

Geometrie

Einführung zu Mannigfaltigkeiten und Komplexer Analysis

CONTENTS

1. Kurzrepetition Topologie	1
2. Topologische Mannigfaltigkeiten	3
3. Glatte Mannigfaltigkeiten	5
4. Hügelfunktionen und die Zerlegung der Eins	9
5. Tangentialräume von Mannigfaltigkeiten	13
6. Whitney Embedding	25
7. Komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktionen	30
8. Winkeltreue Abbildungen	34
9. Potenzreihen und Wegintegrale	37
10. Weitere Eigenschaften von holomorphen Abbildungen	47
References	49

1. KURZREPETITION TOPOLOGIE

Definition 1.1. Sei X eine Menge. Eine Topologie auf X ist eine Familie τ von Teilmengen von X , welche Folgendes erfüllen:

- (1) X und \emptyset sind in τ enthalten,
- (2) die Vereinigung jeder Familie von Elementen in τ ist wieder in τ enthalten,
- (3) jeder Schnitt von endlich vielen Elementen in τ ist wieder in τ enthalten.

Die Elemente in τ nennt man *offene Mengen*. Ein topologischer Raum ist ein paar (X, τ) , wo τ eine Topologie auf X ist. Wenn $U \in \tau$, dann nennt man $X \setminus U$ *abgeschlossen*.

Eine Teilmenge von X nennt man *abgeschlossen*, wenn sie das Komplement einer offenen Teilmenge von X ist.

Example 1.2. (1) $\tau = \{X, \emptyset\}$ ist die triviale Topologie auf einer Menge X .

(2) Wenn τ die Potenzmenge von X ist, dann nennt man τ die diskrete Topologie. Dann ist jedes $x \in X$ offen und abgeschlossen.

(3) $X = \mathbb{R}^n$, τ ist die Familie der Mengen $U \subset X$, so dass für jedes $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.

(4) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Familie τ_d folgender Mengen ist die von d induzierte Topologie auf X : $U \subset X$ und für jedes $x \in U$ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $\{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$.

(5) $X = \mathbb{Z}$, τ die Familie der endlichen Mengen in \mathbb{Z} und \mathbb{Z} ist *keine* Topologie, weil die Vereinigung aller endlichen Teilmengen von \mathbb{Z} , welche nicht 0 enthalten nicht endlich ist und nicht \mathbb{Z} ist.

(6) Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume. Wir definieren die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ wie folgt: eine offene Menge in $X \times Y$ ist eine (beliebige) Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen $U \times V$ ist, wobei $U \subset X, V \subset Y$ offen.

- (7) Die Euklidische Topologie auf \mathbb{R}^n ist die Produkttopologie der Euklidischen Topologie auf \mathbb{R} (Übung).
- (8) Sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Die induzierte Topologie auf Y ist wie folgt definiert: eine Menge $U \subset Y$ ist offen, wenn es $V \subset X$ offen gibt, so dass $U = Y \cap V$.

Definition 1.3. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (1) Sei $x \in X$. Eine Umgebung von x ist eine Teilmenge $V \subset X$, welche eine offene Menge U enthält, so dass $x \in U$.
- (2) Eine Basis von τ ist eine Familie \mathcal{B} von offenen Mengen von X , so dass jede offene Teilmenge von X eine Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} ist.

Example 1.4. (1) (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Familie der offenen Kugeln eine Basis für τ_d .

- (2) Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ ein topologischer Raum. Dann ist $\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^n U_i \times V_i \mid U_i \subset X, V_i \subset Y \text{ offen}, n \geq 1\}$ eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$.

Wenn \mathcal{B}' (resp. \mathcal{B}'') eine Basis von τ (resp. τ') ist, dann ist $\{\cap_{i=1}^n U_i \times V_i \mid U_i \in \mathcal{B}', V_i \in \mathcal{B}'', n \geq 1\}$ eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$.

Definition 1.5. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (1) (X, τ) ist *kompakt*, wenn es für jede Überdeckung $X = \cup_{i \in I} U_i$ von offenen Mengen in X $i_1, \dots, i_n \in I$ gibt, so dass $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
- (2) (X, τ) ist *Hausdorff*, wenn es für jede $x, y \in X$ zwei disjunkte Umgebungen $U, V \in X$ gibt, so dass $x \in U$ und $y \in V$.
- (3) (X, τ) erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* (is second-countable), wenn τ eine abzählbare Basis hat.

Example 1.6. (1) Die diskrete Topologie auf einer Menge X ist Hausdorff aber nicht kompakt (ausser X ist endlich).

- (2) Die triviale Topologie ist kompakt aber nicht Hausdorff.
- (3) Abgeschlossene beschränkte Mengen in einem Metrischen Raum sind kompakt.
- (4) Jeder Metrische Raum (X, d) ist Hausdorff und hat eine abzählbare Basis. Wenn X nicht beschränkt ist, ist X nicht kompakt.
- (5) Die diskrete Topologie auf \mathbb{R} hat keine abzählbare Basis.

Lemma 1.7. Sei (X, τ) ein Topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge mit der induzierten Topologie. Wenn X Hausdorff ist, dann ist Y Hausdorff. Wenn X das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann tut dies auch Y .

Proof. Topologievorlesung □

Definition 1.8. Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei \mathcal{B} eine Basis von τ' . Wir sagen, dass f *stetig* ist, wenn das Urbild jeder offenen Menge in Y wieder offen ist.

Equivalent, und praktischer in der Anwendung

Lemma 1.9. Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei \mathcal{B} eine Basis von τ' . Dann ist f stetig genau dann, wenn $\forall x \in X$ und $\forall V \in \mathcal{B}$ mit $f(x) \in V$, die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Proof. Topologievorlesung □

Example 1.10. Sei $Y = X$.

- (1) Wenn $\tau = \{X, \emptyset\}$ und $\tau' = \mathcal{P}(X)$, dann ist die Identität nicht stetig
- (2) Wenn $\tau = \mathcal{P}(X)$ und $\tau' = \{X, \emptyset\}$, dann ist die Identität stetig.

Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume und betrachte die Produkttopologie auf $X \times Y$. Dann sind beide Projektionen $p_X: X \times Y \rightarrow X$ und $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ stetig. In der Tat, wenn $U \subset X$ offen, dann ist $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ und wenn $V \subset Y$ offen, dann ist $p_Y^{-1}(V) = X \times V$.

Example 1.11. Wir betrachten \mathbb{R}^n, \mathbb{R} mit der Euklidischen Topologie. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann ist Stetigkeit im analytischen Sinne equivalent zur Stetigkeit im topologischen Sinne. Nämlich:

$$\begin{aligned} & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sd } \forall x_1 \in X \text{ sd } d(x_0, x_1) < \delta \text{ gilt } d(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon \\ \iff & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sd } \forall x_1 \in B_\delta(x_0) \subset X \text{ gilt } f(x_1) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \\ \iff & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sd } f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \\ \iff & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ sd } B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \\ \iff & \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \text{ eine Umgebung von } x_0 \end{aligned}$$

Definition 1.12. Seien $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen, dass f ein *Homöomorphismus* ist, wenn f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Wir sagen, dass X und Y homeomorph sind.

Example 1.13. (1) Wenn $Y = X$ und $\tau' = \tau$, dann ist die Identität ein Homöomorphismus.
(2) $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto x^2$, ist ein Homöomorphismus.
(3) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto e^x$ ist ein Homöomorphismus.

2. TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEITEN

Mannigfaltigkeiten sind topologische Räume, die lokal aussehen wie \mathbb{R}^n .

Definition 2.1. Eine topologische Mannigfaltigkeit M (von dimension n) ist ein *nicht-leerer* Hausdorff topologischer Raum, welcher das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und so dass es für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ gibt, welche homöomorph (in der induzierten Topologie) zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n ist.

Wir sagen, dass n die dimension von M ist und schreiben $n = \dim M$.

Lemma 2.2. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Die Hausdorffbedingung impliziert: jede endliche Teilmenge ist abgeschlossen, Grenzwerte von konvergenten Folgen sind eindeutig.

Proof. Topologievorlesung. □

Die Bedingung des 2. Abzählbarkeitsaxioms wird für sogenannte Zerlegung der Eins wichtig, welche

Lemma 2.3. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Menge. Dann ist U (mit der induzierten Topologie) eine Mannigfaltigkeit.

Proof. Nach Lemma 1.7, ist U Hausdorff und erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom. Sei $p \in U$ und $n = \dim M$. Dann gibt es eine offene Teilmenge $p \in V \subset M$, eine offene Teilmenge $\hat{V} \subset \mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $f: V \rightarrow \hat{V}$. Dann ist $U \cap V \subset M$ offen und $f|_{U \cap V}: U \cap V \rightarrow \hat{V}$ ein Homöomorphismus. □

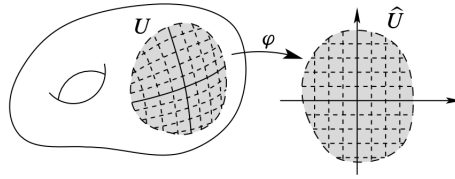
Definition 2.4. Sei M eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Eine *Karte* von M ist ein Paar (U, φ) , wobei $U \subset M$ eine offene Teilmenge ist und $\varphi: U \rightarrow \hat{U}$ ein Homöomorphismus von U zu einer offenen Menge $\varphi(U) = \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$. Wir nennen U auch den Domain von (U, φ) .

Wenn $p \in U$, sagen wir, dass (U, φ) eine Koordinatenumgebung von p ist.

Den Homöomorphismus φ nennt man *Koordinatenabbildung*. Wir können

$\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ schreiben, und die x_i nennt man *lokale Koordinaten* von U .

Wenn $\varphi(U)$ eine Kugel (bzw Würfel) ist, dann nennt man (U, φ) eine *Koordinatenkugel* (bzw -würfel).



Example 2.5. (1) $M = \mathbb{R}^n$

- (2) M eine abzählbare Vereinigung von Punkten, $n = 0$
- (3) $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (Übungen)
- (4) $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ (Übungen)
- (5) Graph: sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig. Sei

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \mid \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid x \in U, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$$

mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Die Projektion $p_1: \Gamma(f) \rightarrow U$ die Projektion auf U ist stetig (da sie die Einschränkung der stetigen Projektion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist). p_1 hat ein Inverses, nämlich $q_1: x \mapsto (x, f(x))$, und q_1 ist stetig, weil f stetig ist. Also ist $\Gamma(f)$ eine topologische Mannigfaltigkeit.

- (6) Ein endlich dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} (Übungen).
- (7) Das Produkt $M_1 \times \dots \times M_k$ von topologischen Mannigfaltigkeiten M_1, \dots, M_k ist wieder eine topologische Mannigfaltigkeit.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $A \subset X$ *relativ kompakt (oder präkompakt)* wenn \overline{A} kompakt in X ist.

Lemma 2.6. Jede topologische Mannigfaltigkeit hat eine abzählbare Basis von präkompakten Koordinatenkugeln, und sie ist überdeckt von abzählbar vielen präkompakten Koordinatenkugeln.

Proof. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Jeder Punkt $p \in M$ ist in einer Koordinatenumgebung (U_p, φ_p) enthalten. Die Menge $\varphi_p(U_p) \subset \mathbb{R}^n$ hat eine abzählbare Basis von präkompakten offenen Kugeln, nämlich die abzählbare Familie der Kugeln $B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n \cap \varphi_p(U_p), r \in \mathbb{Q}_{>0}$, so dass $B_s(x) \subset \varphi_p(U)$ mit $s > r$. Jeder solche Ball ist präkompakt in $\varphi_p(U_p)$. Da M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, hat M eine Überdeckung von abzählbar vielen Koordinatenumgebungen (U_p, φ_p) . Daher bilden die Urbilder der offenen Kugeln $B_r(x)$ eine abzählbare Basis für die Topologie von M . Sei $V \subset U_p$ das Urbild einer solchen Kugel. Weil φ_p ein Homöomorphismus ist, ist der Abschluss von V in U_p (bzgl der induzierten Topologie auf U_p) kompakt. Da M Hausdorff ist, ist V in M abgeschlossen. Also ist der Abschluss von V in M gleich dem Abschluss von V in U_i . Es folgt, dass V auch in M präkompakt ist. \square

Ein topologischer Raum (X, τ) ist lokal kompakt, wenn es für jeden Punkt $p \in X$ eine Umgebung U gibt und eine kompakte Menge $K \subset X$, so dass $p \in U \subset K$. Man nennt K eine *kompakte Umgebung* von p .

Lemma 2.7. Jede Mannigfaltigkeit ist lokal kompakt.

Proof. Nach Lemma 2.6 hat jede Mannigfaltigkeit eine Basis aus präkompakten Mengen. Also hat jeder Punkt eine präkompakte Umgebung und daher auch eine kompakte Umgebung (den Abschluss der präkompakten Umgebung). \square

Definition 2.8. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von Teilmengen von M . Wir nennen \mathcal{U} *lokal endlich*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung gibt, welche nur endlich viele U_α nicht-leer schneidet.

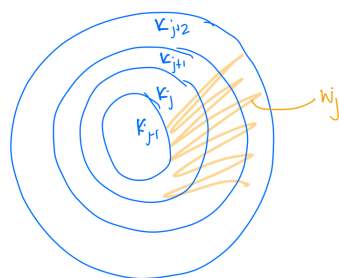
Lemma 2.9. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine lokal endliche Familie von Teilmengen von X . Dann ist $\{\overline{X_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich und $\overline{\cup_\alpha X_\alpha} = \cup_\alpha \overline{X_\alpha}$.

Proof. Topologie Vorlesung (oder Übung). □

Proposition 2.10. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ irgendeine offene Überdeckung von M . Dann hat M eine lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{V} := \{V_\beta\}_{\beta \in B}$, so dass $\forall \beta \in B$ es $\alpha \in A$ gibt mit $V_\beta \subset U_\alpha$.

Mehr noch, wenn \mathcal{B} eine Basis der Topologie von M ist, dann gibt es eine offene Überdeckung \mathcal{V} wie oben, welche abzählbar ist, so dass $V_\beta \in \mathcal{B} \forall \beta \in B$.

Proof. Wir bemerken, dass die zweite Aussage stärker als die erste ist. Es reicht also, nur die zweite zu zeigen. Sei $\{K_j\}_{j=1}^\infty$ eine Überdeckung von M von kompakten Mengen K_j , so dass $K_j \subset \text{Int} K_{j+1}$ für alle $j \geq 1$; sie existiert, weil M Hausdorff und lokal kompakt ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt [1, Prop A.60]. Für jedes j , sei $V_j := K_{j+1} \setminus \text{Int} K_j$ und $W_j := \text{Int} K_{j+2} \setminus K_{j-1}$ (wobei $K_j := \emptyset$ für $j < 1$). Dann ist V_j kompakt, W_j ist offen und $V_j \subset W_j$. Da \mathcal{B} eine Basis der Topologie von M ist, gibt es $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset W_j$. Die Familie $\{B_x\}_{x \in V_j}$ ist eine offene Überdeckung von V_j . Da V_j kompakt ist, hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung $\{B_{x_{k,j}}\}_{k=1}^{N_j}$. Die Vereinigung $\cup_{k,j} B_{x_{k,j}}$ ist eine abzählbare Überdeckung von M und $B_{x_{k,j}} \subset W_j \forall j$. Wir bemerken, dass $W_j \cap W_i = \emptyset$, ausser $j-2 \leq i \leq j+2$:



$W_j \cap W_i \neq \emptyset \Rightarrow$
 einer der 3 Ringe ist in W_i .
 Wenn $K_i \setminus K_{i-1}$ der innerste Ring von W_i ist,
 dann ist $i=j+2$.
 Wenn einer der kleineren Ringe der innerste
 Ring von W_i ist, ist $i < j+2$.
 Wenn der kleinste Ring von W_j der
 grösste Ring von W_i ist, dann ist $j=i+2$.
 Also $j-2 \leq i \leq j+2$.

Es folgt, dass es für jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung gibt, die in nur endlich vielen $B_{x_{k,j}}$ enthalten ist. □

3. GLATTE MANNIGFALTIGKEITEN

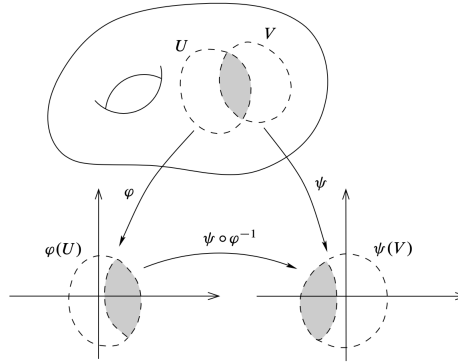
Definition 3.1. Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $F: U \rightarrow V$ eine Abbildung. Wir nennen F *glatt*, wenn jede Komponente von $F = (F_1, \dots, F_m)$ stetige partielle Ableitungen jeder Ordnung hat. Wir sagen auch, dass F C^∞ ist.

Wenn F zusätzlich bijektiv ist und F^{-1} glatt, nennen wir F ein *Diffeomorphismus*.

Wir bemerken, dass glatte Abbildungen stetig sind und Diffeomorphismen sind im Speziellen Homöomorphismen.

Definition 3.2. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $(U, \varphi), (V, \varphi)$ Koordinatenumgebungen auf M , so dass $U \cap V \neq \emptyset$.

- (1) Wir nennen $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ einen *Kartenwechsel*.



Da φ, ψ Homöomorphismen sind, ist $\psi \circ \varphi^{-1}$ auch ein Homöomorphismus.

- (2) Wir sagen, $(U, \varphi), (V, \varphi)$ sind glatt kompatibel, wenn entweder $U \cap V = \emptyset$ oder $\psi \circ \varphi^{-1}$ glatt ist.
- (3) Ein Atlas von M ist eine Familie von Karten, deren Domain M überdecken. Ein Atlas ist *glatt*, wenn jedes Paar von Karten glatt kompatibel sind. In diesem Falle, auch der Kartenwechsel $\varphi \circ \psi^{-1}$ glatt und daher ist $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein Diffeomorphismus.
- (4) Ein glatter Atlas \mathcal{A} ist *maximal*, wenn er in keinem anderen glatten Atlas enthalten ist (i.e. jede Karte, die glatt kompatibel mit jeder Karte in \mathcal{A} ist, ist schon in \mathcal{A} enthalten).

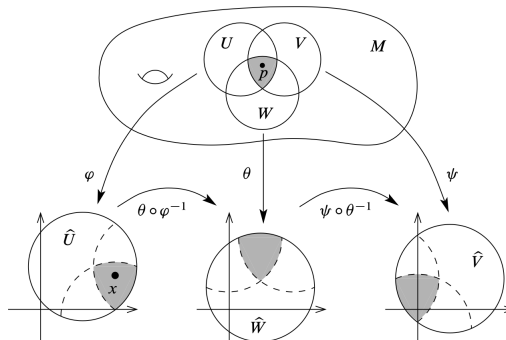
Wir sagen, dass M eine glatte Struktur hat, wenn sie einen glatten Atlas hat. Eine glatte Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, \mathcal{A}) , wo \mathcal{A} ein maximaler Atlas ist. Meistens lassen schreiben wir M anstatt (M, \mathcal{A}) .

Example 3.3. Sei $\{(\mathbb{R}, x^3)\}$ eine glatte Struktur auf \mathbb{R} , da $x \mapsto x^3$ ein Homöomorphismus ist und jeder Kartenwechsel glatt ist. Diese glatte Struktur ist nicht mit der standard glatten Struktur (\mathbb{R}, id) glatt kompatibel, da der Kartenwechsel $id_{\mathbb{R}} \circ (x^3)^{-1} = \sqrt[3]{x}$ nicht glatt in ist.

Proposition 3.4. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.

- (1) Jeder glatte Atlas \mathcal{A} von M ist in einem eindeutigen maximalen Atlas enthalten, welchen wir die durch \mathcal{A} bestimmte glatte Struktur nennen.
- (2) Zwei glatte Atlase von M bestimmen die gleiche glatte Struktur genau dann, wenn ihre Vereinigung ein glatter Atlas ist.

Proof. (1) Sei \mathcal{A} ein glatter Atlas von M und sei $\overline{\mathcal{A}}$ die Familie aller Karten von M , welche glatt kompatibel mit den Karten in \mathcal{A} sind. Wir bemerken, dass $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Wir zeigen, dass $\overline{\mathcal{A}}$ ein glatter Atlas ist. Seien $(U, \varphi), (V, \psi)$ zwei Karten in $\overline{\mathcal{A}}$ und $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ irgendein Punkt. Da die Domains der Karten in \mathcal{A} die Mannigfaltigkeit M überdecken, gibt es eine Karte (W, θ) in \mathcal{A} , so dass $p \in W$ (siehe Bild).



Jede Karte in $\overline{\mathcal{A}}$ ist glatt kompatibel mit (W, θ) , also sind $\theta \circ \varphi^{-1}$ und $\psi \circ \theta^{-1}$ glatt (da, wo sie definiert sind). Da $p \in U \cap V \cap W$, ist $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1})$ glatt in einer Umgebung von x . Es folgt, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ in jeder Umgebung des Punktes von $\varphi(U \cap V)$ glatt ist. Also ist $\overline{\mathcal{A}}$ ein glatter Atlas.

Wir zeigen jetzt, dass $\overline{\mathcal{A}}$ ein maximaler glatter Atlas ist. In der Tat, nach Definition von $\overline{\mathcal{A}}$, jede Karte von M , welche glatt kompatibel mit jeder Karte in $\overline{\mathcal{A}}$ ist, ist auch glatt kompatibel mit jeder Karte in \mathcal{A} . Jeder solche Karte ist also schon in $\overline{\mathcal{A}}$ enthalten. Also ist $\overline{\mathcal{A}}$ maximal.

Eindeutigkeit: Sei \mathcal{B} ein weiterer maximaler glatter Atlas, welcher \mathcal{A} enthält. Da jede Karte in \mathcal{B} glatt kompatibel mit jeder Karte von \mathcal{A} ist, ist jede Karte in \mathcal{B} schon in \mathcal{A} enthalten. Da \mathcal{B} maximal ist, folgt $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$.

(2) Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei glatte Atlase von M , welche die selbe glatte Struktur \mathcal{C} bestimmen.

Nach (1), ist \mathcal{C} die Familie der Karten von M , welche mit allen Karten in \mathcal{A} und allen Karten in \mathcal{B} glatt kompatibel sind, und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Es folgt, dass alle Karten in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mit allen Karten in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ glatt kompatibel sind.

Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei glatte Atlase von M , so dass $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ein glatter Atlas ist. Nach (1), ist $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ in einem eindeutigen maximalen Atlas \mathcal{C} enthalten. Jede Karte in \mathcal{C} ist glatt kompatibel mit \mathcal{A} (bzw. \mathcal{B}), also ist $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{A}}$ (bzw. $\subset \overline{\mathcal{B}}$). Da \mathcal{C} maximal ist, folgt $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{B}}$. \square

Definition 3.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Karte (U, φ) von M , welche in einem maximalen glatten Atlas enthalten ist, nenne wir *glatte Karte*, und φ *glatte Koordinatenabbildung* etc.

Definition 3.6. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Wir nennen eine Teilmenge $B \subset M$ eine *reguläre Koordinatenkugel*, wenn es eine glatte Koordinatenkugel $B' \supset \overline{B}$ gibt und glatte Koordinatenabbildung $\varphi: B' \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$\varphi(B) = B_r(0), \quad \varphi(\overline{B}) = \overline{B_r(0)}, \quad \varphi(B') = B_{r'}(0)$$

für irgendwelche $r, r' \in \mathbb{R}, r' > r$.

Lemma 3.7. Jede glatte Mannigfaltigkeit hat eine abzählbare Basis von regulären Koordinatenkugeln

Proof. Wie Lemma 2.6 (Übung). \square

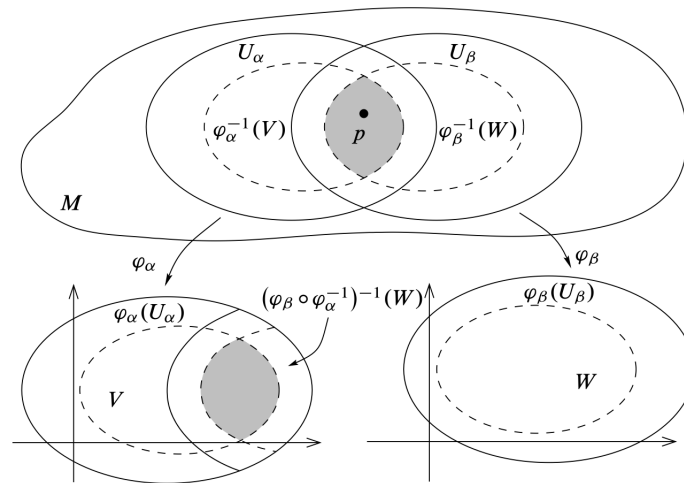
Lemma 3.8 (Smooth manifold Chart Lemma). Sei M eine Menge, $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine Familie von Teilmengen $U_\alpha \subset M$ und $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen, so dass die folgenden Bedingungen gelten.

- (1) $\forall \alpha, \varphi_\alpha(U_\alpha)$ ist offen in \mathbb{R}^n und φ_α ist eine Bijektion zwischen U_α und $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.
- (2) $\forall \alpha, \beta$, sind die Mengen $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ und $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen in \mathbb{R}^n .
- (3) Wenn $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann ist $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ glatt (C^∞).
- (4) M wird von abzählbar vielen U_α überdeckt.
- (5) Wenn $p, q \in M$ verschiedene Punkte sind, dann gibt es entweder ein U_α , so dass $p, q \in U_\alpha$, oder es gibt U_α, U_β , so dass $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ und $p \in U_\alpha$ und $q \in U_\beta$.

Dann hat M eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass jedes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ eine Karte von M ist.

Proof. Zuerst definieren wir eine Topologie: wir nehmen alle Mengen der Form $\varphi_\alpha^{-1}(V)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, als Basis. Wir zeigen jetzt, dass dies eine Topologie bestimmt. Dazu reicht es zu zeigen, dass für alle offenen Mengen $V, W \subset \mathbb{R}^n$ und alle α, β , die Menge $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$

wieder in der Basis ist (siehe Bild)



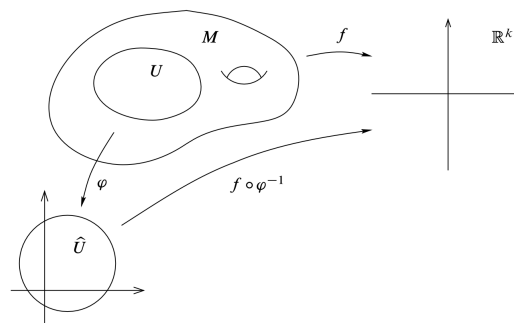
(3) impliziert, dass $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen ist. (2) impliziert, dass $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)$ offen in \mathbb{R}^n ist. Es folgt, dass

$$\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) = \varphi_\alpha^{-1}(V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W))$$

eine Basis Menge ist. Wir haben also eine Topologie auf M definiert. Nach Definition dieser Topologie und nach (1), ist jedes φ_α ein Homöomorphismus. Die Topologie auf M ist Hausdorff nach (5) und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom nach (4) und weil die $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Also ist M eine topologische Mannigfaltigkeit. (3) impliziert, dass M eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Übung: diese glatte Mannigfaltigkeitsstruktur ist eindeutig. \square

Definition 3.9. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung. Wir sagen, dass f *glatt* ist, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U, φ) von M gibt, mit $p \in U$, so dass $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt ist. Wir nennen $(f \circ \varphi^{-1})(x)$ die *Koordinatenrepräsentation* von f .

Die Menge aller glatten Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{R}$ wird mit $C^\infty(M)$ notiert.



Example 3.10 (Exercises). (1) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit ihrer standard Mannigfaltigkeitsstruktur und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung. Zeige, sie ist glatt wie oben definiert, dann und nur dann wenn sie glatt im calculus Sinne ist.

(2) Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung. Zeige, dass $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt ist für jede glatte Karte (U, φ) von M .

Definition 3.11. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Wir sagen, dass F *glatt* ist, wenn für jeden Punkt $p \in M$ glatte Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N existieren, so dass $p \in U$ und $F(p) \in V$ und $F(U) \subset V$ und $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ glatt ist.

Lemma 3.12. Jede glatte Abbildung ist stetig.

Lemma 3.13 (Glueing lemma for smooth maps). Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Wir nehmen an, dass für jedes $\alpha \in A$ eine glatte Abbildung $F_\alpha: U_\alpha \rightarrow N$ haben, so dass $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in A$. Dann gibt es eine eindeutige glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ so dass $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

Definition 3.14. Zwei Mannigfaltigkeiten M und N sind *diffeomorph*, wenn es eine glatte bijektive Abbildung $F: M \rightarrow N$ gibt, so dass F^{-1} glatt ist. Wir schreiben auch $M \approx N$.

Example 3.15. Sei \mathbb{B}^n die offene Einheitskugel in \mathbb{R}^n . Wir betrachten die Abbildungen $F: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}, \quad G(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + |y|^2}}$$

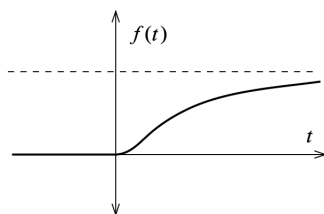
Übung: F und G sind glatt und inverse zu einander. Also haben wir $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{B}^n$.

4. HÜGELFUNKTIONEN UND DIE ZERLEGUNG DER EINS

Motivation: Abbildung zusammenkleben können, ohne, dass sie auf Überschneidungen übereinstimmen.

Lemma 4.1. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$, ist glatt.

Proof. Exercise. □

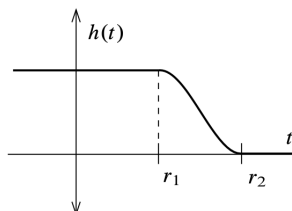


Lemma 4.2 (Existenz cutoff function). Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$. Dann gibt es eine glatte Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $h(t) \equiv 1$ für $t \leq r_1$, $0 < h(t) < 1$ für $t \in (r_1, r_2)$ und $h(t) \equiv 0$ für $t \geq r_2$.

Wir nennen h eine cut-off Funktion.

Proof. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$, von Lemma 4.1. Wir setzen

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$



Wir haben $f(r_2 - t) + f(t - r_1) > 0$ (weil immer $r_2 - t$ oder $t - r_1$ positive sind) und $h(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $t \leq r_1$ haben wir $f(t - r_1) = 0$ und somit $h(t) = 1$. Für $t \geq r_2$ haben wir $f(r_2 - t) = 0$ und somit $h(t) = 0$. □

Lemma 4.3. Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$. Dann gibt es eine glatte Funktion $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $H(x) \equiv 1$ für $x \in \overline{B_{r_1}(0)}$, $0 < H(x) < 1$ für $x \in B_{r_2}(0) \setminus \overline{B_{r_1}(0)}$ und $H(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}(0)$.

Proof. Wir setzen $H(x) = h(|x|)$, wobei h die Funktion von Lemma 4.2 ist. Die Funktion H ist glatt auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $H(x) = 1$ für $x \in \overline{B_{r_1}(0)}$, ist H auch bei 0 glatt. \square

Die Funktion H ist ein Beispiel einer Hügelfunktion.

Definition 4.4. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir nennen

$$\text{supp} f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$$

den *Support (Träger)* von f .

Example 4.5. Für f von Lemma 4.1, ist $\text{supp} f = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für h von Lemma 4.2 ist $\text{supp} h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq r_2\}$. Für H von Lemma 4.3 ist $\text{supp} H = \overline{B_{r_2}(0)}$.

Definition 4.6. Sei M ein topologischer Raum und $\mathcal{X} := \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Eine \mathcal{X} untergeordnete Zerlegung der Eins ist eine Familie $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von stetigen Abbildungen $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1 \quad \forall \alpha \in A$ und $\forall x \in M$.
- (2) $\text{supp} \psi_\alpha \subset X_\alpha \quad \forall \alpha \in A$.
- (3) Die Familie $\{\text{supp} \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist lokal endlich.
- (4) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit ist und alle ψ_α glatt sind, sagen wir, dass $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine *glatte \mathcal{X} untergeordnete Zerlegung der Eins* ist.

Remark 4.7. Nach (3), hat für jedes $x \in M$ die Summe $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x)$ in (4) nur endlich viele nicht-null Summanden.

Theorem 4.8. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{X} := \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine glatte \mathcal{X} untergeordnete Zerlegung der Eins.

Proof. Nach Lemma 2.3, ist jedes X_α eine Mannigfaltigkeit. Als solche hat es eine Basis \mathcal{B}_α von Koordinatenkugeln (Lemma 3.7). Dann ist $\mathcal{B} := \cup \mathcal{B}_\alpha$ eine Basis für die Topologie auf M . Proposition 2.10 sagt, dass es eine offene abzählbare Überdeckung $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ von M gibt, so dass $B_i \in \mathcal{B} \quad \forall i$, für jedes i gibt es ein $\alpha \in A$, so dass $B_i \subset X_\alpha$, und jeder Punkt $x \in M$ hat eine Umgebung, die in nur endlich viele B_i nicht-leer schneidet. Die letzte Bedingung gilt auch für die Überdeckung $\{\overline{B_i}\}_{i=1}^\infty$ nach Lemma 2.9. Da B_i eine reguläre Koordinatenkugel ist und $B_i \subset X_\alpha$ für ein $\alpha \in A$, impliziert, dass es eine Koordinatenkugel $B'_i \subset X_\alpha$ gibt, so dass $\overline{B_i} \subset B'_i$. Und es gibt eine glatte Koordinate $\varphi_i: B'_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi_i(\overline{B_i}) = \overline{B_{r_i}(0)}$ und $\varphi_i(B'_i) = B_{r'_i}(0)$ für irgendwelche $r_i, r'_i \in \mathbb{R}$, $r_i < r'_i$.

Für jedes i definieren wir

$$f_i = \begin{cases} H_i \circ \varphi_i, & \text{auf } B'_i \\ 0, & \text{auf } M \setminus \overline{B_i} \end{cases},$$

wobei $H_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die auf $B_{r_i}(0)$ positiv ist und null auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{r_i}(0)$, wie in Lemma 4.3. Wir bemerken, dass $H_i \circ \varphi_i$ null auf $B'_i \setminus \overline{B_i}$ ist, als ist f_i wohl-definiert, glatt und $\text{supp} f_i = \overline{B_i}$.

Wir definieren $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_i f_i(x)$. Da jeder $\{\overline{B_i}\}$ lokal endlich ist, hat diese Summe nur endlich viele nicht-null Summanden in einer Umgebung jedes Punktes. Also ist f glatt. Da jedes f_i positiv auf $\overline{B_i}$ ist und jeder Punkt von M in einem B_i enthalten ist, ist f positiv auf M . Also ist $g_i := f_i/f$ glatt, da wo es definiert ist. Ausserdem ist $0 \leq g_i \leq 1$ und $\sum_i g_i(x) = 1 \quad \forall x \in M$.

Jetzt müssen wir die Indizes anpassen, damit wir $\alpha \in A$ wiederfinden. Für jedes i gibt es $a(i) \in A$, so dass $B'_i \subset X_{a(i)}$ ($a(i)$ ist vielleicht nicht eindeutig). Für $\alpha \in A$ definieren wir

$$\psi_\alpha = \sum_{i \text{ s.d. } a(i) = \alpha} g_i: M \rightarrow \mathbb{R}.$$

(Wenn es keine i gibt, so dass $\alpha = a(i)$, dann ist diese Summe Null.) Wir haben

$$\text{supp}\psi_\alpha = \overline{\cup_{i \text{ s.d. } a(i) = \alpha} B_i} \stackrel{\text{Lem 2.9}}{=} \cup_{i \text{ s.d. } a(i) = \alpha} \overline{B_i} \subset X_\alpha$$

Jedes ψ_α ist glatt und $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$. Mehr noch, für jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine Umgebung, die in nur endlich vielen $\text{supp}\psi_\alpha$ nicht-leer schneidet (weil das schon für die $\overline{B_i}$ stimmt). Wir haben daher $\sum_\alpha \psi_\alpha = \sum_i g_i = 1$. \square

Definition 4.9. Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ abgeschlossen und $U \subset M$ offen mit $A \subset U$. Eine stetige Abbildung $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *Hügelfunktion für A auf U* , wenn $0 \leq \psi \leq 1$ auf M , $\psi = 1$ auf A und $\text{supp}\psi \subset U$.

Corollary 4.10. *Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ abgeschlossen und $U \subset M$ offen mit $A \subset U$. Dann gibt es eine glatte Hügelfunktion für A auf U .*

Proof. Sei $U_0 = U$ und $U_1 = M \setminus A$. Dann ist $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von M . Nach Theorem 4.8 gibt es eine glatte $\{U_0, U_1\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_0, \psi_1\}$. Dann ist $\psi_1 = 0$ auf A und somit $\psi_0 = \psi_0 + \psi_1 = 1$ auf A . Also ist ψ_0 die gesuchte glatte Hügelfunktion. \square

Definition 4.11. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $A \subset M$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $F: A \rightarrow N$ ist *glatt auf A* , wenn es für jeden Punkt $x \in A$ eine Umgebung $x \in U \subset M$ und eine glatte Abbildung $\tilde{F}: U \rightarrow N$ gibt, so dass $\tilde{F}|_{A \cap U} = F|_{A \cap U}$.

Corollary 4.12. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung. Sei $U \subset M$ eine offene Menge mit $A \subset U$. Dann gibt es eine glatte Abbildung $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $\tilde{f}_A = f$ und $\text{supp}\tilde{f} \subset U$.*

Proof. Für jedes $p \in A$ gibt es eine Umgebung $W_p \subset M$ und eine glatte Abbildung $\tilde{f}_p: W_p \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $\tilde{f}_p|_{W_p \cap A} = f|_{W_p \cap A}$. Wir ersetzen W_p durch $W_p \cap U$ und können somit annehmen, dass $W_p \subset U$. Dann ist $\mathcal{W} := \{W_p \mid p \in A\} \cup \{M \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von M . Nach Theorem 4.8 gibt es eine glatte \mathcal{W} untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_p \mid p \in A\} \cup \{\psi_0\}$. Es gilt $\text{supp}\psi_p \subset W_p$ und $\text{supp}\psi_0 \subset M \setminus A$. Für jedes $p \in A$ ist $\psi_p \tilde{f}_p$ glatt auf W_p und hat eine glatte Erweiterung auf M , welche null auf $M \setminus \text{supp}\psi_p$ ist. (Die so definierte Abbildung ist tatsächlich glatt, weil sie null auf $W_p \setminus \text{supp}\psi_p$ ist.) Wir definieren

$$\tilde{f}(x) := \sum_{p \in A} \psi_p(x) \tilde{f}_p(x).$$

Da die Familie $\{\text{supp}\psi_p\}$ lokal endlich ist, hat diese Summe in einer Umgebung jedes Punktes nur endlich viele nicht-null Summanden. Also ist \tilde{f} glatt. Wenn $x \in A$, dann ist $\psi_0(x) = 0$ und $\tilde{f}_p(x) = f(x) \forall p \in A$, und somit

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) \tilde{f}_p(x) = (\psi_0(x) + \sum_{p \in A} \psi_p(x)) f(x) \stackrel{\text{ZdE}}{=} f(x)$$

Also ist $\tilde{f}|_A = f$. Ausserdem haben wir

$$\text{supp}\tilde{f} = \overline{\cup_{p \in A} \text{supp}\psi_p} \stackrel{\text{Lem 2.9}}{=} \cup_{p \in A} \text{supp}\psi_p \subset \cup_{p \in A} W_p \subset U.$$

\square

Remark 4.13. Die Bedingung, dass $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ und nicht $f: A \rightarrow N$ für irgendeine glatte Mannigfaltigkeit N ist wichtig. Nehmen wir die abgeschlossene Menge $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ und die Identität $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Sie ist glatt. Aber es gibt keine stetige Erweiterung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ (denke an Fundamentalgruppen) und daher kann Korollar 4.12 in diesem Fall nicht stimmen. Allerdings kann man f als Abbildung $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sehen und dann können wir sie zur Identitätsabbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erweitern.

Man kann Korollar 4.12 verallgemeinern, vielleicht sehen wir das später.

Definition 4.14. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Ausschöpfungsfunktion* für X ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f^{-1}((-\infty, c])$ kompakt ist $\forall c \in \mathbb{R}$. Wir nennen $f^{-1}((-\infty, c])$ *Sublevelset* von f .

Proposition 4.15. Jede glatte Mannigfaltigkeit hat eine glatte positive Ausschöpfungsfunktion.

Proof. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Nach Lemma 2.6 gibt es eine abzählbare offene Überdeckung $\{V_j\}_{j=1}^\infty$ von präkompakten Mengen V_j (Topologieübung). Nach Theorem 4.8 gibt es eine $\{V_j\}_{j=1}^\infty$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$. Wir definieren

$$f(x) = \sum_{j=1}^\infty j\psi_j(x).$$

Da $\{\text{supp}\psi_j\}_{j=1}^\infty$ lokal endlich ist, sind für jeden Punkt in M nur endlich viele Summanden nicht-null in einer Umgebung dieses Punktes. Es folgt, dass f glatt ist. Ausserdem gilt $f(x) \geq \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x) = 1$. Lass uns zeigen, dass f eine Ausschöpfungsfunktion ist. Sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $N \in \mathbb{Z}$, $N > c$.

Wenn $p \notin \cup_{j=1}^N \overline{V_j}$, dann ist $\psi_j(x) = 0$ for $1 \leq j \leq N$, und dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=N+1}^\infty j\psi_j(x) = \sum_{j=N+1}^\infty N\psi_j(x) = N \left(\sum_{j=N+1}^\infty \psi_j(x) \right) = N > c.$$

Wir haben gezeigt, dass wenn $f(x) \leq c$, dann ist $x \in \cup_{j=1}^N \overline{V_j}$. Also ist die abgeschlossene Menge $f^{-1}((-\infty, c])$ in der kompakten Menge $\cup_{j=1}^N \overline{V_j}$ und ist daher selbst kompakt. \square

Der folgende Satz zeigt, dass jede abgeschlossene Menge einer glatten Mannigfaltigkeit eine Niveaumenge ist.

Theorem 4.16. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ eine abgeschlossene Menge. Dann gibt es eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $f^{-1}(0) = K$.

Proof. Nach Lemma 2.6 gibt es eine offene Überdeckung $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von glatten Koordinatenkugeln B_α . Nach Theorem 4.8 gibt es eine $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Behauptung: es $\forall \alpha$ eine nicht-negative glatte Funktion $f_\alpha: B_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $f_\alpha^{-1}(0) = B_\alpha \cap K$. Wenn dies gezeigt ist, dann nehmen wir $f = \sum f_\alpha \psi_\alpha$.

Beweis: wir erinnern uns, dass $B_\alpha \approx \mathbb{R}^n$, siehe Example 3.15. Es reicht also die Behauptung für \mathbb{R}^n zu zeigen. Sei $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ das Bild von $K \cap B_\alpha$ unter dem Diffeomorphismus $B_\alpha \approx \mathbb{R}^n$. Dann ist $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{K}$ offen und ist eine glatte Mannigfaltigkeit (Lemma 2.3). Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{K} = \cup_{i=1}^\infty B_{r_i}(x_i)$ für irgendwelche $0 < r_i \leq 1$ und $x_i \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{K} \forall i$ (Lemma 2.6). Nach Lemma 4.3 gibt es $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Hügel Funktion, welche 1 auf $\overline{B_{1/2}(0)}$ ist und $0 < h(x) < 1$ for $x \in B_1(0) \setminus \overline{B_{1/2}(0)}$ und $h(x) = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$. Da $\overline{B_1(0)}$ kompakt ist, gibt es für jedes $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine Konstante $C_i \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, so dass

$$|h^{(i)}(x)| \leq C_i \forall x \in \overline{B_1(0)} \forall i$$

(wobei $h^{(i)}$ die i -te Ableitung von h ist). Da $h \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$, gilt

$$|h^{(i)}(x)| \leq C_i \forall x \in \mathbb{R}^n \forall i.$$

Wir definieren

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x - x_i}{r_i}\right)$$

Da $0 \leq h(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}^n$, gilt

$$\left| \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x - x_i}{r_i}\right) \right| \leq \left| \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} \right| \stackrel{0 < r_i \leq 1}{\leq} \frac{1}{2^i C_i} \stackrel{C_i \geq 1}{\leq} \frac{1}{2^i} \forall i$$

Da die Reihe $\sum_i \frac{1}{2^i}$ konvergiert, konvergiert (nach Weierstrass Majorantenkriterium, siehe Analysis I&II) auch $\sum_{i=1}^N \frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right)$ absolut und gleichmässig auf \mathbb{R}^n zu einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir bemerken, dass $h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right) > 0$ genau dann, wenn $x \in B_{r_i}(x_i)$. Also ist $f|_{\tilde{K}} \equiv 0$ und $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{K}} > 0$.

