

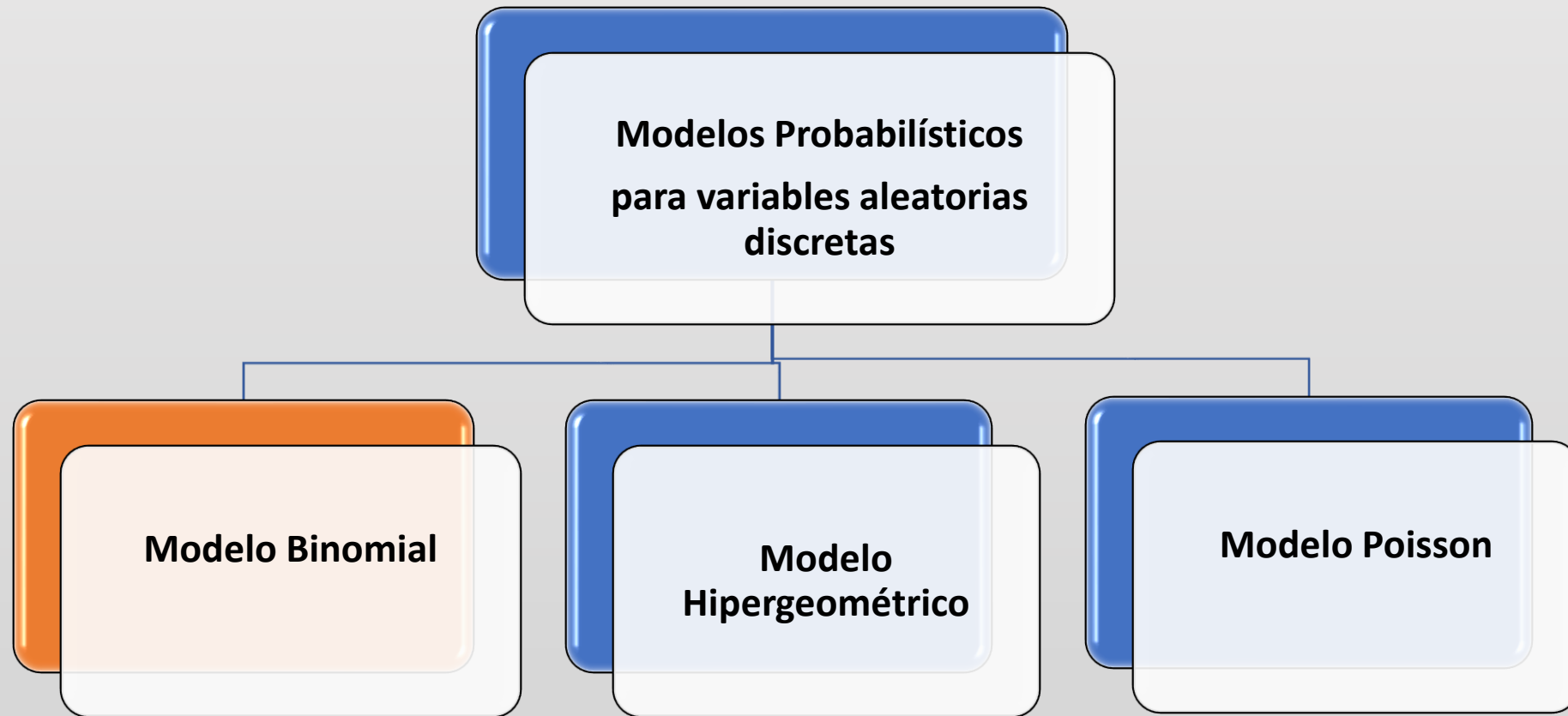
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL



**TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN
A DISTANCIA**

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

**Unidad 3: Variables Aleatorias y sus distribuciones
Modelo Binomial**



Modelo Binomial: Características

- El experimento aleatorio o prueba de Bernoulli se repite n veces.
- Prueba: Seleccionar aleatoriamente un elemento de una población dicotomizada.
- Por cada prueba las probabilidades P y Q permanecen **constantes**.
Las probabilidades permanecen **constantes** en los siguientes casos:
 - ✓ **Población Infinita o**
 - ✓ **Muestreo con reposición o**
 - ✓ **Muestreo sin reposición y en la muestra se incluye a lo sumo al 5% de los elementos que forman la población ($n/N \leq 0,05$)**
siendo n : tamaño de la muestra o cantidad de veces que se repite la prueba y
 N : tamaño de la población
en consecuencia las pruebas son independientes.
- **X : cantidad de éxitos que pueden obtenerse al repetir n veces la prueba.**
- Los posibles valores de la variable aleatoria X varían de 0 a n
- La variable aleatoria X tiene $n + 1$ posibles valores

Modelo Binomial

Función de Cuantía

$$P(x = xi) = C_n^{xi} * P^{xi} * (1 - P)^{n-xi}$$

Parámetros del Modelo Binomial: Dos parámetros

n: cantidad de veces que se repite la prueba

P: probabilidad de éxito

xi: NO es un parámetro, es el valor de la variable para el cual debe calcularse la probabilidad

Un sistema tiene **1000 pruebas automáticas** realizadas. La **tasa histórica de falla es del 5%**. Se examina una **muestra aleatoria de 15 pruebas distintas**.

¿Cuál es la probabilidad de falle **a lo sumo una** prueba?

Población: **1000 pruebas automáticas**

Experimento aleatorio: Seleccionar aleatoriamente una prueba automática

El experimento aleatorio o prueba se repite **15** veces por lo tanto **$n = 15$**

x : cantidad de pruebas automáticas que pueden fallar en la muestra de 15

Pruebas distintas Muestreo sin reposición

Población Finita (**$N = 1000$**) y **$n = 15$** \longrightarrow **$n/N = 15/1000$** \longrightarrow **$n/N = 0,015$** (**$n/N < 0,05$**)

Muestreo sin reposición y en la muestra se incluye a menos del 5% de los elementos que forman la población ($n/N < 0,05$)

Por lo tanto por cada prueba las probabilidades **P** y **Q** permanecen **constantes** \longrightarrow pruebas independientes \longrightarrow se utilizará el Modelo Binomial

Parámetros: **$n = 15$** **$P = 0,05$**

Un sistema tiene 1000 pruebas automáticas. La tasa histórica de falla es del 5%. Se examina una muestra de 15 pruebas distintas.

¿Cuál es la probabilidad de falle a lo sumo una prueba?

Parámetros del Modelo Binomial: $n = 15$ $P = 0,05$

Característica bajo estudio: prueba que falla (éxito) por lo tanto $P = 0,05$

$$P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1)$$

$$P(x = xi) = C_n^{xi} * P^{xi} * (1 - P)^{n-xi}$$

$$P(x \leq 1) = C_{15}^0 * 0,05^0 * (1 - 0,05)^{15-0} + C_{15}^1 * 0,05^1 * (1 - 0,05)^{15-1}$$

$$P(x \leq 1) = 0,4633 + 0,3657$$

$$P(x \leq 1) = 0,8290$$

¿Cuál es la probabilidad de falle **a lo sumo una** prueba?

¿Cuál es la probabilidad de falle **como máximo una** prueba?

¿Cuál es la probabilidad de falle **1 o menos** pruebas?



$$P(x \leq 1)$$



TABLA I

Función de Probabilidad Binomial (Puntual)

n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032

$$P(x \leq 1) = P(x=0) + P(x=1)$$

$$P(x \leq 1) = 0,4633 + 0,3658$$

$$P(x \leq 1) = 0,8291$$

¿Cuál es la probabilidad de falle **a lo sumo una** prueba?

¿Cuál es la probabilidad de falle **como máximo una** prueba?

¿Cuál es la probabilidad de falle **1 o menos** pruebas?

$$P(x \leq 1)$$



14	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036

TABLA II											
Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)											
n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964

$$P(x \leq 1) = 0,8290$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen menos de 2 pruebas?

