Esercitazione 1

Elettrodinamica relativistica

A.A. 2023/2024

Simone Iovine

0.1 Esercizio 1

Riscriviamo la definizione della rapidità

$$y \doteq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E+cp_z}{E-cp_z}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{v_z}{c}}{1-\dfrac{v_z}{c}}\right) \tag{1}$$

nel seguente modo

$$e^{2y} = \frac{E+cp_z}{E-cp_z} = \frac{1+\dfrac{v_z}{c}}{1-\dfrac{v_z}{c}} \tag{2}$$

definendo

$$\beta \doteq \frac{u}{c} \tag{3}$$

dove u è la velocità del boost, abbiamo anche

$$e^{2\eta} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \tag{4}$$

Considerando il 4-momento

$$\vec{\mathbf{p}} = (E, c\vec{\mathbf{p}}) = (E, cp_x, cp_y, cp_z) \tag{5}$$

un boost lungo z può essere calcolato tramite la matrice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{6}$$

dunque

$$\vec{\mathbf{p}}' = \Lambda \vec{\mathbf{p}} \tag{7}$$

Le componenti che hanno subito un cambiamento saranno

$$\begin{cases} E' = \gamma(E - \beta c p_z) \\ c p_z' = \gamma(c p_z - \beta E) \end{cases} \tag{8}$$

Siccome i fasci sono incidenti, operiamo il cambiamento di segno $\beta \to -\beta$, da cui

$$\begin{cases} E' = \gamma(E + \beta c p_z) \\ c p_z' = \gamma(c p_z + \beta E) \end{cases} \tag{9}$$

A questo punto consideriamo la rapidità nel sistema di riferimento primato

$$\begin{align} e^{2y'} &= \frac{E' + c p_z'}{E' - c p_z'} \tag{10a} \\ & \tag{10b} \\ &= \frac{\gamma(E + \beta c p_z) + \gamma(c p_z + \beta E)}{\gamma(E + \beta c p_z) - \gamma(c p_z + \beta E)} \tag{10c} \\ & \tag{10d} \\ &= \frac{E + \beta c p_z + c p_z + \beta E}{E + \beta c p_z - c p_z - \beta E} \tag{10e} \\ & \tag{10f} \\ &= \frac{E + \beta c p_z + \beta(E + c p_z)}{E - \beta c p_z - \beta(E - c p_z)} \tag{10g} \\ & \tag{10h} \\ &= \underbrace{\frac{E + c p_z}{E - c p_z}}_{e^{2y}} \underbrace{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}_{e^{2\eta}} \tag{10i} \\ &= e^{2(y+\eta)} \tag{10j} \end{align}$$

$$e^{2y'} = e^{2y'} e^{2\eta} \implies y' = y + \eta \tag{11}$$

Analogamente, si può trovare la stessa soluzione usando la seconda definizione della rapidità. Consideriamo ancora il boost in z della 4-posizione

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{x}} = (ct, \vec{\mathbf{x}}) \\ \vec{\mathbf{x}}' = \Lambda \vec{\mathbf{x}} \end{cases} \tag{12}$$

$$
\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{cases} \tag{13}
$$

da questi possiamo derivare la velocità nel sistema di riferimento primato

$$
\frac{v'_z}{c} = \frac{z'}{ct'} = \frac{z - \beta ct}{ct - \beta z} = \frac{ct}{ct}\frac{\frac{z}{ct} - \beta}{1 - \beta\frac{z}{ct}} = \frac{\frac{v_z}{c} - \beta}{1 - \beta\frac{v_z}{c}} \tag{14}
$$

Ancora una volta, siccome i fasci sono incidenti, operiamo il cambiamento di segno $\beta \to -\beta$, da cui

$$
\frac{v'_z}{c} = \frac{\frac{v_z}{c} + \beta}{1 + \beta\frac{v_z}{c}} \tag{15}
$$

