

Geometrie

Einführung zu Mannigfaltigkeiten und Komplexer Analysis

CONTENTS

1. Kurzrepetition Topologie	1
2. Topologische Mannigfaltigkeiten	3
3. Glatte Mannigfaltigkeiten	5
4. Hügelfunktionen und die Zerlegung der Eins	9
5. Tangentialräume von Mannigfaltigkeiten	13
References	19

1. KURZREPETITION TOPOLOGIE

Definition 1.1. Sei X eine Menge. Eine Topologie auf X ist eine Familie τ von Teilmengen von X , welche Folgendes erfüllen:

- (1) X und \emptyset sind in τ enthalten,
- (2) die Vereinigung jeder Familie von Elementen in τ ist wieder in τ enthalten,
- (3) jeder Schnitt von endlich vielen Elementen in τ ist wieder in τ enthalten.

Die Elemente in τ nennt man *offene Mengen*. Ein topologischer Raum ist ein paar (X, τ) , wo τ eine Topologie auf X ist. Wenn $U \in \tau$, dann nennt man $X \setminus U$ *abgeschlossen*.

Eine Teilmenge von X nennt man *abgeschlossen*, wenn sie das Komplement einer offenen Teilmenge von X ist.

Example 1.2. (1) $\tau = \{X, \emptyset\}$ ist die triviale Topologie auf einer Menge X .

- (2) Wenn τ die Potenzmenge von X ist, dann nennt man τ die diskrete Topologie. Dann ist jedes $x \in X$ offen und abgeschlossen.
- (3) $X = \mathbb{R}^n$, τ ist die Familie der Mengen $U \subset X$, so dass für jedes $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.
- (4) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Familie τ_d folgender Mengen ist die von d induzierte Topologie auf X : $U \subset X$ und für jedes $x \in U$ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $\{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$.
- (5) $X = \mathbb{Z}$, τ die Familie der endlichen Mengen in \mathbb{Z} und \mathbb{Z} ist *keine* Topologie, weil die Vereinigung aller endlichen Teilmengen von \mathbb{Z} , welche nicht 0 enthalten nicht endlich ist und nicht \mathbb{Z} ist.
- (6) Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume. Wir definieren die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ wie folgt: eine offene Menge in $X \times Y$ ist eine (beliebige) Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen $U \times V$ ist, wobei $U \subset X, V \subset Y$ offen.
- (7) Die Euklidische Topologie auf \mathbb{R}^n ist die Produkttopologie der Euklidischen Topologie auf \mathbb{R} (Übung).
- (8) Sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Die induzierte Topologie auf Y ist wie folgt definiert: eine Menge $U \subset Y$ ist offen, wenn es $V \subset X$ offen gibt, so dass $U = Y \cap V$.

Definition 1.3. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (1) Sei $x \in X$. Eine Umgebung von x ist eine Teilmenge $V \subset X$, welche eine offene Menge U enthält, so dass $x \in U$.
- (2) Eine Basis von τ ist eine Familie \mathcal{B} von offenen Mengen von X , so dass jede offene Teilmenge von X eine Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} ist.

Example 1.4. (1) (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Familie der offenen Kugeln eine Basis für τ_d .

- (2) Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ ein topologischer Raum. Dann ist $\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^n U_i \times V_i \mid U_i \subset X, V_i \subset Y \text{ offen}, n \geq 1\}$ eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$.

Wenn \mathcal{B}' (resp. \mathcal{B}'') eine Basis von τ (resp. τ') ist, dann ist $\{\cap_{i=1}^n U_i \times V_i \mid U_i \in \mathcal{B}', V_i \in \mathcal{B}'', n \geq 1\}$ eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$.

Definition 1.5. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (1) (X, τ) ist *kompakt*, wenn es für jede Überdeckung $X = \cup_{i \in I} U_i$ von offenen Mengen in X $i_1, \dots, i_n \in I$ gibt, so dass $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
- (2) (X, τ) ist *Hausdorff*, wenn es für jede $x, y \in X$ zwei disjunkte Umgebungen $U, V \in \tau$ gibt, so dass $x \in U$ und $y \in V$.
- (3) (X, τ) erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* (is second-countable), wenn τ eine abzählbare Basis hat.

Example 1.6. (1) Die diskrete Topologie auf einer Menge X ist Hausdorff aber nicht kompakt (ausser X ist endlich).

- (2) Die triviale Topologie ist kompakt aber nicht Hausdorff.
- (3) Abgeschlossene beschränkte Mengen in einem Metrischen Raum sind kompakt.
- (4) Jeder Metrische Raum (X, d) ist Hausdorff und hat eine abzählbare Basis. Wenn X nicht beschränkt ist, ist X nicht kompakt.
- (5) Die diskrete Topologie auf \mathbb{R} hat keine abzählbare Basis.

Lemma 1.7. Sei (X, τ) ein Topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge mit der induzierten Topologie. Wenn X Hausdorff ist, dann ist Y Hausdorff. Wenn X das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann tut dies auch Y .

Proof. Topologievorlesung □

Definition 1.8. Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei \mathcal{B} eine Basis von τ' . Wir sagen, dass f *stetig* ist, wenn das Urbild jeder offenen Menge in Y wieder offen ist.

Equivalent, und praktischer in der Anwendung

Lemma 1.9. Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei \mathcal{B} eine Basis von τ' . Dann ist f stetig genau dann, wenn $\forall x \in X$ und $\forall V \in \mathcal{B}$ mit $f(x) \in V$, die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Proof. Topologievorlesung □

Example 1.10. Sei $Y = X$.

- (1) Wenn $\tau = \{X, \emptyset\}$ und $\tau' = \mathcal{P}(X)$, dann ist die Identität nicht stetig
- (2) Wenn $\tau = \mathcal{P}(X)$ und $\tau' = \{X, \emptyset\}$, dann ist die Identität stetig.

Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume und betrachte die Produkttopologie auf $X \times Y$. Dann sind beide Projektionen $p_X: X \times Y \rightarrow X$ und $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ stetig. In der Tat, wenn $U \subset X$ offen, dann ist $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ und wenn $V \subset Y$ offen, dann ist $p_Y^{-1}(V) = X \times V$.

Example 1.11. Wir betrachten \mathbb{R}^n, \mathbb{R} mit der Euklidischen Topologie. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann ist Stetigkeit im analytischen Sinne äquivalent zur Stetigkeit im topologischen Sinne. Nämlich:

$$\begin{aligned} & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sd } \forall x_1 \in X \text{ sd } d(x_0, x_1) < \delta \text{ gilt } d(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon \\ \iff & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sd } \forall x_1 \in B_\delta(x_0) \subset X \text{ gilt } f(x_1) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \\ \iff & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sd } f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \\ \iff & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sd } B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \\ \iff & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \text{ eine Umgebung von } x_0 \end{aligned}$$

Definition 1.12. Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen, dass f ein *Homöomorphismus* ist, wenn f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Wir sagen, dass X und Y homeomorph sind.

Example 1.13. (1) Wenn $Y = X$ und $\tau' = \tau$, dann ist die Identität ein Homöomorphismus.
 (2) $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto x^2$, ist ein Homöomorphismus.
 (3) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto e^x$ ist ein Homöomorphismus.

2. TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEITEN

Mannigfaltigkeiten sind topologische Räume, die lokal aussehen wie \mathbb{R}^n .

Definition 2.1. Eine topologische Mannigfaltigkeit M (von dimension n) ist ein *nicht-leerer* Hausdorff topologischer Raum, welcher das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und so dass es für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ gibt, welche homöomorph (in der induzierten Topologie) zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n ist.

Wir sagen, dass n die dimension von M ist und schreiben $n = \dim M$.

Lemma 2.2. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Die Hausdorffbedingung impliziert: jede endliche Teilmenge ist abgeschlossen, Grenzwerte von konvergenten Folgen sind eindeutig.

Proof. Topologievorlesung. □

Die Bedingung des 2. Abzählbarkeitsaxioms wird für sogenannte Zerlegung der Eins wichtig, welche

Lemma 2.3. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Menge. Dann ist U (mit der induzierten Topologie) eine Mannigfaltigkeit.

