Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Magistrale in Fisica - AA. 2023/2024
Elettrodinamica relativistica
Esercitazione 1

Esercizio 1 La rapidità di una particella è definita come

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{E + cp_z}{E - cp_z} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + v_z/c}{1 - v_z/c}$$

dove p_z è la componente del momento lungo z, E l'energia, v la velocità (tipicamente z in un esperimento di fisica delle particelle sarà la direzione dei fasci incidenti). Mostrare che per un boost lungo z la rapidità di trasforma come

$$y' = y + \eta$$

dove $\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$ è la rapidità del boost (dove $\beta = u/c$ con u velocità del boost).
Soluzione.
Usiamo il quadrivettore $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ e consideriamo un boost lungo l'asse z, le sue componenti si trasformeranno come

$$\begin{cases} E' = \gamma(E + \beta c p_z) \\ p'_z = \gamma(p_z + \beta E/c) \end{cases} .$$

Da cui la rapidità della particella nel nuovo sistema di riferimento vale

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{E' + cp'_z}{E' - cp'_z} = \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma(E + \beta c p_z) + c\gamma(p_z + \beta E/c)}{\gamma(E + \beta c p_z) - c\gamma(p_z + \beta E/c)}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(E + p_z)(\gamma + \beta)}{(E - p_z)(\gamma - \beta)} = \frac{1}{2}\ln\frac{(E + p_z)}{(E - p_z)} + \frac{1}{2}\ln\frac{(\gamma + \beta)}{(\gamma - \beta)} = y + \eta$$

$\square$

Nota: se invertiamo il verso della velocità u rispetto a z, cambia solo il segno e si otterrà $y' = y - \eta$
Nota 2: ovviamente il calcolo si può fare in svariati modi diversi.

Esercizio 2 Dimostrare che la *sezione d'urto* σ di un processo di scattering (diffusione), definita come segue, è un invariante di Lorentz. Dato un fascio di particelle con densità n_1 che urta (nel sistema del laboratorio) un bersaglio di densità n_2, e la loro velocità relativa è v_{rel}, il numero di urti per unità di tempo e volume è

$$\frac{d\nu}{dV dt} = \sigma v_{rel} n_1 n_2 \quad . \tag{1}$$

Soluzione.
Iniziando dall'analisi dimensionale, la sezione d'urto si misura come un'area. Quindi intuitivamente non è ovvio che debba essere un'invariante di Lorentz.

Il primo membro dell'equazione è un'invariante, perché $d\nu$ è un numero di urti ("conteggio") che non può dipendere dal sistema di riferimento, $dVdt$ è l'elemento dello spazio 4-dimensionale che è invariante. Per dimostrare l'invarianza di σ allora ci resta da dimostrare l'invarianza di $f = n_1 n_2 v_{rel}$ che è spesso detto fattore di flusso. I tre elementi presi singolarmente non sono invarianti.

Le densità n si trasformano come l'inverso di un volume, infatti il numero di particelle nell'elemento di volume ndV dev'essere invariante. Quindi in un generico sistema di riferimento dove le particelle hanno velocità v, la densità è

$$n = \gamma(v) n_0$$

dove n_0 è quella nel sistema di riferimento di quiete delle particelle stesse. Nel sistema del laboratorio ($v_2 = 0$, $v_{rel} = v_1$)

$$f = n_1 n_{02} v_1 = n_{0,1}\gamma(v_1) n_{0,2} v_1 = n_{0,1} n_{0,2} \frac{\mathbf{p_1}}{m_1}$$

dove abbiamo considerato una qualsiasi delle particelle del fascio con momento p_1 per calcolare la velocità v_1. Sempre in questo S.d.R. $p_1 = (E_1, \mathbf{p_1})$, $p_2 = (m_2, \mathbf{0})$, per cui (usando unità naturali per comodità)

$$p_1 \cdot p_2 = E_1 m_2$$

con la convenzione che gli indici sommati son nascosti ($p_1 \cdot p_2 = p_1^\mu p_{2\mu}$). Da cui

$$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{\frac{(p_1 \cdot p_2)^2}{m_2^2} - m_1^2}$$

Da cui

$$\frac{\mathbf{p}_1}{m_1} = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{m_1 m_2}$$

che è manifestamente un invariante di Lorentz (che era quello che volevamo dimostrare), da cui segue che anche la sezione d'urto deve essere invariante. □

Si noti che in generale $\mathbf{p}_1/m_1$ non è un invariante. In questo problema è il valore dell'invariante al secondo membro, calcolato per comodità nel S.d.R. del laboratorio.

C'è però in questo esercizio un doppio problema concettuale che ci aiuta: la definizione di v_{rel} come $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ non è corretta in meccanica relativistica, quindi non dovremmo usarla. Tuttavia definendola così il problema è corretto (a patto che le velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ siano collineari).

