Energia

$$\begin{cases} \bar\nabla\wedge\bar E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar B}{\partial t} \\ \bar\nabla\wedge\bar B = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\bar J \end{cases}$$

$$\underbrace{\bar E\cdot\bar\nabla\wedge\bar B - \bar B\cdot\bar\nabla\wedge\bar E}_{-\bar\nabla\cdot\bar E\wedge\bar B} = \frac{1}{c}\bar E\cdot\frac{\partial\bar E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\bar E\cdot\bar J + \frac{1}{c}\bar B\cdot\frac{\partial \bar B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar E\cdot\bar E) = 2\bar E\cdot\frac{\partial\bar E}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+B^2) = -\frac{4\pi}{c}\bar E\cdot\bar J - \bar\nabla\cdot\bar E\wedge\bar B$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right) = -\bar J\cdot\bar E - \bar\nabla\cdot\bar S$$

$\bar S \doteq \frac{c}{4\pi}\bar E\wedge\bar B$ vettore di Pointing

volume

$$\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}\right)dV = \int\left(-\bar J\cdot\bar E - \bar\nabla\cdot\bar S\right)dV$$

Stokes

$$\int\bar\nabla\cdot\bar S\, dV = \int\bar S\cdot d\bar\sigma \xrightarrow{\sigma\to\infty} 0$$

flusso per superficie all'infinito $=0$

$$\int\bar J\cdot\bar E\, dV \xrightarrow{\text{discreto}} \sum_k \underbrace{\overbrace{e}\,\bar v_k\cdot\overbrace{\bar E}^{\text{forza}}}_{\text{potenza}} = \sum\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}$$

dunque

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\int\frac{E^2+B^2}{8\pi}dV}_{\text{energia campo e.m.}} + \underbrace{\sum_k\mathcal{E}_k}_{\text{energia cinetica}}\right) = 0$$

l'energia totale si conserva

$W \doteq \frac{E^2+B^2}{8\pi}$

densità di energia del campo e.m.

se $8\pi W = E^2+B^2$ cambia ma $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = E^2-B^2$ non cambia

allora l'energia si "sposta" da elettrica a magnetica e viceversa.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V\frac{E^2+B^2}{8\pi}dV + \sum_k\mathcal{E}_k\right) = -\int\bar S\cdot d\bar\sigma$$

il flusso del vettore di Pointing misura l'uscita di energia dal volume V

Esempi di campi e.m.

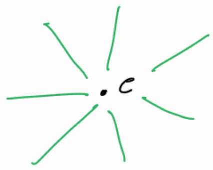
Campi fissi

$\bar\nabla\cdot\bar E = 4\pi\rho$

$\bar\nabla\wedge\bar E = 0$

$\bar E = -\bar\nabla\varphi \Rightarrow \bar\nabla\cdot(-\bar\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = 4\pi\rho \rightarrow \nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ eq di Laplace

una sola carica: $\bar\nabla\cdot\bar E = 4\pi\rho = 4\pi e\,\delta^3(\bar r)$



il campo deve essere radiale e dipendere solo dalla distanza dalla carica

$\bar E = \bar E(\bar r)$ $\quad \int_{sfera}\bar E\cdot d\bar\sigma = E\int_{sfera} d\sigma = E\,4\pi r^2$

$\bar E$ radiale $\Rightarrow \bar E \perp$ superf. sfera

$\int \bar E\cdot d\bar\sigma = \int \bar\nabla\cdot\bar E\,dV = \int 4\pi\rho\,dV = 4\pi e$

$E = \frac{e}{r^2}$ legge di Coulomb

$\int \bar\nabla\cdot\bar E\,dV = -\int \nabla^2\varphi\,dV = \int 4\pi e\,\delta^3(\bar r)\,dV \rightarrow \nabla^2\varphi = -4\pi e\,\delta^3(\bar r) \Rightarrow \varphi(r) = \frac{e}{r}$

in quanto $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^3(\bar r)$

principio di sovrapposizione: $\varphi = \frac{e}{r} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \sum_i \frac{e}{r_i} \\ \varphi = \int \frac{\rho}{r}\,dV \end{cases}$

Sistema di cariche (fisse)

cariche fisse $\Rightarrow \bar B = \bar 0$

$W = \frac{E^2+B^2}{8\pi}$ $\quad \mathcal{E} = \int w\,dV = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV = -\frac{1}{8\pi}\int \bar E\cdot\underbrace{(\bar\nabla\varphi)}_{-\bar E}\,dV$ $\quad \bar\nabla\cdot(\bar E\varphi) = \bar E\cdot(\bar\nabla\varphi) + \varphi\,\bar\nabla\cdot\bar E$

energie campi

$U = -\frac{1}{8\pi}\underbrace{\int \bar\nabla\cdot(\bar E\varphi)\,dV} + \frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\overbrace{\bar\nabla\cdot\bar E}^{4\pi\rho}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int\varphi(4\pi\rho)\,dV = \frac{1}{2}\int\varphi\rho\,dV \xrightarrow{\text{discreto}} \frac{1}{2}\sum_i e\varphi_i$

$\hookrightarrow \int \bar E\varphi\cdot d\bar\sigma \xrightarrow{V\to\infty} 0$

una particella: $U = \frac{1}{2}e\varphi = \frac{e^2}{2r} \Rightarrow \lim_{r\to 0} U(r) = +\infty \Rightarrow$ ~~massa infinita~~ autoenergia

si risolve tramite la rinormalizzazione

Per essere un effetto importante $\frac{e^2}{r} \sim mc^2 \rightarrow r \sim \frac{e^2}{mc^2}$ ma questo è un raggio più piccolo di quello a cui si misurano gli effetti quantistici

In generale $U = \sum_a e_a \varphi_a \longrightarrow \mathcal{E}_{\text{interazione}} = \overbrace{\sum_a \frac{e_a^2}{\underbrace{r_a}_{\text{costante}}}}^{\text{autointerazione}} + \overbrace{\sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{\underbrace{r_{ab}}_{\text{variabile}}}}^{\text{interazione a-b}}$

$r_a = 0$

non ci importa (anche se ∞) perché le costanti non influenzano le eqq di E-L