Proof. Nach Lemma 1.7, ist U Hausdorff und erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom. Sei $p \in U$ und $n = \dim M$. Dann gibt es eine offene Teilmenge $p \in V \subset M$, eine offene Teilmenge $\hat{V} \subset \mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $f: V \rightarrow \hat{V}$. Dann ist $U \cap V \subset M$ offen und $f|_{U \cap V}: U \cap V \rightarrow f(U \cap V) \subset \hat{V}$ ein Homöomorphismus. □

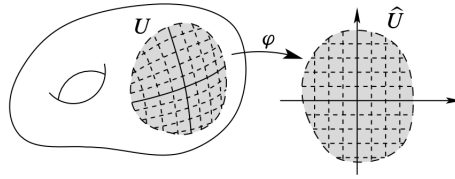
Definition 2.4. Sei M eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Eine *Karte* von M ist ein Paar (U, φ) , wobei $U \subset M$ eine offene Teilmenge ist und $\varphi: U \rightarrow \hat{U}$ ein Homöomorphismus von U zu einer offenen Menge $\varphi(U) = \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$. Wir nennen U auch den Domain von (U, φ) .

Wenn $p \in U$, sagen wir, dass (U, φ) eine Koordinatenumgebung von p ist.

Den Homöomorphismus φ nennt man *Koordinatenabbildung*. Wir können

$\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ schreiben, und die x_i nennt man *lokale Koordinaten* von U .

Wenn $\varphi(U)$ eine Kugel (bzw Würfel) ist, dann nennt man (U, φ) eine *Koordinatenkugel* (bzw -würfel).



Example 2.5. (1) $M = \mathbb{R}^n$

- (2) M eine abzählbare Vereinigung von Punkten, $n = 0$
- (3) $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (Übungen)
- (4) $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ (Übungen)
- (5) Graph: sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig. Sei

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \mid \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid x \in U, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$$

mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Die Projektion $p_1: \Gamma(f) \rightarrow U$ die Projektion auf U ist stetig (da sie die Einschränkung der stetigen Projektion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist). p_1 hat ein Inverses, nämlich $q_1: x \mapsto (x, f(x))$, und q_1 ist stetig, weil f stetig ist. Also ist $\Gamma(f)$ eine topologische Mannigfaltigkeit.

- (6) Ein endlich dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} (Übungen).
- (7) Das Produkt $M_1 \times \dots \times M_k$ von topologischen Mannigfaltigkeiten M_1, \dots, M_k ist wieder eine topologische Mannigfaltigkeit.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $A \subset X$ *relativ kompakt (oder präkompakt)* wenn \overline{A} kompakt in X ist.

Lemma 2.6. Jede topologische Mannigfaltigkeit hat eine abzählbare Basis von präkompakten Koordinatenkugeln, und sie ist überdeckt von abzählbar vielen präkompakten Koordinatenkugeln.

Proof. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Jeder Punkt $p \in M$ ist in einer Koordinatenumgebung (U_p, φ_p) enthalten. Die Menge $\varphi_p(U_p) \subset \mathbb{R}^n$ hat eine abzählbare Basis von präkompakten offenen Kugeln, nämlich die abzählbare Familie der Kugeln $B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n \cap \varphi_p(U_p), r \in \mathbb{Q}_{>0}$, so dass $B_s(x) \subset \varphi_p(U)$ mit $s > r$. Jeder solche Ball ist präkompakt in $\varphi_p(U_p)$. Da M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, hat M eine Überdeckung von abzählbar vielen Koordinatenumgebungen (U_p, φ_p) . Daher bilden die Urbilder der offenen Kugeln $B_r(x)$ eine abzählbare Basis für die Topologie von M . Sei $V \subset U_p$ das Urbild einer solchen Kugel. Weil φ_p ein Homöomorphismus ist, ist der Abschluss von V in U_p (bzgl der induzierten Topologie auf U_p) kompakt. Da M Hausdorff ist, ist V in M abgeschlossen. Also ist der Abschluss von V in M gleich dem Abschluss von V in U_i . Es folgt, dass V auch in M präkompakt ist. \square

Ein topologischer Raum (X, τ) ist lokal kompakt, wenn es für jeden Punkt $p \in X$ eine Umgebung U gibt und eine kompakte Menge $K \subset X$, so dass $p \in U \subset K$. Man nennt K eine *kompakte Umgebung* von p .

Lemma 2.7. Jede Mannigfaltigkeit ist lokal kompakt.

Proof. Nach Lemma 2.6 hat jede Mannigfaltigkeit eine Basis aus präkompakten Mengen. Also hat jeder Punkt eine präkompakte Umgebung und daher auch eine kompakte Umgebung (den Abschluss der präkompakten Umgebung). \square

Definition 2.8. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von Teilmengen von M . Wir nennen \mathcal{U} *lokal endlich*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung gibt, welche nur endlich viele U_α nicht-leer schneidet.

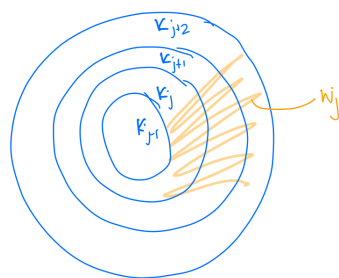
Lemma 2.9. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine lokal endliche Familie von Teilmengen von X . Dann ist $\{\overline{X_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich und $\overline{\cup_\alpha X_\alpha} = \cup_\alpha \overline{X_\alpha}$.

Proof. Topologie Vorlesung (oder Übung). □

Proposition 2.10. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ irgendeine offene Überdeckung von M . Dann hat M eine lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{V} := \{V_\beta\}_{\beta \in B}$, so dass $\forall \beta \in B$ es $\alpha \in A$ gibt mit $V_\beta \subset U_\alpha$.

Mehr noch, wenn \mathcal{B} eine Basis der Topologie von M ist, dann gibt es eine offene Überdeckung \mathcal{V} wie oben, welche abzählbar ist, so dass $V_\beta \in \mathcal{B} \forall \beta \in B$.

Proof. Wir bemerken, dass die zweite Aussage stärker als die erste ist. Es reicht also, nur die zweite zu zeigen. Sei $\{K_j\}_{j=1}^\infty$ eine Überdeckung von M von kompakten Mengen K_j , so dass $K_j \subset \text{Int} K_{j+1}$ für alle $j \geq 1$; sie existiert, weil M Hausdorff und lokal kompakt ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt [1, Prop A.60]. Für jedes j , sei $V_j := K_{j+1} \setminus \text{Int} K_j$ und $W_j := \text{Int} K_{j+2} \setminus K_{j-1}$ (wobei $K_j := \emptyset$ für $j < 1$). Dann ist V_j kompakt, W_j ist offen und $V_j \subset W_j$. Da \mathcal{B} eine Basis der Topologie von M ist, gibt es $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset W_j$. Die Familie $\{B_x\}_{x \in V_j}$ ist eine offene Überdeckung von V_j . Da V_j kompakt ist, hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung $\{B_{x_{k,j}}\}_{k=1}^{N_j}$. Die Vereinigung $\cup_{k,j} B_{x_{k,j}}$ ist eine abzählbare Überdeckung von M und $B_{x_{k,j}} \subset W_j \forall j$. Wir bemerken, dass $W_j \cap W_i = \emptyset$, ausser $j-2 \leq i \leq j+2$:



$$W_j \cap W_i \neq \emptyset \Rightarrow$$

einer der 3 Ringe ist in W_i .

Wenn $K_i \setminus K_{i-1}$ der innerste Ring von W_i ist, dann ist $i = j+2$.

Wenn einer der kleineren Ringe der innerste Ring von W_i ist, ist $i < j+2$.

Wenn der kleinste Ring von W_j der grösste Ring von W_i ist, dann ist $j = i+2$.

Also $j-2 \leq i \leq j+2$.

Es folgt, dass es für jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung gibt, die in nur endlich vielen $B_{x_{k,j}}$ enthalten ist. □

3. GLATTE MANNIGFALTIGKEITEN

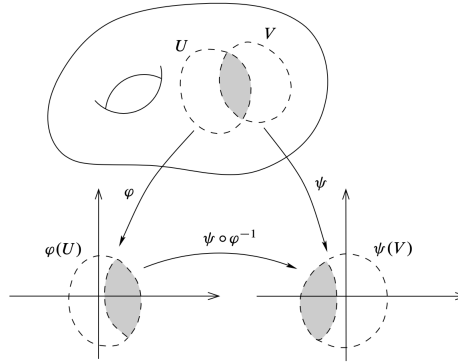
Definition 3.1. Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $F: U \rightarrow V$ eine Abbildung. Wir nennen F *glatt*, wenn jede Komponente von $F = (F_1, \dots, F_m)$ stetige partielle Ableitungen jeder Ordnung hat. Wir sagen auch, dass F C^∞ ist.

Wenn F zusätzlich bijektiv ist und F^{-1} glatt, nennen wir F ein *Diffeomorphismus*.

Wir bemerken, dass glatte Abbildungen stetig sind und Diffeomorphismen sind im Speziellen Homöomorphismen.

