データサイエンスのための統計学

仮説検定

by 尚晋　(名古屋大学経済学研究科助教)
on 2025 年 7 月 01 日

仮説検定

* 検定の考え方
* 正規母集団に対する仮説検定
* χ^2 を用いる検定
* 中心極限定理による検定

仮説検定

* 検定の考え方
* 正規母集団に対する仮説検定
* χ^2 を用いる検定
* 中心極限定理による検定

» 仮説検定とは

仮説検定 統計的仮説の有意性を検定する手法である。

仮説検定の目的 母集団について仮定された命題を，標本にもとづいて検証することである．

統計的仮説 ここで立てられた理論上の仮説を 統計的仮説，あるいは単に仮説(hypothesis) という．即ち，母集団に関する命題を定式化したものである。

有意 標本からの観測値は理論値 (即ち母集団仮説に基づく期待値) からのずれが誤差の範囲外なら，統計学では仮説からのずれ (簡単に、仮説) は有意(significant) であるという．

例：メンデルのエンドウ豆実験（理論比 9:3:3:1）と観測値の比較

型	黄色・丸	黄色・しわ	緑・丸	緑・しわ	計
度数	315	101	108	32	556
理論比	9	3	3	1	16

* 理論比とのズレが有意かどうかを検討する
* ズレが大きければ仮説を棄却→ ずれが有意な結果

» 仮説検定の考え方

- 仮説検定は"ずれ"の大きさに着目
- ずれが標本誤差の範囲なら仮説は採択され、それ以上なら棄却される
- 「有意である」とは「出るはずのないかなりの稀」のこと
- 仮説検定 = 仮説を棄却するかどうかを決める判断手続き

例：コイン投げ 20 回で表が 14 回出た時、コインに歪みがないという仮説 $p = 0.5$ が妥当かどうか？

- 表の回数 $X \sim Bi(20, 1/2)$，仮説とのずれがどれほど稀を検証：
  $P(X \geq 14) = \sum_{i=14}^{20} {}_{20}C_x p^x q^{20-x} = 0.0577 = 5.8\%$
- これは仮説 $p = 0.5$ のもとでは起こりにくい現象 (5.8% しかないから)

「どの程度の確率なら"稀"と判断するか」$\to$ 有意水準 (α)

- 通常 $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ など
- コイン例では $P = 0.0577$：
  - $\alpha = 0.10$ なら棄却（稀）
  - $\alpha = 0.01$ なら棄却されない（十分起こり得る）

» 帰無仮説と対立仮説, 帰無仮説の採択の意味

検定では、2 つの仮説を設定:

-
  - 帰無仮説 H_0: 例) $p = 1/2$
  - 対立仮説 H_1: 例) $p \neq 1/2$
- 検定の目的: H_0 を有意水準 α に基づき棄却するか判断
- 有意水準 α より稀、帰無仮説を棄却した場合、対立仮説を採択したとみなす

ただし「棄却しない」からといって H_0 が真とは限らない

- 有意性検定は「矛盾が生じたから仮説を棄却する」=背理法
- 棄却しないからといって, 仮説が正しいとは言えない!
  - 仮説が積極的に正しい (真であることが証明された) というわけではない
  - 帰無仮説と観測結果が矛盾しなかったというだけ
  - → 従って、よく「帰無仮説は棄却できない」という

» 検定結果と第 1 種・第 2 種の誤り

表 **12.3**: 帰無仮説を棄却する, しないの決定に関しての四つの場合

	H_0 が正しい	H_0 が誤り (H_1 正しい)
H_0 を棄却しない (採択する)	①	③(Type II Error)
H_0 を棄却する	②(Type I Error)	④

誤りには以下の 2 種類がある:

(a) 第 1 種の誤り (Type I Error): H_0 が正しいのに, それを棄却してしまう誤り $\Longrightarrow$②

(b) 第 2 種の誤り (Type II Error): H_0 が誤っているのに, それを採択する誤り $\Longrightarrow$③

この構造は品質管理や裁判など現実の意思決定に適用

* 第 1 種の誤り: 良品を不合格に　(生産者のリスク)
* 第 2 種の誤り: 不良品を合格に　(消費者のリスク)

» 棄却域と両側・片側検定　　両側検定

例：標本サイズ $n = 25$, 標本平均 $\bar{X} = 13.7$, 標本標準偏差 $s = 2.3$.

