

## Лабораторная работа № 3.

### Синтез и применение КИХ-фильтров

#### Цель работы

Изучить метод синтеза КИХ-фильтров на основе частотной выборки. Применить синтезированный КИХ-фильтр для обработки сигнала.

#### Теоретические сведения

Теоретические сведения о синтезе и применении КИХ-фильтров можно найти в [1] в параграфах 3.3, 4.1, 4.2.

#### Требования к синтезируемым фильтрам

Требуемые характеристики фильтров часто определяют в частотной области в основной полосе частот. Для частотно-избирательных фильтров спецификации задаются в виде допустимых отклонений от АЧХ соответствующих идеальных фильтров. Пример такой спецификации для полосового фильтра приведен на рисунке 1: в полосе пропускания АЧХ должна удовлетворять условию  $1 - \delta_p \leq |K(\omega)| \leq 1 + \delta_p$ , а в полосе подавления  $|K(\omega)| < \delta_s$ .

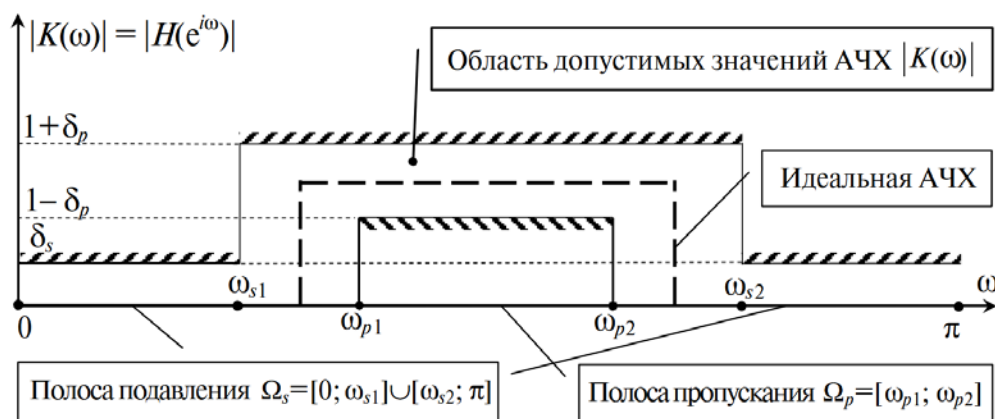


Рисунок 1. Пример задания спецификации АЧХ полосового фильтра

В данной работе для изучения частотных характеристик фильтров следует использовать нормированные частоты: для этого реальную линейную частоту  $f$  преобразуют в нормированную линейную  $\nu = f/f_d$ , где  $f_d$  — частота дискретизации. Нормированной циклической частотой тогда является  $\omega = 2\pi\nu$ .

#### КИХ-фильтр с линейной фазой I типа

К первому типу относятся фильтры четного порядка  $N = 2M$  с импульсной характеристикой  $\{h(n) = b_n\}_{n=0}^{2M}$ , симметричной относительно центрального отсчета:  $h(M+k) = h(M-k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ . ЧХ таких фильтров имеет вид

$$K(\omega) = e^{-i\omega M} A(\omega), \quad (1)$$

где тригонометрический полином

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^M a(k) \cos(\omega k), \quad (2)$$

причем  $a(0) = h(M)$ , а для  $m = 1, \dots, M$ :  $a(m) = 2h(M \pm m)$ .

### Метод синтеза КИХ-фильтров на основе частотной выборки

Задавшись некоторым порядком фильтра  $N = 2M$ , равномерно расположим в основной полосе частот узлы  $\omega_j \in [0; \pi]$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ . Для узлов  $\omega_j \in \Omega_s$  считаем значения желаемой частотной характеристики  $K_D(\omega_j) = 0$ ; для узлов  $\omega_j \in \Omega_p$  приравняем АЧХ требуемому коэффициенту передачи – обычно единице, для этого положим  $K_D(\omega_j) = 1$  (см. рисунок 1). Значения АЧХ для узлов  $\omega_j \notin (\Omega_s \cup \Omega_p)$  (в переходной полосе) считаем свободными переменными  $\{x_j = K_D(\omega_j)\}$  и подбираем итерационно их значения так, чтобы в области пропускания  $\Omega_p$  и в области подавления  $\Omega_s$ , минимизировать максимальное уклонение  $E$  полинома (2) от требуемой АЧХ  $K_D(\omega)$ :

$$E = \min_{\{x_j = K_D(\omega_j)\}} \left( \max_{\omega \in (\Omega_s \cup \Omega_p)} |K_D(\omega) - A(\omega)| \right). \quad (3)$$

Поиск значений АЧХ в переходной области сводится к некоторой задаче оптимизации, решаемой численными методами.

