

Differential Geometry Notes

Simone Iovine

Tuesday 13th June, 2023

Contents

Notes	iii
Notation	v
1 Differential geometry in euclidean spaces	1
1.1 Smooth and real analytic functions	1
1.1.1 Smooth functions	1
<i>Esempi</i>	2
1.1.2 Funzioni reali analitiche	2
<i>Esempi</i>	3
1.2 Diffeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n	4
1.2.1 Diffeomorfismo tra $B_\delta(c)$ e \mathbb{R}^n	5
1.2.2 Teorema di Taylor con resto	7
1.3 Vettori tangenti in \mathbb{R}^n	9
1.3.1 Derivate direzionali	10
<i>Esempio</i>	11
Algebra su campo \mathbb{K}	12
1.3.2 $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come algebra su \mathbb{R}	12
1.3.3 Derivazione puntuale di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$	13
1.3.4 Isomorfismo tra $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$	14
1.3.5 Base canonica per $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$	19
1.4 Campi di vettori su aperti di \mathbb{R}^n	20
1.4.1 Campi di vettori lisci	21
<i>Esempi</i>	21
1.4.2 Operazioni in $\chi(U)$	22
1.4.3 $\chi(U)$ come $C^\infty(U)$ -modulo	23
\mathbb{R} -modulo sinistro	23
\mathbb{R} -modulo destro	23
Caso di $\chi(U)$	24
1.4.4 Derivata di funzione rispetto a un campo di vettori	24
Derivazione di un'algebra	25
1.4.5 Campo di vettori liscio come derivazione dell'algebra $C^\infty(U)$	26
2 Differential manifolds	27
3 Lie groups and algebras	28
A Exercises: Differential geometry in euclidean spaces	29

B Exercises: Differential manifolds	30
C Exercises: Lie groups and algebras	31
Bibliography	31

Notes

The following notes are a revision of the notes taken during prof. Andrea Loi's online lessons of Differential geometry 2020-2021 (Mathematics dept., Cagliari University).

Some definitions are taken from *Introduzione alla Topologia Generale* of Andrea Loi [1].

The professor followed the following texts during the course: *Introduction to Smooth Manifolds* di John M. Lee [2] e *An Introduction to Manifolds* di Loring W. Tu [3].

Professor's site: <https://loi.unica.it/geomdiff2021.html>

Notation

Symbol	Meaning
$=$	equality
\equiv	identity
$\{\dots\}$	set elements
\exists	exists
$\exists!$	only one exists
\forall	for all
\in	belongs to
\Rightarrow	implies (sufficient)
\Leftarrow	implied by (necessary)
\Leftrightarrow	if and only if
\subset	is a subset of/included
\subseteq	included or equal
\supset	includes
\supseteq	includes or equal
\setminus	set difference
\cap	intersection
\cup	union
\emptyset	empty set
\sqcup	disjoint union
$\mathcal{P}(S)$	power set of S
\times	direct product
\oplus	direct sum
\rightarrow	function/morphism
\mapsto	maps to
\circ	composition
$f _U$	f evaluated in U
id	identity
\therefore	therefore
\because	because
\wedge	logic and
\vee	logic or
∞	infinity
$ $	such that
\sim	equivalence
S/\sim	quotient

Symbol	Meaning
$\overset{iso}{\simeq}$	isomorphism
$\overset{omeo}{\simeq}$	omeomorphism
$\overset{diff}{\simeq}$	diffeomorphism
$\overset{omo}{\simeq}$	omomorphism
\mathbb{N}	natural numbers
\mathbb{Z}	integer numbers
\mathbb{Q}	rational numbers
\mathbb{R}	real numbers
\mathbb{C}	complex numbers
\mathbb{K}	\mathbb{R} or \mathbb{C}
\mathbb{T}^n	n -dimensional torus
\mathbb{S}^n	n -dimensional sphere
$\mathbb{R}\mathcal{P}^n$	n -dimensional real projective space
\mathcal{B}	base
$\langle v \rangle$	spans
\mathcal{PC}	critical point
\mathcal{PR}	regular points
\mathcal{VC}	critic values
\mathcal{VR}	regular values
\mathfrak{g}	Lie algebra (associated to G)
$\sum_{i=1}^n$	summation from 1 to n
$\prod_{i=1}^n$	product from 1 to n
$\ v\ $	modulo/norm of v
det	determinant
tr	trace
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	matrix
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	matrix determinant
$\mathbb{1}$	identity matrix
supp	support
Ob	objects (category)
Mor	morphisms (category)
$\lceil v \rceil$	"ceiling" function
i.e.	means that (<i>id est</i>)
e.g.	as an example (<i>exempli gratia</i>)

Chapter 1

Differential geometry in euclidean spaces

1.1 Smooth and real analytic functions

1.1.1 Smooth functions

Let us consider \mathbb{R}^n with $n \geq 1$ and $U \subset \mathbb{R}^n$ open, and let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ be a function and $p \in U$ a point: defining the k th-order derivatives of f as

$$\frac{\partial^k f}{\partial (x^1)^{i_1} \dots \partial (x^k)^{i_k}} \quad \text{where} \quad \sum_{j=1}^k i_j = k \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

we say that $f \in C^k$ in p with $k \in \mathbb{N}$ if the k th-order derivatives of f exist and are continuous in p .

Let $k = 0$, then

$$f \in C^0 \iff f \text{ continuous} \quad (1.2)$$

Notation-wise:

- $f \in C^k$ in U if $f \in C^k$ in p for all $p \in U$
- $f \in C^\infty$ or *smooth* in p if $f \in C^k$ in p for all $k \in \mathbb{N}$
- $f \in C^\infty$ or *smooth* in U if $f \in C^\infty$ for all $p \in U$

therefore a function is denoted smooth if all its derivatives of any order exist and are finite.

In general, we consider functions defined not in \mathbb{R} but in \mathbb{R}^n .

A function $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ with $n \geq 1$ and $U \subset \mathbb{R}^m$ with $m \geq 1$ open is C^k in p if all its components $f^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ are $f^j \in C^k$ in p with $k \geq 0$. In particular, $f = (f^1, \dots, f^m)$ or $f^j = \pi_j \circ f$ where π_j is the *projection*

$$\begin{aligned} \pi_j : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto x^j \end{aligned} \quad (1.3)$$

for $j = 1, \dots, m$.

