



La complexité du mouvement humain : aspects théoriques et pratiques de l'évaluation et de l'interaction des complexités au service de la réhabilitation

Clément Roume

► To cite this version:

Clément Roume. La complexité du mouvement humain : aspects théoriques et pratiques de l'évaluation et de l'interaction des complexités au service de la réhabilitation. Education. Université Montpellier, 2019. Français. NNT : 2019MONT4003 . tel-02479347

HAL Id: tel-02479347

<https://theses.hal.science/tel-02479347>

Submitted on 14 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives

École doctorale ED 463 Sciences du Mouvement Humain

Unité de recherche EA 2991 EUROMOV

La complexité du mouvement humain : aspects théoriques et pratiques de l'évaluation et de l'interaction des complexités au service de la réhabilitation

Présentée par Clément ROUME

Le 4 novembre 2019

**Sous la direction de Didier DELIGNIERES
et de Hubert BLAIN**

Devant le jury composé de

M. Rachid Jennane, Professeur, Université d'Orléans

M. Frédéric Crèvecoeur, Professeur, Université catholique de Louvain

M. Laurent Arsac, Professeur, Université de Bordeaux

Mme. Kjerstin Torre, Maître de conférences, Université de Montpellier

Mme. Viviane Kostrubiec, Maître de conférences, Université de Toulouse III

M. Hubert Blain, Professeur des universités praticien hospitalier, Université de Montpellier

M. Didier Delignières, Professeur, Université de Montpellier

Rapporteur

Rapporteur

Président du Jury

Examinatrice

Examinatrice

Directeur de thèse

Directeur de thèse



**UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER**

Table des matières

Introduction générale :	4
Chapitre 1 : Complexité et fractales	6
1.1. La complexité	6
1.2. Un modèle mathématique complexe : Les fractales	8
1.2.1. Les fractales, ou la géométrie de la nature	8
1.2.2. Les fractales temporelles	11
1.3. Le phénomène de Hurst dans le mouvement humain ?	19
Chapitre 2 : Fractales et mouvement humain	20
2.1. Des fractales temporelles dans le mouvement humain	20
2.2. Deux modèles de fractales temporelles.....	24
2.2.1. Le modèle des mouvements Brownien fractionnaires (mBf) et bruits Gaussien fractionnaires (bGf)	24
2.2.2. Le modèle des processus autorégressifs et moyenne mobile à intégration fractionnaire (ARFIMA).....	26
2.2.3. D'un modèle à l'autre	30
2.3. Des méthodes d'analyse de fractales temporelles.....	32
2.3.1. L'analyse des fluctuations redressées (DFA)	33
2.3.2. Estimation par spectre de puissance ($^{low}PSD_{we}$) :	35
2.3.3. Estimation par maximum de vraisemblance par approximation de Whittle :	37
2.4. Des méthodes de génération de fractales temporelles	39
2.4.1. L'algorithme de Davies et Harte	39
2.4.2. Synthèse Spectrale.....	41
2.4.3. ARFIMA (0,d,0)	43
2.5. De la théorie à la pratique	43
Chapitre 3 : L'évaluation de la complexité	44

3.1. Quelle méthode d'analyse de la complexité ?	44
3.1.1. Résultats	44
3.1.2. Discussion.....	48
3.1.3. Les processus ARFIMA pour l'évaluation de la complexité	54
3.2. Quelle tâche physiologique pour l'évaluation de la complexité ?	55
3.2.1. Comparaison de 6 tâches non redondantes et surprises	56
3.2.2. Méthode	58
3.2.3. Résultats	65
3.2.4. Discussion.....	70
3.2.5. La marche pour l'évaluation de la complexité	76
3.3. Mise en application : L'altération de la complexité avec l'âge	76
3.4. De la complexité de chacun à l'appariement des complexités	80
Chapitre 4 : L'appariement des complexités	81
4.1. La synchronisation interpersonnelle, une interaction de complexités ?	81
4.1.1. L'approche du traitement de l'information	82
4.1.2. Le modèle des oscillateurs couplés	83
4.1.3. L'appariement des complexités	84
4.1.4. Trois cadres théoriques pour trois situations différentes ?	85
4.2. WDCC : L'analyse de corrélation croisée sur fenêtres redressées	87
4.2.1. L'algorithme de la WDCC	89
4.2.2. Données expérimentales et conceptions préliminaires à l'analyse formelle	91
4.3. Analyse formelle des cadres théoriques de la synchronisation.....	97
4.3.1. Correction mutuelle des asynchronies	97
4.3.2. Le modèle des oscillateurs couplés	106
4.3.3. L'appariement des complexités	112
4.3.4. Discussion.....	114

4.4. Les signatures multifractales de l'appariement des complexités	119
4.4.1. L'analyse multifractale des fluctuations redressées	120
4.4.2. Analyses de données empiriques	123
4.5. De l'appariement de complexité dans la marche à la restauration de la complexité de la locomotion des personnes âgées	129
4.5.1. L'appariement de la complexité dans la marche côte à côte	129
4.5.2. La restauration de la complexité de la locomotion.....	135
4.6. La réhabilitation par l'interaction	143
Bibliographie	144

Introduction générale :

Lorsqu'on souhaite étudier le mouvement humain, le modéliser voire le reproduire, ou même l'entraîner, on se rend compte extrêmement rapidement que l'on se heurte à un mur de complexité. De fait, du mouvement des doigts d'un pianiste virtuose au coup de pied millimétré d'un demi d'ouverture en passant par la synchronisation des gestes des danseurs dans un ballet, il existe une infinité de morphocinèses (i.e. production de formes gestuelles) et de topocinèses (i.e. atteinte de buts spatiaux repérés) pouvant être produites par l'être humain. Dans notre champ d'étude il existe nombre de paradigmes et d'écoles de pensée visant à rationaliser et modéliser ces gestes, les modèles étant par essence imparfait, il en résulte souvent des descriptions simplistes ne s'appliquant qu'à des cas extrêmement précis et difficilement généralisables. Ainsi, plutôt que de tenter de modéliser précisément la gestuelle humaine, nous avons pris le parti de tenter d'en quantifier la complexité.

Dans mon premier chapitre à visée introductive, je tente de définir les contours de ce que l'on appelle : « la complexité », puis je m'intéresse à des objets géométriques infiniment complexes : « les fractales ». Nous verrons enfin, à travers une perspective historique, que les propriétés de complexité des fractales peuvent être trouvées dans le domaine temporel.

Dans un deuxième chapitre je montre, dans un premier temps, à l'appui d'une étude bibliographique, que ce que l'on nomme « l'exposant fractal » peut être considéré comme un marqueur de santé. Ainsi, la présence des propriétés fractales dans un mouvement humain peut être considérée comme un gage d'adaptabilité et de robustesse de la personne qui l'a produit et qu'au contraire toute altération de ces propriétés représente le signe du vieillissement ou de la pathologie. L'un des buts de cette thèse consiste à contribuer à la préservation de l'autonomie de nos aînés, autrement dit, il s'agit de tenter de contrer l'altération des propriétés fractales (i.e. de préserver la complexité) dans leurs gestes. Pour ce faire il nous faut donc des outils fiables et précis permettant de quantifier cette complexité, c'est pourquoi dans la seconde partie de ce deuxième chapitre je présente deux modèles de fractales temporelles ainsi que trois méthodes d'analyses qui en sont issues. Nous l'avons vu les modèles sont par essence imparfaits et les méthodes d'analyse qui en découlent comportent leurs biais.

Ainsi dans la première partie du troisième chapitre je présente les résultats que nous avons obtenus dans l'un de nos articles (Roume, Ezzina, Blain, & Delignieres, 2019), dont le but était une validation croisée de méthodes d'analyses et de méthodes de génération de fractales temporelle afin de hiérarchiser les méthodes d'analyse en fonction de leur précision et de ne retenir que la plus performante. La suite logique dans cette quête de quantification fiable de la complexité consiste à tester la dépendance de l'exposant fractal aux tâches motrices utilisées pour le quantifier. Nous verrons à travers une étude originale que cette dépendance existe et que la marche peut être considérée comme un test de référence pour l'évaluation de la complexité humaine.

Enfin, le quatrième chapitre se concentre sur la mise en action de ces outils à des fins de réhabilitation, je traite d'abord du phénomène de l'interaction des complexités, phénomène qui prédit que lorsque deux systèmes complexes dont le niveau de complexité est différent interagissent, le système le plus complexe (i.e. une personne jeune) attire vers sa complexité le système le moins complexe (i.e. une personne âgée). Je montre ensuite à l'aide d'outils développés dans deux de nos études (Delignieres et al., 2016; Roume et al., 2018) que ce phénomène peut être retrouvé lorsque deux personnes marchent ensemble. Et enfin, je présente notre article (Almurad et al., 2018) dont les résultats confortent l'idée selon laquelle l'appariement des complexité permet effectivement de restaurer la complexité des personnes âgées.

Chapitre 1 : Complexité et fractales

1.1. La complexité

« La science a exploré le microcosme et le macrocosme ... La frontière inexplorée est la complexité »
(Pagels, 1988)

La complexité est un concept clé pour la compréhension du fonctionnement pérenne des systèmes biologiques. Toutefois, par essence, ce concept est complexe à définir. Cette lapalissade est certes grossière mais nécessaire pour effectivement comprendre qu'il serait injurieux de définir simplement la complexité. D'ailleurs, nombre d'auteurs tel qu'Atlan (2011), Morin (2014), Rosen (2000), ou Von Neumann & Burks (1966), ont tenté de définir ce concept, chacun apportant des visions souvent contradictoires... Nous comprenons donc bien qu'une définition complète du concept de complexité, si tant est qu'elle soit possible, dépasse largement le cadre de cette thèse. Afin de ne pas nous perdre en conjectures, je préfère me concentrer sur l'idée assez élégante selon laquelle le concept de la complexité exprime le fait que la connaissance de l'ensemble des *parties* d'un *tout* complexe ne suffit pas à effectivement connaître et décrire ce *tout*. Ainsi ce concept ne doit pas être compris comme étant synonyme de complication. Afin d'illustrer ce propos, prenons l'exemple d'un cristal minéral inerte tel que le diamant. On estime que dans douze grammes de diamant il y a environ 600 mille milliards de milliards d'atomes (ceci correspond au nombre d'Avogadro tel que défini jusqu'en mai 2019), ce nombre gigantesque de *parties*, compliqué à imaginer devient d'autant plus compliqué lorsqu'il s'agit de modéliser individuellement l'ensemble des *parties* d'un tel cristal. Pourtant, du fait de sa structure cristalline constante, et par extension de la faible diversité des interactions entre lesdites *parties*, il en résulte une forme macroscopique simple, inerte et finalement assez simple à modéliser par la loi des grands nombres. Autrement dit, même si un diamant composé de quelques grammes de carbone est composé d'une infinité de *parties*, le *tout* est un élément non complexe aisément compréhensible du fait de la faible diversité des interactions entre ses *parties*. Au contraire, des règles simples peuvent mener à la complexité : prenons l'exemple de la suite logistique $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ qui est la solution en temps discret du modèle de Verhulst décrivant l'évolution de la taille d'une population biologique en fonction de deux facteurs : le taux de natalité et le taux de

mortalité, rassemblés dans le cas présent dans le paramètre r (compris par définition entre 0 et 4). A première vue, cette suite est extrêmement simple, sa mise en œuvre étant parfaitement envisageable pour un élève en classe de première. Toutefois, les résultats que l'on peut obtenir de cette suite peuvent se révéler déroutants à tous points de vue. Lorsque le paramètre r est inférieur à 1, la suite tend vers 0, autrement dit la population s'éteint. Lorsque ce paramètre est compris entre 1 et 3, la population finit par se stabiliser autour de la valeur $(r - 1)/r$, indépendamment de la population initiale x_0 . Les choses commencent à se compliquer quand le paramètre r est compris entre 3 et 3,57, l'effectif de la population oscille entre 2, 4, 8, ... 2^n valeurs sans dépendre de la population initiale. Enfin, lorsque le paramètre r est supérieur à 3,57 l'effectif de la population devient, sauf exception, chaotique. Autrement dit la population ne converge jamais vers une valeur fixe ni n'oscille entre des valeurs bien identifiées. De plus, de légères variations dans la population initiale mènent à des résultats radicalement différents. Ce fonctionnement chaotique est une belle illustration de ce que peut être la complexité, malgré des règles de base simple et identifiées, les interactions successives entre les *parties* mènent à un *tout* complexe. Finalement, dans un système complexe, les interactions entre les *parties* sont plus importantes que les *parties* elles-mêmes, une caractéristique que Van Orden, Holden, et Turvey (2003) ont qualifié de dynamique *interaction-dominante*. Pour revenir à la complexité en biologie, et plus particulièrement à celle de l'être humain, j'aimerais citer un exemple présenté par Axel Kahn lors d'une conférence à Montpellier. Dans cette histoire fictive il présentait deux sœurs jumelles homozygotes, l'ensemble de leurs *parties* étant donc au départ strictement identique. Dès leur naissance ces jumelles furent séparées, l'une a été accueillie par une famille occidentale l'autre perdue dans la jungle mais par chance recueillie et élevée par une femelle orang-outan. Quelques années plus tard, cette dernière fût retrouvée en bonne forme puis ramenée à la civilisation. Le temps passa pour les deux sœurs, la première s'est révélée être brillante, réussissant sans mal sa scolarité puis ses études supérieures et devenant même prix Nobel. La deuxième quant à elle n'eut pas le parcours d'excellence de sa sœur, et bien que son séjour dans la jungle ne lui ait pas causé de maux physiques, elle fait preuve depuis qu'elle a été retrouvée d'un retard mental profond, ayant peine à s'exprimer autrement que par onomatopées et étant incapable d'apprendre à lire et à écrire.

Cette fiction servait de point de départ à Axel Kahn dans la discussion de la place du déterminisme génétique dans l'ontogénèse, mais résonne particulièrement dans notre propos sur la complexité, le *tout* c'est-à-dire chacune des deux sœurs n'est pas explicable uniquement par l'ensemble de ses *parties*, autrement dit leur code génétique. Le *tout* est le résultat de la dynamique d'interaction complexe entre les *parties* et l'environnement. Cet exemple illustre parfaitement le fait que le passage de l'enfance à l'âge adulte résulte d'une complexification du système, nous verrons plus loin que le vieillissement ou la maladie peuvent être vus au contraire comme une dé-complexification. Un système peut perdre sa complexité de deux manières opposées : soit par une diminution de la densité des interactions entre ses *parties*, soit par l'émergence de *parties* qui tendent à dominer l'ensemble de la dynamique. Dans le premier cas le système dérive vers l'aléatoire et le désordre, dans le second vers la rigidité. De ce point de vue, la complexité peut être conçue comme étant le compromis idéal entre l'ordre et le désordre (Delignières et Marmelat, 2013). Finalement, notons que la complexité représente une caractéristique essentielle des systèmes vivants, procurant à la fois la robustesse qui est la capacité à maintenir un fonctionnement pérenne malgré les perturbations environnementales, et l'adaptabilité aux changements environnementaux.

Les mathématiques classiques ainsi que les lois physiques issues de mécanismes de simplification des systèmes étudiés peinent à décrire correctement les systèmes complexes. C'est pourquoi les chercheurs s'intéressant à la science de la complexité font souvent référence à ces curiosités mathématiques que sont les fractales.

1.2. Un modèle mathématique complexe : Les fractales

« Les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes, les lignes de côte ne sont pas des cercles, et une écorce n'est pas lisse, de même que les éclairs ne sont pas des lignes droites. »
(Mandelbrot, 1995)

1.2.1. Les fractales, ou la géométrie de la nature

A l'origine les fractales sont des objets géométriques introduits par Benoît Mandelbrot en 1974 dans son ouvrage : *Les Objets fractals - Forme, hasard et dimension*.

Celui-ci partait du principe que les objets naturels tel que les arbres, les nuages ou même les éclairs ne pouvaient être parfaitement décrits par la géométrie euclidienne du fait de leur rugosité. C'est à partir de ce constat que Mandelbrot a défini cette nouvelle classe d'objets et les a nommés fractales à partir de la racine latine *fractus*- qui veut dire brisé/irrégulier. Ce que Mandelbrot appela les fractales furent d'abord considérées comme des curiosités mathématiques : en effet certaines constructions géométriques itératives constituaient des aberrations du point de vue de la géométrie euclidienne. Prenons pour exemple la courbe de Koch qui doit son nom à Helge von Koch qui l'a décrite pour la première fois en 1904. Elle se construit, par itération, de la manière suivante :

Etape préliminaire : soit un segment unitaire $[0,1]$ (Figure 1, a):

Etape 1 : remplacer le tiers central du segment original par deux segments de longueur $\frac{1}{3}$.

La courbe est donc maintenant composée de 4 segments de longueur $\frac{1}{3}$ (Figure 1, b)

Etape 2 : Remplacer le tiers central de chacun des 4 segments générés par l'étape 1 par deux segments de longueur $\frac{1}{9}$. La courbe est composée à l'issue de cette étape de 16 ($= 4^2$) segments de longueur $\frac{1}{9}$ ($= \frac{1}{3^2}$) (Figure 1, c)

Etape ...

Etape N : Remplacer le tiers central de chacun des 4^{N-1} segments générés par l'étape $N-1$ par deux segments de longueur $\frac{1}{3^N}$. La courbe est composée à l'issue de cette étape de 4^N segments de longueur $\frac{1}{3^N}$.

a



b



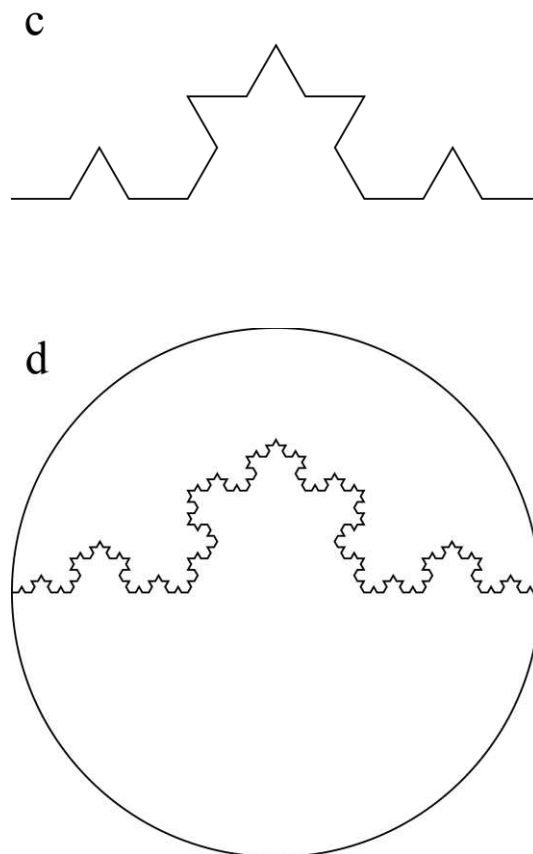


Figure 1 : Les quatre premières itérations de la courbe de Koch (a, b, c et d), le cercle de diamètre 1 passant par les deux points extrêmes de la courbe est tracé sur la quatrième itération (d).

On voit donc qu'à chaque itération la longueur de la courbe est multipliée par $4/3$. La courbe étant théoriquement itérée à l'infini sa longueur théorique est donc, elle aussi, infinie. Jusqu'ici on pourrait penser qu'elle n'est pas si différente d'une droite euclidienne de dimension 1 s'étendant à l'infini d'un bout à l'autre de l'univers. Toutefois, si l'on y fait attention, on se rend compte que cette longueur infinie est circonscrite dans une surface finie. De fait, si l'on trace le cercle de diamètre 1 et de centre O placé au centre du segment originel (voir Figure 1), on se rend compte que la courbe ne dépasse pas les limites de ce cercle. Cette propriété particulière de la courbe de Koch a été une source de perturbation pour nombre de mathématiciens du début du XX^{ème} siècle jusqu'à ce que Benoit Mandelbrot l'analyse avec un regard nouveau (Gleick, 1987). En effet, lorsqu'il travaillait chez IBM, Benoit Mandelbrot fit une découverte à propos de la nature des erreurs sur les lignes téléphoniques. Le bruit de transmission, d'une nature apparemment aléatoire et transmis par paquets faisait tout de même preuve d'une certaine régularité.

En effet, quelle que soit l'échelle à laquelle il analysait ce signal (1 seconde, 1 heure, 1 mois ...) le rapport entre les périodes de communication sans erreur et celles avec erreurs restait constant. Cette propriété d'invariance selon l'échelle est une caractéristique fondamentale des objets fractals, et plus tard Mandelbrot la nommera propriété d'autosimilarité. L'autosimilarité exprime donc le fait qu'un objet soit exactement ou approximativement similaire à une ou plusieurs de ses propres parties. Il existe plusieurs définitions de l'autosimilarité, dépendant essentiellement de l'objet considéré. Ainsi une fractale géométrique telle que la courbe de Koch sera caractérisée par une invariance d'échelle stricte : quelle que soit la partie considérée il existe une partie plus petite qui est similaire à l'objet entier. Tandis que pour une fractale naturelle telle que le chou romanesco l'autosimilarité est définie sur un domaine d'échelles, autrement dit il existe une résolution en dessous de laquelle la partie n'est plus similaire à l'ensemble et évidemment une résolution supérieure qui dépasse la taille de l'objet.

1.2.2. Les fractales temporelles

Outre le développement des fractales dans le domaine de la géométrie, Mandelbrot a aussi contribué à faire émerger ce concept dans le domaine de l'analyse de séries temporelles. Comme son pendant géométrique, le concept de fractales temporelles a permis de développer des outils d'analyse de systèmes naturels décrivant des propriétés que les outils classiques ne permettaient pas de mettre en lumière. En effet, certains processus aléatoires, comme les erreurs décrites par Mandelbrot, sont caractérisés par des dépendances à long terme. Autrement dit il existe une sorte de mémoire dans ces séries, plus précisément de dépendances non négligeables entre l'observation courante et toutes les observations précédentes.

C'est en partie grâce à une étude de l'hydrologue anglais Harold Edwin Hurst de 1956 que Mandelbrot a développé cet intérêt pour les processus stochastiques à longue mémoire. Hurst et son département furent chargés de concevoir une méthode de contrôle des eaux du Nil. Cette étude nécessitait de résoudre le problème suivant : connaissant la quantité d'eau nécessaire aux activités humaines d'une région sur une période donnée n , comment calculer la capacité de stockage d'un barrage hydraulique « idéal » qui égaliserait le flux de la rivière et enverrait en aval le flux nécessaire pour ces activités ?

Hurst a proposé d'obtenir cette capacité de stockage à partir des sommes cumulées des écarts à la moyenne de ces flux. Soit $x(k)$ une séquence aléatoire correspondant aux flux de la rivière, la n ième somme partielle est définie comme $y(n) = x(1) + x(2) + \dots + x(n)$. Alors on peut calculer l'étendue ajustée $R(n)$ grâce à l'équation :

$$R(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \left(y(k) - \frac{k}{n} y(n) \right) - \min_{1 \leq k \leq n} \left(y(k) - \frac{k}{n} y(n) \right) \quad (1)$$

Hurst a normalisé cette expression de l'étendue ajustée afin d'obtenir ce qui est appelé aujourd'hui l'analyse normalisée des étendues ajustées (*Rescaled Adjusted Range analysis*) notée $R/S(n)$:

$$\frac{R}{S(n)} = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \left(y(k) - \frac{k}{n} y(n) \right) - \min_{1 \leq k \leq n} \left(y(k) - \frac{k}{n} y(n) \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x(k) - \frac{1}{n} y(n) \right)^2}} \quad (2)$$

Il précise qu'il était couramment assumé que l'entrée $x(k)$ soit totalement aléatoire et généralement approximée par une variable à distribution Gaussienne. Ainsi une étude théorique avec ce type d'entrée montrait que la plupart des valeurs de R/S pouvaient être estimées par :

$$R/S(n) = \sqrt{\frac{1}{2} n \pi} = 1,25\sqrt{n} \quad (3)$$

Or Hurst calcula R/S sur des enregistrements de précipitations couvrant 150 années auxquels il ajouta des données de températures et de pressions et trouva :

$$R/S(n) = 1,65\sqrt{n} \quad (4)$$

Ainsi pour ce groupe de données, la statistique R/S augmente plus rapidement que dans le cas d'événements aléatoires.