Wir zeigen jetzt durch Induktion, dass f glatt ist. Sei $k \geq 1$ und nehmen wir an, dass alle partiellen Ableitungen von f von Ordnung $\leq k-1$ existieren und stetig sind. Jede k -te partielle Ableitung von $\frac{(r_i)^i}{2^i C_i} h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right)$ ist von der Form

$$\frac{(r_i)^{i-k}}{2^i C_i} D_k h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right)$$

wobei $D_k h$ eine k -te Ableitung von h ist. Wenn $k \leq i$, dann ist $\frac{(r_i)^{i-k}}{2^i C_i} D_k h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right) \leq \frac{1}{2^i}$. Also konvergiert $\sum_{i=1}^N \frac{(r_i)^{i-k}}{2^i C_i} D_k h\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right)$ uniform auf \mathbb{R}^n zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (wieder nach Weierstrass Majorantenkriterium). Es folgt, dass alle k -ten partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind. Wir haben gezeigt, dass f glatt ist. Dies beweist unsere Behauptung.

Wir nehmen nun

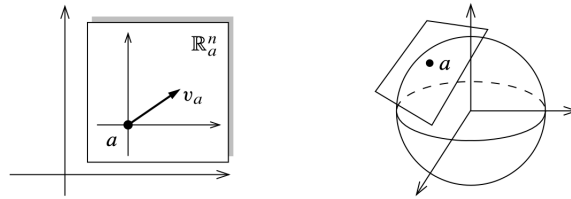
$$f := \sum f_\alpha \psi_\alpha$$

Da f_α glatt ist (nach unserer eben bewiesenen Behauptung) und $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, folgt, dass f wohldefiniert und glatt ist (wieder: da $\{\text{supp}(\psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich ist, ist für jedes $x \in M$ $\psi_\alpha(x) \neq 0$ für nur endlich viele $\alpha \in A$, also ist f wohldefiniert; f ist glatt, weil die f_α und ψ_α glatt sind.) \square

5. TANGENTIALRÄUME VON MANNIGFALTIGKEITEN

Wir werden zwei äquivalente Definitionen von Tangentialvektoren sehen, die eine durch Derivative und die andere durch Geschwindigkeitsvektoren von Kurven bei Punkten. Lass uns ein einleitendes Beispiel machen, um das Konzept von Derivationen klarer zu machen.

Example 5.1. Intuitiv, wenn eine Mannigfaltigkeit in einem \mathbb{R}^n eingebettet ist:



Für $a \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\mathbb{R}_a^n := \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$. Wir schreiben $v_a := (a, v)$. Es gilt $v_a + w_a = (v + w)_a$ und $(cv)_a = c(v_a)$, also ist \mathbb{R}_a^n ein \mathbb{R} -Vektorraum. Ausserdem sind \mathbb{R}_a^n und \mathbb{R}_b^n disjunkt, wenn $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sei $v_a \in \mathbb{R}_a^n$. Er definiert eine Abbildung

$$D_v|_a: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_v|_a f = D_v(f)_a = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a + tv)$$

welche \mathbb{R} -linear ist ($D_v|_a(cf) = cD_v|_a(f)$) und $D_v|_a(fg) = f(a)D_v|_a(g) + g(a)D_v|_a(f)$ (Leibniz-Regel / Produktregel). Wenn e_i der i -te Standardvektor ist, dann haben wir

$$D_{e_i}|_a = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ und } D_{\sum_i c_i e_i}|_a = \sum_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ (siehe Analysis II).}$$

Für $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ schreiben wir $v_a = \sum_i v_i(e_i)_a$, wo e_i der i -te Standardvektor ist, und bekommen

$$D_v|_a = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Wir nennen eine Abbildung $w: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Derivation bei $a \in \mathbb{R}^n$, wenn w \mathbb{R} -linear ist und $w(fg) = f(a)w(g) + g(a)w(f) \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben $T_a \mathbb{R}^n$ für die Menge aller

Derivationen bei a . Dann ist $T_a\mathbb{R}^n$ ein \mathbb{R} -Vektorraum durch $(w_1 + w_2)(f) := w_1(f) + w_2(f)$ und $(cw)(f) := c w(f)$.

Remark 5.2. Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $w \in T_a\mathbb{R}^n$ und $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

- (1) Wenn f konstant ist, dann gilt $w(f) = 0$. In der Tat, sei $f(x) \equiv c$. Dann ist $w(f) = cw(1)$, da w \mathbb{R} -linear. Wir haben $w(1) = w(1 \cdot 1) = 1(a)w(1) + 1(a)w(1) = 2w(1)$, also ist $w(1) = 0$.
- (2) Wenn $f(a) = g(a) = 0$, dann gilt $w(fg) = 0$. Dies folgt aus der Produkt-/Leibnizregel.

Lemma 5.3. Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- (1) Für $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ ist $D_a|_v$ eine Derivation.
- (2) Die Abbildung $v_a \mapsto D_v|_a$ ist ein Isomorphismus (von \mathbb{R} -Vektorräumen) $\mathbb{R}_a^n \longrightarrow T_a\mathbb{R}^n$.

Proof. Die erste Aussage folgt aus der Kettenregel. Lass uns die zweite Aussage beweisen. Wir bemerken, dass $F: v_a \mapsto D_v|_a$ linear ist: $F(cv_a) = D_{cv}|_a = \sum_i cv_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a) = cD_v|_a$ und

$$F(v_a + w_a) \stackrel{v_a + w_a \equiv (v+w)_a}{=} D_{v+w}|_a = \sum_i (v_i + w_i) \frac{\partial}{\partial x_i}(a) = D_v|_a + D_w|_a.$$

F ist injektiv: Sei $v_a \in \mathbb{R}_a^n$, so dass $D_v|_a = 0$. Dann gilt $0 = D_v|_a(x_j) = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)(a) = v_j$ für alle $j = 1, \dots, n$. Also ist $v_a = 0_a$.

F ist surjektiv: Sei $w \in T_a\mathbb{R}^n$ und $v_i := w(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ (wobei $x_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die i -te Koordinate ist). Sei $v := v_1(e_1)_a + \dots + v_n(e_n)_a$. Wir zeigen, dass $D_v|_a = w$. Dazu, sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt (siehe Analysisvorlesung, sonst Übung)

$$f(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \sum_{i,j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x-a)) dt$$

Nach Remark 5.2 folgt

$$\begin{aligned} w(f) &= w(f(a)) + w\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\right) + w\left(\sum_{i,j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x-a)) dt\right) \\ &\stackrel{\text{Rmk 5.2}}{=} w\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\right) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(w(x_i) - w(a_i)) \\ &\stackrel{\text{Rmk 5.2}}{=} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)w(x_i) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i = D_v|_a f \end{aligned}$$

□

Corollary 5.4. $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $(\frac{\partial}{\partial x_1}|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_a)$ ist eine Basis von $T_a\mathbb{R}^n$. Insbesondere $\dim T_a\mathbb{R}^n = n$.

Proof. Wir nehmen den Isomorphismus $\mathbb{R}_a^n \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n$ von Lemma 5.3 und bemerken, dass er nach Konstruktion $(e_i)_a$ auf $\frac{\partial}{\partial x_i}|_a$ schickt für alle $i = 1, \dots, n$. □

Wir verallgemeinern dieses Konzept jetzt.

Definition 5.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Eine *Derivation bei p* ist eine lineare Abbildung $v: C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$. Wir schreiben T_pM für die Menge der Derivationen von M bei p und nennen sie *Tangententialraum von M bei p* .

Lemma 5.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $v \in T_pM$ und $f, g \in C^\infty(M)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Wenn f eine konstante Funktion ist, dann gilt $v(f) = 0$.

(2) Wenn $f(p) = g(p) = 0$, dann gilt $v(fg) = 0$.

Proof. Wie Remark 5.2. □

Um die abstrakten Tangentialräume, die wir auf Mannigfaltigkeiten definiert haben, mit den geometrischen Tangentialräumen in \mathbb{R}^n zu verknüpfen, müssen wir untersuchen, wie glatte Abbildungen Tangentialvektoren beeinflussen. Im Fall einer glatten Abbildung zwischen euklidischen Räumen ist die totale Ableitung der Abbildung an einem Punkt (repräsentiert durch ihre Jacobimatrix) eine lineare Abbildung, die die „beste lineare Approximation“ der Abbildung in der Nähe des gegebenen Punktes darstellt. Im Fall von Mannigfaltigkeiten macht es keinen Sinn, von einer linearen Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten zu sprechen. Stattdessen handelt es sich um eine lineare Abbildung zwischen Tangentialräumen. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Rand und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für jedes $p \in M$ definieren wir eine Abbildung, das Differential von F in p , wie folgt:

$$DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

Für $v \in T_p M$ setzen wir $dF_p(v)$ die Derivation in $F(p)$, so dass für $f \in C^\infty(N)$ gilt:

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F).$$

Bemerkung: wenn $f \circ F \in C^\infty(M)$, dann ist $f \in C^\infty(N)$ und somit macht $v(f \circ F)$ Sinn. Der Operator $dF_p(v) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear, da v linear ist, und es ist eine Derivation in $F(p)$, da für beliebige $f, g \in C^\infty(N)$ gilt:

$$dF_p(v)(fg) = v((fg) \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) = f(F(p))v(g \circ F) + g(F(p))v(f \circ F).$$

Proposition 5.7. Seien M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, und $p \in M$. Dann gilt:

- (1) $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ist linear.
- (2) $D(G \circ F)_p = DG_{F(p)} \circ dF_p : T_p M \rightarrow T_{(G \circ F)(p)} P$.
- (3) $D(Id_M)_p = Id_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$.
- (4) Wenn F ein Diffeomorphismus ist, dann ist $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ein Isomorphismus und es gilt

$$(dF_p)^{-1} = D(F^{-1})_{F(p)}.$$

Proof. Seien $v, w \in T_p M$, $f \in C^\infty(N)$, $g \in C^\infty(P)$.

(1) Es gilt

$$\begin{aligned} dF_p(v+w)(f) &\stackrel{\text{def}}{=} (v+w)(f \circ F) \stackrel{\text{def}}{=} v(f \circ F) + w(f \circ F) \stackrel{\text{def}}{=} dF_p(v)(f) + dF_p(w)(f) \\ &= (dF_p(v) + dF_p(w))(f). \end{aligned}$$

Also gilt $dF_p(v+w) = dF_p(v) + dF_p(w)$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} D(G \circ F)_p(v)(f) &\stackrel{\text{def}}{=} v(f \circ (G \circ F)) = v((g \circ G) \circ F) \\ &= dF_p(v)(g \circ G) \stackrel{dF_p(v) = \text{derivation } w \text{ in } F(p)}{=} w(g \circ G) \\ &= DG_{F(p)}(w)(f) \stackrel{w = dF_p(v)}{=} (DG_{F(p)}(dF_p(v)))(g). \end{aligned}$$

Also gilt $D(G \circ F)_p = DG_{F(p)} \circ dF_p$.

(3) Es gilt

$$D(Id_M)_p(v)(f) = v(f \circ Id_M) = v(f), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Also gilt $D(Id_M)_p = Id_{T_p M}$.

(4) Wir haben $Id_{T_p M} \stackrel{(3)}{=} D(Id_M)_p = D(F^{-1} \circ F)_p \stackrel{(2)}{=} D(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p$ □

Lemma 5.8. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand, $p \in M$ und $v \in T_p M$. Wenn $f, g \in C^\infty(M)$ in einer Umgebung von p übereinstimmen, dann gilt $v(f) = v(g)$.

Proof. Sei $h = f - g$, sodass h eine glatte Funktion ist. Sie ist null in einer Umgebung von p . Sei $\phi \in C^\infty(M)$ eine glatte Hügelfunktion, die identisch gleich 1 auf dem Support von h ist und deren Supoprt in $M \setminus \{p\}$ enthalten ist. Da $\phi \equiv 1$ dort, wo $h \neq 0$ ist, ist das Produkt ϕh identisch gleich h (da, wo h nichtnull ist). Da $h(p) = \phi(p) = 0$, impliziert Lemma 5.6, dass $v(\phi h) = 0$. Da $h = \phi h$ auf $\text{supp}(h)$ und $h = \phi h = 0$ da, wo h Null ist, folgt $v(\phi h) = 0$. Aus der Linearität von v folgt $v(f) = v(g)$. \square

Wir können somit den Tangentialraum einer offenen Untermannigfaltigkeit mit dem Tangentialraum der gesamten Mannigfaltigkeit identifizieren:

Lemma 5.9. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge, und sei $\iota : U \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Für jedes $p \in U$ ist das Differential $D\iota_p : T_p U \longrightarrow T_p M$ ein Isomorphismus.*

Proof. Injektivität: sei $v \in T_p U$ und $D\iota_p(v) = 0 \in T_p M$. Sei B eine Umgebung von p , sodass $B \subset U$. Wenn $f \in C^\infty(U)$ beliebig, impliziert Lemma 4.12, dass es ein $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ gibt, sodass $\tilde{f} = f$ auf B . Da f und $\tilde{f}|_U$ glatte Funktionen auf U sind, die in einer Umgebung von p übereinstimmen, impliziert Lemma 5.8, dass

$$vf = v(\tilde{f}|_U) = v(\tilde{f} \circ \iota) = D\iota_p(v)(\tilde{f}) = 0.$$

Es folgt, dass $v = 0$. Also ist $D\iota_p$ injektiv.

Surjektivität: sei $w \in T_p M$. Definiere einen Operator $v : C^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $vf := w(\tilde{f})$, wobei \tilde{f} eine beliebige glatte Funktion auf M ist, die mit f auf U übereinstimmt (existiert nach Lemma 4.12). Nach Lemma 5.8 ist $v(f)$ unabhängig von der Wahl von \tilde{f} , also ist v wohldefiniert. Wir bemerken, dass $v(f)$ eine Derivation in p ist. Für jedes $g \in C^\infty(M)$ gilt

$$D\iota_p(v)(g) = v(g \circ \iota) = w(g),$$

also ist $D\iota_p$ surjektiv. \square

Remark 5.10. Für eine offene Teilmenge $U \subset M$ ist der Isomorphismus $D\iota_p$ zwischen $T_p U$ und $T_p M$ kanonisch definiert, unabhängig von Wahlmöglichkeiten. Von nun an identifizieren wir $T_p U$ mit $T_p M$ für jeden Punkt $p \in U$. Diese Identifikation entspricht $D\iota_p(v)(g) = v(g \circ \iota) = w(g)$ von oben.

Proposition 5.11. *Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist für jedes $p \in M$ der Tangentialraum $T_p M$ ein n -dimensionaler Vektorraum.*

Proof. Für ein $p \in M$ sei (U, φ) eine glatte Karte mit $p \in U$. Da φ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist, folgt aus Lemma 5.7, dass $d\varphi_p$ ein Isomorphismus von $T_p U$ auf $T_{\varphi(p)} V$ ist. Nach Lemma 5.9 ist $T_p M \simeq T_p U$ und $T_{\varphi(p)} V \simeq T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$. Es folgt

$$\dim T_p M = \dim T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n = n.$$

\square

Proposition 5.12. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit seiner standardmäßigen glatten Mannigfaltigkeitsstruktur (siehe Übungen). Für jeden Punkt $a \in V$ ist die Abbildung*

$$C^\infty(V) \ni v \mapsto Dv|_a := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv) \in \mathbb{R}$$

ein kanonischer Isomorphismus von V nach $T_a V$, sodass für jede lineare Abbildung $L : V \longrightarrow W$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \simeq & T_a V \\ L \downarrow & & \downarrow dL_a \\ W & \simeq & T_a W \end{array}$$

Proof. Wir wählen eine Basis von V und können den Beweis von Lemma 5.3 wiederholen, um zu zeigen, dass $Dv|_a$ eine Ableitung in a ist und dass die Abbildung $v \mapsto Dv|_a$ ein Iso ist.

Sei $L : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Da ihre Komponenten bezüglich beliebiger Basen von V und W lineare Funktionen der Koordinaten sind, ist L glatt. Es gilt für $f \in C^\infty(W)$:

$$\begin{aligned} dL_a(Dv|_a)(f) &\stackrel{def}{=} dL_a(Dv|_a)(f \circ L) \stackrel{def}{=} Dv|_a \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ L)(a + tv) \\ &\stackrel{L \text{ linear}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(L(a) + tL(v)) = D_{L(v)}|_{L(a)}(f) \end{aligned}$$

Also kommutierte das obige Diagramm. \square

Remark 5.13. Soweit ist alles sehr abstrakt. Wir sehen jetzt, wie man mit Tangentialvektoren und Differentialen in lokalen Koordinaten rechnen kann. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, und (U, φ) sei eine glatte Koordinatenkarte auf M . Dann ist φ insbesondere ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $U_y \subset \mathbb{R}^n$. Es folgt von Proposition 5.7 und Lemma 5.9, dass $d\varphi_p : T_p M \longrightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus ist. Nach Corollary 5.4 bilden $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_{\varphi(p)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_{\varphi(p)}$ eine Basis von $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$. Also bilden die Urbilder dieser Vektoren unter dem Isomorphismus $d\varphi_p$ eine Basis von $T_p M$ (siehe Proposition 5.12). In Übereinstimmung mit unserer Konvention, Koordinatenkarten wenn möglich als Identifikationen zu behandeln, verwenden wir die Notation $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ für diese Vektoren:

$$\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p := (d\varphi_p)^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) \stackrel{Prop 5.7}{=} d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right).$$

Wir bemerken, dass für $f \in C^\infty(U)$ gilt:

$$\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) (f) = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) (f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})$$

Mit anderen Worten ist $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ einfach die Ableitung, die die i -te partielle Ableitung der (Koordinatendarstellung von) f an der (Koordinatendarstellung von) p nimmt. Die Vektoren $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ werden die *Koordinatenvektoren* an p genannt, die mit der Karte (U, φ) assoziiert sind. Im Spezialfall der Standardkoordinaten auf \mathbb{R}^n sind die Vektoren $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ buchstäblich die partiellen Ableitungsoperatoren.

Definition 5.14. Nach der obigen Bemerkung, kann ein Tangentialvektor $v \in T_p M$ eindeutig als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^n v_i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$, $v_i \in \mathbb{R}$, geschrieben werden. Die geordnete Basis $\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right)$ wird als *Koordinatenbasis* von $T_p M$ bezeichnet und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ werden die Komponenten von v bezüglich der Koordinatenbasis genannt.

Wenn v bekannt ist, können seine Komponenten folgendermassen berechnet werden: wir denken x_j als glatte Funktion auf U und dann

$$v(x_j) = v \left(\sum_{i=1}^n v_i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) (x_j) = v_i \left. \frac{\partial x_j}{\partial x^i} \right|_p = v_i \delta_{ij} = v_i,$$

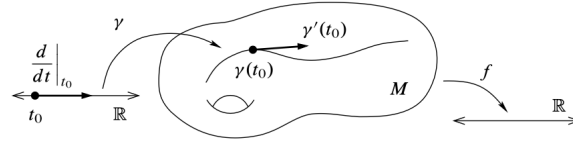
wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ist.

Alternative Definition des Tangentialraumes einer glatten Mannigfaltigkeit.

Wenn M eine Mannigfaltigkeit ist, definieren wir eine (parametrisierte) Kurve in M als eine stetige Abbildung $\gamma : J \longrightarrow M$, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Sei $t_0 \in J$. Wir definieren die Geschwindigkeit $\gamma'(t_0)$ von γ bei t_0 als

$$\gamma'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \gamma(t) \in T_{\gamma(t_0)} M;$$

wobei $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ der Standard-Koordinatenbasisvektor in $T_{t_0}\mathbb{R}$ ist.



Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

$$\gamma'(t_0)(f) = d\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) (f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'(t_0)$$

Also ist $\gamma'(t_0)$ die Derivation bei t_0 , die durch die Ableitung einer Funktion entlang der Kurve γ erhalten wird.

Nun sei (U, φ) ein glattes Koordinatenchart mit Koordinatenfunktionen $\{x_i\}$. Wenn $\gamma(t_0) \in U$, können schreiben wir γ als $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ für t , welche hinreichend nahe bei t_0 liegen. Mit den obigen expliziten Koordinatenrechnungen bekommen wir (Studenten sollen versuchen es nachzurechnen)

$$\gamma'(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \gamma(t) = \left(\frac{d}{dt} x_1(t), \dots, \frac{d}{dt} x_n(t) \right).$$

Proposition 5.15. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann ist jedes $v \in T_p M$ die Geschwindigkeit einer glatten Kurve in M .*

Proof. Sei (U, φ) eine glatte Koordinatenkarte, so dass $p \in U$ und $\varphi(p) = 0$, und schreibe $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$. Für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$, sei

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U, \quad t \mapsto \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$$

Dies ist eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = v$. □

Sei p ein Punkt von M . Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller glatten Kurven der Form $\gamma : J \longrightarrow M$, wobei $0 \in J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, so dass $\gamma(0) = p$: Gegeben zwei solche Kurven $\gamma_1 : J_1 \longrightarrow M$ und $\gamma_2 : J_2 \longrightarrow M$, sagen wir, dass $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn $(\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t))|_{t=0} = (\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2)(t))|_{t=0}$ für jede glatte, reellwertige Funktion f , die in einer Umgebung von p definiert ist. Sei $\mathcal{V}_p M$ die Menge der Äquivalenzklassen. Proposition 5.15 induziert eine surjektive Abbildung $T_p M \longrightarrow \mathcal{V}_p M$, $v \mapsto \gamma'(0)$, wobei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$, $t \mapsto \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$ und (U, φ) wie im Beweis von Proposition 5.15 sind. Diese Abbildung ist injektiv nach Definition von $\gamma'(0)$ und der Äquivalenzrelation zwischen Kurve.

Der Tangentialraum an M bei p wird auch oft als die Menge $\mathcal{V}_p M$ definiert. Diese Definition hat den Vorteil, dass sie geometrisch intuitiver ist, hat jedoch den Nachteil, dass die Existenz einer Vektorraummodellstruktur auf $V_p M$ nicht offensichtlich ist.

Das Tangentenbündel Mannigfaltigkeit.

Oft ist es nützlich, die Menge aller Tangentialvektoren an allen Punkten einer Mannigfaltigkeit zu betrachten. Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit M , definieren wir das Tangentialbündel von M als

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Ein Element schreiben wir als geordnetes Paar (p, v) mit $p \in M$ und $v \in T_p M$. Das Tangentialbündel kommt mit einer natürlichen Projektionsabbildung

$$\pi : TM \longrightarrow M, (p, v) \mapsto p$$

Wir haben eine kanonische Injektion $T_p M \longrightarrow TM$, $v \mapsto (p, v)$.

