

1.

(1)可结合、1为单位元、其中任何元素都有逆元。故为群

(4)lcm:最小公倍数 gcd:最大公约数。

可结合。对于lcm有单位元1，对gcd有零元1。在S不仅只有一个元素时，零元无逆元。故为半群

(5)可结合。单位元为0。0的逆元为0，1的逆元为1；故其中任何元素都有逆元。为群

5.

可结合。2为单位元。其中任何元素都有逆元，为4-x。故可构成群

6.

(1)给出 \circ 运算表

\circ	$f1=x$	$f2=x^{-1}$	$f3=1-x$	$f4=(1-x)^{-1}$	$f5=(x-1)x^{-1}$	$f6=x(x-1)^{-1}$
$f1=x$	x	x^{-1}	$1-x$	$(1-x)^{-1}$	$(x-1)x^{-1}$	$x(x-1)^{-1}$
$f2=x^{-1}$	x^{-1}	x	$1-x^{-1}$	$(1-x^{-1})^{-1}$	$(x^{-1}-1)x$	$x^{-1}(x^{-1}-1)^{-1}$
$f3=1-x$	$1-x$	$(1-x)^{-1}$	x	x^{-1}	-1	-1
$f4=(1-x)^{-1}$	$(1-x)^{-1}$	$1-x$	$1-(1-x)^{-1}$	$(1-(1-x)^{-1})^{-1}$	x	$(1-x)^{-1}((1-x)^{-1}-1)^{-1}$
$f5=(x-1)x^{-1}$	$(x-1)x^{-1}$	$(x-1)^{-1}x$	$1-(x-1)x^{-1}$	x	$((x-1)x^{-1}-1)(x-1)^{-1}x$	$(x-1)x^{-1}((x-1)x^{-1}-1)^{-1}$
$f6=x(x-1)^{-1}$	$x(x-1)^{-1}$	$x^{-1}(x-1)$	$1-x(x-1)^{-1}$	$(1-x(x-1)^{-1})^{-1}$	$(x(x-1)^{-1}-1)x^{-1}(x-1)$	x

可结合。f1为其单位元，所以元素都有逆元。故 $\langle F, \circ \rangle$ 是一个群

7.

(1)可结合，a为单位元，所有元素均有逆元。故 $\langle G, \circ \rangle$ 为群

(2)生成元有b,c。因为 b^k, c^k 涵盖了G里的所有元素

11.

$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$

(1)所有生成元为：

n=20，生成元为小于等于20且与20互质的数

1 3 7 9 11 13 17 19

(2)G的所有子群

$G = \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 9 \rangle = \langle 11 \rangle = \langle 13 \rangle = \langle 17 \rangle = \langle 19 \rangle$ (生成元的生成子群=G)

20的正因子为 1 2 4 5 10 20,故有6个子群

$H_1 = \langle 0 \rangle = \{0\}$

$H_2 = \langle 1 \rangle = G$

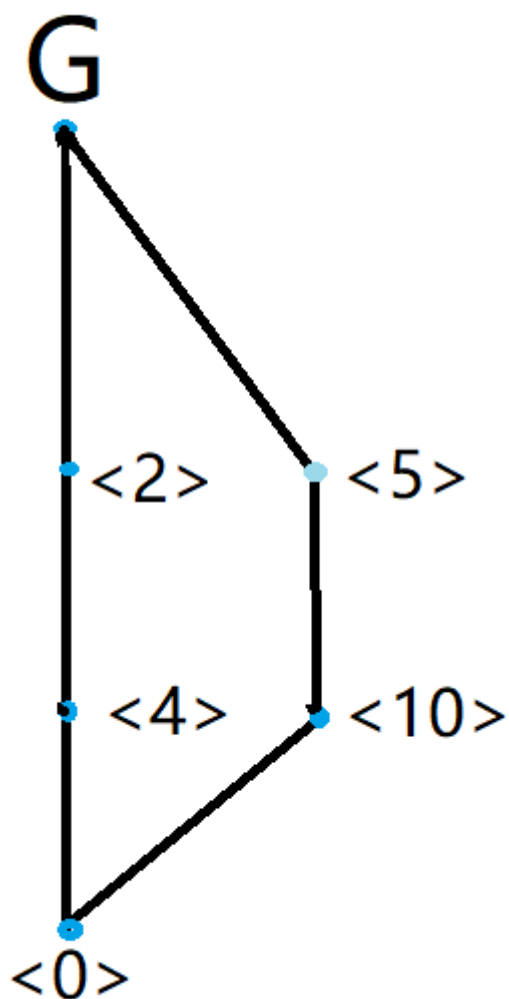
$$H3 = \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\} = \langle 20 - 2 \rangle = \langle 18 \rangle$$

$$H4 = \langle 4 \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16\} = \langle 20 - 4 \rangle = \langle 16 \rangle$$

$$H5 = \langle 5 \rangle = \{0, 5, 10, 15\} = \langle 15 \rangle$$

$$H6 = \langle 10 \rangle = \{0, 10\}$$

(3)



12

(1)

$$\sigma = (1\ 4\ 6\ 2\ 5\ 3), \tau = (1\ 3\ 2)(4\ 5\ 6)$$

(2)

$$\sigma\tau^{-1}\sigma = (1, 2, 6)(3, 5, 4)$$

$$\sigma^2 = (1, 6, 5)(2, 3, 4)$$

(3)

σ 是6阶轮换, τ 是3阶轮换

15

(1)

由于已知为布尔代数， \vee 对 \wedge 有可分配， \wedge 对 \vee 也可分配

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$= ((a \wedge b) \wedge (1 \vee c)) \vee ((b \wedge c) \wedge (1 \vee a))$$

$$= (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$$

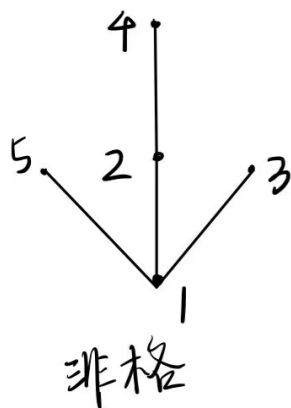
$$= b \wedge (a \vee c)$$

(2)

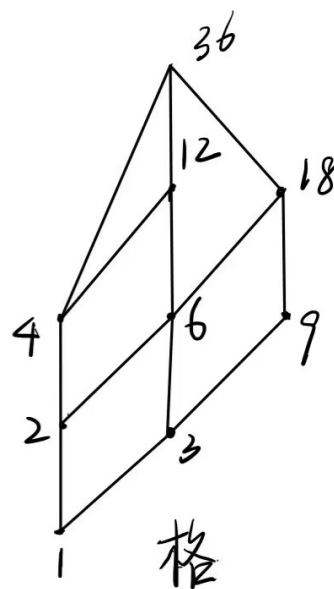
$$f^* = b \vee (a \wedge c)$$

16

(1)



(3)



18

根据 \vee 对 \wedge 的分配律可得

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

又因为 $a \leq c$ ，故 $a \vee c = c$

带入可得

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$$