Esercitazione 2

Elettrodinamica relativistica

A.A. 2023/2024

Simone Iovine

Indice

1 Esercizio 1

L'equazione delle onde per onde elettromagnetiche può essere scritta come

$$\Box\varphi \doteq \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0 \tag{1}$$

dove φ è una funzione scalare e il 4-gradiente è dato da

$$\partial_\mu \doteq \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \right) \tag{2}$$

dunque

$$\Box \doteq \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{3}$$

Al fine di verificare l'invarianza di questa equazione, la riscriviamo calcolata in un diverso sistema di riferimento (primato):

$$\begin{aligned}
\Box'\varphi &\doteq \partial'_\mu \partial'^\mu \varphi && \text{(4a)}\\
&= g_{\mu\nu} \partial'^\nu \partial'^\mu \varphi && \text{(4b)}\\
&= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \partial^\rho \Lambda^\mu{}_\sigma \partial^\sigma \varphi && \text{(4c)}\\
&= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \Lambda^\mu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma \varphi && \text{(4d)}
\end{aligned}
\qquad \partial^\mu \Lambda^\nu{}_\rho = 0$$

dove il tensore metrico per lo spazio piatto è dato da

$$g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{5}$$

Considerando delle trasformazioni di Lorentz, vale la relazione

$$g_{\mu\nu} {(\Lambda_L)^\nu}_\rho {(\Lambda_L)^\mu}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{6}$$

dove la matrice di trasformazione è data da

$${(\Lambda_L)^\mu}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta^1\gamma & -\beta^2\gamma & -\beta^3\gamma \\ -\beta^1\gamma & 1 + A(\beta^1)^2 & A\beta^1\beta^2 & A\beta^1\beta^3 \\ -\beta^2\gamma & A\beta^2\beta^1 & 1 + A(\beta^2)^2 & A\beta^2\beta^3 \\ -\beta^3\gamma & A\beta^3\beta^1 & A\beta^3\beta^2 & 1 + A(\beta^3)^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{1}{c}\,(v^1, v^2, v^3) \\ \gamma \doteq \left(1 - \left|\vec{\boldsymbol{\beta}}\right|^2\right)^{-1/2} \\ A \doteq \left|\vec{\boldsymbol{\beta}}\right|^{-2} (\gamma - 1) \end{cases} \tag{7}$$

dunque

$$\begin{aligned} \Box'\varphi &= g_{\mu\nu} {(\Lambda_L)^\nu}_\rho {(\Lambda_L)^\mu}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma \varphi && \text{(8a)} \\ &= g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma \varphi && \text{(8b)} \\ &= \partial_\rho \partial^\rho \varphi && \text{(8c)} \\ &= \Box\varphi && \text{(8d)} \\ &= 0 && \text{(8e)} \end{aligned}$$

Le trasformazioni di Galilei sono invece rappresentate dalla matrice

$${(\Lambda_G)^\mu}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Per queste trasformazioni di Lorentz quindi la relazione considerata in precedenza produce un risultato diverso

$$g_{\mu\nu} {(\Lambda_G)^\nu}_\rho {(\Lambda_G)^\mu}_\sigma = g_{\rho\sigma} + K_{\rho\sigma}, \quad K_{\rho\sigma} \doteq \begin{bmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ -v^1 & (v^1)^2 - 1 & v^1 v^2 & v^1 v^3 \\ -v^2 & v^2 v^1 & (v^2)^2 - 1 & v^2 v^3 \\ -v^3 & v^3 v^1 & v^3 v^2 & (v^3)^2 - 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

perciò

$$\begin{aligned} \Box'\varphi &= g_{\mu\nu}(\Lambda_G)^{\nu}{}_{\rho}(\Lambda_G)^{\mu}{}_{\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi && \text{(11a)} \\ &= (g_{\rho\sigma} + K_{\rho\sigma})\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi && \text{(11b)} \\ &= \underbrace{\Box\varphi}_{0} + \underbrace{K_{\rho\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi}_{\text{in generale } \neq 0} && \text{(11c)} \\ &\neq 0 && \text{(11d)} \end{aligned}$$