Il attribua ce résultat au fait qu'il existe dans ces phénomènes des tendances à la persistance, les années pluvieuses étant généralement groupées et inversement. Dans cette même étude Hurst a examiné 696 séries temporelles différentes couvrant 76 phénomènes géophysiques distincts du niveau des rivières au nombre de tâches solaires afin de déterminer si le R/S d'un phénomène naturel était mieux représenté par une racine carrée ou par une autre fonction de n . Il a trouvé qu'il existait une relation linéaire entre le logarithme de R/S et celui de n :

$$\log \frac{R}{S(n)} = K \log n/2 \quad (5)$$

Avec des valeurs de K indiquées en Figure 2 :

Summary of values of K

<i>Type of phenomenon</i>	<i>No. of phenomena</i>	<i>No. of values of K</i>	<i>Mean</i>	<i>Std devn</i>
River levels, discharges, etc.	18	99	0.75	0.077
Rainfall	30	168	0.70	0.069
Temperature and pressure	19	115	0.70	0.085
Annual growth of tree rings	4	85	0.81	0.078
Varves (Lake Saki in Crimea)	1	114	0.69	0.064
Varves (Tamiskaming, Canada, and Moen, Norway)	2	90	0.77	0.094
Sunspot numbers and wheat prices (combined as miscellaneous)	2	25	0.69	0.086
Means and Totals	76	696	0.729	0.092

Figure 2 : Table de données extraite de l'article de Hurst (1956)

Hurst en a conclu que l'équation qui donnait la valeur la plus probable de R était :

$$R/S(n) = (n/2)^{0.72} \quad (6)$$

Hurst a donc suggéré que les phénomènes qu'il avait étudiés avaient des similitudes entre eux mais ne pouvaient certainement pas être issus de processus purement aléatoires. Malgré les avancées actuelles dans le domaine des statistiques, qui montrent d'ailleurs un certain nombre de lacunes dans le mode de calcul par Hurst (Graves et al., 2017), ce résultat empirique reste d'une importance capitale dans la compréhension et la modélisation des systèmes naturels.

Ce résultat resta d'ailleurs une énigme pour les statisticiens et hydrologues de l'époque car aucune explication satisfaisante ni aucun modèle ne fut trouvé, tel qu'en témoigne l'article de Klemesš (1974) :

“Ever since Hurst published his famous plots for some geophysical time series . . . the by now classical Hurst phenomenon has continued to haunt statisticians and hydrologists. To some, it has become a puzzle to be explained, to others a feature to be reproduced by their models, and to others still, a ghost to be conjured away.”

Il faudra attendre 1965, avec la publication d'un compte-rendu de l'académie des sciences de Paris pour que Mandelbrot pose les fondations d'un nouveau modèle rendant compte du phénomène mis en lumière par Hurst. Ce modèle des mouvements Browniens fractionnaires (mBf) et des bruits Gaussiens fractionnaires (bGf), que je décrirai en détail plus tard, nous permet d'appréhender les propriétés fondamentales des processus à longue mémoire. Avant de décrire ces propriétés, il me semble essentiel de distinguer les deux éléments de ce modèle. Les mouvements correspondent à une classe de processus aléatoire **non-stationnaires**, j'adopterai la notation $B_H(t)$ pour les décrire. Les bruits correspondent quant à eux à une classe de processus **stationnaires** que je décrirai à travers la notation $G_H(t)$. Ces deux classes de processus sont intimement liées, non seulement par la valeur de l'exposant d'échelle H , mais surtout car les bruits correspondent à la dérivée des mouvements et inversement via intégration. Ainsi pour $H = 0,5$, le mouvement $B_{0,5}(t)$ est un mouvement brownien dont les incréments ne sont pas corrélés tel que décrit par R. Brown, et le bruit $G_{0,5}(t)$ est un bruit blanc gaussien correspondant à la série d'incrémentes du mouvement Brownien décrit ci-avant.

L'autosimilarité ou auto-affinité : C'est cette propriété qui fait le lien entre les fractales géométriques et les processus à longue mémoire ou fractales temporelles. Elle exprime le fait que les fluctuations d'un processus aléatoire sur une échelle de temps donnée ont des propriétés statistiques identiques à celles du même processus vu à des échelles différentes. En termes mathématiques, un processus stochastique $y(t)$ est autosimilaire avec un paramètre d'autosimilarité H , si pour toute constante positive c :

$$y(ct) \triangleq c^H y(t) \quad (7)$$

\triangleq dénotant une égalité de distribution. Il est intéressant de noter que comme pour les fractales géométriques, les processus mBf et bGf sont par définition strictement autosimilaires. Autrement dit, si l'on considère une version « ralentie » de ces processus (quel que soit le ralentissement) et que l'on réétalonne celui-ci de manière adéquate, alors ce processus remis à l'échelle conserve les mêmes paramètres statistiques. En ce sens on peut considérer que les processus mBf et bGf n'ont pas d'échelle caractéristique. Ces processus sont entièrement définis par leur moyenne et leur variance, de fait les moments d'ordre supérieurs tel que le coefficient d'asymétrie (skewness) et le coefficient d'aplatissement (kurtosis) sont nuls pour les processus gaussiens. Ainsi, on estime généralement l'autosimilarité de ces processus via la seule utilisation de la moyenne et de la variance ce qui est par exemple le cas pour la statistique R/S . Enfin, notons que Mandelbrot et Van Ness (1968) ont prouvé que c'est cette propriété d'autosimilarité qui permet la modélisation du phénomène décrit par Hurst. En effet ils montrent dans leur corolaire 3.6 que quel que soit c une constante positive :

$$R/S(n) \triangleq cn^H \quad (8)$$

La densité spectrale de puissance en $1/f^\beta$: En 1807 le mathématicien français Joseph Fourier affirmait qu'il était possible de décomposer un signal périodique en une somme discrète de composants sinusoïdaux. Cette définition a par la suite été étendue aux signaux non périodiques en assumant que ce genre de signaux possède une période de durée infinie et qu'on pouvait donc les décomposer en utilisant une somme continue (une intégrale) de fréquences. Ainsi un signal aléatoire $x(t)$ peut être décomposé en un ensemble continu de fréquence $X(f)$ via ce que l'on appelle la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (9)$$

Cette décomposition peut certes paraître abstraite, mais nombre d'objets naturels ou artificiels exécutent des transformations de Fourier.

Par exemple, le son d'un instrument de musique est une onde mécanique se propageant dans l'air sur un temps donné, or les notes que l'on entend ne sont pas les vibrations provoquées par ces ondes, mais leur fréquence.

Cette analyse a donc été largement utilisée pour déterminer si un signal, le plus généralement bruité, possède des fréquences dominantes. Toutefois, lorsqu'on analyse des signaux aléatoires on s'intéresse généralement plus à la densité spectrale de puissance (DSP), qui correspond à la puissance de chacun des composants fréquentiels, autrement dit on s'intéresse à la répartition de la puissance d'un signal à travers un continuum de fréquences. La DSP se calcule à partir du carré du module de la transformée de Fourier, ou en termes mathématiques :

$$S(f) = |X(f)|^2 \quad (10)$$

Dès sa communication dans les comptes-rendus de l'académie de sciences (1965), Mandelbrot suggère que le phénomène décrit par Hurst est équivalent à faire l'hypothèse que la densité spectrale de puissance de la dérivée d'un mBf (i.e. d'un bruit Gaussien fractionnaire) se comporte comme :

$$S(f_{B'_H(t)}) = S(f_{G_H(t)}) \propto \frac{1}{f^{2H-1}} \quad (11)$$

En proposant cette hypothèse, il réalisa qu'il tentait d'expliquer à travers un seul paramètre H les effets des basses et des hautes fréquences, ou comme il l'a dit lui-même :

« Mon explication de la loi de Hurst équivaut à invoquer le même mécanisme pour les variations lentes du climat et les variations rapides de la précipitation »

Dans son article de 1968, il confirme cette hypothèse. De plus, il évoque une représentation des incréments du mBf obtenue par Hunt (1951) qui suggère que la densité spectrale des mBf est proportionnelle à :

$$S(f_{B(H)}) \propto \frac{1}{f^{2H+1}} \quad (12)$$

Mandelbrot reconnaissait toutefois dans cet article que « les densités spectrales des fluctuations aléatoires non-stationnaires sont difficiles à interpréter », notamment car le spectre peut théoriquement prendre des valeurs négatives. Plus tard, Flandrin (1989) a montré à partir des propriétés d'autosimilarité des mBf qu'il est possible de décrire un spectre moyen toujours positif proportionnel à $1/f^{2H+1}$.

Comme décrit ci-avant, dans le domaine des bruits (i.e. de la dérivée $B_H'(t)$), un H égal à 0,5 correspond à un processus aléatoire gaussien et non corrélé, que l'on appelle plus communément bruit blanc gaussien. Ce nom de couleur donné aux bruits « blancs » vient du fait que leur spectre est plat (i.e. $2 \times 0,5 - 1 = 0$) comme celui de la lumière blanche. En effet, la lumière blanche est par définition composée de toutes les couleurs d'où le phénomène des arcs-en-ciel : ces couleurs dépendent de la fréquence des photons qui la composent, ainsi si l'on décompose la lumière blanche en fréquences, ce qui revient à compter le nombre de photons de chaque couleur dans un rayon lumineux, on se rend compte que chaque couleur est portée en moyenne par le même « nombre » de photons. Ainsi, la puissance relative de chaque couleur est la même et donc la densité spectrale de puissance de la lumière blanche est constante, le spectre de puissance est par conséquent plat. Les fractales temporelles sont donc caractérisés par des spectres de puissance qui décroissent en loi puissance en fonction de la fréquence, ainsi ces processus ont souvent été décrits dans la littérature comme des processus en $1/f$ ou bruit rose. On peut dériver des équations 11 et 12 une forme générale des spectres des processus à longue mémoire telle que :

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\beta} \quad (13)$$

Avec $\beta \in]-1 ; 1[$ pour les bruits $G_H(t)$ et $\beta \in]1 ; 3[$ pour les mouvements $B_H(t)$. Cela suggère que les bruits et les mouvements peuvent être considérés comme un continuum dans le domaine spectral, ces deux familles seraient donc caractérisées dans le domaine temporel par un exposant d'échelle α ou $\alpha = H$ pour les bruits $G_\alpha(t)$, et $\alpha = H + 1$ pour les mouvements $B_\alpha(t)$.

Cette assumption a été exploitée par Peng et al. (1994) dans la conception de l'analyse de fluctuations redressées (que je détaillerai dans la partie suivante). Il existe une relation linéaire entre l'exposant d'échelle temporel α et l'exposant d'échelle spectral β sur l'ensemble du continuum bruit-mouvement telle que $\alpha = (\beta + 1)/2$ (Delignières & Marmelat, 2013). Le cas limite : $\alpha = \beta = 1$ est donc ce qui définit ce qui est largement appelé « bruit $1/f$ » et représente la frontière entre les bruits et les mouvements.

L'autocorrélation en loi puissance : Cette dernière propriété, prise parfois aujourd'hui comme la définition même de la longue mémoire (Graves et al., 2017), fût aussi décrite par Mandelbrot dans sa communication de l'académie de sciences. En effet, lorsque H est supérieur à 0,5 le processus est dit persistant, autrement dit dans le cas d'un mouvement les incréments successifs sont positivement corrélés tandis que dans le cas d'un bruit c'est le signal lui-même qui est auto-corrélé. Il en résulte que ce type de processus suit des tendances telles que les années de grandes crues successives décrites par Hurst. La fonction d'autocorrélation de ces processus décroît en loi puissance (i.e. en $1/\tau^\gamma$), sa somme tend vers l'infini, ceci signifie que la fonction d'autocorrélation n'atteint jamais 0, et enfin cette décroissance est dite à taux hyperbolique. De manière pratique, cela signifie que quel que soit le temps t auquel on observe ce processus, cette observation sera dépendante de l'ensemble des réalisations précédentes, définissant ainsi une mémoire à long terme. Dans le cas typique du bruit blanc, c'est-à-dire lorsque H est égal à 0,5, l'autocorrélation est par définition nulle en tout point sauf à l'origine où elle est assimilable à une fonction δ de Dirac en 0. Enfin, lorsque H est inférieur à 0,5 le processus est dit anti-persistant. Des augmentations seront suivies de diminutions et vice-versa, ainsi la somme de la fonction d'autocorrélation est théoriquement égale à 0. Mandelbrot reconnaît dans son article de 1968 que cette dernière propriété peut être facilement détruite si l'on change légèrement la fonction d'autocorrélation théorique, toutefois il reconnaît aussi que l'anti-persistence est assez robuste pour être rencontrée dans la nature.

De manière générale, la fonction autocorrélation des incréments d'un mouvement $B'_H(t)$ ou celle d'un bruit $G_H(t)$ est décrite par le comportement asymptotique :

$$r_{G_H(t)}(\tau) = r_{B'_H(t)}(\tau) \sim H(2H - 1)|\tau|^{2H-2} \quad \text{pour } \tau \rightarrow \infty \quad (14)$$

La figure 3 présente les formes théoriques des tracés de l'autocorrélation (i.e. correspondants à l'équation $r_H(\tau) = H(2H - 1)|\tau|^{2H-2}$) pour plusieurs valeurs de H :

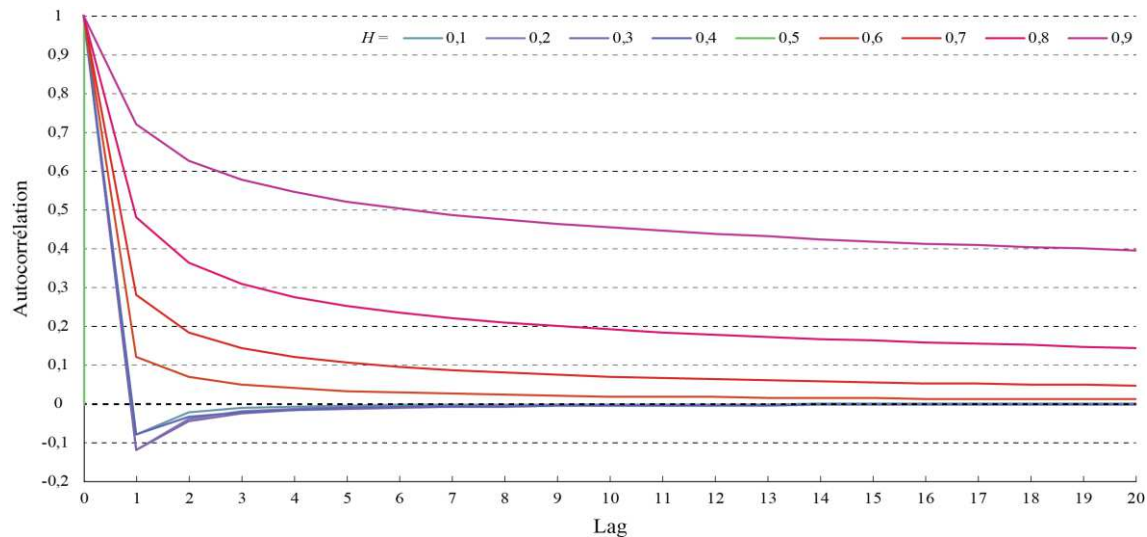


Figure 3 : Formes théoriques des fonctions d'autocorrélation tracées à partir de l'équation : $R_H(\tau) = H(2H - 1)|\tau|^{2H-2}$. Les courbes à dominante bleue correspondent à des processus anti-persistants dont la valeur H est comprise dans l'intervalle $]0 ; 0,5[$. La courbe verte est une fonction δ de Dirac correspondant à un processus non corrélé tel qu'un bruit blanc gaussien et une valeur de H égale à 0,5. Enfin, les courbes à dominante rouge correspondent à des processus persistants avec une valeur de H comprise dans l'intervalle $]0,5 ; 1[$.

1.3. Le phénomène de Hurst dans le mouvement humain ?

La géométrie fractale et le phénomène de Hurst ont profondément marqué les divers champs dans lesquels ces concepts ont été utilisés. L'analyse du mouvement humain n'échappe pas à cette catégorisation bien particulière. Depuis maintenant près d'une trentaine d'années on sait que les mouvements produit par un être humain relèvent du phénomène de Hurst. C'est à travers cette loupe que s'articule mon travail de thèse et bien que cette manière de voir le mouvement soit relativement nouvelle, elle n'en est pas moins prometteuse ayant déjà donné des marqueurs de santé probants et qui ouvrent de nouvelles voies pour la réhabilitation et la préservation de l'autonomie de nos aînés.

Chapitre 2 : Fractales et mouvement humain

2.1. Des fractales temporelles dans le mouvement humain

La mesure répétée d'évènements physiologiques ou comportementaux (durée des pas dans la marche, intervalles des battements du cœur, intervalles inter-tapes dans les tâches de timing) est typiquement caractérisée par une certaine variabilité. Pendant longtemps cette variabilité a uniquement été considérée comme une perturbation aléatoire sans aucune signification fonctionnelle, les chercheurs préférant se concentrer sur les valeurs moyennes et leur dispersion. Toutefois, depuis une trentaine d'années, un certain nombre d'auteurs ont montré que ces séries présentaient une structure corrélationnelle à long terme ou, autrement dit, qu'elles étaient caractérisées par le phénomène de Hurst. Ces observations excluent ainsi de fait que cette variabilité soit issue d'un processus purement aléatoire mais qu'elle est plutôt issue d'un processus marquant ordre et désordre.

Dans leur papier de 1993, Peng et al. montrent que l'activité électrique normale du cœur ne peut être considérée comme un rythme sinusal régulier conformément à la description traditionnelle, mais qu'au contraire « *les intervalles inter-battements cardiaques fluctuent d'une manière complexe apparemment erratique chez les sujets sains, même au repos* ». Ces auteurs furent les premiers à montrer qu'il existait des propriétés d'invariance d'échelle dans le rythme cardiaque, et ont associé les propriétés corrélationnelles à l'état clinique des patients. Ainsi, chez les personnes jeunes et en bonne santé, le spectre de puissance du rythme cardiaque décroît en $1/f$ et possède donc des propriétés de corrélation à long terme, tandis que chez des patients atteints d'une pathologie cardiaque le spectre de puissance est plat, correspondant à une disparition de cette structure corrélationnelle. La présence de corrélation à long terme a été interprétée comme un gage d'adaptabilité par ces auteurs pour les deux raisons suivantes : (i) « *Les corrélations à long terme servent de mécanisme d'(auto-)organisation aux processus hautement complexes qui génèrent les fluctuations sur une grande gamme d'échelles temporelles* », et (ii) « *L'absence d'une échelle temporelle caractéristique permet d'inhiber l'émergence de comportements hautement périodique qui restreindrait grandement la réactivité fonctionnelle de l'organisme* ». Deux ans plus tard, cette même équipe introduisit l'analyse de fluctuation redressées (*Detrended Fluctuation Analysis*, abrégée DFA en anglais) et réanalysa les données du premier article, confirmant que les fluctuations d'un

cœur sain étaient marquées par des corrélations à long terme (i.e., l'exposant d'échelle α était proche de 1) tandis que celles d'un cœur malade se rapprochaient d'un mouvement brownien (i.e. l'exposant α était proche de 1.5). Enfin, cette même équipe a estimé dans un papier plus récent (Goldberger et al., 2002) que la présence de ces corrélations à long terme était la signature des systèmes complexes, et que cette complexité était altérée en cas de maladie ou lors du vieillissement. Ceci suggère que la présence de corrélations à long terme dans les séries physiologiques est un gage de complexité et d'adaptabilité du système qui les a produites, et que toute déviation, qu'elle soit vers un ordre excessif (insuffisance cardiaque congestive) ou vers une imprédictibilité totale (arythmie cardiaque) est la marque d'une pathologie ou du vieillissement, suggérant donc que l'exposant fractal peut être considéré comme un marqueur de santé.

Outre les battements cardiaques, cette même équipe s'est penchée sous la direction de J. M. Hausdorff sur le caractère fractal de la marche (Hausdorff et al., 1997; Hausdorff, Peng, Ladin, Wei, & Goldberger, 1995; Hausdorff et al., 1996). Dans un premier temps ces auteurs prouvèrent que les intervalles de pas dans la marche (i.e. le temps séparant le contact de la cheville avec le sol d'un pied et le contact suivant de la même cheville) étaient caractérisés par un exposant fractal $\alpha = 0,83$, et que ces mêmes données, si mélangées aléatoirement, était caractérisées par un exposant $\alpha = 0,5$ prouvant ainsi que les corrélations à long terme dans ces séries venaient de l'agencement temporel des pas au cours de la marche. Dans un deuxième temps ils montrèrent que la vitesse de marche (i.e. lente ; préférentielle ; rapide) bien qu'ayant une très légère influence sur leurs exposants d'échelle respectifs ($0,98 \pm 0,07$; $0,90 \pm 0,04$; $0,97 \pm 0,05$) était loin de dénaturer la structure de corrélation tel que peut le faire la randomisation des séries. Ces auteurs montrèrent aussi dans cette deuxième étude que l'étendue effective du caractère à « long terme » de la structure corrélationnelle s'étendaient sur au moins mille pas, et qu'enfin lorsqu'on utilise un métronome pour cadencer la marche la structure de corrélation à long terme disparaît pour laisser la place à une structure non corrélée. Enfin dans un troisième temps Hausdorff et ses collaborateurs (1997) ont montré que l'exposant fractal était plus élevé dans la marche de personnes jeunes ($0,87 \pm 0,15$) que dans la marche de personnes âgées pourtant en bonne santé ($0,68 \pm 0,14$) alors même que des mesures cliniques de la marche et de la mobilité (intervalle moyen, coefficient de variation des intervalles, temps de « up-and-go ») ne différaient pas d'un groupe à l'autre.

Ils montrèrent aussi qu'une altération de la structure de corrélation peut être causée par des maladies dégénératives telle la chorée de Huntington. La marche des patients atteints de cette maladie montre non seulement des coefficients fractals plus faibles que celle de personnes en bonne santé, mais aussi que ces coefficients diminuent d'autant que la maladie progresse, donnant même lieu à terme à des coefficients inférieurs à 0,5 indiquant l'apparition d'une dynamique anti-persistante inédite. L'ensemble de ces résultats suggèrent là aussi que l'exposant fractal peut être perçu comme un marqueur de santé, et qu'une altération précoce, avant même l'apparition de symptômes cliniques, pourrait aider à prévenir la dépendance chez les personnes âgées ainsi qu'agir plus rapidement sur des maladies neurodégénératives. Enfin, les résultats de l'équipe d'Hausdorff montrent l'importance de l'implication du système nerveux central dans la génération du caractère fractal du mouvement humain reléguant ainsi l'importance des bruits liés au système périphérique au second plan.