Definition 3.2. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $(U, \varphi), (V, \varphi)$ Koordinatenumgebungen auf M , so dass $U \cap V \neq \emptyset$.

- (1) Wir nennen $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ einen *Kartenwechsel*.



Da φ, ψ Homöomorphismen sind, ist $\psi \circ \varphi^{-1}$ auch ein Homöomorphismus.

- (2) Wir sagen, $(U, \varphi), (V, \psi)$ sind glatt kompatibel, wenn entweder $U \cap V = \emptyset$ oder $\psi \circ \varphi^{-1}$ glatt ist.
- (3) Ein Atlas von M ist eine Familie von Karten, deren Domain M überdecken. Ein Atlas ist *glatt*, wenn jedes Paar von Karten glatt kompatibel sind. In diesem Falle, auch der Kartenwechsel $\varphi \circ \psi^{-1}$ glatt und daher ist $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein Diffeomorphismus.
- (4) Ein glatter Atlas \mathcal{A} ist *maximal*, wenn er in keinem anderen glatten Atlas enthalten ist (i.e. jede Karte, die glatt kompatibel mit jeder Karte in \mathcal{A} ist, ist schon in \mathcal{A} enthalten).

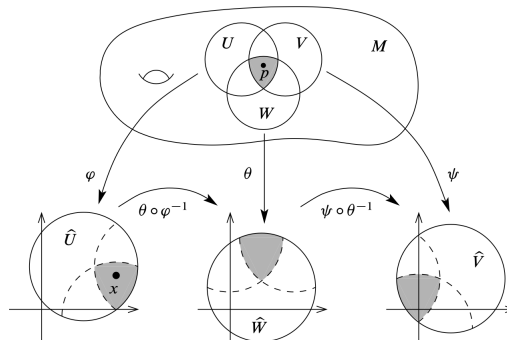
Wir sagen, dass M eine glatte Struktur hat, wenn sie einen glatten Atlas hat. Eine glatte Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, \mathcal{A}) , wo \mathcal{A} ein maximaler Atlas ist. Meistens lassen schreiben wir M anstatt (M, \mathcal{A}) .

Example 3.3. Sei $\{(\mathbb{R}, x^3)\}$ eine glatte Struktur auf \mathbb{R} , da $x \mapsto x^3$ ein Homöomorphismus ist und jeder Kartenwechsel glatt ist. Diese glatte Struktur ist nicht mit der standard glatten Struktur (\mathbb{R}, id) glatt kompatibel, da der Kartenwechsel $id_{\mathbb{R}} \circ (x^3)^{-1} = \sqrt[3]{x}$ nicht glatt ist.

Proposition 3.4. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.

- (1) Jeder glatte Atlas \mathcal{A} von M ist in einem eindeutigen maximalen Atlas enthalten, welchen wir die durch \mathcal{A} bestimmte glatte Struktur nennen.
- (2) Zwei glatte Atlase von M bestimmen die gleiche glatte Struktur genau dann, wenn ihre Vereinigung ein glatter Atlas ist.

Proof. (1) Sei \mathcal{A} ein glatter Atlas von M und sei $\overline{\mathcal{A}}$ die Familie aller Karten von M , welche glatt kompatibel mit den Karten in \mathcal{A} sind. Wir bemerken, dass $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Wir zeigen, dass $\overline{\mathcal{A}}$ ein glatter Atlas ist. Seien $(U, \varphi), (V, \psi)$ zwei Karten in $\overline{\mathcal{A}}$ und $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ irgendein Punkt. Da die Domains der Karten in \mathcal{A} die Mannigfaltigkeit M überdecken, gibt es eine Karte (W, θ) in \mathcal{A} , so dass $p \in W$ (siehe Bild).



Jede Karte in $\overline{\mathcal{A}}$ ist glatt kompatibel mit (W, θ) , also sind $\theta \circ \varphi^{-1}$ und $\psi \circ \theta^{-1}$ glatt (da, wo sie definiert sind). Da $p \in U \cap V \cap W$, ist $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1})$ glatt in einer Umgebung von x . Es folgt, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ in jeder Umgebung des Punktes von $\varphi(U \cap V)$ glatt ist. Also ist $\overline{\mathcal{A}}$ ein glatter Atlas.

Wir zeigen jetzt, dass $\overline{\mathcal{A}}$ ein maximaler glatter Atlas ist. In der Tat, nach Definition von $\overline{\mathcal{A}}$, jede Karte von M , welche glatt kompatibel mit jeder Karte in $\overline{\mathcal{A}}$ ist, ist auch glatt kompatibel mit jeder Karte in \mathcal{A} . Jeder solche Karte ist also schon in $\overline{\mathcal{A}}$ enthalten. Also ist $\overline{\mathcal{A}}$ maximal.

Eindeutigkeit: Sei \mathcal{B} ein weiterer maximaler glatter Atlas, welcher \mathcal{A} enthält. Da jede Karte in \mathcal{B} glatt kompatibel mit jeder Karte von \mathcal{A} ist, ist jede Karte in \mathcal{B} schon in \mathcal{A} enthalten. Da \mathcal{B} maximal ist, folgt $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$.

(2) Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei glatte Atlase von M , welche die selbe glatte Struktur \mathcal{C} bestimmen.

Nach (1), ist \mathcal{C} die Familie der Karten von M , welche mit allen Karten in \mathcal{A} und allen Karten in \mathcal{B} glatt kompatibel sind, und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Es folgt, dass alle Karten in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mit allen Karten in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ glatt kompatibel sind.

Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei glatte Atlase von M , so dass $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ein glatter Atlas ist. Nach (1), ist $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ in einem eindeutigen maximalen Atlas \mathcal{C} enthalten. Jede Karte in \mathcal{C} ist glatt kompatibel mit \mathcal{A} (bzw. \mathcal{B}), also ist $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{A}}$ (bzw. $\subset \overline{\mathcal{B}}$). Da \mathcal{C} maximal ist, folgt $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{B}}$. \square

Definition 3.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Karte (U, φ) von M , welche in einem maximalen glatten Atlas enthalten ist, nenne wir *glatte Karte*, und φ *glatte Koordinatenabbildung* etc.

Definition 3.6. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Wir nennen eine Teilmenge $B \subset M$ eine *reguläre Koordinatenkugel*, wenn es eine glatte Koordinatenkugel $B' \supset \overline{B}$ gibt und glatte Koordinatenabbildung $\varphi: B' \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$\varphi(B) = B_r(0), \quad \varphi(\overline{B}) = \overline{B_r(0)}, \quad \varphi(B') = B_{r'}(0)$$

für irgendwelche $r, r' \in \mathbb{R}, r' > r$.

Lemma 3.7. Jede glatte Mannigfaltigkeit hat eine abzählbare Basis von regulären Koordinatenkugeln

Proof. Wie Lemma 2.6 (Übung). \square

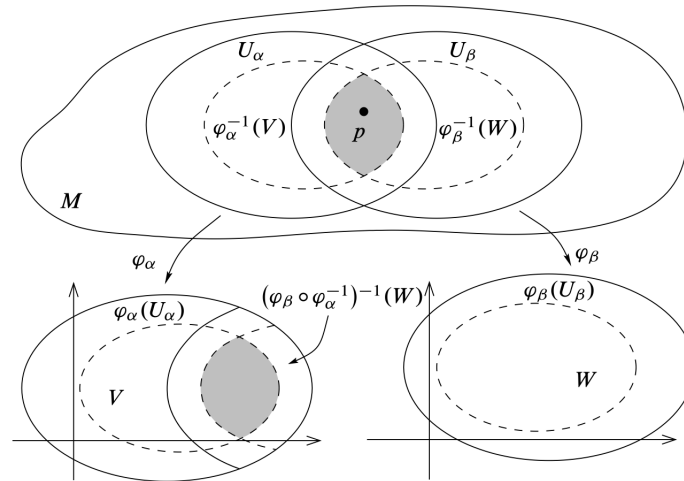
Lemma 3.8 (Smooth manifold Chart Lemma). Sei M eine Menge, $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine Familie von Teilmengen $U_\alpha \subset M$ und $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen, so dass die folgenden Bedingungen gelten.

- (1) $\forall \alpha, \varphi_\alpha(U_\alpha)$ ist offen in \mathbb{R}^n und φ_α ist eine Bijektion zwischen U_α und $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.
- (2) $\forall \alpha, \beta$, sind die Mengen $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ und $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen in \mathbb{R}^n .
- (3) Wenn $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann ist $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ glatt (C^∞).
- (4) M wird von abzählbar vielen U_α überdeckt.
- (5) Wenn $p, q \in M$ verschiedene Punkte sind, dann gibt es entweder ein U_α , so dass $p, q \in U_\alpha$, oder es gibt U_α, U_β , so dass $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ und $p \in U_\alpha$ und $q \in U_\beta$.

