ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կիրառական մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ֆակուլտետ

ԿՈՒՐՍԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

Առարկա`Մաթեմատիկական ծրագրավորում

Խումբ՝ ՄԹ-240

Ուսանող՝ Սուսաննա Սարդարյան

Դասախոս ՝Հովհաննիսյան Ի.

Բովանդակություն

1. Կազմել խնդրի մաթեմատիկական ծրագրավորման մոդելը և այն լուծել սիմպլեքս մեթոդով:..3

2. Լուծել գծապատկերի օգնությամբ և սիմպլեքս մեթոդով:...........................8

3. Ստուգել տրված վեկտորը բազիսային լուծում է թե ոչ:...............................11

4. Գտնել խնդրի բազիսային լուծումները:...12

5. Կազմել ԳԾԽ-ի երկակի խնդիրը: 13

6. Տրված խնդրում գտնել լավագույն լուծումը օգտվելով երկակի խնդրի գրաֆիկական եղանակով ստացված լուծումից: 14

7. Ստուգել տրված վեկտորը լավագույն լուծում է թե ոչ և այն լուծել սիմպլեքս մեթոդով...15

8. Լուծել ոչ գծային ծրագրավորման խնդիրը գծապատկերի միջոցով: 18

9. Լուծել մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդիրը:................19

10. Լուծել կոտորակագծային ծրագրավորման խնդիրը:...................................20

11. Լուծել ամբողջ թվերով գծային ծրագրավորման խնդիրը Հոմորիի եղանակով:...23

12. Լուծել ոչ գծային ծրագրավորման խնդիրը Կուն-Թակերի թեորեմի օգնությամբ: 24

13. Լուծել քառակուսային ծրագրավորման խնդիրը:..25

14. Լուծել մատրիցային խաղը:...28

1. **Կազմել խնդրի մաթեմատիկական ծրագրավորման մոդելը և այն լուծել սիմպլեքս մեթոդով:**

Բանկային կազմակերպության ներդրումների գծով կառավարիչն իր տրամադրության տակ ունի 550 մլն. պդմ: Նա ուսումնասիրում է հնարավոր ներդրումների չորս տարբերակ.

- պետական արժեթղթեր,
- միությունների արժեթղթեր,
- սպասարկման ոլորտի ճյուղերի հասարակ բաժնետոմսեր,
- արտադրական ոլորտի ճյուղերի հասարակ բաժնետոմսեր,

Կառավարիչի նպատակն է ներդրումների վերադարձման չափի մաքսիմացումը: Տարեկան տոկոսադրույքը 1, 2, 3, և 4 տարբերակների համար կազմում է 8%, 9%, 10% և 12% համապատասխանաբար: Չներդրված դրամական միջոցները մնում են բանկային հաշվում և բերում են տարեկան 4% շահ: Կառավարիչը որոշել է՝ 50 մլն. դրամից ոչ պակաս ներդնել միությունների արժեթղթերի մեջ, իսկ ռիսկի տարրերով ներդրումներ կատարել 300 մլն. դրամից ոչ ավելի: Բացի այդ, նա համարում է, որ դրամական միջոցների գոնե կեսը պետք է ներդնել հասարակ բաժնետոմսերի մեջ, իսկ ներդրումների ընդհանուր գումարի մեկ քառորդից ոչ ավելին՝ արտադրության ոլորտի ճյուղերի բաժնետոմսերի մեջ:

Լուծում: Պահանջվում է առավելագույնացնել ընդհանուր ներդրումների վերադարձումը.

- x_1: պետական արժեթղթերում ներդրված գումար (մլն. պդմ)
- x_2: միությունների արժեթղթերում ներդրված գումար (մլն. պդմ)
- x_3: սպասարկման ոլորտի հասարակ բաժնետոմսերում ներդրված գումար (մլն. պդմ)
- x_4: արտադրական ոլորտի հասարակ բաժնետոմսերում ներդրված գումար (մլն. պդմ)
- x_5: չներդրված գումար, որը մնում է բանկային հաշվում (մլն. պդմ)

Նպատակային ֆունկցիա՝

$$f = 0.08x_1 + 0.09x_2 + 0.10x_3 + 0.12x_4 + 0.04x_5 \to max$$

Սահմանափակումներ.

Ընդհանուր ներդրումների սահմանափակում:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 550$$

Միությունների արժեթղթերում նվազագույն ներդրում:

$$x_2 \geq 50$$

1. Ռիսկային ներդրումների սահմանափակում:
   Ռիսկային ներդրումները ներառում են սպասարկման և արտադրական ոլորտի բաժնետոմսերը

$$x_3 + x_4 \leq 300$$

2. Յասարակ բաժնետոմսերում նվազագույն ներդրում:
   Դրամական միջոցների գոնե կեսը պետք է ներդրվի հասարակ բաժնետոմսերում ($x3 + x4$):

$$x_3 + x_4 \geq 275$$

3. Արտադրական ոլորտի բաժնետոմսերում ներդրումների սահմանափակում:

$$x_4 \leq 137.5$$

$$f = -0.08x_1 - 0.09x_2 - 0.1x_3 - 0.12x_4 - 0.04x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 550 \\ x_2 - x_6 = 50 \\ x_3 + x_4 + x_7 = 300 \\ x_3 + x_4 - x_8 = 275 \\ x_4 + x_9 = 137.5 \end{cases}$$