* 帰無仮説：$H_0 : \mu = 15$
* 対立仮説：$H_1 : \mu \neq 15$（両側検定）

t 統計量：

$$t = \frac{13.7 - 15}{2.3/\sqrt{25}} = \frac{-1.3}{0.46} = -2.83$$

有意水準 $\alpha = 0.05$ に対応する t 分布 $t(24)$ のパーセント点は $t_{0.025}(24) = 2.06$であり, $|t| = 2.83 > 2.06$ より, 有意水準 5% で帰無仮説を棄却する.

なぜなら, ± 2.06 以上となる確率は 5% という稀なものであって, 2.83 はそれ以上に稀だからである.

したがって, 母集団に関する帰無仮説 $\mu = 15$ は成り立つと考えにくい.

» 棄却域と両側・片側検定　　片側検定

- ＊ 片側検定：$H_1' : \mu < 15$（対立仮説が片側）

$$t = \frac{\bar{X} - 15}{s/\sqrt{n}} = -2.83$$

- ＊ 判定：$t_{0.05}(24) = 1.71$, $t = -2.83 < -1.71$ より，有意水準 5% で帰無仮説を棄却する．

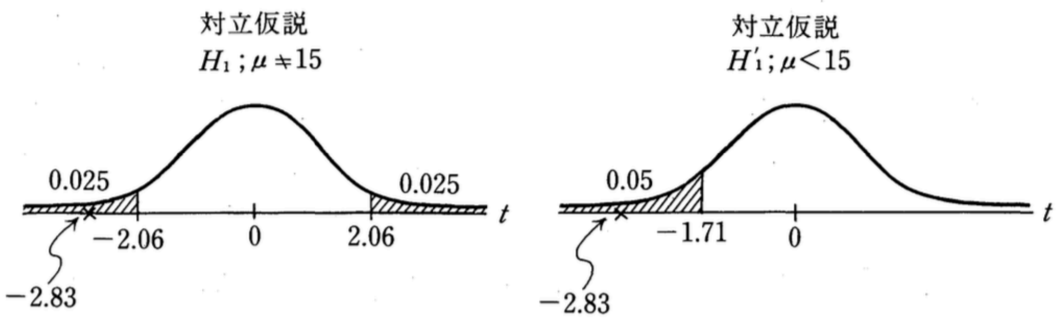

図 12. 1　仮説検定のやり方

帰無仮説をまず設け，対立仮説 H_1 を考慮して，あらかじめ選んだ有意水準(5%)に等しい確率で，0 から遠い所に棄却域(斜線を付してある数直線の範囲)を作る．計算された t 統計量の値(-2.83)がその棄却域の中に入るとき，その帰無仮説は棄却される．

