

Differential Geometry Notes

Simone Iovine

Sunday 18th June, 2023

Contents

Notes	iii
Notation	v
1 Differential geometry in euclidean spaces	1
1.1 Smooth and real analytic functions	1
1.1.1 Smooth functions	1
<i>Examples</i>	2
1.1.2 Real analytic functions	2
<i>Examples</i>	3
1.2 Diffeomorphisms between open sets of \mathbb{R}^n	4
1.2.1 Diffeomorfismo tra $B_\delta(c)$ e \mathbb{R}^n	5
1.2.2 Teorema di Taylor con resto	7
1.3 Vettori tangenti in \mathbb{R}^n	9
1.3.1 Derivate direzionali	10
<i>Esempio</i>	11
Algebra su campo \mathbb{K}	12
1.3.2 $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come algebra su \mathbb{R}	12
1.3.3 Derivazione puntuale di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$	13
1.3.4 Isomorfismo tra $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$	14
1.3.5 Base canonica per $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$	19
1.4 Campi di vettori su aperti di \mathbb{R}^n	20
1.4.1 Campi di vettori lisci	21
<i>Esempi</i>	21
1.4.2 Operazioni in $\chi(U)$	22
1.4.3 $\chi(U)$ come $C^\infty(U)$ -modulo	23
\mathbb{R} -modulo sinistro	23
\mathbb{R} -modulo destro	23
Caso di $\chi(U)$	24
1.4.4 Derivata di funzione rispetto a un campo di vettori	24
Derivazione di un'algebra	25
1.4.5 Campo di vettori liscio come derivazione dell'algebra $C^\infty(U)$	26
2 Differential manifolds	27
3 Lie groups and algebras	28
A Exercises: Differential geometry in euclidean spaces	29

A.1	Funzione $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$	29
A.2	Funzione liscia ma non reale analitica	30
A.3	Intervalli diffeomorfi a \mathbb{R}	31
A.4	Diffeomorfismo tra $B_r(c)$ e \mathbb{R}^n	32
A.5	Teorema di Taylor con resto per funzione a due variabili	33
A.6	Funzione liscia tramite incollamento	34
A.7	$C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come algebra commutativa e unitaria	36
A.8	$\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ come spazio vettoriale su \mathbb{R}	38
A.9	$\chi(U)$ come spazio vettoriale su \mathbb{R} e C^∞ -modulo	41
A.10	$\text{Der}(A)$ come spazio vettoriale su \mathbb{K}	46
A.11	Commutatore come derivazione	49
B	Exercises: Differential manifolds	50
C	Exercises: Lie groups and algebras	51
	Bibliography	51

Notes

The following notes are a revision of the notes taken during prof. Andrea Loi's online lessons of Differential geometry 2020-2021 (Mathematics dept., Cagliari University).

Some definitions are taken from *Introduzione alla Topologia Generale* of Andrea Loi [1].

The professor followed the following texts during the course: *Introduction to Smooth Manifolds* di John M. Lee [2] e *An Introduction to Manifolds* di Loring W. Tu [3].

Professor's site: <https://loi.unica.it/geomdiff2021.html>

Notation

Symbol	Meaning
$=$	equality
\equiv	identity
$\{\dots\}$	set elements
\exists	exists
$\exists!$	only one exists
\forall	for all
\in	belongs to
\Rightarrow	implies (sufficient)
\Leftarrow	implied by (necessary)
\Leftrightarrow	if and only if
\subset	is a subset of/included
\subseteq	included or equal
\supset	includes
\supseteq	includes or equal
\setminus	set difference
\cap	intersection
\cup	union
\emptyset	empty set
\sqcup	disjoint union
$\mathcal{P}(S)$	power set of S
\times	direct product
\oplus	direct sum
\rightarrow	function/morphism
\mapsto	maps to
\circ	composition
$f _U$	f evaluated in U
id	identity
\therefore	therefore
\because	because
\wedge	logic and
\vee	logic or
∞	infinity
$ $	such that
\sim	equivalence
S/\sim	quotient

Symbol	Meaning
$\overset{iso}{\simeq}$	isomorphism
$\overset{omeo}{\simeq}$	omeomorphism
$\overset{diff}{\simeq}$	diffeomorphism
$\overset{omo}{\simeq}$	omomorphism
\mathbb{N}	natural numbers
\mathbb{Z}	integer numbers
\mathbb{Q}	rational numbers
\mathbb{R}	real numbers
\mathbb{C}	complex numbers
\mathbb{K}	\mathbb{R} or \mathbb{C}
\mathbb{T}^n	n -dimensional torus
\mathbb{S}^n	n -dimensional sphere
$\mathbb{R}\mathcal{P}^n$	n -dimensional real projective space
\mathcal{B}	base
$\langle v \rangle$	spans
\mathcal{PC}	critical point
\mathcal{PR}	regular points
\mathcal{VC}	critic values
\mathcal{VR}	regular values
\mathfrak{g}	Lie algebra (associated to G)
$\sum_{i=1}^n$	summation from 1 to n
$\prod_{i=1}^n$	product from 1 to n
$\ v\ $	modulo/norm of v
det	determinant
tr	trace
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	matrix
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	matrix determinant
$\mathbb{1}$	identity matrix
supp	support
Ob	objects (category)
Mor	morphisms (category)
$\lceil v \rceil$	"ceiling" function
i.e.	means that (<i>id est</i>)
e.g.	as an example (<i>exempli gratia</i>)

Chapter 1

Differential geometry in euclidean spaces

1.1 Smooth and real analytic functions

1.1.1 Smooth functions

Let us consider \mathbb{R}^n with $n \geq 1$ and $U \subset \mathbb{R}^n$ open, and let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ be a function and $p \in U$ a point: defining the k th-order derivatives of f as

$$\frac{\partial^k f}{\partial (x^1)^{i_1} \dots \partial (x^k)^{i_k}} \quad \text{where} \quad \sum_{j=1}^k i_j = k \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

then we say that $f \in C^k$ in p with $k \in \mathbb{N}$ if the k th-order derivatives of f exist and are continuous in p .

Let $k = 0$, then

$$f \in C^0 \iff f \text{ continuous} \quad (1.2)$$

Notation-wise:

- $f \in C^k$ in U if $f \in C^k$ in p for all $p \in U$
- $f \in C^\infty$ or *smooth* in p if $f \in C^k$ in p for all $k \in \mathbb{N}$
- $f \in C^\infty$ or *smooth* in U if $f \in C^\infty$ for all $p \in U$

therefore a function is denoted smooth if all its derivatives of any order exist and are finite.

In general, we consider functions defined not in \mathbb{R} but in \mathbb{R}^n .

A function $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ with $n \geq 1$ and $U \subset \mathbb{R}^m$ with $m \geq 1$ open is C^k in p if all its components $f^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ are $f^j \in C^k$ in p with $k \geq 0$. In particular, $f = (f^1, \dots, f^m)$ or $f^j = \pi_j \circ f$ where π_j is the *projection*

$$\begin{aligned} \pi_j : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto x^j \end{aligned} \quad (1.3)$$

for $j = 1, \dots, m$.

A function $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ is:

- C^k in U if $f^j \in C^k$ in U
- smooth in $p \in U$ if $f^j \in C^\infty$ in p for all $j = 1, \dots, m$
- smooth in U if $f^j \in C^\infty$ in U for all $j = 1, \dots, m$

Examples

1) **Cubic root** Let

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{1/3} \end{aligned} \tag{1.4}$$

This function is continuous ($f \in C^0$) and it is a homeomorphism¹ but $f \notin C^1$ in the origin $p = 0$ because

$$f' = \frac{x^{-2/3}}{3} \tag{1.5}$$

which is not defined in the origin and therefore $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

2) **C^1 function which is not C^2** Integrating f from the previous example, we obtain a C^1 function which is not C^2 . Let $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{3x^{2/3}}{4} \tag{1.6}$$

from which $g \in C^1(\mathbb{R})$ but $g \notin C^2(\mathbb{R})$.

3) **C^k function which is not C^{k+1}** See Exercise [A.1](#).

1.1.2 Real analytic functions

Let $p \in \mathbb{R}^n$ be a point, a *neighborhood* U of p is an open set in \mathbb{R}^n that contains p .

Let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ be a function with $U \subset \mathbb{R}^n$ open, then we say that f is *real analytic* in $p \in U$ if f coincides with its own Taylor expansion around p . This means that for a function $f(x)$ with $x = (x^1, \dots, x^n)$ and $p = (p^1, \dots, p^n)$ we have that

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^i - p^i) + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}} (p) ((x^{i_1} - p^{i_1}) \dots (x^{i_k} - p^{i_k})) + \dots \\ &= f(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}} (p) \prod_{j=1}^k (x^j - p^j) \end{aligned} \tag{1.7}$$

¹Both the function and its inverse are continuous.

For example, a power series can be differentiated term by term resulting in a continuous function with continuous derivative, which coincides with its Taylor expansion, i.e. power series are always real analytic. This also means that $f \in C^\infty$, because one can differentiate power series indefinitely always obtaining a continuous function.

Examples

1) Sine function The function $f(x) = \sin(x)$ is smooth real analytic and its Taylor expansion is as follows

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad (1.8)$$

In order to obtain its derivative, we can differentiate term by term its Taylor expansion

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) \frac{x^{2j}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\ &= \cos(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

2) Exponential In order to derive the exponential $f(x) = e^x$ derivative, we repeat the same procedure as the previous example

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{x^{j-1}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (1.10)$$

3) Smooth function which is not real analytic An example of a smooth function which is not real analytic is

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

In order to demonstrate that $f \in C^0$ we have to verify that

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0 \quad (1.12)$$

For its smoothness²

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^3} \right) e^{-1/x^2} = 0 \quad (1.13)$$

From this we have that $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. If it were real analytic, it would have coincided with its Taylor expansion everywhere, in particular in the origin, i.e.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} x^k \quad (1.14)$$

but $f(x)$ is equal to 0 in the neighborhood of the origin only for $x \leq 0$ while the Taylor expansion is always zero: despite $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, this contradiction means that the function is not real analytic, notation-wise $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$.

Another reason as to why $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$ follows from the fact that if $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ with $U \in \mathbb{R}$ open is real analytic and $f = 0$ in an open set, then $f \equiv 0$ everywhere³.

