Khairul Basar

Catatan Kuliah
FI2101 Fisika Matematik IA

Semester I 2015-2016

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung

Bab 1
Deret

Dalam banyak hal yang berkaitan dengan besaran fisis yang direpresentasikan dalam bentuk rumusan matematik, sering dijumpai bentuk yang merupakan penjumlahan sejumlah besaran lainnya. Misalnya dalam representasi gerak satu dimensi benda yang posisinya dinyatakan dengan $x(t)$ yang dapat konstan ($x(t) = x_0$), berbanding lurus terhadap waktu ($x(t) = x_0 + vt$) atau fungsi kuadrat terhadap waktu ($x(t) = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$). Kondisi lain yang lebih kompleks misalnya melibatkan suatu fungsi pangkat 3 atau lebih besar lagi. Terlihat bahwa untuk kondisi-kondisi tersebut, persamaan posisi benda dapat secara umum dinyatakan dalam bentuk penjumlahan (deret) yaitu

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \tag{1.1}$$

Deret tersebut menunjukkan suatu fungsi yang dinyatakan sebagai jumlahan dari suku-suku pangkat dari suatu variabel tertentu (dalam hal ini variabel t) dan hal ini dinamakan *Deret Pangkat*.

1.1 Deret Konvergen dan Divergen

Secara umum, deret merupakan rangkaian bilangan atau besaran. Suatu deret dapat mempunyai tak hingga suku atau mungkin juga berhingga. Hasil penjumlahan N buah suku pertama suatu deret biasanya disebut sebagai *partial sum* atau jumlah bagian, yaitu

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Suatu deret dikatakan konvergen jika rangkaian bilangan pada deret tersebut mempunyai **jumlah** yang berhingga (*finite*) untuk jumlah suku (N) yang tak hingga ($S = S_\infty$ mempunyai nilai tertentu yang berhingga). Sedangkan jika rangkaian bilangan tidak mempunyai jumlah yang tertentu (atau dengan kata lain tak berhingga) maka deret tersebut dinamakan deret divergen. Misalnya deret berikut ini adalah merupakan deret divergen

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

karena nilai S tidak menuju suatu bilangan tertentu. Sedangkan deret berikut ini adalah contoh deret konvergen

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

karena nilai S menuju suatu bilangan tertentu.

Contoh 1

Suatu deret geometri ditandai dengan perbandingan antara suku berurutan yang tetap (konstan). Hitunglah jumlah deret geometri berikut untuk $|r| < 1$ dan $N \to \infty$

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} ar^n$$

Jumlah bagian untuk deret tersebut adalah

$$S_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{N-1}$$

Jika jumlah bagian tersebut dikalikan dengan konstanta r (konstanta ini disebut rasio), maka akan diperoleh

$$rS_N = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^N$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} S_N - rS_N &= \left(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{N-1}\right) - \left(ar + ar^2 + \ldots + ar^N\right) \\ &= a - ar^N \\ S_N(1 - r) &= a(1 - r^N) \end{aligned}$$

diperoleh

$$S_N = \frac{a(1 - r^N)}{1 - r}$$

Terlihat bahwa jika $|r| < 1$ dan untuk $N \to \infty$ maka $r^N \approx 0$ sehingga untuk deret geometri dengan $|r| < 1$ diperoleh

$$S = S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{a}{1-r}$$

Contoh 2

Suatu bola dijatuhkan ke atas lantai dan memantul kembali ke atas dengan tinggi pantulan sepertiga dari ketinggian awal. Tentukan panjang lintasan total yang ditempuh bola hingga pantulan ke M.

Misalkan bola dilepas dari ketinggian awal h_0, maka ketinggian yang dicapai bola pada pantulan pertama adalah $\frac{h_0}{3}$. Sebelum terjadi pantulan ke dua, lintasan yang ditempuh bola adalah

$$S_2 = h_0 + 2\frac{h_0}{3}$$

Dapat dipahami bahwa panjang lintasan yang ditempuh bola sebelum pantulan ketiga adalah

$$S_3 = h_0 + 2\frac{h_0}{3} + 2\frac{h_0}{3^2}$$

dan seterusnya, sehingga diperoleh panjang lintasan yang ditempuh bola sebelum pantulan ke-n adalah

$$S_n = h_0 + 2\frac{h_0}{3} + 2\frac{h_0}{3^2} + 2\frac{h_0}{3^3} + \ldots + 2\frac{h_0}{3^{n-1}}$$
$$S_n = h_0 + 2h_0\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

1.2 Uji Konvergensi

Untuk $N \to \infty$, nilai S_N suatu deret dapat menuju suatu limit tertetu bisa juga membesar atau mengecil tanpa batas dan bisa juga berosilasi. Untuk mengetahui apakah suatu deret konvergen perlu dilakukan pengujian. Berikut dipaparkan secara singkat beberapa cara untuk pengujian konvergensi deret.

