Esercitazione 2

Elettrodinamica relativistica

A.A. 2023/2024

Simone Iovine

Indice

1 Esercizio 1

L'equazione delle onde per onde elettromagnetiche può essere scritta come

$$\Box\varphi \doteq \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0 \tag{1}$$

dove φ è una funzione scalare e il 4-gradiente è dato da

$$\partial_\mu \doteq \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\boldsymbol{\nabla}}\right) \tag{2}$$

dunque

$$\Box \doteq \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{3}$$

Al fine di verificare l'invarianza di questa equazione, la riscriviamo calcolata in un diverso sistema di riferimento (primato):

$$\begin{aligned}
\Box'\varphi &\doteq \partial'_\mu \partial'^\mu \varphi && \text{(4a)}\\
&= g_{\mu\nu}\partial'^\nu \partial'^\mu \varphi && \text{(4b)}\\
&= g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho \partial^\rho \Lambda^\mu{}_\sigma \partial^\sigma \varphi && \text{(4c)}\\
&= g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho \Lambda^\mu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma \varphi \qquad \partial^\mu \Lambda^\nu{}_\rho = 0 && \text{(4d)}
\end{aligned}$$

dove il tensore metrico per lo spazio piatto è dato da

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \tag{5}$$

Considerando delle trasformazioni di Lorentz, vale la relazione

$$g_{\mu\nu}(\Lambda_L)^{\nu}{}_{\rho}(\Lambda_L)^{\mu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \tag{6}$$

dove la matrice di trasformazione è data da

$$(\Lambda_L)^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta^1\gamma & -\beta^2\gamma & -\beta^3\gamma \\ -\beta^1\gamma & 1+A(\beta^1)^2 & A\beta^1\beta^2 & A\beta^1\beta^3 \\ -\beta^2\gamma & A\beta^2\beta^1 & 1+A(\beta^2)^2 & A\beta^2\beta^3 \\ -\beta^3\gamma & A\beta^3\beta^1 & A\beta^3\beta^2 & 1+A(\beta^3)^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{1}{c}\,(v^1,v^2,v^3) \\ \gamma \doteq \left(1-\left|\vec{\boldsymbol{\beta}}\right|^2\right)^{-1/2} \\ A \doteq \left|\vec{\boldsymbol{\beta}}\right|^{-2}(\gamma-1) \end{cases} \tag{7}$$

dunque

$$\begin{aligned} \Box'\varphi &= g_{\mu\nu}(\Lambda_L)^{\nu}{}_{\rho}(\Lambda_L)^{\mu}{}_{\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi && \text{(8a)} \\ &= g_{\rho\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi && \text{(8b)} \\ &= \partial_{\rho}\partial^{\rho}\varphi && \text{(8c)} \\ &= \Box\varphi && \text{(8d)} \\ &= 0 && \text{(8e)} \end{aligned}$$

Le trasformazioni di Galilei sono invece rappresentate dalla matrice

$$(\Lambda_G)^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Per queste trasformazioni di Lorentz quindi la relazione considerata in precedenza produce un risultato diverso

$$g_{\mu\nu}(\Lambda_G)^{\nu}{}_{\rho}(\Lambda_G)^{\mu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} + K_{\rho\sigma}, \quad K_{\rho\sigma} \doteq \begin{bmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ -v^1 & (v^1)^2-1 & v^1v^2 & v^1v^3 \\ -v^2 & v^2v^1 & (v^2)^2-1 & v^2v^3 \\ -v^3 & v^3v^1 & v^3v^2 & (v^3)^2-1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

perciò

$$
\begin{aligned}
\Box'\varphi &= g_{\mu\nu}(\Lambda_G)^{\nu}{}_{\rho}(\Lambda_G)^{\mu}{}_{\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi && \text{(11a)}\\
&= (g_{\rho\sigma} + K_{\rho\sigma})\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi && \text{(11b)}\\
&= \underbrace{\Box\varphi}_{0} + \underbrace{K_{\rho\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\varphi}_{\text{in generale} \neq 0} && \text{(11c)}\\
&\neq 0 && \text{(11d)}
\end{aligned}
$$

2 Esercizio 2

Consideriamo le trasformazioni generiche per i campi elettrico e magnetico:

$$
\begin{cases}
\vec{\mathbf{E}}' = \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) - \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} \\
\vec{\mathbf{B}}' = \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) - \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}}
\end{cases} \tag{12}
$$