1.2 Diffeomorphisms between open sets of \mathbb{R}^n

Let $U, V \in \mathbb{R}^n$ be opens sets, we say that the function $f : U \rightarrow V$ is a *diffeomorphism* if it is a bijection⁴, $f \in C^\infty(U)$ and its inverse $g : V \rightarrow U$ is $g \in C^\infty(V)$.

For example, the following function

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned} \quad (1.15)$$

is a smooth bijection but its inverse is not smooth, therefore f is not a diffeomorphism.

When there exists a diffeomorphism between two open sets, we say that they are *diffeomorphic*, i.e. U and V are diffeomorphic if exists a diffeomorphism $f : U \rightarrow V$, notation-wise $U \simeq V$.

Theorem 1 (Invarianza topologica della dimensione). *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti omeomorfi allora $n = m$.*

Theorem 2 (Invarianza differenziabile della dimensione). *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti diffeomorfi allora $n = m$ ⁵.*

È naturale verificare se gli spazi legati da omeomorfismi siano legati anche da diffeomorfismi. Ad esempio, abbiamo che i seguenti sottoinsiemi aperti di \mathbb{R} sono diffeomorfi tra loro⁶:

$$(a, b) \simeq (c, +\infty) \simeq (-\infty, d) \simeq \mathbb{R}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b \quad (1.16)$$

²See Exercise A.2.

³This property is valid for any constant.

⁴Therefore invertible.

⁵Questo teorema implica quello di "Invarianza topologia della dimensione" in quanto la condizione di diffeomorfismo implica quella di omeomorfismo: una bigezione liscia con inversa liscia è una bigezione continua con inversa continua, poiché $C^\infty \implies C^0$.

⁶Vedi Esercizio A.3.

1.2.1 Diffeomorfismo tra $B_\delta(c)$ e \mathbb{R}^n

Indichiamo con $B_1(0)$ la *palla* di centro l'origine e raggio unitario, i.e.

$$B_1(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \|x\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2} < 1 \right. \right\} \quad (1.17)$$

Per $n = 1$, $B_1(0) \equiv (-1, 1) \simeq \mathbb{R}$.
Definiamo

$$f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right) \quad (1.18)$$

questa applicazione è un diffeomorfismo. Per verificarlo, dobbiamo dimostrare che f sia un bigezione, $f \in C^\infty(B_1(0))$ e che $f^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
L'inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(0)$$

$$x \mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} \right) \quad (1.19)$$

in quanto

$$f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \wedge g \circ f = \text{id}_{B_1(0)} \quad (1.20)$$

Perché sia f che f^{-1} siano lisce, dobbiamo verificare che ogni loro componente lo sia, il quale è verificato perché la derivata di una delle componenti di f ha al denominatore sempre

$$\sqrt{1 - \|x\|^2} \neq 0, \quad \forall x \in B_1(0) \quad (1.21)$$

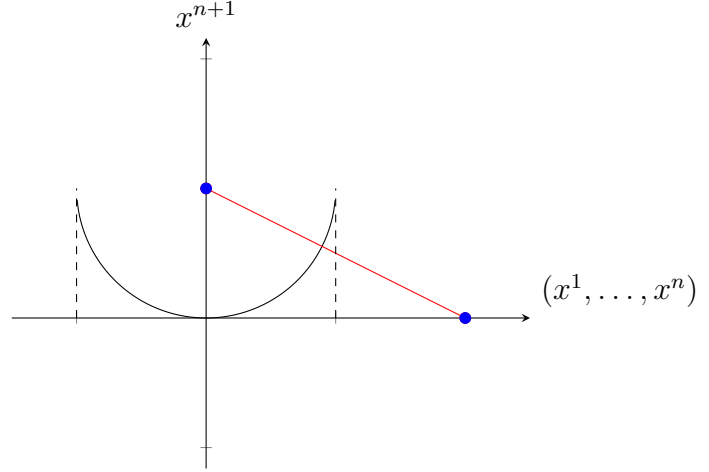
e lo stesso vale per la sua inversa

$$\sqrt{1 + \|x\|^2} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (1.22)$$

Corollary 2.1. *La palla di centro c e raggio δ con $c \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \geq 0$ è diffeomorfa a \mathbb{R}^n , i.e. $B_\delta(c) \simeq B_1(0) \simeq \mathbb{R}^n$.*

Proof. Vedi Esercizio A.4; la dimostrazione passa per il mostrare che le traslazioni (le quali sono lineari e affini) e le omotetie (scala di un fattore δ) siano diffeomorfismi. \square

Per praticità di notazione, chiamiamo h il diffeomorfismo $B_\delta(c) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definito sopra. Per far vedere come nasce questo diffeomorfismo, si può usare la costruzione geometrica a lato.



Consideriamo la semicalotta aperta in \mathbb{R}^{n+1} centrata in $(0, \dots, 0, 1)$ di raggio 1:

$$S = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^{n+1})^2 + \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1 \wedge x^{n+1} < 1 \right\} \quad (1.23)$$

La palla $B_1(0)$ vive nella proiezione della semicalotta sull'iperpiano (x^1, \dots, x^n) , definita come

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \quad (1.24)$$

Questa proiezione permette di costruire l'applicazione h in due passaggi: prima prendiamo un punto in $B_1(0)$, lo proiettiamo su S e, con una proiezione stereografica, lo portiamo su \mathbb{R}^n . La prima applicazione è $f : B_1(0) \rightarrow S$ mentre la seconda $g : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, cioè la proiezione stereografica dal punto $(0, \dots, 0, 1)$. Abbiamo dunque che $g \circ f = h$. Le mappe sono

$$f(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(x^1, \dots, x^n, 1 - \sqrt{1 - \|x\|^2} \right) \quad (1.25)$$

$$g(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}, 0 \right) \quad (1.26)$$

da cui

$$\begin{aligned} h(x^1, \dots, x^{n+1}) &= (g \circ f)(x^1, \dots, x^{n+1}) \\ &= g \left(x^1, \dots, x^n, 1 - \sqrt{1 - \|x\|^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, 0 \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

A questo punto $B_1(0) \simeq \mathbb{R}^n$: dal punto di vista della geometria differenziale, due oggetti diffeomorfi vengono considerati equivalenti⁷.

⁷In topologia, vale lo stesso ragionamento per oggetti omeomorfi.

1.2.2 Teorema di Taylor con resto

Una funzione reale analitica coincide con il suo sviluppo di Taylor. Per una funzione liscia questo non è detto: la coincidenza di una funzione liscia con il suo sviluppo di Taylor è data a meno di un *resto*. Introduciamo ora il concetto di insieme stellato rispetto a un punto per definire il resto sopracitato.

Un sottoinsieme aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ è *stellato* rispetto a un punto $p \in U$ se il segmento di retta che unisce p a qualsiasi $x \in U$ è interamente contenuto in U .

Remark. *Un insieme convesso è stellato rispetto a ogni suo punto.*

L'ipotesi che un sottoinsieme sia stellato è forte a livello globale ma sempre rispettata a livello locale, in quanto è sempre possibile trovare un aperto stellato rispetto a un punto all'interno di un insieme.

Theorem 3 (Taylor con resto). *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a un punto $p \in U$ e supponiamo $f \in C^\infty(U)$, allora esistono n funzioni $g_i \in C^\infty(U)$ per $i = 1, \dots, n$ definite come*

$$g_i(p) \doteq \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.28)$$

tali che

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), \quad \forall x \in U \quad (1.29)$$

Proof. Consideriamo il segmento r che unisce p a un punto $x \in U$ con x fissato arbitrariamente:

$$r = p + t(x - p), \quad t \in [0, 1] \quad (1.30)$$

Essendo U stellato rispetto a p , possiamo valutare f in questo segmento (tutti i punti di r sono definiti in U). Consideriamo fissi x e p e derivo $f(r)$ rispetto a t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(r) &= \frac{d}{dt} f(p + t(x - p)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)) \left(\frac{dr}{dt} \right)^i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)) (x^i - p^i) \end{aligned} \quad (1.31)$$

per la *regola della catena*.

Integrando rispetto a t nell'intervallo $[0, 1]$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(x - p)) dt &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} (p + t(x - p)) (x^i - p^i) dt \\ f(x) - f(p) &= \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (p + t(x - p)) dt \end{aligned} \quad (1.32)$$

chiamando

$$g_i(x) \doteq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (p + t(x - p)) dt \quad (1.33)$$

si può scrivere

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x) \quad (1.34)$$

dove $g_i(x) \in C^\infty(U)$ perché derivata parziale di una funzione liscia.
Inoltre

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (p) dt = \frac{\partial f}{\partial x^i} (p), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.35)$$

□

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con p corrispondente all'origine: per il teorema di Taylor con resto, sappiamo che esiste una funzione $g_1 \in C^\infty(U)$ tale che

$$f(x) = f(0) + x g_1(x) \quad \text{con} \quad g_1(0) = f'(0) \quad (1.36)$$

Riapplicando il teorema a g_1 (in quanto liscia), otteniamo

$$g_1(x) = g_1(0) + x g_2(x) \quad \begin{cases} g_2 \in C^\infty(U) \\ g_2(0) = g_1'(0) \end{cases} \quad (1.37)$$

Per induzione

$$g_i(x) = g_i(0) + x g_{i+1}(x) \quad \begin{cases} g_{i+1} \in C^\infty(U) \\ g_{i+1}(0) = g_i'(0) \end{cases} \quad \forall i \geq 1 \quad (1.38)$$

Sostituendo in f tutte queste funzioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + xg_1(x) \\
&= f(0) + xg_1(0) + x^2g_2(x) \\
&= f(0) + xg_1(0) + x^2g_2(0) + x^3g_3(x) \\
&\vdots \\
&= f(0) + xg_1(0) + \cdots + x^kg_k(0) + x^{k+1}g_{k+1}(x)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

A questo punto si può definire

$$g_k(0) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0) \doteq \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{1.40}$$

da cui

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^i \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^{i+1}g_{i+1}(x), \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{1.41}$$

dove la prima parte coincide con lo sviluppo in serie di Taylor mentre l'ultimo termine indica il *resto*.

Per esercizi sul resto, vedi Esercizi [A.5](#) e [A.6](#).

