilde{H}_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

13.0.6 Omologia delle superfici compatte

Ragionamento come nel calcolo dell'omologia del toro, utilizzando la seguente presentazione poligonale del piano proiettivo reale, si calcolano facilmente i suoi gruppi di omologia.



Si ottiene quanto segue:

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}P^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il ragionamento per le superfici compatte è del tutto analogo ai casi precedenti se si utilizzano le presentazioni poligonali usuali viste nel Capitolo 8. I gruppi di grado superiore a due, come nel caso del toro, sono banali. Separatamente si analizza la parte finale della successione di Mayer-Vietoris e si trovano le immagini dei generatori tramite i morfismi δ_2 , Φ_1 e Ψ_1 . Per far questo basta osservare che il quoziente del poligono meno il centro si ritrae sul bouquet di un certo numero di circonferenze, e applicare l'Esercizio 13.5.

Per la superficie orientabile di genere g si ottiene quanto segue:

$$\tilde{H}_q(g\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{2g-\text{volte}}, & \text{se } q = 1, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } q = 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per la superficie non orientabile di genere g si ottiene:

$$\tilde{H}_q(g\mathbb{R}P^2) = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{(g-1)-\text{volte}}, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

13.1 Escissione

Siano (X, A) e (Y, B) coppie formate da uno spazio topologico e un suo sottospazio.

Definizione 13.1.1. *Un morfismo di coppie $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è una applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ tale che $f(A) \subset B$.*

Se $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è un morfismo di coppie si ha $S_q(f)(S_q(A)) \subset S_q(B)$ e quindi risultano ben definiti i morfismi

$$\tilde{S}_q(f) : S_q(X, A) \rightarrow S_q(Y, B)$$

con $\tilde{S}_q(f)([c]) = [S_q(f)(c)]$. Si verifica facilmente che i $\tilde{S}_q(f)$ sono morfismi di catene e quindi inducono dei morfismi in omologia

$$H_q(f) : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B).$$

Possiamo ora definire il concetto di *escissione*:

Definizione 13.1.2. *Data una coppia (X, A) e $U \subset A$, diremo che l'inclusione (di coppie)*

$$i : (X, A) \hookrightarrow (X \setminus U, A \setminus U)$$

è una escissione o che U può essere escisso se i morfismi indotti in omologia $H_q(i)$ sono isomorfismo per ogni q .

Il Teorema di Escissione ci fornisce una condizione sufficiente affinché un sottoinsieme possa essere escisso. Si rimanda a [4] per una dimostrazione

Teorema 13.1.3 (Teorema di Escissione). *Sia (X, A) una coppia e $U \subset A$ tale che $\bar{U} \subset \text{Int } A$. Allora l'inclusione*

$$i : (X, A) \hookrightarrow (X \setminus U, A \setminus U)$$

è una escissione.

Il teorema di escissione si può esprimere in modo equivalente come segue:

Teorema 13.1.4. *Per ogni coppia di sottospazi A e B di X tali che $X = \text{Int } A \cup \text{Int } B$, l'inclusione*

$$i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

è una escissione.

Mostriamo l'equivalenza dei due teoremi di escissione.

Siano A e B due sottospazi di X tali che $X = \text{Int } A \cup \text{Int } B$. Sia $U = X \setminus B$. Si ha $A \cap B = A \setminus U$, $B = X \setminus U$ e $X \setminus \text{Int } B \subset \text{Int } A$. Inoltre poichè $X \setminus \text{Int } B$ è un chiuso che contiene $X \setminus B$ abbiamo $\bar{U} = \overline{X \setminus B} \subset X \setminus \text{Int } B$. Quindi U si può escindere dalla coppia (X, A) e si ottiene che

$$i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

è una escissione.

Viceversa, se U è tale che $\bar{U} \subset \text{Int } A$, poniamo $B = X \setminus U$. Per le proprietà dell'interno e della chiusura di un insieme avremo

$$X = \text{Int } B \cup \overline{X \setminus B} = \text{Int } B \cup \bar{U} = \text{Int } B \cup \text{Int } A,$$

e questo implica che

$$i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

è una escissione. Poichè $B = X \setminus U$ e $A \cap B = X \setminus A$ abbiamo l'asserto.

13.1.1 Omologia locale e invarianza del dominio

Sia X è uno spazio topologico T_1 , $x \in X$ e V un intorno di x (cioè esiste un aperto U tale che $x \in U \subset V$).

Utilizzando le proprietà della chiusura e degli interni abbiamo

$$\overline{X \setminus V} = X \setminus \text{Int } V \subset X \setminus \{x\} = \text{Int}(X \setminus \{x\}),$$

dove l'ultima uguaglianza vale perchè i punti di X sono chiusi.

Allora $X \setminus V$ si può escindere e quindi si ha:

$$H_q(V, V \setminus \{x\}) \cong H_q(X, X \setminus \{x\}).$$

I gruppi $H_q(X, X \setminus \{x\})$ sono detti *gruppi di omologia locale in x* e danno delle informazioni topologiche locali sullo spazio considerato. Una applicazione importante è il seguente

Teorema 13.1.5 (Invarianza del Dominio). *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ aperti. Se U e V sono omeomorfi allora $m = n$.*

Dimostrazione. Sia $f : U \rightarrow V$ un omeomorfismo. Allora abbiamo $H_q(U, U \setminus \{x\}) \cong H_q(V, V \setminus \{f(x)\})$.

Per escissione si ottiene

$$H_q(U, U \setminus \{x\}) \cong H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Dalla successione esatta della coppia si ricava (verificare!)

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

e poichè \mathbb{S}^{n-1} è un retratto forte per deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ avremo

$$\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Riassumendo si ottiene

$$\tilde{H}_q(U, U \setminus \{x\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = n, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_q(V, V \setminus \{f(x)\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = m, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi perché U e V siano omeomorfi si deve necessariamente avere $n = m$. \square

13.2 Esercizi

Esercizio 13.1. *Utilizzando la successione esatta della coppia si dimostri che*

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Esercizio 13.2. *Si dimostri che una varietà topologica è ben puntata in ogni suo punto.*

Esercizio 13.3. *Siano (X, x_0) e (Y, y_0) due spazi ben puntati. Si dimostrino le affermazioni fatte nella dimostrazione della Proposizione 13.0.9*

Esercizio 13.4. *Si calcoli l'omologia del bouquet di n circonferenze.*

Esercizio 13.5. *Si calcoli l'omologia di $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3$.*

Esercizio 13.6. *Se (X, U, V) e (Y, U', V') soddisfano alle ipotesi per la successione di Mayer-Vietoris e $f : X \rightarrow Y$ è una applicazione continua tale che $f(U) \subset U'$ e $f(V) \subset V'$, indicheremo con $H_q(f)$ anche le indotte in omologia dalla restrizione di f a U , a V e a $U \cap V$. Si dimostri che la successione di Mayer-Vietoris è **naturale**, cioè che i seguenti diagrammi commutano*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & H_q(U \cap V) & \xrightarrow{\Phi_q} & H_q(U) \oplus H_q(V) & \xrightarrow{\Psi_q} & H_q(X) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(U \cap V) \dots \\
 & \downarrow H_q(f) & & \downarrow (H_q(f), H_q(f)) & & \downarrow H_q(f) & & \downarrow H_{q-1}(f) \\
 \dots & H_q(U' \cap V') & \xrightarrow{\Phi_q} & H_q(U') \oplus H_q(V') & \xrightarrow{\Psi_q} & H_q(Y) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(U' \cap V') \dots
 \end{array}$$

Capitolo 14

Il grado di un'applicazione

Data una funzione $f: S^n \rightarrow S^n$ continua, con $n \geq 1$, sappiamo che resta determinata per ogni q l'applicazione indotta in omologia che è un omomorfismo. In particolare, visto che i gruppi di omologia ridotta di S^n sono tutti nulli tranne $\tilde{H}_n(S^n)$ analizziamo

$$H_n(f): H_n(S^n) = \mathbb{Z} \rightarrow H_n(S^n) = \mathbb{Z}.$$

Essendo un omomorfismo, è sufficiente vedere come agisce su un generatore di \mathbb{Z} ; sia a tale generatore. C'è un unico intero per cui $H_n(f)(a) = d \cdot a$ e in effetti non dipende dal generatore, in quanto

$$H_n(f)(-a) = -H_n(f)(a) = -d \cdot a = d \cdot (-a).$$

È dunque possibile dare la definizione:

Definizione 14.0.1 (Grado di un'applicazione). *Si chiama grado dell'applicazione $f: S^n \rightarrow S^n$ l'unico intero d per il quale*

$$H_n(f)(a) = d \cdot a,$$

e si denota $d = \deg f$.

Proposizione 14.0.2. *Il grado ha le seguenti proprietà:*

1. $\deg id_{S^n} = 1$;
2. se f non è suriettiva, $\deg f = 0$;
3. $f \sim g \Rightarrow \deg g = \deg f$;
4. $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$;

5. se $f_i: S^n \rightarrow S^n$ è la riflessione rispetto all' i -esimo piano coordinato, $\deg f_i = -1$;
6. $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$, dove $-id$ è l'applicazione antipodale $-id: S^n \rightarrow S^n$;
7. Se $f: S^n \rightarrow S^n$ non ha punti fissi, $\deg f = (-1)^{n+1}$.

Dimostrazione. 1. è vero perchè $H_n(id_{S^n}) = id_{H_n(S^n)}$.

