データサイエンスのための統計学

回帰分析

by 尚晋　(名古屋大学経済学研究科助教)
on 2025 年 7 月 08 日

回帰分析

* 回帰分析
* 回帰係数の推定
* 偏回帰係数の統計的推測
* 重回帰分析

回帰分析

* 回帰分析
* 回帰係数の推定
* 偏回帰係数の統計的推測
* 重回帰分析

» 回帰分析

- 回帰分析は, 2 変数 X, Y, X が Y を左右ないしは決定する関係があるとき, 回帰方程式と呼ばれる説明の関係を定量的に表現することを主な目的とする統計手法である。
- 2 次元データの節で記述したと違って,「回帰」を「母集団」と「標本」という考え方の中に置くことにより, 回帰にも統計的推測の方法を導入することが目的である.
- 説明される変数を Y で表し, これを従属変数, 被説明変数, 内生変数などと呼ぶ. また, 説明する変数を X で表し, 独立変数, 説明変数, 外生変数などと呼ぶ.
- 相関分析と異なり, Y を X で説明しようとする点に重点

表 **13.1**：東京および前日の福岡の日平均海面気圧 **(mb)**

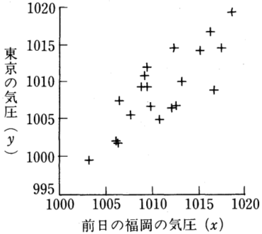
番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
月日	5/7	5/8	5/9	5/10	5/11	5/12	5/13	5/14	5/15	5/16	5/17	5/18	5/19	5/20	5/21	5/22	5/23	5/24	5/25	5/26
東京の気圧	1019.4	1005.7	1002.0	1006.7	1005.1	1010.1	1016.7	1011.0	999.5	1006.9	1001.9	1007.5	1014.4	1014.3	1014.6	1009.0	1006.7	1009.4	1011.8	1009.4
前日の福岡の気圧	1018.4	1007.6	1006.2	1009.9	1010.8	1013.2	1016.2	1009.1	1008.1	1012.5	1006.4	1006.3	1012.2	1015.0	1017.4	1016.5	1012.1	1008.7	1009.2	1009.2

(出典：中村繁・北村幸房『気象データマニュアル』理科年表読本, 丸善, 1987)

» 回帰分析

例：気圧の予測

* 東京の気圧 (y) と前日の福岡の気圧 (x) に着目
* 東京の気圧を，福岡の気圧から予測できるか？
* データから散布図を描くと，相関係数 $r = 0.803$（強い正の相関）



従属変数 y の説明変数 x 上への回帰方程式、回帰関数

$$y = \beta_1 + \beta_2 x \tag{1}$$

* y が x の線形関数である場合を線形回帰、それ以外のものを非線形回帰と呼ぶ。
* 非線形モデルの線形化例：
  弾性モデル: $z = ax^b \Rightarrow \log z = \log a + b \log x \Rightarrow$ x の変化に対する z の変化
  指数回帰: $z = ab^x \Rightarrow \log z = \log a + x \log b \quad \Rightarrow$ 経済成長や細菌の増殖など一定の比率で指数増加

» 母回帰方程式と誤差項

東京の気圧を Y_i, 前日の福岡の気圧を X_i, ばらつきの部分を ε_i とすると, 母集団において次のように表せる:

母回帰方程式（population regression equation）

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i \tag{2}$$

* X_i: すでに観測された確定した
* β_1, β_2 を母集団 (偏) 回帰係数という。これは母集団の値であり, 一般には未知である. これについて推定・検定を行うのが回帰分析である.
* ε_i: 誤差項（error term）

確率変数である誤差項 (或いは擾乱項) の仮定:

(a) 期待値は 0: $E(\varepsilon_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

(b) 分散は一定で σ^2:$V(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

(c) 異なった誤差項は無相関:$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j)$

このことから, 式 (2) のモデルは次のような形で Y_i の期待値は:

$$E(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i \tag{3}$$

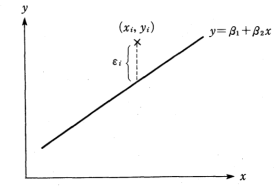
回帰分析

* 回帰分析
* 回帰係数の推定
* 偏回帰係数の統計的推測
* 重回帰分析

» 最小二乗法による回帰係数の推定

- 回帰式：$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$
- 誤差項：$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_1 + \beta_2 X_i)$
- 誤差の平方和：
  $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum (Y_i - (\beta_1 + \beta_2 X_i))^2$
- この S は，Y_i が X_i で説明できない部分の総和を表すから，できるだけ小さい方が望ましいとされる．S を最小化する β_1, β_2 が最小二乗推定量

最小二乗法の考え方



*) $\sum$ は $\sum_{i=1}^{n}$ 等を表すものとする．

- 偏微分してゼロと置くことで標本 (偏) 回帰係数が得られる：

$$\begin{cases} \hat{\beta}_2 & = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad \left(= \beta_2 + \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})\varepsilon_i}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right) \\ \hat{\beta}_1 & = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X} \quad \left(= \beta_1 + \sum_i \left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{\bar{X}(X_i - \bar{X})}{\sum (X_j - \bar{X})^2}\right]\varepsilon_i\right) \end{cases} \tag{4}$$

- 標本回帰式：$Y = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X$
- 回帰値：$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$

» 気圧の例と回帰直線

* データから回帰直線を推定：

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 335.6, \quad \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 329.7$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{329.7}{335.6} = 0.9822$$

$$\hat{\beta}_1 = 1009.1 - 0.9822 \times 1011.0 = 16.09$$

* 標本回帰式：$Y = 16.09 + 0.9822X$

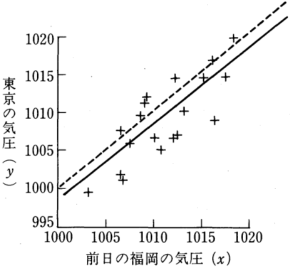


図 13. 3　東京の気圧を前日の福岡の気圧から予測する標本回帰方程式　$y=16.09+0.9822\,x$. 点線は，両者は等しいと考えた場合の予測式 $y=x$ で，傾き$=1$である．回帰方程式の方がごくわずか傾きがゆるやかである．なお，x のこの範囲では $y=x$ の方が上側にあることに注意する．

» 回帰残差とその性質

ここで, 実測値 Y_i の, 回帰方程式に定められた回帰値 $\hat{Y}_i$ からのずれは,

$$\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i)$$

は X で説明されずに残った分であり、$\hat{e}_i$ は回帰残差(residual) という.
$\hat{e}_i$ は誤差項 ε_i の推定量であるが, $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ は式 (4) から求められるので:

$$\sum \hat{e}_i = 0, \qquad \sum \hat{e}_i X_i = 0 \tag{5}$$

となる.

* $\hat{e}_i$ の平均値は 0 であり,
* $\hat{e}_i$ と X_i とはベクトルとして直交していることを意味している.
* これは, 最小二乗法それ自体の特徴であり, 母集団にかかわらず常に成り立つ重要な性質である.

» 分散の推定と当てはまりの良さ

* 誤差項 ε_i の分散 σ^2 は回帰方程式のあてはまりの良さを表すが，その推定量は

$$s^2 = \frac{\sum \hat{e}_i{}^2}{n-2} \tag{6}$$

となる．回帰残差の平方和を $n-2$ で割るのは，e_i は式 (5) の二つの条件を満たすべきため制限が加わり，自由度が 2 失われる．

* この s を推定値の標準誤差 (standard error, *s.e.*) という
* 多くの $\hat{e}_i$ は $\pm 2s$ 以内に収まる (外れ値検出)