A questo punto sostituiamo nella definizione della rapidità

$$
\begin{align}
e^{2y'} &= \frac{1 + \frac{v'_z}{c}}{1 - \frac{v'_z}{c}} \tag{16a}\\
&= \frac{1 + \frac{\frac{v_z}{c} + \beta}{1 + \beta\frac{v_z}{c}}}{1 - \frac{\frac{v_z}{c} + \beta}{1 + \beta\frac{v_z}{c}}} \tag{16b}\\
&= \frac{1 + \beta\frac{v_z}{c} + \frac{v_z}{c} + \beta}{1 + \beta\frac{v_z}{c} - \frac{v_z}{c} - \beta} \tag{16c}\\
&= \frac{1 + \beta + \frac{v_z}{c}(1 + \beta)}{1 - \beta - \frac{v_z}{c}(1 - \beta)} \tag{16d}\\
&= \underbrace{\frac{1 + \frac{v_z}{c}}{1 - \frac{v_z}{c}}}_{e^{2y}} \underbrace{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}_{e^{2\eta}} \tag{16e}\\
&= e^{2(y+\eta)} \tag{16f}
\end{align}
$$

$$
e^{2y'} = e^{2y'} e^{2\eta} \implies y' = y + \eta \tag{17}
$$

0.2 Esercizio 2

Riscriviamo la formula per la sezione d'urto nel seguente modo

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}\,\frac{1}{v_{rel}\,n_1\,n_2} \tag{18}$$

Tutte le quantità riportate in questa formula sono misurate nel sistema di riferimento del laboratorio, il quale è solidale anche al bersaglio di densità n_2.
Sfruttando i fenomeni di dilatazione del tempo e contrazione delle lunghezze, possiamo riscrivere le quantità riportate nella formula nel sistema di riferimento solidale al fascio incidente di densità n_1:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\nu' = \mathrm{d}\nu \\ \mathrm{d}V' = \dfrac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}V \\ \mathrm{d}t' = \gamma\,\mathrm{d}t \\ n_1' = \dfrac{1}{\gamma}\,n_1 \\ n_2' = \gamma\,n_2 \end{cases} \tag{19}$$

questo perché:

- il numero di urti $\mathrm{d}\nu$ rimane costante indipendentemente dal sistema di riferimento considerato,
- il volume considerato dove si contano gli urti appare contratto per un osservatore solidale con il fascio in movimento a causa della velocità relativa,
- per lo stesso motivo, l'intervallo di tempo di misura appare dilatato,
- la densità di particelle del fascio incidente diminuisce in quanto il volume in cui questa viene calcolata è più grande rispetto al volume misurato nel sistema di riferimento solidale al laboratorio (il quale appare contratto a causa del movimento del fascio incidente rispetto al laboratorio),
- la densità di particelle del bersaglio invece aumenta per lo stesso motivo.

A questo punto, sostituendo le quantità calcolate nel sistema di riferimento solidale con il fascio incidente nella formula per la sezione d'urto calcolata in questo sistema, otteniamo

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}\nu'}{\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t'}\,\frac{1}{v_{rel}\,n_1'\,n_2'} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\dfrac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}V\,\gamma\,\mathrm{d}t'}\,\frac{1}{v_{rel}\,\dfrac{1}{\gamma}\,n_1\,\gamma\,n_2'} = \sigma \tag{20}$$

0.3 Esercizio 3

Equazione del moto

Consideriamo la seconda legge di Newton

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} \tag{21}$$

dove il momento relativistico è pari a

$$\vec{\mathbf{p}} = m\gamma\vec{\mathbf{v}} \tag{22}$$

Prendendo solo i moduli dei vettori considerati e ricordando che la forza considerata è costante, integriamo la seconda legge di Newton

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}(m\gamma v)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t F\,\mathrm{d}\xi \tag{23a}$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = Ft \tag{23b}$$

$$\frac{m^2v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = F^2t^2 \tag{23c}$$

$$\frac{m^2c^2}{c^2-v^2}\,v^2 = F^2t^2 \tag{23d}$$

$$\frac{m^2c^2}{F^2t^2}\,v^2 = c^2 - v^2 \tag{23e}$$

$$\left(\frac{m^2c^2}{F^2t^2}+1\right)v^2 = c^2 \tag{23f}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{m^2c^2}{F^2t^2}}} \tag{23g}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\dfrac{F^2t^2+m^2c^2}{F^2t^2}}} \tag{23h}$$

$$= \frac{cFt}{\sqrt{F^2t^2+m^2c^2}} \tag{23i}$$

$$= \frac{c}{mc}\frac{Ft}{\sqrt{1+\dfrac{F^2t^2}{m^2c^2}}} \tag{23j}$$

$$= \frac{Ft}{m}\left(1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}\right)^{-1/2} \tag{23k}$$