Puramente elettrico → puramente magnetico

Poniamo

$$
\begin{cases}
\vec{\mathbf{E}} \neq 0 \\
\vec{\mathbf{B}} = 0
\end{cases}
\quad \wedge \quad
\begin{cases}
\vec{\mathbf{E}}' = 0 \\
\vec{\mathbf{B}}' \neq 0
\end{cases} \tag{13}
$$

dunque per il campo elettrico

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\vec{\mathbf{E}} + \cancel{\vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}\right) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} && \text{(14a)}\\
&= \gamma\vec{\mathbf{E}} - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} && \text{(14b)}
\end{aligned}
$$

$$
\vec{\mathbf{E}}' = 0 \implies \vec{\mathbf{E}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} \propto \vec{\boldsymbol{\beta}} \implies \vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\boldsymbol{\beta}} \tag{15}
$$

mentre per il campo magnetico

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{B}}' &= \gamma\left(\cancel{\vec{\mathbf{B}}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}\cancel{(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})}\vec{\boldsymbol{\beta}} && \text{(16a)}\\
&= -\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}} && \text{(16b)}
\end{aligned}
$$

$$
\vec{\mathbf{B}}' \neq 0 \implies \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}} \neq 0 \implies \neg(\vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\boldsymbol{\beta}}) \tag{17}
$$

Si arriva dunque a una contraddizione, i.e. non è possibile trasformare un campo puramente elettrico in un sistema di riferimento in uno puramente magnetico in un altro sistema di riferimento.

Onda elettromagnetica → puramente elettrica/magnetica

Per le onde elettromagnetiche vale

$$\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{B}} \implies \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{18}$$

Se imponiamo che il campo elettrico sia nullo nel sistema di riferimento primato ma non lo sia quello magnetico, otteniamo

$$\begin{align}
\vec{\mathbf{E}}' &= 0 \tag{19a}\\
\gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} &= 0 \tag{19b}\\
\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} &= \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \tag{19c}\\
\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) &= \vec{\mathbf{B}} \cdot \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \tag{19d}\\
&= \gamma \left(\cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}} + \cancel{\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}} \right) \tag{19e}
\end{align}$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) = 0 \implies (\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}) \wedge \vee (\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}) \tag{20}$$

in quanto $\vec{\boldsymbol{\beta}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

$$\begin{align}
\vec{\mathbf{B}}' &\neq 0 \tag{21a}\\
\gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} &\neq 0 \tag{21b}\\
\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})\vec{\boldsymbol{\beta}} &\neq \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \tag{21c}\\
\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) &\neq \vec{\mathbf{E}} \cdot \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}) \tag{21d}\\
&\neq \gamma \left(\cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}} + \cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{E}}} \right) \tag{21e}
\end{align}$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}})(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) \neq 0 \implies \neg(\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}) \wedge \neg(\vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}) \tag{22}$$

Il risultato è analogo ponendo nullo il campo magnetico e non nullo quello elettrico.
Si arriva dunque a una contraddizione, i.e. non è possibile vedere un'onda elettromagnetica come puramente elettrica o puramente magnetica in un altro sistema di riferimento.

3 Esercizio 3

Le condizioni iniziali sono date da:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial x^\mu} = 0 \\
\dfrac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial x^\mu} = 0 \\
E < B \\
\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{B}} \implies \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0
\end{cases}
\tag{23}
$$

Suggerimento: trasformazione verso un sistema di riferimento con velocità

$$
\vec{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}{B^2} = \frac{E}{B}\,\hat{\mathbf{n}} \tag{24}
$$

Essendo $c\vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\mathbf{v}}$, abbiamo che $v = cE/B$. Dalla definizione della velocità del boost abbiamo anche che $\vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$.
Poniamo, nel sistema di riferimento del laboratorio, campo elettrico, campo magnetico e direzione del boost in una terna ortogonale nel seguente modo:

$$
\begin{cases}
\vec{\boldsymbol{\beta}} = (\beta, 0, 0) = \beta\,\hat{\mathbf{i}} \\
\vec{\mathbf{E}} = (0, E, 0) = E\,\hat{\mathbf{j}} \\
\vec{\mathbf{B}} = (0, 0, B) = B\,\hat{\mathbf{k}}
\end{cases}
\tag{25}
$$