Dann hat M eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass jedes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ eine Karte von M ist.

Proof. Zuerst definieren wir eine Topologie: wir nehmen alle Mengen der Form $\varphi_\alpha^{-1}(V)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, als Basis. Wir zeigen jetzt, dass dies eine Topologie bestimmt. Dazu reicht es zu zeigen, dass für alle offenen Mengen $V, W \subset \mathbb{R}^n$ und alle α, β , die Menge $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$

wieder in der Basis ist (siehe Bild)



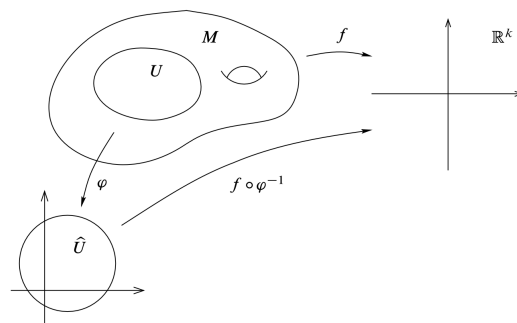
(3) impliziert, dass $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen ist. (2) impliziert, dass $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)$ offen in \mathbb{R}^n ist. Es folgt, dass

$$\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) = \varphi_\alpha^{-1}(V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W))$$

eine Basis Menge ist. Wir haben also eine Topologie auf M definiert. Nach Definition dieser Topologie und nach (1), ist jedes φ_α ein Homöomorphismus. Die Topologie auf M ist Hausdorff nach (5) und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom nach (4) und weil die $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Also ist M eine topologische Mannigfaltigkeit. (3) impliziert, dass M eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Übung: diese glatte Mannigfaltigkeitsstruktur ist eindeutig. \square

Definition 3.9. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung. Wir sagen, dass f *glatt* ist, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U, φ) von M gibt, mit $p \in U$, so dass $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt ist. Wir nennen $(f \circ \varphi^{-1})(x)$ die *Koordinatenrepräsentation* von f .

Die Menge aller glatten Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{R}$ wird mit $C^\infty(M)$ notiert.



- Example 3.10 (Exercises).** (1) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit ihrer standard Mannigfaltigkeitsstruktur und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung. Zeige, sie ist glatt wie oben definiert, dann und nur dann wenn sie glatt im calculus Sinne ist.
- (2) Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung. Zeige, dass $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt ist für jede glatte Karte (U, φ) von M .

Definition 3.11. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Wir sagen, dass F *glatt* ist, wenn für jeden Punkt $p \in M$ glatte Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N existieren, so dass $p \in U$ und $F(p) \in V$ und $F(U) \subset V$ und $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ glatt ist.

Lemma 3.12. Jede glatte Abbildung ist stetig.

Lemma 3.13 (Glueing lemma for smooth maps). Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Wir nehmen an, dass für jedes $\alpha \in A$ eine glatte Abbildung $F_\alpha: U_\alpha \rightarrow N$ haben, so dass $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in A$. Dann gibt es eine eindeutige glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ so dass $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

Definition 3.14. Zwei Mannigfaltigkeiten M und N sind *diffeomorph*, wenn es eine glatte bijektive Abbildung $F: M \rightarrow N$ gibt, so dass F^{-1} glatt ist. Wir schreiben auch $M \approx N$.

Example 3.15. Sei \mathbb{B}^n die offene Einheitskugel in \mathbb{R}^n . Wir betrachten die Abbildungen $F: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}, \quad G(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + |y|^2}}$$

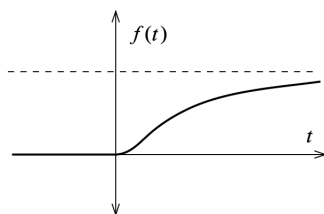
Übung: F und G sind glatt und inverse zu einander. Also haben wir $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{B}^n$.

4. HÜGELFUNKTIONEN UND DIE ZERLEGUNG DER EINS

Motivation: Abbildung zusammenkleben können, ohne, dass sie auf Überschneidungen übereinstimmen.

Lemma 4.1. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$, ist glatt.

Proof. Exercise. □

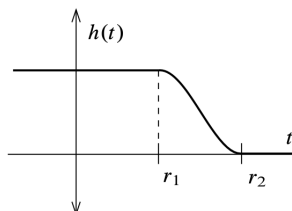


Lemma 4.2 (Existenz cutoff function). Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$. Dann gibt es eine glatte Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $h(t) \equiv 1$ für $t \leq r_1$, $0 < h(t) < 1$ für $t \in (r_1, r_2)$ und $h(t) \equiv 0$ für $t \geq r_2$.

Wir nennen h eine cut-off Funktion.

Proof. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$, von Lemma 4.1. Wir setzen

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$



Wir haben $f(r_2 - t) + f(t - r_1) > 0$ (weil immer $r_2 - t$ oder $t - r_1$ positive sind) und $h(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $t \leq r_1$ haben wir $f(t - r_1) = 0$ und somit $h(t) = 1$. Für $t \geq r_2$ haben wir $f(r_2 - t) = 0$ und somit $h(t) = 0$. □

Lemma 4.3. Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$. Dann gibt es eine glatte Funktion $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $H(x) \equiv 1$ für $x \in \overline{B_{r_1}(0)}$, $0 < H(x) < 1$ für $x \in B_{r_2}(0) \setminus \overline{B_{r_1}(0)}$ und $H(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}(0)$.

Proof. Wir setzen $H(x) = h(|x|)$, wobei h die Funktion von Lemma 4.2 ist. Die Funktion H ist glatt auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $H(x) = 1$ für $x \in \overline{B_{r_1}(0)}$, ist H auch bei 0 glatt. \square

Die Funktion H ist ein Beispiel einer Hügelfunktion.

Definition 4.4. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir nennen

$$\text{supp} f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$$

den *Support (Träger)* von f .

Example 4.5. Für f von Lemma 4.1, ist $\text{supp} f = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für h von Lemma 4.2 ist $\text{supp} h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq r_2\}$. Für H von Lemma 4.3 ist $\text{supp} H = \overline{B_{r_2}(0)}$.

Definition 4.6. Sei M ein topologischer Raum und $\mathcal{X} := \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Eine \mathcal{X} untergeordnete Zerlegung der Eins ist eine Familie $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von stetigen Abbildungen $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1 \quad \forall \alpha \in A$ und $\forall x \in M$.
- (2) $\text{supp} \psi_\alpha \subset X_\alpha \quad \forall \alpha \in A$.
- (3) Die Familie $\{\text{supp} \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist lokal endlich.
- (4) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit ist und alle ψ_α glatt sind, sagen wir, dass $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine *glatte \mathcal{X} untergeordnete Zerlegung der Eins* ist.

Remark 4.7. Nach (3), ist für jedes $x \in M$ die Summe $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x)$ in (4) nur endlich viele nicht-null Summanden.

Theorem 4.8. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{X} := \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine glatte \mathcal{X} untergeordnete Zerlegung der Eins.

Proof. Nach Lemma 2.3, ist jedes X_α eine Mannigfaltigkeit. Als solche hat es eine Basis \mathcal{B}_α von Koordinatenkugeln (Lemma 3.7). Dann ist $\mathcal{B} := \cup \mathcal{B}_\alpha$ eine Basis für die Topologie auf M . Proposition 2.10 sagt, dass es eine offene abzählbare Überdeckung $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ von M gibt, so dass $B_i \in \mathcal{B} \quad \forall i$, für jedes i gibt es ein $\alpha \in A$, so dass $B_i \subset X_\alpha$, und jeder Punkt $x \in M$ hat eine Umgebung, die in nur endlich viele B_i nicht-leer schneidet. Die letzte Bedingung gilt auch für die Überdeckung $\{\overline{B_i}\}_{i=1}^\infty$ nach Lemma 2.9. Da B_i eine reguläre Koordinatenkugel ist und $B_i \subset X_\alpha$ für ein $\alpha \in A$, impliziert, dass es eine Koordinatenkugel $B'_i \subset X_\alpha$ gibt, so dass $\overline{B_i} \subset B'_i$. Und es gibt eine glatte Koordinate $\varphi_i: B'_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi_i(\overline{B_i}) = \overline{B_{r_i}(0)}$ und $\varphi_i(B'_i) = B_{r'_i}(0)$ für irgendwelche $r_i, r'_i \in \mathbb{R}$, $r_i < r'_i$.