2. Infatti possiamo scegliere un $p \notin \text{Im } f$ e scrivere f come $f = i \circ f$, dove $i: S^n \setminus \{p\} \rightarrow S^n$. L'applicazione indotta

$$H_n(i): H_n(S^n \setminus \{p\}) \rightarrow H_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

è l'applicazione nulla, in quanto $S^n \setminus \{p\}$ è contraibile e dunque $H_n(S^n \setminus \{p\}) = 0$.

3. Discende dal fatto che $f \sim g \Rightarrow H_n(f) = H_n(g)$.
4. Per definizione si ha

$$H_n(f \circ g)(a) = \deg(f \circ g)a.$$

D'altra parte, per la funtorialità delle applicazioni indotte in omologia,

$$H_n(f \circ g)(a) = (H_n(f) \circ H_n(g))(a) = H_n(f)(H_n(g)(a)) = \deg f(\deg g \cdot a),$$

dunque $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

5. Consideriamo la riflessione f_1 di \mathbb{S}^n rispetto all'iperpiano di equazione $x_1 = 0$. La restrizione di f_1 alla sfera equatoriale di \mathbb{S}^n coincide con la riflessione di \mathbb{S}^{n-1} . In dimensione 0, usando le notazioni del Paragrafo 13.0.3, l'indotta di f_1 a livello di catene scambia σ_{-1} e σ_1 . Allora l'indotta di f_1 a livello di omologia invia il generatore $[\sigma_{-1} - \sigma_1]$ nel suo opposto e quindi il grado di f_1 è -1 .

Supponiamo che $\deg f_1 = -1$ per ogni sfera di dimensione $n - 1$. La riflessione f_1 lascia invariati gli aperti E_+ e E_- definiti nel Paragrafo 13.0.1. Nella successione di Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(E_+ \cap E_-) \cong \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow 0$$

i δ_q isomorfismi e per la naturalità della successione (vedi Esercizio 13.6) abbiamo il seguente diagramma commutativo dove tutti gli omomorfismi sono isomorfismi

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \tilde{H}_n(f_1) \downarrow & & \downarrow \tilde{H}_{n-1}(f_1) \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

e quindi anche $H_n(f_1)$ è la moltiplicazione per -1 e questo termina la dimostrazione.

6. È sufficiente vedere l'applicazione antipodale come composizione delle $n+1$ riflessioni f_i , e applicare le proprietà 1) e 4).

7. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \bar{f}: S^n \times I &\rightarrow S^n \\ (x, t) &\mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}. \end{aligned}$$

Essa è un'omotopia tra f e $-id$, e dunque le due applicazioni hanno lo stesso grado per la 3).

□

Osservazione 14.0.3. *In realtà Hopf ha dimostrato che è valido anche il vice-versa della 3): due funzioni $f, g: S^n \rightarrow S^n$ aventi lo stesso grado sono omotope.*

Una importante applicazione della teoria del grado è il seguente

Teorema 14.0.4. *Una sfera S^n ammette un campo di vettori tangenti continuo senza singolarità se e solo se n è dispari.*

Dimostrazione. Se esiste un campo di vettori tangenti senza singolarità $v(x)$ allora possiamo supporre (dopo eventualmente aver diviso per la norma che è non nulla poichè il campo non ha singolarità) che $v(x)$ abbia norma pari a uno.

Quindi il campo può esser visto come una applicazione $v: S^n \rightarrow S^n$. Poichè è tangente si deve avere $\langle x, v(x) \rangle = 0$ per ogni x .

L'applicazione $f: [0, 1] \times S^n \rightarrow S^n$ definita da

$$f(t, x) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x)$$

è ben definita ed è una omotopia tra l'applicazione identità e quella antipodale. Questo implica che l'applicazione antipodale deve avere grado 1 e questo può accadere solo se n è dispari.

Viceversa, se n è dispari, poniamo $n = 2m + 1$. Allora l'applicazione $v : \mathbb{S}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2m+1}$ definita da

$$v(x_1, x_2, \dots, x_{2m+1}, x_{2m+2}) := (-x_2, x_1, \dots, -x_{2m+2}, x_{2m+1})$$

definisce un campo di vettori senza singolarità sulla sfera $\mathbb{S}^{2m+1} \subset \mathbb{R}^{2m+2}$. \square

14.1 Esercizi

Esercizio 14.1. *L'espressione della riflessione f_v rispetto ad un generico iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} passante per l'origine e vettore normale v può essere descritta come segue:*

$$f_v(x) = x - 2 \langle v, x \rangle v.$$

Si dimostri che la restrizione di f alla sfera \mathbb{S}^n ha grado -1 . (sugg.: sfruttare la connessione per archi per trovare un cammino $c(t)$ tra v e un altro vettore unitario u per costruire una omotopia $f_{c(t)}$ tra f_v e f_u . Applicare quanto fatto al caso in cui u è il vettore $(1, 0, \dots, 0)$.)

Esercizio 14.2. *Si calcoli il grado della applicazione $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definita in coordinate complesse da $f(z) = z^n$, dove $n \in \mathbb{N}$.*

Capitolo 15

Il Teorema di separazione di Jordan-Brower

In questo capitolo dimostreremo alcuni risultati di separazione che generalizzano il classico Teorema della curva di Jordan, che vedremo appunto come corollario di un teorema più generale.

Iniziamo col seguente risultato:

Teorema 15.0.1. *Sia X uno spazio topologico e $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ una famiglia di aperti di X tali che $X = \cup_{i \in \mathbb{N}^*} U_i$ e $U_i \subset U_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}^*$. Denotiamo con $i_n : U_n \rightarrow X$ e $i_{m,n} : U_n \rightarrow U_m$ le inclusioni canoniche.*

Allora per ogni q si ha $H_q(X) = \varinjlim H_q(U_i)$, ossia:

- 1. per ogni $\alpha \in H_q(X)$ esiste $n \in \mathbb{N}^*$ tale che $\alpha \in \text{Im}(H_q(i_n))$;*
- 2. se $\alpha_n \in H_q(U_n)$ e $H_q(i_n)(\alpha_n) = 0$, allora $H_q(i_{m,n})(\alpha_n) = 0$ per m sufficientemente grande.*

Dimostrazione. Osserviamo che se $K \subset X$ è un compatto, allora esiste U_k tale che $K \subset U_k$. Se $\alpha = [c] \in H_q(X)$, il ciclo c è somma finita di semplici singolari, ognuno dei quali può essere visto come semplice singolare in un certo U_k (per la compattezza del semplice standard). Allora esiste U_n tale che $c \in S_q(U_n)$, cioè $c = S_q(i_n)(c)$. A livello di indotta in omologia si avrà quindi $\alpha \in \text{Im}(H_q(i_n))$ e questo mostra la prima proprietà.

In modo simile si dimostra la seconda proprietà. □

Teorema 15.0.2. *Sia n un numero naturale fissato e Y uno spazio topologico tale che, per ogni embedding topologico $f : Y \rightarrow \mathbb{S}^n$, si abbia $\tilde{H}(\mathbb{S}^n \setminus (f(Y))) = 0$. Allora lo spazio $I \times Y$ gode della stessa proprietà.*

Dimostrazione. Sia $f : I \times Y \rightarrow \mathbb{S}^n$ un embedding topologico e supponiamo per assurdo che esista $0 \neq \alpha \in \tilde{H}(\mathbb{S}^n \setminus f(I \times Y))$. Poniamo

$$U_0 = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \times Y\right) \quad , \quad U_1 = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times Y\right).$$

Avremo

$$U_0 \cap U_1 = \mathbb{S}^n \setminus f(I \times Y) \quad , \quad U_0 \cup U_1 = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times Y\right).$$

Per ipotesi $U_0 \cup U_1$ è aciclico e quindi dalla successione di Mayer-Vietoris

$$\tilde{H}_{q+1}(U_0 \cup U_1) \rightarrow \tilde{H}_q(U_0 \cap U_1) \rightarrow \tilde{H}_q(U_0) \oplus \tilde{H}_q(U_1) \rightarrow \tilde{H}_q(U_0 \cup U_1)$$

si ottengono gli isomorfismi tra $\tilde{H}_q(U_0 \cap U_1)$ e $\tilde{H}_q(U_0) \oplus \tilde{H}_q(U_1)$. L'immagine dell'elemento $\alpha \in \tilde{H}_q(U_0 \cap U_1)$ tramite tali isomorfismi verrà quindi inviato in un elemento non nullo in almeno uno tra $\tilde{H}_q(U_0)$ e $\tilde{H}_q(U_1)$. Possiamo supporre che sia non nullo in $\tilde{H}_q(U_0)$ e quindi ripetere il ragionamento iniziale sostituendo l'intervallo I con $[0, \frac{1}{2}]$.

In tal modo si ottengono degli intervalli nidificati $\cdots \subset I_{k+1} \subset I_k \subset \cdots I_1 \subset I$ tali che la lunghezza di I_k sia pari a 2^{-k} e α viene inviato in $0 \neq \alpha_k \in \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \setminus f(I_k \times Y))$.

