第10回：推定

尚　晋
大学院経済学研究科　助教

2025年6月10日

今日のポイント

1. 点推定と区間推定

1 推定

「推定」とは，標本をもとに母集団分布の母数(母平均，母分散など)の値を定めることである．推定はデータから誤差を除去して信号(情報)を取り出すことがその基本であり，統計学のエッセンスといえる．

統計学と確率論の違い：母数の推定　統計学と確率論は密接に関係しているが，大きな違いの一つは，母集団の確率分布(母集団分布)を決めている定数，すなわち母数(parameter)を推定するかしないかである．

母数推定の重要性　確率分布が特定されても，その母数が未知では実用的価値は限定的である．

たとえば，ある集団の所得分布が対数正規分布あるいはパレート分布に従うといっても，その平均，分散が知られていなければ，現実の経済分析，政策評価に用いることはできない．「どの対数正規分布か」がわからないからである．

また，人間の身体計測値が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うといっても，その平均 μ，分散 σ^2 がわからなければ，洋服屋(テーラー)やスポーツ用品店，公衆衛生学者や関係者にとっては，ほとんど何の意味もない．

さらには，単位時間当りの電話の呼数，料金ゲートへの車の到着台数，交通事故や火災件数などが，ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うといっても，λ がわからなければ，電話会社，道路公団，生命・火災保険会社にとっては，現実のポリシーに何の役にも立たない．

このように，母数の推定は統計学の実用性において不可欠である．

母数の推定 このように，これから扱おうとする母集団の**母数**[1]は実際の問題では**未知**であり，これらを標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ から定める必要がある．これを母数の**推定**(estimation)という．

わかりやすい例として，標本平均や標本分散のように，母数を推定するために標本から求めた統計量を一般に**推定量**(estimator)と呼ぶ．

推定量の記法 われわれが推定しようとする母数には，母平均 μ，母分散 σ^2，母相関係数 ρ などいろいろなものがあるが，一般性を持たせる場合には，推定しようとするパラメータを θ で表すものとする．

推定量は，母数 θ に $\hat{}$(ハット)をつけて，$\hat{\theta}$ のように表す．たとえば，一例として，θ が母平均のとき，θ を推定するために，標本平均を

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \tag{1}$$

のように使うなど，である．

一般に $\hat{\theta}$ は $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の関数であるが，それをとくに強調する場合は $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ と書くこともある．

また，複数個の母数を同時に考える場合は，これらを $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$と，その推定量を $\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}, \ldots, \hat{\theta_k}$ と表す．たとえば，正規分布の μ, σ^2，ガンマ分布の α, β，2次元正規分布の $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ などである．

1.1 点推定と区間推定

母平均 μ を標本平均 $\overline{X}$ によって推定する場合のように，母集団の未知の母数 θ を推定する際，その推定値をある一つの値 $\hat{\theta}$ で指定する方法を **点推定**(point estimation)と呼ぶ．

標本平均 $\bar{X}$ によって母平均 μ を推定するように，$\hat{\theta}$ は標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の関数である．この関数は推定量と呼ばれ，確率変数であるため，現実の母数 θ の値と一致せず，実際の推定には何らかの誤差を伴う．

したがって，推定の精度を評価するために，この誤差についての取り扱いが必要であり，そのためには推定量の **標本分布**を考慮した確率的な分析が求められる．このような観点からは，**不偏推定量**や**一致推定量**といった評価基準が登場する．

一方，**区間推定**(interval estimation)は，真のパラメータの値が入る確率がある値$1-\alpha$以上と保証される区間$[L, U]$ を求める方法であり，最初からある程度の誤差を認めた推定法といえる．たとえば，

$$P(L \leq \mu \leq U) \geq 1 - \alpha \tag{2}$$

となるような区間 $[L, U]$ を求める．ここで，L, U は標本 $X_1, \ldots, X_n$ の関数，すなわち統計量であり，式 (38) の左辺の確率が $1-\alpha$ 以上となるように，標本分布から求められる．

以下では，まず点推定について説明し，その後に区間推定について述べる．

1.2 点推定の考え方と手順

1.2.1 推定量と推定値

母集団の母数を推定するために標本から求められる統計量を**推定量**と呼ぶ．たとえば，標本平均 $\overline{X}$ は母平均 μ の推定量，標本分散 S^2 は母分散 σ^2 の推定量である．母集団と標本は通常このように対応する．実際，

$$E(\overline{X}) = \mu, \quad E(S^2) = \sigma^2 \tag{3}$$

[1]母数 (parameter) を知れば母集団分布を知ったことになることを前提としている．これを**パラメトリック**parametricの場合という．しかし，ただ母平均のみを推定したい（母集団分布には関心がない）場合などは，パラメトリックではない．これを**ノン・パラメトリック**の場合という．

