# Azione e Principio di Hamilton

meccanica classica: $\bar{x} = \bar{x}(t)$ ma $t$ cambia

meccanica relativistica: $\bar{x} = \bar{x}(s)$, $\quad ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ intervallo

nel SR della particella $ds^2 = c^2 d\tau^2$

per una particella massiva: $\quad x_1 - x_2 = u(t_1 - t_2) \Rightarrow ds^2 > 0$ linee tipo tempo

per fotoni: $\quad ds^2 = 0 \quad \Rightarrow$ non va bene come parametro

---

L'azione deve essere invariante (scalare covariante)

Particella libera: $\quad E = \frac{1}{2} m v^2 = L \quad (v \ll c)$

proviamo come azione $\quad S = -\alpha \int_a^b ds, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$ $\quad$ il segno meno permette a $S$ di avere un minimo

possiamo scrivere anche $\quad S = \int_a^b L\, dt$ $\quad$ non invariante

$\Downarrow$

$L$ non invariante $\because$ $S$ invariante

$$ds = c\, d\tau = \frac{c}{\gamma} dt \Rightarrow S = -\alpha c \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \Rightarrow L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \xrightarrow{v \ll c} -\alpha c \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \overbrace{-\alpha c}^{\text{cost.}} + \frac{\alpha}{2}\frac{v^2}{c}$$

cost. $\Rightarrow$ nella lagrangiana non servono (eqq. E-L hanno le derivate)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\alpha}{c} v^2 = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \alpha = mc \Rightarrow S = -mc \int_a^b ds$$

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

abbiamo usato il principio di relatività ($S$ invariante) e una particella libera perché semplice per derivare $\alpha$

## Principio di minima azione:

$$\delta S \propto \delta \int_a^b ds = 0$$

non variamo gli estremi: $\delta x_a = \delta x_b = 0$

$$\delta S \propto \delta \int_a^b \left(dx^\mu dx_\mu\right)^{1/2}$$

$$x^\mu \to (x')^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$d(x')^\mu = dx^\mu + d(\delta x^\mu)$$

$$\delta(dx^\mu) = d(x')^\mu - dx^\mu = \cancel{dx^\mu} + d(\delta x^\mu) - \cancel{dx^\mu} = d(\delta x^\mu)$$

$$\delta(dx^\mu) = d(x'^\mu) - dx^\mu = \cancel{dx^\mu} + d(\delta x^\mu) - \cancel{dx^\mu} = d(\delta x^\mu) \qquad \text{dunque}$$

$$\delta(ds) = \delta\left(\left(dx^\mu dx_\mu\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(dx^\mu dx_\mu\right)^{-1/2}\left(dx^\mu\,\delta(dx_\mu) + \delta(dx^\mu)\,dx_\mu\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{ds}\,\cancel{2}\,dx^\mu\,\delta(dx_\mu) = \underbrace{\frac{dx^\mu}{ds}}\,d(\delta x_\mu) = u^\mu\,d(\delta x_\mu)$$

per parti

può essere una variazione qualsiasi

$$\delta S \propto \int_a^b u^\mu\,d(\delta x_\mu) = \left[u^\mu \delta x_\mu\right]_a^b - \int \delta x_\mu\,du^\mu = -\int_a^b \frac{du^\mu}{ds}\,\overbrace{\delta x_\mu}\,ds = 0 \implies \frac{du^\mu}{ds} = 0$$

$0 \because \delta x_\mu\big|_a = \delta x_\mu\big|_b = 0$

$$\frac{du^\mu}{ds} = 0 \implies \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0$$

eq. Minkowski (nessuna interazione $\Downarrow$ 4-accelerazione nulla)

---

## Dinamica delle particelle

<u>momento</u> $\bar{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \bar{v}}$ $\quad \bar{v} = \dot{\bar{q}}$ in variabili canoniche $\qquad L = -mc^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

$V^2 = (V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \cancel{-}mc^2\,\cancel{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{\cancel{-}\cancel{2}V_x}{c^2}\right) = mc^2\gamma\,\frac{V_x}{c^2} = m\gamma v_x \implies \bar{p} = m\gamma\bar{v}$$

$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\cdot\dot{q} - L$

<u>energia</u>

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \bar{v}}\cdot\bar{v} - L = \bar{p}\cdot\bar{v} - \frac{mc^2}{\gamma} = m\gamma v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = m\gamma c^2\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$= m\gamma c^2\left(\cancel{\frac{v^2}{c^2}} + 1 - \cancel{\frac{v^2}{c^2}}\right) \implies \mathcal{E} = m\gamma c^2 \qquad \left(\text{per } \bar{v} = \bar{0} \implies \mathcal{E} = mc^2\right)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E} = m\gamma c^2 \\ \bar{p} = m\gamma\bar{v} \end{cases} \implies \bar{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\,\bar{v}$$

vale anche per $m=0$ $\left(\mathcal{E} = |\bar{p}|c \because |\bar{v}| = c\right)$

<u>Esempio:</u> $\dfrac{\mathcal{E}}{m} = \dfrac{1\ \text{TeV}}{1\ \text{GeV}} = \gamma c^2 \implies \gamma = \dfrac{\mathcal{E}}{mc^2}$

invariante $\longrightarrow$ massa invariante

<u>4-momento</u> $\quad p^\mu = (\mathcal{E}, \bar{p}c) \qquad p^2 = \overbrace{p^\mu p_\mu} = \mathcal{E}^2 - p^2c^2 = \overbrace{m^2c^4}$