Differential Geometry Notes

Simone Iovine

Tuesday 13^{th} June, 2023

Contents

Notes

The following notes are a revision of the notes taken during prof. Andrea Loi's online lessons of Differential geometry 2020-2021 (Mathematics dept., Cagliary University).
Some definitions are taken from *Introduzione alla Topologia Generale* of Andrea Loi [1].
The professor followed the following texts during the course: *Introduction to Smooth Manifolds* di John M. Lee [2] e *An Introduction to Manifolds* di Loring W. Tu [3].

Professor's site: `https://loi.unica.it/geomdiff2021.html`

Notation

Symbol	Meaning
$=$	equality
$\equiv$	identity
$\{\dots\}$	set elements
$\exists$	exists
$\exists\,!$	only one exists
$\forall$	for all
$\in$	belongs to
$\implies$	implies (sufficient)
$\impliedby$	implied by (necessary)
$\iff$	if and only if
$\subset$	is a subset of/included
$\subseteq$	included or equal
$\supset$	includes
$\supseteq$	includes or equal
$\setminus$	set difference
$\cap$	intersection
$\cup$	union
$\emptyset$	empty set
$\sqcup$	disjoint union
$\mathcal{P}(S)$	power set of S
$\times$	direct product
$\oplus$	direct sum
$\to$	function/morphism
$\mapsto$	maps to
$\circ$	composition
$f\big\rvert_U$	f evaluated in U
id	identity
$\therefore$	therefore
$\because$	because
$\wedge$	logic and
$\vee$	logic or
∞	infinity
$\mid$	such that
$\sim$	equivalence
$^S/_\sim$	quotient

Symbol	Meaning
$\overset{iso}{\simeq}$	isomorphism
$\overset{omeo}{\simeq}$	omeomorphism
$\overset{diff}{\simeq}$	diffeomorphism
$\overset{omo}{\simeq}$	omomorphism
$\mathbb{N}$	natural numbers
$\mathbb{Z}$	integer numbers
$\mathbb{Q}$	rational numbers
$\mathbb{R}$	real numbers
$\mathbb{C}$	complex numbers
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$
$\mathbb{T}^n$	n-dimensional torus
$\mathbb{S}^n$	n-dimensional sphere
$\mathbb{R}\mathcal{P}^n$	n-dimensional real projective space
$\mathcal{B}$	base
$\langle v\rangle$	spans
$\mathcal{PC}$	critical point
$\mathcal{PR}$	regular points
$\mathcal{VC}$	critic values
$\mathcal{VR}$	regular values
$\mathfrak{g}$	Lie algebra (associated to G)
$\sum_{i=1}^n$	summation from 1 to n
$\prod_{i=1}^n$	product from 1 to n
$\lVert v\rVert$	modulo/norm of v
det	determinant
tr	trace
$\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$	matrix
$\left\lvert\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right\rvert$	matrix determinant
$\mathbb{1}$	identity matrix
supp	support
Ob	objects (category)
Mor	morphisms (category)
$\lceil v\rceil$	”ceiling” function
i.e.	means that (*id est*)
e.g.	as an example (*exempli gratia*)

Chapter 1

Differential geometry in euclidean spaces

1.1 Smooth and real analytic functions

1.1.1 Smooth functions

Let us consider $\mathbb{R}^n$ with $n \geqslant 1$ and $U \subset \mathbb{R}^n$ open, and let $f : U \to \mathbb{R}$ be a function and $p \in U$ a point: defining the kth-order derivatives of f as

$$\frac{\partial^k f}{\partial(x^1)^{i_1} \cdots \partial(x^k)^{i_k}} \quad \text{where} \quad \sum_{j=1}^{k} i_j = k \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

we say that $f \in C^k$ in p with $k \in \mathbb{N}$ if the kth-order derivatives of f exist and are continuous in p.
Let $k = 0$, then

$$f \in C^0 \iff f \text{ continuous} \tag{1.2}$$

Notation-wise:

- $f \in C^k$ in U if $f \in C^k$ in p for all $p \in U$
- $f \in C^\infty$ or *smooth* in p if $f \in C^k$ in p for all $k \in \mathbb{N}$
- $f \in C^\infty$ or *smooth* in U if $f \in C^\infty$ for all $p \in U$

therefore a function is denoted smooth if all its derivatives of any order exist and are finite.
In general, we consider functions defined not in $\mathbb{R}$ but in $\mathbb{R}^n$.
A function $f : U \to \mathbb{R}^n$ with $n \geqslant 1$ and $U \subset \mathbb{R}^m$ with $m \geqslant 1$ open is C^k in p if all its components $f^j : U \to \mathbb{R}$ are $f^j \in C^k$ in p with $k \geqslant 0$. In particular, $f = (f^1, \dots, f^m)$ or $f^j = \pi_j \circ f$ where π_j is the *projection*

$$\begin{aligned} \pi_j : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto x^j \end{aligned} \tag{1.3}$$

for $j = 1, \dots, m$.
A function $f : U \to \mathbb{R}^m$ is:

- C^k in U if $f^j \in C^k$ in U
- smooth in $p \in U$ if $f^j \in C^\infty$ in p for all $j = 1, \dots, m$
- smooth in U if $f^j \in C^\infty$ in U for all $j = 1, \dots, m$

Examples

1) Cubic root Let

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{1/3} \end{aligned} \tag{1.4}$$

This function is continuous ($f \in C^0$) and it is and homeomorphism[1] but $f \notin C^1$ in the origin $p = 0$ because

$$f' = \frac{x^{-2/3}}{3} \tag{1.5}$$

which is not defined in the origin and therefore $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

2) C^1 function which is not C^2 Integrating f from the previous example, we obtain a C^1 function which is not C^2. Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3x^{2/3}}{4} \tag{1.6}$$

from which $g \in C^1(\mathbb{R})$ but $g \notin C^2(\mathbb{R})$.

3) C^k function which is not C^{k+1} See Exercise A.1.

1.1.2 Funzioni reali analitiche

Sia il punto $p \in \mathbb{R}^n$, un *intorno* U di p è un aperto di $\mathbb{R}^n$ che contiene p.
Sia una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, diremo che f è *reale analitica* in $p \in U$ se f coincide con il suo sviluppo di Taylor intorno a p. Questo significa che se prendiamo una funzione $f(x)$ con $x = (x^1, \dots, x^n)$ e $p = (p^1, \dots, p^n)$ abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^i - p^i) + \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(p)((x^{i_1} - p^{i_1}) \cdots (x^{i_k} - p^{i_k})) + \cdots \\ &= f(p) + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(p) \prod_{j=1}^k (x^j - p^j) \end{aligned} \tag{1.7}$$

[1]Both the function and its inverse are continuous.

Se abbiamo una serie di potenze, possiamo derivarla termine a termine dunque, siccome una funzione reale analitica coincide con il suo sviluppo in serie di Taylor, è possibile derivarla ottenendo sempre una funzione continua con derivata continua. A questo punto $f \in C^\infty$: questo segue dall'analisi in quanto le serie di potenze possono essere derivate un numero arbitrario di volte.

Esempi

1) Seno La funzione $f(x) = \sin(x)$ è liscia reale analitica e ha sviluppo di Taylor

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \tag{1.8}$$

Per calcolare la derivata possiamo derivare termine a termine lo sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) \frac{x^{2j}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\ &= \cos(x) \end{aligned} \tag{1.9}$$

2) Esponenziale Per trovare la derivata di $f(x) = e^x$ ripetiamo lo stesso procedimento

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} j\, \frac{x^{j-1}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \tag{1.10}$$

3) Funzione liscia non reale analitica Un esempio di funzione liscia ma non reale analitica è

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Per dimostrare che sia C^0 dobbiamo verificare che

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0 \tag{1.12}$$

Per dimostrare che sia liscia[2]

[2] Vedi Esercizio A.2.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-1/x^2} = 0 \tag{1.13}$$

Tutto questo ci dice che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Se fosse anche reale analitica, dovrebbe coincidere con il suo sviluppo in serie di Taylor anche nell'origine, dunque

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} x^k \tag{1.14}$$

ma $f(x)$ nell'intorno di 0 è nulla solo per $x \leqslant 0$ mentre lo sviluppo di Taylor è sempre nullo: questa contraddizione porta a dire che, nonostante $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, questa non è reale analitica, scritto anche come $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$.
Un altro motivo per il quale $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$ segue dal fatto che se $f : U \to \mathbb{R}$ con $U \in \mathbb{R}$ aperto è reale analitica e $f = 0$ in un aperto, allora $f \equiv 0$ ovunque[3].

1.2 Diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$

Siano $U, V \in \mathbb{R}^n$ aperti, diremo che $f : U \to V$ è un *diffeomorfismo* se è una bigezione[4], $f \in C^\infty(U)$ e la sua inversa $g : V \to U$ è $g \in C^\infty(V)$.
Ad esempio, la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned} \tag{1.15}$$

è una bigezione liscia ma la sua inversa non è liscia, dunque f non è un diffeomorfismo.
Quando esiste un diffeomorfismo tra due aperti, si dice che questi sono *diffeomorfi*, i.e. U e V sono diffeomorfi se esiste $f : U \to V$ diffeomorfismo, in notazione $U \simeq V$.

Theorem 1 (Invarianza topologica della dimensione)**.** *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti omeomorfi allora $n = m$.*

Theorem 2 (Invarianza differenziabile della dimensione)**.** *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti diffeomorfi allora $n = m$[5].*

È naturale verificare se gli spazi legati da omeomorfismi siano legati anche da diffeomorfismi. Ad esempio, abbiamo che i seguenti sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$ sono diffeomorfi tra loro[6]:

$$(a, b) \simeq (c, +\infty) \simeq (-\infty, d) \simeq \mathbb{R}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b \tag{1.16}$$

[3] Questa proprietà è valida anche se si considera una costante diversa da 0.
[4] Perciò è invertibile.
[5] Questo teorema implica quello di "Invarianza topologia della dimensione" in quanto la condizione di diffeomorfismo implica quella di omeomorfismo: una bigezione liscia con inversa liscia è una bigezione continua con inversa continua, poiché $C^\infty \implies C^0$.
[6] Vedi Esercizio A.3.