Կատարենք Z_1, Z_2 նշանակումները և կազմենք ֆունկցիայի մինիմումը:

$$f = z_1 + z_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 550 \\ x_2 - x_6 + z_1 = 50 \\ x_3 + x_4 + x_7 = 300 \\ x_3 + x_4 - x_8 + z_2 = 275 \\ x_4 + x_9 = 137.5 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	z_1	z_2	b
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	550
1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	300
1	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	1	275
0	0	0	0	$\underline{1}$	0	0	0	0	1	0	0	137.5
	0	1	1	$\underline{1}$	0	-1	0	-1	0	0	0	325

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	z_1	z_2	b
0	1	1	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	275
1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	162.5
1	0	0	$\underline{1}$	0	0	0	0	-1	-1	0	1	137.5
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	137.5
	0	1	$\underline{1}$	0	0	-1	0	-1	-1	0	0	325

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	z_1	z_2	b
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	137.5
1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	50
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	25
1	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	1	137.5
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	137.5
	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	187.5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	z_1	z_2	b
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	87.5
1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	50
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	25
1	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	1	137.5
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	137.5
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	137.5

Այժմ վերադառնանք մեր նախնական ֆունկցիային

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
-0.08	1	0	0	0	1	1	0	1	-1	87.5
-0.09	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	50
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	25
-0.1	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	137.5
-0.12	0	0	0	1	0	0	0	0	1	137.5
	0	0	0	0	-0.04	0.01	0	0.02	-0.02	-41.75

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
-0.08	1	0	0	0	1	1	-1	0	0	62.5
-0.09	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	50
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	25
-0.1	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	162.5
-0.12	0	0	0	1	0	0	0	0	1	137.5
	0	0	0	0	-0.04	0.01	-0.02	0	-0.02	-41.75

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
-0.08	1	0	0	0	1	<u>1</u>	-1	0	0	62.5
-0.09	0	1	0	0	1	0	-1	0	0	112.5
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	25
-0.1	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	162.5
-0.12	0	0	0	1	0	0	0	0	1	137.5
	-0.01	0	0	0	-0.05	<u>0</u>	-0.01	0	-0.02	-42.875

Բոլոր գնահատականները ոչ դրական են, այսինքն ստացել ենք օպտիմալ լուծում, որը հետևյալ վեկտորն է՝

$\vec{x}^* = (0,\ 112.5, 162.5,\ 137.5, 0)$

Նպատակային ֆունկցիան կլինի.

$$f_{min}(\vec{x}^*) = -0.08 * 62.5 - 0.09 * 112.5 - 0.1 * 162.5 - 0.12 * 137.5 - 0.04 * 0$$
$$= -42.875$$