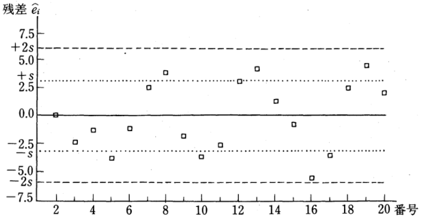


図 13.4 福岡の前日の気圧から東京の気圧を予測する回帰方程式の回帰残差 $\hat{e}_i$ のプロット．
残差 $\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ のプロットは各データの個々の傾向を点検するときに用いられ，また残差の全体的傾向も一目で観察される．ここでも，$\hat{e}_i$ にはある周期性が表れている．また，すべての e_i が $\pm 2s$ ($s=3.148$) の中に入っているので，予測の誤差は小さいといえるであろう (本図は TSP の出力による)．

» 単位と標準化回帰係数

- 説明変数の単位を変えると $\hat{\beta}_2$ も変化
  - 例えば東京の気圧はそのまま mb(ミリバール) で, 福岡の気圧を水銀柱ミリメートル mmHg の単位で表したとする時, 単位を変更しただけであるから, 2 変数間の関係は変わらないが, $\hat{\beta}_2$ の推定値は大きく異なってくる.
- 関係性を保つために変数を標準化して $(X_i - \bar{X})/s_x, (Y_i - \bar{Y})/s_y$ について回帰分析を行う:
  - このとき、推定したのは標準化偏回帰係数という
  - この場合、標準化偏回帰係数 $\Rightarrow$ 相関係数に一致
  - 切片は常に 0
- 目的:単位の影響を除くため, 変数を標準化して回帰を行うことも多い.

» 回帰方程式の当てはまりとは

- 回帰式がどの程度よく当てはまっているか $\rightarrow$ モデルの妥当性。
- X が Y のばらつきの多くの部分を説明できれば, その回帰式は 価値が高い。
- 説明できなければ, 回帰モデルの意味は薄い。
- モデルの当てはまりの良さを定量的に測る指標 $\Rightarrow$ 決定係数 η^2。

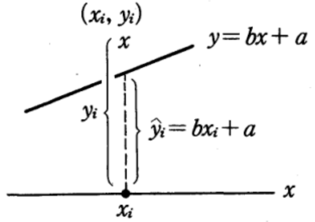


図 3. 24　決定係数を考えるしくみ

» 全変動と分解：回帰と残差

Y_i の全体のばらつき（全変動）:

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 \tag{7}$$

この全変動は，次の 2 つに分解できる：

(1) 回帰式で説明できる変動（回帰変動）:

$$\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \tag{8}$$

(2) 説明できなかった残り（残差変動）:

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum \hat{e}_i^2 \tag{9}$$

変動の分解：

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \tag{10}$$

» 決定係数 η^2 の定義と意味

決定係数 η^2 は, Y_i の変動のうち, 回帰式によって説明できる割合を示すものであり, 次式で定義される:

$$\eta^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum \hat{e}_i^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} \tag{11}$$

* η^2 が大きい $\Leftrightarrow$ 回帰の当てはまりが良い。
* $\eta^2 = 1$:完全に説明できている(すべての点が回帰直線上に)
* $\eta^2 = 0$:全く説明できない
* 一般に: $0 \leq \eta^2 \leq 1$

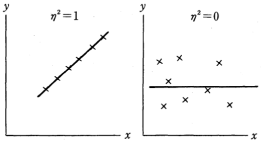


図 13.5　決定係数の両極端

左の $\eta^2=1$ の場合は，x は完全に y を説明する．このような場合は一見して関係があることが明らかである．右の $\eta^2=0$ の場合は，標本回帰方程式は説明の意味をもたず，回帰分析は全く効果がない．現実は，両者の中間にある．また，$\eta^2=$(相関係数)^2 となることが証明できる．3.4 節参照．

* 線形回帰式の場合、下記の式が成り立つ:

$$\eta^2 = r^2, \quad r \text{ は標本相関係数}$$

» なぜ最小二乗推定量なのか：BLUE の性質

最小二乗推定量 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ の優れた性質

- 不偏性：

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1, \quad E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$$

- 分散の最小性：

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 \bar{X}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

