一阶逻辑

1.

(4)每列火车都比某些汽车要快

F(x):x 是火车 G(x):x是汽车 H(x,y):x比y快

∀x(F(x)→ ∃y(G(y)∧H(x,y)))

(5)某些汽车比所有火车都慢

F(x):x 是火车 G(x):x是汽车 H(x,y):x比y慢

∃x(G(x)∧∀y(F(y)→H(x,y)))

(6)每位父亲都喜爱自己的孩子

F(x):x是父亲 G(x):x是孩子 H(x,y):x喜爱y L(x,y):y是x的孩子

∀x∀y(F(x)∧G(y)∧L(x,y)→H(x,y))

(7)对于任意给定的正实数，都存在比它大的实数

F(x):x是实数 G(x,y):x>y

∀x(F(x)∧G(x,0)→∃y(F(y)∧(y,x)))

课本例题2.5

(1)所有的兔子比所有的乌龟跑得快

F(x):x是兔子 G(x):x是乌龟 H(x,y):x比y跑的快

∀x∀y(F(x)∧G(y)→H(x,y))

(2)有的兔子比所有的乌龟跑得快

$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

(3)不存在同样高的两个人

F(x):x是人 G(x,y):x y同样高 **H(x,y):x!=y**

$\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\wedge H(x,y)\rightarrow \neg G(x,y))$

2.

(4)$\forall x\forall y\exists z(x-y=z)$

对于任意的x,y，存在z，可满足x-y=z成立

为真

(8)$\exists x\forall y(x+y=2y)$

有的x等于任意的y

3.

(3)$F(z)\rightarrow(\neg\forall x\forall yG(x,y,z))$

指导变项为x,y

G(x,y,z)中的x是约束的

G(x,y,z)中的y是约束的

F(z)和G(x,y,z)中的z是自由的

6.

给定解释I如下:

个体域D={2,3},f(2)=3,f(3)=2,F(2,2)=0,F(2,3)=0,F(3,2)=1,F(3,3)=1

求下列各式在I下的真值

$\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$

x=2,y=2时,F(2,2)=0，蕴含式前件为假，整体为真

x=2,y=3时,同理为真

x=3,y=2时，F(3,2)=1, f(x)=2,f(y)=3,F(f(x),f(y))=F(2,3)=0 为假

故$\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$为假

9.

设个体域D={a,b,c}，消去下列各式中的量词

在有限个体域时中消去量词等值式

(2)$\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\exists yG(y)$ ($\exists yG(y)$中不含约束变项x)

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$ (存在量词的消去量词等值式)

$\Leftrightarrow (F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$ (全称量词的消去量词等值式)

(4)$\exists x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(\neg F(x)\vee G(y))$ (蕴含等值式)

$\Leftrightarrow \exists x(\neg F(x)\vee \exists yG(y))$ ($\neg F(x)$中不含约束变项y)

$\Leftrightarrow \exists x\neg F(x)\vee \exists yG(y)$ ($\exists yG(y)$中不含约束变项x)

$\Leftrightarrow \neg \forall xF(x)\vee \exists yG(y)$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \neg(F(a)\wedge F(b)\wedge f(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$ (消去量词等值式)

10.

给出下列公式的类型

(4)$\neg F(x)\rightarrow(F(x)\rightarrow\forall yG(x,y))$

$p=F(x)$ $q=\forall yG(x,y)$

运用代换实例可转换为

$\Leftrightarrow \neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow \neg p\rightarrow(\neg p\vee q)$

$\Leftrightarrow p\vee\neg p\vee q$

$\Leftrightarrow 1$

12.

证明$F(x)\rightarrow\forall xF(x)$不是永真式

个体域为1,2,3

F(x):x为奇数

$\Leftrightarrow F(x)\rightarrow(F(1)\wedge F(2)\wedge F(3))$ (量词消去等值式)

当x=1时，蕴含式前件为真，后件为假

公式为假，故不是永真式

13.