1.3 Vettori tangenti in \mathbb{R}^n

Preso un punto $p \in \mathbb{R}^n$, lo *spazio tangente* in quel punto viene chiamato $T_p(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio tangente a un punto p è l'insieme⁸ di tutti i vettori che escono dal punto stesso. Essendo $T_p(\mathbb{R}^n) \stackrel{iso}{\simeq} \mathbb{R}^n$, un elemento $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ può dunque essere rappresentato come un *vettore riga* o *colonna*

$$[v^1 \quad \cdots \quad v^n] \quad \vee \quad \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

dove le v^i sono le componenti del vettore nella base canonica, i.e.

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \tag{1.43}$$

Per generalizzare questo concetto, considereremo gli elementi degli spazi tangenti non più come oggetti geometrici vettori ma come *derivazioni*.

⁸Formalmente, è uno spazio vettoriale con origine il punto p .

1.3.1 Derivate direzionali

Siano un'applicazione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, un punto $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e un vettore $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo la retta $c(t)$ che passa per p con direzione v , parametrizzata come

$$c(t) = p + tv, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.44)$$

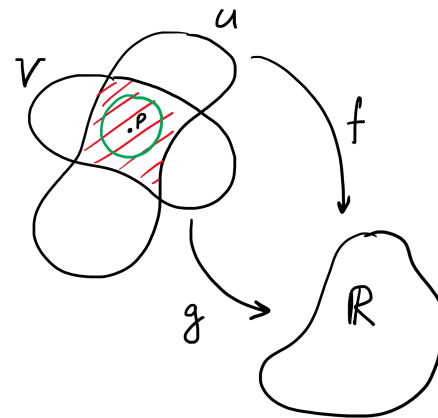
Definiamo la *derivata direzionale* di f rispetto a v come

$$\begin{aligned} D_v f &\doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \left(\frac{d}{dt} c(t) \right)^i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \end{aligned} \quad (1.45)$$

dove $D_v f \in \mathbb{R}$ e $v = [v^1 \ \cdots \ v^n]$.

Remark. Sia un'applicazione $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ con $V \subset \mathbb{R}^n$ e $V \cap U \neq \emptyset$. Se $g \equiv f$ in un intorno W del punto $p \in W \subset U \cap V$, allora la loro derivata direzionale è la stessa⁹, i.e.

$$D_v g = D_v f, \quad \forall p \in W \quad (1.46)$$



Definiamo ora l'insieme di coppie

$$X \doteq \{(f, U) \mid f \in C^\infty(U), U \text{ intorno di } p \in U\} \quad (1.47)$$

Diremo che¹⁰ per $p \in W$

$$(f, U) \sim (g, V) \iff \exists W \subseteq U \cap V, W \ni p \mid f(q) = g(q), \quad \forall q \in W \quad (1.48)$$

⁹Questo perché il limite del rapporto incrementale nella definizione di $D_v f$ dipende da un intorno arbitrariamente piccolo.

¹⁰Il simbolo \sim indica una relazione di equivalenza.

Questa è effettivamente una relazione di equivalenza in quanto riflessiva, simmetrica e transitiva. Prendiamo dunque lo spazio quoziente¹¹

$$X/\sim \doteq C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.49)$$

dove un elemento $[(f, U)]$ di questo spazio è chiamato *germe* intorno al punto p ed è una *classe di equivalenza* di coppie (f, U) . A questo punto, $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei germi di funzioni lisce intorno a p , i.e.

$$C_p^\infty(\mathbb{R}^n) = \{[(f, U)] \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), U \subset \mathbb{R}^n\} \quad (1.50)$$

Possiamo definire un'applicazione

$$\begin{aligned} D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ [(f, U)] &\mapsto D_v f \end{aligned} \quad (1.51)$$

Questa applicazione è ben definita in quanto l'associazione di un germe di funzioni a un numero reale non dipende dal rappresentante scelto poiché

$$(f, U) \sim (g, V) \implies D_v g = D_v f \quad (1.52)$$

Esempio

Siano le applicazioni

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1-x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ g(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} x^j, & x \in (-1, 1) \end{cases} \quad (1.53)$$

Nonostante in generale $f \neq g$, nell'intorno $(-1, 1)$ di $p = 0$ vale l'equivalenza per i germi

$$(f, \mathbb{R} \setminus \{1\}) \sim (g, (-1, 1)) \quad (1.54)$$

in altre parole, le classi di equivalenza

$$[(f, \mathbb{R} \setminus \{1\})] = [(g, (-1, 1))] \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.55)$$

¹¹Approfondiremo l'argomento degli spazi quoziente nella Sottosezione ??.

Algebra su campo \mathbb{K}

Un'algebra A su un campo \mathbb{K} è una coppia (V, \cdot) con V spazio vettoriale su un campo¹² \mathbb{K} e un'operazione binaria

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned} \quad (1.56)$$

tale che soddisfi le condizioni

$$\begin{cases} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & \text{associatività}^{13} \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c & \text{distributività} \\ c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b & \\ \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) & \text{omogeneità} \end{cases} \quad (1.57)$$

per qualsiasi $a, b, c \in A$ e qualsiasi $\lambda \in \mathbb{K}$.

Equivalentemente, un'algebra su un campo \mathbb{K} può essere pensata come un anello¹⁴ $(V, +, \cdot)$ il quale sia anche uno spazio vettoriale con aggiunta la proprietà di omogeneità.

1.3.2 $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come algebra su \mathbb{R}

Definiamo la somma

$$[(f, U)] + [(g, V)] = [(f + g, U \cap V)], \quad [(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.58)$$

Questa somma è ben definita in quanto, prendendo due rappresentanti qualunque di $[(f, U)]$ e $[(g, V)]$, esiste sempre un intorno in cui questa somma sia definita.

Allo stesso modo, definiamo il prodotto

$$[(f, U)] \cdot [(g, V)] = [(fg, U \cap V)], \quad [(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.59)$$

e la moltiplicazione per scalari

$$\lambda[(f, U)] = [(\lambda f, U)], \quad \lambda \in \mathbb{R}, [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.60)$$

Tutte queste operazioni sono ben definite e soddisfano tutte le proprietà di un'algebra perché, per funzioni lisce, la somma, il prodotto e la moltiplicazione soddisfano queste stesse proprietà. A questo punto si può dire che $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ sia un'algebra su \mathbb{R} .

Nonostante non sia necessario per un'algebra, $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ è anche commutativa e unitaria¹⁵ su \mathbb{R}^n .

¹²Dunque con operazioni

$$\begin{cases} a + b \in A, & \forall a, b \in A \\ \lambda a \in A, & \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$$

¹³In generale, non è necessaria l'associatività per definire un'algebra.

¹⁴Le proprietà di associatività e distributività sono sufficienti per renderla un anello.

¹⁵Vedi Esercizio A.7.

1.3.3 Derivazione puntuale di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$

A questo punto, possiamo definire l'applicazione chiamata *derivazione puntuale* dell'algebra $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$D : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[(f, U)] \mapsto D_v f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \quad (1.61)$$

con $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

Questa applicazione possiede le seguenti proprietà:

1. \mathbb{R} -linearità¹⁶, i.e.

$$D([(f, U)] + [(g, V)]) = D([(f, U)]) + D([(g, V)]) \quad (1.62)$$

$$D(\lambda[(f, U)]) = \lambda D([(f, U)]) \quad (1.63)$$

2. soddisfa la *regola di Leibniz*, i.e.

$$D([(f, U)] \cdot [(g, V)]) = D([(f, U)]) g(p) + f(p) D([(g, V)]) \quad (1.64)$$

Dimostrazione (\mathbb{R} -linearità (somma)).

$$\begin{aligned} D([(f, U)] + [(g, V)]) &= D([(f + g, U \cap V)]) \\ &= D_v(f + g) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f + g)}{\partial x^j}(p) v^j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^j}(p) v^j \\ &= D_v f + D_v g \\ &= D([(f, U)]) + D([(g, V)]) \end{aligned} \quad (1.65)$$

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $p \in U \cap V \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. \square

Dimostrazione (\mathbb{R} -linearità (moltiplicazione per scalare)).

$$\begin{aligned} D(\lambda[(f, U)]) &= D([\lambda f, U]) \\ &= D_v(\lambda f) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x^j}(p) v^j \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j \\ &= \lambda D([(f, U)]) \end{aligned} \quad (1.66)$$

¹⁶Rispetto alla struttura di spazio vettoriale di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$, qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. \square

Dimostrazione (Regola di Leibniz).

$$\begin{aligned}
 D([(f, U)] \cdot [(g, V)]) &= D([(fg, U \cap V)]) \\
 &= D_v(fg) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(fg)}{\partial x^j}(p) v^j \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j \right) g(p) + f(p) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^j}(p) v^j \right) \\
 &= (D_v f) g(p) + f(p) (D_v g) \\
 &= D([(f, U)]) g(p) + f(p) D([(g, V)])
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, qualsiasi $p \in U \cap V \subset \mathbb{R}^n$ e qualsiasi $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. \square

La derivazione puntuale è quindi un modo per associare un numero reale a un germe di funzioni, soddisfacendo le proprietà definite sopra.

Indichiamo dunque l'insieme delle derivazioni puntuali di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e.

$$\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \doteq \left\{ D([(f, U)]) = D_v f \doteq \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n), \\ v \in T_p(\mathbb{R}^n) \end{array} \right. \right\} \tag{1.68}$$

1.3.4 Isomorfismo tra $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$

Definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned}
 \varphi : T_p(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\
 v &\mapsto D_v
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

questa associa il vettore $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in \mathbb{R}^n$ alla derivazione puntuale D_v , la quale è a sua volta un'applicazione che associa la classe di equivalenza di germi di funzioni $[(f, U)]$ alla derivata direzionale di f rispetto a v , i.e.

$$D_v f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j \in \mathbb{R} \tag{1.70}$$

Possiamo usare lo stesso simbolo, i.e. $D_v([(f, U)]) = D_v f$, perché questa relazione vale per qualunque rappresentante della classe.

L'applicazione φ permette di considerare equivalentemente l'insieme delle derivazioni puntuali

dell'algebra dei germi delle funzioni $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e lo spazio tangente a un punto, in quanto questi due insiemi sono isomorfi tra loro tramite φ stessa. Utilizzare le derivazioni è utile perché per alcune varietà differenziabili non esiste una visualizzazione dello spazio tangente.