Example 5.16. Sei $M = \mathbb{R}^n$. Nach Lemma 5.3 haben wir einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{R}_a^n \rightarrow T_a \mathbb{R}^n$, $v_a \mapsto D_v|_a$. Wir haben also eine natürliche Identifikation

$$T\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^n} T_a \mathbb{R}^n \longrightarrow \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}_a^n = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^n} (\{a\} \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$D_v|_a \mapsto v_a$$

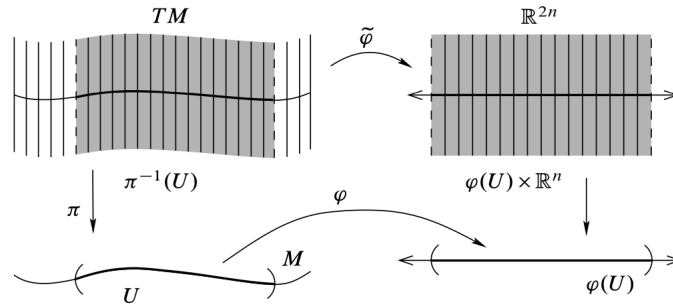
Ein Element (a, v) dieses kartesischen Produkts kann entweder als der geometrische Tangentialvektor v_a oder als die durch (3.1) definierte Ableitung $D_v|_a$ betrachtet werden.

Im Allgemeinen ist das Tangentialbündel kein Produkt, wie wir später sehen.

Proposition 5.17. *Für jede glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit M besitzt das Tangentialbündel TM eine natürliche Topologie und eine glatte Struktur, die es zu einer $2n$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit machen. Mit dieser Struktur ist die Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ glatt.*

Proof. Sei (U, φ) eine glatte Karte von M . Dann ist $\pi^{-1}(U) \subset TM$ die Menge aller Tangentialvektoren an M in allen Punkten von U . Seien (x_1, \dots, x_n) die Koordinatenfunktionen von φ . Wir definieren

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \tilde{\varphi}(p, v) = \tilde{\varphi} \left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = (x_1(p), \dots, x_n(p), v_1, \dots, v_n).$$



Wir haben $\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\varphi}$ ist eine Bijektion auf ihr $\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U))$ mit Umkehrabbildung

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = \left(\varphi^{-1}(x), \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)} \right)$$

Seien (U, φ) und (V, ψ) zwei glatte Karten von M , und seien $(U, \tilde{\varphi})$, $(V, \tilde{\psi})$ die entsprechenden Karten auf TM . Die Mengen

$$\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

und

$$\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

sind offen in \mathbb{R}^{2n} , und die Übergangsabbildung $\tilde{\psi} \circ (\tilde{\varphi})^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ist nach Lemma 5.13

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = \left(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x), \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x) v_j \right).$$

Diese Abbildung ist glatt. Wir wählen eine abzählbare Überdeckung $\{U_i\}$ von M durch glatte Karten. Sie induziert eine abzählbare Überdeckung von TM durch Karten $\{\pi^{-1}(U_i)\}$. Sie erfüllen die Bedingungen von Lemma 3.8(i)–(v). (Um die Hausdorff-Bedingung (v) zu überprüfen, beachte, dass sich zwei Punkte in derselben Faser von π in einer einzigen Karte befinden. Falls hingegen (p, v) und (q, w) in verschiedenen Fasern liegen, so existieren disjunkte glatte Koordinatenbereiche U, V für M mit $p \in U$ und $q \in V$, sodass $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$

disjunkte Koordinatenumgebungen sind, die (p, v) bzw. (q, w) enthalten.) Also hat TM eine glatte Struktur.

Um zu sehen, dass π glatt ist, beachte, dass ihre Koordinatendarstellung in Bezug auf die Karten (U, φ) für M und $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ für TM gegeben ist durch $\pi(x, v) = x$. \square

Übung: Zeige, dass die Identifikation in Beispiel 5.16 ein Diffeomorphismus zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist.

Zurück zu glatten Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten.

Die wichtigste linear-algebraische Eigenschaft einer linearen Abbildung ist ihr Rang. Tatsächlich ist der Rang die einzige Eigenschaft, die verschiedene lineare Abbildungen unterscheidet, wenn wir frei sind, Basen für den Definitionsbereich und den Zielbereich unabhängig voneinander zu wählen.

Definition 5.18. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Wir definieren den Rang von F bei p als den Rang der linearen Abbildung $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$. Dies ist der Rang der assoziierten Jacobi-Matrix von dF_p bezüglich jeder Wahl von glatten Karten, und $\text{rank}(F) = \dim \text{Im}(dF_p)$.

Wenn F an jedem Punkt von M denselben Rang r hat, sagen wir, dass es konstanten Rang hat, und schreiben $\text{rank}(F) = r$.

Wenn $dF_p = \max\{\dim M, \dim N\}$, sagen wir, dass F bei p vollen Rang hat. Wenn F bei jedem Punkt von M vollen Rang hat, sagen wir, dass F vollen Rang hat.

Definition 5.19. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung.

- Wir nennen F eine *glatte Submersion*, wenn ihr Differential an jedem Punkt surjektiv ist (oder äquivalent, wenn $\text{rank } F = \dim N$).
- Sie wird eine *glatte Immersion* genannt, wenn ihr Differential an jedem Punkt injektiv ist (äquivalent, wenn $\text{rank } F = \dim M$).
- Sie wird eine *glatte Einbettung* genannt, wenn $F : M \rightarrow N$ ein Homöomorphismus auf sein Bild und eine Immersion ist.

Example 5.20. (1) Seien M_1, \dots, M_k glatte Mannigfaltigkeiten. Dann ist jede der Projektionsabbildungen $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ eine glatte Submersion.

Insbesondere ist die Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Submersion.

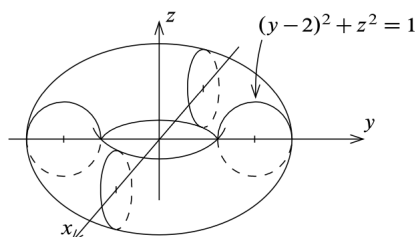
(2) Sei $\gamma : J \rightarrow M$ eine glatte Kurve in einer glatten Mannigfaltigkeit M , dann ist γ genau dann eine glatte Immersion, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$.

(3) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und TM ihr Tangentialbündel (eine Mannigfaltigkeit nach Proposition 5.17). Dann ist die Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ eine glatte Submersion. (Lokal, auf Karten, ist es wirklich eine Projektion.)

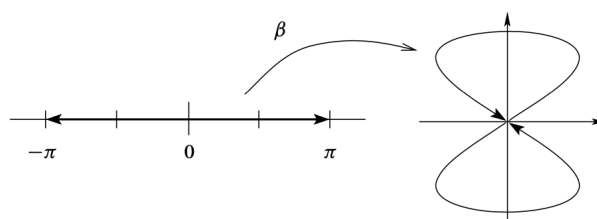
(4) Die glatte Abbildung $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$X(u, v) = ((2 + \cos 2\pi u) \cos 2\pi v, (2 + \cos 2\pi u) \sin 2\pi v, \sin 2\pi u),$$

ist eine glatte Immersion, deren Bild die torusförmige Fläche ist, die durch Rotation des Kreises $(y-2)^2 + z^2 = 1$ in der (y, z) -Ebene um die z -Achse entsteht



- (5) Die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3, 0)$, ist eine glatte Abbildung und ein Homöomorphismus auf sein Bild, aber sie ist keine glatte Einbettung, da $\gamma'(0) = 0$.
- (6) Sei X die Kurve parametrisiert durch $\beta : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (\sin 2t, \sin t)$. Wir haben $X = \beta((-\pi, \pi)) = \{(x, y) \mid x^2 = 4y^2(1 - y^2)\}$.



β eine injektive glatte Immersion, da $\beta'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. β ist jedoch kein Homöomorphismus auf ihr Bild da X kompakt und $(-\pi, \pi)$ nicht kompakt ist.

Lemma 5.21. Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $p \in M$. Wenn dF_p surjektiv ist, dann existiert eine Umgebung U von p , so dass $F|_U$ eine Submersion ist. Wenn dF_p injektiv ist, dann existiert eine Umgebung U von p , so dass $F|_U$ eine Immersion ist.

Proof. Wenn wir beliebige glatte Koordinaten für M in der Nähe von p und für N in der Nähe von $F(p)$ wählen, bedeutet jede der beiden Hypothesen, dass die Jacobimatrix von F in diesen Koordinaten bei p vollen Rang hat.

Übung: Sei $m = \dim M$ und $n = \dim N$. Dann ist die Menge der $m \times n$ Matrizen mit vollem Rang eine offene Teilmenge von $M_{mn}(\mathbb{R})$. Da F glatt ist, ist DF_p stetig in p . Es folgt dass die Jacobimatrix von F in einer Umgebung von p vollen Rang hat. \square

Definition 5.22. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ ist ein *lokaler Diffeomorphismus*, wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung U von p existiert, so dass $F(U)$ offen in N ist und $F|_U : U \rightarrow F(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Theorem 5.23 (Inverse Funktionensatz für Mannigfaltigkeiten). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Wenn dF_p invertierbar ist, dann gibt es zusammenhängende Umgebungen U_0 von p und V_0 von $F(p)$, so dass $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ ein Diffeomorphismus ist.

Proof. Die Tatsache, dass dF_p bijektiv ist, impliziert, dass M und N die gleiche Dimension $n := \dim M$ haben. Wir wählen glatte Karten (U, φ) mit $p \in U$ und $\varphi(p) = 0$, und (V, ψ) , $F(p) \in V$ und $\psi(F(p)) = 0$, so dass mit $F(U) \subseteq V$. Dann ist $G := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ eine glatte Abbildung und $G(p) = 0$. Da φ und ψ Diffeomorphismen sind, ist $dG = d\psi \circ dF \circ d\varphi^{-1}$ und darum ist dG_p invertierbar. Der Inverse Funktionensatz (Analysis II) impliziert, dass es zusammenhängende offene Teilmengen $U' \subset \varphi(U)$ und $V' \subset \psi(V)$ gibt, die 0 enthalten, so dass $G|_{U'} : U' \rightarrow V'$ ein Diffeomorphismus ist. Dann sind $U_0 = \varphi^{-1}(U')$ und $V_0 = \psi^{-1}(V')$ zusammenhängende Umgebungen von p und $F(p)$, und es folgt, dass $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ ein Diffeomorphismus ist. \square

Wir haben folgende Eigenschaften, welche aus der Definition von lokalen Diffeomorphismen, Proposition 5.7 und Lemma 5.9 folgen.

Lemma 5.24 (Übung).

- Jede Komposition von lokalen Diffeomorphismen ist ein lokaler Diffeomorphismus.
- Jedes endliche Produkt von lokalen Diffeomorphismen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist ein lokaler Diffeomorphismus.
- Jeder lokale Diffeomorphismus ist ein lokaler Homöomorphismus und eine offene Abbildung.

- Die Einschränkung eines lokalen Diffeomorphismus auf eine offene Teilmannigfaltigkeit ist ein lokaler Diffeomorphismus.
- Jeder Diffeomorphismus ist ein lokaler Diffeomorphismus.
- Jeder bijektive lokale Diffeomorphismus ist ein Diffeomorphismus.
- Eine Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist ein lokaler Diffeomorphismus genau dann, wenn sie in einer Nachbarschaft jedes Punktes ihrer Definitionsmenge eine koordinierte Darstellung hat, die ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Proposition 5.25. Sei $F : M \longrightarrow N$ eine Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

- (1) F ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn es sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion ist.
- (2) Wenn $\dim M = \dim N$ und F entweder eine glatte Immersion oder eine glatte Submersion ist, dann ist es ein lokaler Diffeomorphismus.

Proof. (1) Angenommen, F ist ein lokaler Diffeomorphismus. Für $p \in M$ gibt es eine Nachbarschaft U von p , sodass F ein Diffeomorphismus von U auf $F(U)$ ist. Es folgt dann, dass $dF_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ ein Isomorphismus ist mit $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$ (Übung). Somit gilt $\text{rank } F = \dim M = \dim N$, sodass F sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion ist. Umgekehrt, wenn F sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion ist, dann ist dF_p ein Isomorphismus für jedes $p \in M$, und der Umkehrsatz für Mannigfaltigkeiten (Theorem 4.5) zeigt, dass p eine Nachbarschaft hat, auf der F auf seinem Bild einen Diffeomorphismus einschränkt. Dies beweist (a).

(2) Wenn M und N die gleiche Dimension haben, dann bedeutet entweder die Injektivität oder die Surjektivität von DF_p Bijektivität, sodass F eine glatte Submersion ist, genau dann, wenn es eine glatte Immersion ist. Daher folgt (2) aus (1). \square

Theorem 5.26 (Rang-Theorem). Seien M und N sind glatte Mannigfaltigkeiten mit $\dim M = m$ und $\dim N = n$, und $F : M \longrightarrow N$ ist eine glatte Abbildung mit konstantem Rang r . Für jedes $p \in M$ existieren glatte Karten (U, φ) für M mit $p \in U$ und (V, ψ) für N mit $F(p) \in V$, so dass $F(U) \subseteq V$ und F in diesen Koordinaten die Darstellung

$$(1) \quad F(y) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

hat. Insbesondere gilt:

- Falls F eine glatte Submersion ist, so gilt $F(y) = (x_1, \dots, x_n)$.
- Falls F eine glatte Immersion ist, so gilt $F(y) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

Proof. Da der Satz eine lokale Aussage ist, können wir durch geeignete Wahl von Karten M und N durch offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ersetzen. Die Annahme, dass $\text{rank } DF_p = r$, bedeutet, dass eine $r \times r$ -Untermatrix von DF_p eine nichtverschwindende Determinante besitzt. Durch permutation der Koordinaten nehmen wir an, dass dies die obere linke Untermatrix $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ für $i, j = 1, \dots, r$ ist.

Wir führen die Standardkoordinaten als $(x, y) = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{m-r}) \in \mathbb{R}^m$ und $(v, w) = (v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{n-r}) \in \mathbb{R}^n$ ein. Durch eine Translation der Koordinaten können wir annehmen, dass $p = (0, 0)$ und $F(p) = (0, 0)$. Sei $F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$ mit $Q : U \longrightarrow \mathbb{R}^r$ und $R : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ glatt. Die Annahme, dass $\text{rank } DF_p = r$ impliziert, dass $\det \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}\right)(0, 0) \neq 0$.

Wir definieren $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi(x, y) = (Q(x, y), y)$. Dann gilt

$$D\varphi(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(0, 0) & \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}(0, 0) \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

wobei I_n die Einheitsmatrix ist. Da $D\varphi(0, 0)$ invertierbar ist, existieren nach Theorem 5.23 (Inversen Funktionensatz) Umgebungen $U_0 \subseteq U$ und $\tilde{U}_0 \subseteq \mathbb{R}^m$, sodass $\varphi : U_0 \longrightarrow \tilde{U}_0$ ein Diffeomorphismus ist. Wir können annehmen, dass \tilde{U}_0 ein offener Würfel um $(0, 0)$ ist.

Sei $\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$ (und $A: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^r$, $B: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m-r}$ glatt). Dann gilt

$$(x, y) = \varphi(A(x, y), B(x, y)) = (Q(A(x, y), B(x, y)), B(x, y))$$

Es folgt: $y = B(x, y)$ und $x = Q(A(x, y), B(x, y)) = Q(A(x, y), y)$ und dann

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), y),$$

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (Q(A(x, y), y), R(A(x, y), y)) = (x, \tilde{R}(x, y)),$$

mit $\tilde{R}: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m-r}$, $(x, y) = R(A(x, y), y)$. Es folgt

$$D(F \circ \varphi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial x_j}(x, y) & \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y_j}(x, y) \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \tilde{U}_0.$$

Da die Komposition mit einem Diffeomorphismus den Rang einer Abbildung nicht verändert, hat diese Matrix überall Rang r in U'_0 . Die ersten r Spalten sind linear unabhängig. Daher ist der Rang nur dann r , wenn $\frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y_j} \equiv 0$ auf U'_0 für alle i, j . Da \tilde{U}_0 ein Würfel ist, folgt, dass \tilde{R} unabhängig von (y_1, \dots, y_{m-r}) ist.

Wir setzen $S(x) := \tilde{R}(x, 0)$ und erhalten

$$(2) \quad F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, S(x)).$$

Um den Beweis zu vervollständigen, müssen wir eine geeignete glatte Karte in einer Umgebung von $(0, 0) \in V$ definieren. Sei $V_0 = \{(v, w) \in V \mid (v, 0) \in \tilde{U}_0\} \subseteq V$. Dann ist V_0 eine Umgebung von $(0, 0)$. Da \tilde{U}_0 ein Würfel um $(0, 0)$ ist und $F \circ \varphi^{-1}$ die Form $(x, S(x))$ hat, folgt, dass

$$F(U_0) = F \circ \varphi^{-1}(\tilde{U}_0) \subseteq V_0.$$

Definiere $\psi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi(v, w) = (v, w - S(v))$. Diese Abbildung ist ein Diffeomorphismus auf ihr Bild, da ihre Inverses $\psi^{-1}(s, t) = (s, t + S(s))$ und S glatt ist. Also ist (V_0, ψ) eine glatte Karte. Es folgt aus (2), dass

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x, y) = \psi(x, S(x)) = (x, S(x) - S(x)) = (x, 0).$$

□

Corollary 5.27. *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, M zusammenhängend, und sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) *Für jedes $p \in M$ existieren glatte Karten von M und N , die resp. p und $F(p)$ enthalten, in denen die Koordinatendarstellung von F linear ist.*
- (2) *F hat konstanten Rang.*

Proof. (1) \Rightarrow (2): Angenommen, F besitzt eine lineare Koordinatendarstellung in einer Umgebung jedes Punktes. Da jede lineare Abbildung konstanten Rang hat, folgt, dass der Rang von F in einer Umgebung jedes Punktes konstant ist. Aufgrund der Zusammenhangseigenschaft von M ist der Rang somit auf ganz M konstant.

(2) \Rightarrow (1): Falls F konstanten Rang hat, zeigt der Theorem 5.26, dass F in einer Umgebung jedes Punktes eine lineare Koordinatendarstellung hat. □

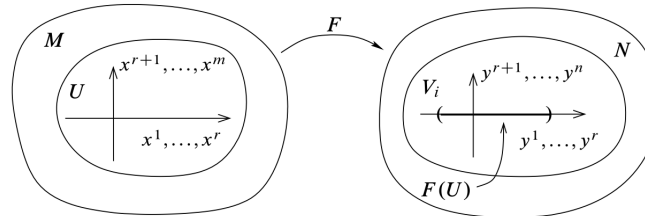
Theorem 5.28 (Global Rank Theorem). *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung mit konstantem Rang. Dann gilt:*

- (1) *F surjektiv $\Rightarrow F$ eine glatte Submersion.*
- (2) *F injektiv $\Rightarrow F$ eine glatte Immersion.*
- (3) *F bijektiv $\Rightarrow F$ ein Diffeomorphismus.*

Proof. Sei $m = \dim M$ und $n = \dim N$.

(1) Nehmen wir an, dass F keine glatte Submersion ist, d.h. $r < n$. Nach Theorem 5.26 existieren für jeden $p \in M$ glatte Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N mit $p \in U$ und $F(p) \in V$, sodass $F(U) \subseteq V$ und so dass F in dieser Koordinatendarstellung die Form $F(x) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ hat.

Falls nötig, verkleinern wir U , sodass es eine offene Koordinatenkugel ist und $F(\overline{U}) \subseteq V$ gilt. Es folgt, dass $F(\overline{U})$ eine kompakte Teilmenge der Menge $\{y \in V \mid y_{r+1} = \dots = y_n = 0\}$ ist. Somit ist $F(\overline{U})$ eine abgeschlossene Teilmenge von N , die keine offene Teilmenge von N enthält und daher nirgendwo dicht in N ist (dh $\text{Int}F(\overline{U}) = \emptyset$; $\text{Int}F(\overline{U})$ ist die grösste offene Teilmenge von $F(\overline{U})$). Da jede offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt (nach Parakompaktheit, siehe Lemma 2.10), können wir eine abzählbare Familie von solchen Karten $\{(U_i, \varphi_i)\}$ wählen, die M überdecken, mit entsprechenden Karten $\{(V_i, \psi_i)\}$, die $F(M)$ überdecken.



Da $F(M)$ die abzählbare Vereinigung der nirgendwo dichten Mengen $F(\overline{U}_i)$ ist, folgt aus dem Baireschen Kategoriensatz (siehe Funktionalanalysis), dass $F(M)$ ein leeres Inneres in N hat. Das bedeutet, dass F nicht surjektiv sein kann.

(2) Nehmen wir an, dass F keine glatte Immersion ist, also $r < m$. Nach dem Theorem 5.26 können wir für jedes $p \in M$ Karten um p und $F(p)$ wählen, in denen F Koordinatendarstellung (1) hat. Daraus folgt, dass $F(0, \dots, 0, \varepsilon) = F(0, \dots, 0, 0)$ für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$. Also ist F nicht injektiv.

(3) Eine bijektive glatte Abbildung mit konstantem Rang nach (1) eine glatte Submersion und nach (2) eine glatte Immersion ist. Somit impliziert Proposition 5.25, dass F ein lokaler Diffeomorphismus ist, und da F bijektiv ist, folgt, dass F ein Diffeomorphismus ist. \square

Proposition 5.29. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F: M \rightarrow N$ eine injektive glatte Immersion. Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, dann ist F eine glatte Einbettung:

- (1) F ist eine offene oder abgeschlossene Abbildung.
- (2) F ist eine eigentliche (proper) Abbildung (dh das Urbild jeder kompakten Menge ist kompakt).
- (3) M ist kompakt.
- (4) $\dim M = \dim N$.

Proof. (1) Wenn F eine offene oder abgeschlossene Abbildung ist, dann ist es ein Homöomorphismus auf sein Bild $F(M) \subset N$. Nach Definition 5.19, ist F eine glatte Einbettung.

(2) Eigentliche Abbildungen zwischen lokal kompakten Hausdorff topologischen Räumen sind abgeschlossen (Übung). Die Behauptung folgt dann aus (1).

(3) Sei M kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt und somit $F(A)$ kompakt (weil F stetig ist). Da N Hausdorff ist, ist A abgeschlossen (Übung). Die Behauptung folgt jetzt aus (1).

