

Группа Р3114 К работе допущен _____ Студент Нуруллаев Даниил Работа
выполнена

Преподаватель Коробков Максим Петрович

Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.

1. Провести многократные измерения определенного интервала времени.
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

- 1) **Провести 50 измерений, устанавливая промежуток времени в 5с.** Результат каждого измерения заносить во второй столбец Табл. 1;
- 2) **Построим гистограмму**, выполняя следующие действия:
 - **взять t_{min} и t_{max} из Табл. 1.**
 - **разбить промежуток на m равных интервалов**, где m должно быть близко к \sqrt{N} (N – число измерений). Измеренные значения t_{min} и t_{max} должны попадать внутрь «крайних» интервалов; Границы выбранных интервалов занесем в первый столбец Табл. 2
 - **подсчитаем число результатов измерений ΔN_i** , из Табл. 1, **попавших в каждый из интервалов Δt** , заполнив таким образом второй столбец Табл. 2;

- **вычислим опытное значение плотности вероятности** (третий столбец Табл. 2);
- построим на миллиметровой бумаге гистограмму.
- 3) По данным Табл. 1 **вычислим выборочное значение среднего $\langle t \rangle N$ и выборочное среднеквадратичное отклонение σN** ;
- 4) Запишем результат «в подвал» Табл.1;
- 5) По формуле (5) **вычислим максимальное значение плотности распределения ρ_{max}** , соответствующее $t = \langle t \rangle$, занесём его в «подвал» Табл. 1;
- 6) **Найдем значения t , соответствующие серединам выбранных ранее интервалов**, занесем их в четвертый столбец Табл. 2. Для этих значений, используя параметры $\langle t \rangle N$ и σN в качестве $\langle t \rangle$ и σ , **вычислим значения плотности распределения $\rho(t)$** , занесем их в пятый столбец Табл. 2. Нанесем все расчетные точки на график, на котором изображена гистограмма, и проведем через них плавную кривую;
- 7) Проверим, насколько точно выполняется в наших опытах соотношение между вероятностями и долями $\Delta N \sigma N, \Delta N 2\sigma N, \Delta N 3\sigma N$. Для этого **вычислим границы интервалов** для найденных вами значений $\langle t \rangle N$ и σN , занесем их во второй и третий столбцы Табл. 3;
- 8) По данным Табл. 1 **подсчитаем** и занесем в Табл. 3 **количество ΔN измерений**, попадающих в каждый из этих интервалов, и отношение $\Delta N/N$ этого количества к общему числу измерений. Сравним их с соответствующими нормальному распределению значениями P вероятности;
- 9) **Рассчитаем среднеквадратичное отклонение среднего значения**;
- 10) **Найдем табличное значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha, N}$** для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$. Запишем доверительный интервал для измеряемого в работе промежутка времени

3. Объект исследования.

Промежуток времени в размере 5 секунд

4. Метод экспериментального исследования.

Многократное измерение времени, заданного стрелочным секундомером, при помощи цифрового секундомера.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

1) Плотность вероятности $\rho(t)$:

$$\rho(t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta N}{N \Delta t} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}.$$

2) Плотность вероятности $\rho(t)$ метод измерения 2:

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t - \langle t \rangle)^2}{2\sigma^2} \right).$$

3) Максимальная плотность вероятности:

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}.$$

4) Коэффициент $t_{\alpha, N}$ – коэффициент Стьюдента, где α – доверительная вероятность:

$$\Delta t = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle},$$

5) Формула вероятности попадания точки в заданный отрезок:

$$P(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt \approx \frac{N_{12}}{N}$$

6) Стандартные вероятности попадания точки в интервалы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ для нормального распределения:

$$\begin{aligned} t \in [\langle t \rangle - \sigma, \langle t \rangle + \sigma], \quad P_\sigma &\approx 0,683 \\ t \in [\langle t \rangle - 2\sigma, \langle t \rangle + 2\sigma], \quad P_{2\sigma} &\approx 0,954 \\ t \in [\langle t \rangle - 3\sigma, \langle t \rangle + 3\sigma], \quad P_{3\sigma} &\approx 0,997 \end{aligned}$$

7) Среднее t :

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i,$$

8) Доверительная вероятность

$$\alpha = P(t \in [\langle t \rangle - \Delta t, \langle t \rangle + \Delta t]).$$

9) Среднеквадратичное отклонение среднего значения

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}$$

10) Выборочное среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}.$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Секундомер	Электронный	5 секунд	$\pm 0,005c$
2	Секундомер	Механический	5 секунд	$\pm 0,1c$

7. Результаты прямых измерений и их обработки (*таблицы, примеры расчетов*).

Смотреть excel таблицу

$$t_{min}=4,71c$$

$$t_{max}=5,27c$$

8. Расчет результатов косвенных измерений (*таблицы, примеры расчетов*).