Theorem 4. *L'applicazione φ è un isomorfismo degli spazi vettoriali $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e. tramite φ si ha che*

$$T_p(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{iso.}}{\cong} \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \quad (1.71)$$

Per dimostrare questo teorema è necessario notare che gli elementi $D_i \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ costituiscono uno spazio vettoriale¹⁷ con operazioni

$$\begin{aligned} + : \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \times \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) &\rightarrow \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ (D_v, D_w) &\mapsto D_v + D_w \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) &\rightarrow \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ (\lambda, D_v) &\mapsto \lambda D_v \end{aligned} \quad (1.73)$$

Consideriamo ora la seguente preposizione:

Proposition 4.1. *Le operazioni dello spazio vettoriale $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ su \mathbb{R} (definite sopra) sono \mathbb{R} -lineari e la somma soddisfa la regola di Leibniz, i.e.*

$$(D_v + D_w)([(f, U)]) = D_v([(f, U)]) + D_w([(f, U)]) \quad (1.74)$$

$$D(\lambda[(f, U)]) = \lambda D([(f, U)]) = (\lambda D)([(f, U)]) \quad (1.75)$$

$$(D_v + D_w)([(f, U)] \cdot [(g, V)]) = (D_v + D_w)([(f, U)]) g(p) + f(p) (D_v + D_w)([(g, V)]) \quad (1.76)$$

per qualsiasi $D, D_v, D_w \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione (Proposizione). Per la \mathbb{R} -linearità:

$$\begin{aligned} (D_v + D_w)(\alpha[(f, U)] + \beta[(g, V)]) &= D_v(\alpha[(f, U)] + \beta[(g, V)]) + \\ &\quad + D_w(\alpha[(f, U)] + \beta[(g, V)]) \\ &= \alpha D_v([(f, U)]) + \beta D_v([(g, V)]) + \\ &\quad + \alpha D_w([(f, U)]) + \beta D_w([(g, V)]) \\ &= \alpha(D_v + D_w)([(f, U)]) + \beta(D_v + D_w)([(g, V)]) \end{aligned} \quad (1.77)$$

per qualsiasi $D_v, D_w \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Per la regola di Leibniz:

¹⁷Vedi Esercizio A.8.

$$\begin{aligned}
(D_v + D_w)([(f, U)] \cdot [(g, V)]) &= D_v([(f, U)] \cdot [(g, V)]) + D_w([(f, U)] \cdot [(g, V)]) \\
&= D_v([(f, U)]) g(p) + f(p) D_v([(g, V)]) + \\
&\quad + D_w([(f, U)]) g(p) + f(p) D_w([(g, V)]) \\
&= (D_v + D_w)([(f, U)]) g(p) + f(p) (D_v + D_w)([(g, V)])
\end{aligned} \tag{1.78}$$

per qualsiasi $D_v, D_w \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$. \square

Proof. Per dimostrare che φ sia un isomorfismo è necessario dimostrare che φ sia \mathbb{R} -lineare, iniettiva¹⁸ e suriettiva¹⁹.

Per l' \mathbb{R} -linearità, sia $[(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
D_{\alpha v + \beta w}([(f, U)]) &= D_{\alpha v + \beta w}(f) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) (\alpha v^j + \beta w^j) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) v^j + \beta \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) w^j \\
&= \alpha D_v f + \beta D_w f \\
&= \alpha D_v([(f, U)]) + \beta D_w([(f, U)])
\end{aligned} \tag{1.79}$$

per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v, w \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

Da questo si ottiene che l'applicazione φ è \mathbb{R} -lineare:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha v + \beta w) &= D_{\alpha v + \beta w} \\
&= \alpha D_v + \beta D_w \\
&= \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(w)
\end{aligned} \tag{1.80}$$

per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v, w \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

Per l'iniettività, consideriamo il *kernel*²⁰ di φ : se questo contiene solo l'elemento 0, inteso come

¹⁸Un'applicazione f tra due insiemi A e B è *iniettiva* se

$$\forall a_1, a_2 \in A \mid a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

¹⁹Un'applicazione f tra due insiemi A e B è *suriettiva* se

$$\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b$$

²⁰Il *kernel* o nucleo di un'applicazione, indicato con \ker , è l'insieme di tutti e soli gli elementi del dominio che hanno come immagine lo 0 del codominio. Nel caso considerato ora

$$\ker(\varphi) = \{v \in T_p(\mathbb{R}^n) \mid \varphi(v) \equiv D_v = 0 \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))\}$$

$$\begin{aligned} 0 : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ [(f, U)] &\mapsto 0 \end{aligned} \quad (1.81)$$

i.e. $\ker(\varphi) = \{0\}$, allora φ è iniettiva²¹.

Siccome 0 associa un qualunque germe liscio $[(f, U)]$ sempre a $0 \in \mathbb{R}$, possiamo scegliere l'applicazione

$$\begin{aligned} x^j : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^n) &\mapsto x^j \end{aligned} \quad (1.82)$$

per qualsiasi $j = 1, \dots, n$, la quale è una proiezione liscia dunque il germe che la contiene è liscio, i.e. $[(x^j, \mathbb{R}^n)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. A questo punto

$$\begin{aligned} 0([(x^j, \mathbb{R}^n)]) &= D_v([(x^j, \mathbb{R}^n)]) \\ &= D_v(x^j) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) v^i \\ &= \sum_{i=1}^n \delta^{ij} v^i \\ &= v^j \end{aligned} \quad (1.83)$$

perciò

$$\begin{cases} 0([(f, U)]) = 0 \in \mathbb{R}, & \forall [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \\ 0([(x^j, \mathbb{R}^n)]) = v^j \end{cases} \implies v^j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.84)$$

da cui

$$v \in \ker(\varphi) \iff v = 0 \in T_p(\mathbb{R}^n) \quad (1.85)$$

perciò φ è iniettiva.

La suriettività implica che se si fissa una qualunque derivazione puntuale esiste un vettore nello spazio tangente che mandato tramite φ dà quella derivazione: in simboli

$$\forall D \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)), \exists v \in T_p(\mathbb{R}^n) \mid \varphi(v) = D \quad (1.86)$$

dove in generale $\varphi(v) = D_v$, dunque dobbiamo trovare un v tale che faccia coincidere $D = D_v$. Prima di farlo, enunciamo il seguente lemma:

²¹Questo vale perché φ è lineare (vedi Teorema della dimensione).

Lemma 5 (Derivazione di costante). *Siano $D \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e la funzione costante*

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned} \tag{1.87}$$

allora $D([(c, \mathbb{R}^n)]) = 0$.

Dimostrazione (lemma).

$$\begin{aligned} D([(c, \mathbb{R}^n)]) &= D([(1c, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c D([(1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c D([(1 \cdot 1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= c (D([(1, \mathbb{R}^n)]) 1 + 1 D([(1, \mathbb{R}^n)])) \\ &= 2c D([(1, \mathbb{R}^n)]) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.88}$$

□

A questo punto, due applicazioni sono uguali se e solo se coincidono per ogni punto del dominio, i.e.

$$D_v = D \iff D_v([(f, U)]) = D([(f, U)]), \quad \forall [(f, U)] \in (C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.89}$$

Prendendo un dominio U stellato rispetto al punto p , per il teorema di Taylor con resto

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), \quad \forall x \in U \tag{1.90}$$

con

$$g_i \in C^\infty(U) \left| g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad i = 1, \dots, n \right. \tag{1.91}$$

Sia $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_{p(\mathbb{R}^n)}$ definito come $v^j = D([(x^j, \mathbb{R}^n)])$ per $j = 1, \dots, n$. Ora applichiamo D a un qualunque germe liscio $[(f, U)]$

$$\begin{aligned}
D([(f, U)]) &= \cancel{D([(f, p), \mathbb{R}^n])}^0 + D\left(\left[\left(\sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), U\right)\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^n D([(x^i - p^i) g_i(x), U]) \\
&= \sum_{i=1}^n (D([(x^i - p^i), U]) g_i(p) + \cancel{(p^i - p^i)}^0 D([(g_i(x), U)])) \\
&= \sum_{i=1}^n (D([(x^i, U)]) - \cancel{D([(p^i, U)])}^0) g_i(p) \tag{1.92} \\
&= \sum_{i=1}^n D([(x^i, U)]) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \\
&= D_v f \\
&= D_v([(f, U)])
\end{aligned}$$

dunque $D = D_f$ e perciò φ è anche suriettiva. \square

Date queste proprietà di φ , questa applicazione è un isomorfismo tra $T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i.e.

$$T_p(\mathbb{R}^n) \stackrel{iso.}{\simeq} \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.93}$$

Corollary 5.1.

$$\dim(T_p(\mathbb{R}^n)) = n = \dim(\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))) \tag{1.94}$$

1.3.5 Base canonica per $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$

L'insieme delle n -uple

$$\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right) \tag{1.95}$$

i cui elementi sono definiti come

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p([(f, U)]) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p), \quad \forall p \in U, j = 1, \dots, n \tag{1.96}$$

forma una base per lo spazio $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Proof. Essendo $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, da cui

$$\dim(\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))) = n \quad (1.97)$$

se (e_1, \dots, e_n) è la base canonica²² di $T_p(\mathbb{R}^n)$, si ha che

$$\varphi(e_i) = D_{e_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1.98)$$

i.e. un isomorfismo porta elementi di base in altrettanti elementi di base.

Applicando questo a una qualunque funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$D_{e_i}(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) (e_i)_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (1.99)$$

□

1.4 Campi di vettori su aperti di \mathbb{R}^n

Sia un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, un *campo di vettori* su U è un'applicazione

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow \bigsqcup_{p \in U} T_p(\mathbb{R}^n) \\ p &\mapsto X_p \end{aligned} \quad (1.100)$$

dove il codominio è l'*unione disgiunta*²³ degli spazi di vettori tangenti in ogni punto di U ; inoltre $T_p(\mathbb{R}^n) = T_p(U)$ in quanto le due algebre seguenti coincidono $C_p^\infty(\mathbb{R}^n) = C_p^\infty(U)$ perché i germi delle funzioni sono definiti localmente, quindi non dipendono dall'aperto considerato.

Un elemento del campo di vettori può essere scritto in funzione della base canonica di $T_p(\mathbb{R}^n)$

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad (1.101)$$

dove $a^i(p) \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$. In modo naturale, l'elemento X_p si identifica con l' n -upla $X_p = (a^1(p), \dots, a^n(p))$ in quanto $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$.

