$$\begin{cases} \bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \bar{\nabla}\varphi \\ \bar{B} = \bar{\nabla}\wedge\bar{A} \end{cases} \qquad A^{\mu} = (\varphi, \bar{A})$$

Possiamo descrivere eqq del moto da $\bar{E}$ e $\bar{B}$ nonostante non siano oggetti fisici indipendenti

Consideriamo:

$$\bar{\nabla}\wedge\bar{E} = -\frac{1}{c}\bar{\nabla}\wedge\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \overbrace{\bar{\nabla}\wedge\bar{\nabla}\varphi}^{\bar{0}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\wedge\bar{A}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\wedge\bar{A} = 0$$

eq di Maxwell

$$F^{\mu\nu} \doteq \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$$

$$\partial_{\mu}F_{\rho\sigma} + \partial_{\rho}F_{\sigma\mu} + \partial_{\sigma}F_{\mu\rho} = 0$$ identità di Bianchi

$$\partial_{\mu}(\partial_{\rho}A_{\sigma} - \partial_{\sigma}A_{\rho}) + \partial_{\rho}(\partial_{\sigma}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\sigma}) + \partial_{\sigma}(\partial_{\mu}A_{\rho} - \partial_{\rho}A_{\mu}) = 0$$

Possiamo riscrivere l'identità di Bianchi come:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\mu}F_{\rho\sigma} = 2\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$?

Esempio: $(\mu, \rho, \sigma) = (0, 1, 2)$

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}F_{\rho\sigma} + \partial_{\rho}F_{\sigma\mu} + \partial_{\sigma}F_{\mu\rho} &= \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-B_z) + \frac{\partial}{\partial x}E_y + \frac{\partial}{\partial y}(-E_x) \\ &= \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{\nabla}\wedge\bar{E}\right)_z = 0 \end{aligned}$$

$\partial_{\mu}\tilde{F}_{\rho\sigma} = 0$ sono 4 eqq (quelle senza sorgenti) che corrispondono a $\begin{cases} -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{\nabla}\wedge\bar{E} = \bar{0} \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \end{cases}$