

③ Retratto spazio di Hausdorff \Rightarrow chiuso

$A \subseteq X$ retratto di X se $\exists r: X \rightarrow A$ continua $\mid r \circ i = \text{id}_A$, $i: A \hookrightarrow X$ inclusione

Siano $x \in X \setminus A$, $r(x) \in A \Rightarrow r(x) \neq x$

X Hausdorff $\Rightarrow \exists U \ni x, V \ni r(x)$ aperti $\mid U \cap V = \emptyset$

r continua $\Rightarrow r^{-1}(V)$ aperto
 $r(x) \in V \Rightarrow x \in r^{-1}(V)$ $\Bigg\} \Rightarrow W := U \cap r^{-1}(V) \ni x$ aperto

Sia $y \in W \Rightarrow y \in r^{-1}(V) \Rightarrow r(y) \in V \Rightarrow r(y) \notin U \because U \cap V = \emptyset$

$\left. \begin{array}{l} y \in U \subseteq W \\ r(y) \notin U \end{array} \right\} \Rightarrow r(y) \neq y \Rightarrow y \notin A$ $\nearrow r(a) = a, \forall a \in A$

A questo punto $\forall y \in W, y \notin A \Rightarrow W \cap A = \emptyset$

Siccome $\forall y \in X \setminus A, \exists W \ni y$ aperto $\Rightarrow X \setminus A$ aperto $\Rightarrow A$ chiuso