La definizione corretta di v_{rel} dovrebbe essere "la velocità di 1 nel sistema di riferimento di 2", la regola di composizione di velocità di Galileo ($|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$) non può essere usata per andare in un S.d.R. generico. Possiamo calcolare v_{rel}, sapendo che nel S.d.R. del laboratorio è $\mathbf{v_1}$, usando calcoli simili a quelli appena fatti, troviamo

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{p_1 \cdot p_2}$$

che è una quantità manifestamente invariante, il che renderebbe σ non invariante se si mantiene la stessa definizione Eq. 1. Sviluppando v_{rel} con un po' di algebra (come nel Barone), si trova

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)^2}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}$$

Il fattore al denominatore di questa formula cancella la variazione delle densità n_1 e n_2 in un generico sistema. Quindi per definire la sezione d'urto σ come invariante occorre definire il flusso come

$$f = n_1 n_2 \bar{v}$$

Dove $\bar{v} = \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)^2}$ ed è nota nei libri come "velocità di Mueller", ma non è propriamente una velocità, e infatti può essere maggiore di c.

Approfondimento: `https://arxiv.org/abs/1605.00569`.

Esercizio 3 Risolvere il moto uniformemente accelerato in meccanica relativistica. Mostrando che la velocità si può scrivere come

$$v = \frac{At}{\sqrt{1 + \frac{A^2 t^2}{c^2}}}$$

Calcolare quanto tempo occorre per accelerare un protone ($m \simeq 1\text{GeV/c}^2$) all'energia di 1 TeV, con un campo elettrico uniforme di 100 V/m? *Suggerimento* Alcune unità di misura son più comode di altre per fare i calcoli.

Soluzione.

Il problema si può affrontare in vari modi. Dal punto di vista cinematico, definiamo un moto uniformemente accelerato quello di un corpo che "sente" un'accelerazione costante nel proprio SdR. Quindi,data una accelerazione A costante lungo la x: $w'^{\mu} = (0, A/c^2, 0, 0)$. [1]. Nel sistema del laboratorio (Nota la velocità $\mathbf{u}$ è parallela all'accelerazione $\mathbf{a}$), la componente x della quadriaccelerazione in generale è definita come

$$w = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{du}{dt} + \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{du}{dt}v^2\right)$$

imponendo che tramite un boost di Lorentz sia uguale a w', si ottiene

$$\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{du}{dt} + \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{du}{dt}v^2\right) = \gamma\frac{A}{c^2}$$

Da cui

$$\frac{\gamma^2}{c^2}\frac{du}{dt}\left(1 + \frac{\gamma^2}{c^2}v^2\right) = \frac{\gamma^4}{c^2}\frac{du}{dt} = \gamma\frac{A}{c^2}$$

Cioè

$$\gamma^3\frac{du}{dt} = A$$

Risolvendo per separazione delle variabili

$$\int \frac{dv}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = \int A dt$$

Da cui

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = At$$

[1]Nel sistema che abbiamo definito, la quadrivelocità è senza dimensioni, e quindi la quadriaccelerazione si misura in 1/spazio. Si possono usare altri sistemi in cui la quadrivelocità ha le dimensioni di una velocità etc.

dove è stata posta la velocità iniziale nulla. Allora

$$v = \frac{At}{\sqrt{1 + \frac{A^2t^2}{c^2}}}$$

$\square$

Nota: Il punto di vista cinematico usato qui assume che si faccia un boost "continuamente" al SdR della particella. L'altro modo per risolvere l'esercizio è il punto di vista dinamico, in cui si parte da

$$\frac{dp}{dt} = mA$$

Si arriva ovviamente alla stessa conclusione.

Per la seconda parte dell'esercizio, consideriamo questo secondo approccio, la variazione di momento causata dal campo elettrico è

$$\frac{dp}{dt} = eE \quad \Rightarrow \quad p = eEt$$

dove e è la carica dell'elettrone. Quindi

$$t = \frac{p}{eE} \simeq \frac{\varepsilon}{eEc}$$

dove si è fatta l'approssimazione che l'energia finale $\varepsilon \simeq pc$, che con i numeri considerati dal problema (1 TeV e 1 GeV/c^2) è vera al 1 per mille. (Nota: questa approssimazione non è vera per tutto il tragitto, ma noi stiamo facendola solo per il valore finale). Sostituendo i numeri

$$t = \frac{1\mathrm{TeV}}{e100\,\mathrm{V\,m^{-1}c}} = \frac{10^{12}\mathrm{eV}}{100\mathrm{eV\,m^{-1}}3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 33\,\mathrm{s}$$

Esercizio 4 Scrivere, nel linguaggio di programmazione che si preferisce, una classe (o struttura) che abbia le proprietà di un 4 vettore di Lorentz. Si deve poter "boostare" da un sistema di riferimento ad un altro, avere funzioni set e get coerenti per le componenti e per il modulo e avere operatori di somma e prodotto scalare ben definiti. Dimostrare con un test che il prodotto scalare di due vettori di Lorentz prima e dopo un "boost" ha lo stesso valore.

Soluzione.

Ecco alcuni esempi di classi già scritte:

- `https://root.cern.ch/doc/master/classTLorentzVector.html`
- `https://github.com/scikit-hep/vector`