第十一章

1

(1)$A_5^3=5\times4\times3=60$ 种

(2)$5^3=125$ 种

4

(1)

$\frac{A_{10}^{10}}{A_4^4\times A_3^3\times A_3^3}=\frac{10!}{4!\times3!\times3!}=4200$ 种

(2)

$\frac{A_7^7}{A_3^3\times A_3^3}=140$ 种

5

(1)

要求a之间不相邻，则将a之间的4个空 有顺序的插入{b c d e}即可。

$A_4^4=24$ 种

(2)

先将bcde排序，再往其中插入a。要求互不相邻，则内部的3个空一定得有a。多出的一个a插在bcde内部+外部共5个空其中一个即可

$A_4^4\times C_5^1=120$ 种

7

盒子中容纳球可能的情况有：

(1)

2 2 0

$\frac{C_4^2\times C_2^2\times C_0^0}{A_2^2\times A_2^2}\times A_3^3=9$ 种

(2)

2 1 1

$\frac{C_4^2\times C_2^1\times C_1^1}{A_2^2}\times A_3^3=36$ 种

11

用全部情况减去5,6相邻

$A_9^7 - \frac{A_8^7}{A_2^2} = 161280$ 种

16

(1)不同的二元关系：

3元集的运算表共有9个位置，每个位置有3个值可选。故有$3^9 = 19683$ 个不同的二元关系

(2)自反的关系

自反的关系，对角线的三个位置为$< x, x >= x$ 固定。其余6个位置，每个位置有3个值可选。故有$3^6 = 729$ 个自反的二元关系

(3)对称的关系

转为三角矩阵，只需确定对角线+右上角即可。故有$3^6 = 729$ 个对称的二元关系

(4)自反且对称的关系

转为三角矩阵，对角线的三个位置为$< x, x >= x$ 固定，只需确定右上角即可。故有$3^3 = 27$ 个自反且对称的二元关系

(5)反对称的关系

$3^9 - 3^6 = 18954$ 个反对称的二元关系

第十二章

1

(1)

该递推方程的特征方程是 $x^2 - 2x - 2 = 0$，特征根是

$x_1 = 1 - \sqrt{3}, x_2 = 1 + \sqrt{3}$

通解为$c_1(1-\sqrt{3})^n + c_2(1+\sqrt{3})^n$

带入初值$a_0 = 1, a_1 = 3$

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1(1-\sqrt{3}) + c_2(1+\sqrt{3}) = 3 \\ \text{解得} c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{gathered} \tag{1}$$

(3)

该方程的常系数线性齐次递推方程的特征方程是 $x^2 - 3x + 2 = 0$，特征根是

$x_1 = 1, x_2 = 2$

齐次方程通解为$c_1 1^n + c_2 2^n$

设特解形式为

$H*(n)=q_1 n$，其中q_1 为待定系数，带入原式

$$\begin{gathered} q_1 n-3q_1(n-1)+2q_1(n-2)=1 \\ 3q_1-4q_1=1 \\ \text{解得}\, q_1=-1 \end{gathered} \tag{2}$$

因此通解为$a_n=c_1+c_2 2^n-n$

带入初值得$a_n=3\times 2^n-n+1$

3

$a_n=7a_{n-1}+8^{n-1}-a_{n-1}$,$a_1=7$

齐次特征方程为

$x^2-6x=0$

特征根为0或6，0舍去

齐次通解为$a_n=c_1\times 6^n$

设特解形式为

$H*(n)=q_1 8^n$，其中q_1 为待定系数，带入原式

$q_1 8^n=6\times 8^{n-1}+8^{n-1}$,$q_1=\frac{7}{8}$

因此通解为$a_n=c_1 6^n+78^{n-1}$

带入初值,通解为$a_n=\frac{6^n+8^n}{2}$

13

原题可理解为x1+x2+x3+x4=6且xi不超过3的非负整数解的个数。

G(y) = $(1+y+y^2+y^3)^4$ = $(1+2y+3y^2+4y^3+3y^4+2y^5+y^6)^2$ = 1+...+$44y^6$+...

N = 44.

17

指数生成函数为

Ge(x) = $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+x+\frac{x^2}{2!})(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})$

化简得x^4 的系数是71*$\frac{x^4}{4!}$，因此a4 = 71.

若为偶数，末位为2，对应的指数生成函数为

Ge(x) = $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})$

化简得x^3的系数是20*$\frac{x^3}{3!}$， 因此a3 = 20.