A function $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ is:

- C^k in U if $f^j \in C^k$ in U
- smooth in $p \in U$ if $f^j \in C^\infty$ in p for all $j = 1, \dots, m$
- smooth in U if $f^j \in C^\infty$ in U for all $j = 1, \dots, m$

Esempi

1) **Radice cubica** Sia

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{1/3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

La funzione è continua ($f \in C^0$) ed è un omeomorfismo¹ ma $f \notin C^1$ nell'origine $p = 0$ perché

$$f' = \frac{x^{-2/3}}{3} \quad (1.5)$$

la quale non è definita nell'origine e dunque $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

2) **Funzione C^1 ma non C^2** Integrando la funzione f dell'esempio precedente, si ottiene una funzione che sia C^1 ma non C^2 . Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{3x^{2/3}}{4} \quad (1.6)$$

da cui si ottiene che $g \in C^1(\mathbb{R})$ ma $g \notin C^2(\mathbb{R})$.

3) **Funzione C^k ma non C^{k+1}** Vedi Esercizio ??.

1.1.2 Funzioni reali analitiche

Sia il punto $p \in \mathbb{R}^n$, un intorno U di p è un aperto di \mathbb{R}^n che contiene p .

Sia una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, diremo che f è *reale analitica* in $p \in U$ se f coincide con il suo sviluppo di Taylor intorno a p . Questo significa che se prendiamo una funzione $f(x)$ con $x = (x^1, \dots, x^n)$ e $p = (p^1, \dots, p^n)$ abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^i - p^i) + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}} (p) ((x^{i_1} - p^{i_1}) \dots (x^{i_k} - p^{i_k})) + \dots \\ &= f(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}} (p) \prod_{j=1}^k (x^j - p^j) \end{aligned} \quad (1.7)$$

¹Sia la funzione che la sua inversa sono continue.

Se abbiamo una serie di potenze, possiamo derivarla termine a termine dunque, siccome una funzione reale analitica coincide con il suo sviluppo in serie di Taylor, è possibile derivarla ottenendo sempre una funzione continua con derivata continua. A questo punto $f \in C^\infty$: questo segue dall'analisi in quanto le serie di potenze possono essere derivate un numero arbitrario di volte.

Esempi

1) Seno La funzione $f(x) = \sin(x)$ è liscia reale analitica e ha sviluppo di Taylor

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad (1.8)$$

Per calcolare la derivata possiamo derivare termine a termine lo sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) \frac{x^{2j}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\ &= \cos(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

2) Esponenziale Per trovare la derivata di $f(x) = e^x$ ripetiamo lo stesso procedimento

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{x^{j-1}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (1.10)$$

3) Funzione liscia non reale analitica Un esempio di funzione liscia ma non reale analitica è

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Per dimostrare che sia C^0 dobbiamo verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0 \quad (1.12)$$

Per dimostrare che sia liscia²

²Vedi Esercizio ??.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^3} \right) e^{-1/x^2} = 0 \quad (1.13)$$

Tutto questo ci dice che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Se fosse anche reale analitica, dovrebbe coincidere con il suo sviluppo in serie di Taylor anche nell'origine, dunque

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} x^k \quad (1.14)$$

ma $f(x)$ nell'intorno di 0 è nulla solo per $x \leq 0$ mentre lo sviluppo di Taylor è sempre nullo: questa contraddizione porta a dire che, nonostante $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, questa non è reale analitica, scritto anche come $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$.

Un altro motivo per il quale $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$ segue dal fatto che se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \in \mathbb{R}$ aperto è reale analitica e $f = 0$ in un aperto, allora $f \equiv 0$ ovunque³.

1.2 Diffeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n

Siano $U, V \in \mathbb{R}^n$ aperti, diremo che $f : U \rightarrow V$ è un *diffeomorfismo* se è una bigezione⁴, $f \in C^\infty(U)$ e la sua inversa $g : V \rightarrow U$ è $g \in C^\infty(V)$.

Ad esempio, la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned} \quad (1.15)$$

è una bigezione liscia ma la sua inversa non è liscia, dunque f non è un diffeomorfismo.

Quando esiste un diffeomorfismo tra due aperti, si dice che questi sono *diffeomorfi*, i.e. U e V sono diffeomorfi se esiste $f : U \rightarrow V$ diffeomorfismo, in notazione $U \simeq V$.

Theorem 1 (Invarianza topologica della dimensione). *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti omeomorfi allora $n = m$.*

Theorem 2 (Invarianza differenziabile della dimensione). *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti diffeomorfi allora $n = m$ ⁵.*

È naturale verificare se gli spazi legati da omeomorfismi siano legati anche da diffeomorfismi. Ad esempio, abbiamo che i seguenti sottoinsiemi aperti di \mathbb{R} sono diffeomorfi tra loro⁶:

$$(a, b) \simeq (c, +\infty) \simeq (-\infty, d) \simeq \mathbb{R}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b \quad (1.16)$$

³Questa proprietà è valida anche se si considera una costante diversa da 0.

⁴Perciò è invertibile.

⁵Questo teorema implica quello di "Invarianza topologia della dimensione" in quanto la condizione di diffeomorfismo implica quella di omeomorfismo: una bigezione liscia con inversa liscia è una bigezione continua con inversa continua, poiché $C^\infty \implies C^0$.

⁶Vedi Esercizio ??.

1.2.1 Diffeomorfismo tra $B_\delta(c)$ e \mathbb{R}^n

Indichiamo con $B_1(0)$ la *palla* di centro l'origine e raggio unitario, i.e.

$$B_1(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \|x\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2} < 1 \right. \right\} \quad (1.17)$$

Per $n = 1$, $B_1(0) \equiv (-1, 1) \simeq \mathbb{R}$.

Definiamo

$$f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right) \quad (1.18)$$

questa applicazione è un diffeomorfismo. Per verificarlo, dobbiamo dimostrare che f sia un bigezione, $f \in C^\infty(B_1(0))$ e che $f^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

L'inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(0)$$

$$x \mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} \right) \quad (1.19)$$

in quanto

$$f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \wedge g \circ f = \text{id}_{B_1(0)} \quad (1.20)$$

Perché sia f che f^{-1} siano lisce, dobbiamo verificare che ogni loro componente lo sia, il quale è verificato perché la derivata di una delle componenti di f ha al denominatore sempre

$$\sqrt{1 - \|x\|^2} \neq 0, \quad \forall x \in B_1(0) \quad (1.21)$$

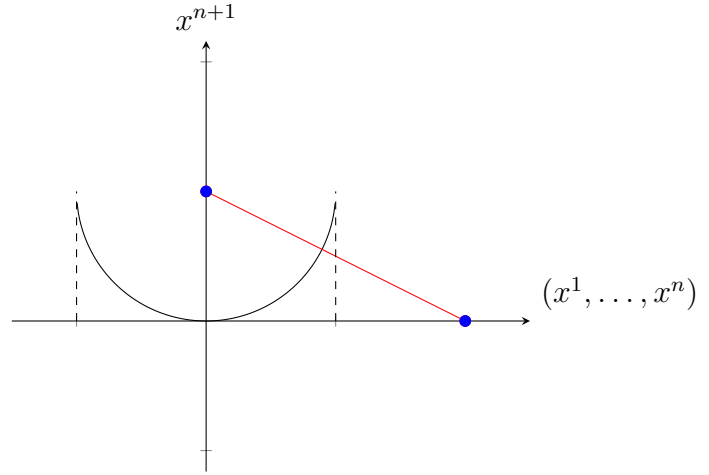
e lo stesso vale per la sua inversa

$$\sqrt{1 + \|x\|^2} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (1.22)$$