1.2.1 Uji Pendahuluan

Uji ini sebenarnya lebih tepat dikatakan sebagai uji non-konvergensi. Jika suku-suku suatu deret tidak menuju bilangan 0 (artinya jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$), maka deret tersebut pasti adalah deret divergen, tapi jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ diperlukan uji yang lain.

Misalnya deret

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$$

adalah deret yang divergen karena $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Sedangkan deret berikut ini

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

terlihat bahwa untuk $n \to \infty$ nilai $a_n = 0$ sehingga diperlukan uji lain untuk menentukan konvergensinya.

1.2.2 Uji Pembandingan

Untuk menggunakan uji ini diperlukan suatu deret yang telah diketahui konvergensinya. Cara ini merupakan cara pengujian yang paling mendasar. Misalnya suatu deret $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ adalah suatu deret positif yang telah diketahui merupakan deret konvergen dan deret yang ingin diuji konvergensinya adalah deret $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$. Maka jika $|a_n| \leq m_n$ dapat disimpulkan bahwa deret a adalah deret konvergen.

Misalnya tinjau suatu deret geometri berikut ini

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \tag{1.2}$$

jika deret tersebut dikalikan dengan $\frac{1}{2}$ maka akan diperoleh deret

$$\frac{1}{2}M = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

selanjutnya dengan mengurangkan kedua deret tersebut diperoleh

$$
\begin{aligned}
M - \frac{1}{2}M = \frac{1}{2}M & \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow M = 2$$

Karena jumlah suku-suku pada deret tersebut menuju nilai tertentu, ini berarti deret M tersebut adalah deret yang konvergen. Selanjutnya tinjau deret lain misalnya $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Terlihat bahwa suku-suku pada deret A selalu kurang dari atau sama dengan suku-suku deret M, yang berarti $|a_n| \leq m_n$. Dengan demikian jumlah deret A akan menuju bilangan tertentu yang kurang dari jumlah deret M, sehingga disimpulkan bahwa deret A adalah deret yang konvergen.

Sebaliknya jika suatu deret positif yang dinyatakan dengan $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$ telah diketahui sebagai deret yang divergen, maka deret lain misalnya $|b_1| + |b_2| + |b_3| + \ldots$ adalah juga deret divergen jika $|b_n| \geq d_n$. Misalnya tinjau suatu deret berikut

$$D = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

yang merupakan deret divergen karena $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Dan tinjau pula deret lain yaitu yang dikenal sebagai deret harmonik

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Perhatikan bahwa deret D tersebut dapat dituliskan dalam bentuk berikut

$$D = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Selanjutnya bila dibandingkan antara deret H dengan deret D maka akan dapat dinyatakan bahwa berlaku hubungan $|h_n| \geq d_n$. Dan karena D adalah deret yang divergen, maka artinya deret harmonik H juga adalah deret yang divergen.

Uji pembandingan merupakan uji yang paling dasar, namun biasanya tidak sering digunakan.

1.2.3 Uji Integral

Uji integral dapat digunakan bila deret yang akan diuji suku-sukunya adalah positif dan tidak membesar (artinya $a_{n+1} \leq a_n$). Perlu dicatat bahwa uji ini tetap dapat digunakan meskipun syarat tersebut tidak dipenuhi oleh semua suku (asalkan suku-suku yang tidak memenuhi tersebut jumlahnya berhingga). Dalam uji integral ini dinyatakan bahwa jika $0 < a_{n+1} < a_n$ untuk $n > N$, maka deret $\sum_n^{\infty} a_n$ akan konvergen jika nilai integral $\int^{\infty} a_n dn$ berhingga dan akan divergen jika nilai integral tersebut tak hingga. Pada uji integral ini, integral yang dihitung hanya pada batas atasnya saja.

Misalnya deret harmonik berikut ini

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Deret tersebut bila diuji dengan uji integral akan memberikan

$$\int^{\infty} \frac{1}{n} dn = \ln n \Big|^{\infty} = \infty$$

dengan demikian, berarti deret tersebut adalah deret divergen.

