Esercitazione 1

Elettrodinamica relativistica
A.A. 2023/2024

Simone Iovine

0.1 Esercizio 1

Riscriviamo la definizione della rapidità

$$y \doteq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E + cp_z}{E - cp_z}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \frac{v_z}{c}}{1 - \frac{v_z}{c}}\right) \tag{1}$$

nel seguente modo

$$e^{2y} = \frac{E + cp_z}{E - cp_z} = \frac{1 + \frac{v_z}{c}}{1 - \frac{v_z}{c}} \tag{2}$$

definendo

$$\beta \doteq \frac{u}{c} \tag{3}$$

dove u è la velocità del boost, abbiamo anche

$$e^{2\eta} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \tag{4}$$

Considerando il 4-momento

$$\vec{\mathbf{p}} = (E, c\vec{\mathbf{p}}) = (E, cp_x, cp_y, cp_z) \tag{5}$$

un boost lungo z può essere calcolato tramite la matrice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{6}$$

dunque

$$\vec{\mathbf{p}}' = \Lambda \vec{\mathbf{p}} \tag{7}$$

Le componenti che hanno subito un cambiamento saranno

$$\begin{cases} E' = \gamma(E - \beta c p_z) \\ c p'_z = \gamma(c p_z - \beta E) \end{cases} \tag{8}$$

Siccome i fasci sono incidenti, operiamo il cambiamento di segno $\beta \to -\beta$, da cui

$$\begin{cases} E' = \gamma(E + \beta c p_z) \\ c p'_z = \gamma(c p_z + \beta E) \end{cases} \tag{9}$$

A questo punto consideriamo la rapidità nel sistema di riferimento primato

$$\begin{align} e^{2y'} &= \frac{E' + c p'_z}{E' - c p'_z} \tag{10a} \\ & \tag{10b} \\ &= \frac{\gamma(E + \beta c p_z) + \gamma(c p_z + \beta E)}{\gamma(E + \beta c p_z) - \gamma(c p_z + \beta E)} \tag{10c} \\ & \tag{10d} \\ &= \frac{E + \beta c p_z + c p_z + \beta E}{E + \beta c p_z - c p_z - \beta E} \tag{10e} \\ & \tag{10f} \\ &= \frac{E + \beta c p_z + \beta(E + c p_z)}{E - \beta c p_z - \beta(E - c p_z)} \tag{10g} \\ & \tag{10h} \\ &= \underbrace{\frac{E + c p_z}{E - c p_z}}_{e^{2y}} \underbrace{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}_{e^{2\eta}} \tag{10i} \\ &= e^{2(y+\eta)} \tag{10j} \end{align}$$

$$e^{2y'} = e^{2y'} e^{2\eta} \implies y' = y + \eta \tag{11}$$

Analogamente, si può trovare la stessa soluzione usando la seconda definizione della rapidità. Consideriamo ancora il boost in z della 4-posizione

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{x}} = (ct, \vec{\mathbf{x}}) \\ \vec{\mathbf{x}}' = \Lambda \vec{\mathbf{x}} \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{cases} \tag{13}$$

da questi possiamo derivare la velocità nel sistema di riferimento primato

$$\frac{v'_z}{c} = \frac{z'}{ct'} = \frac{z - \beta ct}{ct - \beta z} = \frac{ct}{ct}\frac{\frac{z}{ct} - \beta}{1 - \beta\frac{z}{ct}} = \frac{\frac{v_z}{c} - \beta}{1 - \beta\frac{v_z}{c}} \tag{14}$$

Ancora una volta, siccome i fasci sono incidenti, operiamo il cambiamento di segno $\beta \to -\beta$, da cui

$$\frac{v'_z}{c} = \frac{\frac{v_z}{c} + \beta}{1 + \beta\frac{v_z}{c}} \tag{15}$$

A questo punto sostituiamo nella definizione della rapidità

$$e^{2y'} = \frac{1 + \frac{v'_z}{c}}{1 - \frac{v'_z}{c}} \tag{16a}$$

$$= \frac{1 + \frac{\frac{v_z}{c} + \beta}{1 + \beta\frac{v_z}{c}}}{1 - \frac{\frac{v_z}{c} + \beta}{1 + \beta\frac{v_z}{c}}} \tag{16b}$$

$$= \frac{1 + \beta\frac{v_z}{c} + \frac{v_z}{c} + \beta}{1 + \beta\frac{v_z}{c} - \frac{v_z}{c} - \beta} \tag{16c}$$

$$= \frac{1 + \beta + \frac{v_z}{c}(1 + \beta)}{1 - \beta - \frac{v_z}{c}(1 - \beta)} \tag{16d}$$

$$= \underbrace{\frac{1 + \frac{v_z}{c}}{1 - \frac{v_z}{c}}}_{e^{2y}} \underbrace{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}_{e^{2\eta}} \tag{16e}$$

$$= e^{2(y+\eta)} \tag{16f}$$

$$e^{2y'} = e^{2y'}e^{2\eta} \implies y' = y + \eta \tag{17}$$

0.2 Esercizio 2

Riscriviamo la formula per la sezione d'urto nel seguente modo

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}\,\frac{1}{v_{rel}\,n_1\,n_2} \tag{18}$$