(4) Sei $\dim M = \dim N$. Nach Proposition 5.25(2) ist $F: M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus, im Speziellen also eine offene Abbildung. Die Behauptung folgt aus (1). \square

Proposition 5.30. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F: N \rightarrow M$ eine glatte Einbettung. Setze $S = F(N)$. Mit der induzierten Topologie (Unterraumtopologie) ist S eine topologische Mannigfaltigkeit, und es existiert eine eindeutige glatte Struktur auf S , so dass die Inklusion $S \hookrightarrow M$ eine glatte Einbettung ist und $F: N \rightarrow S$ ein Diffeomorphismus ist. Wir nennen $F(N)$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M .

Proof. Wenn wir S die Unterraumtopologie von M geben, dann bedeutet die Annahme, dass F eine Einbettung ist insbesondere, dass F als ein Homöomorphismus von N nach S ist. Somit ist S eine topologische Mannigfaltigkeit.

Glatte Struktur auf S : Wir nehmen die glatten Karten der Form $(F(U), \varphi \circ F^{-1})$, wobei (U, φ) eine beliebige glatte Karte für N ist; die glatte Verträglichkeit dieser Karten folgt unmittelbar aus der glatten Verträglichkeit der entsprechenden Karten für N . Mit dieser glatten Struktur auf S ist die Abbildung F ein Diffeomorphismus auf ihr Bild (essentially by definition), und dies ist die einzige glatte Struktur mit dieser Eigenschaft.

Die Inklusionsabbildung $S \hookrightarrow M$ ist gleich

$$S \xrightarrow{F^{-1}|_S} N \xrightarrow{F} M$$

also ist ein Diffeomorphismus gefolgt von einer glatten Einbettung, daher ist sie eine glatte Einbettung. \square

Lemma 5.31. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subset M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Dann ist S genau dann proper eingebettet ($S \hookrightarrow M$ ist proper, i.e. Urbilder von kompakt ist kompakt), wenn sie eine abgeschlossene Teilmenge von M ist.*

Proof. (Übung) Wenn S proper eingebettet ist, dann ist sie abgeschlossen. Umgekehrt, wenn S in M abgeschlossen ist, dann ist die Inklusionsabbildung $S \hookrightarrow M$ proper. \square

6. WHITNEY EMBEDDING

Definition 6.1. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Wir nennen p *regulär* von F , wenn $DF_p: T_p M \rightarrow T_p N$ surjektiv ist. Wir nennen p *kritisch*, wenn DF_p nicht surjektiv ist.

Remark 6.2. (1) Wenn $\dim M < \dim N$, dann ist jeder Punkt von M kritisch bzgl. jeder glatten Abbildung $F: M \rightarrow N$.

(2) Jeder Punkt von M ist ein regulärer Punkt von $F \iff F$ ist eine Submersion.

Definition 6.3. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeit. Ein Punkt $c \in N$ ist ein *regulärer Wert* von F , wenn jeder Punkt in $F^{-1}(c)$ ein regulärer Punkt ist. Ansonsten ist c ein *kritischer Wert* von F . Wenn c ein regulärer Wert von F ist, nennen wir die Niveaumenge $F^{-1}(c)$ *regulär*.

Definition 6.4. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ hat (n -dimensionales) Mass null, wenn für jedes $\delta > 0$ eine abzählbare Überdeckung von X durch offene n -dimensionale Rechtecke $\{C_i\}_i$ existiert, sodass $\sum_i \text{Vol}(C_i) < \delta$. (Dies äquivalent zu der Bedingung ist, dass das Lebesgue-Mass von X null ist.)

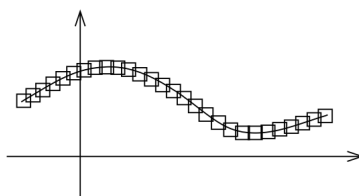


Fig. 6.1 A set of measure zero

Example 6.5. (1) Wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ Mass Null hat und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dann hat auch $x_0 + X = \{x_0 + a \mid a \in X\}$ Mass Null.

(2) Jede Teilmenge einer Menge mit Mass Null in \mathbb{R}^n hat ebenfalls Mass Null.

(3) Eine abzählbare Vereinigung von Mengen mit Mass Null in \mathbb{R}^n hat Mass Null.

(4) Falls $k < n$, dann hat jede Teilmenge von $\mathbb{R}^k = (x_{k+1} = \dots = x_n = 0) \subset \mathbb{R}^n$ Mass Null in \mathbb{R}^n .

- Lemma 6.6.** (1) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, deren Schnitt mit $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = c\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ Mass Null in \mathbb{R}^{n-1} hat. Dann hat A Mass Null in \mathbb{R}^n .
- (2) Sei A eine offene oder abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^{n-1} , und sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann hat der Graph von f Maß Null in \mathbb{R}^n .
- (3) Jede echte affine Untermenge von \mathbb{R}^n hat Mass Null in \mathbb{R}^n .
- (4) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge mit Mass Null, und sei $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Dann hat $F(A)$ Mass Null.

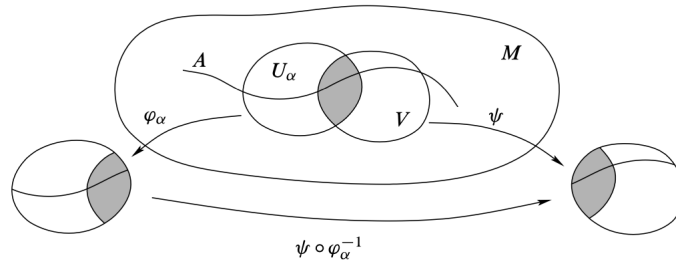
Proof. Siehe Masstheorievorlesung (oder [1, 6.2–6.4]). \square

Definition 6.7. Sei M eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir sagen, dass eine Teilmenge $A \subseteq M$ Mass Null in M hat, wenn für jede glatte Karte (U, φ) von M die Teilmenge $\varphi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$ n -dimensionales Mass Null hat.

Lemma 6.8. Sei M eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $A \subseteq M$. Angenommen, es gibt eine Familie $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ glatter Karten von M mit $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, so dass $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ Mass Null in \mathbb{R}^n hat für jedes $\alpha \in I$. Dann hat A Mass Null in M .

Proof. Sei (V, ψ) eine beliebige glatte Karte. Wir müssen zeigen, dass $\psi(A \cap V)$ Mass Null in \mathbb{R}^n hat. Die offene Menge V ist eine Mannigfaltigkeit. Sei \mathcal{B} eine Basis für die Topologie von V . Wir können annehmen, dass $U_\alpha \cap V \in \mathcal{B}$ für alle $\alpha \in I$. Nach Proposition 2.10, können wir V mit abzählbar vielen offenen Mengen aus \mathcal{B} überdecken. Wir können annehmen, dass (abzählbar viele) U_α darunter sind. Es folgt, dass eine abzählbare Teilmenge der $U_\alpha \cap V$ die Menge $A \cap V$ überdeckt (wir ersetzen so lange andere offene Mengen der Überdeckung mit U_α , bis wir $A \cap V$ überdecken). Es gilt

$$\psi(A \cap V \cap U_\alpha) = (\psi^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ \varphi_\alpha(A \cap V \cap U_\alpha) \quad \forall \alpha \in I.$$



Da $\varphi_\alpha(A \cap V \cap U_\alpha) \subset \varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ ist, und die letztere nach Voraussetzung Mass Null in \mathbb{R}^n hat, folgt aus Lemma 6.6(4) angewandt auf $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, dass $\psi(A \cap V \cap U_\alpha)$ Mass Null hat. Da $\psi(A \cap V)$ die Vereinigung abzählbar vieler $\psi(A \cap V \cap U_\alpha)$ ist, hat es ebenfalls Mass Null (siehe Example 6.5(3)). \square

Theorem 6.9 (Sard's theorem). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann hat die Menge der kritischen Werte von F Mass null in N .

Proof. Ohne Beweis. Siehe [1, Theorem 6.10] \square

Lemma 6.10. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für jedes $v \in \mathbb{R}^N \setminus (x_N = 0)$ definieren wir die Projektion $\pi_v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ mit $\ker(\pi_v) = \mathbb{R}v$ (dh die Projektion auf $(\mathbb{R}v)^\perp$). Falls $N > 2n + 1$, dann gibt es eine dichte Menge von Vektoren $v \in \mathbb{R}^N \setminus (x_N = 0)$, so dass $\pi_v|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ eine injektive Immersion ist.

Proof. Wir bemerken:

- (3) $\pi_v|_M$ injektiv $\iff p - q$ nicht parallel zu v für alle $p, q \in M, p \neq q$
- (4) $\pi_v|_M$ ist glatte Immersion $\iff T_p M \cap \ker(d\pi_v)_p = \{0\}$ für alle $p \in M$.

Da π_v linear ist, ist sein Differential dieselbe lineare Abbildung (unter der natürlichen Identifikation $T_p \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$, also $\pi_v = d(\pi_v)_p \forall p \in M$ unter dieser Identifikation, also $\ker(d\pi_v)_p = \ker \pi_v \forall p \in M$). Es folgt:

(5) $T_p M \cap \ker(d\pi_v)_p = \{0\}$ für alle $p \in M \iff$ wenn $w \in T_p M$ parallel zu v , dann ist $w = 0$.

Sei $\Delta_M := \{(p, p) \mid p \in M\} \subset M \times M$ die Diagonale von M . Sie ist abgeschlossen in M . Sei $M_0 := \{(p, 0) \in TM \mid p \in M\} \subset TM$, die Menge der Nullvektoren an allen Punkten von M , welche abgeschlossen in TM ist.

Betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : (M \times M) \setminus \Delta_M &\longrightarrow \mathbb{RP}^{N-1}, & \varphi(p, q) &= [p - q], \\ \psi : TM \setminus M_0 &\longrightarrow \mathbb{RP}^{N-1}, & \psi(p, w) &= [w], \end{aligned}$$

wobei die eckigen Klammern die Äquivalenzklasse eines Vektors in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ in \mathbb{RP}^{N-1} bezeichnen. Die Inklusion $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ ist glatt (Blatt 2), wir haben einen Diffeomorphismus $T\mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (Example 5.16), Projektionen sind glatt und die Quotientenabbildung $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^{N-1}$ glatt ist (Blatt 3). Also sind φ und ψ glatt.

Wir bemerken, nach (3)–(5), dass

(6) $\pi_v|_M$ injektive glatte Immersion $\iff [v] \notin \text{Im} \varphi \cup \text{Im} \psi$.

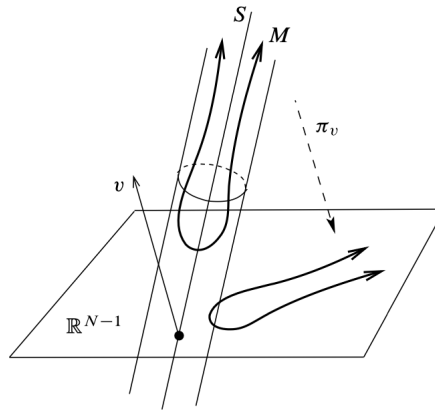
Da $\dim(M \times M) \setminus \Delta_M = \dim TM \setminus M_0 = 2n$ und $\dim \mathbb{RP}^{N-1} = N - 1 > 2n$, folgt dass jeder Punkt von M ein kritischer Punkt von φ und von ψ ist. Nach Theorem 6.9 (Sard's Satz) haben also $\text{Im} \varphi$ und $\text{Im} \psi$ Mass Null. Dies und (6) impliziert die Behauptung des Lemmas. \square

Lemma 6.11. *Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und nehmen wir an, es gibt eine glatte Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ für ein $N \geq 1$. Dann gibt es eine glatte Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.*

Proof. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^N$ ein 1-dimensionaler linearer Unterraum und $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir definieren das Rohr mit Achse S und Radius R als

$$T_R(S) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - y\| < R \text{ für ein } y \in S\}.$$

Wir bemerken, dass $T_R(S) \subset \mathbb{R}^N$ offen ist.



Sei $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine glatte Einbettung (gibt es nach Voraussetzung). Sei \mathbb{B}^N die N -dimensionale offene Kugel in \mathbb{R}^N und $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{B}^N$ ein Diffeomorphismus (Blatt 3). Nach Proposition 4.15 gibt es eine glatte Erschöpfungsfunktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiere

$$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad p \mapsto (G \circ F(p), f(p)).$$

Da $G \circ F$ eine glatte Einbettung ist, ist φ injektiv, und $d_p \varphi$ ist injektiv für jedes p . Also ist φ eine injektive Immersion. Sie ist proper (eigentlich; siehe Definition in Proposition 5.29): das Urbild via φ jeder kompakten Menge ist kompakt, weil es eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $f^{-1}([-1, c])$ für ein $c \in \mathbb{R}$ ist. Also ist φ eine glatte Einbettung nach

Proposition 5.29(2) ist. Nach Konstruktion ist $\text{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{B}^N \times \mathbb{R}$. Zusammengefasst ist also φ eine proper glatte Einbettung in $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, dessen Bild im Rohr $\mathbb{B}^N \times \mathbb{R}$ enthalten ist.

Wir ersetzen $N + 1$ durch N und können so annehmen, dass M eine proper glatte Einbettung in \mathbb{R}^N hat, deren Bild in einem Rohr $T_R(S)$ für ein $S \subset \mathbb{R}^N$ enthalten ist (siehe Abbildung). Indem wir M mit seinem Bild identifizieren, können wir M als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^N betrachten, die im Rohr $T_R(S)$ enthalten ist.

Falls $N > 2n + 1$, zeigt Lemma 6.10, dass es ein $v \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1}$, so dass $\pi_v|_M: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ eine injektive Immersion ist. Da die Menge dieser v dicht in \mathbb{R}^N ist, können wir v so wählen, dass $v \notin S$. Es folgt, dass $\pi_v(S)$ ein eindimensionaler Unterraum von \mathbb{R}^{N-1} ist. Da π_v eine beschränkte lineare Abbildung ist (sie schickt beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen), folgt, dass $\pi_v(M)$ in einem Rohr um $\pi_v(S)$ liegt. Wir zeigen jetzt, dass $\pi_v|_M$ proper ist. Wenn wir das gezeigt, haben ist $\pi_v|_M$ nach Proposition 5.29 eine Einbettung.

Sei also $K \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ eine kompakte Menge. Dann ist $K \subset B_{R_1}(0) \subset \mathbb{R}^{N-1}$ für irgendein $R_1 \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Definition von π_v gibt es für jedes $x \in \pi_v^{-1}(K)$ es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\pi_v(x) = x - cv$ (wir sehen ja \mathbb{R}^{N-1} also den Unterraum von \mathbb{R}^N mit $x_N = 0$). Da $|\pi_v(x)| < R$, bedeutet dies, dass $x \in T_R(\mathbb{R}v)$. Es folgt, dass $M \cap \pi_v^{-1}(K)$ in zwei Rohren enthalten ist, eines um S und das andere um $\mathbb{R}v$. Die Schnittmenge von zwei Röhren ist beschränkt, wenn ihre Achsen nicht parallel sind. Also ist $M \cap \pi_v^{-1}(K)$ abgeschlossen in M und beschränkt. Dann ist also der Abschluss von $M \cap \pi_v^{-1}(K)$ kompakt in \mathbb{R}^{N-1} und somit ist $M \cap \pi_v^{-1}(K)$ kompakt in M .

Es folgt also, dass π_v proper ist. Nach Proposition 5.29 ist also $\pi_v|_M: M \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ eine proper Einbettung und $\pi_v(M)$ ist in einem Rohr enthalten. Wir können dieses Argument nun iterieren, bis wir ein richtiges glattes Einbetten von M in \mathbb{R}^{2n+1} erreichen (diese Schranke ist durch Lemma 6.10 gegeben). \square

Theorem 6.12 (Whitney's Embedding Theorem). *Sei $n \geq 1$. Jede glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit hat eine glatte Einbettung in \mathbb{R}^{2n+1} .*

Proof. Sei M eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Nach Lemma 6.11 reicht es zu zeigen, dass M eine glatte Einbettung in irgendein \mathbb{R}^N hat.

Fall 1: Nehmen wir an, dass M kompakt ist. Dann besitzt M eine endliche Überdeckung $\{B_1, \dots, B_m\}$, wobei jedes B_i eine reguläre Koordinatenkugel ist (siehe Lemma 3.7). Dies bedeutet, dass es für jedes $i = 1, \dots, m$ eine glatte Karte (B'_i, φ_i) gibt mit $B'_i \supset \overline{B_i}$ und Koordinatenabbildung $\varphi_i: B'_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (da ja M n -dimensional ist), die einen Diffeomorphismus von $\overline{B_i}$ auf eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^n induziert.

Für jedes $i = 1, \dots, m$ sei $\psi_i: M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Hügelfunktion mit $\text{supp}(\psi_i) \subseteq B'_i$ und $\psi_i|_{\overline{B_i}} \equiv 1$. Definiere

$$F: M \longrightarrow \mathbb{R}^{nm+m}, \quad p \mapsto (\psi_1(p)\varphi_1(p), \dots, \psi_m(p)\varphi_m(p), \psi_1(p), \dots, \psi_m(p)).$$

und bemerke, dass F glatt ist. Wir zeigen jetzt, dass F eine injektive glatte Immersion ist; da M kompakt ist, folgt dann daraus, dass F eine glatte Einbettung ist (siehe Proposition 5.29). F injektiv: Sei $F(p) = F(q)$. Da $M = \cup_{i=1}^m B_i$, existiert ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $p \in B_i$. Dann gilt $\psi_i(p) = 1$, und aus $\psi_i(q) = \psi_i(p) = 1$ folgt $q \in \text{supp}(\psi_i) \subseteq B'_i$. Es folgt

$$\varphi_i(q) = \psi_i(q)\varphi_i(q) = \psi_i(p)\varphi_i(p) = \varphi_i(p).$$

Da φ_i auf B'_i injektiv ist, folgt $p = q$.

F glatte Immersion: Sei $p \in M$ beliebig und wähle $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $p \in B_i$ (gibt es, da ja $M = \cup_i B_i$). Da $\psi_i \equiv 1$ in einer Umgebung von p ist, gilt $D(\psi_i\varphi_i)_p = D(\varphi_i)_p$, was injektiv ist (weil φ_i ein Diffeomorphismus ist). Es folgt, dass DF_p injektiv ist. Wir haben gezeigt, dass F eine injektive glatte Immersion ist und daher eine Einbettung (siehe Proposition 5.29).

Fall 2: Sei M nicht kompakt. Nach Proposition 4.15 existiert eine glatte Erschöpfungsfunktion $f: M \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Nach dem Satz von Sard (Theorem 6.9) und weil M nicht kompakt ist,

existieren für jedes $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ reguläre Werte $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ von f , sodass $i < a_i < b_i < i + 1$. Definiere

$$\begin{aligned} D_0 &:= f^{-1}((-\infty, 1]) & E_0 &:= f^{-1}((-\infty, a_1]), \\ D_i &:= f^{-1}([i, i + 1]) & E_i &:= f^{-1}([b_{i-1}, a_{i+1}]), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Da f eine Ausschöpfungsfunktion ist, ist jedes E_i kompakt in M . (In der Tat: E_0 und $f^{-1}((-\infty, b_i])$ und $f^{-1}((-\infty, a_i])$ sind kompakt für alle i . Also ist $E_i = f^{-1}((-\infty, a_{i+1}]) \setminus f^{-1}((-\infty, b_i])$ abgeschlossen in der kompakten Menge $f^{-1}((-\infty, a_{i+1}])$ und ist somit wieder kompakt.) Wir haben

$$D_i \subset \text{Int}(E_i), \quad M = \cup_i D_i, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ für } |i - j| > 1.$$

Fall 1 und Lemma 6.11 implizieren, dass es für jedes $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine glatte Einbettung $\rho_i: E_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ gibt. Sei $\psi_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Hügelfunktion mit $\text{supp}(\psi_i) \subseteq \text{Int}(E_i)$ und die auf einer Umgebung von D_i gleich 1 ist. Definiere

$$F: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}, \quad p \mapsto \left(\sum_{i \text{ gerade}} \psi_i(p) \rho_i(p), \sum_{i \text{ ungerade}} \psi_i(p) \rho_i(p), f(p) \right).$$

Da in einer Umgebung jedes Punktes nur ein Summand in jeder Koordinate ungleich null ist, ist F glatt. Da f proper ist, ist auch F proper. Wir zeigen jetzt, dass F eine injektive glatte Immersion. Es folgt dann, dass F eine glatte Einbettung ist (siehe Proposition 5.29).

F injektiv: Sei $F(p) = F(q)$. Da $M = \cup_j D_j$, gibt j , so dass $p \in D_j$. Die Bedingung $f(q) = f(p)$ impliziert, dass $q \in D_j$. Wir fahren wie im Fall 1 fort um zu zeigen, dass $p = q$.

F glatte Immersion: Sei $p \in M$ beliebig, und wähle j , so dass $p \in D_j$. Dann gilt $\psi_j \equiv 1$ in einer Umgebung von p . Falls j ungerade ist, haben wir für alle q in dieser Umgebung

$$F(q) = (\rho_j(q), \dots, \dots),$$

was impliziert, dass DF_p injektiv ist (weil ρ_j eine Einbettung ist). Ein ähnliches Argument gilt, wenn j gerade ist. \square

Komplexe Analysis

7. KOMPLEXE DIFFERENZIERBARKEIT UND HOLOMORPHE FUNKTIONEN

7.1. Komplexe Differenzierbarkeit.

Definition 7.1. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* bei $c \in D$, wenn es eine Funktion $f': D \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, die bei c stetig ist und so dass

$$f(z) = f(c) + (z - c)f'(c) \quad \forall z \in D \quad (\mathbb{C}\text{-Linearisierung}).$$

Eine solche Funktion f' , falls sie existiert, ist eindeutig durch f bestimmt:

$$f'(z) = \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \quad \text{für } z \in D \setminus \{c\} \quad (\text{Differenzenquotient}).$$

Setzt man $h := z - c$, so folgt aus der Stetigkeit von f' an c , dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) \in \mathbb{C} \quad (\text{Differentialquotient}).$$

Die Zahl $f'(c) \in \mathbb{C}$ heißt die *Ableitung* (bezüglich z) von f bei c . Wir schreiben auch $\frac{\partial f}{\partial z}(c) := f'(c)$.

Remark 7.2. Komplexe Differenzierbarkeit von f an c impliziert die Stetigkeit von f bei c , da f eine Summe von Produkten der Funktionen $f(c)$, $z - c$ und f' ist, welche alle bei c stetig sind.