Contoh lainnya misalkan deret yang dinyatakan dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$. Uji integral untuk deret ini memberikan bentuk integral sebagai berikut

$$\begin{aligned}\int^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} dn &= \frac{1}{2} \int^{\infty} \frac{1}{n^3+1} d\left(n^3+1\right) \\ &= \ln\left(n^3+1\right)\Big|^{\infty} \\ &= \infty\end{aligned}$$

sehingga berarti deret tersebut adalah deret divergen.

Selanjutnya tinjau suatu deret yang dinyatakan dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{3}{2})^2}$. Bila digunakan uji integral pada deret (fungsi) ini, maka akan dapat dinyatakan

$$\begin{aligned}\int^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{3}{2})^2} dn &= \frac{-1}{n-\frac{3}{2}}\Big|^{\infty} \\ &= 0\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dengan demikian berarti deret tersebut adalah deret konvergen.

Contoh

Ujilah konvergensi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ menggunakan uji integral

Integral yang dihitung adalah

$$\begin{aligned}\int^{\infty} \frac{n}{n^2+4} dn &= \int^{\infty} \frac{n}{n^2+4} \frac{d(n^2+4)}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \int^{\infty} \frac{1}{n^2+4} d(n^2+4) = \frac{1}{2} \ln(n^2+4)\Big|^{\infty} \\ &= \infty\end{aligned}$$

Sehingga deret tersebut bersifat divergen.

1.2.4 Uji Perbandingan Relatif (Rasio)

Pada uji ini suku ke-n suatu deret dibandingkan dengan suku sebelumnya. Rasio antara suatu suku dengan suku sebelumnya, yaitu ρ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\rho_n &= \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ \rho &= \lim_{n\to\infty} \rho_n\end{aligned} \tag{1.4}$$

Konvergensi deret menggunakan uji rasio ini ditentukan sebagai berikut:

$$\text{Jika} \begin{cases} \rho < 1, & \text{deret tersebut konvergen} \\ \rho = 1, & \text{deret tersebut harus diuji dengan cara lain} \\ \rho > 1, & \text{deret tersebut divergen} \end{cases} \tag{1.5}$$

Misalnya suatu deret yang dinyatakan dengan $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$. Bila digunakan uji rasio, maka dapat dinyatakan perbandingan suatu suku dengan suku sebelumnya adalah

$$\begin{aligned}\rho_n =& \left|\frac{1}{(n+1)!} \div \frac{1}{n!}\right| = \frac{n!}{(n+1)!}\\ =& \frac{n.(n-1).\ldots.3.2.1}{(n+1).n.(n-1).\ldots.3.2.1} = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Dengan demikian berdasarkan uji rasio maka deret tersebut adalah deret yang konvergen karena diperoleh $\rho < 1$.

Contoh

Ujilah konvergensi deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ menggunakan uji perbandingan.

Deret tersebut dapat dituliskan sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120} + \ldots$$

Selanjutnya

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \div \frac{(2n)!}{n!}\right| = \left|\frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\right|$$

$$\begin{aligned}\rho =& \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)}\\ =& \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa deret tersebut adalah deret konvergen karena $\rho < 1$.

1.2.5 Uji Pembandingan Khusus

Pada uji ini suatu deret yang ingin diketahui konvergensinya dibandingkan dengan deret lain yang telah diketahui konvergensinya (baik berupa deret konvergen ataupun deret divergen). Uji ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

- Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret yang suku-sukunya tidak negatif ($a_n \geq 0$) sementara $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret positif yang konvergen dan a_n/b_n menuju suatu limit tertentu, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret konvergen.
- Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret yang suku-sukunya tidak negatif ($a_n \geq 0$) sementara $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ adalah deret positif yang divergen dan a_n/d_n menuju suatu limit tertentu (ataupun menuju $+\infty$), maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret divergen.

Perhatikan bahwa untuk menggunakan uji jenis ini diperlukan suatu deret pembanding yang telah diketahui konvergensinya (bersifat konvergen ataupun divergen).

Contoh 1

Ujilah konvergensi deret berikut $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2-5n+1}}{4n^3-7n^2+2}$.

