Costruiamo ora l'azione per il campo e.m.

$$S = \underbrace{S_m}_{\text{materia}} + \overbrace{S_f}^{\text{campi}} + \underbrace{S_i}_{\text{interazione}} \qquad \text{dove} \qquad S_i = \sum_{\text{part.}} \frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu$$

Ci manca S_f: vorremmo innanzitutto che i campi rispettino il principio di sovrapposizione, il quale dipende dalla linearità di $\Box f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ $\left(f = \sum_i g_i \Rightarrow \Box\left(\sum_i g_i\right) = \sum_i \left(\Box g_i\right)\right)$, perciò è necessario che le eqq. del moto siano lineari.

Siccome le eqq di E-L hanno delle derivate, perché le eqq del moto siano lineari è necessario che $\mathcal{L}$ abbia termini quadratici.

In ultimo, $\mathcal{L}$ deve essere uno scalare di Lorentz perché si abbiano eqq. del moto covarianti.

Possiamo quindi usare $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -2(E^2 - B^2)$

mentre $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto \bar{E}\cdot\bar{B}$ è uno pseudo scalare, quindi non va bene perché il campo e.m. è invariante per parità e perché $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ può essere scritto come una 4-divergenza (che non è rilevante per le eqq del moto).

$$S = \sum_{\text{part}}\left(\underbrace{-mc\int ds}_{S_m} \underbrace{- \frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu}_{S_i} \underbrace{- \frac{1}{16\pi c}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\, d\Omega}_{S_f}\right) \qquad \left(-\frac{1}{16\pi c} \text{ vale in unità di Gauss}\right)$$

$\rho = \rho(x^\mu)$ densità di carica

$\underbrace{\rho\, dV}_{\text{invariante}} = dq$ carica (conservata $\wedge$ invariante)

Per una particella $\rho(x) = e\,\delta^3(\bar{r} - \bar{r}_p)$ delta di Dirac

Per un insieme di cariche $\rho(x) = \sum_i e_i\,\delta^3(\bar{r} - \bar{r}_i)$

densità di

densità di corrente

4-vettore $\longrightarrow$ 4-vettore

$$\overbrace{dq\,dx^\mu}^{\text{4-vettore}} = de\,dx^\mu = \rho\,dV dx^\mu = \rho\,\underbrace{dV dt}_{\text{scalare}}\,\overbrace{\frac{dx^\mu}{dt}}^{\text{4-vettore}} \implies j^\mu \doteq \rho\frac{dx^\mu}{dt} = \rho u^\mu = (c\rho, \rho\bar{v})$$

dov'è la particella

$$j^\mu(x^\mu) = \sum_i e\,\frac{dz_i^\mu}{dt}\,\delta^3(\bar{x}-\bar{z}_i) = \sum_i e\int d\xi\,\frac{dz_i^\mu}{d\xi}\,\delta(t-\xi)\,\delta^3(\bar{x}-\bar{z}_i)$$

dove calcoliamo j^μ

$$= \sum_i e\int d\xi\,\frac{dz_i^\mu}{d\xi}\,\delta^4(x^\mu-(z_i)^\mu)$$

essendo ξ muta, usiamo s

$$\implies j^\mu(x^\mu) = \sum_i e\int ds\,\frac{dz_i^\mu}{ds}\,\delta^4(x^\mu-(z_i)^\mu)$$

ora è covariante a vista

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = \partial_\mu\left(\sum_i e\int ds\,\frac{dz_i^\mu}{ds}\,\delta^4(x-z_i)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^4(x-z) = -\frac{\partial}{\partial z^\mu}\delta^4(x-z)$$

$$= \sum_i e\int ds\,\frac{dz_i^\mu}{ds}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\delta^4(x-z_i)$$

$$d(\delta^4(x-z_i)) = \frac{\partial(\delta^4(x-z_i))}{\partial(z_i)^\mu}\,\frac{\partial(z_i)^\mu}{ds}\,ds$$

$$= -\sum_i e\int ds\,\frac{dz_i^\mu}{ds}\,\frac{\partial}{\partial(z_i)^\mu}\,\delta^4(x-z_i)$$