Dato che gli intervalli sono nidificati e la loro lunghezza decresce, si ha $\cap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \{x\}$ per un certo $x \in I$. Quindi gli aperti $V_k = \mathbb{S}^n \setminus f(I_k \times Y)$ verificano quanto segue:

$$\cup_{k \in \mathbb{N}} V_k = \mathbb{S}^n \setminus \cap_{k \in \mathbb{N}} f(I_k \times Y) = \mathbb{S}^n \setminus f(\{x\} \times Y).$$

Avremo allora $\tilde{H}_q(\cup_{k \in \mathbb{N}} V_k) = \tilde{H}_q((\mathbb{S}^n \setminus f(\{x\} \times Y))) = 0$. Ma α è inviato su $\alpha_k \neq 0$ per ogni k mentre la sua immagine in $\tilde{H}_q(\cup_{k \in \mathbb{N}} V_k)$ è 0 e questo è assurdo per il Teorema 15.0.1. \square

Corollario 15.0.3. *Se $f : \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ è un embedding allora si ha $\tilde{H}_*(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^k)) = 0$. In particolare $\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^k)$ è connesso.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su k . Il risultato è chiaramente vero per $k = 0$ in quanto \mathbb{D}^0 è un punto e la sfera \mathbb{S}^n privata di un punto è omeomorfa a \mathbb{R}^n . Supponiamo la tesi vera per $k - 1$. Poichè il disco \mathbb{D}^k è omeomorfo a $I^k = I \times I^{k-1} \cong I \times \mathbb{D}^{k-1}$, è sufficiente applicare il Teorema 15.0.2 per concludere. \square

Possiamo ora dimostrare la generalizzazione del Teorema della curva di Jordan:

Teorema 15.0.4 (Teorema della curva di Jordan generalizzato). *Se $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ è un embedding allora si ha:*

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = n - k - 1, \\ 0, & \text{se } i \neq n - k - 1. \end{cases}$$

Equivalentemente si ha $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^k)) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{S}^{n-k-1})$.

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema per induzione su k . Il teorema è vero per $k = 0$ poiché $\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^0$ è omeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Supponiamo vero per $k - 1$ e dimostriamolo per k . Sia $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ è un embedding topologico e siano D_+^k e D_-^k rispettivamente gli emisferi superiore e inferiore di \mathbb{S}^k (inclusa la sfera equatoriale \mathbb{S}^{k-1}). Avremo $\mathbb{S}^k = D_+^k \cup D_-^k$. Essendo D_+^k e D_-^k compatti, i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{S}^n sono aperti:

$$U_+ = \mathbb{S}^n \setminus f(D_+^k) \quad U_- = \mathbb{S}^n \setminus f(D_-^k).$$

Si verifica facilmente che

$$U_+ \cup U_- = \mathbb{S}^n \setminus f(D_+^k \cap D_-^k) = \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{k-1})$$

e

$$U_+ \cap U_- = \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^k).$$

Per il Corollario 15.0.3 si ha $\tilde{H}_q(U_+) \cong \tilde{H}_q(U_-) \cong 0$. Dalla successione di Mayer-Vietoris

$$\tilde{H}_q(U_+) \oplus \tilde{H}_q(U_-) \xrightarrow{\Psi_q} \tilde{H}_q(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(U_+ \cap U_-) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(U_+) \oplus \tilde{H}_{q-1}(U_-),$$

si ottiene

$$\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^k)) = \tilde{H}_{q-1}(U_+ \cap U_-) \cong \tilde{H}_q(U_1 \cup U_2) = \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{k-1})).$$

Applicando l'ipotesi induttiva si ha l'asserto. □

Una conseguenza importante è il seguente risultato:

Corollario 15.0.5 (Teorema di separazione di Jordan-Brower). *Se $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ è un embedding allora $\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ ha esattamente due componenti connesse entrambe acicliche, aventi entrambe $f(\mathbb{S}^k)$ come frontiera.*

Dimostrazione. Per il Teorema 15.0.4 si ha $H_0(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, mentre tutti gli altri gruppi di omologia sono nulli. Questo implica che $\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ ha esattamente due componenti connesse e che ognuna di esse ha omologia ridotta

banale. Siano U e V le due componenti connesse. Poichè $f(\mathbb{S}^{n-1})$ è chiuso, in quanto compatto, $U \cup V$ è aperto di \mathbb{S}^n e quindi una varietà topologica non connessa le cui componenti connesse sono U e V che sono quindi degli aperti. Poichè U e V sono aperti, non intersecano le loro rispettive frontiere. Inoltre si ha $\text{Fr } U \cap V = \text{Fr } V \cap U = \emptyset$. Infatti, se esistesse $x \in \text{Fr } U \cap V$, essendo V aperto, esisterebbe un disco aperto D_r in \mathbb{S}^n (ottenuto intersecando \mathbb{S}^n con una $(n+1)$ -palla di \mathbb{R}^{n+1}) centrato in x e completamente contenuto in V . Poichè U e V sono disgiunti si avrebbe $D_r \cap U = \emptyset$ e quindi $x \notin \text{Fr } U$. analogamente si dimostra che $\text{Fr } V \cap U = \emptyset$.

Abbiamo quindi dimostrato che $\text{Fr } U \subset f(\mathbb{S}^{n-1})$ e $\text{Fr } V \subset f(\mathbb{S}^{n-1})$. Restano da dimostrare le altre due inclusioni. Dimostriamo che $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \text{Fr } U$. Supponiamo per assurdo che esista $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ tale che $f(p) \notin \text{Fr } U$. Allora esiste un aperto N che contiene $f(p)$ ma non interseca U . Sia W un disco aperto di \mathbb{S}^{n-1} di raggio sufficientemente piccolo affinché si abbia $f(W) \subset N$ (esiste per la continuità di f). Poichè W è sufficientemente piccolo si ha $\mathbb{S}^{n-1} \setminus W \cong \mathbb{D}^{n-1}$ (si utilizzi ad esempio la proiezione stereografica).

Sia ora $Y = \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1} \setminus W)$. Per il Corollario 15.0.3 Y è connesso. Poichè $\mathbb{S}^{n-1} \setminus W \cong \mathbb{D}^{n-1}$ è compatto, la sua immagine tramite f è compatta e quindi chiusa. Questo implica che Y è un aperto di \mathbb{S}^n . Inoltre $Y = U \cup V \cup f(W) \subset U \cup V \cup N$ e quindi abbiamo $Y = (U \cap Y) \cup [(V \cup N) \cap Y]$.

Ma $U \cap Y$ e $(V \cup N) \cap Y$ sono aperti non vuoti di Y , che sono disgiunti in quanto lo sono U e $V \cup N$, e quindi abbiamo trovato una separazione di Y che è connesso e questo è assurdo. Questo mostra che $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \text{Fr } U$ e allo stesso modo si dimostra che $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \text{Fr } V$. \square

Osservazione 15.0.6. *Nel caso in cui $n = 2$, si ottiene come corollario il classico Teorema della curva di Jordan. In questo caso il risultato è più forte in quanto asserisce che $\bar{U} \cong \bar{V} \cong \mathbb{D}^2$. Queste non è vero in generale come dimostrato dall'esempio della sfera cornuta di Alexander (si veda [4] per maggiori dettagli).*

Appendice A

Componenti connesse e connesse per archi

Lo studente può consultare [7, Capitolo 9] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi connessi e connessi per archi.

A.1 Componenti connesse e connesse per archi

Consideriamo uno spazio topologico X . Esiste un modo naturale per scrivere lo spazio come unione di sottospazi connessi e connessi per archi. Cominciamo con i connessi. Diremo che due punti x e y di X sono in relazione se esiste un sottospazio connesso di X che contiene x e y . La riflessività e la simmetria di questa relazione sono immediate. La transitività segue dal fatto che se A è un sottospazio di X che contiene x e y e B un sottospazio che contiene y e z allora $A \cup B$ è un sottospazio connesso (unione di due connessi A e B con il punto y in comune) che contiene x e z . Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione d'equivalenza sono chiamate le **componenti connesse di** X . Vale il seguente risultato lasciato come esercizio per lo studente.

Teorema A.1.1. *Le componenti connesse di X sono sottospazi connessi, chiusi e disgiunti di X che ricoprono X . Ogni connesso è contenuto in una e una sola componente connessa. Inoltre la cardinalità delle componenti connesse è un invariante topologico.*

Se la cardinalità delle componenti connesse è finita allora ogni componente connessa è un sottoinsieme aperto (oltre che chiuso) di X . Infatti in questo caso una componente connessa è il complementare del chiuso ottenuto come unione finita delle altre componenti connesse. Ma in generale una componente connessa

non è aperta. Si pensi, ad esempio, alle componenti connesse di \mathbb{Q} che sono costituite dai singoli punti (che non sono aperti di \mathbb{Q}).

Veniamo ora ai connessi per archi. Diremo che due punti x e y di X sono in relazione se esiste un arco in X che congiunge x con y . La riflessività di questa relazione si ottiene usando l'arco costante, la simmetria usando l'arco $i(f) : I \rightarrow X$, $i(f)(t) = f(1 - t)$ e la transitività usando la concatenazione tra archi (cfr. (2.1) del Capitolo 2). Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione d'equivalenza sono chiamate **componenti connesse per archi** di X .

Anche la dimostrazione del seguente teorema è lasciata per esercizio allo studente.