Corollary 2.1. *La palla di centro c e raggio δ con $c \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \geq 0$ è diffeomorfa a \mathbb{R}^n , i.e. $B_\delta(c) \simeq B_1(0) \simeq \mathbb{R}^n$.*

Proof. Vedi Esercizio ??; la dimostrazione passa per il mostrare che le traslazioni (le quali sono lineari e affini) e le omotetie (scala di un fattore δ) siano diffeomorfismi. \square

Per praticità di notazione, chiamiamo h il diffeomorfismo $B_\delta(c) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definito sopra. Per far vedere come nasce questo diffeomorfismo, si può usare la costruzione geometrica a lato.



Consideriamo la semicalotta aperta in \mathbb{R}^{n+1} centrata in $(0, \dots, 0, 1)$ di raggio 1:

$$S = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^{n+1})^2 + \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1 \wedge x^{n+1} < 1 \right\} \quad (1.23)$$

La palla $B_1(0)$ vive nella proiezione della semicalotta sull'iperpiano (x^1, \dots, x^n) , definita come

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \quad (1.24)$$

Questa proiezione permette di costruire l'applicazione h in due passaggi: prima prendiamo un punto in $B_1(0)$, lo proiettiamo su S e, con una proiezione stereografica, lo portiamo su \mathbb{R}^n . La prima applicazione è $f : B_1(0) \rightarrow S$ mentre la seconda $g : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, cioè la proiezione stereografica dal punto $(0, \dots, 0, 1)$. Abbiamo dunque che $g \circ f = h$. Le mappe sono

$$f(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(x^1, \dots, x^n, 1 - \sqrt{1 - \|x\|^2} \right) \quad (1.25)$$

$$g(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}, 0 \right) \quad (1.26)$$

da cui

$$\begin{aligned} h(x^1, \dots, x^{n+1}) &= (g \circ f)(x^1, \dots, x^{n+1}) \\ &= g \left(x^1, \dots, x^n, 1 - \sqrt{1 - \|x\|^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, 0 \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

A questo punto $B_1(0) \simeq \mathbb{R}^n$: dal punto di vista della geometria differenziale, due oggetti diffeomorfi vengono considerati equivalenti⁷.

⁷In topologia, vale lo stesso ragionamento per oggetti omeomorfi.

1.2.2 Teorema di Taylor con resto

Una funzione reale analitica coincide con il suo sviluppo di Taylor. Per una funzione liscia questo non è detto: la coincidenza di una funzione liscia con il suo sviluppo di Taylor è data a meno di un *resto*. Introduciamo ora il concetto di insieme stellato rispetto a un punto per definire il resto sopracitato.

Un sottoinsieme aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ è *stellato* rispetto a un punto $p \in U$ se il segmento di retta che unisce p a qualsiasi $x \in U$ è interamente contenuto in U .

Remark. *Un insieme convesso è stellato rispetto a ogni suo punto.*

L'ipotesi che un sottoinsieme sia stellato è forte a livello globale ma sempre rispettata a livello locale, in quanto è sempre possibile trovare un aperto stellato rispetto a un punto all'interno di un insieme.

Theorem 3 (Taylor con resto). *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a un punto $p \in U$ e supponiamo $f \in C^\infty(U)$, allora esistono n funzioni $g_i \in C^\infty(U)$ per $i = 1, \dots, n$ definite come*

$$g_i(p) \doteq \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.28)$$

tali che

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), \quad \forall x \in U \quad (1.29)$$

Proof. Consideriamo il segmento r che unisce p a un punto $x \in U$ con x fissato arbitrariamente:

$$r = p + t(x - p), \quad t \in [0, 1] \quad (1.30)$$

Essendo U stellato rispetto a p , possiamo valutare f in questo segmento (tutti i punti di r sono definiti in U). Consideriamo fissi x e p e deriviamo $f(r)$ rispetto a t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(r) &= \frac{d}{dt} f(p + t(x - p)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)) \left(\frac{dr}{dt} \right)^i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)) (x^i - p^i) \end{aligned} \quad (1.31)$$

per la *regola della catena*.

Integrando rispetto a t nell'intervallo $[0, 1]$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(x - p)) dt &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} (p + t(x - p)) (x^i - p^i) dt \\ f(x) - f(p) &= \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (p + t(x - p)) dt \end{aligned} \quad (1.32)$$

chiamando

$$g_i(x) \doteq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (p + t(x - p)) dt \quad (1.33)$$

si può scrivere

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x) \quad (1.34)$$

dove $g_i(x) \in C^\infty(U)$ perché derivata parziale di una funzione liscia. Inoltre

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (p) dt = \frac{\partial f}{\partial x^i} (p), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.35)$$

□

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con p corrispondente all'origine: per il teorema di Taylor con resto, sappiamo che esiste una funzione $g_1 \in C^\infty(U)$ tale che

$$f(x) = f(0) + x g_1(x) \quad \text{con} \quad g_1(0) = f'(0) \quad (1.36)$$

Riapplicando il teorema a g_1 (in quanto liscia), otteniamo

$$g_1(x) = g_1(0) + x g_2(x) \quad \begin{cases} g_2 \in C^\infty(U) \\ g_2(0) = g_1'(0) \end{cases} \quad (1.37)$$

Per induzione

$$g_i(x) = g_i(0) + x g_{i+1}(x) \quad \begin{cases} g_{i+1} \in C^\infty(U) \\ g_{i+1}(0) = g_i'(0) \end{cases} \quad \forall i \geq 1 \quad (1.38)$$

Sostituendo in f tutte queste funzioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + xg_1(x) \\
&= f(0) + xg_1(0) + x^2g_2(x) \\
&= f(0) + xg_1(0) + x^2g_2(0) + x^3g_3(x) \\
&\vdots \\
&= f(0) + xg_1(0) + \cdots + x^kg_k(0) + x^{k+1}g_{k+1}(x)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

A questo punto si può definire

$$g_k(0) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0) \doteq \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{1.40}$$

da cui

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^i \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^{i+1}g_{i+1}(x), \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{1.41}$$

dove la prima parte coincide con lo sviluppo in serie di Taylor mentre l'ultimo termine indica il *resto*.