Смотреть excel таблицу

Примеры расчетов:

Примечание: для расчетов, выполняемых многократно, указан пример вычисления для $n=1$.

$$\langle t \rangle_n = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{50} t_i}{50} = 4,988c$$

$$t_1 - \langle t \rangle_n = 4,71 - 4,988 = -0,278c$$

$$(t_1 - \langle t \rangle_n)^2 = (4,71 - 4,988)^2 = 0,077284c^2$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_n)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (t_i - \langle t \rangle_n)^2}{49}} = 0,128047c$$

$$\sigma_n^2 = 0,128047 * 0,128047 = 0,01639603c^2$$

$$\Delta N_1 / N \Delta t = 2 / (50 * 0,08) = 0,5c^{-1}$$

$$p_{max} = \frac{1}{\sigma_n * \sqrt{2\pi}} = \frac{1}{0,084 * \sqrt{2 * 3,1415}} = 3,16c^{-1}$$

$$t_1 = \frac{t_{1min} + t_{1max}}{2} = \frac{4,71 + 4,79}{2} = 4,75c$$

$$\rho(t_1) = \frac{1}{\sigma_n * \sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{(t_1 - \langle t \rangle_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{0,128 * \sqrt{2 * 3,1415}} * \exp\left(-\frac{(4,75 - 4,988)^2}{2 * 0,128 * 0,128}\right) = 0,53c^{-1}$$

$$\frac{\Delta N_{\sigma 1}}{N} = 34/50 = 0,68$$

$$\frac{\Delta N_{\sigma 2}}{N} = 48/50 = 0,96$$

$$\frac{\Delta N_{\sigma 3}}{N} = 50/50 = 1$$

9. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

Смотреть excel таблицу

СКО:

$$\sigma\langle t \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (t_i - \langle t \rangle)^2}{50 \cdot 49}} = 0,012 \text{ с}$$

Коэффициент Стьюдента:

$$t_{\alpha, N} = t_{0,95; 50} = 2,01 \text{ (табличное значение)}$$

Доверительный интервал случайной погрешности:

$$\Delta_{\bar{t}} = t_{\alpha, N} \cdot \sigma\langle t \rangle = 2,01 \cdot 0,012 = 0,024 \text{ с}$$

Смотреть png картинку

- Сравнение реальной гистограммы, идеальной гистограммы, графика функции Гаусса для вычисленных значений.

10. Окончательные результаты.

Рассмотрим полученные значения вероятностей попадания точек в стандартные интервалы σ_1 , σ_2 , σ_3 . Все три значения указывают на схожесть полученного распределения с нормальным: $0,68 \approx 0,683$; $0,96 \approx 0,954$; $1,0 \approx 0,997$.

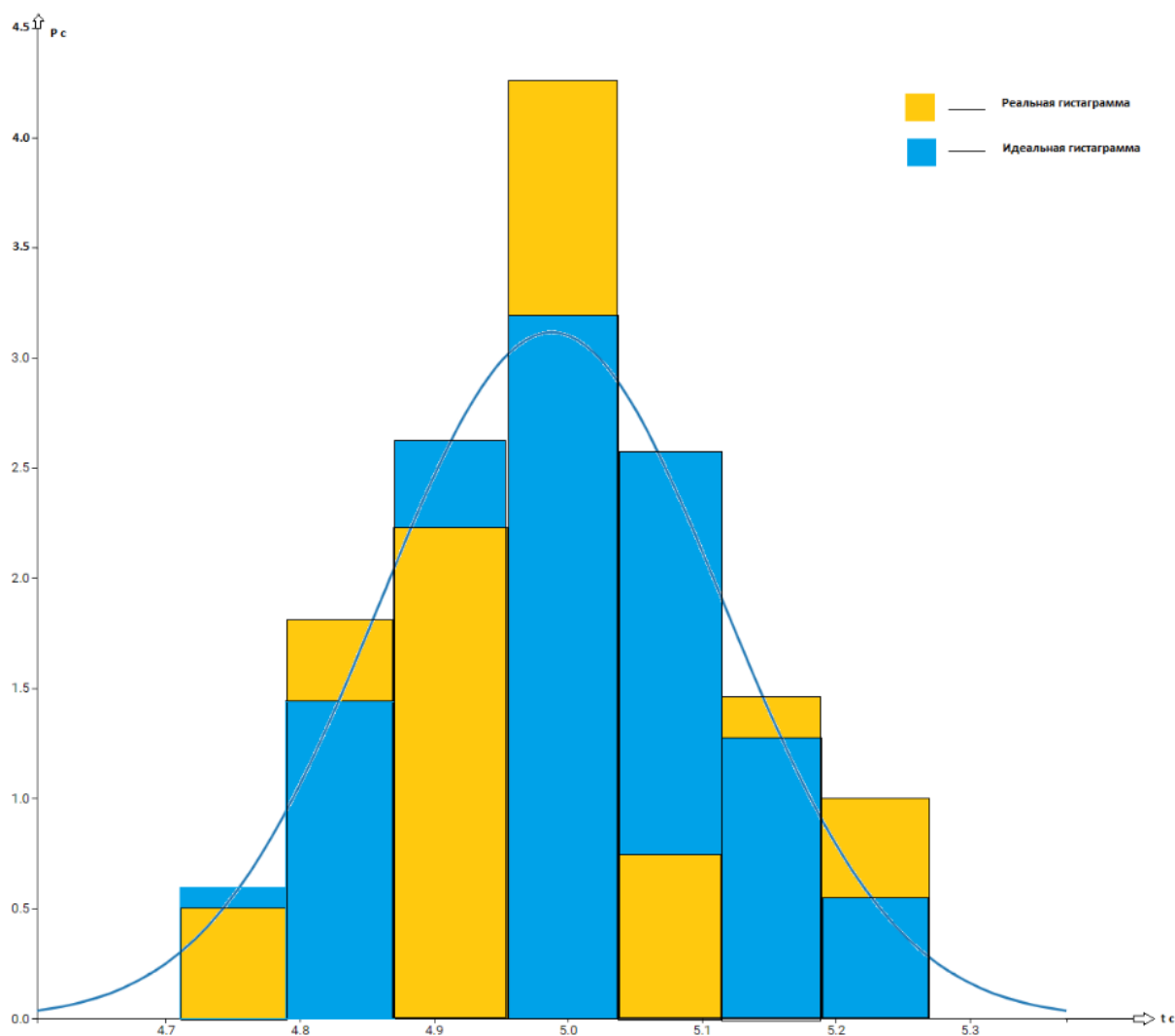
Сравним получившиеся гистограммы :диаграмма, полученная в результате измерений достаточно похожа на гистограмму нормального распределения (с такой же дисперсией и матожиданием).