Teorema A.1.2. *Le componenti connesse per archi di X sono sottospazi connessi per archi e disgiunti di X che ricoprono X . Ogni sottospazio connesso per archi è contenuto in una e una sola componente connessa per archi. Inoltre la cardinalità delle componenti connesse per archi è un invariante topologico.*

Le componenti connesse per archi di uno spazio X possono essere aperte oppure chiuse. Consideriamo per esempio i seguenti sottoinsiemi del piano:

$$C = \{(\frac{1}{n}, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], n \geq 1 \text{ intero}\}, \quad I_x = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1]\}$$

E' immediato verificare che $C \cup I_x$ è connesso per archi e quindi connesso. Inoltre si dimostra (cfr. [7, Esempio 9.2.6]) che

$$X = \{P_0\} \cup C \cup I_x, \quad P_0 = (0, 1) \tag{A.1}$$

è connesso ma non connesso per archi. Lo spazio X ha una componente connessa (essendo connesso) mentre le componenti connesse per archi sono due: una è costituita dal punto $P_0 = (0, 1)$ che è chiusa ma non aperta e l'altra da $X \setminus P_0$ che è aperta ma non chiusa. Osserviamo che esistono spazi dove le componenti connesse per archi non sono né aperte né chiuse (non ne parleremo).

Sia x un punto di uno spazio topologico X . Diremo che X è **localmente connesso in** x se per ogni aperto U contenente x esiste un intorno ¹ connesso V di x contenuto in U . Se X è localmente connesso in ogni suo punto diremo che X è **localmente connesso**. Analogamente X è **localmente connesso per archi in** x se per ogni intorno aperto U di x esiste un intorno connesso per archi V di x contenuto in U . Se X è localmente connesso per archi in ogni suo punto diremo

¹Un intorno di un punto x di uno spazio topologico X è un sottoinsieme N di X per il quale esiste un aperto A di X tale che $x \in A \subseteq N$.

che X è **localmente connesso per archi**. Dal momento che uno spazio connesso per archi è anche connesso segue che uno spazio localmente connesso per archi è localmente connesso. Esistono spazi localmente connessi ma non localmente connessi per archi (non ne parleremo). Osserviamo che una varietà topologica (o più in generale uno spazio localmente euclideo) è localmente connessa per archi.

Osservazione A.1.3. Non esiste nessun legame tra la locale connessione e la connessione oppure tra la locale connessione per archi e la connessione per archi. Per esempio l'unione di due intervalli disgiunti di \mathbb{R} non è connesso per archi (e neppure connesso) ma localmente connesso per archi (e quindi localmente connesso). Un esempio di spazio connesso per archi ma non localmente connesso (per archi) si ottiene considerando lo spazio $Y = X \cup S$ dove X è lo spazio dato da (A.1) e S è il segmento di retta verticale che congiunge l'origine con il punto P_0 .

Teorema A.1.4. *Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi. Allora le componenti connesse per archi di X sono sia aperte che chiuse e coincidono con le componenti connesse di X . In particolare uno spazio connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.*

Dimostrazione: Sia A una componente connessa per archi di X diversa dal vuoto. Vogliamo mostrare che A è aperta e chiusa. Sia $x \in A$ e sia V un intorno di x connesso per archi (che esiste perché X è localmente connesso per archi in x). Allora $V \subseteq A$ altrimenti $V \cup A$ sarebbe un connesso per archi che contiene A . Questo mostra che x è un punto interno di A e quindi A è aperto. Ma allora A è anche chiuso in quanto complementare dell'unione delle componenti connesse per archi diverse da A .

Sia ora C una componente connessa di X . Esisterà quindi una componente connessa per archi A di X tale che $A \cap C \neq \emptyset$. Quindi $A \cap C$ è un sottoinsieme non vuoto sia aperto che chiuso di C ; essendo C connesso $A \cap C = C$ ossia $C \subseteq A$. D'altra parte $A \subseteq C$, altrimenti $A \cup C$ sarebbe un connesso che contiene C . Concludiamo che $A = C$ quello che si voleva dimostrare. \square

A.2 Esercizi

Esercizio A.1. Dimostrare i Teoremi A.1.1 e A.1.2.

Appendice B

Spazi localmente compatti

Lo studente può consultare [7, Capitolo 10] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi compatti. Inoltre nella dimostrazione della Proposizione B.3.2 faremo uso di alcune proprietà degli spazi quoziente che lo studente può trovare in [7, Capitolo 11]).

B.1 Definizioni e prime proprietà

Sia x un punto di uno spazio topologico X . Diremo che X è **localmente compatto in** x se esiste un intorno compatto di x , cioè se esiste un compatto $K \subseteq X$, $x \in K$ e un aperto U di X tale che $x \in U \subseteq K$. Se X è localmente compatto in ogni suo punto diremo che X è **localmente compatto**.

I seguenti fatti sono di facile verifica e sono lasciati come esercizio per lo studente (cfr. Esercizio B.1):

- (i) Ogni varietà topologica è localmente compatta.
 - (ii) Ogni spazio topologico compatto è localmente compatto.
 - (iii) Il prodotto di due spazi localmente compatti è localmente compatto.
 - (iv) Se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione continua, aperta e suriettiva (un'identificazione aperta) e X è localmente compatto allora Y è localmente compatto.
- In particolare la locale compattezza è una proprietà topologica.

Teorema B.1.1. *Uno spazio topologico X è localmente compatto e di Hausdorff se e solo se esiste uno spazio topologico X^∞ che soddisfa le condizioni seguenti:*

- a) X è un sottospazio di X^∞ ;

b) $X^\infty \setminus X$ è un solo punto;

c) X^∞ è uno spazio compatto e di Hausdorff.

Inoltre, se X^∞ e \tilde{X}^∞ sono due spazi topologici che soddisfano le condizioni a), b), c), allora esiste un omeomorfismo da X^∞ a \tilde{X}^∞ che è uguale all'identità ristretto a X .

Dimostrazione: Dimostriamo prima l'ultima parte del teorema. Definiamo un'applicazione $f : X^\infty \rightarrow \tilde{X}^\infty$ che porta il punto $\infty := X^\infty \setminus X$ nel punto $\tilde{\infty} := \tilde{X}^\infty \setminus X$ e che sia l'identità su X . Vogliamo dimostrare che f è un omeomorfismo. Per fare questo sarà sufficiente far vedere che f è aperta (per simmetria infatti lo sarà anche f^{-1}). Sia U un aperto di X^∞ . Se $\infty \notin U$ allora $f(U) = U$. Siccome U è aperto in X^∞ e $U \subseteq X$ allora $U = U \cap X$ è aperto in X . Siccome X è aperto anche in \tilde{X}^∞ , l'insieme U è aperto in \tilde{X}^∞ . Supponiamo che invece $\infty \in U$. Siccome $K = X^\infty \setminus U$ è chiuso in X^∞ allora è compatto in X^∞ (in quanto X^∞ è compatto). Dal momento che K è contenuto in X allora K è un compatto di X (per la proprietà assoluta dei compatti). Ma allora K è anche un compatto di \tilde{X}^∞ (sempre per la proprietà assoluta dei compatti) e quindi chiuso in \tilde{X}^∞ (in quanto \tilde{X}^∞ è di Hausdorff). Allora $f(U) = f(X^\infty \setminus K) = \tilde{X}^\infty \setminus K$ è aperto in \tilde{X}^∞ .

Mostriamo ora che se X^∞ è uno spazio topologico che soddisfa le condizioni a), b), c) allora X è localmente compatto e di Hausdorff. Il fatto che X sia di Hausdorff segue dal fatto che X è un sottospazio di X^∞ che è di Hausdorff. Dato $x \in X$ mostriamo ora che X è localmente compatto in x . Come sopra denotiamo con ∞ il punto $X^\infty \setminus X$ dato da b). Dal momento che X^∞ è di Hausdorff esistono due aperti disgiunti U e V di X^∞ che contengono rispettivamente il punto x e il punto ∞ . Allora $K = X^\infty \setminus V$ è un chiuso di X^∞ e quindi compatto in quanto X^∞ è compatto. Ma K è un sottoinsieme di X e quindi è compatto anche in X . Inoltre $x \in U \subseteq K$, e quindi K è un intorno compatto di x e quindi X è localmente compatto in x .

Supponiamo ora che X sia uno spazio topologico localmente compatto e di Hausdorff e costruiamo uno spazio X^∞ che soddisfa le condizioni a), b) e c). Sia ∞ un punto qualsiasi che non appartiene a X e poniamo $X^\infty := X \cup \{\infty\}$. Definiamo una topologia su X^∞ come la famiglia dei sottoinsiemi di X^∞ costituita da (1) tutti i sottoinsiemi U aperti di X e (2) da tutti gli insiemi della forma $X^\infty \setminus K$, dove K è un sottoinsieme compatto di X . La verifica che si tratta effettivamente di una topologia è lasciata allo studente (cfr. Esercizio B.3). Mostriamo ora che X è un sottospazio di X^∞ cioè un insieme U è aperto in X se e solo se esiste

un aperto V di X^∞ tale che $U = X \cap V$. Se l'aperto di X^∞ è di tipo (1) allora $U = X \cap U$, che è aperto in X . Mentre se l'aperto di X^∞ è di tipo (2), cioè della forma $V = X^\infty \setminus K$ con K compatto di X , allora $V \cap X = X \setminus K$ che è aperto in X (complementare del chiuso K). Mostriamo ora che X^∞ è compatto. Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X^∞ . La famiglia \mathcal{U} deve contenere un aperto di tipo (2), $X^\infty \setminus K$ perché gli insiemi aperti di tipo (1) non contengono il punto ∞ . Si consideri la famiglia di tutti gli elementi di \mathcal{U} escluso l'aperto $X^\infty \setminus K$. Otteniamo così una famiglia di aperti di X^∞ che ricopre K . Essendo K un compatto di X e quindi di X^∞ (per la proprietà assoluta dei compatti), un numero finito di questi aperti ricopre K . Si ottiene quindi un numero finito di aperti di \mathcal{U} che, insieme all'aperto $X^\infty \setminus K$, costituisce un sottoricoprimento finito del ricoprimento \mathcal{U} .