1.2.1 Diffeomorfismo tra $B_\delta(c)$ e $\mathbb{R}^n$

Indichiamo con $B_1(0)$ la *palla* di centro l'origine e raggio unitario, i.e.

$$B_1(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} < 1 \right\} \tag{1.17}$$

Per $n = 1$, $B_1(0) \equiv (-1, 1) \simeq \mathbb{R}$.
Definiamo

$$\begin{aligned} f : B_1(0) &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \cdots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right) \end{aligned} \tag{1.18}$$

questa applicazione è un diffeomorfismo. Per verificarlo, dobbiamo dimostrare che f sia un bigezione, $f \in C^\infty(B_1(0))$ e che $f^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
L'inversa è

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^n &\to B_1(0) \\ x &\mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}, \cdots, \frac{x^n}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} \right) \end{aligned} \tag{1.19}$$

in quanto

$$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \ \wedge g \circ f = \mathrm{id}_{B_1(0)} \tag{1.20}$$

Perché sia f che f^{-1} siano lisce, dobbiamo verificare che ogni loro componente lo sia, il quale è verificato perché la derivata di una delle componenti di f ha al denominatore sempre

$$\sqrt{1 - \|x\|^2} \neq 0, \quad \forall x \in B_1(0) \tag{1.21}$$

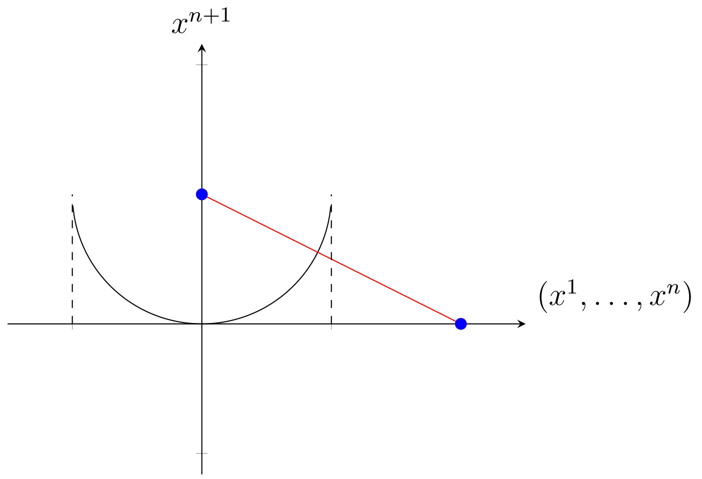
e lo stesso vale per la sua inversa

$$\sqrt{1 + \|x\|^2} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1.22}$$

Corollary 2.1. *La palla di centro c e raggio δ con $c \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \geqslant 0$ è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$, i.e. $B_\delta(c) \simeq B_1(0) \simeq \mathbb{R}^n$.*

Proof. Vedi Esercizio A.4; la dimostrazione passa per il mostrare che le traslazioni (le quali sono lineari e affini) e le omotetie (scala di un fattore δ) siano diffeomorfismi. □

Per praticità di notazione, chiamiamo h il diffeomorfismo $B_\delta(c) \to \mathbb{R}^n$ definito sopra. Per far vedere come nasce questo diffeomorfismo, si può usare la costruzione geometrica a lato.



Consideriamo la semicalotta aperta in $\mathbb{R}^{n+1}$ centrata in $(0, \dots, 0, 1)$ di raggio 1:

$$S = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; (x^{n+1})^2 + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = 1 \wedge x^{n+1} < 1 \right\} \tag{1.23}$$

La palla $B_1(0)$ vive nella proiezione della semicalotta sull'iperpiano $(x^1, \dots, x^n)$, definita come

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \tag{1.24}$$

Questa proiezione permette di costruire l'applicazione h in due passaggi: prima prendiamo un punto in $B_1(0)$, lo proiettiamo su S e, con una proiezione stereografica, lo portiamo su $\mathbb{R}^n$. La prima applicazione è $f : B_1(0) \to S$ mentre la seconda $g : S \to \mathbb{R}^n$, cioè la proiezione stereografica dal punto $(0, \dots, 0, 1)$. Abbiamo dunque che $g \circ f = h$. Le mappe sono

$$f(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(x^1, \dots, x^n, 1 - \sqrt{1 - \|x\|^2} \right) \tag{1.25}$$

$$g(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}, 0 \right) \tag{1.26}$$

da cui

$$\begin{aligned} h(x^1, \dots, x^{n+1}) &= (g \circ f)(x^1, \dots, x^{n+1}) \\ &= g\left(x^1, \dots, x^n, 1 - \sqrt{1 - \|x\|^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, 0 \right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

A questo punto $B_1(0) \simeq \mathbb{R}^n$: dal punto di vista della geometria differenziale, due oggetti diffeomorfi vengono considerati equivalenti[7].

[7] In topologia, vale lo stesso ragionamento per oggetti omeomorfi.

1.2.2 Teorema di Taylor con resto

Una funzione reale analitica coincide con il suo sviluppo di Taylor. Per una funzione liscia questo non è detto: la coincidenza di una funzione liscia con il suo sviluppo di Taylor è data a meno di un *resto*. Introduciamo ora il concetto di insieme stellato rispetto a un punto per definire il resto sopraccitato.
Un sottoinsieme aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ è *stellato* rispetto a un punto $p \in U$ se il segmento di retta che unisce p a qualsiasi $x \in U$ è interamente contenuto in U.

Remark. *Un insieme convesso è stellato rispetto a ogni suo punto.*

L'ipotesi che un sottoinsieme sia stellato è forte a livello globale ma sempre rispettata a livello locale, in quanto è sempre possibile trovare un aperto stellato rispetto a un punto all'interno di un insieme.

Theorem 3 (Taylor con resto)**.** *Sia $f : U \to \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a un punto $p \in U$ e supponiamo $f \in C^\infty(U)$, allora esistono n funzioni $g_i \in C^\infty(U)$ per $i = 1, \dots, n$ definite come*

$$g_i(p) \doteq \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad i = 1, \dots, n \tag{1.28}$$

tali che

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i)\, g_i(x), \quad \forall x \in U \tag{1.29}$$

Proof. Consideriamo il segmento r che unisce p a un punto $x \in U$ con x fissato arbitrariamente:

$$r = p + t(x - p), \quad t \in [0, 1] \tag{1.30}$$

Essendo U stellato rispetto a p, possiamo valutare f in questo segmento (tutti i punti di r sono definiti in U). Consideriamo fissi x e p e derivo $f(r)$ rispetto a t

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(r) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p + t(x - p)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)) \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \right)^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p))\, (x^i - p^i) \end{aligned} \tag{1.31}$$

per la *regola della catena*.
Integrando rispetto a t nell'intervallo $[0, 1]$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p+t(x-p))\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\,(p+t(x-p))\,(x^i-p^i)\,\mathrm{d}t \\ f(x)-f(p) &= \sum_{i=1}^n (x^i-p^i)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}\,(p+t(x-p))\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1.32}$$

chiamando

$$g_i(x) \doteq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}\,(p+t(x-p))\,\mathrm{d}t \tag{1.33}$$

si può scrivere

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i-p^i)\,g_i(x) \tag{1.34}$$

dove $g_i(x) \in C^\infty(U)$ perché derivata parziale di una funzione liscia.
Inoltre

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}\,(p)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,(p), \quad i=1,\dots,n \tag{1.35}$$

□

Sia $f : U \to \mathbb{R}$ con p corrispondente all'origine: per il teorema di Taylor con resto, sappiamo che esiste una funzione $g_1 \in C^\infty(U)$ tale che

$$f(x) = f(0) + x\,g_1(x) \quad \text{con} \quad g_1(0) = f'(0) \tag{1.36}$$

Riapplicando il teorema a g_1 (in quanto liscia), otteniamo

$$g_1(x) = g_1(0) + xg_2(x) \qquad \begin{cases} g_2 \in C^\infty(U) \\ g_2(0) = g_1'(0) \end{cases} \tag{1.37}$$

Per induzione

$$g_i(x) = g_i(0) + xg_{i+1}(x) \qquad \begin{cases} g_{i+1} \in C^\infty(U) \\ g_{i+1}(0) = g_i'(0) \end{cases} \qquad \forall i \geqslant 1 \tag{1.38}$$

Sostituendo in f tutte queste funzioni, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xg_1(x) \\ &= f(0) + xg_1(0) + x^2 g_2(x) \\ &= f(0) + xg_1(0) + x^2 g_2(0) + x^3 g_3(x) \\ &\vdots \\ &= f(0) + xg_1(0) + \cdots + x^k g_k(0) + x^{k+1} g_{k+1}(x) \end{aligned} \tag{1.39}$$

A questo punto si può definire

$$g_k(0) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0) \doteq \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{1.40}$$

da cui

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{i} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^{i+1} g_{i+1}(x), \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{1.41}$$

dove la prima parte coincide con lo sviluppo in serie di Taylor mentre l'ultimo termine indica il *resto*.
Per esercizi sul resto, vedi Esercizi A.5 e A.6.

1.3 Vettori tangenti in $\mathbb{R}^n$

Preso un punto $p \in \mathbb{R}^n$, lo *spazio tangente* in quel punto viene chiamato $T_p(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio tangente a un punto p è l'insieme[8] di tutti i vettori che escono dal punto stesso. Essendo $T_p(\mathbb{R}^n) \overset{iso}{\simeq} \mathbb{R}^n$, un elemento $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ può dunque essere rappresentato come un *vettore riga o colonna*

$$\begin{bmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{bmatrix} \qquad \vee \qquad \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

dove le v^i sono le componenti del vettore nella base canonica, i.e.

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i \tag{1.43}$$

Per generalizzare questo concetto, considereremo gli elementi degli spazi tangenti non più come oggetti geometrici vettori ma come *derivazioni*.

[8] Formalmente, è uno spazio vettoriale con origine il punto p.

1.3.1 Derivate direzionali

Siano un'applicazione $f : U \to \mathbb{R}$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, un punto $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e un vettore $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo la retta $c(t)$ che passa per p con direzione v, parametrizzata come

$$c(t) = p + tv, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.44}$$

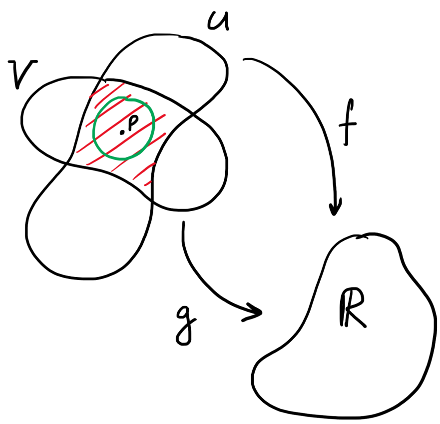
Definiamo la *derivata direzionale* di f rispetto a v come

$$\begin{aligned} D_v f &\doteq \lim_{t\to 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(c(t))\bigg|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t)\right)^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, v^i \end{aligned} \tag{1.45}$$

dove $D_v f \in \mathbb{R}$ e $v = \begin{bmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{bmatrix}$.