$$= -\sum_i e\int d(\delta^4(x-z_i))$$

$$= -\sum_i e\left[\delta^4(x-z_i)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \implies \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

eq di continuità

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$$

---

interazione m-f

$A_\mu = A_\mu(z)$

$$S_{mf} = -\frac{e}{c}\int A_\mu dz^\mu = -\frac{e}{c}\int A_\mu\frac{dz^\mu}{ds}ds = -\frac{e}{c}\int ds\underbrace{\int\left(A_\mu(x)\,\delta^4(x-z)\,\frac{dz^\mu}{ds}\right)d^4x}$$

$$f(x) = \int dy\, f(y)\,\delta(x-y)$$

$$S_{mf} = -\frac{1}{c}\int A_\mu(x)\underbrace{\int e\frac{dz}{ds}\delta^4(x-z)\,ds}_{\frac{1}{c}j^\mu}\,d^4x \implies S_{mf} = -\frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu\,d^4x$$

Abbiamo la libertà di gauge $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu f$ da cui

$$S_{mf} \to S'_{mf} = -\frac{1}{c^2}\int d^4x\,(A_\mu - \partial_\mu f)\,j^\mu = S_{mf} + \frac{1}{c^2}\int d^4x\,\partial_\mu f\,j^\mu$$

$$= S_{mf} + \int \underbrace{\partial_\mu(f j^\mu)}\,d^4x - \int \partial_\mu f\,\underbrace{\partial_\mu j^\mu}_{=0}\,d^4x$$

una 4-divergenza non modifica le eqq. del moto

eq continuità

$$S = -\sum_i\left(m_i c\int ds_i\right) - \frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu d^4x - \frac{1}{16\pi c}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^4x$$

$$\delta S = 0 \implies \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$$ dove in questo caso $\varphi = A^\nu$

S_m si annulla per le derivate delle eqq di E-L

$$S = \int\mathcal{L}\,d^4x \implies \mathcal{L} = -\frac{1}{c^2}A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\nu} = \frac{\partial}{\partial A^\nu}\left(-\frac{1}{c^2}A_\mu j^\mu - \cancel{\frac{1}{16\pi c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}\right) = -\frac{1}{c^2}\delta^\nu_\mu j^\mu = -\frac{1}{c^2}j^\nu$$

$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}\left(\partial^\lambda A^\sigma - \partial^\sigma A^\lambda\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}\left(\delta^\lambda_\beta\delta^\sigma_\alpha F^{\mu\nu} - \delta^\sigma_\beta\delta^\lambda_\alpha F^{\mu\nu} + \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha F^{\lambda\sigma} - \delta^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha F^{\lambda\sigma}\right)$$

$$= \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu}F^{\mu\nu} - \delta_{\beta\nu}\delta_{\alpha\mu}F^{\mu\nu} + \delta_{\beta\lambda}\delta_{\alpha\sigma}F^{\lambda\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\alpha\lambda}F^{\lambda\sigma}$$

$$= F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta}$$

$$= 4F^{\beta\alpha}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = -\frac{1}{c^2} j^\nu \implies \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

eqq Maxwell sorgenti (4eqq)

$$\underbrace{\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{simmetrico}} \overbrace{F^{\mu\nu}}^{\text{antisimmetrico}}}_{=0} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu \implies \partial_\nu j^\nu = 0$$

Esempio: $\nu = 1$ $\qquad \partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{4\pi}{c} j^1$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{01}}{\partial t} + \cancelto{0}{\frac{\partial F^{11}}{\partial x}} + \frac{\partial F^{21}}{\partial y} + \frac{\partial F^{31}}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

per $\nu=2, \nu=3$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x \qquad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \bar{\nabla} \wedge \bar{B}\right)_x = \left(\frac{4\pi}{c}\bar{J}\right)_x \longrightarrow \bar{\nabla}\wedge\bar{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\bar{J}$$

CONTROLLA SEGNI

$$\nu = 0 \qquad \cancelto{0}{\frac{1}{c}\frac{\partial F^{00}}{\partial t}} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x} + \frac{\partial F^{20}}{\partial y} + \frac{\partial F^{30}}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j^0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} c\rho \longrightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho$$