Mostriamo infine che X^∞ è di Hausdorff. Siano x e y due punti distinti di X^∞ . Se entrambi stanno in X allora esistono due aperti di X (e quindi di X^∞) disgiunti U e V contenenti rispettivamente x e y . Se $x \in X$ e $y = \infty$. Sia U un aperto di X e K un sottoinsieme compatto di X tali che $x \in U \subseteq K$ (qui si sfrutta il fatto che X è localmente compatto). Allora U e $X^\infty \setminus K$ sono due aperti disgiunti che contengono x e ∞ rispettivamente. \square

B.2 Altre proprietà degli spazi localmente compatti

La definizione di spazio localmente compatto non è una proprietà locale. Di solito uno spazio X soddisfa una data proprietà “localmente” se ogni $x \in X$ ammette un intorno “arbitrariamente piccolo” che soddisfa la proprietà. La definizione di compattezza locale non ha a che fare con il concetto di “arbitrariamente piccolo”. Se però X è di Hausdorff esiste una caratterizzazione “locale” degli spazi localmente compatti.

Teorema B.2.1. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Allora X è localmente compatto se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni aperto U contenente x esiste un aperto V contenente x tale che \bar{V} è compatto e $\bar{V} \subseteq U$.*

Dimostrazione: Se è soddisfatta la condizione del teorema allora X è localmente compatto. Infatti dato $x \in X$ e l'aperto $U = X$ basta definire $K = \bar{V}$ (dove V è l'aperto tale che $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq X$). Viceversa sia X localmente compatto. Sia $x \in X$ e U un aperto di X che contiene x . Sia X^∞ come nel Teorema B.1.1 e sia $H = X^\infty \setminus U$. Allora H è un chiuso in X^∞ e quindi compatto in X^∞ . Siano V e W due aperti disgiunti di X^∞ che contengono rispettivamente x

e H (due compatti disgiunti in uno spazio di Hausdorff possono essere separati da aperti). La chiusura \overline{V} di V in X^∞ è compatta. Inoltre $W \cap V = \emptyset$ implica $W \cap \overline{V} = \emptyset$ e quindi $H \cap \overline{V} = \emptyset$. Deduciamo che $\overline{V} \subseteq U$ è un compatto di X tale che $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. \square

Gli spazi topologici “fatti bene” sono gli spazi metrizzabili e gli spazi compatti e di Hausdorff. Inoltre ogni sottospazio di uno spazio metrizzabile è metrizzabile ma in generale un sottoinsieme di uno spazio compatto e di Hausdorff (pur essendo di Hausdorff) non è compatto. Se il sottoinsieme è chiuso allora è compatto. Ma se il sottoinsieme è aperto questo non è vero. Per gli spazi localmente compatti e di Hausdorff questo continua a essere vero come mostra il seguente:

Corollario B.2.2. *Sia X uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e sia C (risp. A) un sottoinsieme chiuso (risp. aperto) di X . Allora C (risp. A) è localmente compatto (e di Hausdorff).*

Dimostrazione: Sia $x \in C$ e siano U e K rispettivamente un aperto e un sottospazio compatto di X tali che $x \in U \subseteq K$. Allora $K \cap C$ è chiuso in K e quindi compatto e contiene l'aperto $U \cap C$ che contiene x . Sia $x \in A$. Per il Teorema B.2.1 esiste un aperto V contenente x tale che \overline{V} è compatto e $\overline{V} \subseteq A$. Allora $K = \overline{V}$ è un sottoinsieme compatto di A tale che $x \in V \subseteq K$. \square

Il corollario seguente mostra che la condizione che caratterizza gli aperti degli spazi compatti e di Hausdorff è quella di spazio localmente compatto e di Hausdorff.

Corollario B.2.3. *Uno spazio topologico X è omeomorfo ad un sottoinsieme aperto di uno spazio compatto e di Hausdorff se e solo se X è localmente compatto e di Hausdorff.*

Dimostrazione: Se X è localmente compatto e di Hausdorff allora X è un aperto dello spazio compatto e di Hausdorff X^∞ (si veda il Teorema B.1.1). Viceversa se X è omeomorfo ad un aperto di uno spazio compatto e di Hausdorff allora è localmente compatto e di Hausdorff per il Corollario B.2.2. \square

B.3 Compattificazioni di Alexandrov

Nel Teorema B.1.1 se X è compatto allora lo spazio X^∞ non è molto interessante: è semplicemente X al quale è stato aggiunto un punto isolato ∞ (infatti in questo caso $\{\infty\}$ è un aperto di X^∞ in quanto complementare del chiuso X). Se

invece X non è compatto allora il punto $\infty = X^\infty \setminus X$ è un punto di accumulazione di X . Infatti un aperto di X^∞ che contiene ∞ è della forma $X^\infty \setminus K$ con K compatto di X il quale interseca X in un punto diverso ∞ in quanto $X \setminus K \neq \emptyset$ (altrimenti X sarebbe uguale a K e quindi compatto). Segue allora che X è denso in X^∞ , cioè $\overline{X} = X^\infty$. Se X^∞ è uno spazio compatto e di Hausdorff e X è un sottospazio proprio tale che $X^\infty \setminus X$ sia un solo punto allora X^∞ è chiamata la **compattificazione di Alexandrov** (o con un punto) di X . Il Teorema B.1.1 mostra che esiste una compactificazione di Alexandrov di uno spazio X se e solo se X è localmente compatto e di Hausdorff. Notiamo anche che la compactificazione di Alexandrov X^∞ di X è univocamente determinata a meno di omeomorfismi come segue dall'ultima parte del Teorema B.1.1.

Esempio B.3.1. La sfera n -dimensionale S^n è la compactificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n . Infatti usando la proiezione stereografica \mathbb{R}^n è omeomorfo a $S^n \setminus N$, dove N è il polo nord.

Proposizione B.3.2. Sia X uno spazio compatto e di Hausdorff e $U \subseteq X$ un suo sottoinsieme aperto. Allora esiste U^∞ la compactificazione di Alexandrov di U e

$$\frac{X}{X \setminus U} \cong U^\infty,$$

dove $\frac{X}{X \setminus U}$ denota lo spazio quoziente di X tramite la relazione d'equivalenza che identifica due punti di X se e solo se appartengono a $X \setminus U$.

Dimostrazione: L'esistenza di U^∞ segue dal Corollario B.2.2. Consideriamo l'applicazione $f : X \rightarrow U^\infty$ definita da: $f(x) = x$, se $x \in U$ e $f(x) = \infty$ se $x \in X \setminus U$. Dimostriamo che f è continua facendo vedere che la controimmagine di sottoinsieme aperto di U^∞ è aperto in X . Sia $V \subseteq U^\infty$ aperto, abbiamo due casi:

- $V \subseteq U$ aperto, ma allora, dato che $U \subseteq X$ è aperto questo significa che V è aperto in X e quindi per definizione $f^{-1}(V) = V$ aperto.
- $V = U^\infty \setminus K$ con K compatto in U , per la proprietà universale dei compatti, K è compatto in X e quindi è chiuso (dato che X è di Hausdorff); inoltre, osservando che $\infty \notin K$ e che $U \setminus K \subset U$, abbiamo

$$f^{-1}(U^\infty \setminus K) = f^{-1}(\infty) \cup f^{-1}(U \setminus K) = (X \setminus U) \cup (U \setminus K) = X \setminus K$$

che è aperto in quanto complementare di un chiuso.

Notiamo inoltre che f passa al quoziente rispetto alla proiezione canonica

$$\pi : X \rightarrow \frac{X}{X \setminus U}, \quad \pi(x) = [x].$$

Infatti l'unico insieme in cui π non è iniettiva è $X \setminus U$ ma $f(X \setminus U) = \infty$. Per il [7, Corollario 10.2.3]) esiste un'unica applicazione continua

$$\tilde{f} : \frac{X}{X \setminus U} \rightarrow U^\infty$$

tale che $\tilde{f} \circ \pi = f$. Osserviamo che \tilde{f} è iniettiva. Siano infatti $[x], [y] \in \frac{X}{X \setminus U}$ tali che $[x] \neq [y]$ e siano $x, y \in X$ tali che $\pi(x) = [x]$ e $\pi(y) = [y]$. Si hanno due possibilità (a meno di scambiare x con y): 1) $x, y \in U$, $x \neq y$, 2) $x \in U$, $y \in X \setminus U$. Nel primo caso $\tilde{f}([x]) = f(x) = x \neq y = f(y) = \tilde{f}([y])$ e nel secondo caso $\tilde{f}([x]) = f(x) = x \neq \infty = f(y) = \tilde{f}([y])$.