Per esercizi sul resto, vedi Esercizi ?? e ??.

1.3 Vettori tangenti in \mathbb{R}^n

Preso un punto $p \in \mathbb{R}^n$, lo *spazio tangente* in quel punto viene chiamato $T_p(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio tangente a un punto p è l'insieme⁸ di tutti i vettori che escono dal punto stesso. Essendo $T_p(\mathbb{R}^n) \stackrel{iso}{\simeq} \mathbb{R}^n$, un elemento $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ può dunque essere rappresentato come un *vettore riga* o *colonna*

$$\begin{bmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{bmatrix} \quad \vee \quad \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

dove le v^i sono le componenti del vettore nella base canonica, i.e.

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \tag{1.43}$$

Per generalizzare questo concetto, considereremo gli elementi degli spazi tangenti non più come oggetti geometrici vettori ma come *derivazioni*.

⁸Formalmente, è uno spazio vettoriale con origine il punto p .

1.3.1 Derivate direzionali

Siano un'applicazione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, un punto $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e un vettore $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo la retta $c(t)$ che passa per p con direzione v , parametrizzata come

$$c(t) = p + tv, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.44)$$

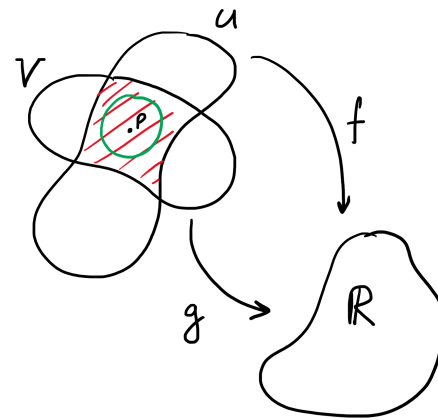
Definiamo la *derivata direzionale* di f rispetto a v come

$$\begin{aligned} D_v f &\doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \left(\frac{d}{dt} c(t) \right)^i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \end{aligned} \quad (1.45)$$

dove $D_v f \in \mathbb{R}$ e $v = [v^1 \ \cdots \ v^n]$.

Remark. Sia un'applicazione $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ con $V \subset \mathbb{R}^n$ e $V \cap U \neq \emptyset$. Se $g \equiv f$ in un intorno W del punto $p \in W \subset U \cap V$, allora la loro derivata direzionale è la stessa⁹, i.e.

$$D_v g = D_v f, \quad \forall p \in W \quad (1.46)$$



Definiamo ora l'insieme di coppie

$$X \doteq \{(f, U) \mid f \in C^\infty(U), U \text{ intorno di } p \in U\} \quad (1.47)$$

Diremo che¹⁰ per $p \in W$

$$(f, U) \sim (g, V) \iff \exists W \subseteq U \cap V, W \ni p \mid f(q) = g(q), \quad \forall q \in W \quad (1.48)$$

⁹Questo perché il limite del rapporto incrementale nella definizione di $D_v f$ dipende da un intorno arbitrariamente piccolo.

¹⁰Il simbolo \sim indica una relazione di equivalenza.

Questa è effettivamente una relazione di equivalenza in quanto riflessiva, simmetrica e transitiva. Prendiamo dunque lo spazio quoziente¹¹

$$X/\sim \doteq C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.49)$$

dove un elemento $[(f, U)]$ di questo spazio è chiamato *germe* intorno al punto p ed è una *classe di equivalenza* di coppie (f, U) . A questo punto, $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei germi di funzioni lisce intorno a p , i.e.

$$C_p^\infty(\mathbb{R}^n) = \{[(f, U)] \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), U \subset \mathbb{R}^n\} \quad (1.50)$$

Possiamo definire un'applicazione

$$\begin{aligned} D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ [(f, U)] &\mapsto D_v f \end{aligned} \quad (1.51)$$

Questa applicazione è ben definita in quanto l'associazione di un germe di funzioni a un numero reale non dipende dal rappresentante scelto poiché

$$(f, U) \sim (g, V) \implies D_v g = D_v f \quad (1.52)$$

Esempio

Siano le applicazioni

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1-x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ g(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} x^j, & x \in (-1, 1) \end{cases} \quad (1.53)$$

Nonostante in generale $f \neq g$, nell'intorno $(-1, 1)$ di $p = 0$ vale l'equivalenza per i germi

$$(f, \mathbb{R} \setminus \{1\}) \sim (g, (-1, 1)) \quad (1.54)$$

in altre parole, le classi di equivalenza

$$[(f, \mathbb{R} \setminus \{1\})] = [(g, (-1, 1))] \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.55)$$

¹¹Approfondiremo l'argomento degli spazi quoziente nella Sottosezione ??.

Algebra su campo \mathbb{K}

Un'algebra A su un campo \mathbb{K} è una coppia (V, \cdot) con V spazio vettoriale su un campo¹² \mathbb{K} e un'operazione binaria

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned} \quad (1.56)$$

tale che soddisfi le condizioni

$$\begin{cases} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & \text{associatività}^{13} \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c & \text{distributività} \\ c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b & \\ \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) & \text{omogeneità} \end{cases} \quad (1.57)$$

per qualsiasi $a, b, c \in A$ e qualsiasi $\lambda \in \mathbb{K}$.

Equivalentemente, un'algebra su un campo \mathbb{K} può essere pensata come un anello¹⁴ $(V, +, \cdot)$ il quale sia anche uno spazio vettoriale con aggiunta la proprietà di omogeneità.

1.3.2 $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come algebra su \mathbb{R}

Definiamo la somma

$$[(f, U)] + [(g, V)] = [(f + g, U \cap V)], \quad [(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.58)$$

Questa somma è ben definita in quanto, prendendo due rappresentanti qualunque di $[(f, U)]$ e $[(g, V)]$, esiste sempre un intorno in cui questa somma sia definita.

Allo stesso modo, definiamo il prodotto

$$[(f, U)] \cdot [(g, V)] = [(fg, U \cap V)], \quad [(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.59)$$

e la moltiplicazione per scalari

$$\lambda[(f, U)] = [(\lambda f, U)], \quad \lambda \in \mathbb{R}, [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.60)$$

Tutte queste operazioni sono ben definite e soddisfano tutte le proprietà di un'algebra perché, per funzioni lisce, la somma, il prodotto e la moltiplicazione soddisfano queste stesse proprietà. A questo punto si può dire che $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ sia un'algebra su \mathbb{R} .

Nonostante non sia necessario per un'algebra, $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ è anche commutativa e unitaria¹⁵ su \mathbb{R}^n .