- 最良線形不偏推定量 (BLUE)：他の線形不偏推定量よりも分散が小さい。

ガウス・マルコフの定理：最小二乗推定量は最良線形不偏推定量 (BLUE) である。

回帰分析

* 回帰分析
* 回帰係数の推定
* 偏回帰係数の統計的推測
* 重回帰分析

» 回帰分析の目的と仮説検定の必要性

回帰分析の目的は以下の 2 つ:

* 標本偏回帰係数 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ の推定
* 母偏回帰係数 β_1, β_2 に関する仮説検定

例: 東京と福岡の気圧の関係 $Y = X + c$ という仮説は標本データから考えうる、この時 $\beta_1 = 1$ という仮説を検定することが意味ある。

» 標本偏回帰係数 $\hat{\beta}_2$ の標本分布

仮定：誤差項 $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ は独立かつ同分布

偏回帰係数 $\hat{\beta}_2$ は正規分布に従う：

$$\hat{\beta}_2 \sim \mathcal{N}\left(\beta_2, \frac{\sigma^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}\right) \tag{12}$$

回帰残差：

$$\hat{e}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i \tag{13}$$

分散の推定量 s^2：

$$s^2 = \frac{\sum \hat{e}_i{}^2}{n-2} \tag{14}$$

標準誤差：

$$s.e. = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum \hat{e}_i{}^2}{n-2}} \tag{15}$$

$\hat{\beta}_2$ の標準誤差：

$$s.e.(\hat{\beta}_2) = \frac{s}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2}} \tag{16}$$

» 標本偏回帰係数 $\hat{\beta}_2$ の標本分布 (続き)

検定統計量:

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{s.e.(\hat{\beta}_2)} \tag{17}$$

これは自由度 $n-2$ の t 分布に従う

気圧データの例:

$$s = 3.148$$
$$s.e.(\hat{\beta}_2) = \frac{3.148}{\sqrt{336.6}} = 0.1718$$

» 標本偏回帰係数 $\hat{\beta}_1$ の標本分布

標本分布：

$$\hat{\beta}_1 \sim \mathcal{N}\left(\beta_1, \frac{\sigma^2 \sum X_i^2}{n\sum(X_i - \bar{X})^2}\right)$$

標準誤差：

$$\text{s.e.}(\hat{\beta}_1) = s \cdot \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum(X_i - \bar{X})^2}}$$

検定統計量：

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\text{s.e.}(\hat{\beta}_1)} \tag{18}$$

こちらも自由度 $n-2$ の t 分布に従う

» 偏回帰係数の検定

- 偏回帰係数 $\hat{\beta}_2$ により, X が Y をどの程度説明しているかが分かる
- 仮説検定によって, 母偏回帰係数 β_2 で表される傾きの有意性を検証

帰無仮説: $H_0 : \beta_2 = a$

対立仮説:

- 両側検定: $H_1 : \beta_2 \neq a$
- 片側検定: $H_1 : \beta_2 > a$

検定統計量:

$$t_2 = \frac{\hat{\beta}_2 - a}{s.e.(\hat{\beta}_2)} \sim t(n-2) \tag{19}$$

棄却基準:

- 両側検定: $|t_2| > t_{\alpha/2}(n-2)$
- 片側検定: $t_2 > t_{\alpha}(n-2)$

» 特に重要な検定：$H_0 : \beta_2 = 0$

特に重要な検定：$H_0 : \beta_2 = 0$

* 理由：この帰無仮説が採択されるとき，X によって Y を説明できないことを意味し，回帰式が適切でないと考えられる．
* この $t = \dfrac{\hat{\beta}_2}{s.e.(\hat{\beta}_2)}$ 値はt 値 (t-ratio)と呼ばれる．

» 例：福岡の気圧が東京を説明するか

* 帰無仮説：$H_0: \beta_2 = 0$
* 対立仮説：$H_1: \beta_2 > 0$
* $\hat{\beta}_2 = 0.9822$
* $\text{s.e.}(\hat{\beta}_2) = 0.1718$