Si des structures de corrélation à long terme ont été mises en évidence dans la motricité complexe que constitue la marche ou celles de motricités inconscientes telles que le rythme cardiaque, l'on peut se demander ce qu'il en est de motricités simples, aisément reproductibles et contrôlables dans nos laboratoires de recherche. Gilden et al. (1995) se sont intéressés à de telles motricités à travers des tâches « *extrêmement simples* » de reproduction d'intervalles temporels et spatiaux. Ils montrèrent au moyen d'analyses spectrales la présence de bruits $1/f$ tant dans les tâches de reproduction spatiale que temporelle, mais suggérèrent aussi que ces productions étaient en réalité composées d'un mix de bruits corrélés $1/f$ issus de l'horloge interne des sujets et de bruit blanc générés par le système moteur, dont le ratio dépendait exclusivement de la tâche. Ces auteurs firent l'hypothèse que la présence du bruit $1/f$ dans la production d'intervalles temporels ou spatiaux n'était possible qu'à condition que cette production soit consciente. Afin de tester cette hypothèse ils proposèrent une tâche de temps de réaction et montrèrent qu'en effet le spectre était plat, correspondant à une structure temporelle sans aucune corrélation. Ce résultat fût toutefois contredit ultérieurement par Van Orden et al. (2003) considérant que c'est l'imprédictibilité du stimulus qui provoquait ce blanchiment du comportement. Cette hypothèse selon laquelle l'exposant fractal serait altéré lorsque la tâche à exécuter exercerait trop de contraintes sur le sujet fut corroborée par les études de

Beltz et Kello (2006), Chen et al. (2001) et Correll (2008). Enfin, nous pouvons noter que Gilden et ses collaborateurs considèrent en préambule de leur article que :

« L'universalité des bruits 1/f suggère qu'ils ne résultent pas d'interactions physiques particulières, mais qu'ils sont plutôt une manifestation générale des systèmes complexes »

Pour résumer, la présence du phénomène de Hurst dans le mouvement humain est ubiquitaire. Bien que l(es)'origine(s) de la production de ces séries à longue mémoire chez l'humain demeure(nt) floue(s), étant supposément issues du système nerveux central et semblant constituer notre horloge interne, peu de doutes subsistent quant au fait qu'elles constituent la signature du système complexe qui les a produites et qu'elles représentent un gage d'adaptabilité à l'environnement dans lequel ce même système évolue. L'exposant fractal quantifie donc la complexité du sujet et peut être vu soit comme un marqueur de santé soit comme celui de l'expertise (Nourrit-Lucas, Tossa, Zélic, & Delignières, 2015). A notre connaissance, l'exposant fractal ne peut être altéré que de deux manières, dans le premier cas à cause du vieillissement ou de maladies, dans le deuxième à cause de contraintes excessives liées à la tâche utilisée pour l'estimer. Dans le cadre du vieillissement, il est apparu que cet exposant pouvait être altéré de manière précoce, c'est-à-dire avant même l'apparition de symptômes cliniques, nous laissant penser qu'il pourrait constituer un outil de prévention de la dépendance.

Ainsi, dans notre domaine, les auteurs sont confrontés à deux problèmes méthodologiques majeurs. Le premier concerne l'évaluation même de l'exposant fractal : il existe de nombreuses méthodes d'évaluation, chacune marquée par leurs qualités et biais respectifs. Le second étant la génération de signaux fractals nécessaires pour produire des dispositifs expérimentaux (métronomes, environnements virtuels) avec des propriétés de corrélation à long terme contrôlées. L'évaluation des méthodes d'estimation, d'une part, et des méthodes de simulation, d'autre part, pose un problème typique de circularité. En effet, lorsqu'un biais est identifié, il est difficile d'attribuer le problème, soit à la méthode de simulation soit à la méthode d'évaluation.

Afin de surmonter ce problème, nous avons proposé dans notre article *Biases in the simulation and analysis of fractal processes* (Roume, Ezzina, Blain, & Delignieres, 2019), une étude de validation croisée combinant trois méthodes de génération et trois méthodes d'analyse. Avant de présenter ces différentes méthodes, je vais présenter les deux modèles de processus à longue mémoire ayant été développés depuis la mise en évidence du phénomène de Hurst.

2.2. Deux modèles de fractales temporelles

2.2.1. Le modèle des mouvements Brownien fractionnaires (mBf) et bruits Gaussien fractionnaires (bGf)

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, Mandelbrot et Van Ness (1968) ont proposé un modèle ayant pour but de décrire les processus à longue mémoire. Ce modèle est basé sur le mouvement Brownien noté $B(t)$, lui-même modèle mathématique de la trajectoire d'une « grosse » particule dans un fluide. S'il a été initialement décrit par Robert Brown en 1827, c'est à Einstein (1905) qu'on doit une première description mathématique de ce mouvement. La nature du déplacement de cette particule étant par définition aléatoire, la description d'Einstein se fait à partir du déplacement quadratique moyen ($\overline{(\Delta x)^2}$) de celle-ci :

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{RT}{N} \frac{\Delta t}{3\pi\mu a} \quad (15)$$

Avec R la constante des gaz parfaits, T la température, N le nombre d'Avogadro, μ la viscosité du liquide, a le rayon de la particule, supposée sphérique, et Δt le temps correspondant au déplacement. Sachant que la variance d'une variable aléatoire est égale à $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ et que par définition l'espérance des accroissements du mouvement brownien $\mathbb{E}(\Delta x)$ est égale à 0, on peut déduire de l'équation précédente la variance du déplacement Δx comme :

$$V(\Delta x) = \mathbb{E}[(\Delta x)^2] \approx \overline{(\Delta x)^2} = \left(\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} \right) \times \Delta t \quad (16)$$

La moyenne étant la limite à l'infini de l'espérance mathématique, nous utilisons l'égalité asymptotique (\approx) pour décrire la variance des déplacements. La grandeur de la variance du mouvement brownien est donc uniquement fonction de la grandeur de l'intervalle de temps considéré à une constante près.

$$V_B \propto \Delta t \quad (17)$$

Dans leur papier de 1968 Mandelbrot et Van Ness ont introduit une généralisation du mouvement Brownien ordinaire : le mouvement brownien fractionnaire ou mBf où nous reprendrons la notation $B_H(t)$. Pour cette nouvelle famille de processus la variance de la formule d'Einstein est généralisée par la loi d'échelle suivante :

$$V_{B_H} \propto \Delta t^{2H} \quad (18)$$

Comme nous l'avons vu H , est tel que $0 < H < 1$. Cet exposant permet de classer les séries temporelles en fonction de leur structure de dépendance. Pour $0 < H < 0.5$ $B_H(t)$ est dit sous-diffusif et ses incréments sont anti-corrélés, tandis que pour $0.5 < H < 1$ $B_H(t)$ est dit sur-diffusif et ses incréments exhibent une mémoire à long terme. Dans le cas particulier où l'exposant H est égal à 0.5 , la variance de $B_H(t)$ est celle d'un mouvement Brownien ordinaire (diffusion normale), dont les incréments ne sont pas corrélés et de moyenne nulle et correspondent à un bruit blanc Gaussien.

Par définition, le mBf est entièrement décrit par sa fonction d'autocovariance, notée C :

$$C_{B_H}(t, s) = E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{V_H}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (19)$$

Lorsqu'on normalise l'autocovariance du mBf par sa variance V_H , nous obtenons la fonction d'autocorrélation de ce processus :

$$r_{B_H}(t, s) = \frac{C_{B_H}(t, s)}{V_H} = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (20)$$

Comme nous l'avons vu ci-avant les incréments du mBf peuvent être corrélés et l'exposant de Hurst nous donne des informations sur la nature de ces corrélations. Ainsi la dérivée de $B_H(t)$ devrait théoriquement être un bruit corrélé stationnaire. Toutefois, théoriquement encore, cette dérivée ne peut être calculée car le mouvement Brownien fractionnaire décrit une trajectoire continue infiniment brisée : c'est une conséquence de la propriété fondamentale d'autosimilarité au sens strict du mBf. On peut cependant estimer cette dérivée en utilisant une version discrétisée de $B_H(t)$ où les incréments sont définis sur un intervalle temporel m . Cette estimation est donc un processus discret et stationnaire appelé bruit Gaussien fractionnaire et noté $G_m(t)$:

$$G_m(t) = B_H(t) - B_H(t - m) \quad (21)$$

Comme pour les mBf, les bGf sont entièrement décrits par leur fonction d'autocorrélation qui est aisément dérivé de (20) et de (21) avec $m = 1$:

$$r_{G_1}(\tau) = \text{cov}(G_1(t); G_1(t + \tau)) = \frac{V_{G_1}}{2} (|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H}) \quad (22)$$

On peut rappeler que la limite asymptotique (i.e. lorsque $\tau \rightarrow \infty$) de la fonction d'autocorrélation des bGf est telle que :

$$r_{G_1}(\tau) \propto H(2H - 1)|\tau|^{2H-2} \quad (23)$$

2.2.2. Le modèle des processus autorégressifs et moyenne mobile à intégration fractionnaire (ARFIMA)

Au moment même où Mandelbrot publiait sa série de papiers sur le modèle des mBf et bGf, Box et Jenkins publièrent « *Time series analysis: forecasting and control* » (1970), un livre révolutionnant la modélisation des séries temporelles discrètes (Graves et al., 2017). Ils proposaient une nouvelle classe de processus dit ARIMA(p,d,q), combinant un modèle autorégressif à lag-multiple (AR) et un modèle de moyenne mobile (MA) avec un paramètre de différenciation d (I). Bien qu'il soit possible, en choisissant très précautionneusement les paramètres de ce modèle, de répliquer l'observation du

phénomène de Hurst sur une grande gamme de longueurs n , ce modèle faillit à reproduire le comportement asymptotique du phénomène de Hurst. En effet, dans cette mouture du modèle le paramètre d est un entier, or un $d = 0$ correspond à un processus stationnaire à mémoire courte tandis qu'un $d = 1$ correspond à un processus non stationnaire à mémoire longue. Ainsi, ce modèle ne peut reproduire de façon adéquate des comportements stationnaires à mémoire longue comme ceux observés par Hurst. Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981) ont proposé une évolution du modèle ARIMA (p,d,q) permettant au paramètre d de prendre des valeurs fractionnaires, cette évolution fût significative dans la prise en compte des phénomènes à longue mémoire car permettant de caractériser de façon typique ce genre de phénomènes. Cette nouvelle classe de processus, nommés ARFIMA (p,d,q) pour autorégressifs et moyenne mobile à intégration fractionnaire, se distinguent donc des mBf et bGf par leur prise en compte conjointe du comportement à long terme et de la dynamique à court terme, mais aussi surtout car il s'agit d'un modèle de processus à temps discret permettant son application directe aux signaux numériques, à la grande déception de Mandelbrot (2002) :

« Discretization is usually motivated by unquestionable convenience, but I view it as more than a detail. I favor very heavily the models that possess properties of time-invariance or scaling. In these models, no time interval is privileged by being intrinsic. In discrete-time models, to the contrary, a privileged time interval is imposed nonintrinsically »

Les processus ARFIMA (p,d,q) sont donc définis par trois composants. Le premier composant, autorégressif, suggère que l'observation courante $x(t)$ est déterminée par une somme pondérée des p observations précédentes plus une perturbation aléatoire $\varepsilon(t)$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^p \varphi(i)x(t-i) + \varepsilon(t) \quad (24)$$

Le deuxième composant, moyenne mobile, suppose quant à lui que l'observation courante $x(t)$ dépend de la somme pondérée des perturbations aléatoires qui affectent les q précédentes observations plus sa perturbation spécifique :

$$x(t) = \sum_{i=1}^q \theta(i)\varepsilon(t-i) + \varepsilon(t) \quad (25)$$

Enfin, le paramètre de différenciation d indique l'ordre de la différenciation qui doit être appliquée à la série avant modélisation. Généralement, les auteurs privilégient l'utilisation de l'opérateur retard B (*backshift operator*) tel que : $Bx(t) = x(t-1)$ afin de permettre une expression plus commode des processus ARFIMA (p,d,q) :

$$\varphi(B)(1-B)^d x(t) = \theta(B)\varepsilon(t) \quad (26)$$

où $\varphi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi(j)B^j$ est le composant autorégressif, et $\theta(B) = \sum_{j=0}^q \theta(j)B^j$ est le composant moyenne mobile.

Dans l'étude de la complexité du mouvement humain, notre intérêt principal est d'évaluer les propriétés fractales des signaux temporels, or c'est la forme la plus simple de ce modèle (i.e. ARFIMA (0,d,0)) qui contient toutes les propriétés des fractales temporelles. L'expression mathématique de ce modèle est la suivante :

$$(1-B)^d x(t) = \varepsilon(t) \quad (27)$$

Avec :

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-1)^j B^j \quad (28)$$

Ce modèle ARFIMA (0,d,0) est défini pour : $-1/2 < d < 1/2$. Granger et Joyeux (1980), ainsi qu'Hosking (1981) montrent qu'à partir de ces expressions, il est possible de calculer le processus stationnaire à longue mémoire $x(t)$ en corrélant le bruit blanc $\varepsilon(t)$ de la manière suivante :

$$x(t) = A(B)\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\varepsilon(t-j) \quad (29)$$

Avec :

$$a(j) = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \quad (30)$$

Hosking (1981) a montré que la fonction d'autocorrélation de ce processus s'écrit :

$$r(\tau) = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(\tau+d)}{\Gamma(d)\Gamma(\tau+1-d)} \quad (31)$$

Avec le comportement asymptotique :

$$r(\tau) \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} |\tau|^{2d-1} \text{ pour } \tau \rightarrow \infty \quad (32)$$

Cette décroissance dite hyperbolique est moins rapide qu'une décroissance exponentielle et correspond donc bien à la décroissance attendue pour un processus à longue mémoire. La puissance de décroissance en limite asymptotique étant similaire pour les bGf et les ARFIMA (0,d,0) on peut dériver une relation d'égalité entre le paramètre de différenciation d et l'exposant de Hurst H tel que :

$$2H - 2 = 2d - 1 \quad (33)$$

Et donc obtenir la relation :

$$d = H - \frac{1}{2} \quad (34)$$

Plusieurs représentations de la densité spectrale de puissance sont possibles que l'on se place dans le domaine des nombres réels ou des nombres complexes. Nonobstant, je préfère la formulation dans le domaine des nombres réels donnée par Hosking (1981):

$$S(f) = \left(2 \sin \frac{1}{2} f\right)^{-2d} \quad (35)$$

Lorsque f tend vers 0, cette densité spectrale de puissance varie comme :

$$S(f) \propto f^{-2d} \quad (36)$$

Si l'on injecte H dans ce comportement limite il vient :

$$S(f) \propto f^{-2H+1} \quad (37)$$

Ce qui correspond bien au comportement des bGf et donc à celui d'une fractale temporelle.

2.2.3. D'un modèle à l'autre

J'ai exposé dans cette partie deux modèles mBf/bGn et ARFIMA (0,d,0) dont les caractéristiques singulières mènent à des propriétés communes décrivant les phénomènes à longue mémoire. Ces deux modèles furent utilisés dans de nombreux domaines, toutefois la flexibilité du modèle ARFIMA ainsi que sa facilité d'utilisation comparée à celle du mBf en ont fait le modèle de choix dans des domaines tels que l'hydrologie ou l'économie tandis que le modèle mBf/bGf garda sa popularité dans le domaine de la physique (Graves, Gramacy, Watkins, & Franzke, 2017).

Dans le tableau suivant, j'ai résumé le domaine d'application de ces modèles (*mo*) en fonction des propriétés de stationnarité (*st*) et de corrélation (*r*) ainsi que des intervalles de valeurs que prennent les divers exposants d'échelle : H , l'exposant de Hurst ; d , le paramètre de différentiation des ARFIMA (0,d,0) ; β , l'exposant spectral et α l'exposant de la DFA introduite par (Peng et al., 1994). Les séries issues du mouvement humain étant souvent caractérisées par un exposant α oscillant autour de 1, et par souci de lisibilité, tous les résultats que je présenterai seront dans la métrique α .

mo		Bruits $G_m(t)$ / ARFIMA (0,d,0)			Mouvement $B_H(t)$				
st		Stationnaire			Non stationnaire				
r		Antipersistant	0	Persistant					
H		$0 < H < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < H < 1$	$0 < H < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} < H < 1$				
d		$\frac{1}{2} < d < 0$	0	$0 < d < \frac{1}{2}$					
β	-1	$-1 < b < 0$	0	$0 < b < 1$	1	$1 < b < 2$	2	$2 < b < 3$	3
α	0	$0 < a < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < a < 1$	1	$1 < a < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < a < 2$	2

Tableau 1 : Domaine d'application des modèles mBf/bGf et ARFIMA en fonction des propriétés de stationnarité (st) et de corrélation (r) ainsi que des intervalles de valeurs que prennent les divers exposants d'échelle : H , l'exposant de Hurst ; d , le paramètre de différentiation des ARFIMA (0,d,0) ; β , l'exposant spectral et α l'exposant de la DFA

Enfin, je présente dans ce dernier tableau une matrice de conversion pour les différents exposants d'échelle : H , l'exposant de Hurst ; d , le paramètre de différentiation des ARFIMA (0,d,0) ; β , l'exposant spectral, α l'exposant de la DFA et γ l'exposant de la décroissance hyperbolique de l'autocorrélation. J'ai décidé d'inclure cette dernière métrique par souci de lisibilité car certains auteurs l'ont utilisé, toutefois à ma connaissance aucune méthode d'analyse ni aucun modèle n'en fait directement l'usage. Les couleurs de ce tableau correspondent au domaine d'application de ces exposants, en vert le domaine des bruits, en orange le domaine des mouvements et en bleu dans le continuum bruit-mouvement.

	H		d	γ	β		α	
$H =$	H	H	$d + \frac{1}{2}$	$\frac{(\gamma + 2)}{2}$	$\frac{(\beta + 1)}{2}$	$\frac{(\beta - 1)}{2}$	α	$\alpha - 1$
$d =$	$H - \frac{1}{2}$		d	$\frac{(\gamma + 1)}{2}$	$\frac{\beta}{2}$		$\alpha - \frac{1}{2}$	
$\gamma =$	$2H - 2$		$2d - 1$	γ	$\beta + 1$		$2\alpha - 2$	
$\beta =$	$2H - 1$	$2H + 1$	$2d$	$\gamma - 1$	β		$2\alpha - 1$	
$\alpha =$	H	$H + 1$	$d + \frac{1}{2}$	$\frac{(\gamma + 2)}{2}$	$\frac{(\beta + 1)}{2}$		α	

Tableau 2 : Matrice de conversion des différents exposants d'échelle : H , l'exposant de Hurst ; d , le paramètre de différentiation des ARFIMA $(0,d,0)$; β , l'exposant spectral, α l'exposant de la DFA et γ l'exposant de la décroissance de l'autocorrélation. Domaine d'application des exposants : en vert le domaine des bruits, en orange le domaine des mouvements et en bleu dans le continuum bruit-mouvement. Les cases vides correspondent au fait que le facteur de différenciation d et l'exposant de décroissance de l'autocorrélation γ n'existent pas dans le domaine des mouvements.

2.3. Des méthodes d'analyse de fractales temporelles

Alors que nous avons exploré les deux principaux modèles de processus temporels à longue mémoire, nous allons nous tourner maintenant vers les méthodes d'analyse de signaux relevant de ce type processus. Comme nous l'avons vu en introduction de cette partie, les processus fractals ont fait l'objet d'un intérêt grandissant dans le domaine des sciences du mouvement humain et plus particulièrement dans le domaine de la réhabilitation. Ainsi l'évaluation du niveau des corrélation à long terme dans les séries physiologiques, et donc a fortiori de la complexité du sujet ayant produit ces séries, est l'un des deux problèmes méthodologiques majeurs que les auteurs du champ ont eu à résoudre tant il existe de méthodes différentes permettant d'estimer l'exposant fractal des signaux autosimilaires, chacune étant caractérisée par des biais spécifiques.

Ces méthodes peuvent être classées selon le type de propriété testée (Jennane, Harba, & Jacquet, 2001): les méthodes basées sur les propriétés de la géométrie fractale, les méthodes temporelles, les méthodes fréquentielles et les méthodes basées sur une analyse multi-échelle. Dans notre article (Roume et al., 2019) nous avons souhaité adresser les

biais relatifs à trois analyses utilisées dans le champ des sciences du mouvement humain. La première, l'analyse des fluctuations redressées (DFA pour *detrended fluctuation analysis*) est une méthode multi-échelle d'estimation directe (i.e. heuristique) basée sur la propriété de proportionnalité de la variance des fBm (18), c'est peut-être la méthode la plus populaire parmi les auteurs du champ tant par sa simplicité d'implémentation (Beran, 2013) que par sa bonne précision pour une méthode heuristique. La deuxième, l'analyse spectrale par densité spectrale de puissance (PSD pour *power spectral density*), est une méthode fréquentielle basée sur le comportement spectral en $1/f^{\beta}$ (13) des processus fractals, bien que très facile d'utilisation et donnant une « image » directe des processus à l'œuvre dans les séries physiologiques (Torre & Delignières, 2008a), cette méthode s'est démontrée très peu performante dans l'estimation du niveau des corrélations à long terme (Jennane et al., 2001). Enfin la troisième méthode, l'estimation par maximum de vraisemblance par approximation de Whittle (MLE pour *maximum likelihood estimator*) est une méthode d'estimation temporelle dans le cas classique et fréquentielle dans le cas de l'approximation de Whittle. Cette méthode se différencie des deux premières car elle ne procède pas par estimation directe de H par régression dans une échelle bi-logarithmique mais elle est fondée sur les propriétés statistiques des fonctions d'autocorrélation des bruits autosimilaires discrets (21) ou (30), cette méthode s'est montrée d'une excellente précision dans l'estimation des exposants d'échelle. Dans le cadre de notre papier nous avons utilisé la variante de Whittle basée sur les propriétés spectrales des processus ARFIMA $(0,d,0)$ (35).

2.3.1. L'analyse des fluctuations redressées (DFA)

L'analyse des fluctuations redressées (DFA pour *detrended fluctuation analysis*), est une version modifiée de l'analyse de la moyenne quadratique d'une marche aléatoire. Elle fut introduite par Peng et al. (1994) pour mettre en évidence des processus à longue mémoire dans les séquences ADN. Outre sa simplicité d'utilisation et d'implémentation, l'une des raisons principales de l'utilisation de la DFA est qu'elle évite de détecter des structures de corrélations qui sont en réalité des artefacts dus aux non-stationnarités potentiellement présentes dans les séries temporelles (Kantelhardt et al., 2002). La DFA est basée sur la relation de Mandelbrot (18) selon laquelle la variance σ^2 d'un processus mBf croît en loi puissance selon l'intervalle de temps considéré n (i.e. $\sigma^2 \propto n^{2\alpha}$).

