Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский
университет информационных технологий, механики и оптики»

Информатика

Лабораторная работа №7
Работа с системой компьютерной вёрстки TEX

Нуруллаев Даниил Романович
P3114

Санкт-Петербург
2020

....емой волны. Амплитуды радиосигналов, принимаемых антенной от передатчиков, одинаковы. При одновременной работе передатчиков мощность принимаего сигнала меняется в очень широких пределах. Объясните явление и оцените суммарный процент времени, в течении которого мощность принимаемого сигнала составляет менее 1/1000 среднего значения принимаемой мощности. Отражением радиосигналов от земли пренебречь.

Р.Александров **Решение задач М1451-1460, Ф1468-1477**

М1451. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a,b не превосходит числа$\sqrt{a+b}$.

Пусть d - наибольший общий делитель чисел a и b.

Так как

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$$

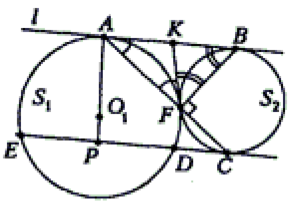
и ab делится на d^2, то a^2+b^2+a+b делится на d^2. Число a^2+b^2 также делится на d^2. Поэтому a+b делится на d^2 и $\sqrt{a+b}\geq d$.

А.Голованов, Е.Малинникова

М1452.Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Прямая l касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая, параллельная прямой l , касается S_2 в точке C и перекает S_1 в точках D и E. Докажите, что а)точки A, F и C лежат на одной прямой; б) общая хорда окружностей, описанных около треугольников ABC и BDE, проходит через точку F.

а)Первое решение. Так как касательные к окружности S в точках B и C параллельны, то BC - ее диаметр, и $\angle BFC=90$.Докажем, что и $\angle AFB=90$.Проведем через точку F общую касательную к окружностям(см.рисунок), пусть она пересекает прямую l в точке K.Из равенства отрезков касательных, приведенных к окружности из одной точки, следует, что треугольник AKF и BKF равнобедренные. Следовательно,

$$\angle AFB=\angle AFK+\angle KFB=\angle FAB+\angle FBA=180^\circ/2=90^\circ$$



Второе решение. Рассмотрим гомотетию с центром F и коэффициентом, равным -r_2/r_1, где r_1 и r_2 – радиусы окружностей S_1 и S_2. При этом гомотетии S_1 переходит в S_2, а прямая l – касательная к S_1 - переходит в паралельную прямую - касательную к S_2. Следовательно, точка A переходит в точку C, поэтому точка F лежит на отрезке AC.

б) Ниже мы покажем, что центр окружности BDE находится в точку A. Поскольку центр окружности ABC есть середина AC($\angle ABC=90^\circ$), а $\angle BFC=90^\circ$ (см.первое решение п. а)), отсюда будет следовать, что BF есть перпендикуляр, опущенный из общей точки окружностей BDE и ABC на прямую, соединяющею их общую хорду.

Итак, нам достаточно доказать, что AD=AE=AB. Первое Из этих равенств очевидно (ибо касательная к S_1 в точке A параллельна DE). Пусть r_1 и r_2 – радиусы S_1 и S_2. Опуская перпендикуляр AP на DE, найдем, что AP=BC=$2r_2$, и по теореме Пифагора для треугольников APD и O_1PD , где O_1 – центр S_1,

$PD^2=O_1D^2-O_1P^2=r_1^2-(2r_2-r_1)^2=4r_1r_2-4r_2^2$,

$AD^2=AP^2+PD^2=4r_1r_2$. Но легко найти, что общая касательная AB окружностей S_1 и S_2 равна $2\sqrt{r_1r_2}$.

А.Калинин, В.Дубровский

М1453. Существует ли квадратный трехчлен P(x) с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число P(n) также записывается одними единицами?

Ответ: существует.

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$P(x)=x(9x+2)$$

Если $n=\underbrace{11..11}_{k}$, то $9n+2=\underbrace{100..001}_{k-1}$.

Следовательно, $P(n)=\underbrace{11..11}_{k}*\underbrace{100..001}_{k-1}=\underbrace{11..11}_{2k}$.

Значит, этот квадратный трехчлен удовлетворяет условию.

А.Перлин

М1454. Прямоугольник m × n разрезан на уголки:

Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3.

Ясно, что если прямоугольник m × n разрезан на уголки, то mn делится на 3. Расставим в клетках прямоугольниках числа так, как показано на рисунке.

1	2	3	4	...	n-3	n-2	n-1	n
2	3	4	5	...	n-2	n-1	n	n+1
3	4	5	6	...	n-1	n	n+1	n+2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
m-1	m	m+1	m+2	...	m+n-5	m+n-4	m+n-3	m+n-2
m	m+1	m+2	m+3	...	m+n-4	m+n-3	m+n-2	m+n-1

Сумма всех этих чисел равна $mn(m+n)/2$. Сумма чисел, стоящих в уголке вида a, дает при делении на 3 остаток 2; сумма чисел, стоящих в уголке вида b, - остаток 1 (или, что то же самое, -2); сумма чисел, стоящих в уголках вида c и d, делятся на 3. Если n_a и n_b – количества уголков вида a и вида b соответственно, то сумма всех чисел в прямоугольнике имеет вид 3N + $2(n_a-n_b)$, где N – некоторое целое число. Из равенства.