Esercitazione 2

Elettrodinamica relativistica

A.A. 2023/2024

Simone Iovine

Indice

1 Esercizio 1

L'equazione delle onde per onde elettromagnetiche può essere scritta come

$$\Box\varphi \doteq \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0 \tag{1}$$

dove φ è una funzione scalare e il 4-gradiente è dato da

$$\partial_\mu \doteq \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \right) \tag{2}$$

dunque

$$\Box \doteq \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{3}$$

Al fine di verificare l'invarianza di questa equazione, la riscriviamo calcolata in un diverso sistema di riferimento (primato):

$$\begin{aligned}
\Box'\varphi &\doteq \partial'_\mu \partial'^\mu \varphi && \text{(4a)}\\
&= g_{\mu\nu} \partial'^\nu \partial'^\mu \varphi && \text{(4b)}\\
&= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \partial^\rho \Lambda^\mu{}_\sigma \partial^\sigma \varphi \qquad \partial^\mu \Lambda^\nu{}_\rho = 0 && \text{(4c)}\\
&= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \Lambda^\mu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma \varphi && \text{(4d)}
\end{aligned}$$

dove il tensore metrico per lo spazio piatto è dato da

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \tag{5}$$

Considerando delle trasformazioni di Lorentz, vale la relazione

$$g_{\mu\nu}{(\Lambda_L)^\nu}_\rho{(\Lambda_L)^\mu}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{6}$$

dove la matrice di trasformazione è data da

$$
{(\Lambda_L)^\mu}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta^1\gamma & -\beta^2\gamma & -\beta^3\gamma \\ -\beta^1\gamma & 1+A(\beta^1)^2 & A\beta^1\beta^2 & A\beta^1\beta^3 \\ -\beta^2\gamma & A\beta^2\beta^1 & 1+A(\beta^2)^2 & A\beta^2\beta^3 \\ -\beta^3\gamma & A\beta^3\beta^1 & A\beta^3\beta^2 & 1+A(\beta^3)^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{1}{c}\,(v^1,v^2,v^3) \\ \gamma \doteq \left(1-\left|\vec{\boldsymbol{\beta}}\right|^2\right)^{-1/2} \\ A \doteq \left|\vec{\boldsymbol{\beta}}\right|^{-2}(\gamma-1) \end{cases} \tag{7}
$$

dunque

$$
\begin{aligned}
\Box'\varphi &= g_{\mu\nu}{(\Lambda_L)^\nu}_\rho{(\Lambda_L)^\mu}_\sigma\partial^\rho\partial^\sigma\varphi && \text{(8a)}\\
&= g_{\rho\sigma}\partial^\rho\partial^\sigma\varphi && \text{(8b)}\\
&= \partial_\rho\partial^\rho\varphi && \text{(8c)}\\
&= \Box\varphi && \text{(8d)}\\
&= 0 && \text{(8e)}
\end{aligned}
$$

Le trasformazioni di Galilei sono invece rappresentate dalla matrice

$$
{(\Lambda_G)^\mu}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9}
$$

Per queste trasformazioni di Lorentz quindi la relazione considerata in precedenza produce un risultato diverso

$$
g_{\mu\nu}{(\Lambda_G)^\nu}_\rho{(\Lambda_G)^\mu}_\sigma = g_{\rho\sigma} + K_{\rho\sigma}, \quad K_{\rho\sigma} \doteq \begin{bmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ -v^1 & \left(v^1\right)^2-1 & v^1v^2 & v^1v^3 \\ -v^2 & v^2v^1 & \left(v^2\right)^2-1 & v^2v^3 \\ -v^3 & v^3v^1 & v^3v^2 & \left(v^3\right)^2-1 \end{bmatrix} \tag{10}
$$

perciò

$$
\begin{aligned}
\Box'\varphi &= g_{\mu\nu}(\Lambda_G)^{\nu}{}_{\rho}(\Lambda_G)^{\mu}{}_{\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi && \text{(11a)}\\
&= (g_{\rho\sigma} + K_{\rho\sigma})\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi && \text{(11b)}\\
&= \underbrace{\Box\varphi}_{0} + \underbrace{K_{\rho\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi}_{\text{in generale } \neq 0} && \text{(11c)}\\
&\neq 0 && \text{(11d)}
\end{aligned}
$$

2 Esercizio 2

qui

3 Esercizio 3

qui

4 Esercizio 4

qui