### Варианты заданий

Номер варианта  $v$  соответствует остатку от деления номера  $N$  студента в списке группы на 10 + 1:

$$v = (N \bmod 10) + 1.$$

№ варианта	$M$	$\Omega_p$	$\Omega_s$	$\delta_p$	$\delta_s$	$\omega_x$
1	5	$[0; 0,60\pi]$	$[0,80\pi; \pi]$	0,0125	0,015	$\{0,30\pi; 0,50\pi\}$
2	6	$[0; 0,40\pi]$	$[0,55\pi; \pi]$	0,0275	0,020	$\{0,20\pi; 0,35\pi\}$
3	7	$[0; 0,60\pi]$	$[0,70\pi; \pi]$	0,0100	0,060	$\{0,20\pi; 0,45\pi\}$
4	8	$[0; 0,35\pi]$	$[0,50\pi; \pi]$	0,0075	0,030	$\{0,15\pi; 0,30\pi\}$
5	9	$[0; 0,45\pi]$	$[0,60\pi; \pi]$	0,0150	0,045	$\{0,15\pi; 0,40\pi\}$
6	5	$[0; 0,55\pi]$	$[0,65\pi; \pi]$	0,0200	0,025	$\{0,25\pi; 0,50\pi\}$
7	6	$[0; 0,40\pi]$	$[0,55\pi; \pi]$	0,0175	0,050	$\{0,10\pi; 0,30\pi\}$
8	7	$[0; 0,50\pi]$	$[0,65\pi; \pi]$	0,0125	0,040	$\{0,20\pi; 0,45\pi\}$
9	8	$[0; 0,35\pi]$	$[0,50\pi; \pi]$	0,0250	0,020	$\{0,15\pi; 0,25\pi\}$
10	9	$[0; 0,60\pi]$	$[0,70\pi; \pi]$	0,0150	0,035	$\{0,30\pi; 0,55\pi\}$

## Задание

1. Синтезировать нерекурсивный симметричный фильтр порядка  $N = 2M$  (КИХ-фильтр с линейной фазой типа I с ЧХ (1)) с заданной в таблице вариантов полосой пропускания (см. образец в примере 4.2 [1, стр. 224]). Построить графики амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик. Сравнить полученную АЧХ с идеальной. *Для синтеза фильтра можно использовать шаблон кода `task1.m` или `task1.py`.*
2. Реализовать в MATLAB или python функцию синтеза фильтра (т.е. нахождения коэффициентов  $\{b_k\}_{k=0}^{2M}$ ) методом частотной выборки. Функция должна принимать в качестве аргументов:
  - а. Положение полосы пропускания  $\Omega_p$  проектируемого фильтра на оси  $\omega$ ;
  - б. Положение полосы подавления  $\Omega_s$  проектируемого фильтра на оси  $\omega$ ;
  - в. Параметр  $M$ .

С помощью реализованной функции синтезировать фильтр того же порядка  $N = 2M$ , что и в п. 1 задания.

Сравнить полученную АЧХ с идеальной и с АЧХ, найденной в п. 1 задания.

Для решения задачи оптимизации, возникающей при синтезе КИХ-фильтра на основе частотной выборки, можно использовать функцию **fminsearch** в MATLAB или **scipy.optimize.fmin** в python.

*Для синтеза фильтра можно использовать шаблоны кода `task2.m`, `syntez.m` или `task2.py`, `syntez.py`.*

3. Проверить, удовлетворяет ли фильтр, синтезированный в п. 2 задания, требованиям к неравномерности АЧХ в полосах пропускания и подавления при заданных параметрах  $\delta_p$  и  $\delta_s$ . Определить минимальный порядок фильтра  $N = 2M$ , удовлетворяющего данным требованиям. Построить графики АЧХ и ФЧХ синтезированного фильтра.
4. С помощью синтезированного в п.3 задания фильтра обработать сигналы  $x(n) = \sin(\omega_x n)$  для указанных в таблице вариантов значений  $\omega_x$ . Определить задержку числа отсчётов  $\alpha$  гармонического колебания на выходе фильтра по сравнению с входным воздействием.  
Для обработки сигнала с помощью фильтра можно использовать функцию **filter** в MATLAB или **scipy.signal.lfilter** в python.
5. С помощью синтезированного в п. 3 задания фильтра провести фильтрацию тестового изображения из своего варианта первой лабораторной работы. Для этого профильтровать последовательно каждую строку, а затем каждый столбец изображения. Вывести на экран отфильтрованное изображение, объяснить полученный результат.  
Для обработки изображения можно использовать функцию **lfilter** в MATLAB или **scipy.signal.lfilter** в python.

## Примечание

1. Для сравнения ЧХ синтезированных и идеальных фильтров следует построить шесть графиков:
  - а. Графики АЧХ синтезированного и идеального фильтров в одном графическом окне;
  - б. Графики АЧХ синтезированного и идеального фильтров в децибелах в одном графическом окне;
  - с. Графики ФЧХ синтезированного и идеального фильтров в одном графическом окне.
2. Чтобы построить графики АЧХ в дБ необходимо изобразить значения  $20 \lg |K(\omega)|$ . Для корректного отображения графиков значения АЧХ  $|K(\omega)| < 10^{-7}$  следует принять равными  $10^{-7}$ .

## Контрольные вопросы

1. Что такое ЛДФ?
2. Каковы основные характеристики линейных дискретных систем?
3. Как друг с другом связаны передаточная и импульсная характеристики?
4. Каков физический смысл АЧХ и ФЧХ?
5. В чем заключается задача синтеза ЛДФ?
6. В чем заключается задача оптимизации, возникающая при синтезе фильтра по методу частотной выборки?

## Литература

1. Умняшкин С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов: учебное пособие. – Москва: Техносфера, 2024. – 552 с.