UNIDAD N° 2

PROBABILIDAD

Combinatoria. Variaciones. Permutaciones.
Combinaciones. Diagramas.

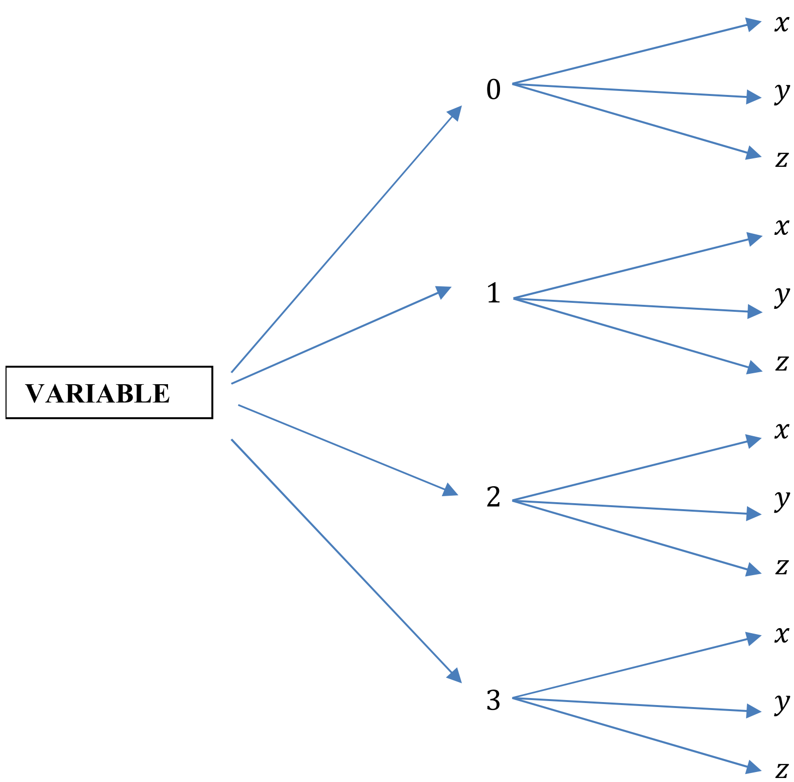
UNIDAD N° 2: PROBABILIDAD

COMBINATORIA

En esta unidad será necesario contar y, en ocasiones, con un gran número de datos. Estos conteos muchas veces pueden ser realizados de forma artesanal, como en el ejemplo dado a continuación, mediante un diagrama de árbol.

Ejemplo:

Es necesario trabajar en un lenguaje donde una variable debe tener dos caracteres. Los caracteres deben ser, uno numérico (0,1,2,3) y el otro literal (x, y, z). Los datos se representan en un diagrama de árbol



Se tiene un total de $4x3 = 12$ formas distintas de nombrar a la variable. En general, para un número dado de requisitos que pueden darse de k_i formas, se tiene que la cantidad total de posibilidades estará dada por el producto: $k_1 x k_2 x \ldots\ x k_i$.

A pesar de que estos diagramas tienen una gran utilidad, son difíciles de realizar cuando se maneja un número mayor de datos. Por este motivo, es conveniente sistematizar los conteos mediante técnicas que permiten agrupar, ordenar y seleccionar elementos de un conjunto considerando ciertas características.

PERMUTACIONES

Dado un conjunto de $\boldsymbol{n}$ elementos todos distintos entre sí, las **permutaciones** son todas las formas posibles en los que se pueden ordenar dichos elementos con las siguientes condiciones:

- Se utilizan todos los elementos.
- Cada elemento puede ser elegido sólo una vez.
- El cambio de lugar de uno o más elementos, genera agrupamientos distintos.

Ejemplo:

¿Cuántas contraseñas distintas de 5 letras se pueden formar utilizando las 5 vocales?