L'idée est donc calculer l'écart-type moyen $\bar{\sigma}(n)$ sur un ensemble d'intervalles de temps n puis d'estimer α via une régression linéaire dans l'espace logarithmique :

$$\log \bar{\sigma}(n) \approx \alpha \log n \quad (38)$$

L'algorithme de la DFA est le suivant : dans une première étape, la série originale $x(t)$ de longueur N avec $t = 1, 2, \dots, N$ est centrée et intégrée, pour un bGf on obtient un mBf dont l'espérance des accroissements est nulle, pour un mBf on obtient une famille non déterminée de processus sur-diffusifs.

$$X(i) = \sum_{t=1}^N \left(x(t) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t) \right) \quad (39)$$

Cette nouvelle série, est ensuite divisée en N_n intervalles contigus de longueur d'échelle n , les derniers $N - N_n \times n$ points sont exclus de l'analyse. Dans chaque segment $s = 1, 2, \dots, N_n$ la tendance locale $X_{n,s}(k)$ ou $k = (s-1)n + 1, \dots, sn$ est estimée via une droite des moindres carrés et soustraite de $X(i)$. Puis la variance redressée est alors calculée sur chaque segment s :

$$F^2(n, s) = \frac{1}{n} \sum_{k=(s-1)n+1}^{sn} [X(k) - X_{n,s}(k)]^2 \quad (40)$$

La fonction de fluctuation, autrement dit l'écart-type moyen est ensuite calculé pour chaque échelle comme la racine de la moyenne des variances redressées pour chaque longueur d'échelle n :

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N_n} \sum_{s=1}^{N_n} F^2(n, s)} \quad (41)$$

Classiquement la fonction de fluctuation est calculée pour des longueurs d'échelles allant de $n = 10$ à $n = N/2$.

Le fait d'inscrire cette fonction dans l'espace logarithmique produit des valeurs de n non uniformément distribuées ce qui influence l'estimation de α à cause du poids disproportionné de la région des échelles longues. C'est pourquoi Almurad et Delignières (2016) ont proposé une évolution de cet algorithme où la fonction de fluctuation est moyennée sur des étendues également réparties dans l'espace logarithmique. Cette opération a pour effet de réduire grandement la variabilité de l'estimation de l'exposant d'échelle. La procédure consiste à diviser l'abscisse logarithmique en P fenêtres de longueur $(\log_{10}(n_{\max}/n_{\min}))/P$ en démarrant à partir de $\log_{10}(n_{\min})$. Les fenêtres d'ordre $p = 1, 2, \dots, P$ sont donc définies par :

$$fen\hat{e}tre(p) = \left[\log_{10}(n_{\min}) + \frac{p-1}{P} \log_{10} \left(\frac{n_{\max}}{n_{\min}} \right); \log_{10} n_{\min} + \frac{p}{P} \log_{10} \left(\frac{n_{\max}}{n_{\min}} \right) \right] \quad (42)$$

Dans les résultats que nous avons présentés dans Roume et al. (2019) nous avons estimé l'exposant fractal sur $P = 18$ fenêtres, nous avons choisi cette valeur de manière arbitraire sans nous poser la question d'une éventuelle dépendance entre la qualité de l'estimation de l'exposant d'échelle et le nombre de fenêtre choisi. Toutefois, Liddy et Haddad, (2018) ont montré que la précision et la cohérence de l'estimation de l'exposant était globalement non affectée par la valeur de P .

2.3.2. Estimation par spectre de puissance ($^{low}PSD_{we}$) :

Une deuxième méthode d'évaluation de l'exposant fractal repose sur les propriétés spectrales des processus à longue mémoire (13). Cette méthode consiste à estimer la densité spectrale de puissance (PSD pour *power spectral density*) en utilisant l'algorithme de transformée de Fourier rapide, puis à estimer l'exposant α , via une régression linéaire dans l'espace logarithmique sur le spectre :

$$\log S(f) \propto -(2\alpha - 1) \log f \quad (43)$$

D'une manière générale, l'estimation directe de α via la densité spectrale se révèle être très peu performante (Fougere, 1985; Eke et al., 2000; Jennane et al., 2001).

En effet, dans le domaine des mouvements la non-stationnarité du signal rajoute artificiellement des hautes fréquences tandis que dans le domaine des bruits l'estimation est biaisée pour des valeurs de α différentes de 0,5. De plus, lorsque la série est marquée tant par des comportements de correction à court terme que par de la mémoire à long terme, la PSD capture en même temps ces deux comportements l'un étant basse fréquence (i.e. longue mémoire) et l'autre haute fréquence (i.e. correction à court terme). Cette dernière caractéristique peut se révéler utile lorsqu'on cherche à distinguer deux comportements moteurs (Torre & Delignières, 2008a) mais devient gênante lorsqu'il s'agit de déterminer le comportement corrélationnel.

Dans Roume et al. (2019) nous avons utilisé une version modifiée de la PSD introduite par Fougère (1985) puis modifiée par Eke et al. (2000) appelée par ces derniers $^{low}PSD_{we}$. Dans cette méthode, on utilise une combinaison d'opérations de prétraitement de la série, censée améliorer l'estimation de l'exposant fractal. Dans un premier temps la série temporelle $x(t)$ avec $t = 1, 2, \dots, N$ est centrée puis une fenêtre parabolique $W(t)$ est appliquée :

$$x_w(t) = x(t) \times W(t) \quad (44)$$

Avec :

$$W(t) = 1 - \left(\frac{2t}{N+1} - 1 \right)^2 \quad (45)$$

Puis un « *bridge detrending* » est effectué en soustrayant à la série $x_w(t)$ la ligne $l(t)$ connectant le premier $x_w(1)$ et le dernier point de la série $x_w(N)$:

$$x_{w,l}(t) = x_w(t) - l(t) \quad (46)$$

Avec :

$$l(t) = \frac{(x_w(1) - x_w(N)) * (N - t)}{N - 1} + x_w(N) \quad (47)$$

La densité spectrale de puissance est ensuite estimée sur la série $x_{w,l}(t)$ et l'exposant α est estimé par une régression linéaire dans l'espace logarithmique sur les basses fréquences (les fréquences supérieures à $f = 1/8$ de la plage de fréquences sont exclues de la régression).

2.3.3. Estimation par maximum de vraisemblance par approximation de Whittle :

L'estimation par maximum de vraisemblance (MLE pour *maximum likelihood estimator*) est selon Jennane et al., (2001) « une méthode fréquemment utilisée en traitement du signal du fait de ses bonnes propriétés » qui donne d'excellents résultats pour l'estimation de l'exposant fractal car fondée sur la fonction d'autocorrélation discrète des processus à longue mémoire et non sur une régression dans l'espace logarithmique. Toutefois cette méthode reste peu utilisée dans l'estimation des exposants fractals dans le domaine du mouvement humain, car soit chronophage (Delignieres et al., 2006) soit impossible à calculer lorsqu'on a à faire à des signaux de taille importante (supérieur à quelques milliers de points), en effet, les besoins de l'estimateur par maximum de vraisemblance excèdent la mémoire théoriquement disponible dans nos machines qui calculent en format flottant pour des signaux excédant les quelques milliers de points. Il existe cependant une approximation de cet estimateur dans le domaine fréquentiel qui s'appuie sur la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation des processus à longue mémoire. L'approximation de Whittle du logarithme de la fonction de vraisemblance (LFVW) s'exprime dans le cas discret :

$$LFVW(x, \alpha, c) = \sum_{j=1}^{m^*} \left(-\ln T(j; \alpha, c) - \frac{P(j)}{T(j; \alpha, c)} \right) \quad (48)$$

Où :

- m^* est la partie entière de $\frac{N-1}{2}$
- T est la densité spectrale de puissance théorique dans le domaine des bruits, donnée par la transformée de Fourier de (22) pour les bGf et par (35) pour les ARFIMA (0,d,0)
- P est la densité spectrale de puissance du signal dont on veut estimer l'exposant fractal
- c est une constante de proportionnalité qui permet d'ajuster la puissance du processus théorique à celle du signal

Le principe est de trouver le maximum de cette fonction, qui dépend des paramètres α et c . Ainsi dans un premier temps on calcule la constante c via :

$$c = \frac{\sum_{j=1}^{m^*} P(j)}{\sum_{j=1}^{m^*} T(j, \alpha)} \quad (49)$$

Puis on l'injecte dans (48) pour obtenir une estimation de la valeur de α par maximum de vraisemblance à l'approximation de Whittle via le problème d'optimisation suivant :

$$\alpha = \max_{0 < \alpha < 1} \left\{ \sum_{j=1}^{m^*} \left(-\ln cT(j; \alpha) - \frac{P(j)}{cT(j; \alpha)} \right) \right\} \quad (50)$$

Dans Roume et al. (2019), nous nous sommes appuyés sur les propriétés spectrales des ARFIMA et avons utilisé l'estimateur par maximum de ressemblance par approximation de Whittle fourni par Intzelt dans le package : « *ARFIMA(p,d,q) estimator* » disponible sur la plateforme centrale d'échange de fichiers Matlab. Notons qu'il est toutefois possible d'utiliser le MLE dans le domaine temporel à partir des propriétés d'autocorrélation des bGf (Jennane et al., 2001).

Comme nous l'avons vu, le MLE et les ARFIMA(0,d,0) sont limités au domaine des bruits, afin de pouvoir estimer la valeur de α dans le domaine des mouvements Diebolt et Guiraud (2005) ont proposé d'appliquer l'estimation à la version différenciée au premier ordre du mouvement puis d'estimer l'exposant α en ajoutant 1 à la valeur obtenue via l'estimation. Cette stratégie requiert toutefois une classification a priori entre bruit et mouvement, certaines solutions basées sur l'application préliminaire de méthodes fonctionnant indifféremment sur les bruits et mouvements telles que la PSD et la DFA ont été proposées mais furent marquées par des pourcentages très importants de mauvaise classification autour de la frontière $1/f$ (Eke et al., 2000; Delignieres et al., 2006). Afin d'estimer les propriétés ARFIMA via le MLE indifféremment sur nos données nous nous sommes appuyés sur les bornes insérées par Intzelt dans son algorithme. Conformément aux propriétés des ARFIMA (0,d,0) la borne supérieure de d est égale à 0,5, et ainsi l'algorithme est donc configuré pour optimiser la fonction (50) sur la plage de valeur $d \in]-0,5 ; 0,5[$ (i.e. $\alpha \in]0 ; 1[$).

Lorsqu'il ne converge pas sur la borne supérieure, la valeur n'est pas estimée mais remplacée par une valeur théorique $d = 0,4999$. Lorsque l'estimation était égale à cette valeur, nous avons considéré ce signal comme étant un mouvement et appliqué à nouveau l'estimation sur la version différenciée du signal. Afin de rester dans la logique du continuum bruit/mouvement présentée ci-avant, l'exposant d'échelle des séries différenciées était calculé comme $\alpha = d + 3/2$ tandis que celui des séries non différenciées était calculé comme $\alpha = d + 1/2$.

2.4. Des méthodes de génération de fractales temporelles

Afin d'adresser les biais relatifs à chacune des méthodes d'analyse que nous venons d'étudier, il nous a fallu générer des signaux fractals pour lesquels nous contrôlions l'exposant d'échelle. Toutefois, comme nous l'avons vu en introduction l'évaluation des méthodes d'analyse via l'utilisation de séries artificielles pose un problème de circularité : quand un biais est identifié, il se révèle difficile de l'attribuer soit à la méthode d'analyse soit à la méthode de génération. C'est pourquoi dans Roume et al. (2019) nous avons présenté trois méthodes de génération de signaux fractals, chacune basé sur des propriétés différentes. Ainsi, lorsqu'un biais était identifié quelle que soit la méthode d'analyse, il pouvait être attribué à la méthode de génération.

2.4.1. L'algorithme de Davies et Harte

L'algorithme proposé par Davies and Harte (1987) est une méthode de génération de séries fractales dite exacte car basée sur les propriétés statistiques du bGf. En effet, comme nous l'avons vu dans la partie sur le modèle bGf / mBf, les bGf sont par définition entièrement décrits par leur fonction d'autocorrélation (22). Le principe de cet algorithme est basé sur l'application du théorème de Wiener-Khintchine selon lequel la densité spectrale de puissance d'un processus stochastique stationnaire est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

Soit $r_{G_1}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation exacte d'un processus bGf, de longueur N et d'exposant α , calculée à partir de l'équation (22). On peut déduire la densité spectrale de puissance exacte $S(f)$ à partir de la transformée de Fourier discrète de la séquence de covariance de valeurs suivantes :

$$\left\{r_{G_1}(0), r_{G_1}(1), \dots, r_{G_1}\left(\frac{N}{2}-1\right), r_{G_1}\left(\frac{N}{2}\right), r_{G_1}\left(\frac{N}{2}+1\right), \dots, r_{G_1}(N-1)\right\} \quad (51)$$

A savoir :

$$S(f) = \sum_{\tau=0}^{\frac{N}{2}} r_{G_1}(\tau) e^{-2\pi i f \tau / N} + \sum_{\tau=\frac{N}{2}+1}^{N-1} r_{G_1}(N-\tau) e^{-2\pi i f \tau / N} \quad (52)$$

Où $f = 0, 1, \dots, N-1$. Avant d'aller plus avant, il faut impérativement vérifier si chaque élément de la série $S(f)$ est positif sous peine que la méthode échoue. Soit $W_{gn}(f)$ un bruit blanc Gaussien où $f = 0, 1, \dots, N-1$. Les amplitudes spectrales sont calculées selon les équations suivantes :

Pour $f = 0$:

$$V(0) = \sqrt{NS(0)} \times W_{gn}(0) \quad (53)$$

Pour $f = 1, \dots, \frac{N}{2}-1$:

$$V(f) = \sqrt{\frac{NS(f)}{2}} \times (W_{gn}(2f-1) + iW_{gn}(2f)) \quad (54)$$

Pour $f = \frac{N}{2}$:

$$V\left(\frac{N}{2}\right) = \sqrt{NS\left(\frac{N}{2}\right)} \times W_{gn}(N-1) \quad (55)$$

Pour $f = \frac{N}{2}+1, \dots, N-1$:

$$V(f) = \sqrt{\frac{NS(f)}{2}} \times (W_{gn}(2N-1-2f) - iW_{gn}(2N-2f)) \quad (56)$$

Finalement le signal $x(t)$ où $t = 1, 2, \dots, N$ est obtenu en calculant la transformée de Fourier inverse des N amplitudes $V(f)$.

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(f)] = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} V(f) e^{2\pi i f t / N} \quad (57)$$

Cet algorithme étant basé sur le théorème de Wiener-Khintchine, il se révèle impossible de calculer directement un signal mBf via celui-ci. Craigmile (2003) suggère donc pour ce faire de générer un bGf puis d'en faire la somme cumulée conformément à l'équation (21) afin d'obtenir un processus mBf discret. Notons que Craigmile montre qu'il est aussi possible d'utiliser cet algorithme pour obtenir des processus à longue mémoire à partir des propriétés d'autocorrélation des ARFIMA $(0,d,0)$ données par l'équation (31).

2.4.2. Synthèse Spectrale

La méthode de synthèse spectrale (SSM pour *spectral synthesis method*), introduite par Saupe dans Peitgen et al. (1988), est conçue pour produire des bGf et des mBf à partir des caractéristiques spectrales de ces processus. L'idée de la SSM est de générer des densités spectrales de puissance, notée $S(f)$, avec les bonnes pentes en $2\alpha - 1$, puis de transformer ces spectres par transformée de Fourier inverse afin d'obtenir le mBf ou le bGf correspondant.

Soit $x(t)$, un signal mBf ou bGf de longueur N et d'exposant α . Soit $X(f)$ sa transformée de Fourier. La densité spectrale de puissance $S(f)$, c'est-à-dire le carré du module de $X(f)$ est par définition proportionnel à $f^{-2\alpha+1}$:

$$S(f) = |X(f)|^2 \propto \frac{1}{f^{2\alpha-1}} \quad (58)$$

$X(f)$ étant une série de nombres complexes, on peut l'écrire sous forme trigonométrique:

$$X(f) = a(f) \cos \phi(f) + ia(f) \sin \phi(f) \quad (59)$$

Avec $a(f)$ l'amplitude et $\phi(f)$ la phase. Le module s'écrit donc :

$$|X(f)| = \sqrt{(a(f) \cos \phi(f))^2 + (a(f) \sin \phi(f))^2} = \sqrt{a_f^2} = a_f \quad (60)$$

En injectant (60) dans (58) on obtient la relation de proportionnalité :

$$a(f) \propto \frac{1}{f^{\alpha-0,5}} \quad (61)$$

Pour générer la série $X(f)$ il nous faut donc générer les amplitudes $a(f)$ via l'équation suivante :

$$a(f) = \frac{W_{gn}(f)}{f^{\alpha-0,5}} \quad (62)$$

Où $W_{gn}(f)$ est un bruit blanc Gaussien et f l'étendue de fréquences telle que $f = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$

Afin de générer $X(f)$ il nous faut aussi générer un vecteur de phases aléatoires $\phi(f)$ uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$:

$$\phi(f) = 2\pi \times W_{un}(f) \quad (63)$$

Où $W_{un}(f)$ est un bruit blanc uniforme.

On peut maintenant calculer les coefficients complexes :

$$\begin{aligned} C_a(f) &= a_f \cos \phi_f \\ C_b(f) &= a_f \sin \phi_f \end{aligned} \quad (64)$$

Afin de respecter le théorème de Shannon, ces coefficients sont ensuite étendus sur l'ensemble des valeurs attendues N tel que les coefficients C_a de $(N/2) + 1$ à N sont égaux aux coefficients C_a de $(N/2)$ à 1 et les coefficients C_b de $(N/2) + 1$ à N sont égaux aux coefficients C_b de $(N/2)$ à 1. On forme ainsi la série complexe $X(f)$ en injectant ces coefficients dans (59) puis on obtient $x(t)$ par transformée inverse de Fourier de $X(f)$:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \frac{1}{N} \sum_{f=1}^N X(f) e^{2\pi i f t / N} \quad (65)$$

2.4.3. ARFIMA (0,d,0)

La méthode de génération d'un processus ARFIMA (0,d,0) est extrêmement simple, elle n'est qu'une mise en action des équations (29) et (30). Il suffit de générer une séquence de bruit blanc gaussien de longueur voulue N puis de le corrélérer via (29) en fixant la valeur de d souhaitée dans (30).

Le seul choix à effectuer est de déterminer la taille de la somme de l'équation (29) qui théoriquement est infinie et évidemment ne peut être calculée. Cette taille dépend toutefois des capacités de calcul de la fonction $\Gamma(x)$ par le système informatique utilisé, pour un système à virgule flottante en 64bits la valeur de x maximum calculable par la fonction $\Gamma(x)$ est égale à 171, ainsi la somme dans l'équation (30) ne peut être calculée que jusqu'à $j = 170$. Dans Roume et al. (2019) nous avons utilisé l'algorithme proposé par Fatichi sur la plateforme d'échange de fichier Matlab, où la somme dans (29) est effectuée jusqu'à une valeur $j = 100$.

2.5. De la théorie à la pratique

Nous avons vu dans ce chapitre que le phénomène de Hurst peut être trouvé dans le mouvement humain et que, de surcroît, l'exposant fractal pouvait être considéré comme un marqueur de santé. Ainsi, maintenant que nous avons exploré les deux principaux modèles de signaux fractals, trois méthodes d'analyses dont deux largement utilisées dans le champ et trois méthodes de génération de signaux fractals, nous allons tenter de déterminer : d'une part quelle méthode d'analyse est préférable dans l'analyse des signaux physiologiques, autrement dit la méthode la moins biaisée ; et d'autre part, quelle tâche physiologique permet la plus grande expression de la complexité de nos participants, c'est-à-dire celle qui exerce le moins de contrainte sur ceux-ci.

Chapitre 3 : L'évaluation de la complexité

3.1. Quelle méthode d'analyse de la complexité ?

Dans cette partie je vais présenter les résultats et les éléments de discussion que nous avons proposé dans notre article *Biases in the simulation and analysis of fractal processes* (Roume et al., 2019). Notre hypothèse de départ était que lorsqu'un biais était révélé par les trois méthodes d'analyse alors il devait être attribué à la méthode de génération et inversement lorsqu'un biais apparaissait quelle que soit la méthode de génération alors il devait être attribué à la méthode d'analyse. Afin d'explorer le continuum bruit/mouvement, nous avons généré des signaux dont les exposants d'échelle s'étendent dans le domaine des bruits de $\alpha = 0,1$ à $0,9$, par pas de $0,1$, et dans le domaine des mouvements de $\alpha = 1,1$ à $1,9$, par pas de $0,1$. Ces valeurs furent utilisées dans la plupart des études similaires (Delignieres et al., 2006; Eke et al., 2000; Torre, Delignières, & Lemoine, 2007). De plus, afin d'analyser plus précisément le comportement des méthodes de génération et d'analyse autour de la frontière $1/f$, nous avons généré des séries de $\alpha = 0,91$ à $1,09$ par pas de $0,01$. Cette étendue d'exposants fût rarement explorée dans la littérature (hors une exception notable, Stadnitski, 2012). Toutefois, ce focus près de la frontière $1/f$ semble être particulièrement intéressant car d'une part les problèmes de classification bruit/mouvement sont concentrés dans cet intervalle (Eke et al., 2000) et d'autre part car l'on peut avoir des doutes quant à l'hypothèse de continuité autour de cette frontière (Delignières, 2015). Nous avons utilisé les trois méthodes de génération que j'ai précédemment présentées pour générer 120 séries, de longueur N égale à 1024 points, pour les 37 valeurs de α que nous avons sélectionné.

3.1.1. Résultats

Nous avons présenté dans la figure 4 la relation entre les valeurs d' α que nous avons *rentrées* dans les algorithmes de génération « α théorique » et les valeurs moyennes des estimations d' α par les méthodes d'analyse « α estimé ». Si nous considérons la forme globale des résultats autour de la ligne d'identité, il semble évident que les méthodes d'estimation fonctionnent mieux lorsque les séries furent générées par les méthodes

appartenant au même domaine (voir les trois graphes sur la diagonale descendante). Cet effet avait déjà été observé par Eke et al. (2000).

La première ligne décrit les résultats obtenus par les trois méthodes d'analyse sur les séries générées par l'algorithme de Davies et Harte. Un biais commun apparaît dans les trois graphiques, avec une forte sous-estimation de α pour les séries de mouvement, proche de la limite $1/f$. Cela révèle une rupture manifeste du modèle bGf / mBf d'origine. Ce phénomène n'a pas été observé lorsque des séries ont été générées avec les deux autres méthodes.