¹²Dunque con operazioni

$$\begin{cases} a + b \in A, & \forall a, b \in A \\ \lambda a \in A, & \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$$

¹³In generale, non è necessaria l'associatività per definire un'algebra.

¹⁴Le proprietà di associatività e distributività sono sufficienti per renderla un anello.

¹⁵Vedi Esercizio ??.

1.3.3 Derivazione puntuale di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$

A questo punto, possiamo definire l'applicazione chiamata *derivazione puntuale* dell'algebra $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$D : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[(f, U)] \mapsto D_v f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \quad (1.61)$$

con $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

Questa applicazione possiede le seguenti proprietà:

1. \mathbb{R} -linearità¹⁶, i.e.

$$D([(f, U)] + [(g, V)]) = D([(f, U)]) + D([(g, V)]) \quad (1.62)$$

$$D(\lambda[(f, U)]) = \lambda D([(f, U)]) \quad (1.63)$$

2. soddisfa la *regola di Leibniz*, i.e.

$$D([(f, U)] \cdot [(g, V)]) = D([(f, U)]) g(p) + f(p) D([(g, V)]) \quad (1.64)$$

Dimostrazione (\mathbb{R} -linearità (somma)).

$$\begin{aligned} D([(f, U)] + [(g, V)]) &= D([(f + g, U \cap V)]) \\ &= D_v(f + g) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f + g)}{\partial x^j}(p) v^j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^j}(p) v^j \\ &= D_v f + D_v g \\ &= D([(f, U)]) + D([(g, V)]) \end{aligned} \quad (1.65)$$

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $p \in U \cap V \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. \square

Dimostrazione (\mathbb{R} -linearità (moltiplicazione per scalare)).

$$\begin{aligned} D(\lambda[(f, U)]) &= D([\lambda f, U]) \\ &= D_v(\lambda f) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x^j}(p) v^j \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j \\ &= \lambda D([(f, U)]) \end{aligned} \quad (1.66)$$

¹⁶Rispetto alla struttura di spazio vettoriale di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$, qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. \square

Dimostrazione (Regola di Leibniz).

$$\begin{aligned}
 D([(f, U)] \cdot [(g, V)]) &= D([(fg, U \cap V)]) \\
 &= D_v(fg) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(fg)}{\partial x^j}(p) v^j \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j \right) g(p) + f(p) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^j}(p) v^j \right) \\
 &= (D_v f) g(p) + f(p) (D_v g) \\
 &= D([(f, U)]) g(p) + f(p) D([(g, V)])
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $p \in U \cap V \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. \square

La derivazione puntuale è quindi un modo per associare un numero reale a un germe di funzioni, soddisfacendo le proprietà definite sopra.

Indichiamo dunque l'insieme delle derivazioni puntuali di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e.

$$\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \doteq \left\{ D([(f, U)]) = D_v f \doteq \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n), \\ v \in T_p(\mathbb{R}^n) \end{array} \right. \right\} \tag{1.68}$$

1.3.4 Isomorfismo tra $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$

Definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned}
 \varphi : T_p(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\
 v &\mapsto D_v
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

questa associa il vettore $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in \mathbb{R}^n$ alla derivazione puntuale D_v , la quale è a sua volta un'applicazione che associa la classe di equivalenza di germi di funzioni $[(f, U)]$ alla derivata direzionale di f rispetto a v , i.e.

$$D_v f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j \in \mathbb{R} \tag{1.70}$$

Possiamo usare lo stesso simbolo, i.e. $D_v([(f, U)]) = D_v f$, perché questa relazione vale per qualunque rappresentante della classe.

L'applicazione φ permette di considerare equivalentemente l'insieme delle derivazioni puntuali

dell'algebra dei germi delle funzioni $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e lo spazio tangente a un punto, in quanto questi due insiemi sono isomorfi tra loro tramite φ stessa. Utilizzare le derivazioni è utile perché per alcune varietà differenziabili non esiste una visualizzazione dello spazio tangente.

Theorem 4. *L'applicazione φ è un isomorfismo degli spazi vettoriali $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e. tramite φ si ha che*

$$T_p(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{iso.}}{\cong} \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \quad (1.71)$$

Per dimostrare questo teorema è necessario notare che gli elementi $D_i \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ costituiscono uno spazio vettoriale¹⁷ con operazioni

$$\begin{aligned} + : \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \times \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) &\rightarrow \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ (D_v, D_w) &\mapsto D_v + D_w \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) &\rightarrow \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ (\lambda, D_v) &\mapsto \lambda D_v \end{aligned} \quad (1.73)$$

Consideriamo ora la seguente preposizione:

Proposition 4.1. *Le operazioni dello spazio vettoriale $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ su \mathbb{R} (definite sopra) sono \mathbb{R} -lineari e la somma soddisfa la regola di Leibniz, i.e.*

$$(D_v + D_w)([(f, U)]) = D_v([(f, U)]) + D_w([(f, U)]) \quad (1.74)$$

$$D(\lambda[(f, U)]) = \lambda D([(f, U)]) = (\lambda D)([(f, U)]) \quad (1.75)$$

$$(D_v + D_w)([(f, U)] \cdot [(g, V)]) = (D_v + D_w)([(f, U)]) g(p) + f(p) (D_v + D_w)([(g, V)]) \quad (1.76)$$

per qualsiasi $D, D_v, D_w \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione (Proposizione). Per la \mathbb{R} -linearità:

$$\begin{aligned} (D_v + D_w)(\alpha[(f, U)] + \beta[(g, V)]) &= D_v(\alpha[(f, U)] + \beta[(g, V)]) + \\ &\quad + D_w(\alpha[(f, U)] + \beta[(g, V)]) \\ &= \alpha D_v([(f, U)]) + \beta D_v([(g, V)]) + \\ &\quad + \alpha D_w([(f, U)]) + \beta D_w([(g, V)]) \\ &= \alpha(D_v + D_w)([(f, U)]) + \beta(D_v + D_w)([(g, V)]) \end{aligned} \quad (1.77)$$

per qualsiasi $D_v, D_w \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Per la regola di Leibniz:

¹⁷Vedi Esercizio ??.

$$\begin{aligned}
(D_v + D_w)([(f, U)] \cdot [(g, V)]) &= D_v([(f, U)] \cdot [(g, V)]) + D_w([(f, U)] \cdot [(g, V)]) \\
&= D_v([(f, U)]) g(p) + f(p) D_v([(g, V)]) + \\
&\quad + D_w([(f, U)]) g(p) + f(p) D_w([(g, V)]) \\
&= (D_v + D_w)([(f, U)]) g(p) + f(p) (D_v + D_w)([(g, V)])
\end{aligned} \tag{1.78}$$

per qualsiasi $D_v, D_w \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$. \square

Proof. Per dimostrare che φ sia un isomorfismo è necessario dimostrare che φ sia \mathbb{R} -lineare, iniettiva¹⁸ e suriettiva¹⁹.