Trasformando i campi, nel sistema di riferimento primato otteniamo

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right) - \frac{\gamma - 1}{\beta^2}\left(\cancel{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}}\right)\vec{\boldsymbol{\beta}} && \text{(26a)} \\
&= \gamma\left(E\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{E}{B}B\,\underbrace{\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{k}}}_{-\hat{\mathbf{j}}}\right) && \text{(26b)} \\
&= \gamma\left(E - \frac{E}{B}B\right)\hat{\mathbf{j}} && \text{(26c)} \\
&= \vec{\mathbf{0}} && \text{(26d)}
\end{aligned}
$$

$$\vec{\mathbf{B}}' = \gamma\left(\vec{\mathbf{B}} - \vec{\boldsymbol{\beta}}\wedge\vec{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma-1}{\beta^2}\left(\cancel{\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}}\right)\vec{\boldsymbol{\beta}} \tag{27a}$$

$$= \gamma\left(B\,\hat{\mathbf{k}} - \frac{E}{B}E\,\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\wedge\hat{\mathbf{j}}}_{\hat{\mathbf{k}}}\right) \tag{27b}$$

$$= \gamma B\left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{27c}$$

$$= \gamma B\left(\underbrace{1-\beta^2}_{\gamma^{-2}}\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{27d}$$

$$= (\gamma^{-2}B)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{27e}$$

A questo punto, nel sistema di riferimento primato si ha solo un campo magnetico, il quale fa muovere la carica in moto circolare uniforme:

$$\begin{cases} x'(t) = x'_0 + r\sin(\omega t' + \alpha) \\ y'(t) = y'_0 + r\cos(\omega t' + \alpha) \\ z'(t) = z'_0 + u_{0,z}t' \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi \doteq \omega t' + \alpha\omega \doteq \dfrac{ecB}{\mathcal{E}} = \dfrac{eB}{mc\gamma} \\ r \doteq \dfrac{u_0^\perp}{\omega} = \dfrac{mc}{eB}\gamma u_0^\perp = \dfrac{mc}{eB}\gamma\sqrt{(u_{0,x})^2 + (u_{0,y})^2} \\ \alpha \doteq \tan^{-1}\left(\dfrac{u_{0,y}}{u_{0,x}}\right) \end{cases} \tag{28}$$

dove $\vec{\mathbf{u}}'_0$ è la velocità iniziale della carica nel sistema di riferimento primato.
Nel sistema di riferimento del laboratorio la carica si muoverà dunque con un moto composto dal moto circolare uniforme più un moto accelerato nella direzione del campo elettrico: questo risulta in un moto di forma trocoidale, dove la *velocità di deriva* è data da $\vec{\boldsymbol{\beta}} = (E/B)\,\hat{\mathbf{i}}$

$$x^\mu = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\left(x'_0 + r\sin(\omega t' + \alpha) + \dfrac{E}{B}ct'\right) \\ \gamma\left(ct' + \dfrac{E}{B}(x'_0 + r\sin(\omega t' + \alpha))\right) \\ y'_0 + r\cos(\omega t' + \alpha) \\ z'_0 + u_{0,z}t' \end{bmatrix} \tag{29}$$

4 Esercizio 4

I campi elettrico e magnetico possono essere definiti in relazione ai potenziali scalare e vettore:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi \\ \vec{\mathbf{B}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\wedge\vec{\mathbf{A}} \end{cases} \tag{30}$$

Affinché siano entrambi nulli, possiamo considerare $\vec{\mathbf{A}}$ come gradiente di una funzione $g = g(\vec{\mathbf{x}})$, in quanto il rotore di un gradiente è sempre nullo. Moltiplicando questo per una funzione che dipende solo dal tempo $f = f(t)$, otteniamo

$$\vec{\mathbf{E}} = 0 \tag{31a}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{31b}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(f\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}g\right) \tag{31c}$$

$$= -\frac{1}{c}\dot{f}\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}g \tag{31d}$$

dunque possiamo porre

$$\varphi = -\frac{1}{c}\dot{f}(t)\,g(\vec{\mathbf{x}}) + h(t), \quad h = h(t) \tag{32}$$

Ponendo come moltiplicatore una funzione ξ tale che $\partial^\mu \xi = 0$, possiamo infine scrivere la forma del 4-potenziale ricercato

$$A^\mu = \xi\left(-\frac{1}{c}\dot{f}g + h, f\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}g\right) \tag{33}$$