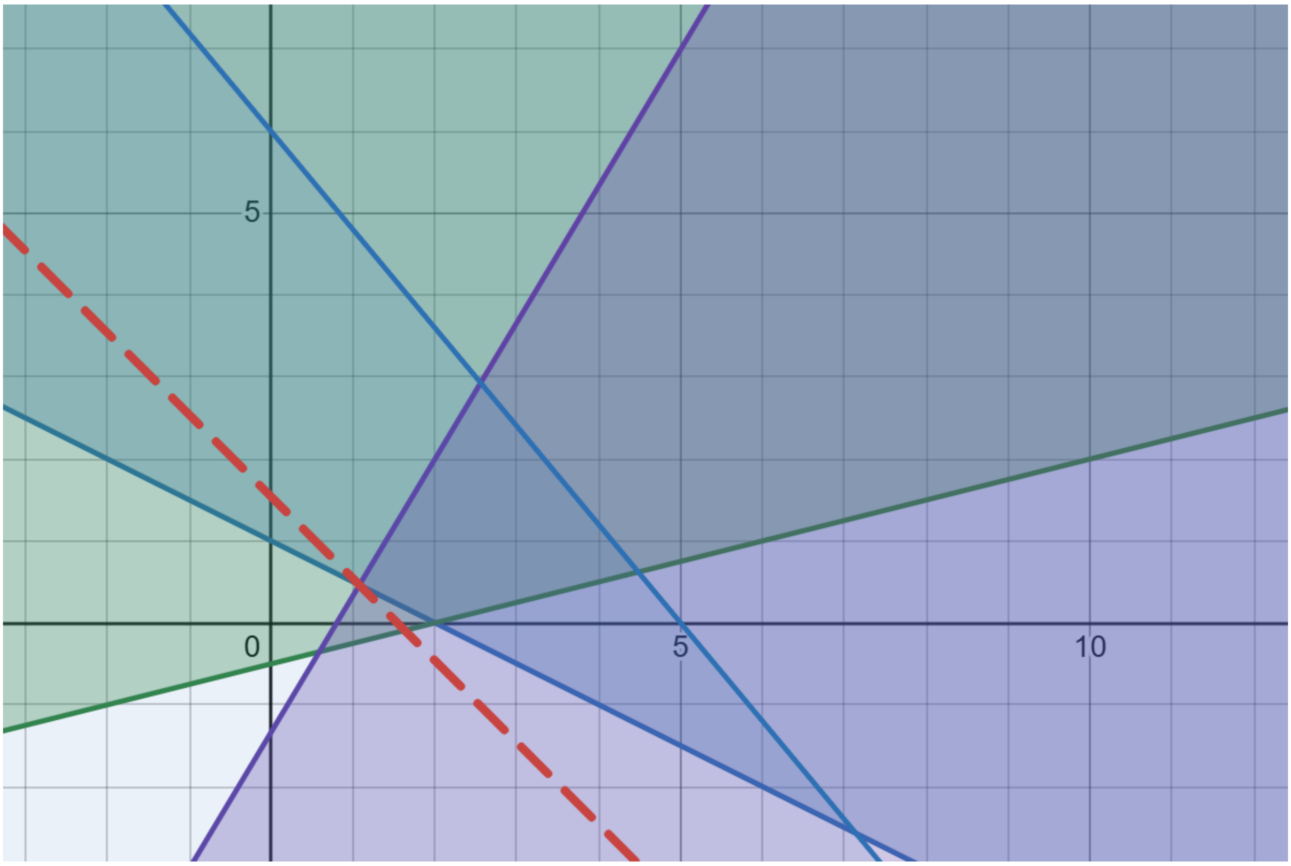
$$f_{max}(\vec{x}^*) = 42.875$$

2. Լուծել գծապատկերի օգնությամբ և սիմպլեքս մեթոդով:

$$f = x_1 + x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 - 4x_2 \leq 2 \\ 5x_1 - 3x_2 \geq 4 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Լուծում:



Նշանակենք

$x_1 + x_2 = C$

Պետք է գտնենք C-ի փոքրագույն արժեքը, որը տվյալ դեպքում x_1+ 2x_2=2 և 5x_1- 3x_2=4 հատման կետն է: Լուծելով կստանանք, որ այդ կետը $x_1 = \frac{14}{13}, x_2 = \frac{6}{13}$

Լուծենք սիմպլեքս մեթոդով:

$$f = x_1 + x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_5 = 4 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_6 = 30 \end{cases}$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Z_1	Z_2	b
1	1	2	-1	0	0	0	1	0	2
0	1	-4	0	1	0	0	0	0	2
1	<u>5</u>	-3	0	0	-1	0	0	1	4
0	6	5	0	0	0	1	0	0	30
	<u>6</u>	-1	0	0	-1	0	0	0	6

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Z_1	Z_2	b
1	0	2.6	-1	0	0	0	1	-0.2	1.2
0	0	-3.4	0	1	0	0	0	-0.2	1.2
1	1	-0.6	0	0	-1	0	0	0.2	0.8
0	0	8.6	0	0	0	1	0	-1.2	25.2
	0	1	0	0	0	0	0	-1	2

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Z_1	Z_2	b
1	0	1	-0.38	0	0.07	0	0.38	-0.07	0.46
0	0	0	-1.30	1	0.46	0	1.307	-0.46	2.769
1	1	0	-0.23	0	-0.15	0	0.23	0.15	1.076
0	0	0	3.3	0	0.5	1	-3.307	-0.53	21.23
	0	0	-0.61	0	-0.07	0	0.61	0.07	1.5384

Վերադառնանք նպատակային ֆունկցիային:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
1	0	1	-0.38	0	0.07	0	0.461
1	0	0	-1.30	1	0.46	0	2.769
1	1	0	-0.23	0	-0.15	0	1.076
1	0	0	3.3	0	0.5	1	21.23
	0	0	-0.61	0	-0.07	0	1.5384

Ստացանք որ $x_1 = 1.076 \sim \frac{14}{13}, x_2 = 0.461 \sim \frac{6}{13}$

Որն էլ մեր գրաֆիկորեն ստացած լուծումն էր

3. Ստուգել տրված վեկտորը բազիսային լուծում է թե ոչ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

$$\vec{x} = (0, 0, 0)$$

Լուծում: Ստուգենք, արդյոք տրված X լուծումը բավարարում է հավասարումների համակարգին՝ փոխարինելով արժեքները:

- $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

  0+0+0=1 (Սխալ)

- $x_1 - x_2 + x_3 = 1$

0+0+0=1 (Սխալ)

Քանի որ տրված լուծումը չի բավարարում համակարգին, հետևաբար այն չի կարող լինել բազիսային լուծում:

4. Գտնել խնդրի բազիսային լուծումները:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \to max \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ -1 \le x_1 \le 10 \\ x_2 \le 1 \end{cases}$$

Լուծում: Բազիսային լուծման համար պետք է հավասարումների քանակին համապատասխան փոփոխականներ վերցնել որպես բազիս, իսկ մնացածները զրոյացնել: Սրա համար կլուծենք `

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

քանակությամբ հավասարումների խմբեր:

1. $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 = 0, \end{cases}$ => $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \ne 0,\ \vec{x}^* = (0,\ 1)$

2. $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 = 10, \end{cases}$ => $x_1 = 10,\ x_2 = 11$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \ne 0,$

$\vec{x}^* = (10, 11)$ չ.բ

3. $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 1, \end{cases}$ => $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0,\ \vec{x}^* = (0, 1)$

4. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \vec{x}^* = (-1,\ 0)$

5. $\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_1 = -1 \end{cases} => \emptyset$

6. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \ \vec{x}^* = (1, 0)$

Այսպիսով **բազիսային** լուծումները 3-ն են՝

(0, 1)
(1, 0)
(-1, 0)

5. Կազմել ԳԾԽ-ի երկակի խնդիրը։

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 15x_3 \to min \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Լուծում: Նախ հավասարումը վերածենք անհավասարումների

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 15x_3 \to min \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Երկակի խնդիրը կլինի `

$$\begin{cases} 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \to max \\ y_1 - y_2 + y_3 \le 2 \\ -2y_1 + 2y_2 + y_3 \le -4 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \le -15 \\ y_i \ge 0, i = 1,3 \end{cases}$$

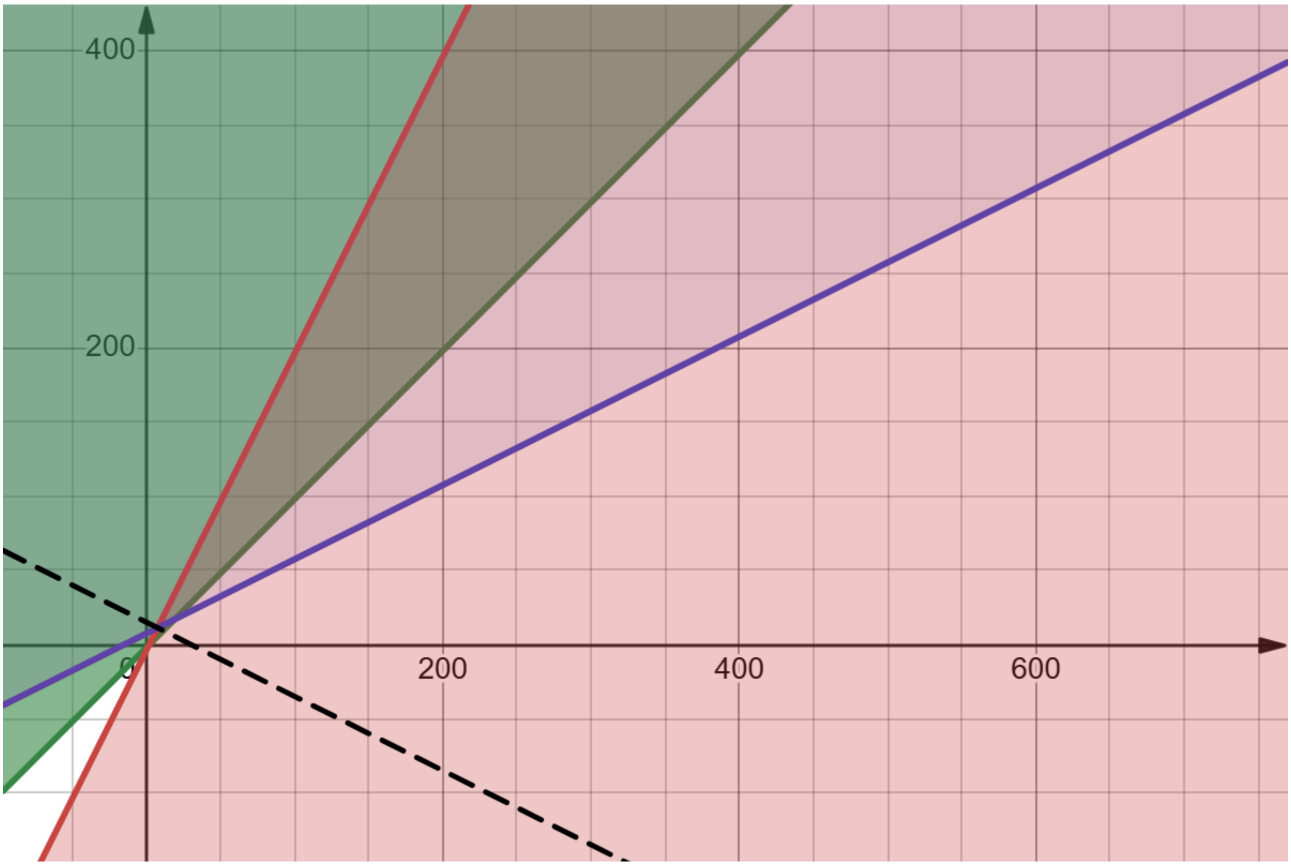
6. Տրված խնդրում գտնել լավագույն լուծումը օգտվելով երկակի խնդրի գրաֆիկական եղանակով ստացված լուծումից:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 15x_3 \to min \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Լուծում: Երկակի խնդիրը կլինի `

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \to max \\ y_1 - y_2 \le 2 \\ -2y_1 + y_2 \le -4 \\ y_1 - 2y_2 \le -15 \\ y_i \ge 0, i = 1,3 \end{cases}$$

Լուծենք գրաֆիկական եղանակով:



Նպատակային ֆունկցիայի արժեքը կլինի մեծագույնը $\vec{y}^* = \infty$: Այն անընդհատ կձգտի դեպի անվերջության:

$f(\vec{y}^*) = \infty$

7. Ստուգել տրված վեկտորը լավագույն լուծում է թե ոչ և այն լուծել սիմպլեքս մեթոդով

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

$\vec{x}^* = (1,1,0,0,)$

Լուծում: Տրված վեկտորը բավարարում է խնդրին, ստուգենք արդյոք այն լավագույն լուծում է: Կազմենք երկակի խնդիրը.