であるから，平均的に $\overline{X}$ は μ に，S^2 は σ^2 に一致する推定量である．推定量は標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の関数であり確率変数である．

一方で，実際に n 個の観測値が与えられたとき，推定量を数値として計算することができる．これを**推定値**(estimate)と呼ぶ．たとえば標本平均の場合，

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \tag{4}$$

は確率変数としての推定量であるが，$X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ が観測されたときに得られる具体的な数値が推定値である．われわれが現実のデータから計算するのはこの推定値であり，これは推定量のとりうる値の一つが実現したものである．

ここで問題となるのは，どのような統計量を推定量とするかである．推定量の候補は多数存在するが，当然のことながら真の母数に近い推定値が得られる推定量が望ましい．その評価基準については後述する．

1.2.2　点推定の手順

ここでは，推定量を求める手法として**モーメント法**と**最尤法**を紹介する．

モーメント法　モーメント法(method of moments)は，モーメントを通して母集団についての情報を吸い上げる，型どおりのオーソドックスな方法である．たとえば母集団が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，1次モーメント μ_1，2次モーメント μ_2 は以下で与えられる：

$$\mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = \mu^2 + \sigma^2 \tag{5}$$

一方，標本からはμ_1, μ_2の標本モーメントを：

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum X_i, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 \quad \text{(定義)} \tag{6}$$

で推定することを考えよう．$\mu_1 = \hat{\mu}_1, \mu_2 = \hat{\mu}_2$と母モーメント=標本モーメントと等しくおくと，母平均μと母分散σ^2の推定量が次のように得られる：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum X_i (= \bar{X}), \quad \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2 (= S^2) \tag{7}$$

このように，標本モーメントを用いて母数を推定する手法がモーメント法である．S^2は標本不偏でない分散．

最尤法　母集団分布がベルヌーイ分布 Bi$(1, p)$ に従うとし，観測値が $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0$ のとき，未知母数 p を推定する問題を考える．

このとき，標本が得られる確率(尤度関数)は：

$$L(p) = p^4(1-p)^1 \tag{8}$$

ここでわれわれが採用する原理は**最尤原理**principle of maximum likelihoodといわれ**「現実の標本は確率最大のものが実現した」**という仮定である．

たとえば $p = 0.2$ では $L(p) = 0.00128$，$p = 0.8$ では $L(p) = 0.08192$ となり，$p = 0.8$ の方が尤もらしい．このように，尤度関数を最大にする値を**最尤推定値**(maximum likelihood estimate)と呼び，その関数としては**最尤推定量**(maximum likelihood estimator)である．

尤度関数の一般形は，X_iの確率分布 $f(x_i, \theta)$を用いて，尤度関数はn個の確率関数の積($\prod$は連乗積を表す記号)：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \tag{9}$$

母数が複数存在する場合，$\theta_1, \ldots, \theta_k$ として：

$$L(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_k) \tag{10}$$

と表す．数学的に扱いやすくするために対数をとった対数尤度

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i, \theta) \tag{11}$$

を考えるのが普通である．

例： $X_i \sim \mathrm{Bi}(1, p)$で，成功した回数$r = \sum X_i$ のとき，尤度関数は：

$$L(p) = p^r (1-p)^{n-r} \tag{12}$$

数学的に扱いやすくするために対数をとった対数尤度：

$$\log L(p) = r \log p + (n-r) \log(1-p) \tag{13}$$

を最大にする p を求める．pに関して微分して0とおくと：

$$\frac{\partial \log L(p)}{\partial p} = \frac{r}{p} - \frac{n-r}{1-p} = 0 \tag{14}$$

から，pの最尤推定量は $\hat{p} = \frac{r}{n}$ となる．最初の問題で$r = 4, n = 5$なので、$\hat{p} = 0.8$が最尤推定値である。

1.3 点推定の基準(推定量の性質)

推定量は一つとは限らず、複数考えることができる。たとえば、身長の分布が正規分布 $N(\theta, \sigma^2)$ に従うと仮定し、平均値の母数 θ を推定したいとする。10人の身長を測定した結果、以下のようなデータが得られたとする(表 1)。