Infine, \tilde{f} è anche chiusa in quanto applicazione continua dal compatto $\frac{X}{X \setminus U}$ (quoziente del compatto X) allo spazio di Hausdorff U^∞ . Concludiamo che \tilde{f} è un omeomorfismo. \square

Corollario B.3.3. *Sia $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ il disco unitario e $\partial D^n = S^{n-1}$ la sua frontiera. Allora*

$$S^n \cong \frac{D^n}{S^{n-1}}.$$

Dimostrazione: Dalla Proposizione B.3.2 con $X = D^n$ e $U = D^n \setminus S^{n-1}$. L'aperto U (il disco unitario aperto) è omeomorfo a \mathbb{R}^n . Si ottiene quindi, usando l'Esempio B.3.1,

$$S^n = (\mathbb{R}^n)^\infty = U^\infty = \frac{D^n}{D^n \setminus U} = \frac{D^n}{S^{n-1}}.$$

\square

B.4 Esercizi

Esercizio B.1. Dimostrare le affermazioni (i), (ii), (iii) e (iv) del Paragrafo B.1.

Esercizio B.2. Dimostrare che i numeri razionali non sono uno spazio localmente compatto.

Esercizio B.3. Sia X uno spazio di Hausdorff. Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ costituita da tutti gli aperti di X e dagli insiemi della forma $X^\infty \setminus K$ al variare di K compatto in X definisce una topologia su X^∞ .

Appendice C

Numero di Lebesgue

Lo studente può consultare [7, Capitolo 2] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi metrici.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $S \subseteq X$ un sottoinsieme arbitrario di X . Il **diametro** di S , indicato con $\text{diam}(S)$, è definito come $\text{diam}(S) := \sup_{x, y \in S} d(x, y)$ mentre la **distanza di un punto** $x \in X$ **dall'insieme** S , indicato con $d(x, S)$, è definito come $d(x, S) := \inf_{s \in S} d(x, s)$.

Lemma C.0.1. *(esistenza del numero di Lebesgue) Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di X . Allora esiste un numero δ , detto **numero di Lebesgue del ricoprimento** \mathcal{U} , tale che per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ con $\text{diam}(S) < \delta$ esiste $k \in J$ tale che $S \subseteq U_k$.*

Dimostrazione: Poichè X è compatto possiamo supporre che J sia un insieme finito. Definiamo una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$f(x) = \max_{j \in J} \{f_j(x)\}, \quad (\text{C.1})$$

dove, dato $j \in J$, $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f_j(x) = d(x, X \setminus U_j)$. Si verifica facilmente che la funzione f è continua (cfr. Esercizio C.2). Inoltre $f(x) > 0$ per ogni $x \in X$. Infatti per definizione $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$. Se per assurdo $f(x)$ fosse uguale a zero per qualche $x \in X$ allora $d(x, X \setminus U_j) = 0$ per ogni $j \in J$ e quindi, essendo $X \setminus U_j$ chiuso, $x \in X \setminus U_j$ per ogni $j \in J$ (cfr. [7, Lemma 5.2.9]). Quindi $x \in \bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j) = X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j = X \setminus X = \emptyset$, la quale fornisce la contraddizione desiderata.

Essendo X è compatto esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > \delta$, per ogni $x \in X$. Vogliamo dimostrare che δ è un numero di Lebesgue del ricoprimento \mathcal{U} . Sia dunque $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$, tale che $\text{diam}(S) < \delta$ e sia $x_0 \in S$. Allora $f(x_0) > \delta$ e quindi esiste $k \in J$ tale che $f_k(x_0) = d(x_0, X \setminus U_k) > \delta$ e quindi $x_0 \in U_k$.

Resta da dimostrare che ogni $y \in S$ appartiene a U_k o, equivalentemente che $d(y, X \setminus U_k) > 0$. Questo segue da:

$$d(y, X \setminus U_k) \geq d(x_0, X \setminus U_k) - d(x_0, y) > \delta - \delta = 0,$$

dove si è usato l'Esercizio C.1 e il fatto che $d(x_0, y) \leq \text{diam}(S) < \delta$. □

C.1 Esercizi

Esercizio C.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e $S \subseteq X$ un sottoinsieme di X . Dimostrare che per ogni $x, y \in X$ si ha $d(x, S) \leq d(x, y) + d(y, S)$.

Esercizio C.2. Dimostrare che la funzione f definita da (C.1) è continua.

Appendice D

Spazi metrici completi e la curva di Peano

Lo studente può consultare [7, Paragrafo 10.4.2]) per le definizioni e le principali proprietà degli spazi metrici completi.

D.1 Spazi metrici completi

Ricordiamo qui di seguito alcuni fatti sugli spazi metrici completi. Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione x_n di punti di X è detta di **Cauchy** se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ si ha $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Si dimostra facilmente che se x_n è una successione convergente ad un punto $x \in X$ allora x_n è di Cauchy.

Diremo che uno spazio metrico (X, d) è **completo** se ogni sua successione di Cauchy è convergente. Non è difficile vedere che lo spazio euclideo \mathbb{R}^n è completo mentre l'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} non è completo (si consideri, per esempio, la successione $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ di numeri razionali che è di Cauchy ma converge al numero di Nepero $e \notin \mathbb{Q}$).

Lemma D.1.1. *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo è completo.*

Dimostrazione: Sia (C, d) un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo (X, d) e sia x_n una successione di Cauchy di punti di C . Allora x_n è di Cauchy anche in (X, d) e quindi è convergente ad un punto $x \in X$. Essendo C chiuso (e quindi chiuso per successioni) il punto x appartiene a C . \square

Siano (X, d) e (Y, \hat{d}) due spazi metrici. Diremo che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **limitata** se $f(X)$ è un sottoinsieme limitato di (Y, \hat{d}) . Denotiamo con $(L(X, Y), \rho)$

lo spazio delle funzioni limitate da X a Y dotato della metrica

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \hat{d}(f(x), g(x)), \quad f, g \in L(X, Y), \quad (\text{D.1})$$

e con $C_L(X, Y) \subseteq L(X, Y)$ lo spazio metrico delle funzioni continue e limitate da X a Y , dotato della metrica indotta da ρ (che indichiamo ancora con ρ).

Teorema D.1.2. *Siano (X, d) e (Y, \hat{d}) due spazi metrici. Supponiamo che (Y, \hat{d}) sia completo. Allora $(L(X, Y), \rho)$ e $(C_L(X, Y), \rho)$ sono spazi metrici completi.*

Dimostrazione: Sia f_n una successione di Cauchy in $L(X, Y)$. Per ogni $x \in X$ la successione $f_n(x)$ di (Y, \hat{d}) è di Cauchy (questo segue dalla disuguaglianza $\hat{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n, f_m)$, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$). Essendo (Y, \hat{d}) completo, per ipotesi, $f_n(x)$ converge ad un punto $f(x)$ di Y . Abbiamo così definito una funzione $f : X \rightarrow Y$ come $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Per mostrare che $(L(X, Y), \rho)$ è completo dobbiamo far vedere che f_n converge a f in $(L(X, Y), \rho)$ e che f è limitata. Essendo f_n di Cauchy, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ si ha $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$. Questo implica che $\hat{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon$, per ogni $x \in X$. Facendo tendere $m \rightarrow +\infty$ si ottiene che $\hat{d}(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$ e quindi $\rho(f_n, f) \leq \epsilon$, per ogni $n \geq n_0$. Segue che la successione di funzioni f_n converge alla funzione f nella metrica ρ . Inoltre, dalla disuguaglianza

$$\text{diam}(g(X)) \leq \text{diam}(f(X)) + 2\rho(g, f), \quad (\text{D.2})$$

valida per ogni coppia di funzioni $f, g : X \rightarrow Y$ (cfr. Esercizio D.1), si deduce che, per ogni n ,

$$\text{diam}(f(X)) \leq \text{diam}(f_n(X)) + 2\rho(f_n, f),$$

la quale implica, insieme al fatto che f_n converge alla funzione f nella metrica ρ , che f è limitata.

Per dimostrare che $(C_L(X, Y), \rho)$ è uno spazio metrico completo è sufficiente, per il Lemma D.1.1, far vedere che $(C_L(X, Y), \rho)$ è un sottoinsieme chiuso di $(L(X, Y), \rho)$, ossia che se f_n è una successione di funzioni in $(L(X, Y), \rho)$ convergente ad una funzione $f : X \rightarrow Y$ (nella metrica ρ) allora f è continua e limitata. Abbiamo già mostrato che f è limitata quindi resta da dimostrare che f è continua. Sia $x_0 \in X$. Osserviamo che, dalla disuguaglianza triangolare, si ottiene:

$$\hat{d}(f(x), f(x_0)) \leq \hat{d}(f_n(x), f(x)) + \hat{d}(f_n(x), f_n(x_0)) + \hat{d}(f_n(x_0), f(x_0)),$$

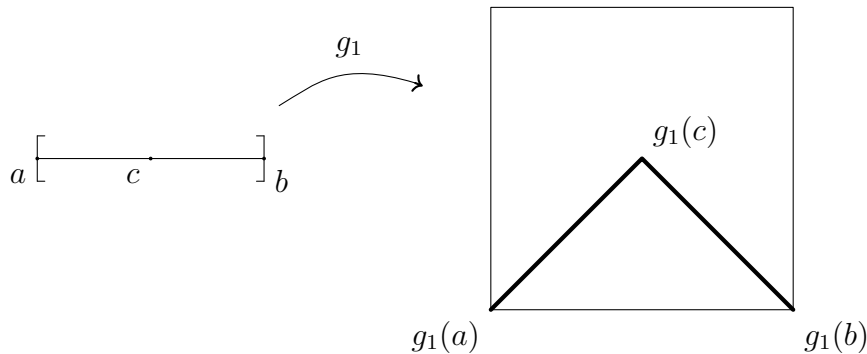
per ogni n . Dato $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $\rho(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$. Fissiamo $n = n_0$. Allora $\hat{d}(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ e $\hat{d}(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$. Inoltre,

essendo f_{n_0} continua esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ si ha $\hat{d}(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$. Mettendo insieme le cose abbiamo dimostrato che dato $x_0 \in X$ e dato $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ allora $\hat{d}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ e quindi f è continua in x_0 ; questo conclude la dimostrazione del teorema. \square

