第6回：おもな離散型と連続型の確率分布

尚　晋
大学院経済学研究科　助教

2025年5月20日

今日のポイント

1. おもな離散型の確率分布
2. おもな連続型の確率分布

(もし各確率分布の平均値と分散を計算する際に用いる定理や方法などは理解できなければ、最低限として、それぞれの確率分布の平均値と分散の結果を抑えてほしい)

1　おもな離散型の確率分布

1.1　二項分布

ベルヌーイ試行 2 種類の可能な結果（仮に成功S,失敗Fと呼ぼう）を生じる実験あるいは観測があり，それらの確率をそれぞれ$p, q(= 1 - p)$とする．このように、結果が2通り（成功／失敗）しかない試行を**ベルヌーイ試行**という。成功を1，失敗を0とした確率変数の分布を**ベルヌーイ分布**という．

二項分布 同じ条件且つ独立にベルヌーイ試行をn回行ってx回成功する確率は

$$f(x) = {}_nC_x p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., n \tag{1}$$

で与えられる。ただし、${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$である。確率関数が上の$f(x)$で与えられる確率分布を2項分布 (binomial distribution) といい，Xが2項分布に従う事を$X \sim Bi(n, p)$と表す。

2項分布の性質:

- まず，$f(x)$が確率関数が満たすべき性質を満たしている事を確認する。$f(x) \geq 0$である事は明らかである。
- 次は$\Sigma f(x) = 1$を満たしているかどうかであるが、下記の2項定理により、

$$\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} = (p + q)^n = 1 \tag{2}$$

となるから。したがって、$f(x)$は確かに確率関数である。

- 次にXの平均，分散を求めよう．Xの平均は定義に基づいて計算すると、

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{x=0}^{n} xf(x)\\ &= \sum_{x=0}^{n} x\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}\\ &= \sum_{x=1}^{n} x\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}\\ &= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p\cdot p^{x-1}q^{n-x}\\ &= np\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}q^{n-x}\end{aligned} \tag{3}$$

$x-1=y, n-1=m$とおくと，$m-y=n-x$であるから

$$\begin{aligned}E(X) &= np\sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!}p^y q^{m-y}\\ &= np\cdot 1\\ &= np\end{aligned}$$

最後の行は、$f(y)$は$Y\sim Bi(m,p)$となる確率変数Yの確率関数である事を用いた。

- Xの分散は定義に基づいて計算すると、

$$\begin{aligned}V(X) &= E\{(X-\mu)^2\}\\ &= E(X^2)-E(X)^2\\ &= n(n-1)p^2+np-(np)^2\\ &= np(1-p)\end{aligned} \tag{4}$$

$E(X^2)$は平均を計算する時使ったテクニックを使った。$E(X^2)=n(n-1)p^2+np$となることを用いた。

- 平均と分散の結果により、直感的に解釈すれば、ベルヌーイ試行で1回あたりの成功の確率がpであり、その試行回数がnであるなら，平均的に$n\times p$回の成功が生じることは日常的な直観に合う。また，分散は$P=l/2$のとき最大となるが，このとき現象の予測がしにくいことは，たとえば天気の確率予報が50%の場合にわれわれの意思決定が困難になることからも，理解できる。

二項分布の例 ある池の魚には，それを獲るとき確率 0.2 でその尾部に赤い色の標識が付いている．いま魚を 5 匹獲ったとき，その中で印の付いた魚がそれぞれ$x=0,1,2,3,4,5$ 回出る確率は？

これは試行回数 $n=5$、成功確率 $p=0.2$ の二項分布$X\sim Bi(5,0.2)$：

$$P(X=0)=f(0)=\frac{5!}{0!(5-0)!}(0.2)^0(0.8)^5=0.32768$$
$$P(X=1)=f(1)=\frac{5!}{1!(5-1)!}(0.2)^1(0.8)^4=0.40960$$
$$P(X=2)=f(2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}(0.2)^2(0.8)^3=0.20480$$
$$P(X=3)=f(3)=\frac{5!}{3!(5-3)!}(0.2)^3(0.8)^2=0.05120$$
$$P(X=4)=f(4)=\frac{5!}{4!(5-4)!}(0.2)^4(0.8)^1=0.00640$$
$$P(X=5)=f(5)=\frac{5!}{5!(5-5)!}(0.2)^5(0.8)^0=0.00032$$