検定統計量：

$$t_2 = \frac{0.9822}{0.1718} = 5.717$$

* 自由度：$n - 2 = 18$
* 有意水準 $\alpha = 0.01$ では $t_{0.01}(18) = 2.552$

結論：$t_2 > t_{0.01}(18)$ より，H_0 を棄却 $\Rightarrow$ 回帰方程式は有意であり、福岡の気圧が東京の気圧の説明に有効に効いている

» 例：更に、$\hat{\beta}_2 = 0.9822$ だから、$\beta_2 = 1$ の検定

* 仮説：$H_0: \beta_2 = 1$, $H_1: \beta_2 \neq 1$
* 検定統計量：

$$t = \frac{0.9822 - 1.0}{0.1718} = -0.1036$$

* 自由度 18, 有意水準 $\alpha = 0.01$：$t_{0.005}(18) = 2.878$
* $|t| = 0.1036 < 2.878$

結論：帰無仮説 $\beta_2 = 1$ を棄却しない. 即ち、有意水準 1% 傾き =1 であるという帰無仮説は棄却されない。

» プログラムで回帰方程式を推定した結果

以下は，TSP で表 13.1 のデータを使って回帰方程式を推定した例である．

TSP コマンド

```
1 ? SMPL 1 20;
2 ? LOAD(FILE="A:INPUT.DAT") X Y;
3 ? OLSQ Y C X;
```

推定結果

```
                              EQUATION    1
                              ************

                 METHOD OF ESTIMATION = ORDINARY LEAST SQUARES

    DEPENDENT VARIABLE: Y

                SUM OF SQUARED RESIDUALS =      178.403       1)
            STANDARD ERROR OF THE REGRESSION =  3.14822       2)
              MEAN OF DEPENDENT VARIABLE =      1009.11       3)
                      STANDARD DEVIATION =      5.14121       4)
                               R-SQUARED =     0.644763       5)
                      ADJUSTED R-SQUARED =     0.625028
                 DURBIN-WATSON STATISTIC =       1.1113
               F-STATISTIC(     1,     18) =    32.6704       6)
              LOG OF LIKELIHOOD FUNCTION =     -50.2619
                  NUMBER OF OBSERVATIONS =        20          7)

                     ESTIMATED          STANDARD
VARIABLE            COEFFICIENT   8)     ERROR   9)   T-STATISTIC   10)
C                     16.089           173.73          0.92609E-01
X                     0.98221          0.17184         5.7158
```

1) 回帰残差の平方和 $S_1=\sum e_i^2$　2) 推定値(回帰)の標準誤差　$s.e.$　3) 従属変数の標本平均　$\bar{Y}$　4) 同標本標準偏差　s_Y　5) 決定係数＝(相関係数)^2　η^2　6) 回帰式の F 値　F(後述，$k=2$，$p=1$ の場合)　7) 標本の大きさ(観測値の個数)　n　8) 標本偏回帰係数　$\hat{\beta}_i$　9) 同標準誤差　$s.\ e.(\hat{\beta}_i)$　10) $\beta_i=0$ を検定する t 値　t_i

回帰分析

* 回帰分析
* 回帰係数の推定
* 偏回帰係数の統計的推測
* 重回帰分析

» 重回帰分析とは

* 単回帰では 1 つの説明変数 X で Y を説明
* 多くの現実問題では Y に影響する複数の要因あり
* 複数の説明変数を含む回帰を重回帰分析という

重回帰モデル（母集団モデル）：
$X_{2i}, \cdots, X_k$ は説明変数、ε は誤差項で、母集団モデルは

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \tag{20}$$

* $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$：他の変数の影響を除いた純粋な効果
* 定数項 β_1 に対応する定数 $X_{1i} = 1$ は省略される。
* ε_i：誤差項，
  $E(\varepsilon_i) = 0, Var(\varepsilon_i) = \sigma^2, Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j)$

» 重回帰分析：推定と回帰式

誤差項は

$$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki}) \tag{21}$$

母回帰係数 β_j は最小二乗法で推定：誤差平方和

$$S = \sum \varepsilon_i^2 \tag{22}$$

- 偏微分により最小化 $\longrightarrow$ 連立方程式を解く
- 得られた $\hat{\beta}_j$ は標本回帰係数

標本重回帰方程式：

$$Y = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \cdots + \hat{\beta}_k X_k \tag{23}$$