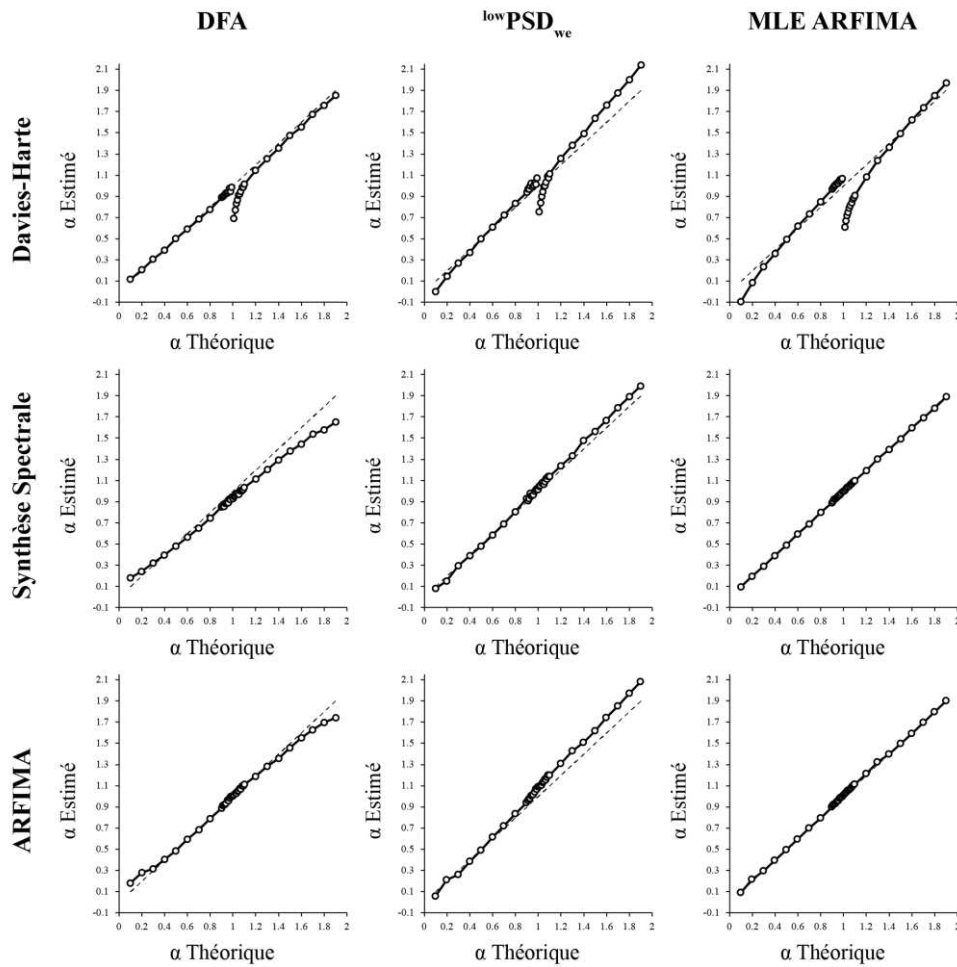


Figure 4 : Relation entre les valeurs théoriques et estimées de α . Première ligne : séries générées par l'algorithme de Davies et Harte via la fonction d'autocorrélation des bGf. Deuxième ligne : séries générées par la synthèse spectrale. Troisième ligne : séries générées par filtrage ARFIMA $(0,d,0)$. Colonnes de gauche : estimations par analyse des fluctuations redressées (DFA). Colonnes centrale : estimations par densité spectrale de puissance $^{low}PSD_{we}$. Colonnes de droite : estimations par l'estimateur du maximum de vraisemblance par approximation de Whittle sur les propriétés spectrales des ARFIMA $(0,d,0)$. La ligne en pointillés est la ligne d'identité.

Enfin, la DFA a tendance à sous-estimer α dans les séries de mouvement, spécifiquement lorsqu'elles ont été générées via synthèse spectrale et ARFIMA. Au contraire, la $^{low}PSD_{we}$ a tendance à surestimer α dans les séries de mouvement, spécifiquement lorsqu'elles ont été générées via l'algorithme de Davies et Harte et ARFIMA.

La figure 5 est un focus de la figure 4 sur la limite $1/f$ (i.e. de $\alpha = 0,9$ à $\alpha = 1,1$). La première ligne montre de manière plus nette la rupture autour de la limite $1/f$ pour les séries générées avec l'algorithme de Davies et Harte. De plus, elle révèle une légère surestimation des séries de bruit au voisinage la limite $1/f$ par les analyses spectrales et par estimation du maximum de vraisemblance. En revanche, les séries générées par synthèse spectrale et les ARFIMA présentent une continuité claire autour de la limite $1/f$, quelle que soit la méthode d'estimation. La DFA tend à sous-estimer α pour les séries générées par synthèse spectrale, mais pas pour les séries générées avec les ARFIMA. La densité spectrale de puissance a tendance à surestimer α sur cette plage de valeurs et ce quelle que soit la méthode de génération. Enfin, le MLE se révèle être excellent pour les séries générées par synthèse spectrale et par les processus ARFIMA.

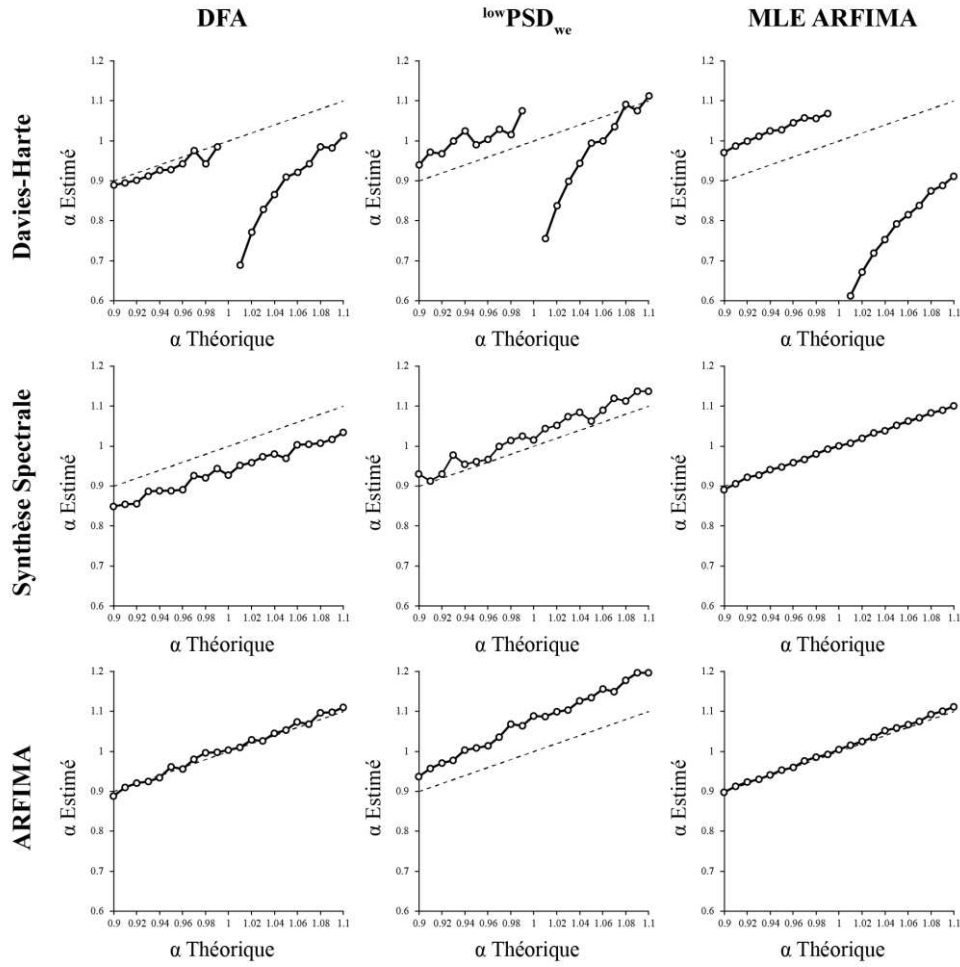


Figure 5 : Focus sur la relation entre les valeurs théoriques et estimées de α sur la frontière $1/f(0,9 \leq \alpha \leq 1,1)$.

Enfin, nous présentons en figure 6 l'écart-type des estimations pour chaque méthode de génération et d'analyse. Afin de faciliter les comparaisons entre les méthodes ces graphiques sont présentés selon la même échelle verticale. Globalement, les séries générées via l'algorithme de Davies et Harte et les processus ARFIMA sont moins variables que celles générées par synthèse spectrale. En ce qui concerne les méthodes d'estimation, la DFA montre une nette augmentation de la variabilité à mesure que l' α théorique augmente, effet qui n'est pas présent pour la $lowPSD_{we}$ et le MLE où la variabilité reste stable. Les estimations de la $lowPSD_{we}$ montrent une variabilité élevée, notamment pour les séries générées par synthèse spectrale, inversement les estimations par le MLE sont caractérisées par une faible variabilité.

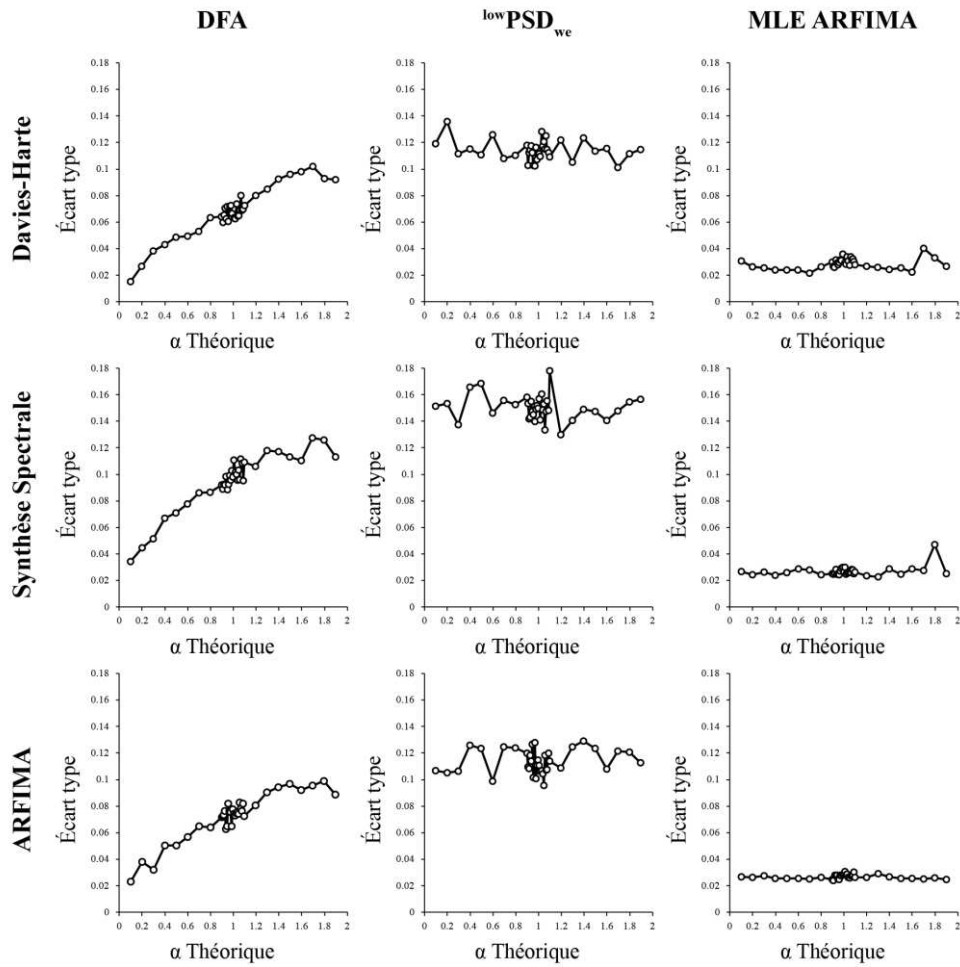


Figure 6 : Relation entre les valeurs théoriques et la variabilité des valeurs estimées de α

3.1.2. Discussion

3.1.2.1. Analyse des fluctuations redressées DFA :

La DFA fonctionne assez bien avec les séries de bruit mais présente un biais de sous-estimation systématique et un niveau élevé de variabilité pour les séries de mouvements. Pour comprendre ces mauvais résultats sur les séries de mouvement par rapport aux autres méthodes d'analyse, il est important de garder à l'esprit que la première étape de la DFA consiste en une intégration par cumulation des signaux, et dans ce cas précis à une intégration des séries de mouvements. Cette famille de processus sur-diffusifs n'est pas décrite par les modèles de processus autosimilaires, ainsi la propriété de diffusion exploitée par DFA ne semble pas appropriée pour analyser une telle famille (Delignières et al., 2006).

La DFA reste une méthode très populaire, qui présente l'avantage d'être applicable indifféremment aux familles des bruits et des mouvements. D'autres méthodes d'analyse des propriétés de variance ont donné des résultats satisfaisants, mais ne sont toutefois applicables qu'à une famille de processus fractals. L'analyse de dispersion ou l'analyse des étendues ajustées utilisée par Hurst par exemple ne fonctionnent que sur les bruits (Caccia, Percival, Cannon, Raymond, & Bassingthwaight, 1997), tandis que l'analyse de variance ajustée fenêtrée (Cannon, Percival, Caccia, Raymond, & Bassingthwaight, 1997) ne fonctionne que sur les mouvements. Cependant, les chercheurs sont souvent incapables de savoir à priori si les signaux qu'ils analysent appartiennent à l'une ou l'autre de ces familles, surtout lorsqu'ils sont proches de la limite $1/f$. Or la DFA permet de surmonter aisément ce problème. Les mauvaises performances de la DFA sur les signaux de mouvements pourraient certes être négligées du fait que la plupart des séries physiologiques appartiennent à la famille des bruits. Cependant dans certains cas comme par exemple l'analyse des oscillations posturales ou des fluctuations du regard, les signaux récoltés sont clairement non-stationnaires et doivent être considérés comme des mouvements. Dans ces cas précis, la solution consiste à appliquer la DFA sur des signaux différenciés ou tout simplement d'omettre l'étape d'intégration dans l'algorithme et d'ajuster l'exposant d'échelle en conséquence (Delignières, Torre, & Bernard, 2011; Stephen & Anastas, 2011).

Enfin, il convient de rappeler que les résultats que nous avons présentés ont été obtenus avec la version « uniformément distribuée » de la DFA, or il a été prouvé que cette modification améliore considérablement la précision et réduit la variabilité en comparaison de la méthode originale (Almurad & Delignières, 2016; Liddy & Haddad, 2018). En conclusion, si nous avons utilisé l'algorithme original nos résultats auraient été encore plus variables et probablement moins précis, ceci pose clairement la question de la réévaluation d'un ensemble conséquent de données ayant été analysée par l'algorithme de Peng. Au vu de nos résultats, cette réévaluation concernerait notamment les données appartenant à la classe des mouvements, mais aussi celles dont l'exposant d'échelle se situe proche de la frontière $1/f$.

3.1.2.2. L'analyse spectrale $^{low}PSD_{we}$

Malgré l'application des améliorations proposées par Eke et al. (2000), la $^{low}PSD_{we}$ a fourni les plus mauvais résultats d'estimation. En termes de précision, l'analyse spectrale a tendance à surestimer α dans les séries de mouvement et les résultats sont particulièrement décevants en termes de variabilité. La densité spectrale de puissance reste une méthode très populaire, notamment car elle fournit des résultats graphiques attrayants, nous l'avons vu, au-delà du comportement à long terme cette analyse donne des indications sur la présence et la nature des fluctuations à court terme dans les signaux (Delignières, Lemoine, & Torre, 2004; Wagenmakers, Farrell, & Ratcliff, 2004). Cependant, dans ce but spécifique qu'est la quantification du comportement à long terme, cette méthode est très peu performante et donc à éviter.

3.1.2.3. L'analyse des propriétés ARFIMA (0,d,0) via l'estimateur de maximum de vraisemblance par approximation de Whittle

L'analyse des propriétés ARFIMA a été négligée par la plupart des études antérieures comparant les méthodes fractales (Delignieres et al., 2006; Eke et al., 2000; Eke, Herman, Kocsis, & Kozak, 2002). Rangarajan et Ding (2000) ont développé une approche intégrée de l'analyse fractale associant des analyses spectrales et d'étendues ajustées toutefois ils n'ont jamais considéré les processus ARFIMA comme une alternative ou un complément possible. Pourtant cette méthode a fourni les estimations les plus précises et les moins variables dans notre étude.

Comme indiqué précédemment, l'analyse des propriétés ARFIMA ne se limite qu'au domaine des bruits. Comme proposé par Diebolt and Guiraud, (2005) nous avons différencié les séries non stationnaires avant l'application de l'analyse des propriétés ARFIMA, et cette méthode a donné de bons résultats, comme en témoigne la belle continuité observée autour de la limite $1/f$.

Dans Roume et al. (2019), nous nous sommes limités à l'estimation des propriétés du modèle ARFIMA (0,d,0) qui permettent d'isoler les structures de corrélation à long terme, ainsi que de fournir une meilleure estimation des exposants fractals. En effet, des processus à court terme peuvent parfois imiter des fluctuations de type $1/f$, donnant lieu à des détections fallacieuses de structures de corrélations à long terme avec des méthodes classiques telles que le DFA (Wagenmakers et al., 2004).

Une méthode proposée par (Torre, Delignières, et al., 2007) permet de tester le poids relatif de divers modèles ARMA et ARFIMA et ainsi de conclure quant à la présence effective de structures de corrélations à long terme. L'analyse des processus ARFIMA peut ainsi être calibrée afin de prendre en compte divers processus à mémoires courtes susceptibles d'être présents dans les séries empiriques.

3.1.2.4. L'algorithme de Davies et Harte

L'observation la plus importante sur les séries générées avec l'algorithme de Davies et Harte est la rupture qui concerne les mouvements près de la frontière $1/f$. Ce résultat obtenu quelle que soit la méthode d'analyse doit ainsi être attribué à la méthode de génération. Ce résultat a déjà été mis en évidence par Stadnitski (2012) qui suggérait :

« The observed discrepancies probably occurred due to the incapability of the Davies-Harte technique to provide fBm series with H close to 0. These results underline the importance of a proper data generation in simulation studies and indicate a revision of results from studies that employed the Davies-Harte technique »

Delignières (2015) a montré que ce biais n'était pas à attribuer à l'algorithme de Davies et Harte mais au modèle bGf / mBf lui-même. En se basant sur les fondements du modèle et plus particulièrement sur les propriétés d'autocorrélation des bGf (22), l'auteur a dérivé une expression analytique de l'autocorrélation des mBf discrets :

$$r_{mBf}(\tau) = 1 - \frac{N(N-1)\tau^{2H}}{2 \sum_{i=1}^{N-1} [(N-i)i^{2H}]} \quad (66)$$

Où N est la longueur du signal. Nous avons reporté dans la figure 7 les autocorrélations théoriques au lag 1 calculés pour les bGf (i.e. pour α de 0 à 1) conformément à l'équation (22) et celles calculées pour les mBf (i.e. pour α de 1 à 2) conformément à l'équation (66) pour une valeur de $N = 1024$. Ces résultats mettent en avant une rupture des propriétés de corrélation autour de la frontière $1/f$, et le comportement asymptotique des mBf pour α tendant vers 1 est celui d'un bruit blanc non corrélé.

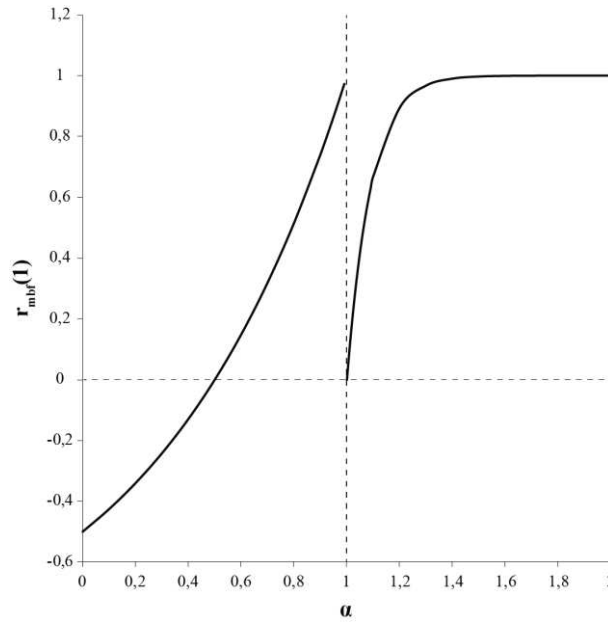


Figure 7 : Autocorrélations théoriques au premier décalage pour les bGf basés sur l'équation (22) et pour les mBf basés sur l'équation (66) pour des valeurs de α allant de 0 à 2 (adapté de Delignières, 2015).

Ceci suggère que les signaux mBf obtenus par sommation cumulée des bGf correspondant sont en réalité des bGf pour les valeurs très basses de H . Nous avons calculé, à partir de l'équation (66) les valeurs de $r_{mBf}(1)$ pour des valeurs de H allant de 0,01 à 0,1 et les avons comparés aux valeurs moyennes des autocorrélations au lag 1 des signaux simulés via l'algorithme de Davies et Harte. Ces résultats sont illustrés dans la figure 8 et montrent que la structure corrélacionnelle des séries simulées correspond à celle prévue par le modèle bGf / mBf.

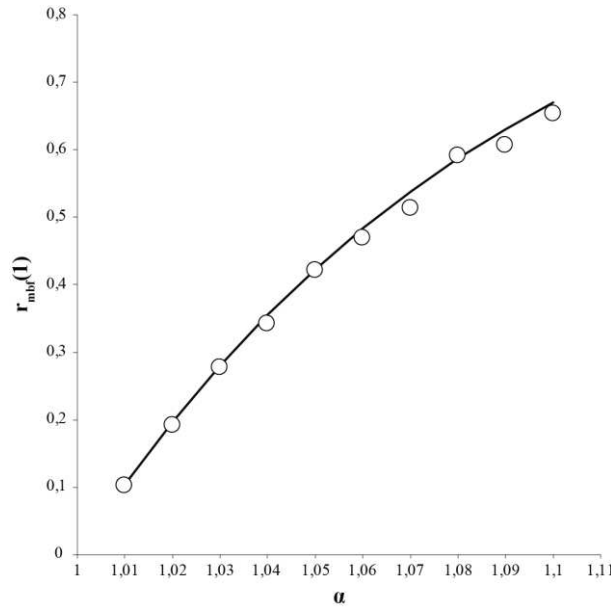


Figure 8 : Autocorrélation attendue et simulée pour des signaux mBf. Ligne pleine : Autocorrélation théorique au premier décalage calculée à partir de l'équation (66). Cercles blancs : Autocorrélation moyenne au premier décalage des signaux simulés via l'algorithme de Davies et Harte.

Pour conclure, il me semblerait intéressant de reproduire à l'avenir cette procédure de génération avec l'algorithme de Davies et Harte mais en se basant sur les propriétés d'autocorrélation des ARFIMA $(0,d,0)$. Craigmile (2003) a montré que ce genre de simulation était possible et, de plus, que le paramètre de différentiation d pouvait prendre la valeur $\frac{1}{2}$ (i.e. $\alpha = 1$). Autrement dit, l'utilisation des propriétés d'autocorrélation des ARFIMA $(0,d,0)$ dans l'algorithme de Davies et Harte permettrait de générer des séries sur la frontière $1/f$.

3.1.2.5. Méthode de synthèse spectrale

Contrairement à l'algorithme de Davies et Harte basé sur le modèle bGf / mBf, l'algorithme de synthèse spectrale assure la continuité autour de la limite $1/f$. Cette continuité était attendue, l'algorithme fonctionnant sur l'ensemble des valeurs possibles de l'exposant α . Ce résultat pourrait être surprenant, car le modèle bGf / mBf et les propriétés spectrales des processus à longue mémoire sont parfois considérés comme équivalents, représentant des propriétés similaires dans les domaines temporel et fréquentiel, respectivement.

Un autre résultat important est celui de la variabilité des estimations, qui apparaît être presque systématiquement plus élevée dans les séries générées par la synthèse spectrale que celle observée avec d'autres méthodes de génération. Seul le MLE par approximation de Whittle semble atténuer cette variabilité, il semble probable que cette atténuation vienne du fait que cette procédure d'analyse consiste à maximiser la fonction de vraisemblance dite Whittle dans le domaine fréquentiel. (Jennane et al., 2001). En conclusion, bien que la synthèse spectrale génère des séries dont les propriétés fréquentielles analysées sont conformes aux propriétés théoriques des modèles de signaux autosimilaires, cette méthode semble toutefois biaisée pour fournir des séries dont les propriétés de variance correspondent parfaitement aux modèles théoriques. Afin d'affiner cette discussion il semble nécessaire d'entreprendre de futures investigations dont une variable dépendante pourrait être le domaine d'application des méthodes d'analyse : (co)variance vs. fréquence.