Si bien es posible realizar un diagrama de árbol este tendría un gran número de ramas, ya que se tienen 5 posibilidades (a, e, i, o, u) para la primera letra y luego una menos para cada una de las siguientes.

$$\underline{\mathbf{5}} \cdot \underline{\mathbf{4}} \cdot \underline{\mathbf{3}} \cdot \underline{\mathbf{2}} \cdot \underline{\mathbf{1}}$$

Cada número representa el número de letras disponibles para ocupar cada posición, con un total de $\mathbf{5}! = \mathbf{5}\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{4}\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{3}\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{2}\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{1} = \mathbf{120}$, contraseñas posibles.

Las permutaciones se simbolizan como $\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{n}!$[1], donde $\boldsymbol{n}!\,(n\ factorial)$ es un número natural que resulta del producto de: $n.(n-1).(n-2) \ldots 1$; siendo, por definición, $0! = 1$.

[1] En la calculadora se puede calcular mediante $x!$ o bien $n!$.

VARIACIONES SIMPLES

En las **variaciones simples** se consideran todas las posibles agrupaciones que se pueden formar de un grupo de $\boldsymbol{n}$ elementos distintos tomados de a $\boldsymbol{k}$ elementos, con $k \leq n$ (en particular sí $k = n$ se considera una permutación). Esto se simboliza $\boldsymbol{V_{n,k}}$ y se calcula mediante:

$$\boldsymbol{V_{n,k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k})!}$$

Y tienen las siguientes características:

- No se utiliza el total de elementos dado que k es menor a n.
- Cada elemento puede ser elegido sólo una vez.
- Importa el orden, el cambio de lugar de uno o más elementos, genera agrupamientos distintos.

Ejemplo:

Para generar una clave numérica de 4 dígitos se cuenta con los números del 1 al 9. ¿Cuántas claves distintas se pueden generar si los números **no pueden repetirse**?

Se calculan las variaciones de 9 elementos tomados de a 4,

$$V_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!} = 3.024$$

Es posible formar 3.024 claves distintas[2].

VARIACIONES CON REPETICIÓN

Son aquellas variaciones en las que los elementos **se pueden repetir,** es decir que pueden ser elegidos varias veces. Se simbolizan de igual forma que las variaciones simples, pero se agrega un apóstrofe y se calculan mediante:

[2] En la calculadora está disponible mediante la tecla nPr.

$$\boldsymbol{V'_{n,k} = n^k}$$

Tienen las siguientes características:

- No se utiliza el total de elementos.
- Cada elemento puede ser elegido más de una vez.
- Importa el orden, el cambio de lugar de uno o más elementos, genera agrupamientos distintos.

Ejemplo:

Retomando el ejemplo anterior, en el cual se contaba con los números del 1 al 9 para generar una clave numérica de 4 dígitos, pero ahora, considerando que los números **se pueden repetir.** ¿Cuántas claves distintas se pueden generar?

$$V'_{9,4} = 9^4 = 6.561$$

Es posible generar 6.561 claves distintas.

COMBINACIONES

Las **combinaciones** consideran todas las posibles agrupaciones que se pueden formar de un grupo de $\boldsymbol{n}$ elementos distintos tomados de $\boldsymbol{k}$, teniendo en cuenta que:

- Cada elemento puede ser elegido sólo una vez.
- No importa el orden, el cambio de lugar de uno o más elementos, no genera agrupamientos distintos.
- Un agrupamiento es distinto a otro si tiene al menos un elemento diferente.

Las combinaciones de n elementos tomados de a k, se calculan como:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Ejemplo:

En una heladería ofrecen sólo siete sabores de helados: frutilla, chocolate, coco, ananá, dulce de leche, vainilla y sambayón. ¿De cuántas formas se puede pedir un cuarto de helado con 3 sabores?

$$C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

Es posible pedir 35 cuartos de helado distintos[3].

Uno de los inconvenientes de este tema es diferenciar las variaciones simples de las combinaciones. Por eso suele realizarse la pregunta **¿importa el orden?**

- Si el orden importa, es una variación simple.
- Si el orden no importa, es una combinación.

[3] En la calculadora, es posible realizar el cálculo con la tecla nCr.