Per l' \mathbb{R} -linearità, sia $[(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
D_{\alpha v + \beta w}([(f, U)]) &= D_{\alpha v + \beta w}(f) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) (\alpha v^j + \beta w^j) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j + \beta \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) w^j \\
&= \alpha D_v f + \beta D_w f \\
&= \alpha D_v([(f, U)]) + \beta D_w([(f, U)])
\end{aligned} \tag{1.79}$$

per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v, w \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

Da questo si ottiene che l'applicazione φ è \mathbb{R} -lineare:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha v + \beta w) &= D_{\alpha v + \beta w} \\
&= \alpha D_v + \beta D_w \\
&= \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(w)
\end{aligned} \tag{1.80}$$

per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v, w \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

Per l'iniettività, consideriamo il *kernel*²⁰ di φ : se questo contiene solo l'elemento 0, inteso come

¹⁸Un'applicazione f tra due insiemi A e B è *iniettiva* se

$$\forall a_1, a_2 \in A \mid a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

¹⁹Un'applicazione f tra due insiemi A e B è *suriettiva* se

$$\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b$$

²⁰Il *kernel* o nucleo di un'applicazione, indicato con \ker , è l'insieme di tutti e soli gli elementi del dominio che hanno come immagine lo 0 del codominio. Nel caso considerato ora

$$\ker(\varphi) = \{v \in T_p(\mathbb{R}^n) \mid \varphi(v) \equiv D_v = 0 \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))\}$$

$$\begin{aligned} 0 : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ [(f, U)] &\mapsto 0 \end{aligned} \quad (1.81)$$

i.e. $\ker(\varphi) = \{0\}$, allora φ è iniettiva²¹.

Siccome 0 associa un qualunque germe liscio $[(f, U)]$ sempre a $0 \in \mathbb{R}$, possiamo scegliere l'applicazione

$$\begin{aligned} x^j : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^n) &\mapsto x^j \end{aligned} \quad (1.82)$$

per qualsiasi $j = 1, \dots, n$, la quale è una proiezione liscia dunque il germe che la contiene è liscio, i.e. $[(x^j, \mathbb{R}^n)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. A questo punto

$$\begin{aligned} 0([(x^j, \mathbb{R}^n)]) &= D_v([(x^j, \mathbb{R}^n)]) \\ &= D_v(x^j) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) v^i \\ &= \sum_{i=1}^n \delta^{ij} v^i \\ &= v^j \end{aligned} \quad (1.83)$$

perciò

$$\begin{cases} 0([(f, U)]) = 0 \in \mathbb{R}, & \forall [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \\ 0([(x^j, \mathbb{R}^n)]) = v^j \end{cases} \implies v^j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.84)$$

da cui

$$v \in \ker(\varphi) \iff v = 0 \in T_p(\mathbb{R}^n) \quad (1.85)$$

perciò φ è iniettiva.

La suriettività implica che se si fissa una qualunque derivazione puntuale esiste un vettore nello spazio tangente che mandato tramite φ dà quella derivazione: in simboli

$$\forall D \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)), \exists v \in T_p(\mathbb{R}^n) \mid \varphi(v) = D \quad (1.86)$$

dove in generale $\varphi(v) = D_v$, dunque dobbiamo trovare un v tale che faccia coincidere $D = D_v$. Prima di farlo, enunciamo il seguente lemma:

²¹Questo vale perché φ è lineare (vedi Teorema della dimensione).

Lemma 5 (Derivazione di costante). *Siano $D \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e la funzione costante*

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned} \tag{1.87}$$

allora $D([(c, \mathbb{R}^n)]) = 0$.

Dimostrazione (lemma).

$$\begin{aligned} D([(c, \mathbb{R}^n)]) &= D([(1c, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c D([(1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c D([(1 \cdot 1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c (D([(1, \mathbb{R}^n)]) 1 + 1 D([(1, \mathbb{R}^n)])) \\ &= 2c D([(1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.88}$$

□

A questo punto, due applicazioni sono uguali se e solo se coincidono per ogni punto del dominio, i.e.

$$D_v = D \iff D_v([(f, U)]) = D([(f, U)]), \quad \forall [(f, U)] \in (C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.89}$$

Prendendo un dominio U stellato rispetto al punto p , per il teorema di Taylor con resto

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), \quad \forall x \in U \tag{1.90}$$

con

$$g_i \in C^\infty(U) \left| g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad i = 1, \dots, n \right. \tag{1.91}$$

Sia $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_{p(\mathbb{R}^n)}$ definito come $v^j = D([(x^j, \mathbb{R}^n)])$ per $j = 1, \dots, n$. Ora applichiamo D a un qualunque germe liscio $[(f, U)]$

$$\begin{aligned}
D([(f, U)]) &= \cancel{D([(f, p), \mathbb{R}^n])}^0 + D\left(\left[\left(\sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), U\right)\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^n D([(x^i - p^i) g_i(x), U]) \\
&= \sum_{i=1}^n (D([(x^i - p^i), U]) g_i(p) + \cancel{(p^i - p^i)}^0 D([(g_i(x), U)])) \\
&= \sum_{i=1}^n (D([(x^i, U)]) - \cancel{D([(p^i, U)])}^0) g_i(p) \tag{1.92} \\
&= \sum_{i=1}^n D([(x^i, U)]) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \\
&= D_v f \\
&= D_v([(f, U)])
\end{aligned}$$

dunque $D = D_f$ e perciò φ è anche suriettiva. \square

Date queste proprietà di φ , questa applicazione è un isomorfismo tra $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e.

$$T_p(\mathbb{R}^n) \stackrel{iso.}{\simeq} \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.93}$$

Corollary 5.1.

$$\dim(T_p(\mathbb{R}^n)) = n = \dim(\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))) \tag{1.94}$$

1.3.5 Base canonica per $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$

L'insieme delle n -uple

$$\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right) \tag{1.95}$$

i cui elementi sono definiti come

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p([(f, U)]) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p), \quad \forall p \in U, j = 1, \dots, n \tag{1.96}$$

forma una base per lo spazio $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Proof. Essendo $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, da cui

$$\dim(\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))) = n \quad (1.97)$$

se (e_1, \dots, e_n) è la base canonica²² di $T_p(\mathbb{R}^n)$, si ha che

$$\varphi(e_i) = D_{e_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1.98)$$

i.e. un isomorfismo porta elementi di base in altrettanti elementi di base.