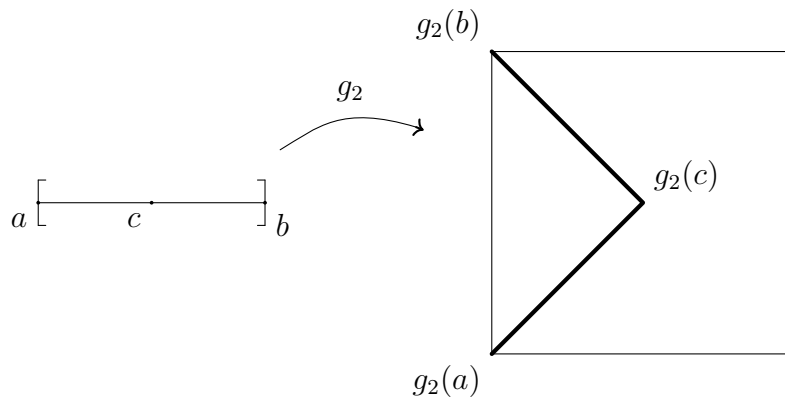
D.2 La curva di Peano

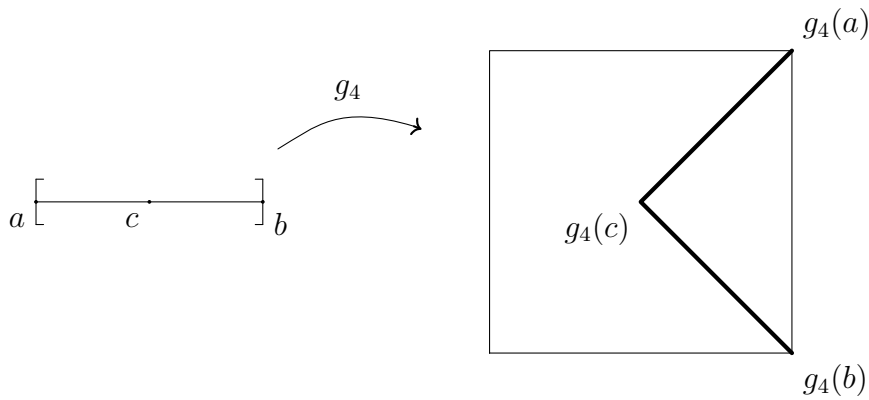
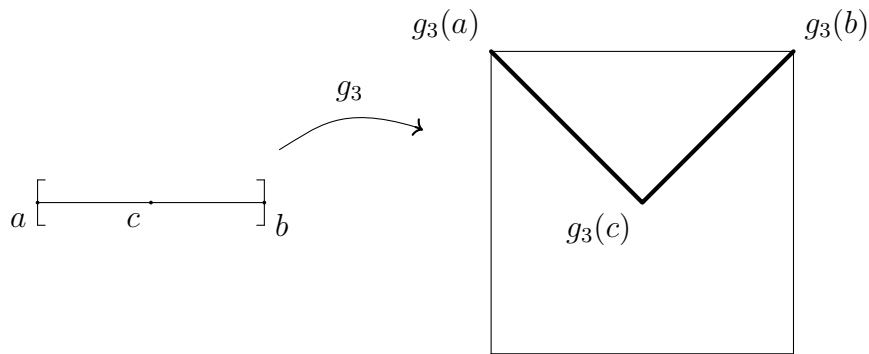
Vogliamo dimostrare l'esistenza di una **curva di Peano** cioè di un'applicazione continua e suriettiva $p : I \rightarrow I^2$, $I = [0, 1]$.

La curva di Peano verrà costruita come limite di una successione di curve continue. Per costruire una tale successione partiamo dalla curva continua $g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$) il cui grafico è costituito dai due segmenti che uniscono $g_1(a)$ e $g_1(c)$ e $g_1(c)$ con $g_1(b)$ come in figura. La curva è contenuta nel quadrato che ha come lato il segmento che unisce $g_1(a)$ con $g_1(b)$ dell'asse delle x e il punto $g_1(c)$ è il centro di questo quadrato.

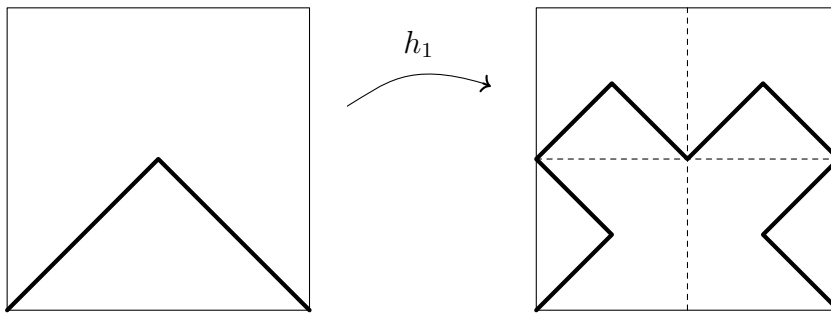


In modo analogo possiamo considerare le curve continue $g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g_4 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ i cui grafici illustrati nelle tre figure seguenti.

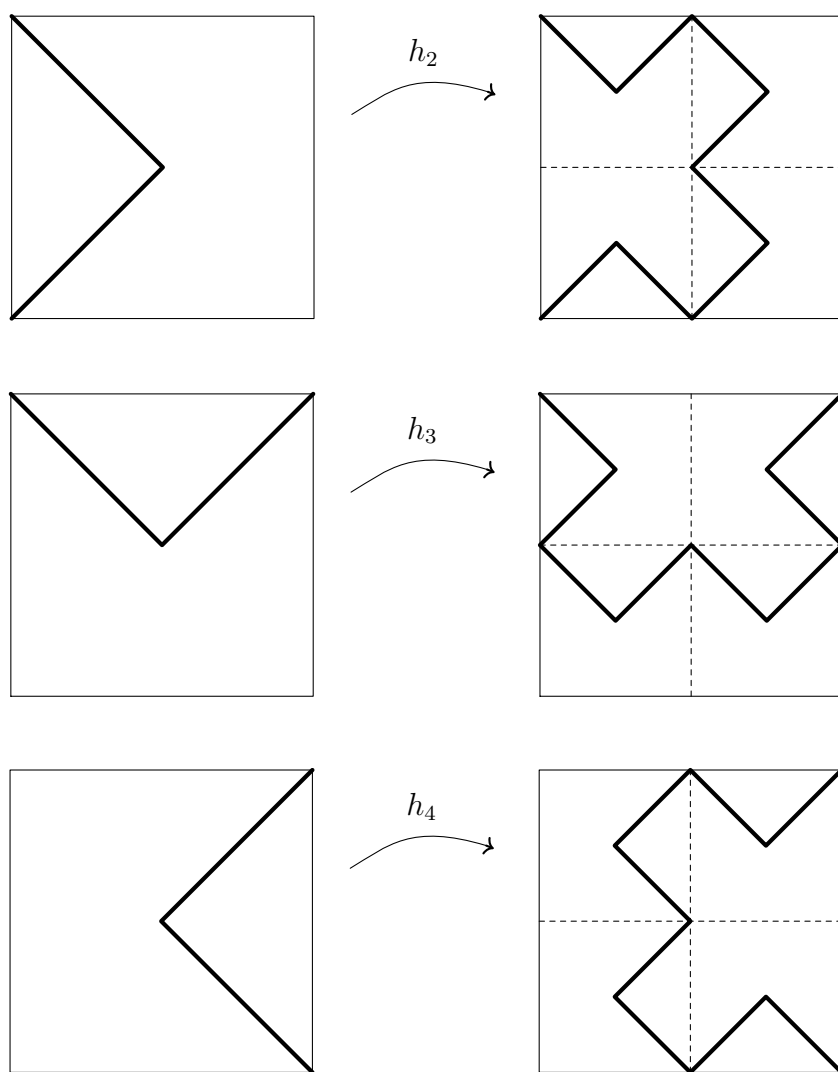




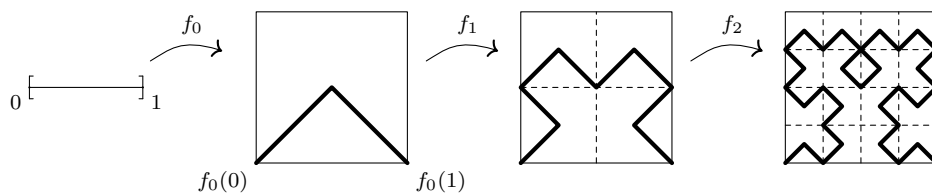
Consideriamo poi la curva $h_1 : g_1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ che trasforma l'immagine di g_1 nella spezzata costituita da 8 segmenti tutti della stessa lunghezza come in figura. Osserviamo che la curva inizia sempre in $g_1(a)$ e finisce in $g_1(b)$.



In modo analogo possiamo considerare le tre curve continue $h_i : g_i([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 2, 3, 4$, che trasformano l'immagine di g_i nella spezzata costituita da 8 segmenti tutti della stessa lunghezza illustrati nelle tre figure seguenti.