$E(X)=np$であることが確認できる

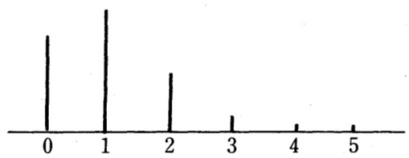

図 6. 3　魚の匹数の分布
$n=5$, $p=1/5$ の二項分布であるが，5 匹中 1 匹の確率が最大という点に意味がある．

1.2　ポアソン分布

ポアソン分布　二項分布 $Bi(n,p)$ について、nが十分大きく、かつpが非常に小さい場合、成功回数Xの分布は

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\quad x=0,1,2,...\quad(\lambda>0) \tag{5}$$

に収束。これを**ポアソン分布(Poisson distribution)**と呼び、$X\sim Po(\lambda)$と表す。λ（ラムダ）はポアソン分布固有のパラメータ。$e=2.718...$は自然対数の底、定数。

ポアソン分布の性質:

- まず，上の確率関数$f(x)$が確率関数が満たすべき性質を満たしている事を確認する。$f(x)\geq 0$である事は明らかである。

- 次は$\Sigma f(x)=1$を満たしているかどうかであるが、

$$\sum_{x=0}^{\infty}f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=1 \tag{6}$$

となるから。したがって、$f(x)$は確かに確率関数である。最後の変形はマクローリン展開により、$e^{\lambda}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$であることを用いた。

- 次にXの平均，分散を求めよう．Xの平均は定義に基づいて計算すると、

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} xf(x)\\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\\ &= \lambda\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^y}{y!} \qquad (y = x-1\text{と置くと})\\ &= \lambda\end{aligned} \tag{7}$$

- Xの分散は定義に基づいて計算すると、

$$\begin{aligned}V(X) &= E\{(X-\mu)^2\}\\ &= E(X^2) - E(X)^2\\ &= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2\\ &= \lambda\end{aligned} \tag{8}$$

$E(X^2)$は平均を計算する時使ったテクニックを使った。$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{[(x-1)+1]e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda^2+\lambda$となることを用いた。

- 常に「期待値 = 分散 = λ」という、珍しい性質。ポアソン分布の現象例は無数にある，交通事故件数，大量生産の不良品数，破産件数，火災件数，砲弾命中数，遺伝子の突然変異数など，リスクや安全性に関連する現象はよく研究されている。昔からよくいわれる歴史的例として，ボルトキーヴィッチ(経済学者)の「プロシア陸軍において馬に蹴られて死んだ兵士数（表6.2)」がある。これはポアソン分布の最初のあてはめ例($\lambda = 0.61$)とされている。

表 6.2　プロシア騎兵連隊において馬に蹴られて死んだ兵士数(ボルトキーヴィッチ)

死亡数	0	1	2	3	4	5
観測数	109	65	22	3	1	0
理論値	108.7	66.3	20.2	4.1	0.6	0.1

ゴール数の例：サッカーJリーグ一部2012年第1節~第3節、のべ54チームのゴール数のデータを入手したとする。データ（サンプル数 54）の平均 $\bar{X} = 1.116$、分散$s^2 = 1.001$、標準偏差 $s = 1.001$。
ポアソン分布の未知パラメータλを$\lambda = 1.116$と置き、ゴール数実現値 $x = 0, 1, 2, ...$の確率を計算する。この計算した結果とサンプルデータの相対度数と比較しみれば：

ポアソン確率（%）	32.76	36.56	20.40	7.59	2.12	0.47
データ相対度数（%）	29.63	35.19	25.93	7.41	1.85	0.00
x（ゴール数）	0	1	2	3	4	5

