

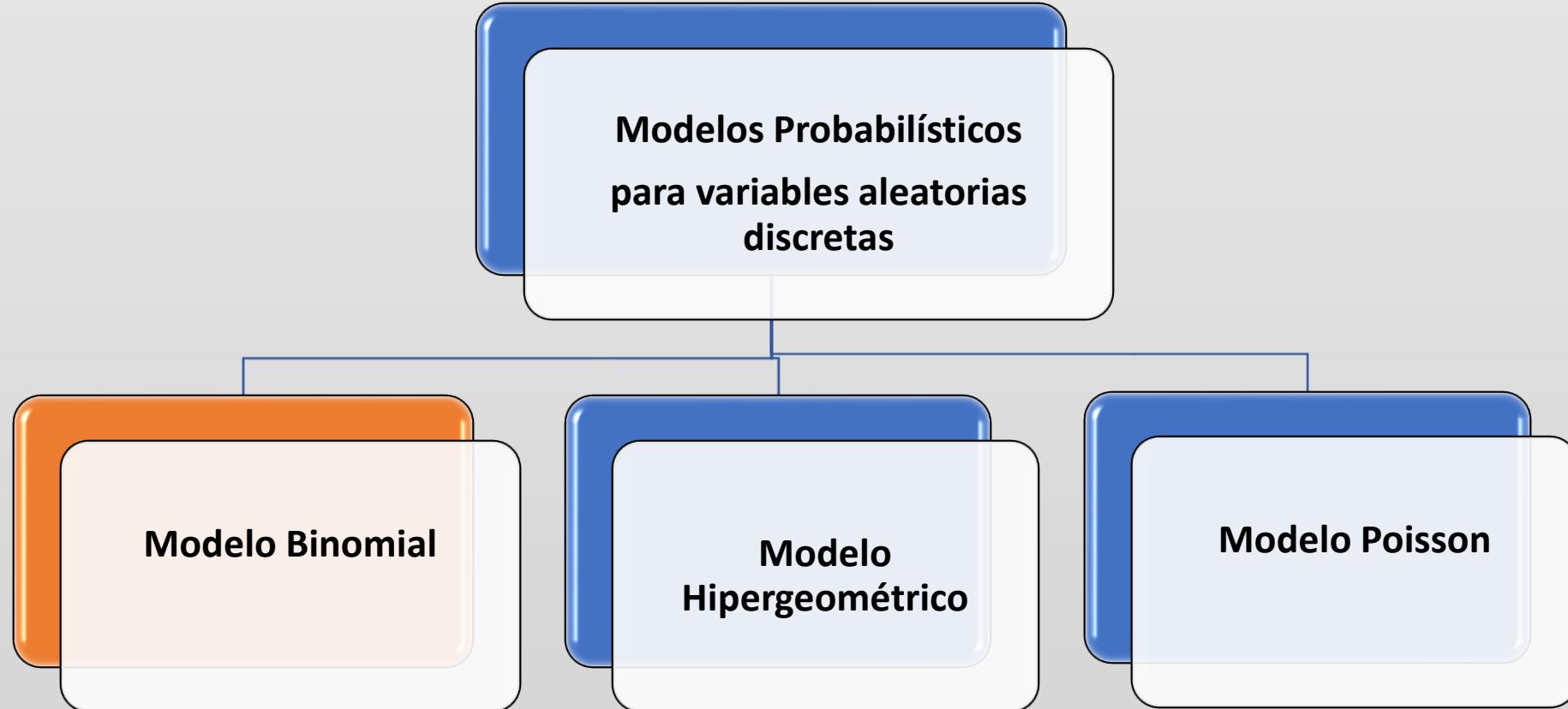
**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL**



**TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN  
A DISTANCIA**

**PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**

**Unidad 3: Variables Aleatorias y sus distribuciones  
Modelo Binomial**



## Modelo Binomial: Características

- El experimento aleatorio o prueba de Bernoulli se repite **n** veces.
- Prueba: Seleccionar aleatoriamente un elemento de una población dicotomizada.
- Por cada prueba las probabilidades **P** y **Q** permanecen **constantes**.  
Las probabilidades permanecen **constantes** en los siguientes casos:
  - ✓ Población Infinita o
  - ✓ Muestreo con reposición o
  - ✓ Muestreo sin reposición y en la muestra se incluye al 5% de los elementos que forman la población ( $n/N < 0,05$ )  
siendo **n**: tamaño de la muestra o cantidad de veces que se repite la prueba y  
**N**: tamaño de la población  
en consecuencia las pruebas son independientes.
- **X**: cantidad de éxitos que pueden obtenerse al repetir **n** veces la prueba.
- Los posibles valores de la variable aleatoria **X** varían de 0 a **n**
- La variable aleatoria **X** tiene **n + 1** posibles valores