Consideriamo infine la successione di applicazioni continue $f_n : I \rightarrow I^2$ costruita usando le applicazioni precedenti e illustrata nella figura seguente:



Vogliamo mostrare che f_n converge ad una funzione continua e suriettiva $p : I \rightarrow I^2$ (la curva di Peano), rispetto alla metrica ρ su $C(I, I^2)$ (lo spazio delle funzioni continue da I a I^2) data da:

$$\rho(g, h) = \sup_{t \in I} d(g(t), h(t)), \quad g, h \in C(I, I^2),$$

dove d è la distanza su \mathbb{R}^2 definita da:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Dal Teorema D.1.2 segue che $(C(I, I^2), \rho)$ è completo (cfr. Esercizio D.2) quindi per mostrare che f_n è convergente è sufficiente mostrare che è di Cauchy. Per fare ciò osserviamo che ogni triangolo del quale è costituito $f_n(I)$ è contenuto in un quadrato di diametro $\frac{1}{2^n}$. Quando si passa da f_n a f_{n+1} stiamo rimpiazzando ognuno di questi triangoli con 4 triangoli che stanno nello stesso quadrato. Quindi la distanza tra $f_n(t)$ e $f_{n+1}(t)$ è al più $\frac{1}{2^n}$, cioè $d(f_n(t), f_{n+1}(t)) \leq \frac{1}{2^n}$, per ogni $t \in I$. Segue che $\rho(f, g) \leq \frac{1}{2^n}$.

Quindi per ogni m, n si ha:

$$\begin{aligned} \rho(f_n, f_{n+m}) &\leq \rho(f_n, f_{n+1}) + \rho(f_{n+1}, f_{n+2}) + \cdots + \rho(f_{n+m-1}, f_{n+m}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m-1}} \leq \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

dalla quale segue che f_n è una successione di Cauchy e in $(C(I, I^2), \rho)$ e quindi converge ad una funzione continua $p : I \rightarrow I^2$ rispetto alla metrica ρ . Per concludere resta da dimostrare la seguente:

Proposizione D.2.1. *L'applicazione p è suriettiva.*

Dimostrazione: Sia x un punto arbitrario di I^2 . Mostriamo che per ogni $\epsilon > 0$ il disco aperto $D_\epsilon(x)$ di centro x e raggio ϵ in \mathbb{R}^2 (rispetto alla metrica d) interseca $p(I)$. Da questo seguirà che $x \in \overline{p(I)}$ e siccome $p(I) \subset I^2$ è chiuso (compatto in uno spazio di Hausdorff) si ha che $x \in \overline{p(I)} = p(I)$ e quindi p è suriettiva. Per dimostrare che $D_\epsilon(x) \cap p(I) \neq \emptyset$ sia n_0 un numero naturale tale che $\rho(f_{n_0}, p) < \frac{\epsilon}{2}$ e $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2}$ (tale n_0 esiste in quanto f_n converge a p). Segue che $d(f_{n_0}(t), p(t)) < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $t \in I$. Scegliamo $t_0 \in I$ tale che $d(f_{n_0}(t_0), x) < \frac{1}{2^{n_0}}$; un tale t_0 esiste in quanto $f_{n_0}(I)$ è contenuto in ogni quadrato di lato $\frac{1}{2^{n_0}}$ nel quale è suddiviso I^2 (al passo n_0 ci sono 4^{n_0} di questi quadrati). Allora

$$d(x, p(t_0)) \leq d(x, f_{n_0}(t_0)) + d(f_{n_0}(t_0), p(t_0)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

che implica $p(t_0) \in D_\epsilon(x)$ e quindi $D_\epsilon(x) \cap p(I) \neq \emptyset$. □

D.3 Esercizi

Esercizio D.1. Dimostrare la disuguaglianza (D.2).

Esercizio D.2. Dimostrare la completezza di $(C(I, I^2), \rho)$.

Appendice E

Azioni di gruppi su insiemi

Sia X un insieme non vuoto e G un gruppo. Diremo che G **agisce a sinistra** su X ovvero che X è un G -**insieme sinistro** se esiste una funzione

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$$

tale che:

- $1 \cdot x = x, \forall x \in X$, dove 1 è l'elemento neutro di G ;
- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \forall x \in X, \forall g, h \in G$ (gh è la moltiplicazione in G).

Analogamente che G **agisce a destra** su X ovvero X è un G -**insieme destro** se esiste una funzione

$$X \times G \rightarrow X, (x, g) \mapsto x \cdot g$$

tale che:

- $x \cdot 1 = x, \forall x \in X$;
- $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh), \forall x \in X, \forall g, h \in G$.

Osservazione E.0.1. Se G agisce a destra su un insieme X allora si verifica facilmente che

$$g \cdot x := x \cdot g^{-1}$$

definisce un'azione sinistra di G su X .

Esempio E.0.2. Sia H un sottogruppo di un gruppo G allora

$$H \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto h \cdot g := hg$$

definisce un'azione sinistra di H su G .

Esempio E.0.3. Sia G un gruppo e $\mathcal{P}(G)$ il suo insieme delle parti. Allora

$$G \times \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G), \quad g \cdot U := gU = \{gu \mid u \in U\}$$

definisce un'azione sinistra di G su $\mathcal{P}(G)$.

Esempio E.0.4. Sia X uno spazio topologico e $\text{Omeo}(X)$ l'insieme degli omeomorfismi di X dotato del prodotto $gh = g \circ h$, $g, h \in \text{Omeo}(X)$. Allora l'applicazione

$$\text{Omeo}(X) \times X \rightarrow \text{Omeo}(X), \quad g \cdot x := g(x)$$

definisce un'azione sinistra di $\text{Omeo}(X)$ su X .

Sia G un gruppo che agisce a sinistra su un insieme non vuoto X . Possiamo definire una relazione d'equivalenza su X ponendo $x \sim y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$. L'insieme delle classi di equivalenza verrà indicato con X/G e la proiezione sul quoziente $\pi : X \rightarrow X/G$. Fissato $x \in X$, il sottoinsieme di X definito da

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

È chiamata l'**orbita** di x . Chiaramente $x \sim y$ se e solo se $y \in G \cdot x$. Lo **stabilizzatore** o **gruppo di isotropia** G_x è il sottogruppo di G definito da

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Le classi laterali sinistre di G_x in G verranno denotate con G/G_x . Osserviamo che dato un G -insieme sinistro X e $x \in X$, l'orbita $G \cdot x$ e le classi laterali sinistre G/G_x sono G -insiemi sinistri in modo naturale. Siano X e Y due G -insiemi sinistri. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta **G -equivariante** se

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x), \quad \forall x \in X, \forall g \in G.$$

Proposizione E.0.5. *Sia X un G -insieme sinistro, e $x \in X$. Allora esiste una bigezione equivariante tra $G \cdot x$ e G/G_x .*

Dimostrazione: Definiamo l'applicazione

$$\Phi : G \cdot x \rightarrow G/G_x, \quad y = g \cdot x \mapsto [g],$$

dove $[g]$ denota la classe laterale sinistra di g in G/G_x . Si verifica facilmente che Φ è ben definita, equivariante e invertibile (con inversa $\Psi([g]) = g \cdot x$). \square

Ricordiamo infine che un gruppo G agisce **liberamente** (a sinistra o a destra) su un insieme non vuoto X (e l'azione verrà detta **libera**) se per ogni $g \neq 1$ e

per ogni $x \in X$, $g \cdot x \neq x$. Mentre G agisce **transitivamente** (a sinistra o a destra) su un insieme X (e l'azione verrà detta **transitiva**) se per ogni $x, y \in X$ esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.

Quindi se G agisce liberamente e transitivamente (a sinistra) su un insieme X allora per ogni $x, y \in X$ esiste un unico g tale che $g \cdot x = y$.

Bibliografia

- [1] G.E. Bredon *Topology and Geometry*
- [2] Fraleigh J. B., *A First Course in Abstract Algebra, 7th Edition*, Narosa Publishing House, 1986.
- [3] Greenberg, Marvin J.; Harper, John R. *Algebraic topology. A first course*. Mathematics Lecture Note Series, 58. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981
- [4] Hatcher A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] Kosnioskowski C., *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli 1989.
- [6] Lee J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer 2000.
- [7] Loi A., *Introduzione alla Topologia Generale*, Aracne Editrice (2013).
- [8] Manetti M., *Topologia*, Springer-Verlag Italia, 2008.
- [9] Massey W., *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1991.
- [10] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1998.
- [11] Milnor J., *Analytic proofs of the “Hair ball theorem” and the Brouwer fixed point theorem*, The American Mathematical Monthly Vol. 85 No. 7, (1978) 521-524.
- [12] Moise E.E., *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, Springer-Verlag, 1977.
- [13] Munkres J. R., *Topology, A First Course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. 1975.
- [14] Richeson D. S., *Euler’s Gem*, Princeton University Press, 2008.
- [15] Rolfsen D., *Knots and Links*, Berkley, Publish or Perish, 1978.
- [16] Sernesi E., *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.
- [17] Singer I.M., Thorpe J.A., *Lezioni di Topologia elementare e di Geometria*, trad. it. Boringhieri Torino 1980.

- [18] Tanré D., Félix Y., *Topologie Algébrique - Cours et exercices corrigés* Dunod
- [19] Vick J.W.(1973), *Homology Theory*, Academy Press, Oxford, 1973.