Remark. *Sia un'applicazione $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $g : V \to \mathbb{R}$ con $V \subset \mathbb{R}$ e $V \cap U \neq \emptyset$. Se $g \equiv f$ in un intorno W del punto $p \in W \subset U \cap V$, allora la loro derivata direzionale è la stessa*[9]*, i.e.*

$$D_v g = D_v f, \quad \forall p \in W \tag{1.46}$$



Definiamo ora l'insieme di coppie

$$X \doteq \{(f, U) \mid f \in C^\infty(U),\, U \text{ intorno di } p \in U\} \tag{1.47}$$

Diremo che[10] per $p \in W$

$$(f, U) \sim (g, V) \iff \exists\, W \subseteq U \cap V,\, W \ni p \mid f(q) = g(q), \quad \forall q \in W \tag{1.48}$$

[9] Questo perché il limite del rapporto incrementale nella definizione di $D_v f$ dipende da un intorno arbitrariamente piccolo.

[10] Il simbolo $\sim$ indica una relazione di equivalenza.

Questa è effettivamente una relazione di equivalenza in quanto riflessiva, simmetrica e transitiva. Prendiamo dunque lo spazio quoziente[11]

$$X/\sim \doteq C^\infty_p(\mathbb{R}^n) \tag{1.49}$$

dove un elemento $[(f, U)]$ di questo spazio è chiamato *germe* intorno al punto p ed è una *classe di equivalenza* di coppie (f, U). A questo punto, $C^\infty_p(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei germi di funzioni lisce intorno a p, i.e.

$$C^\infty_p(\mathbb{R}^n) = \{[(f, U)] \mid f : U \to \mathbb{R},\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ U \subset \mathbb{R}^n\} \tag{1.50}$$

Possiamo definire un'applicazione

$$\begin{aligned} D_v : C^\infty_p(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ [(f, U)] &\mapsto D_v f \end{aligned} \tag{1.51}$$

Questa applicazione è ben definita in quanto l'associazione di un germe di funzioni a un numero reale non dipende dal rappresentante scelto poiché

$$(f, U) \sim (g, V) \implies D_v g = D_v f \tag{1.52}$$

Esempio

Siano le applicazioni

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \\ g(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} x^j, \quad x \in (-1, 1) \end{cases} \tag{1.53}$$

Nonostante in generale $f \neq g$, nell'intorno $(-1, 1)$ di $p = 0$ vale l'equivalenza per i germi

$$(f, \mathbb{R} \setminus \{1\}) \sim (g, (-1, 1)) \tag{1.54}$$

in altre parole, le classi di equivalenza

$$[(f, \mathbb{R} \setminus \{1\})] = [(g, (-1, 1))] \in C^\infty_0(\mathbb{R}) \tag{1.55}$$

[11] Approfondiremo l'argomento degli spazi quoziente nella Sottosezione **??**.

Algebra su campo $\mathbb{K}$

Un'algebra A su un campo $\mathbb{K}$ è una coppia $(V, \cdot)$ con V spazio vettoriale su un campo[12] $\mathbb{K}$ e un'operazione binaria

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\to A \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned} \tag{1.56}$$

tale che soddisfi le condizioni

$$\begin{cases} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & \text{associatività}^{13} \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c & \\ c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b & \text{distributività} \\ \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) & \text{omogeneità} \end{cases} \tag{1.57}$$

per qualsiasi $a, b, c \in A$ e qualsiasi $\lambda \in \mathbb{K}$.
Equivalentemente, un algebra su un campo $\mathbb{K}$ può essere pensata come un anello[14] $(V, +, \cdot)$ il quale sia anche uno spazio vettoriale con aggiunta la proprietà di omogeneità.

1.3.2 $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come algebra su $\mathbb{R}$

Definiamo la somma

$$[(f, U)] + [(g, V)] = [(f + g, U \cap V)], \quad [(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.58}$$

Questa somma è ben definita in quanto, prendendo due rappresentanti qualunque di $[(f, U)]$ e $[(g, V)]$, esiste sempre un intorno in cui questa somma sia definita.
Allo stesso modo, definiamo il prodotto

$$[(f, U)] \cdot [(g, V)] = [(fg, U \cap V)], \quad [(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.59}$$

e la moltiplicazione per scalari

$$\lambda[(f, U)] = [(\lambda f, U)], \quad \lambda \in \mathbb{R},\ [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.60}$$

Tutte queste operazioni sono ben definite e soddisfano tutte le proprietà di un'algebra perché, per funzioni lisce, la somma, il prodotto e la moltiplicazione soddisfano queste stesse proprietà.
A questo punto si può dire che $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ sia un'algebra su $\mathbb{R}$.
Nonostante non sia necessario per un'algebra, $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ è anche commutativa e unitaria[15] su $\mathbb{R}^n$.

[12] Dunque con operazioni

$$\begin{cases} a + b \in A, & \forall a, b \in A \\ \lambda a \in A, & \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$$

[13] In generale, non è necessaria l'associatività per definire un'algebra.
[14] Le proprietà di associatività e distributività sono sufficienti per renderla un anello.
[15] Vedi Esercizio A.7.

1.3.3 Derivazione puntuale di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$

A questo punto, possiamo definire l'applicazione chiamata *derivazione puntuale* dell'algebra $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} D : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ [(f,U)] &\mapsto D_v f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, v^i \end{aligned} \tag{1.61}$$

con $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_p(\mathbb{R}^n)$.
Questa applicazione possiede le seguenti proprietà:

1. $\mathbb{R}$-linearità[16], i.e.

$$D([(f,U)] + [(g,V)]) = D([(f,U)]) + D([(g,V)]) \tag{1.62}$$
$$D(\lambda[(f,U)]) = \lambda D([(f,U)]) \tag{1.63}$$

2. soddisfa la *regola di Leibniz*, i.e.

$$D([(f,U)] \cdot [(g,V)]) = D([(f,U)])\, g(p) + f(p)\, D([(g,V)]) \tag{1.64}$$

Dimostrazione ($\mathbb{R}$-linearità (somma)).

$$\begin{aligned} D([(f,U)] + [(g,V)]) &= D([(f+g, U \cap V)]) \\ &= D_v(f+g) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f+g)}{\partial x^j}(p)\, v^j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\, v^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^j}(p)\, v^j \\ &= D_v f + D_v g \\ &= D([(f,U)]) + D([(g,V)]) \end{aligned} \tag{1.65}$$

per qualsiasi $[(f,U)], [(g,V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $p \in U \cap V \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. □

Dimostrazione ($\mathbb{R}$-linearità (moltiplicazione per scalare)).

$$\begin{aligned} D(\lambda[(f,U)]) &= D([(\lambda f, U)]) \\ &= D_v(\lambda f) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x^j}(p)\, v^j \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\, v^j \\ &= \lambda D([(f,U)]) \end{aligned} \tag{1.66}$$

[16] Rispetto alla struttura di spazio vettoriale di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$, qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. □

Dimostrazione (Regola di Leibniz).

$$\begin{aligned} D([(f, U)] \cdot [(g, V)]) &= D([(fg, U \cap V)]) \\ &= D_v(fg) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (fg)}{\partial x^j}\,(p)\, v^j \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\,(p)\, v^j \right) g(p) + f(p) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^j}\,(p)\, v^j \right) \\ &= (D_v f)\, g(p) + f(p)\, (D_v g) \\ &= D([(f, U)])\, g(p) + f(p)\, D([(g, V)]) \end{aligned} \tag{1.67}$$

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $p \in U \cap V \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. □

La derivazione puntuale è quindi un modo per associare un numero reale a un germe di funzioni, soddisfacendo le proprietà definite sopra.
Indichiamo dunque l'insieme delle derivazioni puntuali di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e.

$$\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \doteq \left\{ D([(f, U)]) = D_v f \doteq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\,(p)\, v^j \in \mathbb{R} \;\middle|\; [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n), v \in T_p(\mathbb{R}^n) \right\} \tag{1.68}$$

1.3.4 Isomorfismo tra $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$

Definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : T_p(\mathbb{R}^n) &\to \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ v &\mapsto D_v \end{aligned} \tag{1.69}$$

questa associa il vettore $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in \mathbb{R}^n$ alla derivazione puntuale D_v, la quale è a sua volta un'applicazione che associa la classe di equivalenza di germi di funzioni $[(f, U)]$ alla derivata direzionale di f rispetto a v, i.e.

$$D_v f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\,(p)\, v^j \in \mathbb{R} \tag{1.70}$$

Possiamo usare lo stesso simbolo, i.e. $D_v([(f, U)]) = D_v f$, perché questa relazione vale per qualunque rappresentante della classe.
L'applicazione φ permette di considerare equivalentemente l'insieme delle derivazioni puntuali

dell'algebra dei germi delle funzioni $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e lo spazio tangente a un punto, in quanto questi due insiemi sono isomorfi tra loro tramite φ stessa. Utilizzare le derivazioni è utile perché per alcune varietà differenziabili non esiste una visualizzazione dello spazio tangente.