¿Cuál es la probabilidad de falle **como máximo una** prueba? ➡

¿Cuál es la probabilidad de falle **1 o menos** pruebas?

$$P(x < 2) = P(x \leq 1)$$

$$P(x < a) = P[x \leq (a-1)]$$



14	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036

TABLA II											
Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)										$P(x \leq x_i \text{ n } P)$	
n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964

$$P(x \leq 1) = 0,8290$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen **por lo menos 2** pruebas?

$$P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) + P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) + P(x=11) + P(x=12) + P(x=13) + P(x=14) + P(x=15)$$

$$P(x \geq 2) = 0,1348 + 0,0307 + 0,0049 + 0,0006$$

$$P(x \geq 2) = 0,1710$$



Función de Probabilidad Binomial (Puntual)										P(x=x; n P)	
n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
15	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916	
6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527	
7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964	
8	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964	
9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527	
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916	
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417	
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139	
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032	
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	

Un sistema tiene **1000 pruebas automáticas**. La **tasa histórica de falla es del 5%**. Se examina una **muestra de 15 pruebas distintas**.

¿Cuál es la probabilidad de fallen **por lo menos 2** pruebas?

¿Cuál es la probabilidad de falle **como mínimo 2** pruebas?

¿Cuál es la probabilidad de falle **2 o más** pruebas?



$$P(x \geq 2)$$

$$P(x \leq 1) + P(x \geq 2) = 1$$



Probabilidades complementarias

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) + P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) + P(x=11) + P(x=12) + P(x=13) + P(x=14) + P(x=15) = 1$$

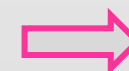
$$P(x \leq 1) + P(x \geq 2) = 1$$



$$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1)$$

$$P(x \geq a) = 1 - P[x \leq (a-1)]$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen **por lo menos 2** pruebas?
 ¿Cuál es la probabilidad de falle **como mínimo 2** pruebas?
 ¿Cuál es la probabilidad de falle **2 o más** pruebas?



$$P(x \geq 2)$$



	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036

TABLA II

Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)		$P(x \leq x_i \mid n, P)$									
n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1)$$

$$= 1 - 0,8290$$

$$P(x \geq 2) = 0,1710$$

¿Cuál es la probabilidad de falle más de 1 prueba?
¿Cuál es la probabilidad de fallen **2 o más** pruebas?



$$P(x > 1) = P(x \geq 2)$$



	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036

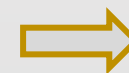
TABLA II											
Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)										$P(x \leq x_i \text{ n } P)$	
n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1)$$

$$= 1 - 0,8290$$

$$P(x \geq 2) = 0,1710$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen entre 3 y 6 pruebas?



$$P(3 \leq x \leq 6)$$

$$P(3 \leq x \leq 6) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$

$$= 0,0307 + 0,0049 + 0,0006 + 0$$

$$P(3 \leq x \leq 6) = 0,0362$$



Función de Probabilidad Binomial (Puntual)											P(x=x _i n P)
n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
15	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
	5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916
	6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527
	7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964

¿Cuál es la probabilidad de fallen **entre 3 y 6** pruebas?

$$P(3 \leq x \leq 6) = P(x \leq 6) - P(x \leq 2)$$

$$= [P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)] - [P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)]$$

$$= P(\cancel{x=0}) + P(\cancel{x=1}) + P(\cancel{x=2}) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) - P(\cancel{x=0}) - P(\cancel{x=1}) - P(\cancel{x=2})$$

$$= P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$

$$= 0,0307 + 0,0049 + 0,0006 + 0$$

$$P(3 \leq x \leq 6) = 0,0362$$

¿Cuál es la probabilidad de fallen entre 3 y 6 pruebas?

$$P(3 \leq x \leq 6) = P(x \leq 6) - P(x \leq 2)$$

$$P(3 \leq x \leq 6) = 1 - 0,9638$$

$$P(3 \leq x \leq 6) = 0,0362$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P[x \leq (a-1)]$$



15	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036

TABLA II

Función de Probabilidad Binomial (Acumulada)

$P(x \leq x_i \mid n, P)$

n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
15	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003

¡Muchas Gracias!