Applicando questo a una qualunque funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$D_{e_i}(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) (e_i)_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (1.99)$$

□

1.4 Campi di vettori su aperti di \mathbb{R}^n

Sia un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, un *campo di vettori* su U è un'applicazione

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow \bigsqcup_{p \in U} T_p(\mathbb{R}^n) \\ p &\mapsto X_p \end{aligned} \quad (1.100)$$

dove il codominio è l'*unione disgiunta*²³ degli spazi di vettori tangenti in ogni punto di U ; inoltre $T_p(\mathbb{R}^n) = T_p(U)$ in quanto le due algebre seguenti coincidono $C_p^\infty(\mathbb{R}^n) = C_p^\infty(U)$ perché i germi delle funzioni sono definiti localmente, quindi non dipendono dall'aperto considerato.

Un elemento del campo di vettori può essere scritto in funzione della base canonica di $T_p(\mathbb{R}^n)$

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad (1.101)$$

dove $a^i(p) \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$. In modo naturale, l'elemento X_p si identifica con l' n -upla $X_p = (a^1(p), \dots, a^n(p))$ in quanto $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$.

La notazione che indica che un elemento di una base genera uno spazio è la seguente:

$$\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right\rangle = T_p(\mathbb{R}^n) \quad (1.102)$$

Il campo di vettori X (senza la valutazione in un punto p) si scrive come

²²Con $(e_j)_k = \delta_{jk}$, e.g. $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

²³L'unione disgiunta equivale a un'unione in cui ogni insieme ha un indice diverso, e.g. l'insieme non connesso $(0, 1) \sqcup (0, 1)$ è diverso da $(0, 1) \cup (0, 1) = (0, 1)$.

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.103)$$

dove ora a^i è una funzione $a^i : U \rightarrow \mathbb{R}$.

1.4.1 Campi di vettori lisci

Un campo di vettori

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.104)$$

è $C^\infty(U)$ (liscio o differenziabile) se le funzioni a^i sono lisce, i.e. $a^i \in C^\infty(U)$ per qualsiasi $i = 1, \dots, n$.

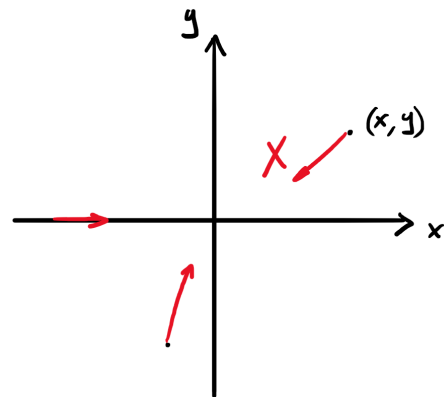
L'insieme dei campi di vettori che rispettano questa prescrizione è chiamato $\chi(U)$, i.e.

$$\chi(U) = \left\{ X : U \rightarrow \bigsqcup_{p \in U} T_p(\mathbb{R}^n), X(p) = X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \mid U \subset \mathbb{R}^n, a^i \in C^\infty(U) \right\} \quad (1.105)$$

Esempi

1) Il campo di vettori seguente è liscio perché qualunque derivata delle sue componenti non annulla mai il denominatore in quanto l'origine non è compresa nel dominio

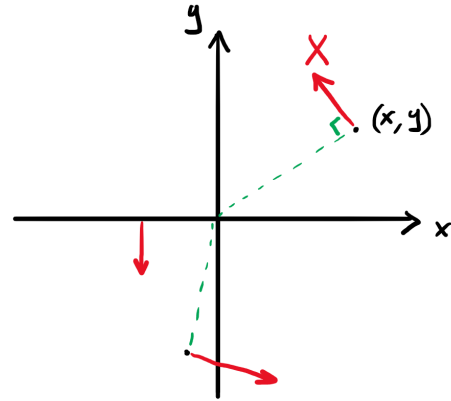
$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2) \\ (x,y) &\mapsto -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.106)$$



2) Per lo stesso motivo dell'esempio precedente, il campo di vettori seguente è liscio

$$X : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$$

$$\begin{aligned} (x,y) &\mapsto -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.107)$$



1.4.2 Operazioni in $\chi(U)$

Si può definire la somma in $\chi(U)$ come

$$(X + Y)_p \doteq X_p + Y_p, \quad X, Y \in \chi(U), p \in U \quad (1.108)$$

questo significa che, presi due campi di vettori su U

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i, b^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.109)$$

allora

$$X + Y = \sum_{i=1}^n (a^i + b^i) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i + b^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.110)$$

Si può definire anche la moltiplicazione per scalari come

$$(\lambda X)_p \doteq \lambda X_p, \quad \forall X \in \chi(U), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in U \quad (1.111)$$

questo significa che, preso

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.112)$$

allora

$$\lambda X = \sum_{i=1}^n (\lambda a^i) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \lambda a^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.113)$$

L'ultima operazione è quella di moltiplicazione di un campo di vettori per un'altra funzione

$$(fX)_p \doteq f(p)X_p, \quad X \in \chi(U), f \in C^\infty(U) \quad (1.114)$$

questo significa che

$$fX = \sum_{i=1}^n (fa^i) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad fa^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.115)$$

Le prime due operazioni dotano l'insieme di $\chi(U)$ della proprietà di spazio vettoriale.

1.4.3 $\chi(U)$ come $C^\infty(U)$ -modulo

\mathbb{R} -modulo sinistro

Sia R un anello commutativo unitario, un gruppo abeliano $(A, +)$ è detto *R-modulo sinistro* se esiste un'applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : R \times A &\rightarrow A \\ (r, a) &\mapsto r \cdot a \end{aligned} \quad (1.116)$$

tale che

$$\begin{cases} 1_R \cdot a = a \\ r \cdot (s \cdot a) = (rs) \cdot a \\ (r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a \\ r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b \end{cases} \quad \forall r, s \in R, \forall a, b \in A \quad (1.117)$$

Queste proprietà valgono solo da *sinistra*, potrebbero non valere se calcolate da destra.

\mathbb{R} -modulo destro

Sia R un anello commutativo unitario, un gruppo abeliano $(A, +)$ è detto *R-modulo destro* se esiste un'applicazione

$$\begin{aligned} * : A \times R &\rightarrow A \\ (a, r) &\mapsto a * r \end{aligned} \quad (1.118)$$

tale che

$$\begin{cases} a * 1_R = a \\ (a * r) * s = a * (rs) \\ a * (r + s) = a * r + a * s \\ (a + b) * r = a * r + b * r \end{cases} \quad \forall r, s \in R, \forall a, b \in A \quad (1.119)$$

Queste proprietà valgono solo da *destra*, potrebbero non valere se calcolate da sinistra.