11. Выводы и анализ результатов работы.

После сравнения гистограммы и графика функции Гаусса. Также проверив и сравнив вероятность попадания измеряемой величины в σ_1 ; σ_2 ; σ_3 с стандартными значениями для функции Гаусса, можно понять, что полученное распределение данной случайной величины проходит по закону нормального

распределения, но из-за погрешности гистограмма немного различна от графика функции Гаусса.

Погрешности в Гистограмме вызваны тем что я замеряя время не могу точно определить сколько прошло времени, здесь вина человеческого фактора.



№	ti, с	ti - <t>n, с	(ti - <t>n)^2, с^2	Границы интервалов с	ΔN	ΔN/NΔt, с^-1	t	p, с				
1	4,71	-0,278	0,077284	4,71								
2	4,78	-0,208	0,043264	4,79	2	0,5	4,75	0,553805				
3	4,79	-0,198	0,039204	4,79								
4	4,79	-0,198	0,039204	4,87	7	1,75	4,83	1,455211				
5	4,82	-0,168	0,028224	4,87								
6	4,83	-0,158	0,024964	4,95	9	2,25	4,91	2,588047				
7	4,85	-0,138	0,019044	4,95								
8	4,86	-0,128	0,016384	5,03	17	4,25	4,99	3,115269				
9	4,86	-0,128	0,016384	5,03								
10	4,88	-0,108	0,011664	5,11	5	1,25	5,07	2,538026				
11	4,88	-0,108	0,011664	5,11								
12	4,9	-0,088	0,007744	5,19	6	1,5	5,15	1,399502				
13	4,91	-0,078	0,006084	5,19								
14	4,91	-0,078	0,006084	5,27	4	1	5,23	0,52231				
15	4,91	-0,078	0,006084									
16	4,91	-0,078	0,006084	Интервал с								
17	4,92	-0,068	0,004624		от	до	ΔN	ΔN/N	P			
18	4,92	-0,068	0,004624	<t>N ± σn	4,859953	5,116046548	34	0,68	0,683			
19	4,95	-0,038	0,001444	<t>N ± 2σn	4,731907	5,244093095	48	0,96	0,954			
20	4,95	-0,038	0,001444	<t>N ± 3σn	4,60386	5,372139643	50	1	0,997			
21	4,96	-0,028	0,000784									
22	4,97	-0,018	0,000324									
23	4,98	-0,008	6,4E-05									
24	4,99	0,002	4E-06									
25	4,99	0,002	4E-06									
26	4,99	0,002	4E-06									
27	4,99	0,002	4E-06									
28	4,99	0,002	4E-06									
29	5	0,012	0,000144									
30	5,01	0,022	0,000484									
31	5,02	0,032	0,001024									
32	5,02	0,032	0,001024									
33	5,02	0,032	0,001024									
34	5,02	0,032	0,001024									
35	5,02	0,032	0,001024									
36	5,03	0,042	0,001764									
37	5,04	0,052	0,002704									
36	5,03	0,042	0,001764									
37	5,04	0,052	0,002704									
38	5,05	0,062	0,003844									
39	5,08	0,092	0,008464									
40	5,1	0,112	0,012544									
41	5,11	0,122	0,014884									
42	5,12	0,132	0,017424									
43	5,14	0,152	0,023104									
44	5,14	0,152	0,023104									
45	5,17	0,182	0,033124									
46	5,17	0,182	0,033124									
47	5,21	0,222	0,049284									
48	5,23	0,242	0,058564									
49	5,24	0,252	0,063504									
50	5,27	0,282	0,079524									
	<t>n	SUM (ti - <t>n) , с	Pmax, с^-1	σ, с	Δt							
	4,988	0,00	3,11564951	0,128047				0,08				

