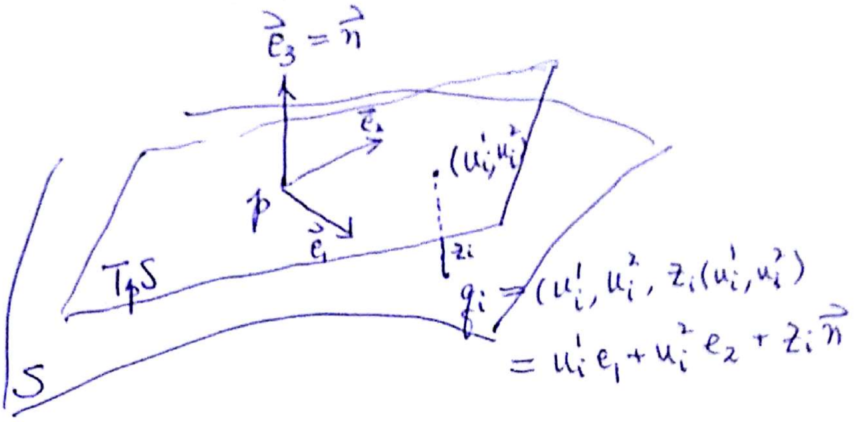
定义在3D空间上的函数的TV的表达式

Ⓐ



这里 $\vec{e_3}$ 是曲面S上点p处的单位法向量,

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 是曲面S上点p处的两个单位主方向.

所以作为p的邻近点 g_i, 它关于p处的标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 而言

$$\overrightarrow{g_i p} = u_i^1 e_1 + u_i^2 e_2 + z_i \vec{n},$$

即(邻近点) g_i 点关于这个标架的曲面坐标为 (u_i^1, u_i^2), 它关于切平面的高度为 z_i

所以我们可以由此确定出曲面S在p点处的局部形状为

$$z \approx \frac{1}{2}\left(k_1 (u^1)^2 + k_2 (u^2)^2\right),$$

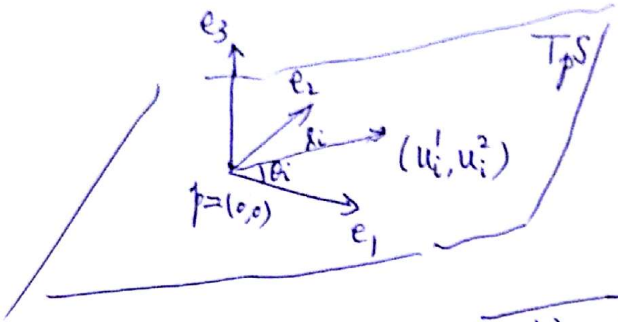
这里 k_1, k_2 分别是曲面S在p点处的主曲率.

(参看: C. Shen, Y. Peng and G. Zhang, Denoising point clouds pulling-back method, Proc. of SPIE, Vol. 7798, 779807)

如果我们已经得到了(根据邻近点 $\{g_i\}$ 的信息)在p点 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 及每个邻近点的局部坐标

(u_i^1, u_i^2) 及 $z_i(u_i^1, u_i^2)$, 那么我们可以用下列方法求曲面S上的函数f在p点处的Total Variation的表达式,

p 的邻近点 q_i 的曲面坐标为 (u_i^1, u_i^2)，所以从 $p=(0,0)$ 指向 (u_i^1, u_i^2) 的方向为 (u_i^1, u_i^2)，相应的单位向量为 (v_i^1, v_i^2)，则



$$v_i^\alpha = \frac{u_i^\alpha}{l_i}, \quad 其中\ l_i = \sqrt{(u_i^1)^2 + (u_i^2)^2},$$

而且

$$(v_i^1, v_i^2) = (\cos\theta_i, \sin\theta_i),$$
$$(u_i^1, u_i^2) = l_i (v_i^1, v_i^2).$$

设 f 为定义在 3D 点云上的一个函数，且记 $f(p) = f(0)$，
$f(q_i) = f(u_i^1, u_i^2)$，

则差商

$$M_i = \frac{f(u_i^1, u_i^2) - f(0)}{l_i} \approx \frac{\partial f}{\partial u^1}\cos\theta_i + \frac{\partial f}{\partial u^2}\sin\theta_i$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u^1} v_i^1 + \frac{\partial f}{\partial u^2} v_i^2 = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} v_i^\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ 上式按指标自动求和.$$

现在要去确定在p点处的梯度向量 $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u^1} \\ \frac{\partial f}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{p=0} \overset{记为}{=} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$，使得

$$\sum_{i=1}^{K} \left(X_1 v_i^1 + X_2 v_i^2 - M_i\right)^2 = \min,$$

（这里 K 是 p 的邻近点 q_i 的个数）

即 $$X^* = \underset{X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{K} \left(X_\alpha v_i^\alpha - M_i\right)^2.$$

$$\text{ⓒ}$$

对 X_α 求变分后得到

$$\sum_i (X_\beta v_i^\beta - M_i) v_i^\alpha = 0, \quad 即 \quad \sum_i v_i^\alpha v_i^\beta X_\beta = \sum_i M_i v_i^\alpha$$

令 $A = (a^{\alpha\beta})$（2×2阵），其中 $a^{\alpha\beta} = \sum_i v_i^\alpha v_i^\beta$

显然 A 是正定阵，所以必有逆阵 $A^{-1} = ((a^{-1})_{\alpha\beta})$

（这是因为 $\forall$ 向量 $P = (P_\alpha)$，

$$P^T A P = a^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta = \sum_i v_i^\alpha v_i^\beta P_\alpha P_\beta = \sum_i (v_i^\alpha P_\alpha)(v_i^\beta P_\beta) \geqslant 0.$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ $v_i^\alpha P_\alpha = 0, \ \forall i$.

显然 $v_i = (v_i^\alpha)$ 中至少有两个独立向量 v_i, v_j，则由 $P \perp P_i$, $P \perp P_j$，就可推出 $P \equiv 0$.）

令 $b^\alpha = \sum_i M_i v_i^\alpha$，于是 $AX = b$，即 $a^{\alpha\beta} X_\beta = b^\alpha$.

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u^1} \\ \frac{\partial f}{\partial u^2} \end{pmatrix} = X = A^{-1} b, \quad \therefore X_\beta = (a^{-1})_{\beta\alpha} b^\alpha = \sum_i (a^{-1})_{\beta\alpha} v_i^\alpha M_i$$

$$= \sum_i (a^{-1})_{\beta\alpha} v_i^\alpha \cdot \frac{f(q_i) - f(0)}{l_i}$$

因此函数 f 的梯度向量可看为其邻近点处的函数值 $f(q_i)$ 的带权平均值，

$$X_\beta = \sum_i \underbrace{\frac{(a^{-1})_{\beta\alpha} v_i^\alpha}{l_i}}_{\text{点 } q_i \text{ 的权}} f(q_i) - \underbrace{\sum_i \frac{(a^{-1})_{\beta\alpha} v_i^\alpha}{l_i}}_{\text{点 } P \text{ 处的权}} f(0)$$