表 1: 10人の身長(架空例, 単位：cm)

164.6	161.6	169.7	162.1	164.8	159.8	170.7	162.2	168.7	174.9

θ の推定値の候補として以下のような統計量が考えられる：

- $\hat{\theta}_1$ = 標本平均 = 165.9
- $\hat{\theta}_2$ = メディアン = 164.7
- $\hat{\theta}_3$ = ミッドレンジ(最大値と最小値の平均) = 167.4
- $\hat{\theta}_4$ = 切落し平均(最大値・最小値を除いた平均) = 165.6

その他にも、三点平均、α切落し平均、幾何平均など様々な推定量が考えられるが、すべてが適切な推定量とは限らない。実用的に意味がある推定量であるためには、標本分布が真の母数 θ の周辺に集中しているを示すいくつかの基準を満足する必要がある．

以下の4つの基準は、推定量として望ましい性質である。

基準1：不偏性 推定量 $\hat{\theta}$ が母数 θ の不偏推定量であるとは、期待値が母数に一致することである：

$$E(\hat{\theta}) = \theta \tag{15}$$

すなわち、平均的に過大でも過小でもない推定を意味する。**不偏推定量**(unbiased estimator)と呼ぶ。

たとえば、母平均 μ と母分散 σ^2 に対して、n 個の無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ があるとき、

$$E(X_i) = \mu, \quad V(X_i) = \sigma^2 \tag{16}$$

標本平均 $\bar{X}$ は以下で与えられ：

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{17}$$

その期待値は：

$$E(\bar{X}) = \mu \tag{18}$$

したがって、$\bar{X}$ は常に母平均の不偏推定量である。
しかし、母分散 σ^2 の推定量としてモーメント法による以下の量：

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{19}$$

は期待値が：

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{20}$$

となるため、母分散を平均的に過小評価し、不偏ではない。(第8回の「統計量と標本分布」のところも記述)
この補正として、以下の不偏分散：

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{21}$$

を用いれば、

$$E(s^2) = \sigma^2 \tag{22}$$

となり、s^2 は母分散の不偏推定量である。

基準2：一致性　推定量 $\hat{\theta}_n$ が**一致推定量**(consistent estimator)であるとは、標本の大きさnが大きくなるに従い、推定量が真の母数θに確率収束することである：

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \tag{23}$$

このとき、確率論では，$\hat{\theta}_n$はθに確率収束するといい，$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$ と表す。すなわち、n が十分大きければ、$\hat{\theta}_n$ は真の母数に非常に近い値をとる可能性が高い。
モーメント法・最尤法で求められた推定量は、ほとんどの場合一致推定量である。
たとえば、$\bar{X}$ は大数の法則により μ に一致し、不偏分散s^2 も σ^2 の一致推定量である。
不偏性，一致性は推定量が最小限満たす必要のある二つの性質である.

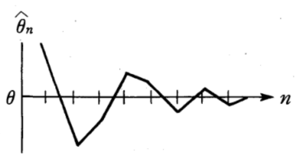

図 11.4　$\hat{\theta}_n$ が一致推定量である場合
不偏性と異なり，一致性は $\hat{\theta}$ の値が現実に n とともに θ に近づいていくことを要求している ($\hat{\theta}_n$ は n によることを示す).

基準3：漸近正規性　推定量の標本分布が明示的に分かることは望ましいが、複雑な場合は困難である。中心極限定理によって、漸近的には標本分布が正規分布であることが多い。漸近分布が正規分布である性質を**漸近正規性**(asymptotic Normality)と呼ぶ．このような性質をもつ推定量を**漸近正規推定量**(asymptotically normal estimator)と呼ぶ。
たとえば、中心極限定理によれば，$\bar{X}$ の漸近分布は，母集団分布に関係なく，以下の通り：

$$\bar{X} \overset{approx.}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{24}$$

したがって、$\bar{X}$ は漸近正規推定量である。

基準4：有効性　二つの推定量$\hat{\theta}$,$\tilde{\theta}$を考えたとき，まずは，両方とも不偏推定量であり，一致推定量であったとしよう．この場合，両者の分散を考えてその優劣を比較せざるをえない．