3.1.2.6. Synthèse par filtrage ARFIMA (0,d,0)

Les simulations via les ARFIMA (0,d,0) assurent aussi la continuité autour de la frontière $1/f$. Ce résultat est très intéressant car les séries de mouvement furent obtenues dans ce cas par sommation cumulée des bruits correspondants, comme nous l'avons fait pour les mouvements obtenus via l'algorithme de Davies et Harte. De plus, c'est l'estimation des exposants de ces séries qui présentait la variabilité la plus basse, quelle que soit la méthode d'analyse. Ces résultats suggèrent donc que l'on peut avoir une meilleure confiance dans les séries générées par filtrage ARFIMA que celles obtenues par les deux autres méthodes.

3.1.3. Les processus ARFIMA pour l'évaluation de la complexité

Cette étude fournit un support solide pour l'utilisation des méthodes basées sur les processus ARFIMA, tant pour la simulation que pour l'estimation du paramètre fractal. Comme indiqué précédemment, les méthodes ARFIMA n'ont pas été considérées dans les études comparatives récentes et ont rarement été exploitées dans des travaux empiriques, du moins dans les domaines de la physiologie et du comportement. En ce qui concerne l'estimation via les ARFIMA rappelons toutefois que nous avons utilisé l'estimateur du maximum de vraisemblance par approximation de Whittle pour tester les

propriétés fractales, or Jennane et al. (2001) ont montré qu'il était possible d'utiliser cet estimateur à partir des propriétés du modèle bGf / mBf et qu'il donnait d'ailleurs d'excellents résultats. Ainsi, notre étude ne nous permet pas d'attribuer les bons résultats d'estimation soit à l'utilisation du MLE soit à celle des propriétés des ARFIMA, nous devons donc tenter d'éclaircir ce point lors d'études ultérieures. Nonobstant la précision et la faible variabilité de l'estimation de l'exposant fractal via cette méthode devraient convaincre les chercheurs de ses avantages, en particulier pour détecter les différences moyennes entre les groupes et ainsi attirer leur attention tant pour de futures expérimentations que pour revisiter des résultats précédents.

Enfin, en ce qui concerne les méthodes de génération. D'une part nous avons vu que Craigmile (2003) a démontré la possibilité d'utiliser l'algorithme de Davies et Harte à partir des propriétés des ARFIMA, or nous avons aussi vu que les mauvaises performances de cet algorithme, plus particulièrement autour de la frontière $1/f$, étaient dues à la fonction d'autocorrélation des bGn / mBf et non à cause de l'algorithme lui-même. Une extension future de la présente étude incluant cette utilisation des propriétés ARFIMA dans l'algorithme de Davies et Harte pourrait se révéler intéressante. Enfin, notons d'autre part que Jennane et al. (2001) utilise « *la méthode fondée sur la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance des incréments du mBf* » et précise que cette méthode « *est théoriquement exacte pour des signaux discrets de longueur finie* », il pourrait être intéressant de comparer cette méthode au filtrage classique par les ARFIMA qui a déjà donné d'excellents résultats dans notre étude.

3.2. Quelle tâche physiologique pour l'évaluation de la complexité ?

Maintenant que nous avons déterminé la meilleure méthode afin d'évaluer l'exposant fractal, la suite logique consiste à déterminer si au même titre il existe une « meilleure tâche » dans l'évaluation de la complexité. En effet, dans notre champ seules quelques études ont comparé le niveau de complexité d'un même groupe de participants exécutant deux ou trois tâches différentes, et aucune à notre connaissance sur quatre et plus. Ainsi, bien que la présence du bruit $1/f$ semble revêtir un caractère ubiquitaire dans le domaine du mouvement humain, ce manque de comparaison inter-tâche ne permet pas de déterminer s'il existe une dépendance entre l'exposant fractal estimé et la tâche réalisée.

En outre, il n'existe que peu d'études sur la fiabilité d'une mesure singulière de l'exposant fractal. Généralement, les tâches proposées sont répétées au cours de la même session et la valeur de l'exposant est calculée pour obtenir un exposant à l'échelle moyenne ne donnant aucune indication sur un éventuel changement quotidien des niveaux de complexité. Le but principal de l'étude expérimentale que j'ai menée dans le cadre de ma thèse était de comparer l'exposant d'échelle sur six tâches différentes et de tester la fiabilité d'une mesure unique de l'exposant d'échelle en répétant ces tâches sur une période de trois jours. Nous avons sélectionné des tâches qui ont déjà été étudiées dans la littérature pour établir une comparaison claire mais nous les avons aussi sélectionnées pour qu'elles ne soient pas redondantes, c'est-à-dire impliquant des motricités et des modes de synchronisation différents.

3.2.1. Comparaison de 6 tâches non redondantes et surapprises

La première tâche que nous avons sélectionnée est la marche. Comme nous l'avons vu en introduction de cette partie, cette tâche a largement été étudiée par Hausdorff et ses collaborateurs. Pour rappel, ces auteurs ont montré que l'exposant fractal était altéré par l'âge ou la maladie, que la vitesse de la marche n'avait qu'une influence minime sur l'exposant et que le cadencement de la marche par un métronome altérerait ce même exposant. Ces auteurs ont suggéré que l'altération de l'exposant avec l'âge pouvait être considéré comme un indicateur de propension à la chute, faisant de la tâche de marche un outil de choix pour la prévention de la dépendance chez nos aînés.

La seconde et certainement l'une des plus populaires dans nos laboratoires de recherche est la tâche de tapping. De manière générale, cette tâche consiste à maintenir un tempo à l'aide d'un doigt, selon les conditions qui sont étudiées ce tempo peut être spontané ou donné par un métronome. Cette tâche a été étudiée dans un grand nombre de papiers et sous une somme de méthodologies différentes : dans les paradigmes de synchronisation versus syncopation avec un métronome (Delignières, Torre, & Lemoine, 2009) ou dans ceux de la synchronisation versus continuation (Chen, Repp, & Patel, 2002). Dans cette dernière étude, les auteurs ont montré que le spectre du tapping en continuation était caractérisé par une forme en V et Torre et Delignières (2008) ont suggéré que cette forme était due à un mode de timing dit événementiel caractéristique de la continuation en tapping.

La troisième tâche sur laquelle nous nous sommes penchés est une tâche de pointage réciproque dite de Fitts, le principe de cette tâche est de pointer alternativement deux cibles à l'aide du doigt ou d'un outil tel qu'un stylet. L'avantage de cette tâche réside dans le fait que sa difficulté peut être aisément mesurée à partir des paramètres de l'expérimentation via la loi de Fitts (Fitts, 1954). Slifkin et Eder ont consacré deux papiers (2012, 2014) à la mesure de la complexité dans ce genre de tâches et ont montré que l'exposant fractal était lié à l'indice de difficulté donné par la loi de Fitts.

La quatrième tâche que nous avons proposée à nos sujets est une tâche de temps de réaction. Comme nous l'avons vu ci-avant cette tâche a été étudiée par Gilden et al. (1995), les résultats de ces auteurs ne montraient aucune expression de la complexité (i.e. un spectre de puissance plat) et leur interprétation résidait dans le fait que les fluctuations en $1/f$ seraient issues du contrôle conscient. Plus tard, Van Orden et al. (2003) ont contesté cette interprétation montrant qu'il était possible d'évaluer la complexité des participants grâce à une tâche de temps de réaction, si tant est que la présentation du stimulus soit prévisible.

Finalement, les cinquième et sixième tâches que nous avons choisies sont respectivement les oscillations uni-manuelle et bimanuelles. Leur principe est proche de la tâche de tapping, il s'agit de maintenir un tempo par l'oscillation d'un ou de deux joysticks. Toutefois, Torre et Delignières (2008) ont montré grâce à une analyse spectrale que ces tâches se différenciaient de la tâche de tapping car étant caractérisées par un mode de timing dit émergent. Torre, Delignières, et Lemoine (2008) ont proposé d'utiliser la phase relative discrète (DRP pour *discrete relative phase*) afin d'étudier le niveau de complexité dans la tâche d'oscillation bimanuelle.

Les six tâches que nous avons sélectionnées sont considérées comme sur-apprises, c'est-à-dire ne nécessitant pas une période prolongée d'apprentissage pour être maîtrisées. Ce point fut central dans notre volonté d'évaluer la fiabilité d'une estimation unique de l'exposant fractal. En effet, Nourrit-Lucas et al., (2015) ont montré que le niveau d'expression de la complexité est plus élevé chez des experts dans des tâches qui requièrent une période d'apprentissage relativement longue. Nous avons fait l'hypothèse qu'une mesure unique de l'exposant fractal était fiable en raison de la nature autosimilaire des processus que nous étudions.

De fait, l'exposant d'une petite période comme la durée d'une expérimentation est supposé correspondre statistiquement à celui d'une période plus longue si tant est que l'on ait étudié une petite période suffisamment large (Almurad & Delignières, 2016). Ainsi, afin de caractériser la complexité de nos participants, il nous a fallu collecter des séries d'au moins cinq cents évènements.

Comme nous l'avons vu en introduction, un certain nombre d'études (Beltz & Kello, 2006; Chen et al., 2001; Correll, 2008; Hausdorff et al., 1996) ont montré que plus une tâche nécessitait d'effectuer des efforts moins l'expression de la complexité était forte chez les participants. On peut ainsi évidemment penser que produire cinq cents pas dans la tâche de marche réclame beaucoup moins d'efforts que la production des évènements des cinq autres tâches. Nous avons donc fait l'hypothèse que la tâche de marche était celle qui permettrait l'expression la plus prononcée de la complexité chez nos participants.

Finalement, si la mesure de l'exposant fractal capture le niveau de complexité sur l'ensemble de la série temporelle elle ne donne en revanche aucun indice sur son éventuelle évolution au cours du temps. Dans cette étude je propose une nouvelle manière d'utiliser les méthodes d'analyse fractale, nous permettant de suivre l'évolution de l'exposant fractal sur l'ensemble des signaux. Et nous avons fait l'hypothèse que parce que chaque tâche est caractérisée par des modes de timing, des efforts et des durées différentes alors l'évolution de l'exposant devrait révéler ces signatures spécifiques.

3.2.2. Méthode

3.2.2.1. Participants

9 sujets (3 femmes, 6 hommes âge moyen : $22,4 \text{ ans} \pm 1,24$) ont participé à notre étude. 6 sont droitiers et aucun n'avait d'expertise musicale. Ils ont été recrutés au sein du bureau des étudiants de l'UFR STAPS et aucun d'entre eux ne présentait de troubles moteurs au moment des expérimentations.

3.2.2.2. Appareillage

Tâche de marche : Cette tâche a été effectuée en extérieur, par beau temps, sur un sol plat et dur. La piste en forme de L avait une longueur de $75m$ sa largeur ($4m$) permettait aux participants de tourner sans modifier radicalement la longueur et la durée de leurs pas.

Les durées de pas étaient enregistrées avec une copie du dispositif utilisé par Almurad et al. (2018). Ce dispositif est constitué de deux résistances à capteur de force (FSR) placées sous le talon des participants. Ces FSR furent transformés en interrupteur grâce à une bascule de Schmitt (LM 393AN) et branchés sur l'interface GPIO d'un Raspberry Pi modèle A+. Cet appareil était équipé d'une batterie d'une capacité de 2000 mAh et d'une clé WIFI (EDIMAX EW7811Un) afin de garantir son autonomie. Le Raspberry Pi exécutait la version du 9 février 2016 de la distribution Raspbian et les données ont été récupérées à l'aide de l'horloge interne du Raspberry précise à la milliseconde. Ainsi pour cette tâche il n'y a pas de fréquence d'acquisition mais une précision de mesure à la milliseconde.

Nous avons demandé aux participants de marcher sur une distance de 1200 pas aussi régulièrement que possible et à leur vitesse préférentielle. Les séries temporelles que nous avons collectées correspondent à celle récoltées par Hausdorff, c'est-à-dire le temps entre le contact de la cheville avec le sol et le contact suivant du même pied. Dans la majorité des cas nous n'avons conservé que les données issues du pied droit.

La « task box » : La « task box » est un dispositif dans lequel nous avons intégré les cinq autres tâches que j'ai présenté ci-avant. Ce dispositif est composé : de deux capteurs sensitifs (Tinkercit Touch Sensors QT 100A) dont la surface sensitive est un cercle de 1,1 centimètres de diamètre, ils sont centrés sur le dessus du dispositif et leurs centres espacés de 4,4 centimètres ; de deux diodes électroluminescentes, une rouge et une verte placée sur le dessus de la boîte au-dessus des capteurs sensitifs ; deux connecteurs XLR 5 femelle, placés sur chaque côté de la boîte afin de connecter les joysticks d'oscillation ; un buzzer pour le métronome ; et une carte d'acquisition (NI USB-6009) où l'ensemble des dispositifs précédents étaient connectés. La fréquence d'acquisition de la carte était réglée sur 200 Hz ainsi chaque signal recueilli par ce dispositif était précis à 0,005 secondes près. Similairement à la tâche de marche, nous avons utilisé l'horloge interne de la carte d'acquisition afin d'éviter toute pollution de nos signaux par l'ensemble des composants de l'ordinateur utilisé pour piloter les tâches. De plus, nous avons utilisé la « Matlab Acquisition Toolbox » pour piloter directement la carte afin d'avoir le minimum de couches logicielles susceptibles de polluer là aussi nos données.

Enfin, les tâches de tapping et d'oscillation furent réalisées selon la procédure de continuation, un métronome auxquels les participants devaient se synchroniser était présenté au début de chaque session, puis le métronome disparaissait et les participants avaient pour instruction de conserver le rythme prescrit. Le métronome était réglé pour effectuer une série de 10 bips à une fréquence de 1,25 Hz, celui-ci était généré par le même script MATLAB que celui utilisé pour récupérer les données.

Tâche de tapping : Nous avons donné la consigne aux participants de taper sur le capteur sensitif droit avec l'index de leur main dominante. La série temporelle que nous avons récupérée était la série d'intervalles inter-tapes, c'est-à-dire la série des temps séparant les touches successives.

Tâche de Fitts : La façon dont nous avons placé les capteurs sensitifs sur la boîte est liée à cette tâche. En effet, dans les tâches de pointage réciproque où l'on peut utiliser la loi de Fitts, la largeur des cibles du pointage et leur espacement détermine l'index de difficulté (ID). Slifkin et Eder (2014) ont montré que plus l'index de difficulté était élevé plus le comportement perdait sa structure de corrélation à long terme. Ainsi, l'espacement $E = 4,4 \text{ cm}$ entre les deux capteurs sensitifs de diamètre $D = 1,1 \text{ cm}$ correspond à un indice de difficulté modéré égal à 3 bit calculé de la manière suivante :

$$ID = \log_2 \left(\frac{2E}{D} \right) = \log_2 \left(\frac{2 \times 4,4}{1,1} \right) = \log_2(8) = 3 \quad (67)$$

Les participants devaient donc toucher successivement les deux capteurs et ce 600 fois d'affilée. Cette tâche devait être exécutée à la vitesse maximale permettant une bonne précision. Pour ce faire nous avons mis en place une limite d'erreur à 6%, tout participant qui dépassait cette limite devait recommencer la tâche. La série temporelle récoltée était la série des durées séparant deux touches successives.

Tâche de temps de réaction : Cette tâche est une réplique de celle proposée par Van Orden et al. (2003). La première étape était un signal de fixation : la LED verte s'allume sans limite de temps, les participants devaient poser l'index sur le capteur sensitif droit durant ce signal.

Après avoir posé leur index, la LED verte restait allumée pendant 400 *ms* avant de s'éteindre, puis la LED rouge s'allumait 800 *ms* après que l'extinction de la LED verte. La consigne donnée aux participant était de retirer l'index du capteur sensitif dès qu'ils voyaient la LED rouge s'allumer. A partir du moment où les participants retiraient leur index, la LED rouge restait allumée 400 *ms* puis elle s'éteignait et un nouveau cycle commençait avec le signal de fixation. Les participants devaient effectuer 560 cycles afin de compléter la session et pouvaient prendre une pause durant le signal de fixation. La série temporelle des temps de réaction était constituée des différences temporelles entre l'allumage de la LED rouge et le moment où les participants retiraient leur doigt du capteur.

Oscillations uni-manuelles : Les oscillations furent réalisées avec un joystick similaire à celui utilisé par Delignières et al. (2004). Le joystick est composé d'un bâton en bois de 15 cm de long connecté à un potentiomètre (Bourns 6639S-1-103), et fixé de manière à ne pouvoir être déplacé que par rotation dans le plan frontal. L'ensemble était connecté au connecteur XLR5 de la « task box ». Les participants devaient effectuer 600 cycles d'oscillation, au tempo donné par le métronome, avec leur main dominante. Un cycle correspond au trajet entre deux pronations maximales et les amplitudes d'oscillation devaient être d'environ 45 ° de chaque côté de l'axe vertical. La série temporelle d'oscillation correspond à la série des durées séparant deux pronations maximales.

Oscillations bimanuelles : L'appareillage pour cette tâche est le même que celui utilisé pour la tâche d'oscillation uni-manuelle, à la seule différence que nous avons utilisé les deux joysticks en même temps. Les participants avaient pour instruction de terminer 600 cycles d'oscillation dans la procédure de continuation tout en essayant de conserver une bonne synchronisation des deux mains. Les séries temporelles étaient constituées des valeurs successives de la phase relative discrète (DRP) données par l'équation proposée par (Torre, Delignieres, & Lemoine, 2007) :

$$\phi_i = \left(\frac{t_{i+1} - \tau_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \right) 360 \quad (68)$$

Où t_i et t_{i+1} sont les temps de démarrage de deux cycles successifs de la main dominante et τ_{i+1} le démarrage du cycle de la main opposée au temps $i + 1$.

3.2.2.3. Mesures répétées et randomisation

L'un des objectifs de cet article était de tester la fiabilité d'une seule mesure de l'exposant fractal. Afin d'évaluer cette variabilité journalière, chaque tâche a été effectuée 3 fois par chaque participant sur 3 jours différents. Ils avaient toutefois la possibilité d'effectuer différentes tâches en une journée mais avec une pause minimale de 15 minutes afin d'éviter tout effet d'entraînement.

Le choix de la tâche quotidienne était randomisé, à chaque début de session les participants tiraient une carte, numérotée de 1 à 6, déterminant la tâche à effectuer. Lorsque le participant avait déjà effectué trois sessions d'une même tâche la carte était retirée et ainsi de suite jusqu'au moment où ils avaient complété les 3 fois 6 sessions.

3.2.2.4. Analyses fractales et prétraitement des données

Conformément aux résultats présentés dans Roume et al. (2019), nous avons estimé l'exposant fractal via l'estimateur de maximum de vraisemblance par approximation de Whittle sur les propriétés ARFIMA $(0,d,0)$ tel que décrit dans la section 3.3.

Avant d'estimer l'exposant fractal de nos signaux, nous avons effectué les étapes de prétraitement suivantes : Dans un premier temps nous avons retiré les 50 premiers points de chaque signal afin d'éviter une mauvaise estimation de l'exposant fractal due à l'éventuelle présence d'une dérive initiale telle que décrite par Chen et al. (2001), puis avons conservé les 512 points suivants afin d'avoir des effets de « taille finie » similaires. Ensuite nous avons transformé ces signaux en variables centrées réduite afin d'uniformiser la taille des variances inhérentes aux différentes métriques utilisées et éviter toute mauvaise interprétation liée à cette variété de tailles de variances. Enfin nous avons retiré les tendances linéaires sur l'ensemble du signal via une droite des moindres carrés car il existe souvent une dérive entre le début et la fin des séries.

3.2.2.5. Estimation glissante de l'exposant fractal (*wsARFIMA*)

Comme annoncé en introduction, je propose dans cette étude une utilisation différente des analyses fractales. L'usage classique consiste à estimer l'exposant fractal sur l'ensemble de la série, donnant un exposant d'échelle unique mais ne donnant donc aucun indice sur une éventuelle évolution de celui-ci au cours du temps. Pourtant cette évolution pourrait se révéler d'un grand intérêt notamment sur les débuts et fins de séries ainsi que dans l'évaluation de la complexité à long terme. Au début des signaux, cette évolution nous permettrait de mettre en évidence la dérive initiale telle que décrite par Chen et al. (2001), sa taille, sa magnitude permettant ainsi de placer le curseur sur le nombre de points à effectivement supprimer au début des séries. L'évolution en fin de séries quant à elle pourrait nous permettre d'observer les effets de fatigue liés à l'exécution des tâches. Comme nous l'avons vu, les contraintes imposées par les tâches « simples » de laboratoire peuvent vite devenir prépondérantes. Mes observations en tant qu'expérimentateur me confortent dans cette idée, les participants dont j'ai étudié les mouvements exprimaient quasi systématiquement une certaine fatigue voire une lassitude dans ces tâches « simples ». Enfin, l'introduction de cette nouvelle méthodologie est surtout un jalon pour le futur. De fait, nous avons déjà à notre disposition une myriade de données, parcourant l'ensemble de la motricité humaine mesurable en laboratoire de recherche. Leur point commun, et surtout leur faiblesse est leur échelle temporelle trop courte comparée à celle d'une vie. On peut en effet légitimement se demander ce que représentent dix minutes de tapping ou de marche dans une journée, une semaine, une année ou une vie....

Ainsi, à mon sens, le prochain grand pas dans l'évaluation de la complexité du mouvement humain réside dans son caractère à long terme. Vu les technologies qui sont à notre disposition, il est aisément concevable d'équiper des participants de chaussettes connectées afin de mesurer la complexité de leur marche non pas sur une session ponctuelle, mais sur plusieurs sessions de manière continue et longitudinale. Ainsi, ce changement d'échelle nécessitera de nouvelles analyses, adaptées à cette nouvelle échelle. De fait, imaginons que nous recueillons des données sur une durée d'un mois, on pourrait évidemment calculer un exposant fractal sur ce mois, donnant de fait une évaluation de la complexité relativement robuste des participants.

Toutefois, vu la masse de données qu'une telle expérimentation générerait, l'évaluation par fenêtre glissante pourrait se révéler être un marqueur très intéressant pouvant mettre en évidence des changements dans la complexité à une échelle significative pour un humain (i.e. par journée ou semaine dans notre exemple). En outre, nous avons vu que l'exposant fractal pouvait être conçu comme un marqueur de santé altéré par l'âge ou la maladie. Si nous venions à confirmer cette hypothèse sur le long terme et à la « bonne » échelle, alors équiper nos aînés de tels dispositifs de suivi régulier et non invasifs pourrait se révéler être d'un intérêt crucial dans la préservation de leur autonomie.

Notre proposition a été d'appliquer l'estimation de l'exposant fractal sur une fenêtre plus petite (400 points de données) puis de faire glisser cette fenêtre point par point et de réévaluer l'exposant du début à la fin des séries. Cette estimation répétée génère un ensemble d'exposant d'échelles permettant de suivre leur évolution. Le signal le plus petit que nous ayons récupéré faisait une longueur de 559 points, nous avons donc raccourci chaque signal à cette longueur en coupant les points au-delà, appliqué la procédure décrite ci-avant et avons obtenu des ensembles de 160 exposants par signal.