Für jedes i definieren wir

$$f_i = \begin{cases} H_i \circ \varphi_i, & \text{auf } B'_i \\ 0, & \text{auf } M \setminus \overline{B_i} \end{cases},$$

wobei $H_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die auf $B_{r_i}(0)$ positiv ist und null auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{r_i}(0)$, wie in Lemma 4.3. Wir bemerken, dass $H_i \circ \varphi_i$ null auf $B'_i \setminus \overline{B_i}$ ist, als ist f_i wohl-definiert, glatt und $\text{supp} f_i = \overline{B_i}$.

Wir definieren $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_i f_i(x)$. Da jeder $\{\overline{B_i}\}$ lokal endlich ist, hat diese Summe nur endlich viele nicht-null Summanden in einer Umgebung jedes Punktes. Also ist f glatt. Da jedes f_i positiv auf $\overline{B_i}$ ist und jeder Punkt von M in einem B_i enthalten ist, ist f positiv auf M . Also ist $g_i := f_i/f$ glatt, da wo es definiert ist. Ausserdem ist $0 \leq g_i \leq 1$ und $\sum_i g_i(x) = 1 \quad \forall x \in M$.

Jetzt müssen wir die Indizes anpassen, damit wir $\alpha \in A$ wiederfinden. Für jedes i gibt es $a(i) \in A$, so dass $B'_i \subset X_{a(i)}$ ($a(i)$ ist vielleicht nicht eindeutig). Für $\alpha \in A$ definieren wir

$$\psi_\alpha = \sum_{i \text{ s.d. } a(i) = \alpha} g_i: M \rightarrow \mathbb{R}.$$

(Wenn es keine i gibt, so dass $\alpha = a(i)$, dann ist diese Summe Null.) Wir haben

$$\text{supp}\psi_\alpha = \overline{\cup_{i \text{ s.d. } a(i) = \alpha} B_i} \stackrel{\text{Lem 2.9}}{=} \cup_{i \text{ s.d. } a(i) = \alpha} \overline{B_i} \subset X_\alpha$$

Jedes ψ_α ist glatt und $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$. Mehr noch, für jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine Umgebung, die in nur endlich vielen $\text{supp}\psi_\alpha$ nicht-leer schneidet (weil das schon für die $\overline{B_i}$ stimmt). Wir haben daher $\sum_\alpha \psi_\alpha = \sum_i g_i = 1$. \square

Definition 4.9. Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ abgeschlossen und $U \subset M$ offen mit $A \subset U$. Eine stetige Abbildung $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *Hügelfunktion für A auf U* , wenn $0 \leq \psi \leq 1$ auf M , $\psi = 1$ auf A und $\text{supp}\psi \subset U$.

Corollary 4.10. *Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ abgeschlossen und $U \subset M$ offen mit $A \subset U$. Dann gibt es eine glatte Hügelfunktion für A auf U .*

Proof. Sei $U_0 = U$ und $U_1 = M \setminus A$. Dann ist $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von M . Nach Theorem 4.8 gibt es eine glatte $\{U_0, U_1\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_0, \psi_1\}$. Dann ist $\psi_1 = 0$ auf A und somit $\psi_0 = \psi_0 + \psi_1 = 1$ auf A . Also ist ψ_0 die gesuchte glatte Hügelfunktion. \square

Definition 4.11. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $A \subset M$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $F: A \rightarrow N$ ist *glatt auf A* , wenn es für jeden Punkt $x \in A$ eine Umgebung $x \in U \subset M$ und eine glatte Abbildung $\tilde{F}: U \rightarrow N$ gibt, so dass $\tilde{F}|_{A \cap U} = F|_{A \cap U}$.

Corollary 4.12. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung. Sei $U \subset M$ eine offene Menge mit $A \subset U$. Dann gibt es eine glatte Abbildung $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $\tilde{f}_A = f$ und $\text{supp}\tilde{f} \subset U$.*

Proof. Für jedes $p \in A$ gibt es eine Umgebung $W_p \subset M$ und eine glatte Abbildung $\tilde{f}_p: W_p \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $\tilde{f}_p|_{W_p \cap A} = f|_{W_p \cap A}$. Wir ersetzen W_p durch $W_p \cap U$ und können somit annehmen, dass $W_p \subset U$. Dann ist $\mathcal{W} := \{W_p \mid p \in A\} \cup \{M \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von M . Nach Theorem 4.8 gibt es eine glatte \mathcal{W} untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_p \mid p \in A\} \cup \{\psi_0\}$. Es gilt $\text{supp}\psi_p \subset W_p$ und $\text{supp}\psi_0 \subset M \setminus A$. Für jedes $p \in A$ ist $\psi_p \tilde{f}_p$ glatt auf W_p und hat eine glatte Erweiterung auf M , welche null auf $M \setminus \text{supp}\psi_p$ ist. (Die so definierte Abbildung ist tatsächlich glatt, weil sie null auf $W_p \setminus \text{supp}\psi_p$ ist.) Wir definieren

$$\tilde{f}(x) := \sum_{p \in A} \psi_p(x) \tilde{f}_p(x).$$

Da die Familie $\{\text{supp}\psi_p\}$ lokal endlich ist, hat diese Summe in einer Umgebung jedes Punktes nur endlich viele nicht-null Summanden. Also ist \tilde{f} glatt. Wenn $x \in A$, dann ist $\psi_0(x) = 0$ und $\tilde{f}_p(x) = f(x) \forall p \in A$, und somit

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) \tilde{f}_p(x) = (\psi_0(x) + \sum_{p \in A} \psi_p(x)) f(x) \stackrel{\text{ZdE}}{=} f(x)$$

Also ist $\tilde{f}|_A = f$. Ausserdem haben wir

$$\text{supp}\tilde{f} = \overline{\cup_{p \in A} \text{supp}\psi_p} \stackrel{\text{Lem 2.9}}{=} \cup_{p \in A} \text{supp}\psi_p \subset \cup_{p \in A} W_p \subset U.$$

\square

Remark 4.13. Die Bedingung, dass $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ und nicht $f: A \rightarrow N$ für irgendeine glatte Mannigfaltigkeit N ist wichtig. Nehmen wir die abgeschlossene Menge $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ und die Identität $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Sie ist glatt. Aber es gibt keine stetige Erweiterung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ (denke an Fundamentalgruppen) und daher kann Korollar 4.12 in diesem Fall nicht stimmen. Allerdings kann man f als Abbildung $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sehen und dann können wir sie zur Identitätsabbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erweitern.

Man kann Korollar 4.12 verallgemeinern, vielleicht sehen wir das später.

Definition 4.14. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Ausschöpfungsfunktion* für X ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f^{-1}((-\infty, c])$ kompakt ist $\forall c \in \mathbb{R}$. Wir nennen $f^{-1}((-\infty, c])$ *Sublevelset* von f .

Proposition 4.15. Jede glatte Mannigfaltigkeit hat eine glatte positive Ausschöpfungsfunktion.

Proof. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Nach Lemma 2.6 gibt es eine abzählbare offene Überdeckung $\{V_j\}_{j=1}^\infty$ von präkompakten Mengen V_j (Topologieübung). Nach Theorem 4.8 gibt es eine $\{V_j\}_{j=1}^\infty$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$. Wir definieren

$$f(x) = \sum_{j=1}^\infty j\psi_j(x).$$

Da $\{\text{supp}\psi_j\}_{j=1}^\infty$ lokal endlich ist, sind für jeden Punkt in M nur endlich viele Summanden nicht-null in einer Umgebung dieses Punktes. Es folgt, dass f glatt ist. Ausserdem gilt $f(x) \geq \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x) = 1$. Lass uns zeigen, dass f eine Ausschöpfungsfunktion ist. Sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $N \in \mathbb{Z}$, $N > c$.

Wenn $p \notin \cup_{j=1}^N \overline{V_j}$, dann ist $\psi_j(x) = 0$ for $1 \leq j \leq N$, und dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=N+1}^\infty j\psi_j(x) = \sum_{j=N+1}^\infty N\psi_j(x) = N \left(\sum_{j=N+1}^\infty \psi_j(x) \right) = N > c.$$

Wir haben gezeigt, dass wenn $f(x) \leq c$, dann ist $x \in \cup_{j=1}^N \overline{V_j}$. Also ist die abgeschlossene Menge $f^{-1}((-\infty, c])$ in der kompakten Menge $\cup_{j=1}^N \overline{V_j}$ und ist daher selbst kompakt. \square

Der folgende Satz zeigt, dass jede abgeschlossene Menge einer glatten Mannigfaltigkeit eine Niveaumenge ist.

Theorem 4.16. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ eine abgeschlossene Menge. Dann gibt es eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $f^{-1}(0) = K$.