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_3 \to min \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

Կազմենք օպտիմալության պայմանները.

$$\begin{cases} (y_1 + y_2 + y_3 - 1)x_1 = 0 \\ (y_1 - y_2 + y_3 - 1)x_2 = 0 \\ (y_1 + y_2 - y_3 - 1)x_3 = 0 \\ (y_1 - y_2 + y_3 - 1)x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - 1 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 - 1 = 0 \\ 2y_1 + 2y_3 = 2 \end{cases} => \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1 + y_3 = 1 \\ 2y_1 + 2y_3 = 2 \end{cases}$$

Լուծելով համակարգը ստանում ենք $y_1 = 1,\ y_2 = 0, y_3 = 0,$

Այստեղից ստանում ենք, որ $2y_1 + 2y_3 = 2,$ այսինքն նպատակային ֆունցկիաների արժեքները հավասար են, հետևաբար $\vec{x}^*$-ը լավագույն լուծում է:

Այժմ լուծենք խնդիրը սիմպլեքս մեթոդով:

	X_1	X_2	X_3	X_4	Z_1	Z_2	Z_3	b
1	1	1	1	1	1	0	0	2
1	1	-1	1	-1	0	1	0	0
1	1	1	-1	1	0	0	1	2
	3	1	1	1	0	0	0	4

	X_1	X_2	X_3	X_4	Z_1	Z_2	Z_3	b
1	0	2	0	$\underline{2}$	1	-1	0	2
1	1	-1	1	-1	0	1	0	0
1	0	2	-2	2	0	-1	1	2
	0	4	-2	$\underline{4}$	0	-3	0	4

	X_1	X_2	X_3	X_4	Z_1	Z_2	Z_3	b
1	1	0	1	0.5	-0.5	-1	0	1
1	0	1	0	0.5	0.5	1	0	1
1	0	-2	0	-1	0	-1	1	0
	0	-2	0	-2	-1	-3	0	0

Դեռևս մնում է արհեստական փոփոխականները մնացել են բազիսում, սակայն դրանց մոտ ազատ գործակիցը հավասար է զրոյի: Այդ պատճառով կարող ենք ասել որ մեր բոլոր գնահատականները ոչ դրական են, այսինքն ստացել ենք օպտիմալ լուծում, որը հետևյալ վեկտորն է՝

$\vec{x}^* = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$

Նպատակային ֆունկցիան կլինի.

$f_{min}(\vec{x}^*) = -2$

$f_{max}(\vec{x}^*) = 2$

Այսպիսով ստացանք $\vec{x}^* = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$ օպտիմալ լուծում է:

8. Լուծել ոչ գծային ծրագրավորման խնդիրը գծապատկերի միջոցով:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \to ext \\ 4x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 4{x_1}^2 - x_2 \le 2 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

Նախ կազմենք գծապատկերը՝

Ենթադրենք $2x_1 + x_2 = C$, նպատակային ֆունկցիան ստանում է նվազագույն արժեք եթե C=0 =>$x_1 = 0, x_2 = 0$

max կստացվի երկու ֆունկցիաների հատման արդյունքում

$$4x_1 + 3x_2 - 6 = 4{x_1}^2 - x_2 - 2$$

Լուծելով այս անհավասարումը կստանանք՝

$x_1 = -\frac{1+\sqrt{37}}{6}, x_2 = -\frac{20-2\sqrt{37}}{9},$ որն էլ կհանդիսանա max կետ

9. Լուծել մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդիրը:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \to ext \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Տվյալ խնդրի համար կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան.

$$L(x,\lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12) + \lambda_2(x_1 + 2x_2 + x_3 - 10)$$

Գրենք լուծման անհրաժեշտ պայմանը՝ $\nabla L = 0$

$$L'_{x_1} = 4x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$L'_{x_2} = 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$L'_{x_3} = 4x_3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$L'_{\lambda_1} = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$$
$$L'_{\lambda_2} = x_1 + 2x_2 + x_3 - 10 = 0$$

Ստացված հավասարումներով կազմենք համակարգ,

$$\begin{cases} 4x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 4x_3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} \\ x_1 = \frac{7}{3} \\ x_3 = -\frac{7}{3} \\ \lambda_1 = -\frac{16}{3} \\ \lambda_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$L''_{x_1} = 4$
$L''_{x_2} = 2$
$L''_{x_3} = 4$

Որպեսզի ստացված կետը լինի մինիմումի կամ մաքսիմումի կետ, անհրաժեշտ է, որ տրված մատրիցի բոլոր կարգի մինորները լինեն համապատասխանաբար դրական կամ բացասական:
Կազմենք այս արժեքներով մատրից, և ստուգենք բոլոր մինորները

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4>0

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Այսպիսով խնդրի լուծումը կլինի $\left(\frac{7}{3}, \ \frac{8}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, որը կհանդիսանա min կետ, այս կետում նպատակային ֆունկցիան կընդունի իր նվազագույն արժեքը:

10.Լուծել կոտորակագծային ծրագրավորման խնդիրը:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x_1 - x_2 - x_3}{2x_2 + x_3 + 1} \to min \\ \quad -x_1 + x_2 + 3\,x_3 = 8 \\ \quad 2x_1 - x_2 - \ x_3 = 4 \\ \quad x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Կատարենք նշանակում՝ $y_0 = \frac{1}{2x_2+x_3+1}$, այստեղից հետևում է, որ y_i հավասար կլինի՝ $y_i = \frac{x_i}{2x_2+x_3+1} = y_0 x_i$

Համակարգը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \rightarrow min \\ -y_1 + y_2 + 3y_3 = 8y_0 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 = 4y_0 \\ 2y_2 + y_3 + y_0 = 1 \end{cases}$$

Ավելացնելով արհեստական z_1, z_2, z_3 բազիսային փոփոխականներ կստանանք

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 \rightarrow min \\ -8y_0 - y_1 + y_2 + 3y_3 + z_1 = 0 \\ -4y_0 + 2y_1 - y_2 - y_3 + z_2 = 0 \\ y_0 + 2y_2 + y_3 + z_3 = 1 \end{cases}$$

Այժմ լուծենք սիմպլեքս եղանակով՝

	y_0	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	b
1	-8	-1	1	3	1	0	0	0
1	-4	2	-1	-1	0	1	0	0
1	1	0	2	1	0	0	1	1
	-11	1	2	3	0	0	0	1

	y_0	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	b
1	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0
1	$-\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0
1	$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	1
	-3	2	1	0	-1	0	0	1

	y_0	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	b
1	-4	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	0	0
1	-4	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
1	5	0	$\frac{9}{5}$	0	$-\frac{6}{15}$	$-\frac{3}{15}$	1	1
	5	0	$\frac{9}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{6}{5}$	0	1

	y_0	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	b
1	0	0	$\frac{41}{25}$	1	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	0	0
1	0	1	$\frac{26}{25}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
1	1	0	$\frac{9}{25}$	0	$-\frac{6}{15}$	$-\frac{3}{15}$	1	1
	0	0	0	0	-1	$-\frac{1}{5}$	-1	0

Այժմ ստանալով երեք բազիս ետ ենք գալիս սկզբնական հավասարմանը, հանելով բազիսային արհեստական փոփոխականները

		y_0	y_1	y_2	y_3	b
1		0	0	$\frac{41}{25}$	1	$\frac{4}{5}$
1		0	1	$\frac{26}{25}$	0	$\frac{4}{5}$
0		1	0	$\frac{9}{25}$	0	$\frac{1}{5}$
		0	0	$-\frac{15}{25}$	0	0

Այսպիսով ստացանք $y_0 = \frac{1}{5}, y_1 = \frac{4}{5}, y_3 = \frac{4}{5}$ կստանանք $y_2 = 0$

Այժմ հաշվենք մեր x_1, x_2, x_3 փոփոխականները`

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = 4$$

$$x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0$$

$$x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 4$$

Այսպիսով լավագույն լուծումը կլինի (4,0,4)

11.Լուծել ամբողջ թվերով գծային ծրագրավորման խնդիրը Հոմորիի եղանակով:

$$\begin{cases} f(x) = -x_1 + x_4 \to min \\ \quad -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\quad x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Կազմենք սիմպլեքս աղյուսակը`

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	-2	1	1	0	0
1	1	1	0	1	3
	2	1	0	0	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	0	3	1	2	6
1	1	1	0	1	3
	0	-1	0	-2	-3

Այսպիսով ստացանք լուծումը
$x_1 = 3, x_3 = 3,$

$-6 + x_2 + 6 = 0, => \; x_2 = 0, \, x_4 = 0$

Այսպիսով լավագույն լուծումը կլինի (3, 0, 3, 0)

12.Լուծել ոչ գծային ծրագրավորման խնդիրը Կուն-Թակերի թեորեմի օգնությամբ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow min \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

Տվյալ խնդրի համար կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Այժմ ստուգենք Կուն Թակերի թեորեմի պայմանները՝

$$\begin{cases} \nabla_x \mathrm{L}(\vec{\mathrm{x}}^*, \vec{\lambda}^*) = 0, \\ \mathrm{g_i}(\vec{\mathrm{x}}^*) \leq 0, \quad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}}, \\ \vec{\lambda}_\mathrm{i}^* \mathrm{g_i}(\vec{\mathrm{x}}^*) = 0, \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}}, \end{cases}$$

$$L'_{x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$$
$$L'_{x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Եթե $\lambda_1 = 0$ ապա կստանանք առաջին հավասարման մեջ 1=0 կգանք հակասության:

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Համակարգի առաջին և երկրորդ տողերից արտահայտենք x_1 և x_2:

$x_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}, \, x_2 = -\frac{1}{2\lambda_1}$

$$\frac{1}{4\lambda_1^2}+\frac{1}{4\lambda_1^2}=1$$

Կստանանք $\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_1=-\frac{1}{2\lambda_1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=-\frac{1}{2\lambda_1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Որն էլ բավարարում է համակարգին և կստանանք, որ այն հանդիսանում է min կետ:

13.Լուծել քառակուսային ծրագրավորման խնդիրը:

$$\begin{cases} {x_1}^2+{x_2}^2-10x_1-15x_2\to min \\ 2x_1+3x_2\le 13 \\ 2x_1+x_2\le 10 \\ x_i\ge 0, i=1{,}2 \end{cases}$$

Տվյալ խնդրի համար կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան և գրենք Կուն-Թակերի 3-րդ թեորեմի պայմանները.

$$L(\overline{x},\overline{\lambda})={x_1}^2+{x_2}^2-10x_1-15x_2+\lambda_1(2x_1+3x_2-13)$$
$$+\lambda_2(2x_1+x_2-10)$$

$$\begin{cases} L'_{x_1}=2x_1+2\lambda_1+2\lambda_2-10=\mu_1\ \ (\ge 0) \\ L'_{x_2}=2x_2+3\lambda_1+\lambda_2-15=\mu_2\ \ (\ge 0) \\ L'_{\lambda_1}=2x_1+3x_2-13=-x_3\ \ (\ge 0) \\ L'_{\lambda_2}=2x_1+x_2-10=-x_4\ \ (\ge 0) \\ x_1\mu_1=x_2\mu_2=x_3\lambda_1=x_4\lambda_2=0\quad (*) \end{cases}$$

Ավելացնենք արհեստական z_1, z_2, բազիսային փոփոխականներ և լուծենք սիմպլեքս մեթոդով՝ յուրաքանչյուր քայլում ստուգելով (*) պայմանները.

$$\begin{cases} z_1+z_2\to min \\ 2x_1+2\lambda_1+2\lambda_2-\mu_1+z_1=10 \\ 2x_2+3\lambda_1+\lambda_2-\mu_2+z_2=15 \\ 2x_1+3x_2+x_3=13 \\ 2x_1+x_2+x_4=10 \\ x_i\ge 0, x_i\in Z, i=1{,}2{,}3{,}4 \\ z_j\ge 0, j=1{,}2{,}3 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	z_1	z_2	b
1	$\underline{2}$	0	0	0	-1	0	2	2	1	0	10
1	0	2	0	0	0	-1	3	1	0	1	15
0	2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	13
0	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	10
	$\underline{2}$	2	0	0	-1	-1	5	3	0	0	25

x_1	x_2	x_3	x_4	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	z_1	z_2	b
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	5
0	2	0	0	0	-1	3	1	0	1	15
0	3	1	0	1	0	-2	-2	-1	0	3
0	1	0	1	1	0	-2	-2	-1	0	0
0	2	0	0	0	-1	3	1	-1	0	15

x_1	x_2	x_3	x_4	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	z_1	z_2	b
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	5
0	0	0	-2	-2	-1	7	5	2	1	15
0	0	1	-3	-2	0	4	4	2	0	3
0	1	0	1	1	0	-2	-2	-1	0	0
0	0	0	-2	-2	-1	7	5	1	0	15

x_1	x_2	x_3	x_4	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	z_1	z_2	b
1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{17}{4}$
0	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1	2	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{45}{4}$
0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$
0	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1	2	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{45}{4}$

x_1	x_2	x_3	x_4	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	z_1	z_2	b
1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{17}{4}$
0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{2}$	-1	0	-2	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{39}{4}$
0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$
0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{2}$	-1	0	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{39}{4}$

x_1	x_2	x_3	x_4	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	z_1	z_2	b
1	0	$\frac{2}{13}$	0	$-\frac{18}{52}$	$\frac{3}{13}$	0	$\frac{12}{26}$	$\frac{18}{52}$	$-\frac{3}{13}$	2
0	0	$-\frac{7}{13}$	1	$\frac{6}{13}$	$-\frac{4}{13}$	0	$-\frac{8}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{13}$	3
0	0	$-\frac{2}{13}$	0	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{6}{26}$	1	$\frac{7}{13}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{3}{13}$	3
0	1	$\frac{3}{13}$	0	$\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0	$-\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	3
0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	0