Theorem 4. *L'applicazione φ è un isomorfismo degli spazi vettoriali $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e. tramite φ si ha che*

$$T_p(\mathbb{R}^n) \overset{iso.}{\simeq} \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.71}$$

Per dimostrare questo teorema è necessario notare che gli elementi $D_i \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ costituiscono uno spazio vettoriale[17] con operazioni

$$\begin{aligned} + : \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \times \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) &\to \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ (D_v, D_w) &\mapsto D_v + D_w \end{aligned} \tag{1.72}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) &\to \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ (\lambda, D_v) &\mapsto \lambda D_v \end{aligned} \tag{1.73}$$

Consideriamo ora la seguente preposizione:

Proposition 4.1. *Le operazioni dello spazio vettoriale $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ su $\mathbb{R}$ (definite sopra) sono $\mathbb{R}$-lineari e la somma soddisfa la regola di Leibniz, i.e.*

$$(D_v + D_w)([(f,U)]) = D_v([(f,U)]) + D_w([(f,U)]) \tag{1.74}$$

$$D(\lambda[(f,U)]) = \lambda D([(f,U)]) = (\lambda D)([(f,U)]) \tag{1.75}$$

$$(D_v + D_w)([(f,U)] \cdot [(g,V)]) = (D_v + D_w)([(f,U)])\, g(p) + f(p)\, (D_v + D_w)([(g,V)]) \tag{1.76}$$

per qualsiasi $D, D_v, D_w \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione (Proposizione). Per la $\mathbb{R}$-linearità:

$$\begin{aligned} (D_v + D_w)(\alpha[(f,U)] + \beta[(g,V)]) &= D_v(\alpha[(f,U)] + \beta[(g,V)]) + \\ &\quad + D_w(\alpha[(f,U)] + \beta[(g,V)]) \\ &= \alpha D_v([(f,U)]) + \beta D_v([(g,V)]) + \\ &\quad + \alpha D_w([(f,U)]) + \beta D_w([(g,V)]) \\ &= \alpha(D_v + D_w)([(f,U)]) + \beta(D_v + D_w)([(g,V)]) \end{aligned} \tag{1.77}$$

per qualsiasi $D_v, D_w \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Per la regola di Leibniz:

[17] Vedi Esercizio A.8.

$$\begin{aligned}(D_v + D_w)([(f,U)] \cdot [(g,V)]) &= D_v([(f,U)] \cdot [(g,V)]) + D_w([(f,U)] \cdot [(g,V)]) \\ &= D_v([(f,U)])\, g(p) + f(p)\, D_v([(g,V)]) + \\ &\quad + D_w([(f,U)])\, g(p) + f(p)\, D_w([(g,V)]) \\ &= (D_v + D_w)([(f,U)])\, g(p) + f(p)\, (D_v + D_w)([(g,V)])\end{aligned} \tag{1.78}$$

per qualsiasi $D_v, D_w \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$. □

Proof. Per dimostrare che φ sia un isomorfismo è necessario dimostrare che φ sia $\mathbb{R}$-lineare, iniettiva[18] e suriettiva[19].
Per l'$\mathbb{R}$-linearità, sia $[(f,U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}D_{\alpha v + \beta w}([(f,U)]) &= D_{\alpha v + \beta w}(f) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\,(\alpha v^j + \beta w^j) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\, v^j + \beta \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\, w^j \\ &= \alpha D_v f + \beta D_w f \\ &= \alpha D_v([(f,U)]) + \beta D_w([(f,U)])\end{aligned} \tag{1.79}$$

per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v, w \in T_p(\mathbb{R}^n)$.
Da questo si ottiene che l'applicazione φ è $\mathbb{R}$-lineare:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha v + \beta w) &= D_{\alpha v + \beta w} \\ &= \alpha D_v + \beta D_w \\ &= \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(w)\end{aligned} \tag{1.80}$$

per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v, w \in T_p(\mathbb{R}^n)$.
Per l'iniettività, consideriamo il *kernel*[20] di φ: se questo contiene solo l'elemento 0, inteso come

[18] Un'applicazione f tra due insiemi A e B è *iniettiva* se

$$\forall a_1, a_2 \in A \mid a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

[19] Un'applicazione f tra due insiemi A e B è *suriettiva* se

$$\forall b \in B,\, \exists\, a \in A \mid f(a) = b$$

[20] Il *kernel* o nucleo di un'applicazione, indicato con ker, è l'insieme di tutti e soli gli elementi del dominio che hanno come immagine lo 0 del codominio. Nel caso considerato ora

$$\ker(\varphi) = \big\{ v \in T_p(\mathbb{R}^n) \,\big|\, \varphi(v) \equiv D_v = 0 \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \big\}$$

$$\begin{aligned} 0 : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ [(f,U)] &\mapsto 0 \end{aligned} \tag{1.81}$$

i.e. $\ker(\varphi) = \{0\}$, allora φ è iniettiva[21].
Siccome 0 associa un qualunque germe liscio $[(f,U)]$ sempre a $0 \in \mathbb{R}$, possiamo scegliere l'applicazione

$$\begin{aligned} x^j : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x^1, \ldots, x^n) &\mapsto x^j \end{aligned} \tag{1.82}$$

per qualsiasi $j = 1, \ldots, n$, la quale è una proiezione liscia dunque il germe che la contiene è liscio, i.e. $[(x^j, \mathbb{R}^n)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. A questo punto

$$\begin{aligned} 0([(x^j, \mathbb{R}^n)]) &= D_v([(x^j, \mathbb{R}^n)]) \\ &= D_v(x^j) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)\, v^i \\ &= \sum_{i=1}^n \delta^{ij}\, v^i \\ &= v^j \end{aligned} \tag{1.83}$$

perciò

$$\begin{cases} 0([(f,U)]) = 0 \in \mathbb{R}, \quad \forall [(f,U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \\ 0([(x^j, \mathbb{R})]) = v^j \end{cases} \implies v^j = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n \tag{1.84}$$

da cui

$$v \in \ker(\varphi) \iff v = 0 \in T_p(\mathbb{R}^n) \tag{1.85}$$

perciò φ è iniettiva.
La suriettività implica che se si fissa una qualunque derivazione puntuale esiste un vettore nello spazio tangente che mandato tramite φ dà quella derivazione: in simboli

$$\forall D \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)),\ \exists\, v \in T_p(\mathbb{R}^n) \ \mid\ \varphi(v) = D \tag{1.86}$$

dove in generale $\varphi(v) = D_v$, dunque dobbiamo trovare un v tale che faccia coincidere $D = D_v$.
Prima di farlo, enunciamo il seguente lemma:

[21] Questo vale perché φ è lineare (vedi Teorema della dimensione).

Lemma 5 (Derivazione di costante). *Siano* $D \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ *e la funzione costante*

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned} \tag{1.87}$$

allora $D([(c, \mathbb{R}^n)]) = 0$.

Dimostrazione (lemma).

$$\begin{aligned} D([(c, \mathbb{R}^n)]) &= D([(1c, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c\, D([(1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c\, D([(1 \cdot 1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c\, (D([(1, \mathbb{R}^n)])\, 1 + 1\, D([(1, \mathbb{R}^n)])) \\ &= 2c\, D([(1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.88}$$

□

A questo punto, due applicazioni sono uguali se e solo se coincidono per ogni punto del dominio, i.e.

$$D_v = D \iff D_v([(f, U)]) = D([(f, U)]), \quad \forall([(f, U)]) \in (C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.89}$$

Prendendo un dominio U stellato rispetto al punto p, per il teorema di Taylor con resto

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i)\, g_i(x), \quad \forall x \in U \tag{1.90}$$

con

$$g_i \in C^\infty(U) \,\bigg|\, g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.91}$$

Sia $v = (v^1, \ldots, v^n) \in T_{p(\mathbb{R}^n)}$ definito come $v^j = D([(x^j, \mathbb{R}^n)])$ per $j = 1, \ldots, n$.
Ora applichiamo D a un qualunque germe liscio $[(f, U)]$

$$
\begin{aligned}
D([(f,U)]) &= \cancelto{0}{D([(f(p),\mathbb{R}^n)])} + D\left(\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x^i - p^i)\, g_i(x), U\right)\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D([((x^i - p^i)\, g_i(x), U)]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (D([((x^i - p^i), U)])\, g_i(p) + \cancelto{0}{(p^i - p^i)}\, D([(g_i(x), U)])) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (D([(x^i, U)]) - \cancelto{0}{D([(p^i, U)])})g_i(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D([(x^i, U)])\, \frac{\partial f}{\partial x^i}\,(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,(p)\, v^i \\
&= D_v f \\
&= D_v([(f,U)])
\end{aligned}
\tag{1.92}
$$

dunque $D = D_f$ e perciò φ è anche suriettiva. $\square$

Date queste proprietà di φ, questa applicazione è un isomorfismo tra $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e.

$$
T_p(\mathbb{R}^n) \overset{iso.}{\simeq} \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.93}
$$

Corollary 5.1.

$$
\dim(T_p(\mathbb{R}^n)) = n = \dim(\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))) \tag{1.94}
$$

1.3.5 Base canonica per $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$

L'insieme delle n-uple

$$
\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right) \tag{1.95}
$$

i cui elementi sono definiti come

$$
\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p ([(f,U)]) = \frac{\partial f}{\partial x^j}\,(p), \quad \forall p \in U,\ j = 1, \ldots, n \tag{1.96}
$$

forma una base per lo spazio $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Proof. Essendo $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, da cui

$$\dim(\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))) = n \tag{1.97}$$

se $(e_1, \ldots, e_n)$ è la base canonica[22] di $T_p(\mathbb{R}^n)$, si ha che

$$\varphi(e_i) = D_{e_i}, \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{1.98}$$

i.e. un isomorfismo porta elementi di base in altrettanti elementi di base.
Applicando questo a una qualunque funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$D_{e_i}(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\,(e_i)_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\,\delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{1.99}$$

□

1.4 Campi di vettori su aperti di $\mathbb{R}^n$

Sia un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 1$, un *campo di vettori* su U è un'applicazione

$$\begin{aligned} X : U &\to \bigsqcup_{p\in U} T_p(\mathbb{R}^n) \\ p &\mapsto X_p \end{aligned} \tag{1.100}$$

dove il codominio è l'*unione disgiunta*[23] degli spazi di vettori tangenti in ogni punto di U; inoltre $T_p(\mathbb{R}^n) = T_p(U)$ in quanto le due algebre seguenti coincidono $C_p^\infty(\mathbb{R}^n) = C_p^\infty(U)$ perché i germi delle funzioni sono definiti localmente, quindi non dipendono dall'aperto considerato.
Un elemento del campo di vettori può essere scritto in funzione della base canonica di $T_p(\mathbb{R}^n)$

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \tag{1.101}$$

dove $a^i(p) \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \ldots, n$. In modo naturale, l'elemento X_p si identifica con l'n-upla $X_p = (a^1(p), \ldots, a^n(p))$ in quanto $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$.
La notazione che indica che un elemento di una base genera uno spazio è la seguente:

$$\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\rangle = T_p(\mathbb{R}^n) \tag{1.102}$$

Il campo di vettori X (senza la valutazione in un punto p) si scrive come

[22] Con $(e_j)_k = \delta_{jk}$, e.g. $e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.
[23] L'unione disgiunta equivale a un'unione in cui ogni insieme ha un indice diverso, e.g. l'insieme non connesso $(0, 1) \sqcup (0, 1)$ è diverso da $(0, 1) \cup (0, 1) = (0, 1)$.

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.103}$$

dove ora a^i è una funzione $a^i : U \to \mathbb{R}$.