2 Esercizio 2

Consideriamo le trasformazioni generiche per i campi elettrico e magnetico:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}}' = \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) - \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} \\ \vec{\mathbf{B}}' = \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) - \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} \end{cases} \tag{12}$$

Puramente elettrico → puramente magnetico

Poniamo

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}} \neq 0 \\ \vec{\mathbf{B}} = 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{E}}' = 0 \\ \vec{\mathbf{B}}' \neq 0 \end{cases} \tag{13}$$

dunque per il campo elettrico

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\vec{\mathbf{E}} + \cancel{\vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}\right) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} && \text{(14a)} \\ &= \gamma\vec{\mathbf{E}} - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} && \text{(14b)} \end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{E}}' = 0 \implies \vec{\mathbf{E}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} \propto \vec{\boldsymbol{\beta}} \implies \vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\boldsymbol{\beta}} \tag{15}$$

mentre per il campo magnetico

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}}' &= \gamma\left(\cancel{\vec{\mathbf{B}}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}\cancel{(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})}\vec{\boldsymbol{\beta}} && \text{(16a)} \\ &= -\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}} && \text{(16b)} \end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{B}}' \neq 0 \implies \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}} \neq 0 \implies \neg(\vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\boldsymbol{\beta}}) \tag{17}$$

Si arriva dunque a una contraddizione, i.e. non è possibile trasformare un campo puramente elettrico in un sistema di riferimento in uno puramente magnetico in un altro sistema di riferimento.

Onda elettromagnetica $\rightarrow$ puramente elettrica/magnetica

Per le onde elettromagnetiche vale

$$\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{B}} \implies \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{18}$$

Se imponiamo che il campo elettrico sia nullo nel sistema di riferimento primato ma non lo sia quello magnetico, otteniamo

$$\begin{align}
\vec{\mathbf{E}}' &= 0 \tag{19a}\\
\gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} &= 0 \tag{19b}\\
\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} &= \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \tag{19c}\\
\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) &= \vec{\mathbf{B}} \cdot \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \tag{19d}\\
&= \gamma\left(\cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}} + \cancel{\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}\right) \tag{19e}
\end{align}$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) = 0 \implies (\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}) \wedge \vee (\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}) \tag{20}$$

in quanto $\vec{\boldsymbol{\beta}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

$$\begin{align}
\vec{\mathbf{B}}' &\neq 0 \tag{21a}\\
\gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} &\neq 0 \tag{21b}\\
\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} &\neq \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \tag{21c}\\
\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) &\neq \vec{\mathbf{E}} \cdot \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \tag{21d}\\
&\neq \gamma\left(\cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}} + \cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}}\right) \tag{21e}
\end{align}$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) \neq 0 \implies \neg(\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}) \wedge \neg(\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}) \tag{22}$$

Il risultato è analogo ponendo nullo il campo magnetico e non nullo quello elettrico.
Si arriva dunque a una contraddizione, i.e. non è possibile vedere un'onda elettromagnetica come puramente elettrica o puramente magnetica in un altro sistema di riferimento.

3 Esercizio 3

qui

4 Esercizio 4

I campi elettrico e magnetico possono essere definiti in relazione ai potenziali scalare e vettore:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi \\ \vec{\mathbf{B}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\mathbf{A}} \end{cases} \tag{23}$$

Affinché siano entrambi nulli, possiamo considerare $\vec{\mathbf{A}}$ come gradiente di una funzione $g = g(\vec{\mathbf{x}})$, in quanto il rotore di un gradiente è sempre nullo. Moltiplicando questo per una funzione che dipende solo dal tempo $f = f(t)$, otteniamo

$$\vec{\mathbf{E}} = 0 \tag{24a}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{24b}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(f\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}g\right) \tag{24c}$$

$$= -\frac{1}{c}\dot{f}\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}g \tag{24d}$$

dunque possiamo porre

$$\varphi = -\frac{1}{c}\dot{f}(t)\,g(\vec{\mathbf{x}}) + h(t), \quad h = h(t) \tag{25}$$

Ponendo come moltiplicatore una funzione ξ tale che $\partial^\mu \xi = 0$, possiamo infine scrivere la forma del 4-potenziale ricercato

$$A^\mu = \xi\left(-\frac{1}{c}\dot{f}g + h, f\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}g\right) \tag{26}$$