## Modelo Binomial

### Función de Cuantía

$$P(x = xi) = C_n^{xi} * P^{xi} * (1 - P)^{n-xi}$$

Parámetros del Modelo Binomial: Dos parámetros

n: cantidad de veces que se repite la prueba

P: probabilidad de éxito

xi: NO es un parámetro, es el valor de la variable para el cual debe calcularse la probabilidad

Un sistema tiene **1000 pruebas automáticas** realizadas. La **tasa histórica de falla es del 5%**. Se examina una muestra aleatoria de **15 pruebas distintas**.

¿Cuál es la probabilidad de falle **a lo sumo una prueba**?

Población: **1000 pruebas automáticas**

Experimento aleatorio: Seleccionar aleatoriamente una prueba automática

El experimento aleatorio o prueba se repite **15 veces** por lo tanto **n = 15**

**x: cantidad de pruebas automáticas que pueden fallar en la muestra de 15**

Pruebas **distintas**      Muestreo sin reposición

Población Finita (**N= 1000**) y **n = 15** →  $n/N = 15/1000$  →  $n/N = 0,015$       ( $n/N < 0,05$ )

Muestreo sin reposición y en la muestra se incluye a menos del 5% de los elementos que forman la población ( $n/N < 0,05$ )

Por lo tanto por cada prueba las probabilidades **P** y **Q** permanecen **constantes** → **pruebas independientes** → se utilizará el **Modelo Binomial**

Parámetros: **n = 15**    **P = 0,05**

Un sistema tiene **1000 pruebas automáticas**. La **tasa histórica de falla es del 5%**. Se examina una **muestra de 15 pruebas distintas**.

¿Cuál es la probabilidad de fallar **a lo sumo una prueba**?

Parámetros del Modelo Binomial:  **$n = 15$**      **$P = 0,05$**

Característica bajo estudio: **prueba que falla (éxito)** por lo tanto  **$P = 0,05$**

$$P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1)$$

$$P(x = xi) = C_n^{xi} * P^{xi} * (1 - P)^{n-xi}$$

$$P(x \leq 1) = C_{15}^0 * 0,05^0 * (1 - 0,05)^{15-0} + C_{15}^1 * 0,05^1 * (1 - 0,05)^{15-1}$$

$$P(x \leq 1) = 0,4633 + 0,3657$$

$$P(x \leq 1) = 0,8290$$

¿Cuál es la probabilidad de falle a lo sumo una prueba?

¿Cuál es la probabilidad de falle como máximo una prueba?

¿Cuál es la probabilidad de falle 1 o menos pruebas?



$$P(x \leq 1)$$



n	x	Función de Probabilidad Binomial (Puntual)										$P(x=x_i   n, P)$
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
4	0	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611	
5	0	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222	
6	0	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833	
7	0	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095	
8	0	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833	
9	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222	
10	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611	
11	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222	
12	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056	
13	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009	
14	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005	
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032	

$$P(x \leq 1) = P(x=0) + P(x=1)$$

$$P(x \leq 1) = 0,4633 + 0,3658$$

$$P(x \leq 1) = 0,8291$$

¿Cuál es la probabilidad de falle a lo sumo una prueba?

¿Cuál es la probabilidad de falle como máximo una prueba?  $\rightarrow$

$$P(x \leq 1)$$

¿Cuál es la probabilidad de falle 1 o menos pruebas?



15	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036

n	x	Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)										$P(x \leq x_i   n, P)$
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000	
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964	

$$P(x \leq 1) = 0,8290$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen menos de 2 pruebas?

¿Cuál es la probabilidad de falle **como máximo una** prueba? 

¿Cuál es la probabilidad de falle **1 o menos** pruebas?

$$P(x < 2) = P(x \leq 1)$$

$$P(x < a) = P[x \leq (a-1)]$$



14	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036

n	x	Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)										$P(x \leq x_i   n, P)$
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000	
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964	

$$P(x \leq 1) = 0,8290$$

**¿Cuál es la probabilidad de fallen por lo menos 2 pruebas?**

$$\begin{aligned} P(x \geq 2) &= P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + \\ &P(x=6) + P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) \\ &+ P(x=11) + P(x=12) + P(x=13) + P(x=14) + \\ &P(x=15) \\ P(x \geq 2) &= 0,1348 + 0,0307 + 0,0049 + 0,0006 \\ P(x \geq 2) &= 0,1710 \end{aligned}$$



Un sistema tiene **1000 pruebas automáticas**. La **tasa histórica de falla es del 5%**. Se examina una **muestra de 15 pruebas distintas**.