Integrando ancora la velocità e ponendo $x(t=0)=0$,

$$\int_0^t v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{F}{m}\int_0^t \xi \left(1+\frac{F^2\xi^2}{m^2c^2}\right)^{-1/2} \mathrm{d}\xi \tag{24a}$$

$$x = \frac{F}{m}\left[\frac{m^2c^2}{F^2}\left(1+\frac{F^2\xi^2}{m^2c^2}\right)^{1/2}\right]_0^t \tag{24b}$$

$$= \frac{mc^2}{F}\left(1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}\right)^{1/2} - \frac{mc^2}{F} \tag{24c}$$

da cui otteniamo l'equazione del moto

$$x(t) = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1+\frac{F^2}{m^2c^2}\,t^2} - 1\right) \tag{25}$$

Formula per l'accelerazione

Poniamo che la velocità $\beta \doteq u/c$ sia limitata all'asse z, dunque la trasformazione è data da

$$\begin{cases} c\,\mathrm{d}t' = \gamma(c\,\mathrm{d}t - \beta\,\mathrm{d}z) \\ \mathrm{d}z' = \gamma(\mathrm{d}z - \beta c\,\mathrm{d}t) \end{cases} \tag{26}$$

da questi possiamo derivare la velocità v nel sistema di riferimento primato v' come

$$v' = c\,\frac{\mathrm{d}z'}{c\,\mathrm{d}t'} = c\,\frac{\mathrm{d}z - \beta c\,\mathrm{d}t}{c\,\mathrm{d}t - \beta\,\mathrm{d}z} = c\,\frac{c\,\mathrm{d}t}{c\,\mathrm{d}t}\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}z}{c\,\mathrm{d}t} - \beta}{1 - \beta\dfrac{\mathrm{d}z}{c\,\mathrm{d}t}} = c\,\frac{\dfrac{v}{c} - \beta}{1 - \beta\dfrac{v}{c}} = \frac{v - \beta c}{1 - \beta\dfrac{v}{c}} \tag{27}$$

Usando

$$\gamma \doteq \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \implies 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \tag{28}$$

calcoliamo il differenziale della velocità

$$\mathrm{d}v' = \mathrm{d}(v-\beta c)\,\frac{1}{1-\beta\dfrac{v}{c}} + (v-\beta c)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-\beta\dfrac{v}{c}}\right) \tag{29a}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{1-\beta\dfrac{v}{c}} + (v-\beta c)\left(-\frac{1}{\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\right)\left(-\frac{\beta}{c}\,\mathrm{d}v\right) \tag{29b}$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta\dfrac{v}{c}} + \frac{\left(\dfrac{v}{c}-\beta\right)\beta}{\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\right)\mathrm{d}v \tag{29c}$$

$$= \frac{1-\beta\dfrac{v}{c}+\beta\dfrac{v}{c}-\beta^2}{\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}v \tag{29d}$$

$$= \frac{1}{\gamma^2\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}v \tag{29e}$$

A questo punto possiamo calcolare l'accelerazione

$$a' \doteq \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} \tag{30a}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{\gamma^2\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\,\frac{c}{\gamma(c\,\mathrm{d}t-\beta\,\mathrm{d}z)} \tag{30b}$$

$$= \frac{c}{\gamma^3\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2(c\,\mathrm{d}t-\beta\,\mathrm{d}z)}\,\mathrm{d}v \tag{30c}$$

$$= \frac{c}{\gamma^3\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2 c\,\mathrm{d}t\left(1-\beta\underbrace{\dfrac{\mathrm{d}z}{c\,\mathrm{d}t}}_{v/c}\right)}\,\mathrm{d}v \tag{30d}$$

$$= \frac{1}{\gamma^3\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^3}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{30e}$$

$$= \frac{1}{\gamma^3\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^3}\,a \tag{30f}$$