Example 7.3. (1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $z \mapsto z^n$ überall in \mathbb{C} komplex differenzierbar:

$$z^n = c^n + (z - c)f'(z), \quad \text{wobei } f'(z) := z^{n-1} + cz^{n-2} + \dots + c^{n-2}z + c^{n-1}.$$

Es folgt, dass $(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Es folgt, dass alle Polynome $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ überall komplex differenzierbar sind und rationale Funktionen $g(z) \in \mathbb{C}(z)$ sind bei allen Stellen differenzierbar sind, bei denen sie definiert sind.

- (2) Die Konjugationsfunktion $f(z) := \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, ist an keinem Punkt komplex differenzierbar, da der Differenzenquotient

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

für $h \in \mathbb{R}$ den Wert 1 hat, während er für $h \in i\mathbb{R}$ den Wert -1 annimmt. Daher existiert der Grenzwert nicht.

- (3) **Übung:** Die Funktionen $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und $|z|$ sind nirgends in \mathbb{C} komplex differenzierbar. Dies zeigt man, indem man wie in (2) den Differenzenquotienten zunächst für reelle und dann für rein imaginäre h betrachtet.

Wir schreiben $c = a + ib = (a, b)$ und $z = x + iy = (x, y)$. Für eine Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ schreiben wir $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, wobei $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 7.4. Wenn $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bei c komplex differenzierbar ist und $f = u + iv$, $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dann sind u, v nach x und y differenzierbar und es gilt:

$$u_x(c) = v_y(c), \quad u_y(c) = -v_x(c) \quad \text{Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen}$$

und

$$f'(c) = u_x(c) + iv_x(c) = v_y(c) - iu_y(c).$$

Proof. Es gilt:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+ih) - f(c)}{ih}.$$

Wenn $h \in \mathbb{R}$, so folgt:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h, b) - u(a, b)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h, b) - v(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a, b+h) - u(a, b)}{ih} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a, b+h) - v(a, b)}{ih} \end{aligned}$$

Es folgt, dass die partiellen Ableitungen nach x und y der reellwertigen Funktionen u und v bei c existieren. Mit den üblichen Notationen $u_x(c), \dots, v_y(c)$ für diese Ableitungen ergeben sich die Gleichungen:

$$f'(c) = u_x(c) + iv_x(c) = \frac{1}{i}(u_y(c) + iv_y(c)).$$

□

Remark 7.5. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, welche reell differenzierbar ist. Dann sind u, v reell differenzierbar und somit ist auch $\bar{f} := u - iv$ reell differenzierbar.

Lemma 7.6. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann bei $c \in D$ reell differenzierbar, wenn $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ bei c reell differenzierbar sind.

Proof. Wir schreiben $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ und $v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$. Eine Funktion $D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann bei c reell differenzierbar, wenn die entsprechende komplexwertige Funktion $D \rightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ es ist. □

Lemma 7.7. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) f ist an der Stelle $c \in D$ komplex differenzierbar.
- (2) f ist an der Stelle c reell differenzierbar und das Differential $Df(c) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex-linear.
- (3) f ist an der Stelle c reell differenzierbar und die Cauchy-Riemann-Gleichungen $u_x(c) = v_y(c)$, $u_y(c) = -v_x(c)$ gelten.

Falls i) – iii) erfüllt sind, gilt: $f'(c) = u_x(c) + iv_x(c) = v_y(c) - iu_y(c)$.

Proof. i) \Leftrightarrow ii): folgt unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen und Lemma 7.4.

ii) \Leftrightarrow iii) Wir haben Das Differential $Df(c)$ ist durch die 2×2 -Matrix gegeben:

$$Df(c) = \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 7.4 ist die durch diese Matrix bestimmte \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann \mathbb{C} -linear, wenn $u_x(c) = v_y(c)$ und $u_y(c) = -v_x(c)$ gelten. □

- Example 7.8.** (1) Das Polynom $f(x, y) := x^3y^2 + ix^2y^3$ ist überall in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten am Punkt $c = (a, b)$ genau dann, wenn $3a^2b^2 = 3a^2b^2$ und $2a^3b = -2ab^3$, d. h. wenn $ab(a^2 + b^2) = 0$. Da $a, b \in \mathbb{R}$ sind, bedeutet dies $ab = 0$. Es folgt: Die Punkte, in denen f komplex differenzierbar ist, sind genau die Punkte auf den beiden Koordinatenachsen.
- (2) Die Funktion $\tilde{e}(x, y) := e^x \cos y + ie^x \sin y$ ist an jeder Stelle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten überall. Daher ist $\tilde{e}(z)$ in \mathbb{C} komplex differenzierbar und es gilt: $\tilde{e}'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = e(z)$.
- (3) Falls $f = u + iv$ in D komplex differenzierbar ist, gilt in ganzem D :

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2 \geq 0.$$

Dies folgt aus $|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2$, da $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

Wir haben zum Beispiel $\tilde{e}'(z) = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} = e^{2\Re(z)}$

7.2. Holomorphe Funktionen.

Definition 7.9. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist *holomorph auf D* , wenn f an jedem Punkt von D komplex-differenzierbar ist. Wir sagen, dass f bei $c \in D$ holomorph ist, wenn es eine offene Umgebung $U \subset D$ von c gibt, so dass $f|_U$ von f auf U in U holomorph ist.

Remark 7.10. Nach Definition ist die Menge aller Punkte, an denen eine Funktion holomorph ist, ist immer offen in \mathbb{C} .

Remark 7.11. Eine Funktion, die an c holomorph ist, ist bei c komplex-differenzierbar. Aber eine Funktion, die bei c komplex-differenzierbar ist, muss nicht holomorph bei c sein. Ein Beispiel ist die Funktion $f(x, y) := x^3y^2 + ix^2y^3$ von Example 7.8: sie ist bei den Punkten des Koordinatenkreuzes komplex differenzierbar, aber nirgends sonst. Also ist sie nicht holomorph nach Bemerkung 7.10.

Lemma 7.12. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf D . Dann sind für alle $a, b \in \mathbb{C}$ die Funktionen $af + bg$, $f \cdot g$, f/g , $f \circ g$ in D holomorph (da wo definiert) und es gilt:

$$(af + bg)' = af' + bg', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg', \quad (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

Proof. Wie in Analysis I. □

7.3. Eigenschaften von holomorphen Funktionen.

Proposition 7.13. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sind folgende äquivalent:

- (1) f ist lokal konstant auf D
- (2) f ist holomorph auf D und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$.

Proof. (1) \Rightarrow (2) ist klar. (2) \Rightarrow (1): wir schreiben $f = u + iv$ mit $u, v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Da f holomorph, gilt nach Lemma 7.7 $f' = u_x + iv_x$ und $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$. Voraussetzung (2) impliziert, dass

$$u_x(z) = u_y(z) = v_x(z) = v_y(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in D.$$

Aus Analysis I&II folgt, dass sowohl u als auch v lokal konstant auf D sind und darum ist f lokal konstant. □

Lemma 7.14. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Es gilt

- (1) Wenn $f(D) \subset \mathbb{R}$ oder $f(D) \subset i\mathbb{R}$, dann ist f lokal konstant auf D .
- (2) Wenn $|f(z)| = |f(w)|$ für alle $w, z \in D$, dann ist f lokal konstant auf D .

Proof. Wir schreiben $f = u + iv$ mit $u, v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) Wir haben $u = 0$ oder $v = 0$. In beiden Fällen impliziert Lemma 7.7, dass $u_x = v_y = 0 = v_x$. Es folgt, dass $f' = u_x + iv_x = 0$ auf D . Nach Proposition 7.13 ist f somit lokal konstant in D .

(2) Wir haben $|f| = u^2 + v^2 = c$ auf D . Wir leiten nach y ab und bekommen mit Lemma 7.7

$$\begin{aligned} (u^2 + v^2)_y &= 2(uu_y + vv_y) = 0 \\ \xrightarrow{u_y = -v_x} uv_x &= vv_y \\ \xrightarrow{\substack{u_x = v_y \\ uu_x + vv_x = 0}} 0 &= u \cdot (uu_x + vv_x) = u^2u_x + v \cdot (uv_x) = u^2u_x + v \cdot (vv_y) = (u^2 + v^2)u_x = cu_x \end{aligned}$$

Ähnlich gilt $cv_x = 0$. Wenn $c = 0$, ist $f = 0$ auf D . Falls $c \neq 0$, haben wir $f' = u_x + iv_x = 0$ auf D und nach Proposition 7.13 ist f lokal konstant auf D . □

7.4. Ableitung nach z, \bar{z}, x, y .

Proposition 7.15. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung und sei f reell differenzierbar. Dann gilt

$$f(z) = f(c) + Df_c(z - c) + (z - c)\hat{f}(z)$$

für ein stetiges $\hat{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$. Wir schreiben $f = u + iv$ mit $u, v \in D \rightarrow \mathbb{C}$ und

$$Df_c = \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix}$$

Wir schreiben $s := \frac{\partial f}{\partial x}(c) = u_x + iv_x$ und $f_y(c) := \frac{\partial f}{\partial y}(c) = u_y + iv_y$ und

$$Df_c(h) = f_z(c)h + f_{\bar{z}}(c)\bar{h} \quad \forall h \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(c) := f_z(c) = \frac{1}{2}(f_x(c) - if_y(c)), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) := f_{\bar{z}}(c) = \frac{1}{2}(f_x(c) + if_y(c)).$$

Proof. Wenn f bei c reell differenzierbar impliziert, haben wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - Df_c(h)|}{|h|}$$

Die Gleichung stimmt ohne $|\cdot|$ und es folgt mit $z = c + h$, dass

$$f(z) = f(c) + Df_c(z - c) + (z - c)\hat{f}(z)$$

für ein stetiges $\hat{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$.

Wir schreiben $h = h_1 + ih_2 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ und bekommen

$$\begin{aligned} Df_c(1) &= u_x(c) + iv_x(c) = f_x(c) \\ Df_c(i) &= u_y(c) + iv_y(c) = f_y(c) \\ Df_c(h) &= Df_c(1)h_1 + Df_c(i)h_2 \quad \forall h \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Wir schreiben nun $Df_c(h) = \lambda h + \mu \bar{h}$. Es folgt

$$\begin{aligned} Df_c(1)h_1 + Df_c(i)h_2 &= Df_c(h) = \lambda h + \mu \bar{h} = (\lambda h_1 + i\lambda h_2) + (\mu h_1 - i\mu h_2) \\ &= (\lambda + \mu)h_1 + i(\lambda - \mu)h_2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle $h \in \mathbb{C}$, also folgt

$$\lambda = \frac{1}{2}(Df_c(1) - iDf_c(i)), \quad \mu = \frac{1}{2}(Df_c(1) + iDf_c(i))$$

□

Lemma 7.16. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine reell-differenzierbare Funktion. Dann ist $\overline{f_z} = f_{\bar{z}}$.

Proof. Nach Proposition 7.15 haben wir

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y)) \\ \bar{f}_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\bar{f}_x + i\bar{f}_y) = \frac{1}{2}(u_x - iv_y + i(u_y - iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(u_y - v_y)) \end{aligned}$$

Also ist $\overline{f_z} = \bar{f}_{\bar{z}}$.

□

Lemma 7.17. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung und $c = a + ib$. Es sind äquivalent:

- (1) f ist an der Stelle c reell differenzierbar.
- (2) Es existieren in c stetige Funktionen $\hat{f}_1, \hat{f}_2: D \rightarrow \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = f(c) + (z - c)\hat{f}_1(z) + (\bar{z} - \bar{c})\hat{f}_2(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

- (3) Es existieren stetige Funktionen $f_1, f_2: D \rightarrow \mathbb{C}$ in c , sodass

$$f(z) = f(c) + (x - a)f_1(z) + (y - b)f_2(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, gilt:

$$f_z(c) = \hat{f}_1(c), \quad f_{\bar{z}}(c) = \hat{f}_2(c), \quad f_x(c) = f_1(c), \quad f_y(c) = f_2(c).$$

Proof. (1) \Rightarrow (2) Nach Lemma 7.17 gilt

$$f(z) = f(c) + Df_c(z - c) + \hat{f}(z)(z - c) = f(c) + (\lambda(z - c) + \mu(\bar{z} - \bar{c})) + \hat{f}(z)(z - c)$$

für ein stetiges $\hat{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$ und λ, μ wie in Lemma 7.17. Die Behauptung folgt mit $\hat{f}_1(z) := \lambda + \hat{f}(z)$, $\hat{f}_2(z) := \mu$, da Df_c und \hat{f} beide stetig.

(2) \Rightarrow (3) Setze $f_1 := \hat{f}_1 + \hat{f}_2$, $f_2 := i(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)$ und schreibe $z - c = x - a + i(y - b)$. Da \hat{f}_1, \hat{f}_2 stetig, sind auch f_1, f_2 stetig.

(3) \Rightarrow (1) Die Abbildung $T(h) := f_1(c)\Re(h) + f_2(c)\Im(h)$ ist \mathbb{R} -linear. Wir definieren $\hat{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\hat{f}(c) := 0$ und

$$\hat{f}(z) := \frac{(x-a)(f_1(z) - f_1(c)) + (y-b)(f_2(z) - f_2(c))}{z - c}, \quad z \neq c.$$

Da $|x - a| \leq |(x - a) + i(y - b)| = |z - c|$ und $|y - b| \leq |z - c|$ gilt, folgt

$$|\hat{f}(z)| \leq |f_1(z) - f_1(c)| + |f_2(z) - f_2(c)|, \quad z \in D \setminus \{c\}.$$

Also ist \hat{f} stetig in c . Wir haben auch

$$\begin{aligned} & T(z - c) + \hat{f}(z)(z - c) + f(c) \\ &= (f_1(c)(x - a) + f_2(c)(y - b)) + ((f_1(z) - f_1(c))(x - a) + (f_2(z) - f_2(c))(y - b)) + f(c) \\ &= (x - a)f_1(z) + f_2(z)(y - b) + f(c) \stackrel{(3)}{=} f(z) \end{aligned}$$

Der Rest der Behauptung folgt aus den Definitionen von $\hat{f}_1, \hat{f}_2, f_1, f_2$ und Lemma 7.17. \square

Theorem 7.18. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine reell differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph auf D , wenn $f_{\bar{z}}(c) = 0$ für jedes $c \in D$. In diesem Fall ist $f_z = f'$ auf D .

Proof. Dies ist (i) \iff (iii) aus Lemma 7.17. \square

8. WINKELTREUE ABBILDUNGEN

8.1. Winkeltreue Abbildungen.

Definition 8.1. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heisst *antiholomorph* auf D , wenn $\bar{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf D ist.

Lemma 8.2. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann antiholomorph, wenn $f_z(c) = 0$ für alle $c \in D$.

Proof. f antiholomorph $\iff \bar{f}$ holomorph $\iff \bar{f}_z \stackrel{\text{Lem. 7.16}}{=} \bar{f}_{\bar{z}} = 0 \iff f_z = 0$. \square

Definition 8.3. (1) Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist *winkeltreu*, wenn es $\lambda \in \mathbb{R}^*$ und eine orthogonale $A \in O(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass $L = \lambda A$.
 (2) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine reell differenzierbare Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ als *winkeltreu* (*winkel-erhaltend*) bei dem Punkt $c \in D$ bezeichnet, wenn das Differential $Df_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine winkeltreue \mathbb{R} -lineare Abbildung ist. f wird einfach als *winkeltreu* in D bezeichnet, wenn es dies an jedem Punkt von D ist.

Lemma 8.4. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf D holomorph (bzw. antiholomorph) ist und wenn $f'(c) \neq 0$ (bzw. $\bar{f}'(c) \neq 0$) für jedes $c \in D$, dann ist f winkeltreu in D .

Proof. Nach Bemerkung 7.5 sind f, \bar{f} reell differenzierbar und nach Proposition 7.15 haben wir

$$Df_c(h) = f_z(c)h + f_{\bar{z}}(c)\bar{h}$$

Wenn f holomorph ist, haben wir $Df_c(h) = f_z(c)(h)$. Wenn \bar{f} holomorph ist, haben wir $Df_c(h) = f_{\bar{z}}(c)(\bar{h}) = \bar{f}_z(c)h$. Wir können $h \mapsto f_z(c)h$ (bzw. $h \mapsto \bar{f}_z(c)h$) als \mathbb{C} -lineare anschauen und als solche sind sie winkeltreu (weil $f_z(c) \neq 0$, bzw. $\bar{f}_z(c) \neq 0$). \square

Theorem 8.5. Sei G eine zusammenhängende offene Menge in \mathbb{C} (=ein Gebiet) und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig reell-differenzierbare Abbildung. Folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Entweder ist f auf ganz G holomorph und f' hat keine Nullstellen auf G , oder f ist auf ganz G antiholomorph und \bar{f}' hat keine Nullstellen auf G .
- (2) f ist winkel-erhaltend in G .

Proof. (1) \implies (2) ist Lemma 8.4.

(2) \implies (1): Nach Proposition 7.15 haben wir

$$Df_c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, h \mapsto f_z(c)h + f_{\bar{z}}(c)\bar{h}, \quad c \in G,$$

Dann ist Df_c winkelerhaltend, genau dann, wenn entweder $f_z(c) = 0$ und $f_{\bar{z}}(c) \neq 0$, oder $f_{\bar{z}}(c) = 0$ und $f_z(c) \neq 0$. Die Funktion

$$F : G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad c \mapsto \frac{f_z(c) - f_{\bar{z}}(c)}{f_z(c) + f_{\bar{z}}(c)}$$

ist daher wohldefiniert und nimmt nur die Werte 1 und -1 an. Da $f_z, f_{\bar{z}}$ nach Voraussetzung stetig sind, ist F stetig. Darum ist $F(G)$ zusammenhängend, also ist F konstant. Also ist $f_{\bar{z}}(c) = 0$ und $f_z(c) \neq 0$ für alle $c \in G$ oder umgekehrt. \square

Remark 8.6. Holomorphe (bzw. antiholomorphe) Abbildungen sind bei keiner Nullstelle ihrer Ableitungen f_z (bzw. $f_{\bar{z}}$) winkeltreu. Zum Beispiel werden unter der Abbildung $z \mapsto z^n$ mit $n > 1$ werden Winkel am Ursprung um den Faktor n vergrößert.

Definition 8.7. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine reell differenzierbare Funktion $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *orientierungserhaltend* an einer Stelle $c \in D$, wenn

$$\det \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix} > 0.$$

Example 8.8. (1) Nach Beispiel 7.8: eine holomorphe Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist orientierungstreu an jeder Stelle $c \in D$, wo $f'(c) \neq 0$.

(2) Wenn $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ antiholomorph, dann ist $\det Df_c < 0$ für alle $c \in D$. In der Tat haben wir mit $f = u + iv$, $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, und Example 7.8

$$0 < \det D\bar{f}_c = \det \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ -v_x(c) & -v_y(c) \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix} = -\det Df_c$$

Proposition 8.9. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) f ist holomorph und f' hat keine Nullstellen in D .
- (2) f ist winkeltreu und orientierungstreu in D .

Proof. Die Behauptung folgt aus Theorem 8.5 und Example 8.8. \square

In English sieht man häufig *conformal* für *winkeltreu*. Je nach Autor bedeutet conformal auch winkeltreu und orientierungstreu.

8.2. Geometrische interpretation auf Tangentialvektoren. Wir erinnern uns an den Tangentialraum $T_c\mathbb{R}^2$ als Menge von Äquivalenzklassen von Wegen durch c : wir betrachten Wege $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$, $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$, mit $\gamma(\xi) = c$ für ein $\xi \in (a, b)$.

Wir sagen, dass γ bei ξ differenzierbar ist, wenn die Ableitungen $x'(\xi)$ und $y'(\xi)$ existieren. In diesem Fall definieren wir

$$\gamma'(\xi) := x'(\xi) + iy'(\xi).$$

Falls $\gamma'(\xi) \neq 0$, hat die Kurve γ eine Tangente in c , nämlich

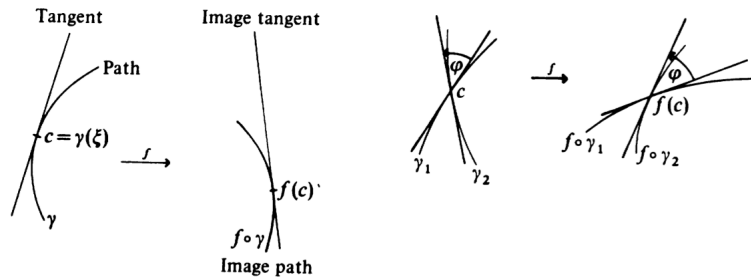
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto c + \gamma'(\xi) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

und wir nennen $\gamma'(\xi)$ die *Tangentialrichtung* von γ bei c .

Sind γ_1, γ_2 zwei differenzierbare Wege durch c mit Tangentenrichtungen $\gamma'_1(\xi)$ und $\gamma'_2(\xi)$ in c , so misst

$$\angle(\gamma'_1(c), \gamma'_2(c))$$

den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen (dh zwischen den beiden Gerade $t \mapsto c + \gamma'_1(\xi)t$ und $t \mapsto c + \gamma'_2(\xi)t$).



Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine reel-differenzierbare Abbildung. Die Abbildung

$$f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$$

heißt die *Bildkurve* von γ unter f . Sie ist bei ξ differenzierbar und es gilt (mit Kettenregel)

$$(f \circ \gamma)'(\xi) = u_x(c)x'(\xi) + u_y(c)y'(\xi) + i(v_x(c)x'(\xi) + v_y(c)y'(\xi)) = Df_c(\gamma'(\xi)).$$

Falls $(f \circ \gamma)'(\xi) \neq 0$, besitzt die Bildkurve eine Tangente in $f(c)$. Diese *Bildtangente* ist dann gegeben durch die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(c) + Df_c(\gamma'(\xi))t.$$

Wir haben folgendes gezeigt:

Lemma 8.10. *Das Differential Df_c bildet Tangentenrichtungen differenzierbarer Wege auf die Tangentenrichtungen der entsprechenden Bildkurven ab.*

Die winkeltreue Eigenschaft von f an der Stelle c bedeutet daher: Wenn zwei Wege γ_1, γ_2 sich im Punkt c im Winkel φ schneiden, dann schneiden sich die Bildkurven $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ im Bildpunkt $f(c)$ im Winkel $\pm\varphi$.