1.4.1 Campi di vettori lisci

Un campo di vettori

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.104}$$

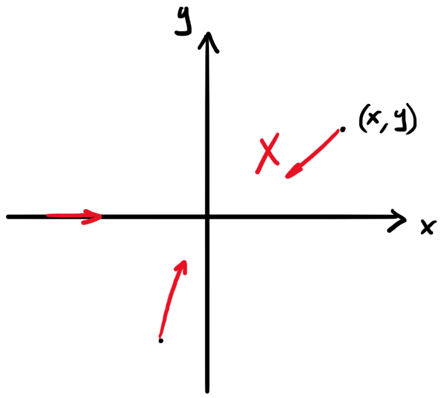
è $C^\infty(U)$ (liscio o differenziabile) se le funzioni a^i sono lisce, i.e. $a^i \in C^\infty(U)$ per qualsiasi $i = 1, \dots, n$.
L'insieme dei campi di vettori che rispettano questa prescrizione è chiamato $\chi(U)$, i.e.

$$\chi(U) = \left\{ X : U \to \bigsqcup_{p \in U} T_p(\mathbb{R}^n),\ X(p) = X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \middle| U \subset \mathbb{R}^n,\ a^i \in C^\infty(U) \right\} \tag{1.105}$$

Esempi

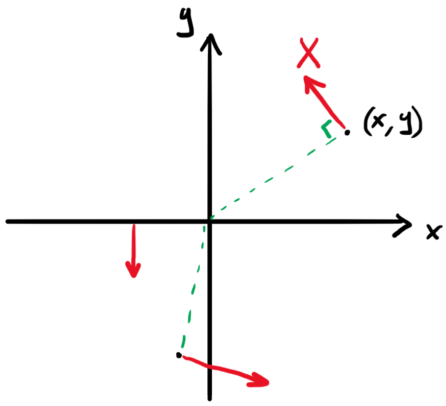
1) Il campo di vettori seguente è liscio perché qualunque derivata delle sue componenti non annulla mai il denominatore in quanto l'origine non è compresa nel dominio

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2) \\ (x,y) &\mapsto -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \end{aligned} \tag{1.106}$$



2) Per lo stesso motivo dell'esempio precedente, il campo di vettori seguente è liscio

$$
\begin{aligned}
X : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2) \\
(x,y) &\mapsto -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)
\end{aligned}
\tag{1.107}
$$



1.4.2 Operazioni in $\chi(U)$

Si può definire la somma in $\chi(U)$ come

$$(X+Y)_p \doteq X_p + Y_p, \quad X, Y \in \chi(U),\ p \in U \tag{1.108}$$

questo significa che, presi due campi di vettori su U

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i, b^i \in C^\infty(U),\ \forall i = 1, \dots, n \tag{1.109}$$

allora

$$X + Y = \sum_{i=1}^{n} (a^i + b^i)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i + b^i \in C^\infty(U),\ \forall i = 1, \dots, n \tag{1.110}$$

Si può definire anche la moltiplicazione per scalari come

$$(\lambda X)_p \doteq \lambda X_p, \quad \forall X \in \chi(U),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall p \in U \tag{1.111}$$

questo significa che, preso

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i \in C^\infty(U),\ \forall i = 1, \dots, n \tag{1.112}$$

allora

$$\lambda X = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a^i)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \lambda a^i \in C^\infty(U),\ \forall i = 1, \dots, n \tag{1.113}$$

L'ultima operazione è quella di moltiplicazione di un campo di vettori per un'altra funzione

$$(fX)_p \doteq f(p)X_p, \quad X \in \chi(U),\, f \in C^\infty(U) \tag{1.114}$$

questo significa che

$$fX = \sum_{i=1}^{n} (fa^i)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad fa^i \in C^\infty(U),\, \forall i = 1, \dots, n \tag{1.115}$$

Le prime due operazioni dotano l'insieme di $\chi(U)$ della proprietà di spazio vettoriale.

1.4.3 $\chi(U)$ come $C^\infty(U)$-modulo

$\mathbb{R}$-modulo sinistro

Sia R un anello commutativo unitario, un gruppo abeliano $(A, +)$ è detto R-*modulo sinistro* se esiste un'applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : R \times A &\to A \\ (r, a) &\mapsto r \cdot a \end{aligned} \tag{1.116}$$

tale che

$$\begin{cases} 1_R \cdot a = a \\ r \cdot (s \cdot a) = (rs) \cdot a \\ (r+s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a \\ r \cdot (a+b) = r \cdot a + r \cdot b \end{cases} \qquad \forall r, s \in R,\, \forall a, b \in A \tag{1.117}$$

Queste proprietà valgono solo da *sinistra*, potrebbero non valere se calcolate da destra.

$\mathbb{R}$-modulo destro

Sia R un anello commutativo unitario, un gruppo abeliano $(A, +)$ è detto R-*modulo destro* se esiste un'applicazione

$$\begin{aligned} * : A \times R &\to A \\ (a, r) &\mapsto a * r \end{aligned} \tag{1.118}$$

tale che

$$\begin{cases} a * 1_R = a \\ (a * r) * s = a * (rs) \\ a * (r+s) = a * r + a * s \\ (a+b) * r = a * r + b * r \end{cases} \qquad \forall r, s \in R,\, \forall a, b \in A \tag{1.119}$$

Queste proprietà valgono solo da *destra*, potrebbero non valere se calcolate da sinistra.

Tramite queste definizioni, definiamo $(A, +)$ un R-modulo se è sia un R-modulo sinistro che destro, i.e. $\cdot \equiv *$.

Remark. *Se un gruppo A è un R-modulo ed R è un campo $\mathbb{K}$, allora A è uno spazio vettoriale in $\mathbb{K}$.*

Caso di $\chi(U)$

Essendo $C^\infty(U)$ un anello commutativo unitario, per l'insieme dei campi di vettori lisci su U vale il seguente teorema:

Theorem 6. *$(\chi(U), +)$ è un $C^\infty(U)$-modulo.*

Proof. Per dimostrare che il gruppo abeliano $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$-modulo, è necessario dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$-modulo sinistro e destro per la moltiplicazione di un campo di vettori per una funzione

$$\begin{aligned} \cdot : C^\infty(U) \times \chi(U) &\to \chi(U) \\ (f, X) &\mapsto fX \end{aligned} \tag{1.120}$$

Devono dunque essere verificate le seguenti proprietà sia a sinistra che a destra:

$$\begin{cases} 1_{C^\infty(U)}X = X \\ f(gX) = (fg)X \\ f(X+Y) = fX + fY \\ (f+g)X = fX + gX \end{cases} \qquad \forall f, g \in C^\infty(U),\ \forall X, Y \in \chi(U) \tag{1.121}$$

Siccome la moltiplicazione per funzione è commutativa[24], è sufficiente dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$-modulo sinistro (o destro) per dimostrare che sia $C^\infty(U)$-modulo[25]. □

1.4.4 Derivata di funzione rispetto a un campo di vettori

I campi di vettori permettono di derivare funzioni: la loro azione è equivalente alla derivata direzionale di una funzione rispetto a un vettore.
Siano un campo di vettori liscio $X \in \chi(U)$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e una funzione liscia $f \in C^\infty(U)$. Definiamo la derivata della funzione f rispetto al campo di vettori X come $Xf \in C^\infty(U)$. La derivata puntuale è definita come

$$(Xf)(p) = X_p f, \quad p \in U \subset \mathbb{R}^n \tag{1.122}$$

Preso un campo

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.123}$$

allora

[24] Nonostante ciò, scriveremo la funzione sempre a sinistra dei campi, per notazione e per evitare di confonderla con la derivata di funzione rispetto a un campo di vettori (vedi sottosezione successiva).
[25] Vedi Esercizio A.9.

$$(Xf)(p) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right)_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{1.124}$$

perciò

$$\begin{aligned} Xf : U &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned} \tag{1.125}$$

Questa applicazione è $C^\infty(U)$ perché lo è $(Xf)(p)$, la quale lo è a sua volta perché $f \in C^\infty(U)$ e $X \in \chi(U)$ in quanto $a^i \in C^\infty(U)$.
Possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{aligned} X : C^\infty(U) &\to C^\infty(U) \\ f &\mapsto Xf \end{aligned} \tag{1.126}$$

ricordando che $C^\infty(U)$, oltre a essere un anello commutativo unitario, è un'algebra sui reali, perciò l'applicazione X è $\mathbb{R}$-lineare. Inoltre, siccome $X_p \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i campi di vettori valutati in un punto soddisfano la regola di Leibniz:

$$X(fg)(p) = X_p(fg) = (X_p f)\, g(p) + f(p)\, (X_p g) \tag{1.127}$$

perciò anche l'applicazione X soddisfa la regola di Leibniz:

$$X(fg) = (Xf)\, g + f\, (Xg) \tag{1.128}$$

Derivazione di un'algebra

Sia A un'algebra su campo [26] $\mathbb{K}$, un'applicazione $D : A \to A$ che sia $\mathbb{K}$-lineare e tale che soddisfi la regola di Leibniz

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db), \quad \forall a, b \in A \tag{1.129}$$

[26] Ricordiamo che un'algebra A su campo $\mathbb{K}$ è una coppia $(V, \cdot)$ dove V è uno spazio vettoriale e l'operazione

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\to A \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

soddisfa le proprietà

$$\begin{cases} (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c & \text{distributività} \\ c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b & \\ \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) & \text{omogeneità} \end{cases} \qquad \forall a, b, c \in A,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

è chiamata *derivazione dell'algebra* A. L'insieme di tutte le derivazioni di un'algebra A viene indicato come $\mathrm{Der}(A)$ [27].

1.4.5 Campo di vettori liscio come derivazione dell'algebra $C^\infty(U)$

Possiamo vedere un campo di vettori come una derivazione di un'algebra, quindi definiamo un'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \chi(U) &\to \mathrm{Der}(C^\infty(U)) \\ X &\mapsto \varphi(X) \end{aligned} \tag{1.130}$$

da cui

$$\varphi(X)(f) \doteq Xf, \quad f \in C^\infty(U) \tag{1.131}$$

Sia $\chi(U)$ che $\mathrm{Der}(C^\infty(U))$ sono $C^\infty(U)$-moduli tramite l'applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : C^\infty(U) \times \mathrm{Der}(C^\infty(U)) &\to \mathrm{Der}(C^\infty(U)) \\ (f, D) &\mapsto fD \end{aligned} \tag{1.132}$$

per la quale vale

$$(fD)(g) = f(Dg), \quad \forall g \in C^\infty(U) \tag{1.133}$$

Inoltre φ è anche $C^\infty(U)$-lineare:

$$\varphi(fX + gY) = f\,\varphi(X) + g\,\varphi(Y), \quad \forall f, g \in C^\infty(U), \forall X, Y \in \chi(U) \tag{1.134}$$

Dimostreremo per le varietà differenziabili[28] che φ è un isomorfismo di $C^\infty(U)$-moduli, i.e. $\chi(U) \simeq \mathrm{Der}(C^\infty(U))$.
Tramite questo isomorfismo, si possono identificare i campi di vettori lisci con le derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce, analogamente a come lo spazio tangente a un punto di $\mathbb{R}^n$ si può identificare con le derivazioni puntuali dell'algebra dei germi delle funzioni in quel punto, i.e. $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.

