第4回：確率

尚　晋
大学院経済学研究科　助教

2025年5月13日

今日のポイント

1. ランダムネスと確率
2. 標本空間と事象
3. 確率の定義
4. 加法定理
5. 条件付き確率と独立性

1 ランダムネスと確率

- 統計学や確率論では起りうることがらを**事象**と呼ぶが，これは集合を使って**確率**に基づいて行われる．これは**統計的推測**の基本である．
- 例：カード52枚中40枚を当てた人が偶然かどうかは，「40」という数の**確率論的意味**が重要．
- 確率論に基づいて計算した結果は標準正規分布の上側確率0.0005， 極めて小さい確率で起きる事象は，偶然とは言い難い．
- このような判断のために確率の知識を必要とする．本章は**確率**について基本的事項をまとめる．
- 「確率」と関係の深い概念に**「ランダム性」**がある．**ランダム性**とは，次に何が起こるか確定的に予測できないこと．例：コインを投げて表か裏かを事前に言い当てるのは困難．
- ただし，ランダム性には法則性があり，それに基づいて確率論が成り立つ．
- 即ち，確率論は「ランダム性そのもの」ではなく，**「ランダム性の法則」**を扱い，統計学はそれを利用する．

2　標本空間と事象

2.1　標本空間と事象

標本点 ある実験において起こりうる結果のこと．一般的に，ωで表す．例えば，サイコロを一回投げた可能な結果は，$1, 2, 3, 4, 5, 6$.

標本空間(全事象) 標本点全体の集合のこと．一般的に，Ωで表す．例(1)，サイコロを一回投げた例では，標本空間は$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.一般化したもの：$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$
標本空間が連続的な標本点からなる無限集合のことも多い．例(2)，電球の寿命の標本空間は，$\Omega = (0, \infty)$

事象 標本点ωを組み合わせてできる集合のこと，即ち，事象は標本空間の部分集合．例えば，サイコロを一回投げた場合，「出た目が奇数である」という事象$A = \{1, 3, 5\}, A \subset \Omega$,

空事象 空集合の事象のこと．一般的に，ϕで表す,

根元事象 ただ一つの標本点からなり分解できない事象のこと．例えば，サイコロ2回投げた場合，$(1, 2)$は標本点の一つとなり，さらに分解すると，$\{1\}, \{2\}$は根本事象.

2.2　事象の演算

排反 標本空間Ω上の二つの事象AとBについて,AとBが同時に起こりえない場合、AとBは互いに排反という．例えば，サイコロを一回投げた可能な結果は，事象Aは奇数出る，事象Bは偶数でる．この二つの事象は排反事象という．ベン図で表すと，図4.1.

和事象 AとBの二つの事象のうち少なくとも一つが起るという事象．$A \cup B$で表す．ベン図で表すと，図4.2の灰色の部分．例，さいころを1回投げる場合，Aを奇数の目が出るという事象，Bを3以下(3を含め)の目が出るという事象とすると，$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

積事象 A と B が同時に起るという事象．$A \cap B$で表す．例，さいころを1回投げる場合，Aを奇数の目が出るという事象，Bを3以下の目が出るという事象とすると，$A \cap B = \{1, 3\}$，ベン図の図4.3になる．もしAとBが排反事象である場合，$A \cap B = \phi$.

補事象 事象Aが起らないという事象をAの補事象という．A^cで表す．事象A図4.4と補事象A^cの関係は図4.5になる．

三つの事象の分配法則

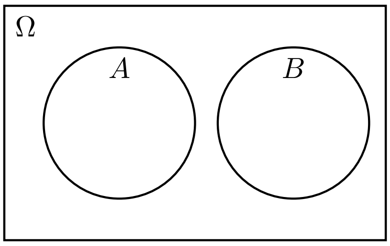
三つの事象A, B, Cの和事象，積事象について次の分配法則が成り立つ．図4.6を見て考えよう．

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned} \tag{1}$$

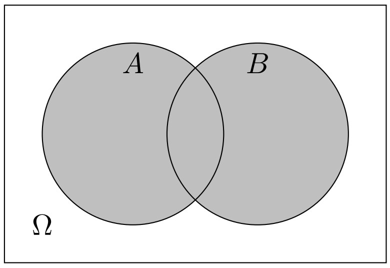
ド・モルガン法則

A, Bの和事象，積事象の補事象について，下記の有名なド・モルガン法則が成り立つ．

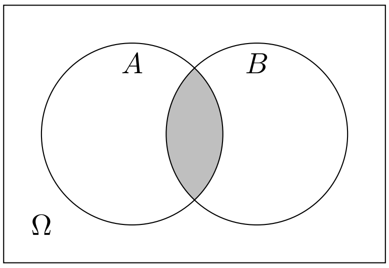
$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned} \tag{2}$$