Proof. Nach Lemma 2.6 gibt es eine offene Überdeckung $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von glatten Koordinatenkugeln B_α . Nach Theorem 4.8 gibt es eine $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Behauptung: es $\forall \alpha$ eine nicht-negative glatte Funktion $f_\alpha: B_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $f_\alpha^{-1}(0) = B_\alpha \cap K$. Wenn dies gezeigt ist, dann nehmen wir $f = \sum f_\alpha \psi_\alpha$.

Beweis: wir erinnern uns, dass $B_\alpha \approx \mathbb{R}^n$, siehe Example 3.15. Es reicht also die Behauptung für \mathbb{R}^n zu zeigen. Sei $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ das Bild von $K \cap B_\alpha$ unter dem Diffeomorphismus $B_\alpha \approx \mathbb{R}^n$. Dann ist $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{K}$ offen und ist eine glatte Mannigfaltigkeit (Lemma 2.3). Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{K} = \cup_{i=1}^\infty B_{r_i}(x_i)$ für irgendwelche $0 < r_i \leq 1$ und $x_i \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{K} \forall i$ (Lemma 2.6). Nach Lemma 4.3 gibt es $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Hügel Funktion, welche 1 auf $\overline{B_{1/2}(0)}$ ist und $0 < h(x) < 1$ for $x \in B_1(0) \setminus \overline{B_{1/2}(0)}$ und $h(x) = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$. Da $\overline{B_1(0)}$ kompakt ist, gibt es für jedes $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine Konstante $C_i \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, so dass

$$|h^{(i)}(x)| \leq C_i \forall x \in \overline{B_1(0)} \forall i$$

(wobei $h^{(i)}$ die i -te Ableitung von h ist). Da $h \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$, gilt

$$|h^{(i)}(x)| \leq C_i \forall x \in \mathbb{R}^n \forall i.$$

Wir definieren

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x - x_i}{r_i}\right)$$

Da $0 \leq h(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}^n$, gilt

$$\left| \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x - x_i}{r_i}\right) \right| \leq \left| \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} \right| \stackrel{0 < r_i \leq 1}{\leq} \frac{1}{2^i C_i} \stackrel{C_i \geq 1}{\leq} \frac{1}{2^i} \forall i$$

Da die Reihe $\sum_i \frac{1}{2^i}$ konvergiert, konvergiert (nach Weierstrass Majorantenkriterium, siehe Analysis I&II) auch $\sum_{i=1}^N \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right)$ absolut und gleichmässig auf \mathbb{R}^n zu einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir bemerken, dass $h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right) > 0$ genau dann, wenn $x \in B_{r_i}(x_i)$. Also ist $f|_{\tilde{K}} \equiv 0$ und $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{K}} > 0$.

Wir zeigen jetzt durch Induktion, dass f glatt ist. Sei $k \geq 1$ und nehmen wir an, dass alle partiellen Ableitungen von f von Ordnung $\leq k-1$ existieren und stetig sind. Jede k -te partielle Ableitung von $\frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right)$ ist von der Form

$$\frac{(r_i)^{i-k}}{2^i C_i} D_k h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right)$$

wobei $D_k h$ eine k -te Ableitung von h ist. Wenn $k \leq i$, dann ist $\frac{(r_i)^{i-k}}{2^i C_i} D_k h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right) \leq \frac{1}{2^i}$. Also konvergiert $\sum_{i=1}^N \frac{(r_i)^{i-k}}{2^i C_i} D_k h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right)$ uniform auf \mathbb{R}^n zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (wieder nach Weierstrass Majorantenkriterium). Es folgt, dass alle k -ten partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind. Wir haben gezeigt, dass f glatt ist. Dies beweist unsere Behauptung.

Wir nehmen nun

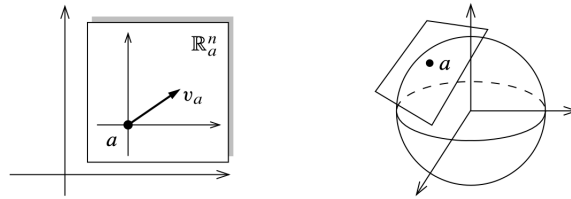
$$f := \sum f_\alpha \psi_\alpha$$

Da f_α glatt ist (nach unserer eben bewiesenen Behauptung) und $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, folgt, dass f wohldefiniert und glatt ist (wieder: da $\{\text{supp}(\psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich ist, ist für jedes $x \in M$ $\psi_\alpha(x) \neq 0$ für nur endlich viele $\alpha \in A$, also ist f wohldefiniert; f ist glatt, weil die f_α und ψ_α glatt sind.) \square

5. TANGENTIALRÄUME VON MANNIGFALTIGKEITEN

Wir werden zwei äquivalente Definitionen von Tangentialvektoren sehen, die eine durch Derivative und die andere durch Geschwindigkeitsvektoren von Kurven bei Punkten. Lass uns ein einleitendes Beispiel machen, um das Konzept von Derivationen klarer zu machen.

Example 5.1. Intuitiv, wenn eine Mannigfaltigkeit in einem \mathbb{R}^n eingebettet ist:



Für $a \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\mathbb{R}_a^n := \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$. Wir schreiben $v_a := (a, v)$. Es gilt $v_a + w_a = (v + w)_a$ und $(cv)_a = c(v_a)$, also ist \mathbb{R}_a^n ein \mathbb{R} -Vektorraum. Ausserdem sind \mathbb{R}_a^n und \mathbb{R}_b^n disjunkt, wenn $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sei $v_a \in \mathbb{R}_a^n$. Er definiert eine Abbildung

$$D_v|_a: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_v|_a f = D_v(f)_a = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(a + tv)$$

welche \mathbb{R} -linear ist ($D_v|_a(cf) = cD_v|_a(f)$) und $D_v|_a(fg) = f(a)D_v|_a(g) + g(a)D_v|_a(f)$ (Leibniz-Regel / Produktregel). Wenn e_i der i -te Standardvektor ist, dann haben wir

$$D_{e_i}|_a = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ und } D_{\sum_i c_i e_i}|_a = \sum_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ (siehe Analysis II).}$$

Für $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ schreiben wir $v_a = \sum_i v_i(e_i)_a$, wo e_i der i -te Standardvektor ist, und bekommen

$$D_v|_a = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Wir nennen eine Abbildung $w: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Derivation bei $a \in \mathbb{R}^n$, wenn w \mathbb{R} -linear ist und $w(fg) = f(a)w(g) + g(a)w(f) \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben $T_a \mathbb{R}^n$ für die Menge aller

Derivationen bei a . Dann ist $T_a\mathbb{R}^n$ ein \mathbb{R} -Vektorraum durch $(w_1 + w_2)(f) := w_1(f) + w_2(f)$ und $(cw)(f) := c w(f)$.

Remark 5.2. Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $w \in T_a\mathbb{R}^n$ und $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

- (1) Wenn f konstant ist, dann gilt $w(f) = 0$. In der Tat, sei $f(x) \equiv c$. Dann ist $w(f) = cw(1)$, da w \mathbb{R} -linear. Wir haben $w(1) = w(1 \cdot 1) = 1(a)w(1) + 1(a)w(1) = 2w(1)$, also ist $w(1) = 0$.
- (2) Wenn $f(a) = g(a) = 0$, dann gilt $w(fg) = 0$. Dies folgt aus der Produkt-/Leibnizregel.

Lemma 5.3. Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- (1) Für $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ ist $D_a|_v$ eine Derivation.
- (2) Die Abbildung $v_a \mapsto D_v|_a$ ist ein Isomorphismus (von \mathbb{R} -Vektorräumen) $\mathbb{R}_a^n \longrightarrow T_a\mathbb{R}^n$.

Proof. Die erste Aussage folgt aus der Kettenregel. Lass uns die zweite Aussage beweisen. Wir bemerken, dass $F: v_a \mapsto D_v|_a$ linear ist: $F(cv_a) = D_{cv}|_a = \sum_i cv_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a) = cD_v|_a$ und

$$F(v_a + w_a) \stackrel{v_a + w_a \equiv (v+w)_a}{=} D_{v+w}|_a = \sum_i (v_i + w_i) \frac{\partial}{\partial x_i}(a) = D_v|_a + D_w|_a.$$

F ist injektiv: Sei $v_a \in \mathbb{R}_a^n$, so dass $D_v|_a = 0$. Dann gilt $0 = D_v|_a(x_j) = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)(a) = v_j$ für alle $j = 1, \dots, n$. Also ist $v_a = 0_a$.