[27] Vedi Esercizi A.10 e A.11.
[28] Vedi Sotto-sottosezione ??.

Chapter 2

Differential manifolds

Chapter 3

Lie groups and algebras

Exercises A

Exercises: Differential geometry in euclidean spaces

A.1 Funzione $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$

Per ogni numero naturale $k \in \mathbb{N}$ costruire una funzione $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$.

Per la funzione

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha x^{k(k+2)/(k+1)} + \beta \end{aligned} \tag{A.1}$$

per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e con $k \in \mathbb{N}$, valgono

$$f_k \in C^k(\mathbb{R}) \ \wedge \ f_k \notin C^{k+1}(\mathbb{R}) \tag{A.2}$$

A.2 Funzione liscia ma non reale analitica

Dimostrare che la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{A.3}$$

risulta essere liscia ma non reale analitica.

La funzione f è liscia in quanto, perché lo sia, è necessario che

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{-1/x^2}(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{A.4}$$

e questo è vero poiché

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{-1/x^2}}{x^p} \right) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N} \implies \lim_{x \to 0} \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(e^{-1/x^2} \right) \right) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{A.5}$$

La funzione non è però reale analitica perché, in un intervallo aperto qualunque di 0 non coincide con il suo sviluppo di Taylor: lo sviluppo di Taylor per la parte dei reali positivi è diversa da 0 per qualunque valore di x non nullo mentre la parte per i reali negativi è identicamente nulla, i.e. preso U un qualunque intorno di 0

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(e^{-1/x^2} \right) \right) \frac{x^k}{k!} \neq 0, \quad \forall x \in U \setminus \{0\} \tag{A.6}$$

A.3 Intervalli diffeomorfi a $\mathbb{R}$

Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tale che $a < b$. Dimostrare che i seguenti intervalli sono tutti diffeomorfi tra loro e diffeomorfi a $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (a, b) \\ (c, +\infty) \\ (-\infty, d) \end{cases} \tag{A.7}$$

Consideriamo le applicazioni:

$$\begin{aligned} f : (a, b) &\to (0, 1) \\ x &\mapsto \frac{x - a}{b - a} \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} g : (0, 1) &\to (c, +\infty) \\ x &\mapsto \frac{c}{x} \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned} h : (0, 1) &\to (-\infty, d) \\ x &\mapsto \ln(x) - d \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned} i : (c, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x - c) \end{aligned} \tag{A.11}$$

Queste sono diffeomorfismi in quanto bigezioni lisce con inversa liscia, dunque le loro composizioni sono ancora diffeomorfismi. Le seguenti composizioni delle applicazioni sopraccitate inducono i seguenti diffeomorfismi:

$$\begin{aligned} g \circ f &\implies (a, b) \simeq (c, +\infty) \\ h \circ f &\implies (a, b) \simeq (-\infty, d) \\ i \circ g \circ f &\implies (a, b) \simeq \mathbb{R} \\ h \circ g^{-1} &\implies (c, +\infty) \simeq (-\infty, d) \\ i &\implies (c, +\infty) \simeq \mathbb{R} \\ i \circ g \circ h^{-1} &\implies (-\infty, d) \simeq \mathbb{R} \end{aligned} \tag{A.12}$$

A.4 Diffeomorfismo tra $B_r(c)$ e $\mathbb{R}^n$

Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} h : B_1(0) &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, \cdots, \frac{x^n}{\sqrt{1-\|x\|^2}} \right) \end{aligned} \tag{A.13}$$

definisce un diffeomorfismo tra la palla aperta unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^n$.
Dedurre che la palla aperta di centro $c \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^n$ è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

L'applicazione h è una bigezione liscia in quanto ogni sua componente è liscia poiché

$$\frac{\partial^k}{\partial (x^i)^k} \left(\frac{x^i}{\sqrt{1-\|x\|^2}} \right) < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in B_1(0), \forall i = 1, \ldots, n \tag{A.14}$$

La sua inversa

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathbb{R}^n &\to B_1(0) \\ x &\mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1+\|x\|^2}}, \cdots, \frac{x^n}{\sqrt{1+\|x\|^2}} \right) \end{aligned} \tag{A.15}$$

è ancora liscia per lo stesso motivo, dunque h induce il diffeomorfismo $B_1(0) \simeq \mathbb{R}^n$.
Se consideriamo l'applicazione lineare (dunque liscia con inversa liscia e perciò diffeomorfismo)

$$\begin{aligned} g : B_r(c) &\to B_1(0) \\ x &\mapsto \frac{x-c}{r} \end{aligned} \tag{A.16}$$

con $c = (c^1, \ldots, c^n)$, e la componiamo con h, otteniamo

$$\begin{aligned} f = h \circ g : B_r(c) &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left(\frac{\frac{x^1-c^1}{r}}{\sqrt{1+\left\|\frac{x-c}{r}\right\|^2}}, \cdots, \frac{\frac{x^n-c^n}{r}}{\sqrt{1+\left\|\frac{x-c}{r}\right\|^2}} \right) \end{aligned} \tag{A.17}$$

L'applicazione f è un diffeomorfismo in quanto composizione di diffeomorfismi, dunque f induce il diffeomorfismo $B_r(c) \simeq \mathbb{R}^n$.

A.5 Teorema di Taylor con resto per funzione a due variabili

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Usando il teorema di Taylor con resto, dimostrare che esistono $g_{11}, g_{12}, g_{22} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$f(x,y) = f(0,0) + x\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + x^2\,g_{11}(x,y) + xy\,g_{12}(x,y) + y^2\,g_{22}(x,y) \quad \text{(A.18)}$$

Dal teorema di Taylor con resto, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ($\mathbb{R}^2$ è stellato rispetto all'origine), abbiamo che

$$\exists\, g_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \quad \text{(A.19)}$$

definite come

$$g_{i_1 \cdots i_k}(0,0) \doteq \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(0,0) \quad \text{(A.20)}$$

tali che

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1 \\ i_k > \cdots > i_1}}^{m} g_{i_1 \cdots i_k}(x,y) \prod_{j=1}^{k} x^{i_j}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{(A.21)}$$

Espandendo quest'ultima forma per $k = 1$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + x\,g_1(x,y) + y\,g_2(x,y) \\ &= f(0,0) + x\,g_1(0,0) + y\,g_2(0,0) + x^2\,g_{11}(x,y) + xy\,g_{12}(x,y) + y^2\,g_{22}(x,y) \\ &= f(0,0) + x\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + x^2\,g_{11}(x,y) + xy\,g_{12}(x,y) + y^2\,g_{22}(x,y) \end{aligned} \quad \text{(A.22)}$$

dove gli ultimi tre termini indicano il resto.

A.6 Funzione liscia tramite incollamento

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \tag{A.23}$$

Sia l'applicazione

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (t,u) &\mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t,tu)}{t} & t \neq 0 \\ \\ 0 & t = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{A.24}$$

Dimostrare che $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Per il Teorema 3, esistono due applicazioni $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$\begin{cases} f(x,y) = f(0,0) + h_1(x,y) + h_2(x,y) \\ \\ h_1(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \\ h_2(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{cases} \tag{A.25}$$

Dalle ipotesi, possiamo scrivere

$$f(x,y) = h_1(x,y) + h_2(x,y) \tag{A.26}$$

$$h_1(0,0) = h_2(0,0) = 0 \tag{A.27}$$

Considerando l'applicazione g, possiamo dividere la trattazione in due casi:

- $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} g(t,u) &= \frac{1}{t} f(t,tu) \\ &= \frac{1}{t}(th_1(t,tu) + tu\, h_2(t,tu)) \\ &= h_1(t,tu) + u\, h_2(t,tu) \end{aligned} \tag{A.28}$$

- $t = 0$:

$$g(0,u) = \cancelto{0}{h_1(0,0)} + u\, \cancelto{0}{h_2(0,0)} = 0 \tag{A.29}$$

dunque

$$g(t,u) = h_1(t,tu) + u\,h_2(t,tu), \quad \forall (t,u) \in \mathbb{R}^2 \tag{A.30}$$

Questo dimostra che $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$. Per dimostrare che sia liscia, consideriamo la derivata di $g(t,u)$ rispetto a t:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}g(t,u)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial g(t,u)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g(t,u)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= \frac{\partial h_1(t,tu)}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial h_1(t,tu)}{\partial y}\frac{\partial (tu)}{\partial t} + u\left(\frac{\partial h_2(t,tu)}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial h_2(t,tu)}{\partial y}\frac{\partial (tu)}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial h_1(t,tu)}{\partial x} + u\,\frac{\partial h_1(t,tu)}{\partial y} + u\left(\frac{\partial h_2(t,tu)}{\partial x} + u\,\frac{\partial h_2(t,tu)}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial h_1(t,tu)}{\partial x} + u\,\frac{\partial h_1(t,tu)}{\partial y} + u\,\frac{\partial h_2(t,tu)}{\partial x} + u^2\,\frac{\partial h_2(t,tu)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Questa applicazione è liscia in quanto composizione liscia di applicazioni lisce (questo ragionamento si estende alle derivate di grado maggiore), dunque $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

A.7 $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come algebra commutativa e unitaria

Dimostrare che l'insieme $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ dei germi delle funzioni lisce intorno a $p \in \mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e di prodotto definite negli appunti è un'algebra commutativa e unitaria.