Tinjau deret berikut sebagai pembanding $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2}}{n^3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Deret tersebut adalah deret positif yang bersifat konvergen. Pembandingan antara suku-suku kedua deret tersebut memberikan

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\sqrt{2n^2-5n+1}}{4n^3-7n^2+2} \div \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{n^2\sqrt{2n^2-5n+1}}{4n^3-7n^2+2} \\
&= \frac{n^2\sqrt{(n^2)2-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}{(n^3)\left(4-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{\sqrt{2-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}{4-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3}}
\end{aligned}$$

Selanjutnya bila diambil limitnya maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}{4-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Karena nilai limitnya berhingga dan deret pembanding yang digunakan adalah deret yang konvergen, maka deret $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2 - 5n + 1}}{4n^3 - 7n^2 + 2}$ adalah deret yang konvergen.

Contoh 2

Ujilah konvergensi deret berikut

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n - n^3}{n^5 - 5n^2}$$

Untuk dapat menentukan deret yang dapat digunakan sebagai pembanding, perlu diketahui sifat deret tersebut di atas untuk $n \to \infty$. Tinjau bagian penyebut deret tersebut di atas, yaitu $n^5 - 5n^2$. Untuk nilai n yang besar, maka bagian yang lebih dominan adalah n^5. Dengan demikian untuk deret pembanding, dapat digunakan deret yang bagian penyebutnya adalah n^5. Selanjutnya tinjau bagian pembilang yaitu $3^n - n^3$. Untuk $n \to \infty$ bagian yang lebih dominan adalah 3^n. Oleh karenanya bagian pembilang untuk deret pembanding dapat menggunakan bentuk 3^n. Dengan demikian untuk menguji konvergensi deret tersebut di atas dapat digunakan deret pembanding yaitu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$.

Selanjutnya deret pembanding tersebut diuji konvergensinya menggunakan uji perbandingan relatif (rasio), sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{(n+1)^5} \div \frac{n^5}{3^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3n^5}{n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1} \right| \\
&= 3
\end{aligned}$$

Karena $\rho = 3 > 1$, berarti deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$ adalah deret divergen.

Selanjutnya dengan menggunakan uji pembandingan khusus maka akan dapat diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n - n^3}{n^5 - 5n^2}\times\frac{n^5}{3^n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{n^3}{3^n}}{1-\frac{5}{n^3}}\right) = 1$$

Karena hasil limitnya sama dengan satu dan deret yang digunakan sebagai pembanding adalah deret divergen, maka berarti deret $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n - n^3}{n^5 - 5n^2}$ adalah deret divergen.

1.3 Deret Bolak-balik

Suatu deret bolak-balik adalah deret yang suku-sukunya bergantian positif dan negatif, misalnya

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$$

Terkait konvergensi dari suatu deret bolak-balik, ada dua hal yang perlu diperhatikan yaitu konvergensi deret tersebut sebagaimana adanya dan konvergensi deret tersebut bila diambil nilai mutlaknya. Jika suatu deret bolak-balik bersifat konvergen ketika diambil nilai mutlaknya maka disebut sebagai konvergen mutlak. Bila deret tersebut diambil harga mutlaknya maka deret tersebut akan menjadi deret harmonik yang merupakan deret divergen. Ini berarti deret tersebut di atas bukanlah deret konvergen mutlak.

Suatu deret bolak-balik konvergen jika nilai mutlak suku-sukunya terus berkurang dan menuju nol. Hal ini berarti suatu deret bolak-balik bersifat konvergen jika $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Jika suatu deret $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ bersifat konvergen maka deret $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ juga bersifat konvergen dan deret tersebut dinamakan deret yang konvergen mutlak (*absolutely convergent*). Sedangkan jika suatu deret $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$ bersifat divergen sementara deret $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ bersifat konvergen maka deret tersebut dinamakan deret konvergen bersyarat (*conditionally convergent*).

Contoh 1

Ujilah konvergensi deret bolak-balik berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Deret tersebut dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$$

Terlihat bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ dan nilai mutlak dari suku-suku pada deret tersebut terus berkurang yang berarti $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, dengan demikian deret tersebut adalah deret yang konvergen.

Contoh 2

Ujilah konvergensi deret berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$$

Deret tersebut dapat dituliskan kembali menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2} = -2 + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{32}{25} + \frac{64}{36} - \ldots$$

Karena suku-suku pada deret tersebut tidak monoton turun, maka deret tersebut adalah deret divergen.