Tramite queste definizioni, definiamo $(A, +)$ un *R-modulo* se è sia un *R-modulo sinistro* che destro, i.e. $\cdot \equiv *$.

Remark. Se un gruppo A è un R -modulo ed R è un campo \mathbb{K} , allora A è uno spazio vettoriale in \mathbb{K} .

Caso di $\chi(U)$

Essendo $C^\infty(U)$ un anello commutativo unitario, per l'insieme dei campi di vettori lisci su U vale il seguente teorema:

Theorem 6. $(\chi(U), +)$ è un $C^\infty(U)$ -modulo.

Proof. Per dimostrare che il gruppo abeliano $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$ -modulo, è necessario dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$ -modulo sinistro e destro per la moltiplicazione di un campo di vettori per una funzione

$$\begin{aligned} \cdot : C^\infty(U) \times \chi(U) &\rightarrow \chi(U) \\ (f, X) &\mapsto fX \end{aligned} \quad (1.120)$$

Devono dunque essere verificate le seguenti proprietà sia a sinistra che a destra:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1_{C^\infty(U)}X = X \\ f(gX) = (fg)X \\ f(X + Y) = fX + fY \\ (f + g)X = fX + gX \end{array} \right. \quad \forall f, g \in C^\infty(U), \forall X, Y \in \chi(U) \quad (1.121)$$

Siccome la moltiplicazione per funzione è commutativa²⁴, è sufficiente dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$ -modulo sinistro (o destro) per dimostrare che sia $C^\infty(U)$ -modulo²⁵. \square

1.4.4 Derivata di funzione rispetto a un campo di vettori

I campi di vettori permettono di derivare funzioni: la loro azione è equivalente alla derivata direzionale di una funzione rispetto a un vettore.

Siano un campo di vettori liscio $X \in \chi(U)$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e una funzione liscia $f \in C^\infty(U)$. Definiamo la derivata della funzione f rispetto al campo di vettori X come $Xf \in C^\infty(U)$. La derivata puntuale è definita come

$$(Xf)(p) = X_p f, \quad p \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (1.122)$$

Preso un campo

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.123)$$

allora

²⁴Nonostante ciò, scriveremo la funzione sempre a sinistra dei campi, per notazione e per evitare di confonderla con la derivata di funzione rispetto a un campo di vettori (vedi sottosezione successiva).

²⁵Vedi Esercizio ??.

$$(Xf)(p) = \left(\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right)_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (1.124)$$

perciò

$$\begin{aligned} Xf : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned} \quad (1.125)$$

Questa applicazione è $C^\infty(U)$ perché lo è $(Xf)(p)$, la quale lo è a sua volta perché $f \in C^\infty(U)$ e $X \in \chi(U)$ in quanto $a^i \in C^\infty(U)$.

Possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{aligned} X : C^\infty(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\ f &\mapsto Xf \end{aligned} \quad (1.126)$$

ricordando che $C^\infty(U)$, oltre a essere un anello commutativo unitario, è un'algebra sui reali, perciò l'applicazione X è \mathbb{R} -lineare. Inoltre, siccome $X_p \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i campi di vettori valutati in un punto soddisfano la regola di Leibniz:

$$X(fg)(p) = X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g) \quad (1.127)$$

perciò anche l'applicazione X soddisfa la regola di Leibniz:

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \quad (1.128)$$

Derivazione di un'algebra

Sia A un'algebra su campo ²⁶ \mathbb{K} , un'applicazione $D : A \rightarrow A$ che sia \mathbb{K} -lineare e tale che soddisfi la regola di Leibniz

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db), \quad \forall a, b \in A \quad (1.129)$$

²⁶Ricordiamo che un'algebra A su campo \mathbb{K} è una coppia (V, \cdot) dove V è uno spazio vettoriale e l'operazione

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

soddisfa le proprietà

$$\begin{cases} (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c & \text{distributività} \\ c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b & \\ \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) & \text{omogeneità} \end{cases} \quad \forall a, b, c \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

è chiamata *derivazione dell'algebra* A . L'insieme di tutte le derivazioni di un'algebra A viene indicato come $\text{Der}(A)$ ²⁷.

1.4.5 Campo di vettori liscio come derivazione dell'algebra $C^\infty(U)$

Possiamo vedere un campo di vettori come una derivazione di un'algebra, quindi definiamo un'applicazione

$$\begin{aligned}\varphi : \chi(U) &\rightarrow \text{Der}(C^\infty(U)) \\ X &\mapsto \varphi(X)\end{aligned}\tag{1.130}$$

da cui

$$\varphi(X)(f) \doteq Xf, \quad f \in C^\infty(U)\tag{1.131}$$

Sia $\chi(U)$ che $\text{Der}(C^\infty(U))$ sono $C^\infty(U)$ -moduli tramite l'applicazione

$$\begin{aligned}\cdot : C^\infty(U) \times \text{Der}(C^\infty(U)) &\rightarrow \text{Der}(C^\infty(U)) \\ (f, D) &\mapsto fD\end{aligned}\tag{1.132}$$

per la quale vale

$$(fD)(g) = f(Dg), \quad \forall g \in C^\infty(U)\tag{1.133}$$

Inoltre φ è anche $C^\infty(U)$ -lineare:

$$\varphi(fX + gY) = f\varphi(X) + g\varphi(Y), \quad \forall f, g \in C^\infty(U), \forall X, Y \in \chi(U)\tag{1.134}$$

Dimostreremo per le varietà differenziabili²⁸ che φ è un isomorfismo di $C^\infty(U)$ -moduli, i.e. $\chi(U) \simeq \text{Der}(C^\infty(U))$.

Tramite questo isomorfismo, si possono identificare i campi di vettori lisci con le derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce, analogamente a come lo spazio tangente a un punto di \mathbb{R}^n si può identificare con le derivazioni puntuali dell'algebra dei germi delle funzioni in quel punto, i.e. $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.

²⁷Vedi Esercizi ?? e ??.

²⁸Vedi Sotto-sottosezione ??.

Chapter 2

Differential manifolds

Chapter 3

Lie groups and algebras

Exercises A

Exercises: Differential geometry in
euclidean spaces

Exercises B

Exercises: Differential manifolds

Exercises C

Exercises: Lie groups and algebras

Bibliography

1. Loi, A. *Introduzione alla Topologia Generale* ISBN: 978-88-548-5917-3 (Aracne, 2013).
2. Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds* ISBN: 978-1-4419-9982-5 (Springer).
3. Tu, L. W. *An Introduction to Manifolds* ISBN: 978-1-4419-7400-6 (Springer, 2010).