La notazione che indica che un elemento di una base genera uno spazio è la seguente:

$$\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right\rangle = T_p(\mathbb{R}^n) \quad (1.102)$$

Il campo di vettori X (senza la valutazione in un punto p) si scrive come

²²Con $(e_j)_k = \delta_{jk}$, e.g. $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

²³L'unione disgiunta equivale a un'unione in cui ogni insieme ha un indice diverso, e.g. l'insieme non connesso $(0, 1) \sqcup (0, 1)$ è diverso da $(0, 1) \cup (0, 1) = (0, 1)$.

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.103)$$

dove ora a^i è una funzione $a^i : U \rightarrow \mathbb{R}$.

1.4.1 Campi di vettori lisci

Un campo di vettori

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.104)$$

è $C^\infty(U)$ (liscio o differenziabile) se le funzioni a^i sono lisce, i.e. $a^i \in C^\infty(U)$ per qualsiasi $i = 1, \dots, n$.

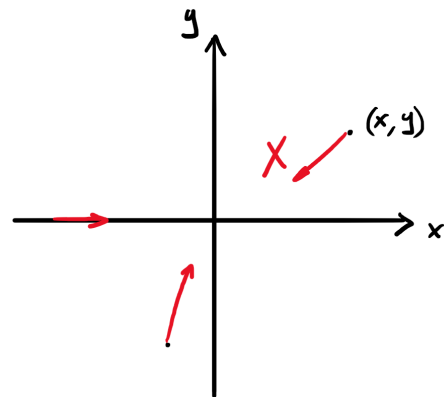
L'insieme dei campi di vettori che rispettano questa prescrizione è chiamato $\chi(U)$, i.e.

$$\chi(U) = \left\{ X : U \rightarrow \bigsqcup_{p \in U} T_p(\mathbb{R}^n), X(p) = X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \mid U \subset \mathbb{R}^n, a^i \in C^\infty(U) \right\} \quad (1.105)$$

Esempi

1) Il campo di vettori seguente è liscio perché qualunque derivata delle sue componenti non annulla mai il denominatore in quanto l'origine non è compresa nel dominio

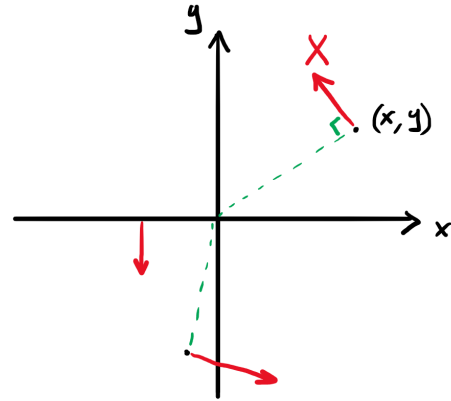
$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2) \\ (x,y) &\mapsto -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.106)$$



2) Per lo stesso motivo dell'esempio precedente, il campo di vettori seguente è liscio

$$X : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$$

$$\begin{aligned} (x,y) &\mapsto -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.107)$$



1.4.2 Operazioni in $\chi(U)$

Si può definire la somma in $\chi(U)$ come

$$(X + Y)_p \doteq X_p + Y_p, \quad X, Y \in \chi(U), p \in U \quad (1.108)$$

questo significa che, presi due campi di vettori su U

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i, b^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.109)$$

allora

$$X + Y = \sum_{i=1}^n (a^i + b^i) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i + b^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.110)$$

Si può definire anche la moltiplicazione per scalari come

$$(\lambda X)_p \doteq \lambda X_p, \quad \forall X \in \chi(U), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in U \quad (1.111)$$

questo significa che, preso

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.112)$$

allora

$$\lambda X = \sum_{i=1}^n (\lambda a^i) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \lambda a^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.113)$$

L'ultima operazione è quella di moltiplicazione di un campo di vettori per un'altra funzione

$$(fX)_p \doteq f(p)X_p, \quad X \in \chi(U), f \in C^\infty(U) \quad (1.114)$$

questo significa che

$$fX = \sum_{i=1}^n (fa^i) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad fa^i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.115)$$

Le prime due operazioni dotano l'insieme di $\chi(U)$ della proprietà di spazio vettoriale.

1.4.3 $\chi(U)$ come $C^\infty(U)$ -modulo

\mathbb{R} -modulo sinistro

Sia R un anello commutativo unitario, un gruppo abeliano $(A, +)$ è detto *R-modulo sinistro* se esiste un'applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : R \times A &\rightarrow A \\ (r, a) &\mapsto r \cdot a \end{aligned} \quad (1.116)$$

tale che

$$\begin{cases} 1_R \cdot a = a \\ r \cdot (s \cdot a) = (rs) \cdot a \\ (r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a \\ r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b \end{cases} \quad \forall r, s \in R, \forall a, b \in A \quad (1.117)$$

Queste proprietà valgono solo da *sinistra*, potrebbero non valere se calcolate da destra.

\mathbb{R} -modulo destro

Sia R un anello commutativo unitario, un gruppo abeliano $(A, +)$ è detto *R-modulo destro* se esiste un'applicazione

$$\begin{aligned} * : A \times R &\rightarrow A \\ (a, r) &\mapsto a * r \end{aligned} \quad (1.118)$$

tale che

$$\begin{cases} a * 1_R = a \\ (a * r) * s = a * (rs) \\ a * (r + s) = a * r + a * s \\ (a + b) * r = a * r + b * r \end{cases} \quad \forall r, s \in R, \forall a, b \in A \quad (1.119)$$

Queste proprietà valgono solo da *destra*, potrebbero non valere se calcolate da sinistra.

Tramite queste definizioni, definiamo $(A, +)$ un *R-modulo* se è sia un *R-modulo sinistro* che *destro*, i.e. $\cdot \equiv *$.

Remark. Se un gruppo A è un R -modulo ed R è un campo \mathbb{K} , allora A è uno spazio vettoriale in \mathbb{K} .

Caso di $\chi(U)$

Essendo $C^\infty(U)$ un anello commutativo unitario, per l'insieme dei campi di vettori lisci su U vale il seguente teorema:

Theorem 6. $(\chi(U), +)$ è un $C^\infty(U)$ -modulo.

Proof. Per dimostrare che il gruppo abeliano $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$ -modulo, è necessario dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$ -modulo sinistro e destro per la moltiplicazione di un campo di vettori per una funzione

$$\begin{aligned} \cdot : C^\infty(U) \times \chi(U) &\rightarrow \chi(U) \\ (f, X) &\mapsto fX \end{aligned} \quad (1.120)$$

Devono dunque essere verificate le seguenti proprietà sia a sinistra che a destra:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1_{C^\infty(U)}X = X \\ f(gX) = (fg)X \\ f(X + Y) = fX + fY \\ (f + g)X = fX + gX \end{array} \right. \quad \forall f, g \in C^\infty(U), \forall X, Y \in \chi(U) \quad (1.121)$$

Siccome la moltiplicazione per funzione è commutativa²⁴, è sufficiente dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$ -modulo sinistro (o destro) per dimostrare che sia $C^\infty(U)$ -modulo²⁵. \square

1.4.4 Derivata di funzione rispetto a un campo di vettori

I campi di vettori permettono di derivare funzioni: la loro azione è equivalente alla derivata direzionale di una funzione rispetto a un vettore.

Siano un campo di vettori liscio $X \in \chi(U)$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e una funzione liscia $f \in C^\infty(U)$. Definiamo la derivata della funzione f rispetto al campo di vettori X come $Xf \in C^\infty(U)$. La derivata puntuale è definita come

$$(Xf)(p) = X_p f, \quad p \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (1.122)$$

Preso un campo

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.123)$$

allora

²⁴Nonostante ciò, scriveremo la funzione sempre a sinistra dei campi, per notazione e per evitare di confonderla con la derivata di funzione rispetto a un campo di vettori (vedi sottosezione successiva).

²⁵Vedi Esercizio A.9.

$$(Xf)(p) = \left(\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right)_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (1.124)$$

perciò

$$\begin{aligned} Xf : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned} \quad (1.125)$$

Questa applicazione è $C^\infty(U)$ perché lo è $(Xf)(p)$, la quale lo è a sua volta perché $f \in C^\infty(U)$ e $X \in \chi(U)$ in quanto $a^i \in C^\infty(U)$.

Possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{aligned} X : C^\infty(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\ f &\mapsto Xf \end{aligned} \quad (1.126)$$

ricordando che $C^\infty(U)$, oltre a essere un anello commutativo unitario, è un'algebra sui reali, perciò l'applicazione X è \mathbb{R} -lineare. Inoltre, siccome $X_p \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$, i campi di vettori valutati in un punto soddisfano la regola di Leibniz:

$$X(fg)(p) = X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g) \quad (1.127)$$

perciò anche l'applicazione X soddisfa la regola di Leibniz:

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \quad (1.128)$$

Derivazione di un'algebra

Sia A un'algebra su campo ²⁶ \mathbb{K} , un'applicazione $D : A \rightarrow A$ che sia \mathbb{K} -lineare e tale che soddisfi la regola di Leibniz

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db), \quad \forall a, b \in A \quad (1.129)$$

²⁶Ricordiamo che un'algebra A su campo \mathbb{K} è una coppia (V, \cdot) dove V è uno spazio vettoriale e l'operazione

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

soddisfa le proprietà

$$\begin{cases} (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c & \text{distributività} \\ c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b & \\ \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) & \text{omogeneità} \end{cases} \quad \forall a, b, c \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

è chiamata *derivazione dell'algebra* A . L'insieme di tutte le derivazioni di un'algebra A viene indicato come $\text{Der}(A)$ ²⁷.

1.4.5 Campo di vettori liscio come derivazione dell'algebra $C^\infty(U)$

Possiamo vedere un campo di vettori come una derivazione di un'algebra, quindi definiamo un'applicazione

$$\begin{aligned}\varphi : \chi(U) &\rightarrow \text{Der}(C^\infty(U)) \\ X &\mapsto \varphi(X)\end{aligned}\tag{1.130}$$

da cui

$$\varphi(X)(f) \doteq Xf, \quad f \in C^\infty(U)\tag{1.131}$$

Sia $\chi(U)$ che $\text{Der}(C^\infty(U))$ sono $C^\infty(U)$ -moduli tramite l'applicazione

$$\begin{aligned}\cdot : C^\infty(U) \times \text{Der}(C^\infty(U)) &\rightarrow \text{Der}(C^\infty(U)) \\ (f, D) &\mapsto fD\end{aligned}\tag{1.132}$$

per la quale vale

$$(fD)(g) = f(Dg), \quad \forall g \in C^\infty(U)\tag{1.133}$$

Inoltre φ è anche $C^\infty(U)$ -lineare:

$$\varphi(fX + gY) = f\varphi(X) + g\varphi(Y), \quad \forall f, g \in C^\infty(U), \forall X, Y \in \chi(U)\tag{1.134}$$

Dimostreremo per le varietà differenziabili²⁸ che φ è un isomorfismo di $C^\infty(U)$ -moduli, i.e. $\chi(U) \simeq \text{Der}(C^\infty(U))$.