回帰値：

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} \tag{24}$$

» 当てはまりの良さ：決定係数

変動分解：

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum \hat{e}_i^2 \tag{25}$$

決定係数：

$$\eta^2 = 1 - \frac{\sum \hat{e}_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \tag{26}$$

重相関係数：決定係数の正の平方根、R で表す。

ただし、説明変数を増やすにつれて残差二乗和が小さくなり、それに伴い決定係数が大きくなるという問題がある. そこで、自由度修正済み決定係数：

$$\text{adjusted } R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{e}_i^2 / (n-k)}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 / (n-1)} \tag{27}$$

» 推定量の性質と t 検定統計量

ガウス・マルコフの定理：$\hat{\beta}_i$ は最良不偏線形推定量（BLUE）

* 誤差分散の推定：$s^2 = \sum \hat{e}_i^2/(n-k)$
* この s を標準誤差という：$s.e.$ で表す。$s.e.(\hat{\beta}_i)$ が求める。

t 検定統計量：

$$t_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s.e.(\hat{\beta}_i)} \sim t(n-k) \tag{28}$$

帰無仮説の検定：$H_0 : \beta_i = a$ を検定可能

» 複数係数の同時検定：F 検定

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$$

複数係数の同時検定 (簡単化で、ここは $k = 2$ 二つの説明変数とする)：

$$H_0 : \beta_2 = 0 \text{ かつ } \beta_3 = 0 \tag{29}$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0 \text{ または } \beta_3 \neq 0 \tag{30}$$

F 検定：

1. S_0：H_0 が正しいとして、重回帰モデルの残差平方和
2. S_1：すべての説明変数を含む重回帰方程式の残差平方和
3. 帰無仮説に含まれる制約式の数を p とし、F 統計量：

$$F = \frac{(S_0 - S_1)/p}{S_1/(n-k)} \sim F(p, n-k) \tag{31}$$

   (上の例では、$k = 3, p = 2$)

4. H_0 棄却条件：$F \geq F_\alpha(p, n-k)$

» 英国保守党の得票率の実例:(a) 単回帰

< 例 > 英国保守党の得票率と社会経済指標　1987 年のイギリス総選挙における保守党得票率 (Y) の決定要因を分析する。633 の選挙区のうち北アイルランドを除く 616 選挙区中からアルファベット順に 127 選挙区を等間隔抽出し回帰分析を行う。偏回帰係数の下のカッコ内は t 値である。

(a) 失業率 (X_1) による単回帰

$$Y = 61.998 - 2.349X_1 \quad (R^2 = 0.461)$$
$$(-10.399)$$

この場合の、重回帰方程式の $F = 106.999$ である。一方、
$F_{0.05}(1,125) \approx 3.920$ であるから、得票率は失業率で説明されない ($\beta_2 = 0$) という仮説は、有意水準 5% で棄却される (回帰方程式は採択される)。

» 実例：(b) 重回帰

(b) 失業率 (X_1) および自動車保有率 (X_2) による重回帰

$$Y = 36.867 - 1.511X_1 + 0.332X_2 \quad (R^2 = 0.478)$$
$$(-3.227) \quad (2.034)$$

重回帰方程式の $F = 113.697$, $F_{0.05}(2, 124) \approx 3.072$, ゆえに、この重回帰方程式も有意水準 5% で採択される。

» 実例：(c) 地域ダミー変数による重回帰

(c) X_1 と地域ダミー Z（0=England, 1=Wales/Scotland）
ダミー変数を導入すると、

$$Y = 68.580 - 2.057X_1 - 19.965Z \quad (R^2 = 0.728)$$
$$(-11.051) \quad (-12.543)$$

重回帰方程式の $F = 86.579$, $F_{0.05}(2, 124) \approx 3.072$, 重回帰方程式は有意水準 5% で採択される。