A cause de la petite taille de la fenêtre il est arrivé plus souvent que l'estimateur ne converge pas sur sa borne supérieure. En effet, en se concentrant seulement sur une petite partie des signaux, quelques non-stationnarités transitoires peuvent être observées. La plupart du temps, ces transients sont dus à des accélérations ou décélérations tout à fait normales durant l'exécution des tâches. D'ailleurs, lorsque la taille des signaux est suffisante, ces transients disparaissent dans la variabilité de ceux-ci et ils « redeviennent » donc stationnaires. Afin de résoudre ce problème nous avons appliqué la procédure suivante : Lorsque l'algorithme ne convergait pas nous retirions une tendance linéaire par droite des moindres carrés sur la fenêtre et réévaluions l'exposant fractal. Si l'algorithme convergait nous gardions cette dernière estimation de l'exposant, s'il ne convergait pas le signal sur la fenêtre était considéré comme non stationnaire et l'estimation de l'exposant était faite sur la version différenciée du signal.

3.2.3. Résultats

3.2.3.1. Statistiques générales

Un participant fût incapable de compléter la tâche de Fitts probablement à cause de son strabisme, mais ne fût pas exclu de l'analyse des autres tâches. Je présente dans le tableau 3 l'intervalle moyen des séries et leur écart-type respectif ainsi que les durées moyennes des signaux utilisés dans l'analyse classique de l'exposant fractal (512 points) et celle des signaux utilisés dans l'analyse glissante (559 points). Notons qu'il n'y avait pas de différence significative entre les intervalles moyens d'une longueur à l'autre ($F(1,16) = 0,90$; $p = 0,97$) et qu'évidemment la durée correspondant au signal de 559 points était plus longue que la durée des signaux de 512 points ($F(1,16) = 23,00$, $p \approx 0$, $\eta^2 = 0,59$).

Bien qu'il existe des différences évidentes de la durée d'une tâche à l'autre nous avons appliqué une ANOVA à mesure répétée 6-par-3 aux signaux de longueur 512 points ($F(5,40) = 520,40$; $p \approx 0$; $\eta^2 = 0,99$) ainsi que des tests post-hoc HSD de Tukey qui montrent que les séries issues des tâches de tapping et d'oscillation uni-manuelles et bimanuelles sont de longueurs statistiquement identiques. Nous n'avons pas trouvé de variation de l'intervalle moyen d'un jour à l'autre ($F(2,16) = 0,40$; $p = 0,68$) et l'interaction des tâches et des jours ne donnait pas non plus de différences significatives ($F(10,80) = 1,28$; $p = 0,26$). Ces statistiques donnent des résultats similaires pour les signaux d'une longueur de 559 points ($F(5,40) = 584,04$; $p \approx 0$; $\eta^2 = 0,99$), ($F(2,16) = 1,36$; $p = 0,29$), ($F(10,80) = 1,41$; $p = 0,19$), respectivement.

Tâche :	Intervalle moyen	Durée 512pts	Durée 559pts
Marche (sec)	1,05s \pm 0,07s	8min 57s \pm 34s	9min 47s \pm 36s
Tapping (sec)	0,77s \pm 0,07s	6min 43s \pm 43s	7min 00s \pm 41s
Fitts (sec)	0,44s \pm 0,04s	3min 43s \pm 20s	4min 04s \pm 22s
Réaction (sec)	0,17s \pm 0,08s	20min 11s \pm 120s	22min 15s \pm 127s
Uni-manuel (sec)	0,79s \pm 0,07s	6min 43s \pm 36s	7min 21s \pm 37s
Bimanuel (deg)	-0,05° \pm 5,01°	6min 59s \pm 41s	7min 37s \pm 43s

Tableau 3 : Statistiques générales des six tâches

3.2.3.2. Exposant fractal classique

A titre illustratif je présente à gauche de la figure 9 des exemples de séries temporelles que nous avons récoltées, pour des raisons évidentes d'unités, les oscillations bimanuelles ne sont pas présentées. Je présente à droite de la figure 9 les valeurs moyennes des exposants fractals estimés via l'estimateur de maximum de vraisemblance par approximation de Whittle sur les propriétés des ARFIMA $(0,d,0)$ pour l'ensemble de nos participants en fonction des tâches effectuées et du jour d'exécution. Les moyennes des exposants d'échelles pour les tâches sur l'ensemble des jours sont : 0,83 ($\sigma = 0,09$) pour la tâche de marche, 0,59 ($\sigma = 0,08$) pour le tapping, 0,59 ($\sigma = 0,08$) pour la tâche de Fitts, 0,66 ($\sigma = 0,08$) pour le temps de réaction, 0,60 ($\sigma = 0,08$) pour les oscillations unimanuelles et 0,57 ($\sigma = 0,06$) pour les oscillations bimanuelles. Tandis que les moyennes des exposants d'échelles pour les jours sur l'ensemble des tâches sont : 0,66 ($\sigma = 0,12$) pour le premier jour, 0,64 ($\sigma = 0,12$) pour le deuxième jour et enfin 0,62 ($\sigma = 0,08$) pour le troisième jour.

J'ai effectué une ANOVA à mesures répétées 6 par 3 sur l'ensemble de nos données dont toutes les valeurs p ont été corrigées par un Greenhouse-Geisser. Il existe des différences significatives entre les exposants moyens des tâches ($F(5,40) = 26,47$; $p < 0,001$; $\eta^2 = 0,77$) ; via un test post-hoc HSD de Tuckey nous voyons que ces différences statistiques viennent d'une part d'un exposant moyen issu de la tâche de marche supérieur à tous les autres ($p < 0,001$) et d'une différence de valeur moyenne d'exposant entre la tâche de temps de réaction et celle d'oscillations bimanuelles ($p = 0,02$). Il existe aussi des différences significatives entre les moyennes des exposants selon les jours d'exécution ($F(2,16)=5,00$; $p = 0,05$; $\eta^2 = 0,38$) et via un HSD on voit que cette différence est particulièrement présente entre le premier jour et le troisième jour ($p = 0,02$). Finalement l'interaction jours par tâches ne donne lieu à aucune différence significative ($F(10,80) = 1,08$; $p = 0,38$).

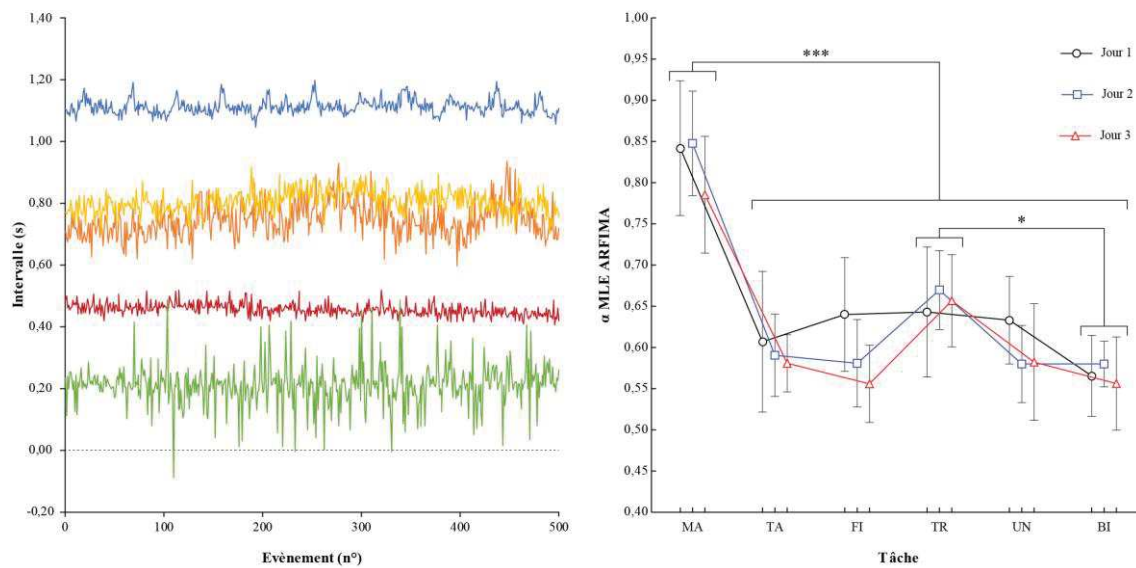


Figure 9 : A gauche : Exemple de séries temporelles récoltées dans les tâches : de marche (courbe bleue), de tapping (courbe orange), de Fitts (courbe rouge), de temps de réaction (courbe verte) et d'oscillation uni-manuelles (courbe jaune). A droite : Valeurs moyennes des exposants fractals estimés via l'estimateur de maximum de vraisemblance par approximation de Whittle sur les propriétés des ARFIMA $(0,d,0)$ pour l'ensemble de nos participants en fonction des tâches effectuées et du jour d'exécution. Les six tâches sont : MA la marche ; TA le tapping ; FI la tâche de Fitts ; TR le temps de réaction ; UN les oscillations uni-manuelles et BI les oscillations bimanuelles. La courbe noire représente les moyennes des exposants fractals pour les tâches effectuées le premier jour, la courbe bleue pour celles du deuxième jour et la courbe rouge pour celles du troisième jour. *** $\Leftrightarrow p < 0,001$; * $\Leftrightarrow p \approx 0,02$.

3.2.3.3. Exposant fractal sur fenêtre glissante

Je présente dans le tableau 4 la moyenne des courbes moyennes d'évolution de l'exposant fractal ($wsARFIMA$), leurs écarts-types respectifs ainsi que les coefficients de corrélation entre les courbes moyennes d'évolution des exposants selon la tâche exécutée. Les moyennes des courbes d'évolution des exposants et la moyenne des exposants données par l'utilisation classique de l'estimation fractale sont extrêmement proches (pour ne pas dire identique) avec un coefficient de corrélation égal à 1 et aucune différence statistique ($F(1,10) = 0$; $p = 0,998$). On observe une corrélation forte (supérieure à 0,64) entre l'évolution des exposants pour l'ensemble des tâches sauf les oscillations uni-manuelles incluant un groupe de très forte corrélation (supérieure à 0,9) entre l'évolution des exposants des tâches de tapping, Fitts, temps de réaction et oscillations uni-manuelles.

Enfin, nous pouvons aussi observer une corrélation négative de l'évolution des exposants entre la tâche d'oscillations bimanuelles et toutes les autres tâches.

	<i>wsARFIMA</i>		Corrélation					
	\bar{m}	σ	MA	TA	FI	TR	UN	BI
Marche	0,83	0,006	1					
Tapping	0,59	0,011	0,78	1				
Fitts	0,59	0,009	0,80	0,97	1			
Réaction	0,66	0,005	0,80	0,93	0,94	1		
Uni-manuel	0,60	0,009	0,64	0,91	0,90	0,90	1	
Bimanuel	0,57	0,002	-0,40	-0,46	-0,36	-0,32	-0,16	1

Tableau 4 : Moyennes \bar{m} des courbes moyennes d'évolution de l'exposant fractal leurs écart types respectifs σ (wsARFIMA), et matrice des coefficients de corrélation entre les courbes moyennes d'évolution des exposants selon la tâche exécutée.

Je présente dans la figure 10 les résultats de l'estimation de l'évolution de l'exposant fractal par fenêtre glissante. De manière générale on voit qu'il existe un temps d'adaptation, au début de chaque tâche, marqué par une certaine décroissance dans l'évolution de l'exposant fractal. Comme pour l'estimation classique de l'exposant fractal, c'est la tâche de marche qui est caractérisée par le plus haut exposant fractal moyen et son évolution semble rester globalement stable sur la durée de l'expérimentation. Cette caractéristique de stabilité semble être partagée avec les tâches de temps de réaction et d'oscillations bimanuelles et correspond aux écarts-types les plus faible du tableau 4. Les valeurs et les évolutions des exposants des tâches de tapping, de Fitts et d'oscillations uni-manuelles sont très proches et l'on peut observer une dérive initiale plus importante que dans les trois autres tâches. Enfin, à la différence de l'ensemble des autres tâches, l'évolution de l'exposant pour la tâche d'oscillation bimanuelle est marquée par une très légère augmentation, ce qui explique la valeur négative des corrélations avec l'évolution des exposants dans les cinq autres tâches.

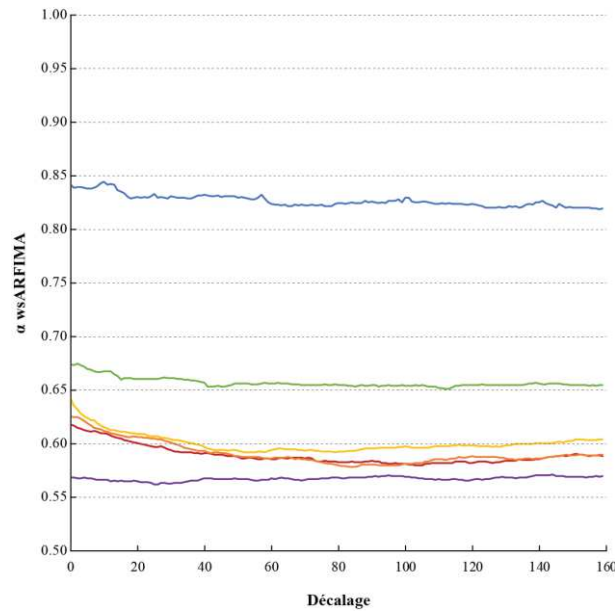


Figure 10 : Courbes moyennes d'évolution de l'exposant fractal par fenêtre glissante de 400 points pour les tâches de : marche (courbe bleue), de tapping (courbe orange), de Fitts (courbe rouge), de temps de réaction (courbe verte), d'oscillation uni-manuelles (courbe jaune) et d'oscillation bimanuelle (courbe violette).

Je présente dans la figure 11 un zoom sur les courbes moyennes de l'évolution des exposants fractals dans les tâches de tapping, Fitts et oscillations uni-manuelles de la figure 10, de plus nous avons ajouté les courbes d'évolution moyenne des exposants de chacune des deux mains lors de la tâche d'oscillation bimanuelle. On peut voir que l'évolution moyenne de l'exposant pour chaque main dans la tâche d'oscillations bimanuelles est semblable à celle des trois autres tâches. Dans l'ensemble la corrélation entre ces évolutions moyennes est supérieure à 0,87 et plus particulièrement la corrélation entre l'évolution de l'exposant pour chacune des deux mains en bimanuel est égale à 0,99.

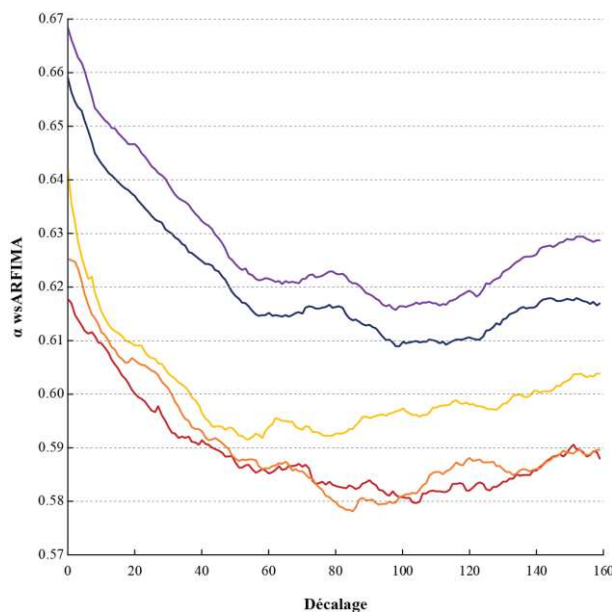


Figure 11 : Zoom sur les courbes moyennes d'évolution de l'exposant fractal par fenêtre glissante pour les tâches : de tapping (courbe orange), de Fitts (courbe rouge) et d'oscillations uni-manuelles (courbe jaune) ; ainsi que pour chacune des deux mains dans la tâche d'oscillation bimanuelle (courbe violette : main droite ; courbe bleu nuit : main gauche).

3.2.4. Discussion

3.2.4.1. Exposant fractal classique

Comme nous en avons fait l'hypothèse, la marche est la tâche qui donne, et de loin, l'exposant fractal le plus élevé. Notre hypothèse était basée sur le fait que produire six cents événements de marche, autrement dit produire six cents pas, était largement moins contraignant que la production du même nombre d'événements dans les cinq autres tâches permettant ainsi une meilleure expression de la complexité des participants. Il nous faut toutefois aussi considérer que la marche est aussi une tâche mettant en jeu beaucoup plus de masses musculaires et réclamant de fait une coordination à la fois plus précise et plus complexe. Ainsi, la différence de niveau de complexité exprimée pourrait être aussi due à la complexité (et non la difficulté) de la tâche. De futures investigations seront à mener afin de déterminer si le niveau de complexité exprimé par les participants est plus influencé par les contraintes de la tâche ou par sa complexité intrinsèque. Toutefois nos résultats nous poussent à penser que, dans l'attente, les chercheurs du champ des sciences du mouvement humain devraient considérer la marche comme un test de référence dans l'évaluation du niveau de complexité.

Ces résultats peuvent paraître surprenants, surtout vis-à-vis de la littérature sur laquelle nous nous sommes appuyés où les exposants moyens rapportés par les auteurs dans les autres tâches que la marche sont généralement plus proches de la frontière $1/f$: $\alpha = 0,73$ pour le tapping dans Delignières et al. (2009); 0,71 pour la tâche de Fitts à la difficulté $ID = 2$ et 0,56 à la difficulté $ID = 5$ dans Slifkin et Eder (2014) ; 0,83 pour le temps de réaction dans Van Orden et al. (2003) ; 1,1 pour les oscillations uni-manuelles dans Delignières et al. (2004) et 0,78 pour les oscillations bimanuelles dans Torre et al. (2007b). Toutefois, l'ensemble de ces exposants ont été estimés soit via la DFA (dans sa mouture originelle plus variable) soit via la PSD, or comme nous l'avons vu dans la section précédente ces deux méthodes d'estimation directe sont généralement biaisées et plus particulièrement lorsqu'il survient des « accidents » dans les séries tels qu'un trébuchement dans la marche ou une touche retardée dans le tapping. En effet, dans le cas de la DFA un « accident » ajoute artificiellement de la variance, qui biaise de fait l'estimateur sur les petites tailles de fenêtres tandis que dans le cas de la PSD un « accident » ajoute artificiellement des fréquences qui biaisent de fait le périodogramme dans le domaine des hautes fréquences. Notre utilisation du MLE sur les propriétés des ARFIMA $(0,d,0)$ donne donc des résultats d'estimation plus précis et uniquement centrés sur les propriétés corrélacionnelles à long terme (voir section précédente) ce qui constitue notre principal centre d'intérêt.

Un autre résultat extrêmement surprenant est celui de la dépendance statistique de l'exposant fractal en fonction du jour de l'exécution des tâches. Bien que ce changement de 0,04 points en moins entre le premier jour et le troisième soit relativement faible surtout lorsqu'on regarde la différence moyenne de 0,2 point en plus pour l'exposant de la marche comparé à l'exposant des autres tâches, sa significativité statistique nous pousse à penser que même si l'on a considéré ces tâches comme sur-apprises, il subsiste une sorte d'adaptation à celles-ci. Ce résultat, et plus particulièrement le fait qu'il s'agisse d'une décroissance de l'exposant avec la pratique méritera d'être exploré plus en profondeur. A notre connaissance, la seule étude qui pose la question de l'évolution de l'exposant fractal avec la pratique d'une tâche sur-apprise est celle de Wijnants et al., (2009) où les auteurs décrivent une augmentation de l'exposant avec la pratique.

Nous prenons toutefois ce résultat avec précaution, la procédure utilisée était très difficile pour les participants qui devaient effectuer une tâche de Fitts avec leur main non dominante et l'indice de difficulté utilisé était égal à 6,9.

3.2.4.2. Exposant fractal sur fenêtre glissante

La dérive initiale de l'évolution de l'exposant d'échelle correspond selon toute vraisemblance à la dérive décrite par Chen et al. (2001). La présence de cette dérive conforte le choix classique des chercheurs de supprimer les premières dizaines de points des signaux avant de les soumettre à l'analyse fractale afin d'affiner l'estimation de l'exposant. Il est intéressant de noter que cette dérive semble plus prononcée dans les tâches dont la durée est la plus courte, nous pensons que ces différences de magnitude de la dérive initiale peuvent être dues au fait que l'échelle de temps correspondant au décalage des fenêtres est tâche-dépendante, ainsi dans les figures 10 et 11 nous comparons dans un même graphique des évolutions d'exposants fractals qui ont des échelles temporelles différentes. Pour remédier à cela, nous proposons dans la figure 12 une version normalisée de la figure 10 dans laquelle nous n'avons conservé que le groupe de tâches dont la corrélation de l'évolution était supérieure à 0,9 dans le tableau 4. On peut y voir que relativement à la variance et à la moyenne, les évolutions de l'exposant d'échelle pour les tâches de tapping, de Fitts, de temps de réaction, d'oscillations unimanuelles et de chacune des deux mains dans la tâche d'oscillation bimanuelle sont extrêmement proches les unes des autres.

Ainsi pour ce groupe de tâche, l'évolution de l'exposant fractal semble partager la même dynamique. Ceci nous pousse à conclure que même si nous avons choisi ces tâches pour qu'elles impliquent à priori des motricités et des modes de synchronisation différents, du point de vue de la structure de corrélation à long terme elles sont marquées par la même dynamique d'expression de la complexité des participants. Ceci suggère par la même occasion que les différences de moyenne de ces exposants ne sont dues qu'à la difficulté relative de celles-ci et non à la motricité qu'elles impliquent.

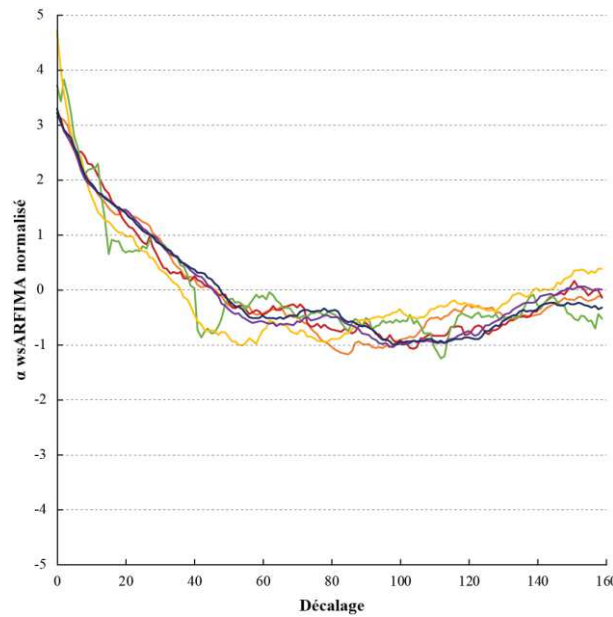


Figure 12 : Version normalisée des courbes moyennes d'évolution de l'exposant fractal par fenêtre glissante pour les tâches : de tapping (courbe orange), de Fitts (courbe rouge), de temps de réaction (courbe verte), et d'oscillations uni-manuelles (courbe jaune) ; ainsi que pour chacune des deux mains dans la tâche d'oscillation bimanuelle (courbe violette : main droite ; courbe bleu nuit : main gauche).

Enfin, l'évolution de l'exposant de la tâche d'oscillations bimanuelles en anti-corrélation avec l'évolution de l'exposant des autres tâches suggère qu'il s'agit d'une tâche qui mesure la complexité des participants d'une manière différente des cinq autres. Ceci s'explique par le fait que l'analyse fractale n'est pas faite sur un timing produit directement par les participants mais sur la synchronisation relative entre leurs deux mains. D'ailleurs lorsqu'on étudie les comportements individuels de chacune des deux mains on retrouve la dynamique d'évolution des oscillations uni-manuelles. Toutefois, avec une valeur moyenne plus proche du bruit blanc que de la frontière $1/f$ cette tâche reste un support faible dans la quantification de la complexité.