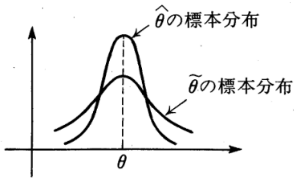

図 11.5　不偏かつ一致推定量の比較
二つの推定量 $\hat{\theta}$ と $\tilde{\theta}$ を比較する場合，$\hat{\theta}$ の標本分布の方が $\hat{\theta}$ の回りに集中しており，$\hat{\theta}$ の方が望ましい推定量である．これを，$\hat{\theta}$ は $\tilde{\theta}$ より有効である，という．

不偏推定量同士を比較する際、分散の小さい方が真の値の周囲に集中しており、より望ましいとされる。このとき、分散が最小の不偏推定量を**有効推定量**(efficient estimator)または**最小分散不偏推定量**(minimum variance unbiased estimator)と呼ぶ。

たとえば、母集団分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ のとき、標本平均 $\bar{X}$ は母平均 μ の有効推定量である。

ただし、有効推定量を実際に求めることは困難なことも多いため、漸近的な性質を考慮して、以下のような基準もしばしば用いられる。

漸近有効性(Asymptotic Efficiency)：

漸近的に正規分布に従う推定量のうち、最も分散が小さいものは、**漸近的有効推定量**と呼ばれる。最尤推定量は、一般に漸近的有効推定量である。

1.4　点推定の例

母集団分布が正規分布，二項分布，ポアソン分布，一様分布である場合（以上がパラメトリックの場合)，およびノン・パラメトリックの場合の推定量について説明する．

正規分布に関する推定　正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ は二つの未知の母数 μ（母平均)，σ^2（母分散）を含んでいる．このとき，尤度関数は

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{25a}$$

$$\log L(\mu, \sigma^2) = -n \log(\sqrt{2\pi\sigma^2}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \tag{25b}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = 0 \tag{25c}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = 0 \tag{25d}$$

最尤推定量は：

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \tag{26}$$

この場合，モーメント法でも同じ結果が得られる．得られた $\hat{\sigma}^2$ は不偏推定量ではないため，一般には：

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \tag{27}$$

を用いる．

二項分布に関する推定　ベルヌーイ分布 $Bi(1,p)$ に従うとき，尤度関数の対数は：

$$\log L(p) = \sum_{i=1}^{n} [X_i \log p + (1 - X_i) \log(1 - p)] \tag{28}$$

最尤推定量は：

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{29}$$

ポアソン分布に関する推定　母数 λ のポアソン分布 $Po(\lambda)$ のとき，尤度関数の対数は：

$$\log L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (-\lambda + X_i \log \lambda - \log X_i!) \tag{30a}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \tag{30b}$$

最尤推定量は：

$$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{31}$$

一様分布に関する推定　一様分布 $U(a,b)$ のとき：

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{32}$$

モーメント法により：

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}S, \quad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}S \tag{33}$$

なぜなら，モーメント法から$\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma^2} = S^2$がすでに得られているからである．

一方，最尤推定量は，求め方は略すが：

$$\hat{a} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad \hat{b} = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \tag{34}$$

この場合，モーメント法と最尤法は異なる推定量をもたらす．

ノン・パラメトリックの場合　パラメトリックの場合と異なり，ノンパラメトリックの場合は母集団分布の形がわからないため，最尤法は使えない．

$$\mu = E(X), \quad \sigma^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 \tag{35}$$

モーメント法によるμ, σ^2の推定量は：

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \tag{36}$$

ただし，不偏推定量としては：

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \tag{37}$$

1.5　区間推定

これまでの点推定は θ をある一つの値として推定するが，区間推定は θ に対して確率の考え方を用いた推定を行う．区間推定とは，真の母数の値 θ が，ある区間 (L, U) に入る確率を $1-\alpha$（α は θ が区間に入らない確率）以上になるように保証する方法であり，

$$P(L \leq \theta \leq U) \geq 1-\alpha \tag{38}$$

となる確率変数 L, U を求めるものである．L, U はそれぞれ，下側信頼限界（lower confidence limit），上側信頼限界（upper confidence limit）といわれる．
$1-\alpha$ は信頼係数(confidence coefficient)と呼び，区間 $[L, U]$ を $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間(confidence interval, CI)と呼ぶ．

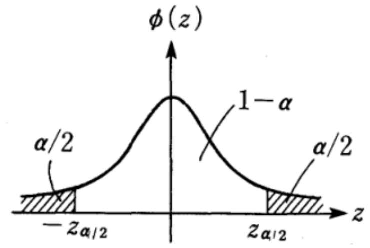

図 11.6　信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間の作り方．中心部分に“当り”の確率 $1-\alpha$ の領域を置く．