» 棄却域と両側・片側検定　片側か両側かの選択

棄却域 帰無仮説を棄却すべき統計量の値の集合

採択域 棄却しない領域

両側検定 $|t| > t_{\alpha/2}(n-1)$

左片側検定 $t < -t_{\alpha}(n-1)$

右片側検定 $t > t_{\alpha}(n-1)$

両側検定の応用場面 母数が目標値と異なるかどうかの確認．例：製造機械の異常検出．

片側検定の応用場面 効果の有無など，一方向の変化に注目する場合．例：特別授業による得点向上を検証する場合など．

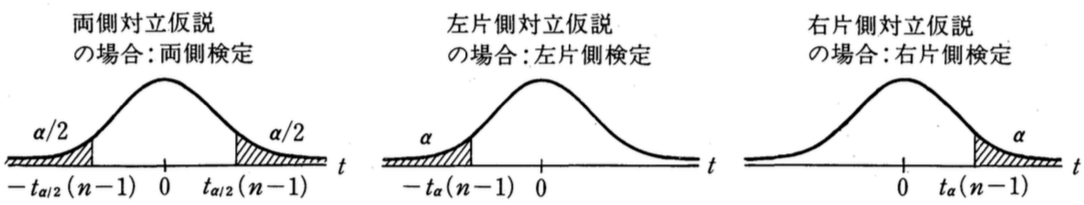

図 12. 2　検定の手続例：母平均は帰無仮説の通りか

スチューデントの t 統計量とは $t=(\bar{X}-\mu_0)/(s/\sqrt{n})$ で定義される（μ_0 はあらかじめ指定された母平均値）．関数は自由度 $n-1$ の t 分布 $t(n-1)$ の密度関数．$t=0$ は標本平均 $\bar{X}$ と帰無仮説の μ_0 の一致を意味する．斜線の棄却域は $\bar{X}$ と μ_0 の十分なずれがある領域であり，分布の端部に有意水準で決められる．片側対立仮説および片側検定は，右と左の場合がある．

仮説検定

* 検定の考え方
* 正規母集団に対する仮説検定
* χ^2 を用いる検定
* 中心極限定理による検定

» 母平均に関する検定（両側）　t 検定

帰無仮説と対立仮説　$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

検定統計量

* 母分散 σ^2 が既知：

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{1}$$

$Z \sim N(0,1)$ のとき $|Z| > z_{\alpha/2}$ で H_0 を棄却

* 母分散 σ^2 が未知：

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \tag{2}$$

$t \sim t(n-1)$ のとき $|t| > t_{\alpha/2}(n-1)$ で H_0 を棄却
これをスチューデントの t 検定という。

» 母平均に関する検定（両側）　例

例：空調システムの作動状況ー設定温度 25 度の検定

7 日間の温度データ：$24.2, 25.3, 26.2, 25.7, 24.4, 25.1, 25.6$, 有意水準 5% でこのシステムが正しく働いているかどうかを検定せよ

» 母平均に関する検定（両側）　例

例：空調システムの作動状況－設定温度 25 度の検定

7 日間の温度データ：$24.2, 25.3, 26.2, 25.7, 24.4, 25.1, 25.6$, 有意水準 5% でこのシステムが正しく働いているかどうかを検定せよ

* 仮説：$H_0 : \mu = 25.0, \quad H_1 : \mu \neq 25.0 \rightarrow$ 両側検定
* $\bar{X} = 25.21, s = 0.715, n = 7$
* 検定統計量：
$$t = \frac{25.21 - 25.0}{0.715/\sqrt{7}} = 0.777$$
* $t_{0.025}(6) = 2.447$ なので, $|t| = 0.777 < 2.447$ より、有意水準 5% では帰無仮説は棄却できない, 正常に作動していると判断する。

» 母平均に関する検定（片側） 例

帰無仮説と対立仮説
* 右片側：$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$
* 左片側：$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0$

検定統計量と判定条件
* σ^2 既知：$Z > z_\alpha$ または $Z < -z_\alpha$
* σ^2 未知：$t > t_\alpha(n-1)$ または $t < -t_\alpha(n-1)$

例：講義の効果検定

(前 - 後) の得点差：$-1, 3, 4, 5, 3, 0, 7, 4, 2, -2$, 有意水準 5% で講義の効果があったと言えるか

» 母平均に関する検定（片側）　例

帰無仮説と対立仮説

* 右片側：$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$
* 左片側：$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0$

検定統計量と判定条件

* σ^2 既知：$Z > z_\alpha$ または　$Z < -z_\alpha$
* σ^2 未知：$t > t_\alpha(n-1)$ または　$t < -t_\alpha(n-1)$

例：講義の効果検定

(前 - 後) の得点差：$-1, 3, 4, 5, 3, 0, 7, 4, 2, -2$, 有意水準 5% で講義の効果があったと言えるか

* 仮説：$H_0 : \mu = 0, \quad H_1 : \mu > 0 \to$ 右片側検定
* $\bar{X} = 2.5$, $s = 2.5$, $n = 10$
* 検定統計量：

$$t = \frac{2.5 - 0}{2.5/\sqrt{10}} = 2.82$$

* $t_{0.05}(9) = 1.833$ なので、$2.82 > 1.833$ より、有意水準 5% において H_0 は棄却され、講義の効果があったと判断される。