1.4 Deret Konvergen Bersyarat

Tinjau kembali deret bolak-balik berikut

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

Deret bolak-balik tersebut suku-sukunya menuju nol ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) dan $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ sehingga bersifat konvergen. Namun bila diambil nilai mutlak dari deret tersebut maka akan diperoleh deret harmonik

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

yang merupakan deret yang divergen. Artinya deret bolak-balik tersebut di atas bersifat konvergen namun tidak konvergen mutlak. Ini disebut sebagai deret konvergen bersyarat (*conditionally convergent series*).

1.5 Deret Pangkat

Tinjau kembali deret pangkat misalnya yang ditunjukkan dalam persamaan 1.1

$$x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n$$

Konvergensi deret pangkat tersebut bila diuji dengan uji perbandingan relatif (rasio) adalah sebagai berikut

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}t}{c_n}\right|=|t|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

agar konvergen berarti syaratnya adalah

$$|t|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1$$

Hal ini berarti konvergensi suatu deret pangkat bergantung pada nilai variabel pangkatnya. Nilai variabel pangkatnya (dalam contoh di atas adalah variabel t) ini dapat tidak tunggal dan berupa interval tertentu. Oleh karenanya ada rentang nilai varibel t yang menyebabkan suatu deret pangkat konvergen. Rentang atau interval nilai ini disebut sebagai interval konvergensi (*interval of convergence*).

Contoh

Tentukanlah interval konvergensi deret

$$1+\frac{(x+2)}{\sqrt{2}}+\frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Bila menggunakan uji perbandingan relatif (rasio), maka dapat diperoleh

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \div \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| (x+2)\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right| = |x+2|$$

Berdasarkan uji perbandingan relatif, deret tersebut akan konvergen bila $\rho < 1$, maka berarti

$$|x+2| < 1 \Longrightarrow -3 < x < -1$$

Selanjutnya perlu juga diuji konvergensi deret tersebut pada batas interval yaitu untuk nilai $x = -3$ dan $x = -1$. Jika diambil nilai $x = -3$ maka deret tersebut menjadi deret bolak-balik

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

yang bila diuji dengan uji deret bolak-balik bersifat konvergen. Sedangkan bila diambil nilai $x = -1$ maka deret tersebut akan menjadi

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$$

yang bersifat divergen (dapat dilakukan dengan uji integral). Dengan demikian deret di atas tersebut konvergen untuk $-3 \le x < -1$.

Tinjau kembali deret pangkat tersebut di atas, koefisien c_0 dari deret pangkat tersebut dapat diperoleh sebagai berikut

$$x(0) = c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 + \ldots \Longrightarrow \; c_0 = x(0) \tag{1.6}$$

Selanjutnya bila fungsi $x(t)$ tersebut didifferensialkan terhadap t, kemudian hasilnya dihitung untuk $t = 0$ maka akan diperoleh

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \left(c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_3 t^3 + \ldots\right)\Big|_{t=0}$$
$$= c_1$$
$$\Longrightarrow c_1 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$$

Selanjutnya bila dicari turunan kedua fungsi $x(t)$ dan mengevaluasinya untuk $t = 0$ maka akan dapat diperoleh ungkapan untuk konstanta c_2

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0} &= \left(2c_2 + (3)(2)c_3t + (4)(3)c_3t^2 + \ldots\right)\Big|_{t=0} \\ &= 2c_2 \\ \Longrightarrow c_2 &= \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

Proses yang sama dapat dilakukan untuk mendapatkan konstanta c yang lain, secara umum akan dapat diperoleh bahwa

$$c_n = \frac{1}{n!}\frac{d^nx}{dt^n}\Big|_{t=0} \tag{1.7}$$

dengan $n! = (1)(2)(3)\ldots(n)$ dan $\dfrac{d^nx}{dt^n}$ menyatakan turunan ke-n dari fungsi x terhadap variabel t. Dengan demikian persamaan 1.1 tersebut di atas dapat dinyatakan kembali menjadi

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + t\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} + t^2\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d^nx}{dt^n}\Big|_{t=0}\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ungkapan persamaan 1.8 disebut sebagai uraian deret Taylor untuk $x(t)$ di sekitar $t = 0$ (atau disebut juga uraian deret *Maclaurin*). Persamaan tersebut dapat dipahami sebagai berikut: nilai suatu fungsi $x(t)$ pada t tertentu dapat diperoleh sebagai uraian deret pangkat dalam variabel t dengan koefisien deret pangkat yang diperoleh dari nilai turunan fungsi tersebut di $t = 0$. Dapat juga dipahami sebagai berikut: nilai suatu fungsi $x(t)$ di sekitar $t = 0$ dapat dihampiri (didekati) dari nilainya di $t = 0$ dengan menggunakan deret. Semakin jauh dari titik $t = 0$ diperlukan suku yang lebih banyak untuk mendapatkan hampiran yang mendekati nilai sesungguhnya dari fungsi $x(t)$.