Essendo la velocità del boost la stessa della velocità di cui abbiamo operato la trasformazione, i.e. $\beta = v/c$, otteniamo

$$a' = \gamma^3 a \tag{31}$$

Accelerazione di un protone

Integriamo ora l'Equazione 31 nel tempo, considerando costante l'accelerazione a'

$$
\begin{aligned}
\int_0^t a' \,\mathrm{d}\xi &= \int_0^t \gamma^3 a \,\mathrm{d}\xi && \text{(32a)}\\
a't &= \int_0^t \gamma^3 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} \,\mathrm{d}\xi && \text{(32b)}\\
&= \int_0^v \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-3/2} \mathrm{d}w \qquad w \doteq c\sin(\phi) && \text{(32c)}\\
&= \int_{\tau/2}^{\operatorname{asin}(v/c)} \big(1 - \sin^2(\theta)\big)^{-3/2} c\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}w = c\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta && \text{(32d)}\\
&= \int_{\tau/2}^{\operatorname{asin}(v/c)} \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)}\,\mathrm{d}\theta && \text{(32e)}\\
&= c\int_{\tau/2}^{\operatorname{asin}(v/c)} \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta && \text{(32f)}\\
&= c\,[\tan(\theta)]_{\tau/2}^{\operatorname{asin}(v/c)} && \text{(32g)}\\
&= c\tan\!\left(\operatorname{asin}\!\left(\frac{v}{c}\right)\right) && \text{(32h)}\\
&= v\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} && \text{(32i)}\\
(a't)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= v^2 && \text{(32j)}\\
v^2 - (a't)^2\frac{v^2}{c^2} &= (a't)^2 && \text{(32k)}\\
v &= \frac{a't}{\sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c}\right)^2}} && \text{(32l)}
\end{aligned}
$$

Sostituiamo ora l'Equazione 32l nella formula per l'energia relativistica, esplicitando il tempo

$$
\begin{align}
\mathcal{E} &= m\gamma c^2 \tag{33a}\\
&= mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{33b}\\
1-\frac{v^2}{c^2} &= \frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2} \tag{33c}\\
v^2 &= c^2\left(1-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}\right) \tag{33d}\\
\frac{a'^2t^2}{1+\dfrac{a'^2}{c^2}\,t^2} &= c^2\left(1-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}\right) \tag{33e}\\
\frac{a'^2}{c^2}\,t^2 &= \left(1-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}\right)\left(1+\frac{a'^2}{c^2}\,t^2\right) \tag{33f}\\
\cancel{\frac{a'^2}{c^2}\,t^2} &= 1-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}+\cancel{\frac{a'^2}{c^2}\,t^2}-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}\frac{a'^2}{c^2}\,t^2 \tag{33g}\\
\frac{m^2c^2a'^2}{\mathcal{E}^2}\,t^2 &= 1-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2} \tag{33h}\\
t &= \frac{\mathcal{E}}{mca'}\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}} \tag{33i}
\end{align}
$$

Ricordando che

$$
F = m\gamma^3 a = ma' = eE \tag{34}
$$

$$
\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 6.2\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{m}} \tag{35}
$$

Sostituendo i dati

$$
\begin{cases}
\mathcal{E} = 1\,\mathrm{TeV} = 10^3\,\mathrm{GeV}\\
m = 1\,\dfrac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}\\
E = 1\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 6.2\cdot 10^9\,\dfrac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{m}}\\
e = 1.6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\\
c = 3\cdot 10^8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{cases} \tag{36}
$$

otteniamo

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\mathcal{E}}{mca'}\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}} && \text{(37a)}\\
&= \frac{\mathcal{E}}{ecE}\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}} && \text{(37b)}\\
&= \underbrace{\frac{10^3\,\mathrm{GeV}}{(1.6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})\left(3\cdot 10^8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(6.2\cdot 10^9\,\dfrac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{m}}\right)}}_{\textit{secondi}}\underbrace{\sqrt{1-\frac{1\,\dfrac{\mathrm{GeV}^2}{\mathrm{c}^4}\,c^4}{10^6\,\mathrm{GeV}^2}}}_{\textit{adimensionale}} && \text{(37c)}
\end{aligned}
$$

il quale espresso in minuti e secondi risulta

$$t \simeq 55\,\mathrm{m}\,35\,\mathrm{s} \tag{38}$$

0.4 Esercizio 4

```python
# packages import

import numpy as np

# true random generator

rand = np.random.default_rng()

# metric tensor

eta = np.diag([1, -1, -1, -1])
```