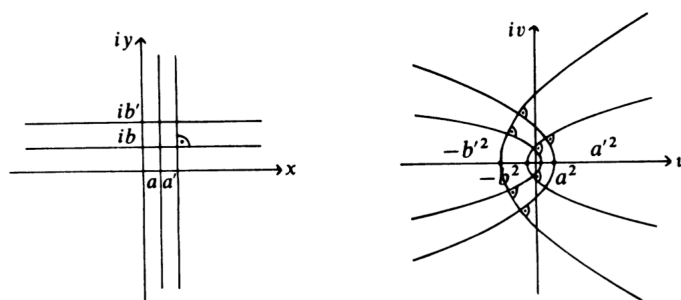
Entweder wird der Winkel φ *zusammen mit seiner Orientierung, oder Drehrichtung*, erhalten (wie in den rechten Abbildungen oben) oder *die Orientierung von φ wird umgekehrt*, was unter $z \mapsto \bar{z}$ geschieht. Diese *Umkehrung der Orientierung* tritt bei allen antiholomorphen Abbildungen auf, während im Gegensatz dazu die *Erhaltung der Orientierung* bei allen holomorphen Abbildungen auftritt (siehe Example 8.8).

Example 8.11. Die Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ ist holomorph und $f'(c) = 2c \neq 0$ für jedes $c \in \mathbb{C}^*$. Also ist f winkeltreu.

Wir haben

$$u := \Re(f) = x^2 - y^2, \quad v := \Im(f) = 2xy$$

Die Geraden $(x = a)$ und $(y = b)$ werden von f auf die Parabeln $(v^2 = 4a^2(a^2 - u))$ und $(v^2 = 4b^2(b^2 + u))$ abgebildet. Sie haben ihren Brennpunkt im Ursprung haben. Die Parabeln der ersten Familie öffnen sich nach links, die der zweiten Familie nach rechts, und Parabeln aus den beiden Familien schneiden sich rechtwinklig (*Übung*).



9. POTENZREIHEN UND WEGINTEGRALE

9.1. Allgemeines.

Definition 9.1. Sei $c \in \mathbb{C}$. Wir nennen eine Funktionenreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine (formale) Potenzreihe mit Zentrum c und Koeffizienten a_n .

Zur Vereinfachung unserer Aussagen nehmen wir häufig an $c = 0$, sofern dies ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist.

Erinnerung: Eine Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n$, $a_n \in \mathbb{C} \forall n \geq 0$, heisst konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $(s_m := \sum_{n=0}^m a_n)_m$ konvergiert.

Definition 9.2. Sei X ein metrischer Raum und $|\cdot|$ die durch die Metrik induzierte Norm auf X . Sei $A \subset X$ und $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen für $n \geq 0$.

- (1) Wir definieren $\mathcal{C}(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$.
- (2) Die Folge $(f_n)_n$ heisst *gleichmäßig konvergent* auf A gegen $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in A.$$

- (3) Die Reihe $\sum_{n \geq 0} f_n$ konvergiert *gleichmäßig* auf A , wenn die Folge der Partialsummen $S_m = \sum_{n=0}^m f_n$ gleichmäßig auf A konvergiert. Wir schreiben $\sum_{n \geq 0} f_n$ für den (eindeutigen) Grenzwert.
- (4) Für eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir $\|f\|_A := \sup\{|f(x)| \mid x \in A\}$.
- (5) Die Reihe $\sum_{n \geq 0} f_n$ heisst *normal konvergent* in X , wenn jeder Punkt von X eine Umgebung U besitzt, für die $\sum \|f_n\|_U < \infty$ gilt.

Das Wort *normal* bezieht sich hier auf das Vorhandensein von (Semi-)Normen.

Remark 9.3. Sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $f, g \in V := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_A < \infty\}$ und $c \in \mathbb{C}$. Es gilt (**Übung**):

- (1) V ist ein \mathbb{C} -Vektorraum.
- (2) $\|f\|_A = 0 \Leftrightarrow f|_A = 0$
- (3) $\|cf\|_A = \|c\| \|f\|_A$
- (4) $\|f + g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$

Im Speziellen ist $\|\cdot\|_A: V \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|_A$ eine *Seminorm* auf V .

Wir schreiben $B_s(c) = \{x \in X \mid d(x, c) < s\}$ für die offene Kugel um c mit Radius $s > 0$.

Lemma 9.4. Sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen.

- (1) Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert *gleichmäßig* auf A gegen $f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$.
- (2) Jede Unterreihe einer *normal konvergierenden* Reihe konvergiert auch *normal*.
- (3) Wenn $f_n \in \mathcal{C}(X) \forall n \geq 0$ und $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ konvergiert *normal* in X , dann ist $f \in \mathcal{C}(X)$.
- (4) Wenn $\sum_{n \geq 0} f_n$ in X *normal konvergiert*, dann gilt $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_K < \infty$ für jede *komakte* Menge $K \subset X$.
- (5) Wenn X *lokal kompakt* ist und $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_K < \infty$ für jede *komakte* Menge $K \subset X$, dann ist $\sum_{n \geq 0} f_n$ *normal konvergent* in X .
- (6) Wenn $c \in X$ und $f_n: B_s(c) \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 0$, eine Folge ist, so dass $\sum \|f_n\|_{B_r(c)} < \infty \forall r \in (0, s)$, dann konvergiert $\sum_{n \geq 0} f_n$ *normal* auf $B_s(c)$.

Proof. **Übung.**

□

Lemma 9.5 (Abelsches Konvergenzlemma). Sei $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe. Wenn es $s, M \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass $|a_n| s^n \leq M$ für alle $n \geq 0$, dann konvergiert $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ normal auf $B_s(0)$.

Proof. Sei $r \in (0, s)$ und setze $q := \frac{r}{s} < 1$. Dann gilt

$$|a_n z^n|_{B_r(0)} = |a_n| r^n = |a_n| s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n = |a_n| s^n q^n \leq M q^n \quad \forall n \geq 0.$$

Da $\sum_{n \geq 0} q^n < \infty$, folgt

$$\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|_{B_r(0)} \leq M \sum_{n \geq 0} q^n < \infty.$$

Da dies für jedes $r \in (0, s)$ gilt, folgt normale Konvergenz in $B_s(0)$ nach Lemma 9.4(6). □

Corollary 9.6. Wenn die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ bei $z_0 \neq 0$ konvergiert, dann konvergiert sie normal auf $B_{|z_0|}(0)$.

Proof. Da die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ bei $z_0 \neq 0$ konvergiert, ist die Folge $(|a_n| |z_0|^n)_n$ eine Nullfolge und ist daher beschränkt. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 9.5. □

Theorem 9.7. Sei $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe und sei $R = \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (|a_n| t^n)_n \text{ ist beschränkte Folge}\}$. Dann gilt:

- (1) $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ konvergiert normal auf $B_R(0)$.
- (2) $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ divergiert an jedem Punkt $w \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$.

Wir nennen R den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Proof. Es gilt $0 \leq R \leq \infty$. Wenn $R = 0$, ist nichts zu beweisen. Angenommen, $R > 0$. Dann ist $|a_n| s^n$ für jedes $s \in (0, R)$ beschränkt. Nach Lemma 9.5 ist $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ normal konvergent auf $B_s(0)$ für jedes $s \in (0, R)$. Da $B_R = \bigcup_{0 < s < R} B_s(0)$, konvergiert $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ normal auf $B_R(0)$. Für jedes w mit $|w| > R$ ist die Folge $(|a_n| |w|^n)_n$ unbeschränkt, also divergiert die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n w^n$. □

Lemma 9.8. Wenn die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n (z - c)^n$ den Konvergenzradius R hat, dann haben die durch gliedweise Ableitung bzw. Integration entstehenden Reihen

$$\sum_{n \geq 0} n a_n (z - c)^{n-1} \quad \text{bzw} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z - c)^{n+1}$$

ebenfalls Konvergenzradius R .

Proof. Es reicht, die Behauptung für $c = 0$ zu zeigen.

(1) Der Konvergenzradius R' der abgeleiteten Reihe ist

$$R' = \sup\{t > 0 \mid \text{die Folge } (n|a_n| t^{n-1})_n \text{ ist beschränkt}\}.$$

Wenn die Folge $(n|a_n| t^{n-1})_n$ beschränkt ist, dann ist die Folge $(|a_n| t^n)_n$ beschränkt, also ist $R' \leq R$. Wir zeigen nun $R \leq R'$. Sei $0 < r < R$. Wähle s mit $r < s < R$. Dann ist die Folge $|a_n| s^n$ beschränkt. Setze $q := \frac{r}{s} < 1$. Dann gilt:

$$n|a_n| r^{n-1} = \left(\frac{|a_n| s^n}{r}\right) \cdot n q^n.$$

Für $\delta := 1/q - 1 > 0$ und $n \geq 2$ ergibt die binomische Formel:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = (1 + \delta)^n \geq \binom{n}{2} \delta^2 = \frac{n(n-1)\delta^2}{2} \implies 0 < n q^n \leq \frac{2}{(n-1)\delta^2}$$

also ist $(n q^n)_n$ eine Nullfolge. Da $(|a_n| s^n)_n$ beschränkt ist, folgt, dass auch $(n|a_n| r^{n-1})_n$ eine Nullfolge ist. Somit ist $r \leq R'$. Es folgt $R \leq R'$ und daher $R = R'$.

(2) Sei R^* der Konvergenzradius der integrierten Reihe. Nach Fall (1) ist R^* auch der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n (z - c)^n$. Es folgt $R^* = R$. □

Theorem 9.9. Sei $\sum_{n \geq 0} a_n(z - c)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist die Grenzfunktion f innerhalb der Kreisscheibe $B_R(c)$ beliebig oft komplex differenzierbar, also insbesondere holomorph. Ausserdem gilt für alle $z \in B_R(c)$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - c)^{n-k}.$$

Im Speziellen gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$ für alle $k \geq 0$.

Proof. Wir beweisen nur den Fall $k = 1$, die anderen Fälle folgen durch Induktion. Lemma 9.8 impliziert, dass

$$g(z) := \sum_{n \geq 1} n a_n (z - c)^{n-1}$$

eine wohldefinierte komplexwertige Funktion auf $B_R(c)$ ist. Unsere Behauptung ist, dass $f' = g$. Wir dürfen ohne Einschränkung $c = 0$ annehmen. Sei $b \in B_R(c)$ fest und zeigen jetzt $f'(b) = g(b)$. Wir definieren

$$q_n(z) := z^{n-1} + z^{n-2}b + \cdots + z b^{n-2} + b^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dann gilt:

$$z^n - b^n = (z - b)q_n(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad q_n(b) = n b^{n-1}$$

und

$$\begin{aligned} f(z) - f(b) &= \sum_{n \geq 1} a_n (z^n - b^n) = (z - b) \underbrace{\sum_{n \geq 1} a_n q_n(z)}_{h(z)}, \quad z \in B_R(0) \\ \implies f(z) &= f(b) + (z - b)h(z), \quad z \in B_R(0) \quad \text{und} \quad h(b) = \sum_{n \geq 1} n a_n b^{n-1} = g(b) \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $f'(b) = h(b)$, bleibt zu zeigen, dass h in b stetig ist. Nach Lemma 9.4(3) reicht es zu zeigen, dass $\sum_{n \geq 1} a_n q_n(z)$ normal auf $B_R(c)$ konvergiert. Dazu: Für jedes $|b| < r < R$ haben wir

$$|a_n q_n(z)|_{B_r(0)} \leq |a_n| n r^{n-1} \implies \sum_{n \geq 1} |a_n q_n(z)|_{B_r(0)} \leq \sum_{n \geq 1} |a_n| n r^{n-1} \stackrel{\text{Lem 9.8}}{<} \infty$$

Nach Lemma 9.4(6) folgt, dass $\sum_{n \geq 0} f_n$ normal konvergent ist auf $B_s(c)$ für alle $s \in (0, r)$. Da dies für jedes $r \in (0, R)$ gilt, impliziert Lemma 9.4(5), dass $\sum_{n \geq 0}$ auf $B_r(0)$ normal konvergiert. Nach Lemma 9.4(3) ist also h stetig bei b , also haben wir $h(b) = g(b) = f'(b)$. Da diese für alle $b \in B_R(0)$ gilt, folgt unsere Behauptung.

Zuletzt rechnen wir $f^{(k)}(c) = k! a_k$ für alle $k \geq 0$. □

9.2. Allgemeines zu Wegintegralen. Für einen stetigen Weg $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, schreiben wir auch γ fürs Bild von γ .

Definition 9.10. Ist $\gamma: [a, b]$ eine stetig differenzierbare Kurve in \mathbb{C} , dann gilt für jede Funktion $f \in C(\gamma)$, dass $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \in C([a, b])$. Daher existiert die komplexe Zahl

$$\int_{\gamma} f dz := \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Wir nennen $\int_{\gamma} f dz$ das *Wegintegral* der Funktion $f \in C(\gamma)$ entlang der stetig differenzierbaren Kurve γ .

Sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m$ ein stückweise stetig differenzierbaren Weg, wo γ_i stetig differenzierbar ist. Dann definieren wir

$$\int_{\gamma} f dz := \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f dz, \quad f \in C(\gamma)$$

Im Spezialfall, dass $\gamma: [a, b] \longrightarrow [a, b]$, $t \mapsto t$ ist, gilt $\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(t) dt$.

Theorem 9.11. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_{\partial B_r(c)} \frac{(\zeta - c)^n}{2\pi i} d\zeta = \begin{cases} 0, & \text{für } n \neq -1, \\ 1, & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Proof. Übung. Tipp: parametrisiere $\partial B_r(c)$ mit $\gamma(t) = c + re^{it}$. □

Proposition 9.12. Seien $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\delta: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ Wege und $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Bijektion, so dass $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in [c, d]$, so dass $\delta = \gamma \circ \varphi$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\delta} f dz \quad \forall f \in \mathcal{C}(\gamma) \cup \mathcal{C}(\delta)$$

Proof. Wir bemerken, dass $\delta(c) = \gamma(a)$ und $\delta(d) = \gamma(b)$. Es gilt $\delta(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)$ für $t \in [c, d]$, und daher:

$$\begin{aligned} \int_{\delta} f dz &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_a^b f(\delta(t))\delta'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &\stackrel{\varphi(c)=a}{\varphi(d)=b}{=} \int_{\gamma} f dz \end{aligned}$$

□

9.3. Potenzreihen und holomorphe Funktionen.

Definition 9.13. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heisst *in eine Potenzreihe um $c \in D$ entwickelbar*, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $B_r(c) \subset D$ und eine Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n(z - c)^n$, welche auf $B_r(c)$ gegen $f|_{B_r(c)}$ konvergiert.

Remark 9.14. Nach Satz 9.9, ist eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ um c auf $B_r(c) \subset D$ in eine Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n(z - c)^n$ entwickelbar, so ist f beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt: Eine Potenzreihenentwicklung einer Funktion f um c ist unabhängig von r eindeutig durch die Ableitungen von f an der Stelle c bestimmt und hat stets die Form:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n.$$

Diese Reihe heisst *Taylorreihe* von f um c und konvergiert gleichmässig auf jeder kompakten Teilmenge von $B_r(c)$ (Übung).

Lemma 9.15 (Entwicklungslemma). Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma: J \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma \subset D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir definieren

$$(7) \quad F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma,$$

Dann gilt

- (1) F ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \gamma$.
- (2) Für jedes $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n \geq 0} a_n(z - c)^n \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0$$

in jeder offenen Kreisscheibe um c , welche γ nicht berührt, und konvergiert dort gegen F .

- (3) Die Funktion F ist in $\mathbb{C} \setminus \gamma$ beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt:

$$F^{(n)}(c) = n!a_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proof. (2): Sei $r > 0$, so dass $B_r(c) \cap \gamma = \emptyset$. Die Reihe

$$\frac{1}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} w^{n-k},$$

konvergiert auf der offenen Einheitskreis \mathbb{D} . Durch $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$ bekommt sie die Form

$$\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}} \stackrel{\text{Übung}}{=} \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{1}{(\zeta-c)^{n-1}} (z-c)^{n-k}$$

Diese Reihe konvergiert für alle $z \in B_r(c)$, $\zeta \in \gamma$, $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$g_n(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}$$

für $\zeta \in \gamma$. Dann gilt für $z \in B_r(c)$ und $\zeta \in \gamma$:

$$(8) \quad \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} g_n(\zeta) (z-c)^{n-k} d\zeta.$$

Da $|\zeta-c| \geq r$ für alle $\zeta \in \gamma$ (da $B_r(c) \cap \gamma = \emptyset$), folgt aus der Definition von g_n , dass

$$|g_n(\zeta)| \leq \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} \leq \frac{\|f\|_{\gamma}}{r^{n+1}}, \quad \|f\|_{\gamma} = \sup\{|f(\zeta)| \mid \zeta \in \gamma\}$$

Setzen wir $q := \frac{|z-c|}{r}$, so folgt:

$$\max_{\zeta \in \gamma} |g_n(\zeta)(z-c)^{n-k}| \leq \frac{\|f\|_{\gamma}}{r^{n+1}} |z-c|^{n-k} = \frac{\|f\|_{\gamma}}{r^{k-1}} q^{n-k}.$$

Da $0 \leq q < 1$ für jedes $z \in B_r(c)$, bekommen wir in (8)

$$(9) \quad \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} |g_n(\zeta)(z-c)^{n-k}| \leq \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} q^{n-k} = \frac{1}{(1-q)^{k+1}}$$

Also konvergiert die in (8) im Integral stehende Reihe normal auf γ für jedes feste $z \in B_r(c)$.

Also können wir \int und \sum vertauschen und es folgt (8)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (z-c)^{n-k} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta \right)}_{a_n} \\ &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} a_n (z-c)^{n-k}, \end{aligned}$$

Für $k=0$ folgt, dass F auf $B_r(c)$ durch die Potenzreihe $\sum a_n (z-c)^n$ darstellbar ist. Das ist (2).

(3): Aufgrund von Satz 4.3.2 ist F somit in $B_r(c)$ komplex differenzierbar und erfüllt:

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} a_n (z-c)^{n-k} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-k}} d\zeta, \quad z \in B_r(c), \quad k \in \mathbb{N}.$$

(1): Da $B_r(c)$ eine beliebige offene Kreisscheibe in $\mathbb{C} \setminus \gamma$ ist, ist F holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \gamma$. □

Theorem 9.16 (Primitive). Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung und $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Abbildung. Die folgenden sind äquivalent:

- (1) F holomorph auf D und $F' = f$
- (2) Für jede $w, z \in D$ und jeden Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ mit $\gamma(0) = w$ und $\gamma(1) = z$ haben wir $\int_{\gamma} f d\zeta = F(z) - F(w)$.

Proof. (1) \Rightarrow (2): Übungsblatt 10.

(2) \Rightarrow (1): Wir zeigen, dass für jeden Punkt $c \in D$ die Ableitung $F'(c)$ existiert und $F'(c) = f(c)$.

Sei $B \subset D$ eine offene Kreisscheibe um c , so dass $\overline{B} \subset D$. Nach Voraussetzung aus (2) gilt:

$$F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f d\zeta, \quad \forall z \in B,$$

wobei $[c, z]$ das lineare Segment von c nach z bezeichnet. Wir definieren

$$F_1(z) := \frac{1}{z-c} \int_{[c,z]} f d\zeta, \quad z \in B \setminus \{c\} \quad \text{und} \quad F_1(c) := f(c).$$

Dann gilt $F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f d\zeta = F(c) + (z-c)F_1(z)$ für alle $z \in B$. Wir zeigen nun, dass F_1 stetig bei c ist (dann folgt $F'(c) = F_1(c) = f(c)$, was wir zeigen wollen). Da $\int_{c,z} d\zeta = \int_0^1 dt = z-c$ (mit $t \mapsto (1-t)c + tz$), gilt

$$F_1(z) - F_1(c) = \frac{1}{z-c} \int_{[c,z]} (f(\zeta) - f(c)) d\zeta, \quad \forall z \in B \setminus \{c\}.$$

Da das Segment $[c, z]$ die Länge $|z-c|$ hat, kriegen wir

$$|F_1(z) - F_1(c)| \leq \frac{1}{|z-c|} \cdot |f(\zeta) - f(c)|_{[c,z]} \cdot |z-c| = |f(\zeta) - f(c)|_B \quad \forall z \in B.$$

Da f stetig ist, folgt, dass F_1 bei c stetig ist. \square

Remark 9.17. Falls also F, \hat{F} primitives von f auf D sind, ist $F - \hat{F}$ lokal konstant auf D .

Theorem 9.18 (Integrability Criterion). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Die folgenden sind äquivalent:*

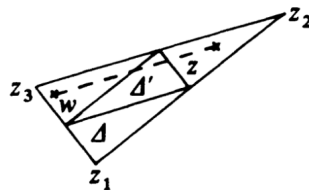
- (1) *Es gibt eine komplex differenzierbare Abbildung $F: D \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $F' = f$*
- (2) *$\int_{\gamma} f d\zeta = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in D .*

Falls eine dieser Bedingungen gilt und D zusammenhängend ist, dann gilt: sei $z_1 \in D$. Für jedes $z \in D$, sei γ_z ein Weg von z_1 nach z . Dann gilt $F(z) = \int_{\gamma_z} f d\zeta$ für alle $z \in D$.