$1-\alpha$ は目的に応じた適当な値を選ぶが，通常は 0.99, 0.95，つまり 99%, 95% に設定されることが多い．信頼区間は，多くは θ の標本分布から求められるが，ここではわかりやすい例として，母集団分布が正規分布，二項分布，ポアソン分布の場合についてふれてみよう．

なお，同一の母集団から抽出した標本でも，標本ごとに信頼区間の推定値は変化する．θ は未知ではあるが決まった定数である．したがって，一つの標本から信頼区間を具体的な数値として推定してやれば，それは θ を含むか含まないかのいずれかである．すなわち，具体的に数値として計算した現実の信頼区間に対して，「$1-\alpha$ の確率で θ を含む」という言い方は正確ではない．信頼区間の意味は，繰り返し多くの異なった標本について信頼区間をここで述べた方法によって何回も計算した場合，θ を区間内に含むものの割合が $1-\alpha$ となるということである．

ところで，信頼区間の幅 $d = U - L$ は，α を一定とした場合，標本の大きさ nが大きくなるに従って小さくなり，通常，$1/\sqrt{n}$のオーダーで0に近づく．幅は短い方が推定は正確であり，したがって，n が大きければより正確に θ を推定できることになる．また，推定の誤差をある一定の値以下にするのに必要な n の大きさを求めることができ，実験や調査計画などに利用することもできる．

1.5.1　正規母集団の母平均，母分散の区間推定

母平均の信頼区間

$\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従うから，これを標準化すると，

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \tag{39}$$

となる．カッコ内の不等式を μ について解くと，

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \tag{40}$$

したがって，μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{41}$$

となる．

また，σ^2 が未知のときは標本分散を不偏分散の形で

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{42}$$

とすると，前回で述べたように $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/s$ は，自由度 $n-1$ の t 分布 $t(n-1)$ に従うから，

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha \tag{43}$$

となる．パーセント点 $t_{\alpha/2}(n-1)$ は付表2のt分布表から求める．これを μ について解くと，

$$P\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \tag{44}$$

したがって，母平均 μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\left[\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \tag{45}$$

となる．

⟨例⟩（製品の精度・強度：河田，丸山，鍋谷）

ある座金製造工場において，ある日に作られた座金から100個を抽出して厚さを測定したところ，$\bar{X}=2.346,\ s=0.047$ (mm) であった．母平均 μ の信頼係数90%の信頼区間を求めよ．

$t_{0.05}(99) \simeq z_{0.05} = 1.645$ に注意して，

$$2.346 \pm 1.645\cdot\frac{0.047}{\sqrt{100}} = 2.346 \pm 0.0078$$

より，信頼区間は[2.338, 2.354]となる：

母分散の信頼区間

$(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布 $\chi^2(n-1)$ に従うから，付表3のχ^2分布表より，

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha \tag{46}$$

これを σ^2 について解くと，母分散 σ^2 の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は以下となる：

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] \tag{47}$$

1.5.2　二つの正規母集団の母平均の差，母分散の比の区間推定

母平均の差の信頼区間

母集団分布が $N(\mu_1,\sigma^2)$ および $N(\mu_2,\sigma^2)$ である二つの正規母集団から，個別に標本 $X_1,X_2,\ldots,X_m$ および $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ を抽出したとき，母平均の差 $\mu_1-\mu_2$ の区間推定を考える．

- 母分散が等しいと仮定できる場合：
  合併分散 s^2 は次式で与えられる：

$$s^2 = \frac{1}{m+n-2}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2\right) \tag{48}$$

このとき，2標本t統計量

$$t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \tag{49}$$

は自由度 $m+n-2$ のt分布に従う．したがって，

$$P\left(-t_{\alpha/2}(m+n-2) \le \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \le t_{\alpha/2}(m+n-2)\right) = 1-\alpha \tag{50}$$

これを $\mu_1-\mu_2$ について解くと，信頼区間は：

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(m+n-2)\cdot s\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(m+n-2)\cdot s\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right] \tag{51}$$

- 母分散が等しいと仮定できない場合（Welchの方法）：
  標本分散：

$$s_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2,\quad s_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2 \tag{52}$$

  Welchの統計量：

$$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n}}} \tag{53}$$

  近似自由度（Welch–Satterthwaite の式）：

$$\nu^*=\frac{(\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n})^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_1^2}{m}\right)^2+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s_2^2}{n}\right)^2} \tag{54}$$