F ist surjektiv: Sei $w \in T_a\mathbb{R}^n$ und $v_i := w(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ (wobei $x_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die i -te Koordinate ist). Sei $v := v_1(e_1)_a + \dots + v_n(e_n)_a$. Wir zeigen, dass $D_v|_a = w$. Dazu, sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt (siehe Analysisvorlesung, sonst Übung)

$$f(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \sum_{i,j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x-a)) dt$$

Nach Remark 5.2 folgt

$$\begin{aligned} w(f) &= w(f(a)) + w\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\right) + w\left(\sum_{i,j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x-a)) dt\right) \\ &\stackrel{\text{Rmk 5.2}}{=} w\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\right) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(w(x_i) - w(a_i)) \\ &\stackrel{\text{Rmk 5.2}}{=} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)w(x_i) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i = D_v|_a f \end{aligned}$$

□

Corollary 5.4. $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $(\frac{\partial}{\partial x_1}|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_a)$ ist eine Basis von $T_a\mathbb{R}^n$. Insbesondere $\dim T_a\mathbb{R}^n = n$.

Proof. Wir nehmen den Isomorphismus $\mathbb{R}_a^n \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n$ von Lemma 5.3 und bemerken, dass er nach Konstruktion $(e_i)_a$ auf $\frac{\partial}{\partial x_i}|_a$ schickt für alle $i = 1, \dots, n$. □

Wir verallgemeinern dieses Konzept jetzt.

Definition 5.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Eine *Derivation bei p* ist eine lineare Abbildung $v: C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$. Wir schreiben T_pM für die Menge der Derivationen von M bei p und nennen sie *Tangententialraum von M bei p* .

Lemma 5.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $v \in T_pM$ und $f, g \in C^\infty(M)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Wenn f eine konstante Funktion ist, dann gilt $v(f) = 0$.

(2) Wenn $f(p) = g(p) = 0$, dann gilt $v(fg) = 0$.

Proof. Wie Remark 5.2. □

Um die abstrakten Tangentialräume, die wir auf Mannigfaltigkeiten definiert haben, mit den geometrischen Tangentialräumen in \mathbb{R}^n zu verknüpfen, müssen wir untersuchen, wie glatte Abbildungen Tangentialvektoren beeinflussen. Im Fall einer glatten Abbildung zwischen euklidischen Räumen ist die totale Ableitung der Abbildung an einem Punkt (repräsentiert durch ihre Jacobimatrix) eine lineare Abbildung, die die „beste lineare Approximation“ der Abbildung in der Nähe des gegebenen Punktes darstellt. Im Fall von Mannigfaltigkeiten macht es keinen Sinn, von einer linearen Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten zu sprechen. Stattdessen handelt es sich um eine lineare Abbildung zwischen Tangentialräumen. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Rand und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für jedes $p \in M$ definieren wir eine Abbildung, das Differential von F in p , wie folgt:

$$DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

Für $v \in T_p M$ setzen wir $dF_p(v)$ die Derivation in $F(p)$, so dass für $f \in C^\infty(N)$ gilt:

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F).$$

Bemerkung: wenn $f \circ F \in C^\infty(M)$, dann ist $f \in C^\infty(N)$ und somit macht $v(f \circ F)$ Sinn. Der Operator $dF_p(v) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear, da v linear ist, und es ist eine Derivation in $F(p)$, da für beliebige $f, g \in C^\infty(N)$ gilt:

$$dF_p(v)(fg) = v((fg) \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) = f(F(p))v(g \circ F) + g(F(p))v(f \circ F).$$

Proposition 5.7. Seien M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, und $p \in M$. Dann gilt:

- (1) $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ist linear.
- (2) $D(G \circ F)_p = DG_{F(p)} \circ dF_p : T_p M \rightarrow T_{(G \circ F)(p)} P$.
- (3) $D(Id_M)_p = Id_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$.
- (4) Wenn F ein Diffeomorphismus ist, dann ist $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ein Isomorphismus und es gilt

$$(dF_p)^{-1} = D(F^{-1})_{F(p)}.$$

Proof. Seien $v, w \in T_p M$, $f \in C^\infty(N)$, $g \in C^\infty(P)$.

(1) Es gilt

$$\begin{aligned} dF_p(v+w)(f) &\stackrel{\text{def}}{=} (v+w)(f \circ F) \stackrel{\text{def}}{=} v(f \circ F) + w(f \circ F) \stackrel{\text{def}}{=} dF_p(v)(f) + dF_p(w)(f) \\ &= (dF_p(v) + dF_p(w))(f). \end{aligned}$$

Also gilt $dF_p(v+w) = dF_p(v) + dF_p(w)$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} D(G \circ F)_p(v)(f) &\stackrel{\text{def}}{=} v(f \circ (G \circ F)) = v((g \circ G) \circ F) \\ &= dF_p(v)(g \circ G) \stackrel{dF_p(v) = \text{derivation } w \text{ in } F(p)}{=} w(g \circ G) \\ &= DG_{F(p)}(w)(f) \stackrel{w = dF_p(v)}{=} (DG_{F(p)}(dF_p(v)))(g). \end{aligned}$$

Also gilt $D(G \circ F)_p = DG_{F(p)} \circ dF_p$.

(3) Es gilt

$$D(Id_M)_p(v)(f) = v(f \circ Id_M) = v(f), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Also gilt $D(Id_M)_p = Id_{T_p M}$.

(4) Wir haben $Id_{T_p M} \stackrel{(3)}{=} D(Id_M)_p = D(F^{-1} \circ F)_p \stackrel{(2)}{=} D(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p$ □

Lemma 5.8. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand, $p \in M$ und $v \in T_p M$. Wenn $f, g \in C^\infty(M)$ in einer Umgebung von p übereinstimmen, dann gilt $v(f) = v(g)$.

Proof. Sei $h = f - g$, sodass h eine glatte Funktion ist. Sie ist null in einer Umgebung von p . Sei $\phi \in C^\infty(M)$ eine glatte Hügelfunktion, die identisch gleich 1 auf dem Support von h ist und deren Supoprt in $M \setminus \{p\}$ enthalten ist. Da $\phi \equiv 1$ dort, wo $h \neq 0$ ist, ist das Produkt ϕh identisch gleich h (da, wo h nichtnull ist). Da $h(p) = \phi(p) = 0$, impliziert Lemma 5.6, dass $v(\phi h) = 0$. Da $h = \phi h$ auf $\text{supp}(h)$ und $h = \phi h = 0$ da, wo h Null ist, folgt $v(\phi h) = 0$. Aus der Linearität von v folgt $v(f) = v(g)$. \square

Wir können somit den Tangentialraum einer offenen Untermannigfaltigkeit mit dem Tangentialraum der gesamten Mannigfaltigkeit identifizieren:

Lemma 5.9. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge, und sei $\iota : U \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Für jedes $p \in U$ ist das Differential $D\iota_p : T_p U \longrightarrow T_p M$ ein Isomorphismus.*

Proof. Injektivität: sei $v \in T_p U$ und $D\iota_p(v) = 0 \in T_p M$. Sei B eine Umgebung von p , sodass $B \subset U$. Wenn $f \in C^\infty(U)$ beliebig, impliziert Lemma 4.12, dass es ein $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ gibt, sodass $\tilde{f} = f$ auf B . Da f und $\tilde{f}|_U$ glatte Funktionen auf U sind, die in einer Umgebung von p übereinstimmen, impliziert Lemma 5.8, dass

$$vf = v(\tilde{f}|_U) = v(\tilde{f} \circ \iota) = D\iota_p(v)(\tilde{f}) = 0.$$

Es folgt, dass $v = 0$. Also ist $D\iota_p$ injektiv.

Surjektivität: sei $w \in T_p M$. Definiere einen Operator $v : C^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $vf := w(\tilde{f})$, wobei \tilde{f} eine beliebige glatte Funktion auf M ist, die mit f auf U übereinstimmt (existiert nach Lemma 4.12). Nach Lemma 5.8 ist $v(f)$ unabhängig von der Wahl von \tilde{f} , also ist v wohldefiniert. Wir bemerken, dass $v(f)$ eine Derivation in p ist. Für jedes $g \in C^\infty(M)$ gilt

$$D\iota_p(v)(g) = v(g \circ \iota) = w(g),$$

also ist $D\iota_p$ surjektiv. \square

Remark 5.10. Für eine offene Teilmenge $U \subset M$ ist der Isomorphismus $D\iota_p$ zwischen $T_p U$ und $T_p M$ kanonisch definiert, unabhängig von Wahlmöglichkeiten. Von nun an identifizieren wir $T_p U$ mit $T_p M$ für jeden Punkt $p \in U$. Diese Identifikation entspricht $D\iota_p(v)(g) = v(g \circ \iota) = w(g)$ von oben.