Proof. Übungsblatt 10 \square

Lemma 9.19. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Sei $\Delta \subset D$ ein Dreieck. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0$.*

Proof. Zuerst erinnern wir uns an Folgendes: Die Dreiecksungleichung ergibt $\max_{w,z \in \Delta} |w-z| \leq \text{Länge}(\partial\Delta)$ und wir haben $\text{Länge}(\partial\Delta') = \frac{1}{2} \text{Länge}(\partial\Delta)$ für jedes Dreieck Δ' welches man durch verbinden der Mittelpunkte der Seiten von Δ erhält



Wir definieren $a(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f d\zeta$. Indem wir die Mittelpunkte der Seiten von Δ durch gerade Liniensegmente verbinden, unterteilen wir Δ in vier kongruente Unterdreiecke Δ_l , $1 \leq l \leq 4$. Die Segmente, welche die Mittelpunkte der Seiten von Δ verbinden, werden jeweils zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen (wie in Bild oben). Also heben sich die entsprechenden Integrale gegenseitig auf, während die Vereinigung der verbleibenden Seiten der Δ_l gerade $\partial\Delta$ ergibt. Wir haben also

$$a(\Delta) = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Delta_i} f d\zeta = \sum_{i=1}^4 a(\Delta_i).$$

Unter den vier Integralen $a(\Delta_l)$ wählen wir eines mit dem grössten Absolutbetrag aus und bezeichnen das zugehörige Dreieck als Δ^1 . Dann gilt

$$a(\Delta) \leq 4|a(\Delta^1)|$$

Wenden wir denselben Prozess auf Δ^1 an, dann erhalten wir ein Dreieck Δ^2 mit $|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)| \leq 4^2|a(\Delta^2)|$. Die Fortsetzung dieses Verfahrens erzeugt eine absteigende Folge $\Delta^1 \supseteq \Delta^2 \supseteq \dots \supseteq \Delta^n \supseteq \dots$ von (kompakten) Dreiecken mit

$$(10) \quad |a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)|, \quad n \geq 1.$$

Wir haben ausserdem nach obigen Erinnerungen

$$(11) \quad \text{Länge}(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} \text{Länge}(\partial\Delta), \quad n \geq 1.$$

Wir haben $\cap_{i \geq 1} \Delta^i = \{c\} \subset \Delta$ (nach dem Intervallverschachtelungsprinzip, Übung). Da f holomorph auf D ist, gibt es eine holomorphe Abbildung $g: D \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $g(c) = 0$ und

$$f(\zeta) = f(c) + f'(c)(\zeta - c) + (\zeta - c)g(\zeta), \quad \zeta \in D$$

(siehe Lemma 7.15 und Satz 7.18). Es folgt

$$a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} f(\zeta) d\zeta = \underbrace{\int_{\partial\Delta^n} f(c) d\zeta}_{\text{Satz 9.16}_0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta^n} f'(c)(\zeta - c) d\zeta}_{\text{Satz 9.16}_0} + \int_{\partial\Delta^n} (\zeta - c)g(\zeta) d\zeta, \quad n \geq 1$$

Aus der Standardabschätzung für Integrale und der ersten Bemerkung folgt

$$|a(\Delta^n)| \leq \left(\max_{\zeta \in \partial\Delta^n} |\zeta - c| |g(\zeta)| \right) \text{Länge}(\partial\Delta^n) \leq \text{Länge}(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{\partial\Delta^n}, \quad n \geq 1$$

Aus (10) und (11) folgt

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \leq 4^n \text{Länge}(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{\partial\Delta^n} = 4^n \left(\frac{1}{2^n} \text{Länge}(\partial\Delta) \right)^2 \|g\|_{\partial\Delta^n} = \text{Länge}(\partial\Delta)^2 \|g\|_{\partial\Delta^n}, \quad n \geq 1.$$

Da $g(c) = 0$ ist und g an c stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|g(\zeta)| \leq \varepsilon$ für alle $\zeta \in B_\delta(c)$. Dh $\|g\|_{B_\delta(c)} \leq \varepsilon$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$, so dass $\Delta^n \subset B_\delta(c)$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $\|g\|_{\Delta^n} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und daher

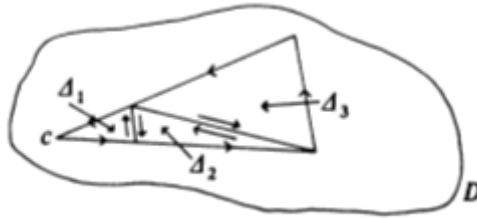
$$|a(\Delta)| \leq \text{Länge}(\partial\Delta)^2 \|g\|_{\partial\Delta^n} \leq \text{Länge}(\partial\Delta)^2 \varepsilon$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a(\Delta) = 0$. □

Remark 9.20. Man kann Lemma 9.19 noch verschärfen:

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf D und holomorph auf $D \setminus \{c\}$. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subset D$ mit Ecke bei c .

Der Beweis ist wortwörtlich der von Lemma 9.19, nur, dass wir die Dreiecke anders benutzen: sei $\Delta \subset D$ ein Dreieck mit Ecke c . Auf den beiden Seiten von Δ mit Endpunkt c wählen wir zwei Punkte und betrachten folgende Unterdreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$



Wie oben haben wir $\int_{\partial\Delta} f d\zeta = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Delta_i} f d\zeta \stackrel{\text{Lem 9.19}}{=} \int_{\partial\Delta_1} f d\zeta$ und daher $|\int_{\partial\Delta} f d\zeta| \leq \|f\|_{\Delta} \text{Länge}(\partial\Delta_1)$. Da Δ_1 beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\int_{\partial\Delta} f d\zeta = 0$.

Theorem 9.21 (Cauchys Integralsatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und konvex, $c \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf D und holomorph auf $D \setminus \{c\}$. Dann existiert eine komplex differenzierbare Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $F' = f$.*

Proof. Da f auf $D \setminus \{c\}$ holomorph ist, haben wir $\int_{\partial \Delta} f d\zeta = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subset D$ nach Bemerkung 9.20. Die Aussage folgt nun von Satz 9.18, der Tatsache, dass wir D mit Dreiecken füllen können (weil D konvex), dass Primitive sich nur durch Konstanten unterscheiden und Proposition 7.13 (weil D zusammenhängend). \square

Theorem 9.22 (Cauchy Integral formula). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in D$, $r > 0$, so dass $\overline{B_r(c)} \subset D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf D . Dann gilt für alle $z \in B$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Proof. Sei $z \in B$. Betrachte die Funktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in D \setminus \{z\}, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

Da f holomorph auf D , ist g in $D \setminus \{z\}$ holomorph und stetig in D . Nach Bemerkung 9.20 und weil $B_r(c)$ konvex ist, ist $g|_{B_r(c)}$ integrierbar. Nach Satz 9.18 gilt

$$\int_{\partial B_s(c)} g(\zeta) d\zeta = 0.$$

Es folgt

$$0 = \int_{\partial B_r(c)} g(\zeta) d\zeta \stackrel{\text{Def } g}{=} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B_r(c)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{\text{Blatt 10}}{=} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z).$$

\square

Corollary 9.23 (Mean value theorem). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $c \in D$ und $r > 0$, so dass $\overline{B_r(c)} \subset D$. Dann gilt $f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(c + e^{it}) dt$ und $|f(c)| \leq \|f\|_{\partial B_r(c)}$.*

Proof. Wir parametrisieren $\partial B_r(c)$ durch $[0, 2\pi] \ni t \mapsto c + re^{it}$. Mit der Kettenregel für Integrale folgt $f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(c + e^{it}) dt$. Wir zeigen den zweiten Teil: Nach Satz 9.22 haben wir $\int_{\partial B_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$. Es folgt

$$|f(z)| \leq r \left\| \frac{1}{(\zeta - z)} \right\|_{\partial B_r(c)} \|f\|_{\partial B_r(c)}, \quad z \in B_r(c)$$

and set $a_z := r \|1/(\zeta - z)\|_{\partial B_r(c)}$ für $z \in B_r(c)$. Da jede Potenz f^k , $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, holomorph auf D ist, gilt auch $|f(z)|^k \leq a_z^k \|f\|_{\partial B_r(c)}^k$ für alle $z \in B_r(c)$ und daher auch $|f(z)| \leq \sqrt[k]{a_z} \|f\|_{\partial B_r(c)}$ für alle $z \in B_r(c)$. Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_z} = 1$, folgt $|f(c)| \leq \|f\|_{\partial B_r(c)}$. \square

9.4. Von holomorphen Funktionen zu Reihen. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *in eine Potenzreihe entwickelbar* um $c \in D$, wenn es $r > 0$ gibt, so dass $B_r(c) \subset D$, und eine Potenzreihe $\sum a_n(z - c)^n$, die auf $B_r(c)$ gegen $f|_{B_r(c)}$ konvergiert.

Remark 9.24. (1) Aus Lemma 9.8 folgt: Wenn f um c in $B \subset D$ in eine Potenzreihe $\sum a_n(z - c)^n$ entwickelbar ist, dann ist f unendlich oft komplex differenzierbar und $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

(2) Eine Potenzreihenentwicklung einer Funktion f um c ist (unabhängig vom Radius r der Kreisscheibe $B_r(c)$) eindeutig durch die Ableitungen von f an der Stelle c bestimmt und hat stets die Form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n$, siehe Satz 9.9. Diese Reihe heißt *Taylorreihe* von f um c .

Lemma 9.25. *Sei γ ein stückweise stetiger Weg in \mathbb{C} und $f: \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Dann folgt*

(1) Die Abbildung

$$F: \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

ist holomorph;

(2) für jedes $c \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n(z - c)^n$ mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

nach F auf jeder offenen Scheibe, welche $\text{Im}(\gamma)$ nicht schneidet.

(3) F unendlich oft auf $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ komplex differenzierbar und

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Proof. Sei $r > 0$, und $c \in \mathbb{C}$, so dass $B_r(c) \cap \text{Im}(\gamma) = \emptyset$. Die Reihe

$\left(\frac{1}{(1-w)^{k+1}} \right)_k = \left(\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} w^{n-k} \right)_k$ konvergiert überall auf $B_1(0)$ (Übung). Durch Substitution $w = \frac{z-c}{\zeta-c}$ bekommen wir (Übung)

$$\frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{(z - c)^{n-k}}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

Diese Reihe konvergiert für alle $z \in B_r(c)$, $\zeta \in \text{Im}(\gamma)$ und $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ konvergiert.

Setze $g_n(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}$ für $\zeta \in \text{Im}(\gamma)$. Es folgt für $z \in B_r(c)$, dass

$$(12) \quad \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} g_n(\zeta) (z - c)^{n-k} \right) d\zeta$$

Da $|\zeta - c| \geq r$ für alle $\zeta \in \text{Im}(\gamma)$, folgt aus Definition von g_n , dass

$$\|g_n\|_{\text{Im}(\gamma)} \leq \frac{\|f\|_{\text{Im}(\gamma)}}{r^{n+1}}.$$

Mit $q := \frac{|z-c|}{r}$ folgt

$$\max_{\zeta \in \text{Im}(\gamma)} |g_n(\zeta)(z - c)^{n-k}| \leq \left(\frac{|z - c|}{r} \right)^{n-k} \frac{1}{r^{k+1}} \|f\|_{\text{Im}(\gamma)} = \frac{q^{n-k}}{r^{k+1}} \|f\|_{\text{Im}(\gamma)}.$$

Wir haben $0 \leq q < 1$ für jedes $z \in B_r(c)$ und $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} q^{n-k} = \frac{1}{(1-q)^{k+1}}$ konvergiert. Nach Lemma 9.4(6) konvergiert die Reihe (12) normal in $\zeta \in \text{Im}(\gamma)$ für jedes feste $z \in B_r(c)$. Mit Lemma 9.8 (Vertauschung \sum und Ableitung/Integral) folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} a_n (z - c)^{n-k}, \quad \text{wobei} \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

Damit haben wir (1)–(3) auf $B_r(c)$ gezeigt. Da $B_r(c)$ eine beliebige offene Scheibe in $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ ist, folgt (1)–(3) auf ganz $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. \square

Theorem 9.26 (Cauchy-Taylor theorem). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Jede holomorphe Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist um jeden Punkt $c \in D$ in eine Taylorreihe $\sum a_n(z - c)^n$ entwickelbar, die kompakt in $B_{\text{dist}(c, \partial D)}(c)$ gegen f konvergiert, und*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta,$$

auf $B_r(c)$ für alle $0 < r < \text{dist}(c, \partial D)$. Ausserdem ist f unendlich oft komplex differenzierbar auf D und

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in B, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad 0 < r < \text{dist}(c, \partial D)$$

Proof. Da f holomorph auf D ist, gilt nach Lemma 9.22

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in B_r(c)$$

für alle $0 < r < \text{dist}(c, \partial D)$. Nach Lemma 9.25 (mit $F := f$ und $\gamma := \partial B_r(c)$) besitzt f eine Taylorentwicklung um c , die in $B_r(c)$ konvergiert und deren Koeffizienten wie in der Behauptung sind. Da jede Wahl von $0 < r < \text{dist}(c, \partial D)$ dieselbe Reihe erzeugt, konvergiert diese Entwicklung gegen f in ganz $B_{\text{dist}(c, \partial D)}(c)$. Die zweite Aussage folgt aus Lemma 9.25. \square

Corollary 9.27. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f unendlich oft komplex differenzierbar.*

Proof. Nach Theorem 9.26 ist f bei jedem Punkt von D in eine Taylorreihe entwickelbar. Nach Lemma 9.8, ist f bei jedem Punkt unendlich oft komplex differenzierbar. \square

Corollary 9.28 (Riemannscher Fortsetzungssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset D$ diskret und abgeschlossen und $f: D \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) f ist holomorph auf A fortsetzbar;
- (2) f ist stetig auf A fortsetzbar;
- (3) f ist in einer Umgebung jedes Punktes von A beschränkt;
- (4) $\lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z) = 0 \quad \forall c \in A$.

Proof. Da A diskret ist, reicht es, die Behauptung zu beweisen, wenn $A = \{0\}$. Die Implikationen (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) sind trivial.

(4) \Rightarrow (1): sei

$$g(z) := zf(z), \quad z \in D \setminus \{0\}, \quad g(0) := 0, \quad h(z) := zg(z).$$

Nach Voraussetzung von (4) ist g stetig in 0. Die Gleichung $h(z) = h(0) + zg(z)$, dass h komplex differenzierbar bei 0 ist und $h'(0) = g(0) = 0$. Da f auf $D \setminus \{0\}$ holomorph ist, folgt, dass h auf $D \setminus \{0\}$ holomorph ist. Also ist h holomorph auf D . Nach Theorem 9.26 hat h eine Taylorentwicklung $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ bei 0. Da $h(0) = 0 = h'(0)$, folgt $a_0 = a_1 = 0$ (dh $h(z) = z^2(a_2 + a_3 z + \dots)$). Da $h(z) = z^2 f(z)$ für $z \neq 0$ nach Definition von h , folgt, dass $F(z) := a_2 + a_3 z + \dots$ die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf D ist. \square

Lemma 9.29 (Identity theorem). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) $f = g$.
- (2) Die Menge $\{w \in D \mid f(w) = g(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in D .
- (3) $\exists c \in D$, so dass $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Proof. (1) \Rightarrow (2) ist trivial.

(2) \Rightarrow (3): Sei $h := f - g$. Dann hat $M := \{w \in D \mid h(w) = 0\}$ einen Häufungspunkt $c \in D$. Angenommen, es gibt ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $h^{(m)}(c) \neq 0$, und sei m die kleinste solche Zahl. Mit Satz 9.22 folgt, dass

$$h(z) = (z - c)^m h_m(c), \quad h_m(z) := \sum_{n \geq m} \frac{h^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^{n-m} \quad \text{auf } B_r(c)$$

für alle $r > 0$, so dass $B_r(c) \subset D$. Ausserdem ist $h_m(c) = h^{(m)}(c) \neq 0$. Da h_m stetig auf $B_r(c)$ ist, hat h_m keine Nullstellen auf einer Umgebung $U \subset B_r(c)$ von c . Also ist $M \cap (U \setminus \{c\}) = \emptyset$ und somit ist c kein Häufungspunkt von M . Ein Widerspruch! Also ist $h^{(m)}(c) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(3) \Rightarrow (1): sei wieder $h := f - g$. Jede Menge $S_k := \{w \in D \mid h^{(k)}(w) = 0\}$ ist (relativ) abgeschlossen in D , $h^{(k)}$ stetig ist. Also ist $S := \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ (relativ) abgeschlossen in D . Aber S ist auch offen in D : wenn $z_1 \in S$, dann ist nach Satz 9.22 die Taylorreihe von h um z_1 die Nullreihe auf jeder $B_r(z_1)$ mit $\overline{B_r(z_1)} \subset D$. Da dann $h^{(k)}|_{B_r(z_1)} = 0$ für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, also ist $B_r(z_1) \subseteq S$.

Da D zusammenhängend ist und $S \neq \emptyset$, folgt $S = D$. Also ist $f = g$. \square

Theorem 9.30 (Zusammenfassung). Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) f ist holomorph auf D ;
- (2) für alle Dreiecke $\Delta \subset D$ gilt $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$;
- (3) es gibt eine offene Überdeckung $D = \cup U_i$ und komplex differenzierbare Funktionen $F_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $F'_i = f|_{U_i}$;
- (4) für jede offene Scheibe B mit $\overline{B} \subset D$ gilt $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in B$;
- (5) f bei jedem $c \in D$ in eine Tayloreserie entwickelbar.

Proof. Wir haben

$$(1) \xrightarrow{\text{Lem 9.19}} (2) \xrightarrow{\text{Satz 9.18}} (3) \xrightarrow{\text{Satz 9.18}} (1)$$

und

$$(1) \xrightarrow{\text{Satz 9.22}} (4) \xrightarrow{\text{Lem 9.25}} (5) \xrightarrow{\text{Lem 9.8}} (5)$$

□

10. WEITERE EIGENSCHAFTEN VON HOLOMORPHEN ABBILDUNGEN

Lemma 10.1. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $r > 0$, so dass $\overline{B_r(c)} \subset D$ und sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_r(c)}$.

- (1) Für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $d \in (0, r)$ und $z \in \overline{B_{r-d}(c)}$ haben wir $|f^{(k)}(z)| \leq k! \frac{r}{d^{k+1}} \|f\|_{\partial B_r(c)}$.
- (2) Sei $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - c)^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius $R > r$ und setze $M(r) := \max_{|z-c| > r} |g(z)|$. Dann gilt $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ for all $n \geq 0$.

Proof. (1) Sei $d_z := \min_{\zeta \in \partial B_r(c)} |\zeta - z|$. Satz 9.22 für $f^{(k)}$ impliziert

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in B_r(c).$$

Dann gilt (standard estimate for integrals from Analysis)

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \left\| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right\|_{\partial B_r(c)} \text{length}(\partial B_r(c)) \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\|f\|_{\partial B_r(c)}}{d_z^{k+1}} 2\pi r = k! \frac{r}{d_z^{k+1}} \|f\|_{\partial B_r(c)}$$

Sei $d \in (0, r)$. Dann ist $d < d_z$ und die Behauptung folgt.

(2) Nach Satz 9.9, haben wir $a_n = \frac{g^{(k)}(c)}{n!}$ für alle $n \geq 0$. Dann ist $c \in B_{R-r}(c)$ and daher

$$|a_n| \leq \left| \frac{g^{(k)}(c)}{n!} \right| \stackrel{(1)}{\leq} \frac{r}{r^{n+1}} \|g\|_{\partial B_R(c)} \leq \frac{1}{r^n} M(r), \quad n \geq 0.$$

□

Theorem 10.2 (Liouville). Jede beschränkte holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.

Proof. Die Taylor-Entwicklung $f(z) = \sum a_n z^n$ von f bei 0 konvergiert in ganz \mathbb{C} nach Satz 9.26. Nach Lemma 10.1(2) gilt für alle $r > 0$

$$r^n |a_n| \leq \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Nach Voraussetzung gibt es $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Es folgt:

$$r^n |a_n| \leq M \quad \forall r > 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Wir haben $r^n \mapsto \infty$ für $n \mapsto \infty$, also folgt $a_n = 0$ für $n > 0$. Es folgt $f(z) = a_0$. □

Corollary 10.3. Jede holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow B_1(0)$ ist konstant. Insbesondere gibt es keine biholomorphen Abbildungen von \mathbb{C} nach \mathbb{D} oder von \mathbb{C} nach \mathbb{H} (see Blatt 9).

Proof. Übungen □

Lemma 10.4 (Growth Lemma / Wachstumslemma). Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 0$. Dann gibt es $R > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n||z|^n,$$

Insbesondere:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{z^k}{p(z)} \right| = 0 \quad \text{für } 0 \leq k < n.$$

Proof. Wir können annehmen, dass $n \geq 1$ (sonst ist die Aussage trivial). Setze $r(z) := \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k$. Dann gilt

$$|a_n||z|^n - |r(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |r(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Wenn $|z| \geq 1$ und $k < n$, dann ist $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ und somit

$$r(z) \leq |z|^{n-1}, \quad \text{wobei } M := \sum_{v=0}^{k-1} |a_k|.$$

Wir nehmen $R := \max \left\{ 1, \frac{2M}{|a_n|} \right\}$. □

Corollary 10.5. Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Proof. **Übungen** □

Lemma 10.6 (Existenzsatz für Nullstellen). Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $V \subset D$ eine offene Kreisscheibe um c . Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorph mit $\min_{z \in \partial V} |f(z)| > |f(c)|$. Dann hat f eine Nullstelle in V .

Proof. Angenommen, f hat keine Nullstelle in V . Dann ist f auch nullstellenfrei in einer offenen Umgebung U von \bar{V} , die in D enthalten ist. Dann ist $g: U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ holomorph. Es folgt

$$|f(c)|^{-1} = |g(c)| \stackrel{\text{Satz 9.23}}{\leq} \max_{z \in \partial V} |g(z)| = \max_{z \in \partial V} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \frac{1}{\min_{z \in \partial V} |f(z)|},$$

also $|f(c)| \geq \min_{z \in \partial V} |f(z)|$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Theorem 10.7 (Open Mapping theorem). Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wenn f nirgends lokal konstant auf D ist, dann ist f offen.

Proof. Sei U eine offene Teilmenge von D und $c \in U$. Es reicht zu zeigen, dass $f(U)$ eine Kreisscheibe um $f(c)$ enthält. Da f in einer Umgebung von c nicht konstant ist (nach Voraussetzung), existiert nach Lemma 9.29 eine Kreisscheibe $\bar{V} \subset U$ mit Mittelpunkt c , so dass $f(c) \notin f(\partial V)$: In der Tat, wenn $f(c) \in f(\partial V)$ für alle Kreisscheiben V mit Mittelpunkt c , dann ist c Häufungspunkt von $\{w \in \mathbb{C} \mid f - f(c) = 0\}$. Nach Lemma 9.29 (Identitäts Satz) ist dies äquivalent zu $f - f(c) = 0$ auf D , ein Widerspruch zur Annahme, dass f nicht lokal konstant ist.

Es folgt, dass $2\delta := \min_{z \in \partial V} |f(z) - f(c)| > 0$. Wir möchten zeigen, dass

$$B_\delta(f(c)) \subset f(V) \subset f(U).$$

Sei $b \in B_\delta(f(c))$. Dann gilt

$$|f(z) - b| \stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\geq} |f(z) - f(c)| - |b - f(c)| = 2\delta - |b - f(c)| > \delta \quad \forall z \in \partial V.$$

Also folgt

$$\min_{z \in \partial V} |f(z) - b| \geq \delta \stackrel{b \in B_\delta(f(c))}{>} |f(c) - b|.$$

Mit Lemma 10.6 (angewendet auf $f - b$), dass es $\tilde{z} \in V$ gibt, so dass $f(\tilde{z}) - b = 0$.

Wir haben also gezeigt, dass $B_\delta(f(c)) \subset f(V) \subset f(U)$. □

REFERENCES

- [1] JOHN M. LEE: *Intoduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, 2nd Edition.
- [2] REINHOLD REMMERT: *Theorey of Complex Functions*. Graduate Texts in Mathematics, vol 122, Springer [2](#), [6](#), [6](#)

UNIVERSITÄT BASEL

Email address: `susanna.zimmermann@unibas.ch`