

Esercitazione 2

Elettrodinamica relativistica

A.A. 2023/2024

Simone Iovine

Indice

1	Esercizio 1	1
2	Esercizio 2	3
3	Esercizio 3	4
4	Esercizio 4	5

1 Esercizio 1

L'equazione delle onde per onde elettromagnetiche può essere scritta come

$$\square\varphi \doteq \partial_\mu\partial^\mu\varphi = 0 \quad (1)$$

dove φ è una funzione scalare e il 4-gradiente è dato da

$$\partial_\mu \doteq \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (2)$$

dunque

$$\square \doteq \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (3)$$

Al fine di verificare l'invarianza di questa equazione, la riscriviamo calcolata in un diverso sistema di riferimento (primato):

$$\square'\varphi \doteq \partial'_\mu\partial'^\mu\varphi \quad (4a)$$

$$= g_{\mu\nu}\partial'^\nu\partial'^\mu\varphi \quad (4b)$$

$$= g_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\rho\partial^\rho\Lambda^\mu_\sigma\partial^\sigma\varphi \quad (4c)$$

$$= g_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\rho\Lambda^\mu_\sigma\partial^\rho\partial^\sigma\varphi \quad (4d)$$

dove il tensore metrico per lo spazio piatto è dato da

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (5)$$

Considerando delle trasformazioni di Lorentz, vale la relazione

$$g_{\mu\nu}(\Lambda_L)^\nu{}_\rho(\Lambda_L)^\mu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad (6)$$

dove la matrice di trasformazione è data da

$$(\Lambda_L)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta^1\gamma & -\beta^2\gamma & -\beta^3\gamma \\ -\beta^1\gamma & 1 + A(\beta^1)^2 & A\beta^1\beta^2 & A\beta^1\beta^3 \\ -\beta^2\gamma & A\beta^2\beta^1 & 1 + A(\beta^2)^2 & A\beta^2\beta^3 \\ -\beta^3\gamma & A\beta^3\beta^1 & A\beta^3\beta^2 & 1 + A(\beta^3)^2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \vec{\beta} = \frac{1}{c}(v^1, v^2, v^3) \\ \gamma \doteq \left(1 - |\vec{\beta}|^2\right)^{-1/2} \\ A \doteq |\vec{\beta}|^{-2}(\gamma - 1) \end{cases} \quad (7)$$

dunque

$$\square'\varphi = g_{\mu\nu}(\Lambda_L)^\nu{}_\rho(\Lambda_L)^\mu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma \varphi \quad (8a)$$

$$= g_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma \varphi \quad (8b)$$

$$= \partial_\rho \partial^\rho \varphi \quad (8c)$$

$$= \square \varphi \quad (8d)$$

$$= 0 \quad (8e)$$

Le trasformazioni di Galilei sono invece rappresentate dalla matrice

$$(\Lambda_G)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Per queste trasformazioni di Lorentz quindi la relazione considerata in precedenza produce un risultato diverso

$$g_{\mu\nu}(\Lambda_G)^\nu{}_\rho(\Lambda_G)^\mu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} + K_{\rho\sigma}, \quad K_{\rho\sigma} \doteq \begin{bmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ -v^1 & (v^1)^2 - 1 & v^1 v^2 & v^1 v^3 \\ -v^2 & v^2 v^1 & (v^2)^2 - 1 & v^2 v^3 \\ -v^3 & v^3 v^1 & v^3 v^2 & (v^3)^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

perciò

$$\square' \varphi = g_{\mu\nu} (\Lambda_G)^\nu{}_\rho (\Lambda_G)^\mu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma \varphi \quad (11a)$$

$$= (g_{\rho\sigma} + K_{\rho\sigma}) \partial^\rho \partial^\sigma \varphi \quad (11b)$$

$$= \underbrace{\square \varphi}_0 + \underbrace{K_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma \varphi}_{\text{in generale } \neq 0} \quad (11c)$$

$$\neq 0 \quad (11d)$$

2 Esercizio 2

Consideriamo le trasformazioni generiche per i campi elettrico e magnetico:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}}' = \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} \\ \vec{\mathbf{B}}' = \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}}) - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} \end{cases} \quad (12)$$

Puramente elettrico \rightarrow puramente magnetico

Poniamo

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}} \neq 0 \\ \vec{\mathbf{B}} = 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{E}}' = 0 \\ \vec{\mathbf{B}}' \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

dunque per il campo elettrico

$$\vec{\mathbf{E}}' = \gamma \left(\vec{\mathbf{E}} + \cancel{\vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{B}}} \right) - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} \quad (14a)$$

$$= \gamma \vec{\mathbf{E}} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} \quad (14b)$$

$$\vec{\mathbf{E}}' = 0 \implies \vec{\mathbf{E}} = \frac{\gamma-1}{\gamma\beta^2} (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} \propto \vec{\beta} \implies \vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\beta} \quad (15)$$

mentre per il campo magnetico

$$\vec{\mathbf{B}}' = \gamma \left(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}} \right) - \frac{\gamma-1}{\beta^2} \cancel{(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta}} \quad (16a)$$

$$= -\gamma \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}} \quad (16b)$$

$$\vec{\mathbf{B}}' \neq 0 \implies \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}} \neq 0 \implies \neg(\vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\beta}) \quad (17)$$

Si arriva dunque a una contraddizione, i.e. non è possibile trasformare un campo puramente elettrico in un sistema di riferimento in uno puramente magnetico in un altro sistema di riferimento.

Onda elettromagnetica \rightarrow puramente elettrica/magnetica

Per le onde elettromagnetiche vale

$$\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{B}} \implies \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (18)$$

Se imponiamo che il campo elettrico sia nullo nel sistema di riferimento primato ma non lo sia quello magnetico, otteniamo

$$\vec{\mathbf{E}}' = 0 \quad (19a)$$

$$\gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} = 0 \quad (19b)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} = \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \quad (19c)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \quad (19d)$$

$$= \gamma \left(\cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}} + \cancel{\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}} \right) \quad (19e)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta}) = 0 \implies (\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\beta}) \wedge \vee (\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\beta}) \quad (20)$$

in quanto $\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

$$\vec{\mathbf{B}}' \neq 0 \quad (21a)$$

$$\gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}}) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} \neq 0 \quad (21b)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} \neq \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \quad (21c)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta}) \neq \vec{\mathbf{E}} \cdot \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \quad (21d)$$

$$\neq \gamma \left(\cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \cancel{\vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}}} \right) \quad (21e)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\beta})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\beta}) \neq 0 \implies \neg(\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\beta}) \wedge \neg(\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\beta}) \quad (22)$$

Il risultato è analogo ponendo nullo il campo magnetico e non nullo quello elettrico.

Si arriva dunque a una contraddizione, i.e. non è possibile vedere un'onda elettromagnetica come puramente elettrica o puramente magnetica in un altro sistema di riferimento.

3 Esercizio 3

qui

4 Esercizio 4

qui