Proposition 5.11. *Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist für jedes $p \in M$ der Tangentialraum $T_p M$ ein n -dimensionaler Vektorraum.*

Proof. Für ein $p \in M$ sei (U, φ) eine glatte Karte mit $p \in U$. Da φ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist, folgt aus Lemma 5.7, dass $d\varphi_p$ ein Isomorphismus von $T_p U$ auf $T_{\varphi(p)} V$ ist. Nach Lemma 5.9 ist $T_p M \simeq T_p U$ und $T_{\varphi(p)} V \simeq T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$. Es folgt

$$\dim T_p M = \dim T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n = n.$$

\square

Proposition 5.12. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit seiner standardmäßigen glatten Mannigfaltigkeitsstruktur (siehe Übungen). Für jeden Punkt $a \in V$ ist die Abbildung*

$$C^\infty(V) \ni v \mapsto Dv|_a := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv) \in \mathbb{R}$$

ein kanonischer Isomorphismus von V nach $T_a V$, sodass für jede lineare Abbildung $L : V \longrightarrow W$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \simeq & T_a V \\ L \downarrow & & \downarrow dL_a \\ W & \simeq & T_a W \end{array}$$

Proof. Wir wählen eine Basis von V und können den Beweis von Lemma 5.3 wiederholen, um zu zeigen, dass $Dv|_a$ eine Ableitung in a ist und dass die Abbildung $v \mapsto Dv|_a$ ein Iso ist.

Sei $L : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Da ihre Komponenten bezüglich beliebiger Basen von V und W lineare Funktionen der Koordinaten sind, ist L glatt. Es gilt für $f \in C^\infty(W)$:

$$\begin{aligned} dL_a(Dv|_a)(f) &\stackrel{def}{=} dL_a(Dv|_a)(f \circ L) \stackrel{def}{=} Dv|_a \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ L)(a + tv) \\ &\stackrel{L \text{ linear}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(L(a) + tL(v)) = D_{L(v)}|_{L(a)}(f) \end{aligned}$$

Also kommutierte das obige Diagramm. \square

Remark 5.13. Soweit ist alles sehr abstrakt. Wir sehen jetzt, wie man mit Tangentialvektoren und Differentialen in lokalen Koordinaten rechnen kann. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, und (U, φ) sei eine glatte Koordinatenkarte auf M . Dann ist φ insbesondere ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $U_y \subset \mathbb{R}^n$. Es folgt von Proposition 5.7 und Lemma 5.9, dass $d\varphi_p : T_p M \longrightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus ist. Nach Corollary 5.4 bilden $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_{\varphi(p)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_{\varphi(p)}$ eine Basis von $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$. Also bilden die Urbilder dieser Vektoren unter dem Isomorphismus $d\varphi_p$ eine Basis von $T_p M$ (siehe Proposition 5.12). In Übereinstimmung mit unserer Konvention, Koordinatenkarten wenn möglich als Identifikationen zu behandeln, verwenden wir die Notation $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ für diese Vektoren:

$$\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p := (d\varphi_p)^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) \stackrel{Prop 5.7}{=} d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right).$$

Wir bemerken, dass für $f \in C^\infty(U)$ gilt:

$$\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) (f) = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) (f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})$$

Mit anderen Worten ist $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ einfach die Ableitung, die die i -te partielle Ableitung der (Koordinatendarstellung von) f an der (Koordinatendarstellung von) p nimmt. Die Vektoren $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ werden die *Koordinatenvektoren* an p genannt, die mit der Karte (U, φ) assoziiert sind. Im Spezialfall der Standardkoordinaten auf \mathbb{R}^n sind die Vektoren $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ buchstäblich die partiellen Ableitungsoperatoren.

Definition 5.14. Nach der obigen Bemerkung, kann ein Tangentialvektor $v \in T_p M$ eindeutig als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^n v_i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$, $v_i \in \mathbb{R}$, geschrieben werden. Die geordnete Basis $\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right)$ wird als *Koordinatenbasis* von $T_p M$ bezeichnet und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ werden die Komponenten von v bezüglich der Koordinatenbasis genannt.

Wenn v bekannt ist, können seine Komponenten folgendermassen berechnet werden: wir denken x_j als glatte Funktion auf U und dann

$$v(x_j) = v \left(\sum_{i=1}^n v_i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) (x_j) = v_i \left. \frac{\partial x_j}{\partial x^i} \right|_p = v_i \delta_{ij} = v_i,$$

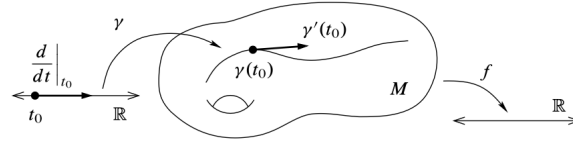
wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ist.

Alternative Definition des Tangentialraumes einer glatten Mannigfaltigkeit.

Wenn M eine Mannigfaltigkeit ist, definieren wir eine (parametrisierte) Kurve in M als eine stetige Abbildung $\gamma : J \longrightarrow M$, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Sei $t_0 \in J$. Wir definieren die Geschwindigkeit $\gamma'(t_0)$ von γ bei t_0 als

$$\gamma'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \gamma(t) \in T_{\gamma(t_0)} M;$$

wobei $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ der Standard-Koordinatenbasisvektor in $T_{t_0}\mathbb{R}$ ist.



Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

$$\gamma'(t_0)(f) = d\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) (f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'(t_0)$$

Also ist $\gamma'(t_0)$ die Derivation bei t_0 , die durch die Ableitung einer Funktion entlang der Kurve γ erhalten wird.

Nun sei (U, φ) ein glattes Koordinatenchart mit Koordinatenfunktionen $\{x_i\}$. Wenn $\gamma(t_0) \in U$, können schreiben wir γ als $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ für t , welche hinreichend nahe bei t_0 liegen. Mit den obigen expliziten Koordinatenrechnungen bekommen wir (Studenten sollen versuchen es nachzurechnen)

$$\gamma'(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \gamma(t) = \left(\frac{d}{dt} x_1(t), \dots, \frac{d}{dt} x_n(t) \right).$$

Proposition 5.15. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann ist jedes $v \in T_p M$ die Geschwindigkeit einer glatten Kurve in M .

Proof. Sei (U, φ) eine glatte Koordinatenkarte, so dass $p \in U$ und $\varphi(p) = 0$, und schreibe $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$. Für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$, sei

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U, \quad t \mapsto \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$$

Dies ist eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = v$. □

Sei p ein Punkt von M . Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller glatten Kurven der Form $\gamma : J \longrightarrow M$, wobei $0 \in J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, so dass $\gamma(0) = p$: Gegeben zwei solche Kurven $\gamma_1 : J_1 \longrightarrow M$ und $\gamma_2 : J_2 \longrightarrow M$, sagen wir, dass $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn $(\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t))|_{t=0} = (\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2)(t))|_{t=0}$ für jede glatte, reellwertige Funktion f , die in einer Umgebung von p definiert ist. Sei $\mathcal{V}_p M$ die Menge der Äquivalenzklassen. Proposition 5.15 induziert eine surjektive Abbildung $T_p M \longrightarrow \mathcal{V}_p M$, $v \mapsto \gamma'(0)$, wobei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$, $t \mapsto \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$ und (U, φ) wie im Beweis von Proposition 5.15 sind. Diese Abbildung ist injektiv nach Definition von $\gamma'(0)$ und der Äquivalenzrelation zwischen Kurve.

Der Tangentialraum an M bei p wird auch oft als die Menge $\mathcal{V}_p M$ definiert. Diese Definition hat den Vorteil, dass sie geometrisch intuitiver ist, hat jedoch den Nachteil, dass die Existenz einer Vektorraummodellstruktur auf $V_p M$ nicht offensichtlich ist.

Das Tangentenbündel Mannigfaltigkeit.

Oft ist es nützlich, die Menge aller Tangentialvektoren an allen Punkten einer Mannigfaltigkeit zu betrachten. Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit M , definieren wir das Tangentialbündel von M als

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Ein Element schreiben wir als geordnetes Paar (p, v) mit $p \in M$ und $v \in T_p M$. Das Tangentialbündel kommt mit einer natürlichen Projektionsabbildung

$$\pi : TM \longrightarrow M, (p, v) \mapsto p$$

Wir haben eine kanonische Injektion $T_p M \longrightarrow TM$, $v \mapsto (p, v)$.

REFERENCES

- [1] JOHN M. LEE: *Intoduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, 2nd Edition. [2](#)

UNIVERSITÄT BASEL

Email address: `susanna.zimmermann@universite-paris-saclay.fr`