Tinjau kembali persamaan 1.1, tentu saja fungsi $x(t)$ dapat pula dinyatakan dengan sedikit berbeda yaitu dengan mentranslasikan variabel t melalui suatu konstanta tertentu (misalnya t_0), yaitu

$$x(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-t_0)^n \tag{1.9}$$

Konstanta a_n juga dapat diperoleh menggunakan cara yang sama sebagaimana memperoleh konstanta c_n di atas, yaitu

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^nx}{dt^n}\Big|_{t=t_0} \tag{1.10}$$

Dengan demikian, fungsi $x(t)$ dinyatakan sebagai

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \frac{d^n x}{dt^n}\Big|_{t=t_0} \tag{1.11}$$

Persamaan tersebut merupakan ungkapan deret Taylor untuk fungsi $x(t)$ di sekitar $t = t_0$. Perhatikan bahwa jika $t_0 = 0$, maka persamaan tersebut akan kembali menjadi deret Maclaurin.

1.6 Ekspansi Fungsi Menggunakan Deret Pangkat

Persamaan 1.8 juga dapat dimaknai bahwa jika terdapat suatu fungsi kontinu yang mempunyai turunan, maka fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk deret pangkat. Hal ini membawa pengertian tentang mengekspansikan suatu fungsi dalam bentuk deret. Jika menggunakan uraian deret Maclaurin, maka suatu fungsi sembarang $f(x)$ dapat dinyatakan dalam deret pangkat sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=0} \tag{1.12}$$

Contoh 1

Ekspansikan fungsi $f(x) = \sin(x)$ dalam deret pangkat.

Karena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(x) &= \cos(x) \\ \frac{d^2}{dx^2}\sin(x) &= -\sin(x) \\ \frac{d^3}{dx^3}\sin(x) &= -\cos(x) \\ &\text{dst.} \end{aligned}$$

maka

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$$

Contoh 2

Ekspansikan fungsi $f(x) = e^x$ dalam deret pangkat.

Karena

$$\frac{df}{dx} = e^x, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = e^x, \qquad \frac{d^3 f}{dx^3} = e^x, \qquad \text{dst.}$$

maka diperoleh

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Deret pangkat dalam banyak hal dapat diperlakukan seperti polinom, misalnya: ditambah atau dikurangi, dan dikalikan. Selain itu variabel pada suatu deret pangkat juga dapat diganti (substitusi) untuk memperoleh deret pangkat yang lain.

Contoh 1

Ekspansikan fungsi $f(x) = e^x \sin(x)$ dalam deret pangkat.

Karena telah diperoleh sebelumnya ungkapan ekspansi deret pangkat untuk $\sin(x)$ dan untuk e^x, maka ekspansi untuk fungsi $f(x) = e^x \sin(x)$ dapat diperoleh dengan mengalikan kedua deret yang membentuknya, yaitu

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \ldots \end{aligned}$$

Contoh 2

Ekspansikan fungsi $f(x) = e^{\tan x}$ dalam deret pangkat

Uraian fungsi $\tan x$ menjadi deret pangkat dapat dilakukan langsung menggunakan persamaaan , tapi selain itu bisa juga dengan menggunakan hubungan trigonometri

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

dengan $\sin x$ dan $\cos x$ dinyatakan dalam bentuk deret sebagai berikut

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

sehingga

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}$$

diperoleh

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

Sedangkan bentuk uraian deret pangkat dari e^x adalah

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Dengan demikian akan diperoleh

$$\begin{aligned} e^{\tan x} =& 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots\right) + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots\right)^2}{2!} \\ &+ \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots\right)^3}{3!} + \dots \\ =& 1 + x + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^4 + \dots \\ =& 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \dots \end{aligned}$$