Ստանում ենք՝

$x_1 = 2$ $\mu_1 = 0$

$x_2 = 3$ $\mu_2 = 0$

$x_3 = 0$ $\lambda_1 = 3$

$x_4 = 3$ $\lambda_2 = 0$

Ստացանք՝ $\vec{x}^* = (2, 3)$

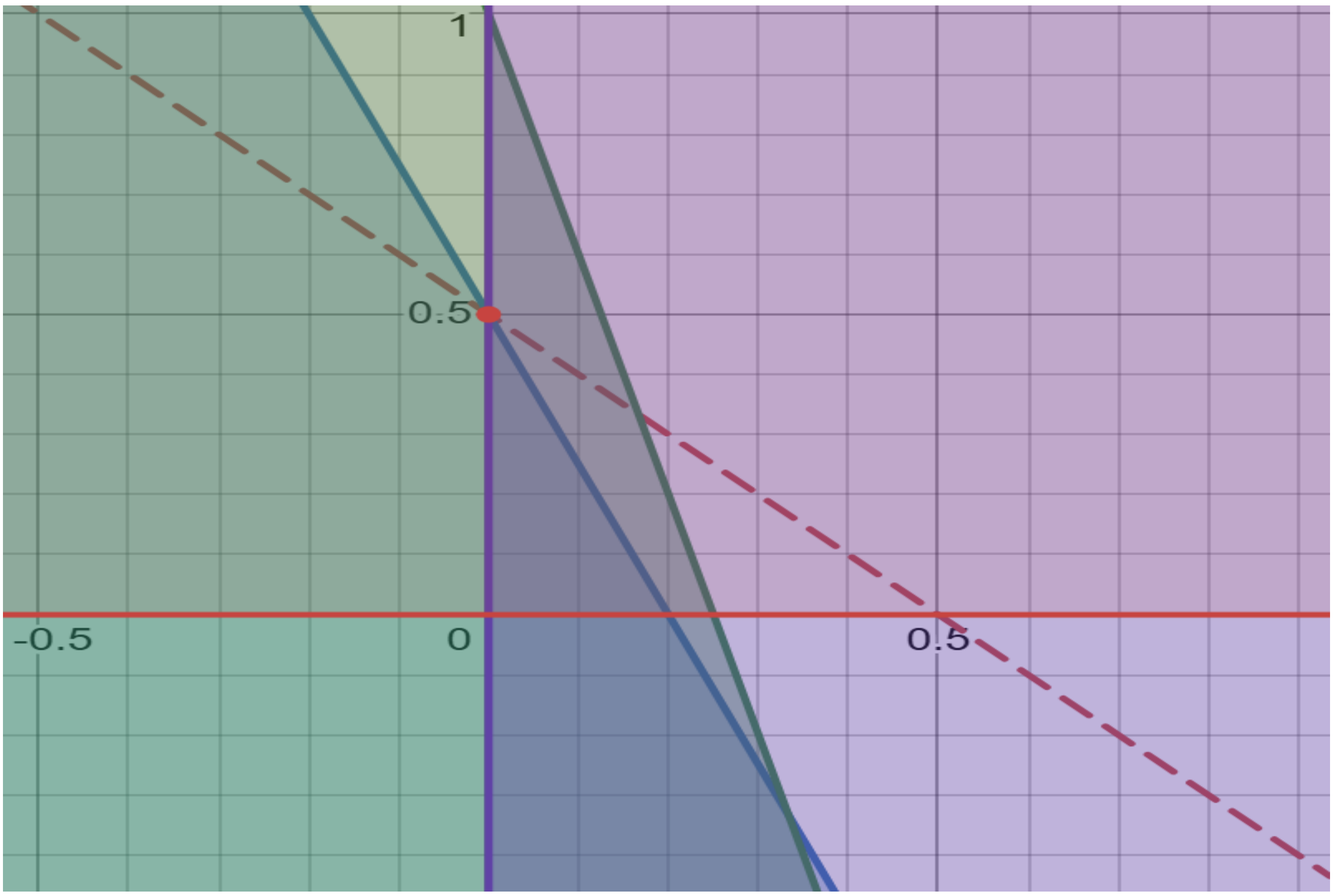
$$f_{min}(\vec{x}^*) = -52$$

14. Լուծել մատրիցային խաղը:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + (3) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Կազմենք համապատասխան ԳԾԽ-ն:



$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to max \\ 5x_1 + 2x_2 \le 1 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 1 \\ x_i \ge 0, \qquad i = 1,2 \end{cases}$$

Խնդիրը լուծենք գծապատկերների մեթոդով:

Ստացանք՝ $\vec{x}^* = (0,\ \frac{1}{2})$

$$f_{min}(\vec{x}^*) = \frac{1}{2}$$

$$\gamma_0 = f_{max}(\vec{x}^*) = \frac{1}{2}$$

Այժմ կազմենք խնդրի երկակի խնդիրը.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \to min \\ 5y_1 + 4y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

Գրենք օպտիմալության պայմանները.

$$\begin{cases} (5y_1 + 4y_2 - 1)x_1 = 0 \\ (2y_1 + y_2 - 1)x_2 = 0 \\ (5x_1 + 2x_2 - 1)y_1 = 0 \\ (4x_1 + x_2 - 1)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2y_1 + y_2 - 1)\frac{1}{2} = 0 \\ 0 * y_1 = 0 \\ \left(\frac{1}{2} - 1\right)y_2 = 0 \end{cases}$$

Այս պայմաններից ստացանք $y_2 = 0$
Օգտվելով

$\gamma_0 = f_{max}(\vec{x}^*) = \frac{1}{2}$

Կստանանք $y_1 = \frac{1}{2}$

Որն էլ լուծելով ստանում ենք` $\vec{y}^* = (\frac{1}{2}, 0)$

Խաղի արժեքը A+(3) մատրիցի համար ստանում ենք՝

$$\omega_0' = \frac{1}{\gamma_0} = 2$$

A մատրիցի համար այն կլինի՝

$$\omega_0 = \omega_0' - 3 = -1$$

Առաջին խաղացողի լավագույն վարվելակերպը կլինի՝

$$s_0 = \frac{\vec{y}^*}{\gamma_0} = (1,0)$$

Երկրորդ խաղացողի լավագույն վարվելակերպը կլինի՝

$$t_0 = \frac{\vec{x}^*}{\gamma_0} = (0,1)$$