求下列各式的前束范式

(1)$(\neg \exists xF(x)\vee \forall yG(y)) \wedge \forall zH(z)$

$\Leftrightarrow (\forall x\neg F(x)\vee\forall yG(y))\wedge\forall zH(z)$

$\Leftrightarrow$ $(\forall x(\neg F(x)\vee\forall yG(y)))\wedge \forall zH(z)$ (辖域扩张)

$\Leftrightarrow$ $\forall x\forall y(\neg F(x)\vee G(y))\wedge\forall zH(z)$ (辖域扩张)

$\Leftrightarrow\forall z\ (\forall x\forall y(\neg F(x)\vee G(y))\wedge H(z))$ (辖域扩张)

$\Leftrightarrow$ $\forall z\ \forall x(\forall y(\neg F(x)\vee G(y)\wedge H(z))$ (辖域扩张)

$\Leftrightarrow$ $\forall z\ \forall x\forall y((\neg F(x)\vee G(y))\wedge H(z))$ (辖域扩张)

(2)$\exists xF(x)\vee \forall xG(x)\rightarrow\forall x\exists yH(x,y)$

$\exists xF(x)\vee \forall zG(z)\rightarrow\forall m\exists yH(m,y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow$ $\exists x\exists z(G(z)\vee F(x))\rightarrow \forall m\exists yH(m,y)$ (两次辖域扩张)

$\Leftrightarrow$ $\forall x(\exists z(G(z)\vee F(x))\rightarrow\forall m\exists yH(m,y))$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\ \forall y(G(z)\vee F(x)\rightarrow\forall m\exists yH(m,y))$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\ \forall y(\neg\ \forall m\exists yH(m,y)\rightarrow\neg(G(z)\vee F(x)))$ (假言易位)

$\Leftrightarrow$ $\forall x\ \forall y(\exists m\neg\exists yH(m,y)\rightarrow\neg(G(z)\vee F(x)))$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\ \forall y(\exists m\forall\ y\neg\ H(m,y)\rightarrow\neg(G(z)\vee F(x)))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow$ $\forall x\forall y\forall m\exists y(\neg H(m,y)\rightarrow\ \neg(G(z)\vee F(x)))$ (两次辖域扩张)

$\Leftrightarrow$ $\forall x\forall y\forall m\exists y(G(z)\vee F(x)\rightarrow H(m,y))$ (假言易位)

一阶逻辑推理理论

12.

指出下面推理中的错误

(6)

5.使$F(x)\wedge G(x)$成真的x不一定使$H(x)\wedge R(x)$成真

13.

(1)

前提:$\exists xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$, $\exists xF(x)$

结论:$\exists xR(x)$

(1) $\exists xF(x)$ (前提引入)

(2)$F(c)$ (EI规则)

(3)$\exists xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$ (前提引入)

(4)$\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$ (假言推理)

(5)$F(c)\vee G(c)\rightarrow R(c)$ (UI规则)

(6)$F(c)\vee\ G(c)$ (2附加)

(7)$R(c)$ (5假言推理)

(8)∃xF(x) (EG规则)

15.

每个在银行存款的人都能得到利息，所以，若没有人得到利息，则没有人在银行存款

F(x):x在银行存款 G(x):x得到利息

前提: ∀x(F(x)→G(x))

结论:¬∀xG(x)→¬∀xF(x)

(1)¬∀xG(x) (附加前提引入)

(2)∃x¬G(x) (量词否定等值式)

(3)¬G(c) (EI规则)

(4)∀x(F(x)→G(x)) (前提引入)

(5) ∀x(¬G(x)→¬F(x)) (假言易位)

(6)¬G(c)→ ¬F(c) (UI规则)

(7)¬ F(c) (假言推理)

(8)∃x¬F(x) (EG规则)

(9)¬ ∀xF(x) (量词否定等值式)