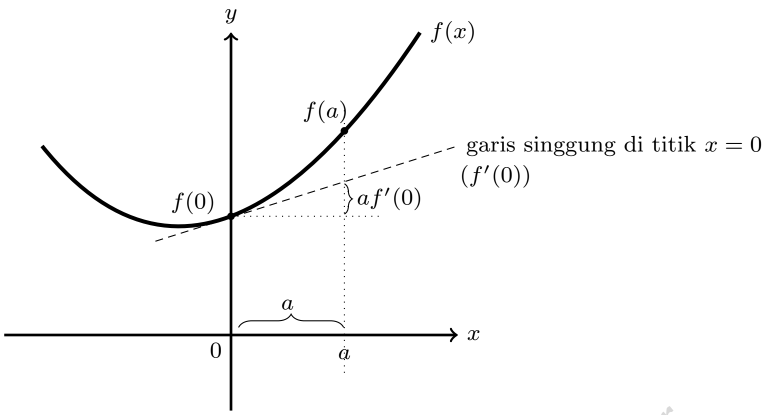
1.7 Penggunaan Deret Pangkat

Persamaan 1.6 menunjukkan bahwa nilai suatu fungsi $f(x)$ pada x tertentu dapat didekati dengan deret pangkat. Misalnya dengan mengambil $n = 1$ atau sampai suku kedua pada deret MacLaurin, maka nilai $f(x)$ untuk $x = a$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(a) \simeq f(0) + af'(0) \tag{1.13}$$

dengan $f'(0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}$ yang menyatakan gradien garis singgung fungsi $f(x)$ di titik $x = 0$. Ilustrasinya ditunjukkan dalam gambar 1.1. Terlihat bahwa nilai fungsi $f(x)$ pada $x = a$ dapat didekati menggunakan aproksimasi deret MacLaurin hanya jika nilai a sangat kecil. Jika a semakin besar (artinya titik a semakin jauh dari 0) maka diperlukan tambahan suku berikutnya dari deret MacLaurin agar diperoleh nilai hampiran (aproksimasi) yang lebih mendekati nilai sebenarnya fungsi tersebut. Jadi deret MacLaurin digunakan untuk mengaproksimasi nilai suatu fungsi di sekitar $x = 0$.

Untuk aproksimasi nilai suatu fungsi di sekitar $x = x_0 \neq 0$ digunakan uraian deret Taylor. Prinsipnya sama dengan uraian deret MacLaurin sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya.



Gambar 1.1 Aproksimasi nilai fungsi $f(x)$ pada $x = a$ menggunakan uraian deret pangkat (deret MacLaurin) sampai suku kedua. Dalam hal ini dapat dinyatakan $f(a) \simeq f(0) + af'(0)$.

Konsep deret pangkat juga digunakan untuk aprosimasi (hampiran) nilai numerik dan persoalan komputasi. Misalnya adalah dalam penghitungan nilai numerik suatu integral tertentu. Fungsi yang diintegralkan (integran) dapat dinyatakan dalam bentuk deret pangkat sehingga berbentuk polinom, kemudian baru dihitung nilai integral tertentunya.

Paket Soal Bab 1

1. Gunakan uji pendahuluan untuk menentukan apakah deret berikut divergen

   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+10n}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

2. Gunakan uji pembandingan untuk menentukan konvergensi deret berikut

   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ c. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

3. Gunakan uji integral untuk menentukan konvergensi deret berikut

   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+9}$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+9}}$

4. Gunakan uji perbandingan relatif (rasio) untuk menentukan konvergensi deret berikut

   a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n!)^2}$ c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}$

5. Gunakan uji pembandingan khusus untuk menentukan konvergensi deret berikut

   a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)^2(n+3)}$ b. $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^n-n^2}$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+4}{n^4+7n^3+6n-3}$

6. Gunakan uji deret bolak-balik untuk menentukan konvergensi deret berikut

   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$ b. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{10n}}{n+2}$

7. Tentukanlah interval konvergensi deret pangkat berikut

   a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3^n}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$

8. Uraikanlah fungsi berikut ini dalam deret pangkat di sekitar $x = 0$ (uraian deret Maclaurin)

   a. $\ln(1+x)$ b. $\tan^2 x$ c. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

9. Uraikan fungsi berikut dalam deret pangkat di sekitar titik yang dimaksud (uraian deret Taylor)

   a. $f(x) = \sin x$, di sekitar $x = \pi/2$
   b. $f(x) = e^x$, di sekitar $x = 3$
   c. $f(x) = \sqrt{x}$, di sekitar $x = 25$
   d. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, di sekitar $x = 8$
   e. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, di sekitar $x = 0$