L'algebra $A = (C_p^\infty(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$ ha le operazioni definite come segue:

$$\begin{aligned} + : A \times A &\to A \\ ([(f,U)],[(g,V)]) &\mapsto [(f+g, U \cap V)] \end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\to A \\ ([(f,U)],[(g,V)]) &\mapsto [(fg, U \cap V)] \end{aligned} \tag{A.33}$$

Perché sia effettivamente un'algebra, verifichiamo che sia distributiva e omogenea.
Per la distributività sinistra:

$$\begin{aligned} ([(f,U)] + [(g,V)]) \cdot [(h,W)] &= [(f+g, U \cap V)] \cdot [(h,W)] \\ &= [((f+g)h, U \cap V \cap W)] \\ &= [(fh + gh, U \cap V \cap W)] \\ &= [(fh, U \cap W)] + [(gh, V \cap W)] \\ &= [(f,U)] \cdot [(h,W)] + [(g,V)] \cdot [(h,W)] \end{aligned} \tag{A.34}$$

per qualsiasi $[(f,U)], [(g,V)], [(h,W)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.
La distributività destra deriva immediatamente dalla distributività sinistra e dalla commutatività (condizione non necessaria per un'algebra): quest'ultima può essere verificata tramite i seguenti passaggi

$$\begin{aligned} [(f,U)] + [(g,V)] &= [(f+g, U \cap V)] \\ &= [(g+f, V \cap U)] \\ &= [(g,V)] + [(f,U)] \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned} [(f,U)] \cdot [(g,V)] &= [(fg, U \cap V)] \\ &= [(gf, V \cap U)] \\ &= [(g,V)] \cdot [(f,U)] \end{aligned} \tag{A.36}$$

per qualsiasi $[(f,U)], [(g,V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Per l'omogeneità:

$$\begin{aligned} \lambda([(f,U)] \cdot [(g,V)]) &= \lambda[(fg, U \cap V)] \\ &= [(\lambda fg, V \cap U)] \\ &= [(\lambda f, U)] \cdot [(g,V)] \\ &= [(f,U)] \cdot [(\lambda g, V)] \end{aligned} \tag{A.37}$$

per qualsiasi $[(f,U)],[(g,V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$.
Infine l'unitarietà, i.e.

$$\exists\ e = [(1,U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \mid [(f,U)] \cdot e = e \cdot [(f,U)] = [(f,U)], \quad \forall [(f,U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{A.38}$$

può essere verificata tramite i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} [(f,U)] \cdot [(1,U)] &= [(f \cdot 1, U \cap U)] \\ &= [(1 \cdot f, U \cap U)] \\ &= [(1,U)] \cdot [(f,U)] \\ &= [(f,U)] \end{aligned} \tag{A.39}$$

A.8 $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Dimostrare che l'insieme $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ delle derivazioni puntuali con le operazioni definite negli appunti è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Per dimostrare che $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è necessario che le operazioni di somma tra derivazioni e moltiplicazione per scalari rispettino i seguenti 8 assiomi:

$$\begin{cases} D_v + (D_w + D_x) = (D_v + D_w) + D_x & \text{1. associatività (somma)} \\ D_v + D_w = D_w + D_v & \text{2. commutatività (somma)} \\ \exists\, 0 \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \mid D_v + 0 = D_v & \text{3. elemento neutro (somma)} \\ \exists\, -D_v \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \mid D_v + (-D_v) = 0 & \text{4. inverso (somma)} \\ \alpha(\beta D_v) = (\alpha\beta) D_v & \text{5. compatibilità (moltiplicazione)} \\ \exists\, 1 \in \mathbb{R} \mid 1 D_v = D_v & \text{6. elemento neutro (moltiplicazione)} \\ (\alpha+\beta) D_v = \alpha D_v + \beta D_v & \text{7. distributività (somma vettoriale)} \\ \alpha(D_v + D_w) = \alpha D_v + \alpha D_w & \text{8. distributività (somma scalare)} \end{cases} \tag{A.40}$$

per qualsiasi $D_v, D_w, D_x \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Per dimostrare queste proprietà consideriamo un qualsiasi $[(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e applichiamo a questo le derivazioni:

1. Associatività (somma)

$$\begin{aligned} (D_v + (D_w + D_x))([(f,U)]) &= D_v([(f,U)]) + (D_w + D_x)([(f,U)]) \\ &= D_v([(f,U)]) + D_w([(f,U)]) + D_x([(f,U)]) \\ &= (D_v + D_w)([(f,U)]) + D_x([(f,U)]) \\ &= ((D_v + D_w) + D_x)([(f,U)]) \end{aligned} \tag{A.41}$$

2. Commutatività (somma)

$$\begin{aligned} (D_v + D_w)([(f,U)]) &= D_v([(f,U)]) + D_w([(f,U)]) \\ &= D_w([(f,U)]) + D_v([(f,U)]) \\ &= (D_w + D_v)([(f,U)]) \end{aligned} \tag{A.42}$$

   dove nel secondo passaggio abbiamo usato la commutatività della somma in $\mathbb{R}$

3. Elemento neutro (somma)

$$\begin{aligned} 0 : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ [(f,U)] &\mapsto 0 \end{aligned} \tag{A.43}$$

per qualsiasi $[(f,U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, dunque

$$\begin{aligned}(D_v + 0)([(f,U)]) &= D_v([(f,U)]) + 0([(f,U)]) \\ &= D_v([(f,U)]) + 0 \\ &= D_v([(f,U)])\end{aligned} \tag{A.44}$$

4. Inverso (somma)

$$\begin{aligned}-D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ [(f,U)] &\mapsto -\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, v^i\end{aligned} \tag{A.45}$$

dunque

$$\begin{aligned}(D_v + (-D_v))([(f,U)]) &= D_v([(f,U)]) + (-D_v)([(f,U)]) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, v^i + \left(-\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, v^i\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{A.46}$$

5. Compatibilità (moltiplicazione)

$$\begin{aligned}(\alpha(\beta D_v))([(f,U)]) &= \alpha(\beta D_v)([(f,U)]) \\ &= \alpha D_v([(\beta f,U)]) \\ &= \alpha\beta D_v([(f,U)]) \\ &= (\alpha\beta) D_v([(f,U)])\end{aligned} \tag{A.47}$$

6. Elemento neutro (moltiplicazione)

$$\begin{aligned}(1D_v)([(f,U)]) &= D_v([(1f,U)]) \\ &= D_v([(f,U)])\end{aligned} \tag{A.48}$$

7. Distributività (somma vettoriale)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)D_v([(f,U)]) &= D_v([((\alpha+\beta)f,U)]) \\ &= D_v([(\alpha f + \beta f,U)]) \\ &= \alpha D_v([(f,U)]) + \beta D_v([(f,U)])\end{aligned} \tag{A.49}$$

8. Distributività (somma scalare)

$$\begin{aligned} \alpha(D_v + D_w)([(f,U)]) &= (D_v + D_w)([(\alpha f,U)]) \\ &= D_v([(\alpha f,U)]) + D_w([(\alpha f,U)]) \\ &= \alpha D_v([(f,U)]) + \alpha D_w([(f,U)]) \end{aligned} \tag{A.50}$$

Tutte queste proprietà sono valide per qualsiasi $D_v, D_w, D_x \in \mathrm{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A.9 $\chi(U)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e C^∞-modulo

Dimostrare che l'insieme dei campi di vettori lisci $\chi(U)$ su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con le operazioni definite negli appunti è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e un C^∞-modulo.

Spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ Per dimostrare che $\chi(U)$ sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è necessario che le operazioni di somma tra campi di vettori e moltiplicazione per scalari rispettino i seguenti 8 assiomi:

$$\begin{cases} X + (Y + Z) = (X + Y) + Z & \text{1. associatività (somma)} \\ X + Y = Y + X & \text{2. commutatività (somma)} \\ \exists\, 0 \in \chi(U) \mid X + 0 = X & \text{3. elemento neutro (somma)} \\ \exists\, -X \in \chi(U) \mid X + (-X) = 0 & \text{4. inverso (somma)} \\ \alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X & \text{5. compatibilità (moltiplicazione)} \\ \exists\, 1 \in \mathbb{R} \mid 1X = X & \text{6. elemento neutro (moltiplicazione)} \\ (\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X & \text{7. distributività (somma vettoriale)} \\ \alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y & \text{8. distributività (somma scalare)} \end{cases} \tag{A.51}$$

per qualsiasi $X, Y, Z \in \chi(U)$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo che le operazioni sono definite come:

$$(X + Y)_p \doteq X_p + Y_p \tag{A.52}$$

$$(\alpha X)_p \doteq \alpha X_p \tag{A.53}$$

per qualsiasi $X, Y \in \chi(U)$, qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, dove i campi di vettori saranno:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a_i, b_i \in C^\infty(U),\ \forall i = 1, \dots, n \tag{A.54}$$

Per dimostrare queste proprietà, valutiamo i campi di vettori in un qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$:

1. Associatività (somma)

$$\begin{aligned} (X + (Y + Z))_p &= (X + Y)_p + Z_p \\ &= X_p + Y_p + Z_p \\ &= X_p + (Y + Z)_p \\ &= (X + (Y + Z))_p \end{aligned} \tag{A.55}$$

2. Commutatività (somma)

$$\begin{aligned}
(X+Y)_p &= X_p + Y_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p + \sum_{i=1}^{n} b^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} b^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p + \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= Y_p + X_p \\
&= (Y+X)_p
\end{aligned} \tag{A.56}$$

3. Elemento neutro (somma)

$$\begin{aligned}
0 : U &\to \bigsqcup_{p\in U} T_p(\mathbb{R}^n) \\
p &\mapsto 0_p = \sum_{i=1}^{n} 0 \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&\overset{\mathbb{R}^n}{\mapsto} (0,\dots,0)
\end{aligned} \tag{A.57}$$

dunque

$$\begin{aligned}
(X+0)_p &= X_p + 0_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p + \sum_{i=1}^{n} 0 \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a^i(p) + 0) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= X_p
\end{aligned} \tag{A.58}$$

4. Inverso (somma)

$$\begin{aligned}
-X : U &\to \bigsqcup_{p\in U} T_p(\mathbb{R}^n) \\
p &\mapsto \sum_{i=1}^{n} (-a^i(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p
\end{aligned} \tag{A.59}$$

dunque

$$
\begin{aligned}
(X + (-X))_p &= X_p + (-X)_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p + \sum_{i=1}^{n} (-a^i(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a^i(p) - a^i(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} 0 \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= 0_p
\end{aligned} \tag{A.60}
$$

5. Compatibilità (moltiplicazione)

$$
\begin{aligned}
(\alpha(\beta X))_p &= \alpha(\beta X)_p \\
&= \alpha\beta X_p \\
&= (\alpha\beta) X_p \\
&= ((\alpha\beta)X)_p
\end{aligned} \tag{A.61}
$$

6. Elemento neutro (moltiplicazione)

$$
\begin{aligned}
(1X)_p &= 1X_p \\
&= 1 \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} (1a^i(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= X_p
\end{aligned} \tag{A.62}
$$

7. Distributività (somma vettoriale)

$$
\begin{aligned}
(\alpha(X + Y))_p &= \alpha(X + Y)_p \\
&= \alpha(X_p + Y_p) \\
&= \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p + \sum_{i=1}^{n} b^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p + \alpha \sum_{i=1}^{n} b^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \alpha X_p + \alpha Y_p \\
&= (\alpha X)_p + (\alpha Y)_p \\
&= (\alpha X + \alpha Y)_p
\end{aligned} \tag{A.63}
$$

