代数系统的一般概念

2判断二元运算是否封闭

(2) 封闭

(4) 封闭

(8) 封闭

3

(2)不符合交换律、适合结合律。不符合分配律，分配律是两个二元运算之间的

(4) 不符合交换律，符合结合律。不符合分配律，分配律是两个二元运算之间的

(8) 适合交换律、结合律。符合分配律，乘法对加法适合分配律

4

(2) 无单位元（仅右单位元1），无零元，显然可得，无逆元

(4) 单位元为nxn的单位矩阵，零元为nxn的零矩阵。有逆矩阵的矩阵A的逆元为A^{-1}

(8) 加法：无单位元，无零元，显然可得，无逆元 //乘法：单位元为1,无零元，无逆元

8

(1)

1. 满足交换律：*、 ○、●
2. 满足结合律：*、○、● 、□
3. 幂等：□

(2)

*：没有单位元，零元为a，无逆元

○： 单位元为a，无零元，a的逆元为a，b的逆元为b

● ：无单位元，无零元，无逆元

□： 无单位元(左单位元为a)，无零元(右零元为b)，无逆元

11

(2) S2构成V的子代数，S2对+,● 都是封闭的

12

设V1=({1,2,3},°，1)，其中x°y表示取x和y之中较大的数，V2=({5,6},*,6),其中x*y表示取x和y之中较小的数.

(1) 求出V1的所有子代数，其中哪些是平凡的子代数？哪些是真子代数？

(2)求积代数y,×y,给出积代数(V,×V,·,)的运算表和代数常数k,并说明k是什么特异元素

(1)

子代数系统的B的条件：

1. B⊆S
2. B∉ ∅
3. B和S含有相同的子代数常数
4. B对V中所有运算封闭

1为单位元

B1={1},B2={1,2},B3={1,3},B4={1,2,3}

其中平凡子代数为：B1,B4

真子代数为：B2,B3

(2)

设$V_1 \times V_2 =< S1 \times S2, \bullet, k >$

$S_1 \times S_2 = \{< 1,5 >, < 1,6 >, < 2,5 >, < 2,6 >, < 3,5 >, < 3.6 >\}$

$< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 > \in S_1 \times S_2$

$< x_1, y_1 > \bullet < x_2, y_2 > =< x1 \circ x_2, y_1 * y_2 >$

运算表：

$$\begin{bmatrix} & < 1,5 > & < 1,6 > & < 2,5 > & < 2,6 > & < 3,5 > & < 3.6 > \\ < 1,5 > & < 1,5 > & < 1,5 > & < 2,5 > & < 2,5 > & < 3,5 > & < 3,5 > \\ < 1,6 > & < 1,5 > & < 1,6 > & < 2,5 > & < 2,6 > & < 3,5 > & < 3,6 > \\ < 2,5 > & < 2,5 > & < 2,5 > & < 2,5 > & < 2,5 > & < 3,5 > & < 3,5 > \\ < 2,6 > & < 2,5 > & < 2,6 > & < 2,5 > & < 2,6 > & < 3,5 > & < 3,6 > \\ < 3,5 > & < 3,5 > & < 3,5 > & < 3,5 > & < 3,5 > & < 3,5 > & < 3,5 > \\ < 3,6 > & < 3,5 > & < 3,6 > & < 3,5 > & < 3,6 > & < 3,5 > & < 3,6 > \end{bmatrix} \tag{1}$$

$k =< 1,6 >$

k是单位元

14

若ψ为V_1到V_2的同态 (2)

$V1 =< S_1, \circ > \quad (V)_2 =< S_2, * >$

则$\psi(x \circ y) = \psi(x) * \psi(y)$

普通加法和矩阵加法

$\psi(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \psi(bi) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$

$\psi(a) + \psi(b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$(+为矩阵加法)

故可知$\psi(a + bi) = \psi(a) + \psi(bi)$(第一个 + 为普通加法，第二个为矩阵加)

普通乘法和矩阵乘法 (3)

$\psi(a * bi) = \begin{bmatrix} 0 & a * b \\ -a * b & 0 \end{bmatrix}$

$\psi(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

$\psi(bi) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$

$\psi(a) * \psi(b) = \begin{bmatrix} 0 & a * b \\ -a * b & 0 \end{bmatrix}$

可知$\psi(a * bi) = \psi(a) * \psi(bi)$(第一个 * 为普通乘法，第二个 * 为矩阵乘法)

故可知ψ为V_1到V_2的同态

不为单同态，因为对于*来说，$< a, b >$和$< b, a >$的结果相同$\psi(a * bi) = \psi(a) * \psi(bi) = \psi(b * ai)$

为满同态

不为同构