  このとき信頼区間は下記となる：

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(\nu^*)\cdot\sqrt{\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(\nu^*)\cdot\sqrt{\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n}}\right] \tag{55}$$

母分散の比の信頼区間

前回で述べたように，

$$\frac{s_2^2/\sigma_2^2}{s_1^2/\sigma_1^2}=\frac{s_2^2}{s_1^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \tag{56}$$

は自由度 $(m-1,n-1)$ のF分布に従う．よって，

$$P(F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)\le\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{s_1^2}{s_2^2}\le F_{\alpha/2}(m-1,n-1))=1-\alpha \tag{57}$$

これを σ_2^2/σ_1^2 について解くと，信頼区間は：

$$\left[\frac{s_2^2}{s_1^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)},\ \frac{s_2^2}{s_1^2}\cdot F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\right] \tag{58}$$

例：2種類のマニラ麻の破断強度を調べる　次のような2種類のマニラ麻のデータを得た：

- 第1の種類: 254, 218, 244, 259, 241
- 第2の種類: 240, 249, 223, 237, 202, 226, 256

正規母集団を仮定し，step1として、まずは母分散の比 σ_2^2/σ_1^2 の信頼区間を求める．標本分散は，

$$s_1^2=251.7,\quad s_2^2=326.6$$

$F_{0.05}(4,6)=4.53,\ F_{0.95}(4,6)=1/F_{0.05}(6,4)=1/6.16$ に注意して，

$$\left[\frac{326.6}{251.7}\cdot\frac{1}{6.16},\ \frac{326.6}{251.7}\cdot 4.53\right]=[0.211,\ 5.878]$$

これは 1.0 を含むので，$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ と仮定することは許される．
次に，step2として、$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ を仮定して，母平均の差 $\mu_1-\mu_2$ の90%信頼区間を求める：

$$\bar{X}=243.2,\quad \bar{Y}=233.26,\quad t_{0.05}(10)=1.812$$

なので、合併分散を用いて、信頼区間：

$$\mathrm{CI} = 243.2 - 233.26 \pm 1.812 \cdot \sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})\frac{4\times 251.7 + 6\times 326.6}{4+6}}$$

を計算すればいい．よって，信頼区間は：

$$[-8.34,\ 28.22]$$

信頼区間が0を含むため、統計的には、この2種類のマニラ麻の破断強度に有意な差があるとは言えない。つまり、破断強度の観点からは、2種類のマニラ麻の性能に差はないと判断される。

(**この結果は皆さんも計算してみてください**，先生が計算した結果は教科書と異なっている．教科書の結果は[9.7312, 10.0968]であり，これは0を含まないので、結論は全然違うことになってしまう．信頼区間[9.7312, 10.0968]は0を含まないため、統計的には2種類のマニラ麻の破断強度には有意な差があると判断される．)

1.5.3　二項・ポアソン母集団の各母数の信頼区間

母集団分布が母数 p のベルヌーイ分布 $\mathrm{Bi}(1,p)$ のとき，すでに述べたように $\hat{p}=\bar{X}$ で推定する．この場合，再生性から $\sum X_i$ は $\mathrm{Bi}(n,p)$ に従うが，これから直接 p の信頼区間を求めることは，とくに n が大きいときはかなり難しい．

一般には中心極限定理を使って信頼区間を近似的に求める．

二項分布 $\mathrm{Bi}(1,p)$ に従う確率変数 X_i は，母平均 p，母分散 $p(1-p)$ であるから，中心極限定理によって，

$$\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{59}$$

が成り立ち，したがって，

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \tag{60}$$

これより，$\bar{X}=\hat{p}=\frac{1}{n}\sum X_i$ として p について解くと，

$$P\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha \tag{61}$$

となる．これは未知の母数 p が区間の中に含まれているが，$\hat{p}$ は大数の法則により p の一致推定量であるため，n が十分に大きければ $p\approx\hat{p}$ と考えられる．したがって，

$$P\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \approx 1-\alpha \tag{62}$$

より，信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間は近似的に，

$$\left[\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] \tag{63}$$

で求められる．

母集団分布が母数 λ のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ である場合，平均・分散ともに λ であるから，中心極限定理によって，

$$\frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

が n が大きいときに成り立つ．したがって，λ の推定量 $\hat{\lambda}=\bar{X}$ を使えば，信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は近似的に，

$$\left[\hat{\lambda} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}},\ \hat{\lambda} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}\right] \tag{64}$$

で求められる.