Tramite questo isomorfismo, si possono identificare i campi di vettori lisci con le derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce, analogamente a come lo spazio tangente a un punto di \mathbb{R}^n si può identificare con le derivazioni puntuali dell'algebra dei germi delle funzioni in quel punto, i.e. $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.

²⁷Vedi Esercizi A.10 e A.11.

²⁸Vedi Sotto-sottosezione ??.

Chapter 2

Differential manifolds

Chapter 3

Lie groups and algebras

Exercises A

Exercises: Differential geometry in euclidean spaces

A.1 Funzione $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$

Per ogni numero naturale $k \in \mathbb{N}$ costruire una funzione $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$.

Per la funzione

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha x^{k(k+2)/(k+1)} + \beta \end{aligned} \tag{A.1}$$

per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e con $k \in \mathbb{N}$, valgono

$$f_k \in C^k(\mathbb{R}) \wedge f_k \notin C^{k+1}(\mathbb{R}) \tag{A.2}$$

A.2 Funzione liscia ma non reale analitica

Dimostrare che la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

risulta essere liscia ma non reale analitica.

La funzione f è liscia in quanto, perché lo sia, è necessario che

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{-1/x^2}(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{A.4})$$

e questo è vero poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-1/x^2}}{x^p} \right) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} (e^{-1/x^2}) \right) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{A.5})$$

La funzione non è però reale analitica perché, in un intervallo aperto qualunque di 0 non coincide con il suo sviluppo di Taylor: lo sviluppo di Taylor per la parte dei reali positivi è diversa da 0 per qualunque valore di x non nullo mentre la parte per i reali negativi è identicamente nulla, i.e. preso U un qualunque intorno di 0

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} (e^{-1/x^2}) \right) \frac{x^k}{k!} \neq 0, \quad \forall x \in U \setminus \{0\} \quad (\text{A.6})$$

A.3 Intervalli diffeomorfi a \mathbb{R}

Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tale che $a < b$. Dimostrare che i seguenti intervalli sono tutti diffeomorfi tra loro e diffeomorfi a \mathbb{R} :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a, b) \\ (c, +\infty) \\ (-\infty, d) \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Consideriamo le applicazioni:

$$\begin{aligned} f : (a, b) &\rightarrow (0, 1) \\ x &\mapsto \frac{x - a}{b - a} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} h : (0, 1) &\rightarrow (-\infty, d) \\ x &\mapsto \ln(x) - d \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} g : (0, 1) &\rightarrow (c, +\infty) \\ x &\mapsto \frac{c}{x} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} i : (c, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x - c) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Queste sono diffeomorfismi in quanto bigezioni lisce con inversa liscia, dunque le loro composizioni sono ancora diffeomorfismi. Le seguenti composizioni delle applicazioni sopracitate inducono i seguenti diffeomorfismi:

$$\begin{aligned} g \circ f &\implies (a, b) \simeq (c, +\infty) \\ h \circ f &\implies (a, b) \simeq (-\infty, d) \\ i \circ g \circ f &\implies (a, b) \simeq \mathbb{R} \\ h \circ g^{-1} &\implies (c, +\infty) \simeq (-\infty, d) \\ i &\implies (c, +\infty) \simeq \mathbb{R} \\ i \circ g \circ h^{-1} &\implies (-\infty, d) \simeq \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.4 Diffeomorfismo tra $B_r(c)$ e \mathbb{R}^n

Dimostrare che l'applicazione

$$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right) \quad (\text{A.13})$$

definisce un diffeomorfismo tra la palla aperta unitaria centrata nell'origine di \mathbb{R}^n ed \mathbb{R}^n .
Dedurre che la palla aperta di centro $c \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ in \mathbb{R}^n è diffeomorfa a \mathbb{R}^n .

L'applicazione h è una bigezione liscia in quanto ogni sua componente è liscia poiché

$$\frac{\partial^k}{\partial (x^i)^k} \left(\frac{x^i}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right) < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in B_1(0), \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{A.14})$$

La sua inversa

$$h^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(0)$$

$$x \mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} \right) \quad (\text{A.15})$$

è ancora liscia per lo stesso motivo, dunque h induce il diffeomorfismo $B_1(0) \simeq \mathbb{R}^n$.

Se consideriamo l'applicazione lineare (dunque liscia con inversa liscia e perciò diffeomorfismo)

$$g : B_r(c) \rightarrow B_1(0)$$

$$x \mapsto \frac{x - c}{r} \quad (\text{A.16})$$

con $c = (c^1, \dots, c^n)$, e la componiamo con h , otteniamo

$$f = h \circ g : B_r(c) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \left(\frac{\frac{x^1 - c^1}{r}}{\sqrt{1 + \left\| \frac{x - c}{r} \right\|^2}}, \dots, \frac{\frac{x^n - c^n}{r}}{\sqrt{1 + \left\| \frac{x - c}{r} \right\|^2}} \right) \quad (\text{A.17})$$

L'applicazione f è un diffeomorfismo in quanto composizione di diffeomorfismi, dunque f induce il diffeomorfismo $B_r(c) \simeq \mathbb{R}^n$.

A.5 Teorema di Taylor con resto per funzione a due variabili

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Usando il teorema di Taylor con resto, dimostrare che esistono $g_{11}, g_{12}, g_{22} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$f(x, y) = f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + x^2 g_{11}(x, y) + xy g_{12}(x, y) + y^2 g_{22}(x, y) \quad (\text{A.18})$$

Dal teorema di Taylor con resto, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (\mathbb{R}^2 è stellato rispetto all'origine), abbiamo che

$$\exists g_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \quad (\text{A.19})$$

definite come

$$g_{i_1 \dots i_k}(0, 0) \doteq \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(0, 0) \quad (\text{A.20})$$

tali che

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{m=1}^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ i_k > \dots > i_1}}^m g_{i_1 \dots i_k}(x, y) \prod_{j=1}^k x^{i_j}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{A.21})$$

Espandendo quest'ultima forma per $k = 1$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + x g_1(x, y) + y g_2(x, y) \\ &= f(0, 0) + x g_1(0, 0) + y g_2(0, 0) + x^2 g_{11}(x, y) + xy g_{12}(x, y) + y^2 g_{22}(x, y) \\ &= f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + x^2 g_{11}(x, y) + xy g_{12}(x, y) + y^2 g_{22}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

dove gli ultimi tre termini indicano il resto.

A.6 Funzione liscia tramite incollamento

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Sia l'applicazione

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) \mapsto \begin{cases} \frac{f(t, tu)}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Dimostrare che $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Per il Teorema 3, esistono due applicazioni $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$\begin{cases} f(x, y) = f(0, 0) + h_1(x, y) + h_2(x, y) \\ h_1(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ h_2(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Dalle ipotesi, possiamo scrivere

$$f(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y) \quad (\text{A.26})$$

$$h_1(0, 0) = h_2(0, 0) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Considerando l'applicazione g , possiamo dividere la trattazione in due casi:

- $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} g(t, u) &= \frac{1}{t} f(t, tu) \\ &= \frac{1}{t} (th_1(t, tu) + tu h_2(t, tu)) \\ &= h_1(t, tu) + u h_2(t, tu) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

- $t = 0$:

$$g(0, u) = \cancel{h_1(0, 0)}^0 + u \cancel{h_2(0, 0)}^0 = 0 \quad (\text{A.29})$$

dunque

$$g(t, u) = h_1(t, tu) + u h_2(t, tu), \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{A.30})$$

Questo dimostra che $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$. Per dimostrare che sia liscia, consideriamo la derivata di $g(t, u)$ rispetto a t :

$$\begin{aligned} \frac{dg(t, u)}{dt} &= \frac{\partial g(t, u)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g(t, u)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial h_1(t, tu)}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial h_1(t, tu)}{\partial y} \frac{\partial(tu)}{\partial t} + u \left(\frac{\partial h_2(t, tu)}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial h_2(t, tu)}{\partial y} \frac{\partial(tu)}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial h_1(t, tu)}{\partial x} + u \frac{\partial h_1(t, tu)}{\partial y} + u \left(\frac{\partial h_2(t, tu)}{\partial x} + u \frac{\partial h_2(t, tu)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial h_1(t, tu)}{\partial x} + u \frac{\partial h_1(t, tu)}{\partial y} + u \frac{\partial h_2(t, tu)}{\partial x} + u^2 \frac{\partial h_2(t, tu)}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Questa applicazione è liscia in quanto composizione liscia di applicazioni lisce (questo ragionamento si estende alle derivate di grado maggiore), dunque $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

A.7 $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ come algebra commutativa e unitaria

Dimostrare che l'insieme $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ dei germi delle funzioni lisce intorno a $p \in \mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e di prodotto definite negli appunti è un'algebra commutativa e unitaria.