¿Cuál es la probabilidad de fallen **por lo menos 2 pruebas**?

¿Cuál es la probabilidad de falle **como mínimo 2 pruebas**?

¿Cuál es la probabilidad de falle **2 o más pruebas**?



$$P(x \geq 2)$$

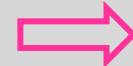
$$P(x \leq 1) + P(x \geq 2) = 1$$



Probabilidades complementarias

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) + P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) + P(x=11) + P(x=12) + P(x=13) + P(x=14) + P(x=15) = 1$$

$$P(x \leq 1) + P(x \geq 2) = 1$$



$$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1)$$

$$P(x \geq a) = 1 - P[x \leq (a-1)]$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen **por lo menos 2** pruebas?

¿Cuál es la probabilidad de falle **como mínimo 2** pruebas?

¿Cuál es la probabilidad de falle **2 o más** pruebas?



$$P(x \geq 2)$$



15	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005	
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037	
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176	
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592	
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509	
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036	

TABLA II

n	x	Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)										$P(x \leq x_i   n, P)$
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000	
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964	

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1)$$

$$= 1 - 0,8290$$

$$P(x \geq 2) = 0,1710$$

¿Cuál es la probabilidad de falle más de 1 prueba?  
¿Cuál es la probabilidad de fallen 2 o más pruebas?

$$P(x > 1) = P(x \geq 2)$$



15	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005	
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037	
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176	
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592	
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509	
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036	

n	x	TABLA II Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)									
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964

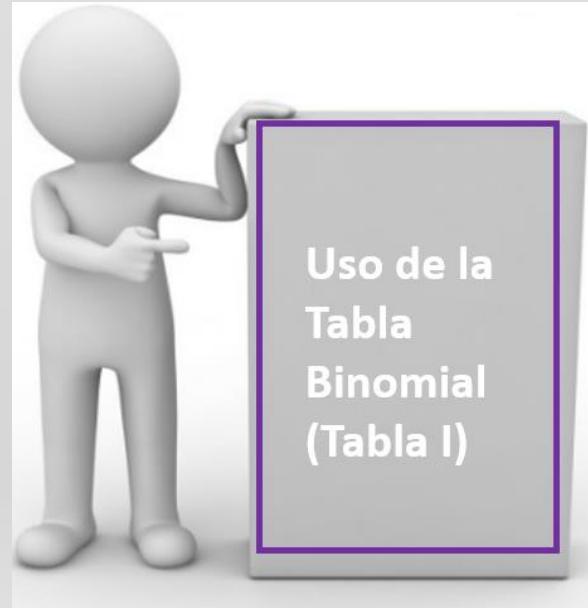
$$\begin{aligned}P(x \geq 2) &= 1 - P(x \leq 1) \\&= 1 - 0,8290 \\P(x \geq 2) &= 0,1710\end{aligned}$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen entre 3 y 6 pruebas?



**P(3 ≤ x ≤ 6)**

$$\begin{aligned} P(3 \leq x \leq 6) &= P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) \\ &= 0,0307 + 0,0049 + 0,0006 + 0 \\ P(3 \leq x \leq 6) &= 0,0362 \end{aligned}$$



n	x	Función de Probabilidad Binomial (Puntual)										P(x=x <sub>i</sub>   n   P)
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611	
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222	
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833	
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095	
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833	
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222	
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611	
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222	
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056	
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009	
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005	
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032	
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139	
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417	
	5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916	
	6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527	
	7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964	

¿Cuál es la probabilidad de fallen entre 3 y 6 pruebas?

$$\begin{aligned} P(3 \leq x \leq 6) &= P(x \leq 6) - P(x \leq 2) \\ &= [ P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) ] - [ P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) ] \\ &= P(\cancel{x=0}) + P(\cancel{x=1}) + P(\cancel{x=2}) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) - P(\cancel{x=0}) - P(\cancel{x=1}) - P(\cancel{x=2}) \\ &= P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) \\ &= 0,0307 + 0,0049 + 0,0006 + 0 \\ P(3 \leq x \leq 6) &= 0,0362 \end{aligned}$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen entre 3 y 6 pruebas?

$$\begin{aligned}P(3 \leq x \leq 6) &= P(x \leq 6) - P(x \leq 2) \\P(3 \leq x \leq 6) &= 1 - 0,9638 \\P(3 \leq x \leq 6) &= 0,0362\end{aligned}$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P[x \leq (a-1)]$$



15	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036

n	x	Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)									$P(x \leq x_i   n, P)$
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003

**¡Muchas Gracias!**