ポアソン分布での結果は実際のサンプルデータの分布とよく似ていることが分かる。

補足 1.1 二項分布とポアソン分布の関係：

ポアソン分布 $Po(\lambda)$ のパラメータを $\lambda = np = 2.5$と固定したまま、n を増やし、p を減らししながら確率 $P(X = 3)$ を両分布で計算すると、結果は：

n	p	$\lambda = np$	$Bi(n,p)$で計算	$Po(\lambda)$で計算
5	0.5	2.5	P(X=3)=0.313	P(X=3)=0.213
10	0.25	2.5	0.250	0.213
50	0.05	2.5	0.220	0.213
100	0.025	2.5	0.217	0.213

したがって、$n \to \infty, p \to 0$のとき、二項分布の確率はポアソン分布の確率に近づく。

ポアソンの小数の法則 $np \to \lambda$となるように、$n \to \infty, p \to 0$となる極限では，各 x について

$$ {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \longrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \tag{9} $$

が成り立つ。これを**ポアソンの小数の法則**という。

解釈：二項分布 $Bi(n,p)$ について、期待値を $E(X) = np = \lambda$（正の定数）に固定しつつ、 $n \to \infty$（ここでおのずと$p \to 0$）という極限をとると、二項分布の分布関数はポアソン分布の分布関数式に近づく。

1.3　離散型一様分布

離散型一様分布 さいころを振ったときに出る目 X の確率分布が一様分布の例で，

$$ f(x) = 1/N, \quad x = 1, 2, ...N \quad (N\text{は正整数}) \tag{10} $$

を，$1, 2, ..., N$上の**離散型一様分布(uniform distribution of discrete type)**という。

一例として，さいころでは $N = 6$ である．この期待値は$E(X) = \frac{N+1}{2}$，分散は$V(X) = \frac{N^2-1}{12}$。

2　おもな連続型の確率分布

2.1　正規分布

正規分布は代表的な連続型の確率分布であって，自然界や人間社会の中の数多くの現象に対してあてはまり，統計学の理論上も応用上も非常に重要である．正規分布なしには近代の統計理論はありえない.

正規分布 正規分布(normal distribution)の密度関数：

$$ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad (= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}) \tag{11} $$

で与えられる。確率変数 X がこの確率密度関数関数を持つ時，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$と表す。

定数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$は

$$ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} dx = \sqrt{2\pi}\sigma \tag{12} $$

からきており（証明するには変数変換と偶関数の性質とガンマ関数の性質を使う），$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ とするための規格化定数である。正規分布をガウス分布(Gaussian distribution)ということもある。

正規分布の性質:

- まず，上の確率関数$f(x)$が確率関数が満たすべき性質を満たしている事を確認する。$f(x) \geq 0$である事は明らかである。
- 次は、$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$も定数の取り方により、満たしていることが分かる。
- 次にXの平均，分散を求めよう．Xの平均は定義に基づいて計算すると、(また、$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$という変数変換を行うと)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz \qquad (\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma}\text{なので、}dx = \sigma dz) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mu \qquad (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} = 1\text{なので}) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mu
\end{aligned}
$$

$\int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left[-e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_0^{\infty} = -0 - (-1) = 1$と$\int_{-\infty}^{0} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -1$より、

$$
E(X) = \mu \tag{13}
$$

- Xの分散は定義に基づいて計算すると、(ここも平均と同じの考え方、$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$という変数変換を行って、$E(X^2)$を計算)

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\{(X-\mu)^2\} \\
&= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \sigma^2 + \mu^2 - (\mu)^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned} \tag{14}
$$

- 二つのパラメータμ, σ^2がそのまま期待値・分散である。

正規分布の著しい特徴：

(i) X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$に従っているとき，その線形変換 $Y = aX + b$は $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$に従う。

(ii) 標準化変数 $Z = (X - \mu)/\sigma$ は正規分布 $N(0, 1)$に従う。これを標準正規分布(standard normal distribution)という。これを証明するには，$a = 1/\sigma, b = -\mu/\sigma$ とおけばよい。このことから，いかなる正規分布の確率計算も標準正規分布に帰着する。標準正規分布については，累積分布関数

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{15}$$

が，どんな教科書の巻末にも数値表として与えられている。なお,$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$の関係があるので，$z > 0$の表だけが与えられている。これから，おもな区間の確率がよく知られている。

$$P(-k \le Z \le k) = P(Z \le k) - P(Z < -k) = \Phi(k) - \Phi(-k) \tag{16}$$

$k = 1, 2, ...$としてみよう.