L'algebra $A = (C_p^\infty(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$ ha le operazioni definite come segue:

$$\begin{aligned} + : A \times A &\rightarrow A \\ ((f, U), (g, V)) &\mapsto [(f + g, U \cap V)] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\rightarrow A \\ ((f, U), (g, V)) &\mapsto [(fg, U \cap V)] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Perché sia effettivamente un'algebra, verifichiamo che sia distributiva e omogenea. Per la distributività sinistra:

$$\begin{aligned} ((f, U) + (g, V)) \cdot (h, W) &= [(f + g, U \cap V)] \cdot (h, W) \\ &= [((f + g)h, U \cap V \cap W)] \\ &= [(fh + gh, U \cap V \cap W)] \\ &= [(fh, U \cap W)] + [(gh, V \cap W)] \\ &= [(f, U)] \cdot (h, W) + [(g, V)] \cdot (h, W) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)], [(h, W)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

La distributività destra deriva immediatamente dalla distributività sinistra e dalla commutatività (condizione non necessaria per un'algebra): quest'ultima può essere verificata tramite i seguenti passaggi

$$\begin{aligned} [(f, U)] + [(g, V)] &= [(f + g, U \cap V)] & [(f, U)] \cdot [(g, V)] &= [(fg, U \cap V)] \\ &= [(g + f, V \cap U)] & &= [(gf, V \cap U)] \\ &= [(g, V)] + [(f, U)] & &= [(g, V)] \cdot [(f, U)] \end{aligned} \quad (\text{A.35}) \quad (\text{A.36})$$

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Per l'omogeneità:

$$\begin{aligned} \lambda([(f, U)] \cdot [(g, V)]) &= \lambda[(fg, U \cap V)] \\ &= [(\lambda fg, U \cap V)] \\ &= [(\lambda f, U)] \cdot [(g, V)] \\ &= [(f, U)] \cdot [(\lambda g, V)] \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

per qualsiasi $[(f, U)], [(g, V)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Infine l'unitarietà, i.e.

$$\exists e = [(1, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \mid [(f, U)] \cdot e = e \cdot [(f, U)] = [(f, U)], \quad \forall [(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (\text{A.38})$$

può essere verificata tramite i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} [(f, U)] \cdot [(1, U)] &= [(f \cdot 1, U \cap U)] \\ &= [(1 \cdot f, U \cap U)] \\ &= [(1, U)] \cdot [(f, U)] \\ &= [(f, U)] \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

A.8 $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ come spazio vettoriale su \mathbb{R}

Dimostrare che l'insieme $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ delle derivazioni puntuali con le operazioni definite negli appunti è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Per dimostrare che $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ sia uno spazio vettoriale su \mathbb{R} è necessario che le operazioni di somma tra derivazioni e moltiplicazione per scalari rispettino i seguenti 8 assiomi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_v + (D_w + D_x) = (D_v + D_w) + D_x & 1. \text{ associatività (somma)} \\ D_v + D_w = D_w + D_v & 2. \text{ commutatività (somma)} \\ \exists 0 \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \mid D_v + 0 = D_v & 3. \text{ elemento neutro (somma)} \\ \exists -D_v \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)) \mid D_v + (-D_v) = 0 & 4. \text{ inverso (somma)} \\ \alpha(\beta D_v) = (\alpha\beta) D_v & 5. \text{ compatibilità (moltiplicazione)} \\ \exists 1 \in \mathbb{R} \mid 1D_v = D_v & 6. \text{ elemento neutro (moltiplicazione)} \\ (\alpha + \beta)D_v = \alpha D_v + \beta D_v & 7. \text{ distributività (somma vettoriale)} \\ \alpha(D_v + D_w) = \alpha D_v + \alpha D_w & 8. \text{ distributività (somma scalare)} \end{array} \right. \quad (\text{A.40})$$

per qualsiasi $D_v, D_w, D_x \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Per dimostrare queste proprietà consideriamo un qualsiasi $[(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e applichiamo a questo le derivazioni:

1. Associatività (somma)

$$\begin{aligned} (D_v + (D_w + D_x))([(f, U)]) &= D_v([(f, U)]) + (D_w + D_x)([(f, U)]) \\ &= D_v([(f, U)]) + D_w([(f, U)]) + D_x([(f, U)]) \\ &= (D_v + D_w)([(f, U)]) + D_x([(f, U)]) \\ &= ((D_v + D_w) + D_x)([(f, U)]) \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

2. Commutatività (somma)

$$\begin{aligned} (D_v + D_w)([(f, U)]) &= D_v([(f, U)]) + D_w([(f, U)]) \\ &= D_w([(f, U)]) + D_v([(f, U)]) \\ &= (D_w + D_v)([(f, U)]) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato la commutatività della somma in \mathbb{R}

3. Elemento neutro (somma)

$$\begin{aligned} 0 : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ [(f, U)] &\mapsto 0 \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

per qualsiasi $[(f, U)] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, dunque

$$\begin{aligned} (D_v + 0)([(f, U)]) &= D_v([(f, U)]) + 0([(f, U)]) \\ &= D_v([(f, U)]) + 0 \\ &= D_v([(f, U)]) \end{aligned} \tag{A.44}$$

4. Inverso (somma)

$$\begin{aligned} -D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ [(f, U)] &\mapsto - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \end{aligned} \tag{A.45}$$

dunque

$$\begin{aligned} (D_v + (-D_v))([(f, U)]) &= D_v([(f, U)]) + (-D_v)([(f, U)]) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i + \left(- \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.46}$$

5. Compatibilità (moltiplicazione)

$$\begin{aligned} (\alpha(\beta D_v))([(f, U)]) &= \alpha(\beta D_v)([(f, U)]) \\ &= \alpha D_v([\beta f, U]) \\ &= \alpha \beta D_v([(f, U)]) \\ &= (\alpha \beta) D_v([(f, U)]) \end{aligned} \tag{A.47}$$

6. Elemento neutro (moltiplicazione)

$$\begin{aligned} (1D_v)([(f, U)]) &= D_v([(1f, U)]) \\ &= D_v([(f, U)]) \end{aligned} \tag{A.48}$$

7. Distributività (somma vettoriale)

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) D_v([(f, U)]) &= D_v([((\alpha + \beta) f, U)]) \\ &= D_v([\alpha f + \beta f, U]) \\ &= \alpha D_v([(f, U)]) + \beta D_v([(f, U)]) \end{aligned} \tag{A.49}$$

8. Distributività (somma scalare)

$$\begin{aligned}
\alpha(D_v + D_w)([(f, U)]) &= (D_v + D_w)([(\alpha f, U)]) \\
&= D_v([(\alpha f, U)]) + D_w([(\alpha f, U)]) \\
&= \alpha D_v([(f, U)]) + \alpha D_w([(f, U)])
\end{aligned} \tag{A.50}$$

Tutte queste proprietà sono valide per qualsiasi $D_v, D_w, D_x \in \text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A.9 $\chi(U)$ come spazio vettoriale su \mathbb{R} e C^∞ -modulo

Dimostrare che l'insieme dei campi di vettori lisci $\chi(U)$ su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con le operazioni definite negli appunti è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e un C^∞ -modulo.

Spazio vettoriale su \mathbb{R} Per dimostrare che $\chi(U)$ sia uno spazio vettoriale su \mathbb{R} è necessario che le operazioni di somma tra campi di vettori e moltiplicazione per scalari rispettino i seguenti 8 assiomi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} X + (Y + Z) = (X + Y) + Z & 1. \text{ associatività (somma)} \\ X + Y = Y + X & 2. \text{ commutatività (somma)} \\ \exists 0 \in \chi(U) \mid X + 0 = X & 3. \text{ elemento neutro (somma)} \\ \exists -X \in \chi(U) \mid X + (-X) = 0 & 4. \text{ inverso (somma)} \\ \alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X & 5. \text{ compatibilità (moltiplicazione)} \\ \exists 1 \in \mathbb{R} \mid 1X = X & 6. \text{ elemento neutro (moltiplicazione)} \\ (\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X & 7. \text{ distributività (somma vettoriale)} \\ \alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y & 8. \text{ distributività (somma scalare)} \end{array} \right. \quad (\text{A.51})$$

per qualsiasi $X, Y, Z \in \chi(U)$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo che le operazioni sono definite come:

$$(X + Y)_p \doteq X_p + Y_p \quad (\text{A.52})$$

$$(\alpha X)_p \doteq \alpha X_p \quad (\text{A.53})$$

per qualsiasi $X, Y \in \chi(U)$, qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, dove i campi di vettori saranno:

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a_i, b_i \in C^\infty(U), \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{A.54})$$

Per dimostrare queste proprietà, valutiamo i campi di vettori in un qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$:

1. Associatività (somma)

$$\begin{aligned} (X + (Y + Z))_p &= (X + Y)_p + Z_p \\ &= X_p + Y_p + Z_p \\ &= X_p + (Y + Z)_p \\ &= (X + (Y + Z))_p \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

2. Commutatività (somma)

$$\begin{aligned}
(X + Y)_p &= X_p + Y_p \\
&= \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p + \sum_{i=1}^n b^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n b^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p + \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= Y_p + X_p \\
&= (Y + X)_p
\end{aligned} \tag{A.56}$$

3. Elemento neutro (somma)

$$\begin{aligned}
0 : U &\rightarrow \bigsqcup_{p \in U} T_p(\mathbb{R}^n) \\
p &\mapsto 0_p = \sum_{i=1}^n 0 \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&\xrightarrow{\mathbb{R}^n} (0, \dots, 0)
\end{aligned} \tag{A.57}$$

dunque

$$\begin{aligned}
(X + 0)_p &= X_p + 0_p \\
&= \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p + \sum_{i=1}^n 0 \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n (a^i(p) + 0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= X_p
\end{aligned} \tag{A.58}$$

4. Inverso (somma)

$$\begin{aligned}
-X : U &\rightarrow \bigsqcup_{p \in U} T_p(\mathbb{R}^n) \\
p &\mapsto \sum_{i=1}^n (-a^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p
\end{aligned} \tag{A.59}$$

dunque

$$\begin{aligned}
(X + (-X))_p &= X_p + (-X)_p \\
&= \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p + \sum_{i=1}^n (-a^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n (a^i(p) - a^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n 0 \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= 0_p
\end{aligned} \tag{A.60}$$

5. Compatibilità (moltiplicazione)

$$\begin{aligned}
(\alpha(\beta X))_p &= \alpha(\beta X)_p \\
&= \alpha\beta X_p \\
&= (\alpha\beta)X_p \\
&= ((\alpha\beta)X)_p
\end{aligned} \tag{A.61}$$

6. Elemento neutro (moltiplicazione)

$$\begin{aligned}
(1X)_p &= 1X_p \\
&= 1 \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n (1a^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= X_p
\end{aligned} \tag{A.62}$$

7. Distributività (somma vettoriale)

$$\begin{aligned}
(\alpha(X + Y))_p &= \alpha(X + Y)_p \\
&= \alpha(X_p + Y_p) \\
&= \alpha \left(\sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p + \sum_{i=1}^n b^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p + \alpha \sum_{i=1}^n b^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \alpha X_p + \alpha Y_p \\
&= (\alpha X)_p + (\alpha Y)_p \\
&= (\alpha X + \alpha Y)_p
\end{aligned} \tag{A.63}$$

8. Distributività (somma scalare)

$$\begin{aligned}
((\alpha + \beta)X)_p &= (\alpha + \beta)X_p \\
&= (\alpha + \beta) \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \alpha \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p + \beta \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \alpha X_p + \beta X_p \\
&= (\alpha X)_p + (\beta X)_p \\
&= (\alpha X + \beta X)_p
\end{aligned} \tag{A.64}$$

Tutte queste proprietà sono valide per qualsiasi $X, Y, Z \in \chi(U)$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

C^∞ -modulo Sia l'applicazione

$$\begin{aligned}
\cdot : C^\infty(U) \times \chi(U) &\rightarrow \chi(U) \\
(f, X) &\mapsto fX
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Per dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un C^∞ -modulo è necessario che siano verificate queste proprietà sia a sinistra che a destra:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1_{C^\infty(U)}X = X & 1. \text{ elemento neutro (somma)} \\ f(gX) = (fg)X & 2. \text{ compatibilità (moltiplicazione)} \\ f(X + Y) = fX + fY & 3. \text{ distributività (somma vettoriale)} \\ (f + g)X = fX + gX & 4. \text{ distributività (somma scalare)} \end{array} \right. \tag{A.66}$$

per qualsiasi $f, g \in C^\infty(U)$ e qualsiasi $X, Y \in \chi(U)$. Siccome la moltiplicazione per funzione è commutativa, è sufficiente dimostrare che $(\chi(U), +)$ sia un $C^\infty(U)$ -modulo sinistro (o destro) per dimostrare che sia $C^\infty(U)$ -modulo.