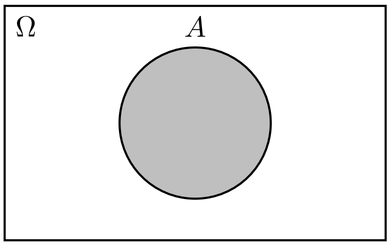
(a) 図**4.1:**排反事象



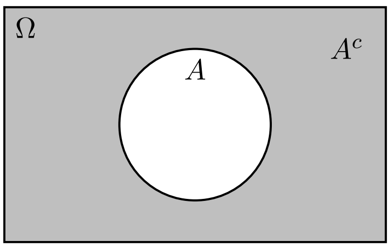
(b) 図**4.2**：和事象



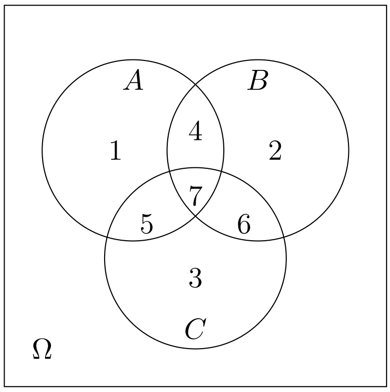
(c) 図**4.3**：積事象



(d) 図**4.4**：事象A



(e) 図**4.5**：補事象A^c



(f) 図**4.6**：三事象の分配法則を考えよ

3 確率の公理主義的定義

確率 確率とは，事象の起りやすさを定量的に示すものであり，事象 Aの起る確率を，probabilityの頭文字をとって$P(A)$で表す.

確率と事象の関係を規定し，確率論を数学的に構成するためには公理を設け，それに基づいて体系的に議論を進める必要がある.この考えに基づくのが確率の公理主義的定義である.以降全ての確率論はこの公理系(3a, 3b, 3c)によって得られたものである.

確率の公理主義的定義

確率論の公理は次の三つからなる.

$$(a)\text{すべての事象}A\text{に対して}\ 0 \leq P(A) \leq 1 \tag{3a}$$
$$(b)P(\Omega) = 1 \tag{3b}$$
$$(c)\text{互いに排反な事象}A_1, A_2, ...\text{に対して}\ P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... \tag{3c}$$

式3cは$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$とも表記できる.

例えば，コインを投げた場合，公理主義的定義によると：

$$P(A) := \begin{cases} 0 & forA = \phi \\ 1/2 & forA = \{\text{表}\},\ \{\text{裏}\} \\ 1 & forA = \Omega \end{cases}$$

4 加法定理

確率の性質：

$$(a)P(A) + P(A^c) = 1 \tag{4a}$$
$$(b)A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \tag{4b}$$

加法定理

$$(a)A\text{と}B\text{が排反事象の場合：}P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{5a}$$
$$(b)A\text{と}B\text{が共通部分持つ場合(図4.3)：}P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{5b}$$

加法定理計算例：
さいころ投げにおいてAを奇数の目が出る事象，Bを3以下の目が出る事象とする.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/6 + 3/6 - 2/6 = 2/3$$

5 条件付き確率と独立性

5.1 条件付き確率と乗法定理

条件付き確率 条件付き確率とは、ある事象Bが起こったという条件のもとでの事象Aの起こる確率. $P(A|B)$で表す.「Bを条件とするAの条件付き確率」という。Aの条件付き確

率は，Bが起こった場合にそのうちさらにAの起る確率であるから，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{6}$$

と定義される．

例，さいころを1回投げる場合，Aを奇数の目が出るという事象，Bを3以下(3を含め)の目が出るという事象とすると，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\text{奇数かつ3以下})}{P(\text{3以下})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

乗法定理

条件付き確率の定理の式6を積の形に変形すれば：

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \tag{7}$$

AとBを入れ替えれば，以下も成り立つ:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \tag{8}$$

例：下記の情報からある学生が工学部の学生でしかも数学好きと答えた確率は？

表 1: 数学が好きかどうかの調査データ

	$P(EC)$経済学部	$P(EN)$工学部	$P(SC)$理学部
在籍人数	200	500	300
$P(suki)$数学が好き	30	60	70
$P(kirai)$数学が嫌い	70	40	30
調査対象の人数の合計	100	100	100

まず、答えた学生は工学部に所属する確率を計算すれば、$P(EN) = 0.5$
次に、工学部の学生の中に数学が好きと答えた確率を計算すれば、$P(suki|EN) = 0.6$
乗法定理を使うと、$P(suki \cap EN) = P(EN) \times P(suki|EN) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$

5.2　独立性

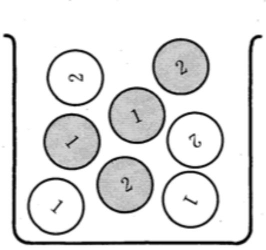


図4.7　つぼの玉の構成(2)

図4.7のような壺に，数字が1の白玉が2個，数字が2の白玉が2個，数字が1の黒玉が2個，数字が2の黒玉が2個がある．その壺から一個だけの玉が取り出したとする．取り出した玉が白玉であるという場合に数字が1である条件付確率は：

$$P(1|\text{白}) = \frac{P(\text{1かつ白})}{P(\text{白})} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