$P(-1 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6827$ (1/3の確率で$[-1, 1]$の区間外に落ちる)
$P(-2 \le Z \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9545$ (1/20の確率で$[-2, 2]$の区間外に落ちる)
$P(-3 \le Z \le 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9973$ (3/1000の確率で$[-3, 3]$の区間外に落ちる)
$P(-4 \le Z \le 4) = \Phi(4) - \Phi(-4) = 0.9999$ (1/10000の確率で$[-4, 4]$の区間外に落ちる)

なお，$-3 \le Z \le 3$は，もとの X でいえば，$\mu - 3\sigma \le Z \le \mu + 3\sigma$に相当する．常識的にいえばこれで事実上すべて（全体の確率$= 1$）である．「事実上のすべて」の意味で，区間$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$を，3シグマ範囲という（図6.8)。

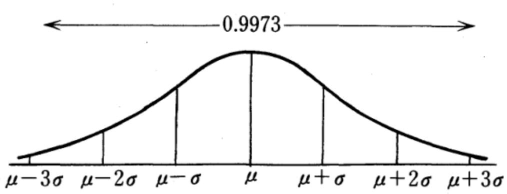

図 6.8 3 シグマ範囲
3 シグマ範囲の外へはずれる確率は千に三つ，いわゆる「千三つ」である．この言葉は,「きわめて成り立ちにくい」「稀にしか真実でない」の意に使われる（広辞苑）.

標準正規分布計算の例 $X \sim N(1, 9)$ について $P(X \le 2)$を求める.
$\frac{X-1}{3} \sim N(0, 1)$より

$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= P(\frac{X-1}{3} \le \frac{2-1}{3}) \\ &= \Phi(\frac{1}{3}) \\ &= 1 - 0.3707 = 0.6293 \end{aligned}$$

中心極限定理

さいころを多数回振った場合の目の和，一様乱数の和などは，その回数 n が大きいときには，ほぼ正規分布に従って分布する.nの大きくなるときに自然に正規分布が出現することは神秘的な結果である．これを**中心極限定理(central limit theorem)**という.

さいころを多数回振った場合の目の和は，その回数 n が大きいときには，ほぼ正規分布に従って分布する。したがって、さいころを多数回振った場合の目の標本平均もほぼ正規分布の形になっていく。このことを下記のコードを用いてやってみてください。(Nをどんどん増やしていくと、正規分布の形になっているのがわかると思う。)

Run 1: '実行してみてください'

```
#When copy-pasting, please ensure the indent is correct.

#cell 1
import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt

def function_central_theory(N):

    sample_array = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
    numaber_cnt = np.arange(1, N + 1) * 1.0

    mean_array = np.array([])

    for i in range(1000):
        cum_variables = np.random.choice(sample_array, N).cumsum()*1.0
        mean_array = np.append(mean_array, cum_variables[N-1] / N)

    plt.hist(mean_array)
    plt.grid(True)

#cell 2
# N=3
function_central_theory(3)

#cell 3
# N=6
function_central_theory(6)

#cell 4
# N= 1000
function_central_theory(1000)
```

2.2　連続型一様分布

連続型一様分布 $[a, b]$上の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{for } x \in [a, b] \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{17}$$

で与えられる確率分布を**連続型一様分布 (uniform distribution)** という。$U[a, b]$と表す。

連続型一様分布の性質:

- まず，上の確率関数$f(x)$が確率関数が満たすべき性質を満たしている事を確認する。$f(x) \geq 0$である事は明らかである。
- 次は$\int_a^b f(x)dx = 1$を満たしているかどうかであるが、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} [x]_a^b = 1 \tag{18}$$

となるから。したがって、$f(x)$は確かに確率関数である。

- 次にXの平均，分散を求めよう．Xの平均は定義に基づいて計算すると、

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^b xf(x)dx \\
&= \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{b+a}{2}
\end{aligned} \tag{19}
$$

- Xの分散は定義に基づいて計算すると、

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\{(X-\mu)^2\} \\
&= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - (\frac{b+a}{2})^2 \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned} \tag{20}
$$

2.3 指数分布

指数分布 確率密度関数は

$$
f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{21}
$$

で与えられる確率分布を**指数分布(exponential distribution)**という。ただし、$\lambda > 0$である。$Exp(\lambda)$と表す。

指数分布の性質:

- まず，上の確率関数$f(x)$が確率関数が満たすべき性質を満たしている事を確認する。$f(x) \geq 0$である事は明らかである。

- 次は$\int_0^\infty f(x)dx = 1$を満たしているかどうかであるが、

$$
\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}(-e^{-\lambda x}) - (-e^0) = 0 - (-1) = 1 \tag{22}
$$

となるから。したがって、$f(x)$は確かに確率関数である。

- 次にXの平均，分散を求めよう．Xの平均は定義に基づいて計算すると、

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx \\
&= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \Big[x(-e^{-\lambda x})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x})dx \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} + 0\cdot e^0 - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty \\
&= -(0 - \frac{e^0}{\lambda}) \\
&= -0 + 0 - (0 - \frac{e^0}{\lambda}) \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned} \tag{23}$$

2 行目から 3 行目への変形では補足2.1の部分積分を用い、$f(x) = x, g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$(つまり，$g(x) = -e^{-\lambda x}$) とした．また，4行目の極限はロピタルの定理を用いた

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x'}{(e^{\lambda x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0$$

- Xの分散は定義に基づいて計算すると、

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\{(X-\mu)^2\} \\
&= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned} \tag{24}$$

指数関数の具体例 あるイベントが起こるまでの待ち時間$X \geq 0$ の分布。X は時間（分、日、月、etc.）で測られ、時点 t以内にイベントが起こる確率$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$の計算に用いる。例えば、地震が起きてから、$t$ 時間以内に次の地震が起こる確率 $P(X \leq t)$。就職活動を始めた学生が、t 日以内に最初の内定をもらう確率 $P(X \leq t)$。

指数関数の累積分布関数

指数関数の確率密度関数式の定積分で、時点tまでにイベントが起こる確率 $P(X \leq t)$を求めると

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_o^t f(x)dx = 1 - e^{-\lambda t} \tag{25}$$

これを、指数分布の累積分布関数と呼ぶ。指数分布の実用上、とても重要。

生存関数 一方、t 以降にイベントが起こる確率

$$S(t) = P(X > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \tag{26}$$

を生存関数(**survival function**)と呼ぶ。（ここではイベント ＝ 逝去）

例：明治以来の、日本の歴代首相の在位期間（＝ 就任から辞任までの年数)。首相官邸webサイトより、在位が確認できる 61 名のデータを入手。データ（サンプル数 61）の平均値 $\bar{X} = 2.058$ 年。(ここではイベント ＝ 辞任)

期待値$E(X) = \frac{1}{\lambda}$より、$\lambda = \frac{1}{E(X)}$を得て、即ち、$\lambda = \frac{1}{2.058}$と置き、指数関数$Exp(\frac{1}{2.058})$の密度関数を描くことができる。

補足 2.1 部分積分法：

$f(x), g(x)$が閉区間$[a, b]$で微分可能で，さらに導関数$f'(x), g'(x)$が連続ならば (つまり，$f(x), g(x)$が連続微分可能であれば)：

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{27}$$

および

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{28}$$

が成り立つ。この方法を**部分積分法**と呼ぶ。