8. Distributività (somma scalare)

$$\begin{aligned}
((\alpha+\beta)X)_p &= (\alpha+\beta)X_p \\
&= (\alpha+\beta)\sum_{i=1}^{n} a^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{n} a^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p + \beta\sum_{i=1}^{n} a^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \alpha X_p + \beta X_p \\
&= (\alpha X)_p + (\beta X)_p \\
&= (\alpha X + \beta X)_p
\end{aligned} \tag{A.64}$$

Tutte queste proprietà sono valide per qualsiasi $X, Y, Z \in \chi(U)$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

C^∞-modulo Sia l'applicazione

$$\begin{aligned}
\cdot : C^\infty(U) \times \chi(U) &\to \chi(U) \\
(f, X) &\mapsto fX
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Per dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un C^∞-modulo è necessario che siano verificate queste proprietà sia a sinistra che a destra:

$$\begin{cases}
1_{C^\infty(U)}X = X & \text{1. elemento neutro (somma)} \\
f(gX) = (fg)X & \text{2. compatibilità (moltiplicazione)} \\
f(X+Y) = fX + fY & \text{3. distributività (somma vettoriale)} \\
(f+g)X = fX + gX & \text{4. distributività (somma scalare)}
\end{cases} \tag{A.66}$$

per qualsiasi $f, g \in C^\infty(U)$ e qualsiasi $X, Y \in \chi(U)$. Siccome la moltiplicazione per funzione è commutativa, è sufficiente dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$-modulo sinistro (o destro) per dimostrare che sia $C^\infty(U)$-modulo.
Dimostriamo dunque le proprietà riportate sopra, ancora una volta valutando i campi di vettori in un qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$:

1. Elemento neutro (somma)

$$\begin{aligned}
1_{C^\infty(U)} : U &\to \mathbb{R} \\
p &\mapsto 1
\end{aligned} \tag{A.67}$$

dunque

$$
\begin{aligned}
(1_{C^\infty(U)}X)_p &= 1_{C^\infty(U)}(p)X_p \\
&= 1\sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n}(1a^i(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \\
&= X_p
\end{aligned}
\tag{A.68}
$$

2. Compatibilità (moltiplicazione)

$$
\begin{aligned}
(f(gX))_p &= f(p)(gX)_p \\
&= f(p)g(p)X_p \\
&= (fg)(p)X_p \\
&= ((fg)X)_p
\end{aligned}
\tag{A.69}
$$

3. Distributività (somma vettoriale)

$$
\begin{aligned}
(f(X+Y))_p &= f(p)(X+Y)_p \\
&= f(p)(X_p+Y_p) \\
&= f(p)X_p + f(p)Y_p \\
&= (fX)_p + (fY)_p \\
&= (fX+fY)_p
\end{aligned}
\tag{A.70}
$$

4. Distributività (somma scalare)

$$
\begin{aligned}
((f+g)X)_p &= (f+g)(p)X_p \\
&= (f(p)+g(p))X_p \\
&= f(p)X_p + g(p)X_p \\
&= (fX)_p + (gX)_p \\
&= (fX+gX)_p
\end{aligned}
\tag{A.71}
$$

Tutte queste proprietà sono valide per qualsiasi $f, g \in C^\infty(U)$ e qualsiasi $X, Y \in \chi(U)$.

A.10 Der(A) come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

Sia A un'algebra su un campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che le operazioni

$$\begin{cases} (D_1 + D_2)(a) = D_1(a) + D_2(a) \\ (\lambda D)(a) = \lambda D(a) \end{cases} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall D_1, D_2, D \in \mathrm{Der}(A) \tag{A.72}$$

dotano Der(A) della struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Per dimostrare che Der(A) sia uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è necessario che le operazioni di somma tra derivazioni e moltiplicazione per scalari rispettino i seguenti 8 assiomi:

$$\begin{cases} D_1 + (D_2 + D_3) = (D_1 + D_2) + D_3 & \text{1. associatività (somma)} \\ D_1 + D_2 = D_2 + D_1 & \text{2. commutatività (somma)} \\ \exists\, 0 \in \mathrm{Der}(A)) \mid D + 0 = D & \text{3. elemento neutro (somma)} \\ \exists\, -D \in \mathrm{Der}(A) \mid D + (-D) = 0 & \text{4. inverso (somma)} \\ \alpha(\beta D) = (\alpha\beta) D & \text{5. compatibilità (moltiplicazione)} \\ \exists\, \eta \in \mathbb{K} \mid \eta D = D & \text{6. elemento neutro (moltiplicazione)} \\ (\alpha + \beta) D = \alpha D + \beta D & \text{7. distributività (somma vettoriale)} \\ \alpha(D_1 + D_2) = \alpha D_1 + \alpha D_2 & \text{8. distributività (somma scalare)} \end{cases} \tag{A.73}$$

per qualsiasi $D_1, D_2, D_3, D \in \mathrm{Der}(A)$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
Per dimostrare queste proprietà consideriamo un qualsiasi $a \in A$ e applichiamo a questo le derivazioni:

1. Associatività (somma)

$$\begin{aligned} (D_1 + (D_2 + D_3))(a) &= D_1(a) + (D_2 + D_3)(a) \\ &= D_1(a) + D_2(a) + D_3(a) \\ &= (D_1 + D_2)(a) + D_3(a) \\ &= ((D_1 + D_2) + D_3)(a) \end{aligned} \tag{A.74}$$

2. Commutatività (somma)

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)(a) &= D_1(a) + D_2(a) \\ &= D_2(a) + D_1(a) \\ &= (D_2 + D_1)(a) \end{aligned} \tag{A.75}$$

   dove nel secondo passaggio abbiamo usato la commutatività della somma dell'algebra ereditata dallo spazio vettoriale che la compone

3. Elemento neutro (somma)

$$\begin{aligned} 0 : A &\to A \\ a &\mapsto 0 \end{aligned} \tag{A.76}$$

dove

$$a + 0 = a, \quad \forall a \in A \tag{A.77}$$

dunque

$$\begin{aligned} (D + 0)(a) &= D(a) + 0(a) \\ &= D(a) + 0 \\ &= D(a) \end{aligned} \tag{A.78}$$

4. Inverso (somma)

$$\begin{aligned} -D : A &\to A \\ a &\mapsto -D(a) \end{aligned} \tag{A.79}$$

dunque

$$\begin{aligned} (D + (-D))(a) &= D(a) + (-D)(a) \\ &= D(a) + -D(a) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.80}$$

5. Compatibilità (moltiplicazione)

$$\begin{aligned} (\alpha(\beta D))(a) &= \alpha(\beta D)(a) \\ &= \alpha\beta D(a) \\ &= (\alpha\beta)D(a) \\ &= ((\alpha\beta)D)(a) \end{aligned} \tag{A.81}$$

6. Elemento neutro (moltiplicazione)

$$\begin{aligned} (\eta D)(a) &= \eta D(a) \\ &= D(\eta a) \\ &= D(a) \end{aligned} \tag{A.82}$$

dove abbiamo usato il fatto che lo spazio vettoriale che compone l'algebra è sullo stesso campo $\mathbb{K}$ rispetto a quest'ultima

7. Distributività (somma vettoriale)

$$\begin{aligned}((\alpha+\beta)D)(a) &= (\alpha+\beta)D(a)\\ &= \alpha D(a)+\beta D(a)\\ &= (\alpha D)(a)+(\beta D)(a)\\ &= (\alpha D+\beta D)(a)\end{aligned} \tag{A.83}$$

8. Distributività (somma scalare)

$$\begin{aligned}(\alpha(D_1+D_2))(a) &= \alpha(D_1+D_2)(a)\\ &= \alpha(D_1(a)+D_2(a))\\ &= \alpha D_1(a)+\alpha D_2(a)\\ &= (\alpha D_1)(a)+(\alpha D_2)(a)\\ &= (\alpha D_1+\alpha D_2)(a)\end{aligned} \tag{A.84}$$

Tutte queste proprietà sono valide per qualsiasi $D_1, D_2, D_3, D \in \mathrm{Der}(A)$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

A.11 Commutatore come derivazione

Siano D_1 e D_2 due derivazioni di un'algebra A su un campo $\mathbb{K}$, i.e. $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$. Mostrare che $D_1 \circ D_2$ non è necessariamente una derivazione di A mentre

$$D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \mathrm{Der}(A) \tag{A.85}$$

Perché $D_1 \circ D_2$ sia una derivazione deve, in particolare, soddisfare la regola di Leibniz, ma questo non è verificato:

$$\begin{aligned}(D_1 \circ D_2)(a \cdot b) &= D_1(D_2(a \cdot b)) \\ &= D_1(D_2(a) \cdot b + a \cdot D_2(b)) \\ &= D_1(D_2(a)) \cdot b + D_2(a) \cdot D_1(b) + D_1(a) \cdot D_2(b) + a \cdot D_1(D_2(b)) \\ &= (D_1 \circ D_2)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2)(b) + D_2(a) \cdot D_1(b) + D_1(a) \cdot D_2(b) \\ &\neq (D_1 \circ D_2)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2)(b)\end{aligned} \tag{A.86}$$

Mentre per la combinazione $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ questa prescrizione è verificata:

$$\begin{aligned}(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(a \cdot b) &= D_1(D_2(a \cdot b)) - D_2(D_1(a \cdot b)) \\ &= (D_1 \circ D_2)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2)(b) + D_2(a) \cdot D_1(b) + D_1(a) \cdot D_2(b) + \\ &\quad - ((D_2 \circ D_1)(a) \cdot b + a \cdot (D_2 \circ D_1)(b) + D_1(a) \cdot D_2(b) + D_2(a) \cdot D_1(b)) \\ &= (D_1 \circ D_2)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2)(b) + \cancel{D_2(a) \cdot D_1(b)} + \cancel{D_1(a) \cdot D_2(b)} + \\ &\quad - (D_2 \circ D_1)(a) \cdot b - a \cdot (D_2 \circ D_1)(b) - \cancel{D_1(a) \cdot D_2(b)} - \cancel{D_2(a) \cdot D_1(b)} \\ &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(b)\end{aligned} \tag{A.87}$$

dunque $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \mathrm{Der}(A)$.

Exercises B

Exercises: Differential manifolds

Exercises C

Exercises: Lie groups and algebras

Bibliography

1. Loi, A. *Introduzione alla Topologia Generale* ISBN: 978-88-548-5917-3 (Aracne, 2013).
2. Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds* ISBN: 978-1-4419-9982-5 (Springer).
3. Tu, L. W. *An Introduction to Manifolds* ISBN: 978-1-4419-7400-6 (Springer, 2010).