Dimostriamo dunque le proprietà riportate sopra, ancora una volta valutando i campi di vettori in un qualsiasi $p \in U \subset \mathbb{R}^n$:

1. Elemento neutro (somma)

$$\begin{aligned}
1_{C^\infty(U)} : U &\rightarrow \mathbb{R} \\
p &\mapsto 1
\end{aligned} \tag{A.67}$$

dunque

$$\begin{aligned}
(1_{C^\infty(U)}X)_p &= 1_{C^\infty(U)}(p)X_p \\
&= 1 \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n (1a^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= X_p
\end{aligned} \tag{A.68}$$

2. Compatibilità (moltiplicazione)

$$\begin{aligned}
(f(gX))_p &= f(p)(gX)_p \\
&= f(p)g(p)X_p \\
&= (fg)(p)X_p \\
&= ((fg)X)_p
\end{aligned} \tag{A.69}$$

3. Distributività (somma vettoriale)

$$\begin{aligned}
(f(X+Y))_p &= f(p)(X+Y)_p \\
&= f(p)(X_p+Y_p) \\
&= f(p)X_p + f(p)Y_p \\
&= (fX)_p + (fY)_p \\
&= (fX+fY)_p
\end{aligned} \tag{A.70}$$

4. Distributività (somma scalare)

$$\begin{aligned}
((f+g)X)_p &= (f+g)(p)X_p \\
&= (f(p)+g(p))X_p \\
&= f(p)X_p + g(p)X_p \\
&= (fX)_p + (gX)_p \\
&= (fX+gX)_p
\end{aligned} \tag{A.71}$$

Tutte queste proprietà sono valide per qualsiasi $f, g \in C^\infty(U)$ e qualsiasi $X, Y \in \chi(U)$.

A.10 $\text{Der}(A)$ come spazio vettoriale su \mathbb{K}

Sia A un'algebra su un campo \mathbb{K} . Dimostrare che le operazioni

$$\begin{cases} (D_1 + D_2)(a) = D_1(a) + D_2(a) \\ (\lambda D)(a) = \lambda D(a) \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall D_1, D_2, D \in \text{Der}(A) \quad (\text{A.72})$$

dotano $\text{Der}(A)$ della struttura di spazio vettoriale su \mathbb{K} .

Per dimostrare che $\text{Der}(A)$ sia uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} è necessario che le operazioni di somma tra derivazioni e moltiplicazione per scalari rispettino i seguenti 8 assiomi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_1 + (D_2 + D_3) = (D_1 + D_2) + D_3 & 1. \text{ associatività (somma)} \\ D_1 + D_2 = D_2 + D_1 & 2. \text{ commutatività (somma)} \\ \exists 0 \in \text{Der}(A) \mid D + 0 = D & 3. \text{ elemento neutro (somma)} \\ \exists -D \in \text{Der}(A) \mid D + (-D) = 0 & 4. \text{ inverso (somma)} \\ \alpha(\beta D) = (\alpha\beta)D & 5. \text{ compatibilità (moltiplicazione)} \\ \exists \eta \in \mathbb{K} \mid \eta D = D & 6. \text{ elemento neutro (moltiplicazione)} \\ (\alpha + \beta)D = \alpha D + \beta D & 7. \text{ distributività (somma vettoriale)} \\ \alpha(D_1 + D_2) = \alpha D_1 + \alpha D_2 & 8. \text{ distributività (somma scalare)} \end{array} \right. \quad (\text{A.73})$$

per qualsiasi $D_1, D_2, D_3, D \in \text{Der}(A)$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Per dimostrare queste proprietà consideriamo un qualsiasi $a \in A$ e applichiamo a questo le derivazioni:

1. Associatività (somma)

$$\begin{aligned} (D_1 + (D_2 + D_3))(a) &= D_1(a) + (D_2 + D_3)(a) \\ &= D_1(a) + D_2(a) + D_3(a) \\ &= (D_1 + D_2)(a) + D_3(a) \\ &= ((D_1 + D_2) + D_3)(a) \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

2. Commutatività (somma)

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)(a) &= D_1(a) + D_2(a) \\ &= D_2(a) + D_1(a) \\ &= (D_2 + D_1)(a) \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato la commutatività della somma dell'algebra ereditata dallo spazio vettoriale che la compone

3. Elemento neutro (somma)

$$\begin{aligned} 0 : A &\rightarrow A \\ a &\mapsto 0 \end{aligned} \tag{A.76}$$

dove

$$a + 0 = a, \quad \forall a \in A \tag{A.77}$$

dunque

$$\begin{aligned} (D + 0)(a) &= D(a) + 0(a) \\ &= D(a) + 0 \\ &= D(a) \end{aligned} \tag{A.78}$$

4. Inverso (somma)

$$\begin{aligned} -D : A &\rightarrow A \\ a &\mapsto -D(a) \end{aligned} \tag{A.79}$$

dunque

$$\begin{aligned} (D + (-D))(a) &= D(a) + (-D)(a) \\ &= D(a) + -D(a) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.80}$$

5. Compatibilità (moltiplicazione)

$$\begin{aligned} (\alpha(\beta D))(a) &= \alpha(\beta D)(a) \\ &= \alpha\beta D(a) \\ &= (\alpha\beta)D(a) \\ &= ((\alpha\beta)D)(a) \end{aligned} \tag{A.81}$$

6. Elemento neutro (moltiplicazione)

$$\begin{aligned} (\eta D)(a) &= \eta D(a) \\ &= D(\eta a) \\ &= D(a) \end{aligned} \tag{A.82}$$

dove abbiamo usato il fatto che lo spazio vettoriale che compone l'algebra è sullo stesso campo \mathbb{K} rispetto a quest'ultima

7. Distributività (somma vettoriale)

$$\begin{aligned}((\alpha + \beta)D)(a) &= (\alpha + \beta)D(a) \\ &= \alpha D(a) + \beta D(a) \\ &= (\alpha D)(a) + (\beta D)(a) \\ &= (\alpha D + \beta D)(a)\end{aligned}\tag{A.83}$$

8. Distributività (somma scalare)

$$\begin{aligned}(\alpha(D_1 + D_2))(a) &= \alpha(D_1 + D_2)(a) \\ &= \alpha(D_1(a) + D_2(a)) \\ &= \alpha D_1(a) + \alpha D_2(a) \\ &= (\alpha D_1)(a) + (\alpha D_2)(a) \\ &= (\alpha D_1 + \alpha D_2)(a)\end{aligned}\tag{A.84}$$

Tutte queste proprietà sono valide per qualsiasi $D_1, D_2, D_3, D \in \text{Der}(A)$ e qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

A.11 Commutatore come derivazione

Siano D_1 e D_2 due derivazioni di un'algebra A su un campo \mathbb{K} , i.e. $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$.
Mostrare che $D_1 \circ D_2$ non è necessariamente una derivazione di A mentre

$$D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \text{Der}(A) \quad (\text{A.85})$$

Perché $D_1 \circ D_2$ sia una derivazione deve, in particolare, soddisfare la regola di Leibniz, ma questo non è verificato:

$$\begin{aligned} (D_1 \circ D_2)(a \cdot b) &= D_1(D_2(a \cdot b)) \\ &= D_1(D_2(a) \cdot b + a \cdot D_2(b)) \\ &= D_1(D_2(a)) \cdot b + D_2(a) \cdot D_1(b) + D_1(a) \cdot D_2(b) + a \cdot D_1(D_2(b)) \\ &= (D_1 \circ D_2)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2)(b) + D_2(a) \cdot D_1(b) + D_1(a) \cdot D_2(b) \\ &\neq (D_1 \circ D_2)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2)(b) \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Mentre per la combinazione $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ questa prescrizione è verificata:

$$\begin{aligned} (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(a \cdot b) &= D_1(D_2(a \cdot b)) - D_2(D_1(a \cdot b)) \\ &= (D_1 \circ D_2)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2)(b) + D_2(a) \cdot D_1(b) + D_1(a) \cdot D_2(b) + \\ &\quad - ((D_2 \circ D_1)(a) \cdot b + a \cdot (D_2 \circ D_1)(b) + D_1(a) \cdot D_2(b) + D_2(a) \cdot D_1(b)) \\ &= (D_1 \circ D_2)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2)(b) + \cancel{D_2(a) \cdot D_1(b)} + \cancel{D_1(a) \cdot D_2(b)} + \\ &\quad - (D_2 \circ D_1)(a) \cdot b - a \cdot (D_2 \circ D_1)(b) - \cancel{D_1(a) \cdot D_2(b)} - \cancel{D_2(a) \cdot D_1(b)} \\ &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(a) \cdot b + a \cdot (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(b) \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

dunque $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \text{Der}(A)$.

Exercises B

Exercises: Differential manifolds

Exercises C

Exercises: Lie groups and algebras

Bibliography

1. Loi, A. *Introduzione alla Topologia Generale* ISBN: 978-88-548-5917-3 (Aracne, 2013).
2. Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds* ISBN: 978-1-4419-9982-5 (Springer).
3. Tu, L. W. *An Introduction to Manifolds* ISBN: 978-1-4419-7400-6 (Springer, 2010).