Tutte le quantità riportate in questa formula sono misurate nel sistema di riferimento del laboratorio, il quale è solidale anche al bersaglio di densità n_2.
Sfruttando i fenomeni di dilatazione del tempo e contrazione delle lunghezze, possiamo riscrivere le quantità riportate nella formula nel sistema di riferimento solidale al fascio incidente di densità n_1:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\nu' = \mathrm{d}\nu \\ \mathrm{d}V' = \dfrac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}V \\ \mathrm{d}t' = \gamma\,\mathrm{d}t \\ n_1' = \dfrac{1}{\gamma}\,n_1 \\ n_2' = \gamma\,n_2 \end{cases} \tag{19}$$

questo perché:

- il numero di urti $\mathrm{d}\nu$ rimane costante indipendentemente dal sistema di riferimento considerato,
- il volume considerato dove si contano gli urti appare contratto per un osservatore solidale con il fascio in movimento a causa della velocità relativa,
- per lo stesso motivo, l'intervallo di tempo di misura appare dilatato,
- la densità di particelle del fascio incidente diminuisce in quanto il volume in cui questa viene calcolata è più grande rispetto al volume misurato nel sistema di riferimento solidale al laboratorio (il quale appare contratto a causa del movimento del fascio incidente rispetto al laboratorio),
- la densità di particelle del bersaglio invece aumenta per lo stesso motivo.

A questo punto, sostituendo le quantità calcolate nel sistema di riferimento solidale con il fascio incidente nella formula per la sezione d'urto calcolata in questo sistema, otteniamo

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}\nu'}{\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t'}\,\frac{1}{v_{rel}\,n_1'\,n_2'} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}V\,\gamma\,\mathrm{d}t'}\,\frac{1}{v_{rel}\,\frac{1}{\gamma}\,n_1\,\gamma\,n_2'} = \sigma \tag{20}$$

0.3 Esercizio 3

Equazione del moto

qui

Formula per l'accelerazione

Poniamo che la velocità $\beta \doteq u/c$ sia limitata all'asse z, dunque la trasformazione è data da

$$\begin{cases} c\,\mathrm{d}t' = \gamma(c\,\mathrm{d}t - \beta\,\mathrm{d}z) \\ \mathrm{d}z' = \gamma(\mathrm{d}z - \beta c\,\mathrm{d}t) \end{cases} \tag{21}$$

da questi possiamo derivare la velocità v nel sistema di riferimento primato v' come

$$v' = c\,\frac{\mathrm{d}z'}{c\,\mathrm{d}t'} = c\,\frac{\mathrm{d}z - \beta c\,\mathrm{d}t}{c\,\mathrm{d}t - \beta\,\mathrm{d}z} = c\,\frac{c\,\mathrm{d}t}{c\,\mathrm{d}t}\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}z}{c\,\mathrm{d}t} - \beta}{1 - \beta\dfrac{\mathrm{d}z}{c\,\mathrm{d}t}} = c\,\frac{\dfrac{v}{c} - \beta}{1 - \beta\dfrac{v}{c}} = \frac{v - \beta c}{1 - \beta\dfrac{v}{c}} \tag{22}$$

Usando

$$\gamma \doteq \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \implies 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \tag{23}$$

calcoliamo il differenziale della velocità

$$\mathrm{d}v' = \mathrm{d}(v - \beta c)\,\frac{1}{1 - \beta\dfrac{v}{c}} + (v - \beta c)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1 - \beta\dfrac{v}{c}}\right) \tag{24a}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{1 - \beta\dfrac{v}{c}} + (v - \beta c)\left(-\frac{1}{\left(1 - \beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\right)\left(-\frac{\beta}{c}\,\mathrm{d}v\right) \tag{24b}$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \beta\dfrac{v}{c}} + \frac{\left(\dfrac{v}{c} - \beta\right)\beta}{\left(1 - \beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\right)\mathrm{d}v \tag{24c}$$

$$= \frac{1 - \beta\dfrac{v}{c} + \beta\dfrac{v}{c} - \beta^2}{\left(1 - \beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}v \tag{24d}$$

$$= \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}v \tag{24e}$$

A questo punto possiamo calcolare l'accelerazione

$$
\begin{aligned}
a' &\doteq \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} && (25a)\\
&= \frac{\mathrm{d}v}{\gamma^2\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2}\frac{c}{\gamma(c\,\mathrm{d}t-\beta\,\mathrm{d}z)} && (25b)\\
&= \frac{c}{\gamma^3\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2(c\,\mathrm{d}t-\beta\,\mathrm{d}z)}\,\mathrm{d}v && (25c)\\
&= \frac{c}{\gamma^3\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^2 c\,\mathrm{d}t\left(1-\beta\underbrace{\dfrac{\mathrm{d}z}{c\,\mathrm{d}t}}_{v/c}\right)}\,\mathrm{d}v && (25d)\\
&= \frac{1}{\gamma^3\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^3}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} && (25e)\\
&= \frac{1}{\gamma^3\left(1-\beta\dfrac{v}{c}\right)^3}\,a && (25f)
\end{aligned}
$$

Essendo la velocità del boost la stessa della velocità di cui abbiamo operato la trasformazione, i.e. $\beta = v/c$, otteniamo

$$a' = \gamma^3 a \tag{26}$$

Accelerazione di un protone

qui

0.4 Esercizio 4

i