であり，取り出した玉が1である確率は：

$$P(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

であり，結果は同じである．
　即ち，数字に関する事象の確率は，色に関する事象に影響されない．

独立

このように，事象Aの起る確率が他の事象Bに影響されない場合，即ち：

$$P(A) = P(A|B) \tag{9}$$

である場合，この二つ事象は**独立**であるという．

　この関係を乗法定理の式7に代入すると，事象Aと事象Bが独立である場合，下記の式が成り立つ：

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{10}$$

即ち，積事象の確率を二つの事象の確率の積として表すことができるとき二つの事象は独立である．
　例：さいころを2回投げて連続して1の目が出る確率を考えよう．Aを1回目が1であるという事象，Bを2回目が1であるという事象とすると，連続して1が出るという事象は$P(A \cap B)$であり，

$$P(A \cap B) = 1/36, \quad P(A) \cdot P(B) = (1/6) \cdot (1/6) = 1/36$$

であるから，A,Bは独立である．
　なお，以下が成り立つ時，三つの事象A, B, Cが相互に独立という．（四つ以上の事象に対しても同様である．）

$$(a)P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{11a}$$
$$(b)P(B \cap C) = P(B)P(C) \tag{11b}$$
$$(c)P(A \cap C) = P(A)P(C) \tag{11c}$$
$$(d)P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \tag{11d}$$

5.3　ベイズの定理

ベイズの定理：結果から原因を予測

　Aを得られた結果とし，$R_1, R_2, ..., R_k$を原因としよう.われわれが知りたいのはAが起ったとき原因がR_iである確率，すなわち$P(R_i|A)$であるが，われわれが知ることができるのは，原因に対する結果の確率$P(A|R_i)$である場合がほとんどであるから，これを直接計算するのは困難な場合が多い．**ベイズの定理**は結果に対する原因の確率$P(R_i|A)$を計算する公式を与える．

ベイズの定理

いま，$R_1, R_2, ..., R_k$は互いに排反で，かつ$R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_k$のごとくすべての場合をつくしているとする．このとき，以下の規則が成り立つ：

$$P(R_i|A) = \frac{P(R_i) \cdot P(A|R_i)}{P(A)} = \frac{P(R_i) \cdot P(A|R_i)}{\Sigma P(R_j) \cdot P(A|R_j)} \tag{12}$$

- 一行目の式は条件付き確率の定義から$P(R_i|A) = \frac{P(R_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(R_i) \cdot P(A|R_i)}{P(A)}$である．
- また二行目の式の分母は，集合の分配法則によって，$A = A \cap \Omega = A \cap (R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_k) = (A \cap R_1) \cup (A \cap R_2) \cup ... \cup (A \cap R_k)$であるから，従って，$P(A) = \Sigma P(A \cap R_i) = \Sigma P(R_i) \cdot P(A|R_i)$，これを全確率の定理という．
- ここに$P(R_i)$は事前確率，$P(R_i|A)$は事後確率と呼ばれる．「事前」「事後」は事象Aが起こったことを基準としている．事前確率はしばしば主観確率が用いられる．

例1：下記の条件で、煙が上がったのを見た時、その原因が火事である確率は？

$$\begin{cases} \text{事象A:火事が起こる確率は}P(fire) = 0.01 \\ \text{事象B:煙が上がることを見る確率は}P(smoke) = 0.1 \\ \text{火事の90\%で煙が上がる：}P(smoke|fire) = 0.9 \end{cases}$$

解答

$$\begin{aligned} P(fire|smoke) &= \frac{P(smoke|fire) \times P(fire)}{P(smoke)} \\ &= \frac{0.9 \times 0.01}{0.1} \\ &= 0.09 \end{aligned}$$

例2：下記の条件で、無作為に選んだメールが『キャンペーン』という単語を含んでいたという条件のもとで、それが迷惑メールである確率は？(spamは迷惑メール;hamは一般メール)

$$\begin{cases} \text{事象A:メールが迷惑メールの確率は}P(spam) = 0.2 \\ \text{事象B:キャンペーンという単語を含める確率は二つの場合ある：} \\ \qquad \begin{cases} \text{迷惑メール(0.2)条件の下で『キャンペーン』を含める確率は0.3:} \rightarrow P(campaign|spam) = 0.3 \\ \text{一般メール(0.8)条件の下で『キャンペーン』を含める確率は0.04:} \rightarrow P(campaign|ham) = 0.04 \end{cases} \end{cases}$$

解答

$$\begin{aligned} P(campaign) &= P(campaign|spam) \times P(spam) + P(campaign|ham) \times P(ham) \\ &= 0.3 \times 0.2 + 0.04 \times 0.8 \\ &= 0.092 \\ P(spam|campaign) &= \frac{P(campaign|spam) \times P(spam)}{P(campaign)} \\ &= \frac{0.3 \times 0.2}{0.092} \\ &\approx 0.652 \end{aligned}$$

今日のキーワード

標本点，標本空間，事象(空事象，全事象，根元事象，和事象，積事象，排反事象，余事象)，集合算の法則(分配法則，ド・モルガンの法則)，確率の公理主義的定義，加法定理，乗法定理，条件つき確率，乗法定理，独立性，事前確率，事後確率，ベイズの定理