3.2.4.3. Des fenêtres plus petites ?

Finalement, nous pouvons légitimement questionner la taille des fenêtres choisies. De fait, le rapport entre une fenêtre de 400 points et des séries qui font 100 à 200 points de plus reste grand, ce qui nous laisse penser que nous ne capturons qu'une dynamique à long terme de l'évolution de l'exposant fractal.

Evidemment il serait intéressant de capturer une dynamique d'évolution plus fine, avec des fenêtres au moins deux fois moins grandes. Toutefois, l'estimation de l'exposant fractal sur des séries d'une longueur inférieure à 500 points reste sujette à controverses. Afin d'adresser ce problème, et en reprenant la méthodologie de la première partie de ce chapitre, je présente dans la figure 13 la relation entre les valeurs théoriques et estimées de α par la méthode du maximum de vraisemblance sur 120 séries d'une longueur de 200 points générées via filtrage ARFIMA $(0,d,0)$ ainsi que la variance de ces valeurs estimées. Similairement aux résultats obtenus avec des séries de 1024 points, les valeurs estimées de α suivent la ligne d'identité de manière remarquable. Toutefois, la variabilité des estimations est deux fois supérieure à celle obtenue avec la même méthode sur les séries longues. Notons enfin que cette variabilité reste tout de même inférieure à la variabilité observée précédemment pour la $^{low}PSD_{we}$ et la DFA sur les séries de mouvement. Ainsi on peut conclure que l'estimation de l'exposant fractal par approximation de Whittle du maximum de vraisemblance sur les propriétés spectrales des ARFIMA donne des résultats assez satisfaisants. Bien évidemment, cette observation nécessitera d'être approfondie notamment en prenant en compte les perspectives d'évolution que nous avons précédemment évoquées.

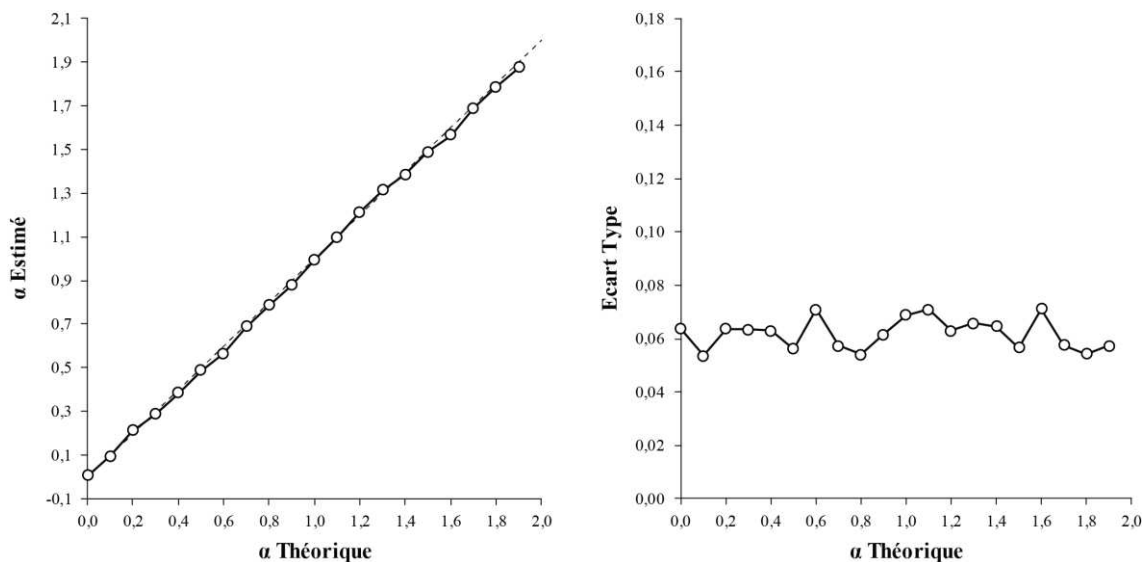


Figure 13 : A gauche : Relation entre les exposants d'échelle théoriques de séries de 200 points générées par filtrage ARFIMA $(0,d,0)$ et estimées par approximation de Whittle du maximum de vraisemblance sur les propriétés spectrales des ARFIMA $(0,d,0)$. La ligne en pointillés est la ligne d'identité. A droite : variabilité des valeurs estimées.

Après avoir vu qu'une estimation sur des séries de 200 points était relativement satisfaisante, je présente à titre indicatif dans la figure 14 les courbes d'évolution de l'exposant fractal pour des fenêtres de 200 points. Nous pouvons observer que la logique d'agencement des courbes est similaire à celle observée dans la figure 10, celles-ci sont toutefois plus bruitées et donnent de manière générale des valeurs légèrement inférieures. Ainsi la marche reste la tâche permettant la plus grande expression de la complexité avec une bonne stabilité de l'exposant sur l'ensemble de la série. Les tâches de tapping, de Fitts et d'oscillation uni-manuelle semblent là aussi présenter la même évolution de l'exposant fractal au cours du temps. Cette figure nous permet toutefois de mettre cette fois-ci en évidence une dérive initiale de l'exposant dans les tâches de marche et de temps de réaction. Ceci suggère qu'il existe aussi dans ces tâches un temps d'adaptation mais que celui-ci est plus court que dans les tâches de tapping, de Fitts et d'oscillation uni-manuelle. Enfin, ce calcul sur des fenêtres de 200 points tend à confirmer le caractère radicalement différent de l'évolution de l'exposant fractal dans les séries de phases relatives discrètes issues de la tâche d'oscillation bimanuelle.

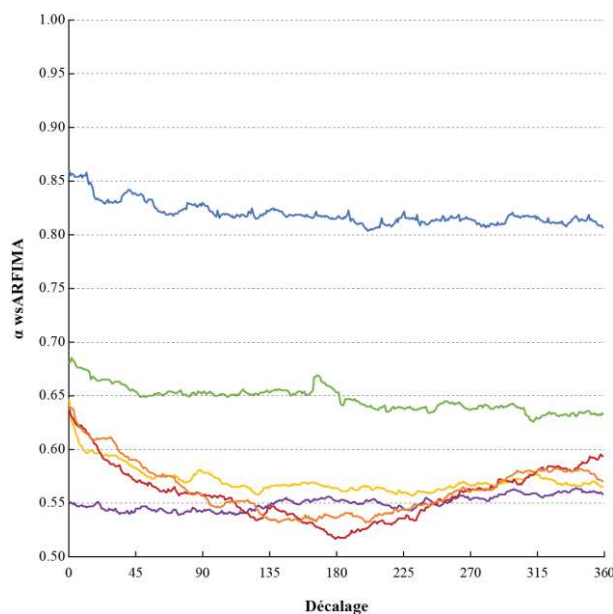


Figure 14 : Courbes moyenne d'évolution de l'exposant fractal par fenêtre glissante de 200 points pour les tâches de : marche (courbe bleue), de tapping (courbe orange), de Fitts (courbe rouge), de temps de réaction (courbe verte), d'oscillation uni-manuelles (courbe jaune) et d'oscillation bimanuelle (courbe violette).

3.2.5. La marche pour l'évaluation de la complexité

Cette étude fournit un support solide pour l'utilisation de la marche dans la quantification de la complexité du mouvement humain. Outre le fait qu'elle permet une expression d'un niveau de complexité largement supérieure à d'autres tâches classiquement utilisées dans le champ, sa simplicité de mise en œuvre et son extensibilité à des échelles autrement plus longues qu'une session d'expérimentation devraient suffire à lui donner le statut de tâche de référence pour l'estimation des exposants fractals du mouvement humain. Cette extensibilité devrait d'ailleurs être selon moi le prochain chantier à explorer dans la qualification et la quantification de la complexité du mouvement humain. Ceci part d'une question simple : peut-on résumer effectivement la complexité d'une personne en ne la voyant marcher qu'une quinzaine de minutes ? En théorie, puisque le mouvement humain est censé être autosimilaire, la réponse devrait être oui, mais comme le veut la pratique des sciences, cette théorie ne demande qu'à être testée.

Cette étude montre aussi que les tâches plus classiquement utilisées dans nos laboratoires de recherche semblent brider l'expression de la complexité des participants. De fait il faut garder à l'esprit que l'ensemble des résultats que nous avons présentés sont issus du même groupe de participants, leur complexité restant donc à priori la même quelle que soit la tâche exécutée. La combinaison des résultats de notre papier (Roume et al., 2019), et des résultats de la présente étude comparative nous poussent à revoir complètement la qualité des tâches à utiliser pour la quantification de la complexité. Trouver et analyser des tâches motrices de complexité intermédiaire entre le simple tapping et la complexe marche pourrait nous aider à éclaircir cette apparente relation entre complexité de la tâche et niveau de complexité exprimée.

3.3. Mise en application : L'altération de la complexité avec l'âge

Afin d'illustrer l'utilité expérimentale des résultats présentés ci-avant, je propose ici une mise en application ayant pour but de vérifier un des résultats obtenu par Hausdorff et al. (1997), concernant l'altération de la complexité avec l'âge. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les diverses applications des analyses fractales au mouvement humain et plus particulièrement celles axées sur un objectif de santé ou de réhabilitation suggèrent que l'exposant fractal pouvait être vu comme un marqueur de santé.

Toutefois, l'ensemble des données de ces études fut analysé via l'analyse de fluctuations redressées ou la densité spectrale de puissance, or nous venons de voir que la fiabilité de ces analyses pouvait être remise en question et plus particulièrement lorsque les exposants sont estimés par densité spectrale. Nous aurions bien sûr pu réanalyser les données d'Hausdorff via l'estimateur de maximum de vraisemblance, cependant les signaux qu'ils ont récoltés sont assez courts (i.e. 315 pas en moyenne) et nous avons aussi vu que la variabilité de l'estimation tendait à augmenter à mesure que la taille des signaux diminue. Nous avons proposé une première illustration de ces résultats dans Roume et al. (2019) où nous avons appliqué les trois méthodes d'analyse sur un ensemble séries empiriques de durée de pas. Ces séries, présentées dans Almurad, Roume, & Delignières (2017) ont été collectées durant une tâche de 15 minutes de marche exécutée par deux groupes de participants : le premier composé de 22 participants jeunes ($28,07 \pm 8,88$ ans), et le deuxième de 23 participants âgés ($72,36 \pm 4,88$ ans). Les résultats ont été consignés dans le tableau suivant :

Groupe		DFA	$^{low}PSD_{we}$	MLE ARFIMA
Jeunes	$\bar{\alpha}$	0,878	1,023	0,887
	σ	0,096	0,137	0,096
Agés	$\bar{\alpha}$	0,783	0,951	0,764
	σ	0,112	0,196	0,088
ANOVA	$F(1,43)$	9,397	1,999	20,044
	p	0,004	0,165	0,000
	η^2	0,179	0,044	0,318

Tableau 5 : Valeurs moyennes des exposants fractals et leurs écart-types respectifs calculé avec les trois méthodes d'analyse DFA, $^{low}PSD_{we}$, MLE ARFIMA sur des séries de pas collectées durant une tâche de 15 minutes de marche réalisée par deux groupes de participants. Ainsi que les résultats de la comparaison des deux groupes via une ANOVA pour chacune des analyses.

Conformément à nos résultats précédents, la $^{low}PSD_{we}$ présente une plus grande variabilité d'estimation que la DFA et le MLE ARFIMA. Nous avons comparé les deux groupes avec une analyse de variance à un facteur, aucune différence entre les deux groupes n'a été trouvée à partir des résultats donnés par la $^{low}PSD_{we}$. Alors qu'une différence significative a été trouvée lorsque que les exposants étaient issus des analyses DFA et MLE ARFIMA avec une taille d'effet supérieure pour le MLE ARFIMA.

Afin d'affiner ce résultat de la différence d'exposant entre les groupes, je présente ici une deuxième illustration consistant en une analyse comparative de la marche entre des participants jeunes et des participants âgés. Ces données sont issues de plusieurs études, toutefois elles ont été recueillies avec le même matériel que celui présenté ci-avant et dans des conditions similaires. Les données des participants âgées sont celles utilisées dans le papier d'Almurad et al. (2018) que je présenterai en détails dans le chapitre suivant. Ces données correspondent à une condition où les participants devaient marcher seuls pendant 15 minutes sur la piste d'athlétisme couverte de l'université, d'une longueur de 200m, à leur vitesse préférentielle. Les données de participants jeunes ont été récoltées spécifiquement dans le cadre de mon travail de thèse afin d'établir cette mise en application, ils avaient pour instruction de marcher 1200 pas, à leur vitesse préférentielle, sur la même piste d'athlétisme. J'ai réparti les participants en quatre groupes : un groupe composé de 10 jeunes d'âge moyen $19,8 \pm 1,14$ ans ; un groupe de 10 personnes âgées de 63 à 68 ans, d'âge moyen $65,4 \pm 1,14$ ans ; un groupe de 9 personnes âgées de 69 à 75 ans, d'âge moyen $71,8 \pm 2,58$ ans ; et enfin un groupe de 9 personnes de plus de 76 ans, d'âge moyen $77,7 \pm 1,58$ ans. Les exposants d'échelles de l'ensemble des signaux ont été estimés via l'approximation de Whittle de l'estimateur du maximum de vraisemblance sur les propriétés spectrales des ARFIMA $(0,d,0)$ telle que présentée précédemment.

Je présente dans la figure 15 les exposants fractals moyens pour chacun des quatre groupes. Une ANOVA à un facteur met en évidence un effet significatif de l'âge ($F(3,34) = 6,06$; $p = 0,002$; $\eta^2 = 0,35$). Un test post-hoc HSD de Tukey montre une différence significative entre l'exposant d'échelle moyen du groupe de jeunes et le groupe des 63 – 68 ans ($p = 0,03$) ainsi qu'avec le groupe des 76 ans et plus ($p = 0,01$).

Notons que le test post-hoc LSD de Fischer montre une différence significative entre le α moyen du groupe de jeune et celui de l'ensemble des groupes de personnes âgées.

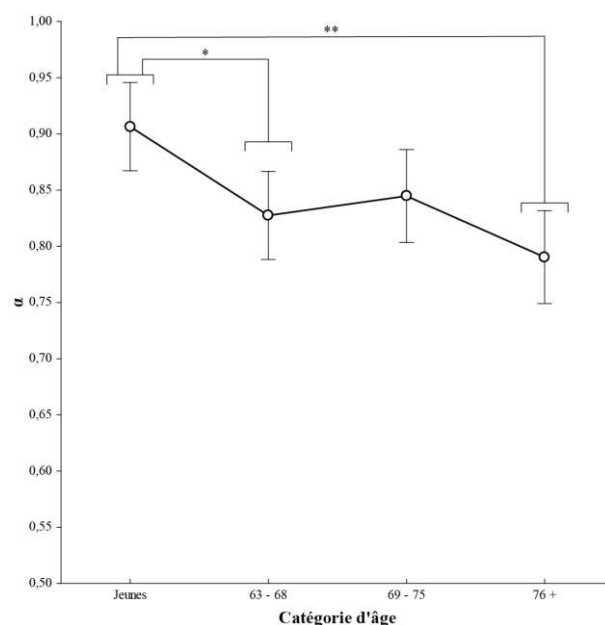


Figure 15 : Exposant fractal moyen α pour une tâche de marche effectués par 4 groupes de participants de catégorie d'âge différentes * : $p = 0,03$; ** : $p = 0,001$.

Ces résultats tendent à confirmer l'observation faite par Hausdorff et al. (1997), de l'altération de la complexité de la marche avec l'âge. Bien que la valeur moyenne de l'exposant d'échelle que nous observons pour le groupe de participants jeunes ($0,91 \pm 0,06$) soit similaire à celle reportée par Hausdorff ($0,87 \pm 0,15$) notons que la valeur moyenne que nous observons dans notre groupe de personnes de 76 ans et plus ($0,79 \pm 0,04$) est plus élevée de 0,1 point par rapport à celle rapportée par ces auteurs ($0,68 \pm 0,14$) pour un groupe dont l'âge moyen est pourtant moins élevé ($75,7 \pm 3,2$ ans). Ceci suggère que les personnes âgées ayant participé à notre étude étaient en très bonne forme physique. Outre cette différence, nous devons prendre en compte que nos participants ont tous été recrutés dans des associations locales de sport adapté, ainsi à priori il s'agissait de personnes dont nous pouvons considérer que leur forme physique est supérieure à la normale par rapport à leur classe d'âge.

En conclusion, même si ces personnes font preuve d'une forme physique supérieure nous pouvons déjà observer une altération de leur exposant fractal ce qui suggère bien que cet exposant peut être vu comme un marqueur de santé. Toutefois, nos prochaines études devront se concentrer sur des publics dont la forme physique sera plus proche de la moyenne.

Enfin, nous pouvons nous poser légitimement la question du fait de prendre l'âge comme facteur catégoriel. De fait, lorsqu'on observe les résultats au niveau individuel, nous pouvons voir que plusieurs personnes dans le groupe des plus de 76 ans expriment une complexité plus élevée que certaines personnes appartenant au groupe des 63 à 68 ans. Nous savons que l'âge chronologique ne reflète pas forcément l'âge physiologique, ainsi je pense qu'il serait intéressant à l'avenir d'étudier les exposants fractals avec d'autres facteurs catégoriels tels que des facteurs de performance ou des facteurs cliniques.

3.4. De la complexité de chacun à l'appariement des complexités

Dans ce chapitre nous avons vu d'une part, d'un point de vue théorique, que l'analyse la plus efficace dans l'estimation de l'exposant fractal était l'estimation par approximation de Whittle de l'estimateur de maximum de vraisemblance sur les propriétés spectrales des ARFIMA $(0,d,0)$ et que d'autre part, d'un point de vue pratique, que la tâche de marche était celle qui permettait la plus grande expression de la complexité chez nos participants. Nous avons mis en application ces observations dans l'étude de l'altération de la complexité avec l'âge et avons confirmé les observations déjà faites dans notre champ d'étude. Comme nous l'avons vu des raffinements théoriques et pratiques devront être effectués à l'avenir afin d'affiner ce point de vue d'ores et déjà très prometteur sur le mouvement humain.

Maintenant que nous avons trouvé une méthodologie pour estimer au mieux la complexité de chacun, nous allons nous intéresser à la manière dont cette complexité interagit lorsque deux personnes se synchronisent.

Chapitre 4 : L'appariement des complexités

Dans ce quatrième chapitre je vais présenter un autre ensemble de travaux que nous avons développé durant mon travail de thèse autour du phénomène d'appariement des complexités ou « *complexity matching* ». Si nous avons vu que l'on pouvait quantifier la complexité des individus via l'estimation de l'exposant fractal et que cet exposant s'altérait avec l'âge ou la maladie, faisant de cet indice un marqueur de santé, nous sommes aussi intéressés à la façon dont la complexité de chacun interagissait. L'ensemble de ces travaux nous a mené à la conclusion que la complexité des personnes âgées pouvait être restaurée de façon durable si tant est qu'elles interagissent avec des personnes jeunes au travers d'activités telles que la marche.

4.1. La synchronisation interpersonnelle, une interaction de complexités ?

Etant des êtres sociaux, la synchronisation interpersonnelle représente un phénomène courant dans les activités de la vie quotidienne. Ces synchronisations peuvent être intentionnelles, un exemple typique étant celui d'un groupe de musique voire d'un orchestre où chaque participant en jouant sa partition contribue à la création d'une pièce musicale, dans d'autres exemples tel que la danse ou la natation synchronisée, la parfaite synchronisation devient un critère de performance. Mais elles peuvent être aussi non-intentionnelles, telle que l'émergence de la synchronisation des applaudissements dans une salle de spectacle ou même lorsqu'on observe deux personnes marchant tout en se tenant par la main qui ont tendance à synchroniser leurs pas. Toutefois, les processus qui soutiennent ces comportements restent peu connus et plusieurs cadres théoriques sont en compétition pour expliquer comment la synchronisation interpersonnelle survient. Dans nos papiers « *Complexity matching in side-by-side walking* » (Almurad et al., 2017) et « *Windowed detrended cross-correlation analysis of synchronization processes* » (Roume et al., 2018) nous avons décrit les trois principaux paradigmes qui ont été proposés pour rendre compte des phénomènes de synchronisation, il s'agit de l'approche du traitement de l'information, du modèle des oscillateurs couplés et du phénomène d'appariement de la complexité.

4.1.1. L'approche du traitement de l'information

Ce premier cadre théorique suggère que la synchronisation interpersonnelle est basée sur des processus d'anticipation cognitifs et représentationnels. L'origine de ce paradigme de traitement de l'information réside dans l'analyse de la synchronisation sensori-motrice en se concentrant au niveau expérimental sur la synchronisation de mouvements simples (tels que les tapes de l'index) avec un métronome régulier (Repp, 2005; Repp & Su, 2013). Un certain nombre d'études ont suggéré que dans de telles tâches la synchronisation était accomplie par une correction systématique de l'intervalle inter-tapes courant sur la base de l'asynchronie précédente (Pressing & Jolley-Rogers, 1997; Torre & Delignières, 2008b; Vorberg & Wing, 1996).

Afin de rendre compte de la synchronisation avec des environnements plus réalistes, ce paradigme a été étendu à l'étude de la synchronisation avec des métronomes non isochrones. Les premières études ont porté sur des métronomes avec déviations régulièrement modulées autour du tempo de base (Madison, 2005; Thaut, Tian, & Azimi-Sadjadi, 1998). Tandis que des études plus récentes ont analysé la synchronisation avec des métronomes fractals sensés reproduire plus précisément la variabilité des objets naturels et notamment celle de partenaires humains (Delignières & Marmelat, 2014; Hunt, McGrath, & Stergiou, 2015; Kaipust, McGrath, Mukherjee, & Stergiou, 2013; Marmelat, Torre, Beek, & Daffertshofer, 2014; Rankin & Limb, 2014; Torre, Varlet, & Marmelat, 2013). Ces expérimentations ont généralement montré que les individus suivaient également les variations de la séquence de tempo du métronome par une correction discrète des asynchronies (Delignières & Marmelat, 2014; Thaut et al., 1998; Torre et al., 2013) et que ce comportement de suivi était similaire à celui supposé par les travaux plus classiques portant sur la synchronisation avec des métronomes réguliers. Cette approche du traitement de l'information dans la synchronisation sensori-motrice a été étendue à la synchronisation interpersonnelle et plus particulièrement aux tâches de tapping en dyade (Konvalinka, Vuust, Roepstorff, & Frith, 2010; Nowicki, Prinz, Grosjean, Repp, & Keller, 2013; Pecenka & Keller, 2011). Là aussi, ces études ont suggéré que la synchronisation interpersonnelle était réalisée par une correction mutuelle des asynchronies.

4.1.2. Le modèle des oscillateurs couplés

Ce second cadre théorique a été proposé dans la perspective de la dynamique de coordination, il a été initialement développé pour l'analyse des coordinations bimanuelles et a promu un modèle phénoménologique basé sur l'hypothèse d'un couplage continu entre les deux effecteurs, considérés comme étant des oscillateurs autoentretenus (Haken, Kelso, & Bunz, 1985; Schöner, Haken, & Kelso, 1986). Il a été prouvé que ce modèle rendait compte de manière adéquate de la plupart des caractéristiques empiriques des tâches de coordination bimanuelle, telles que la stabilité différentielle des modes de coordination en phase et en antiphase et la transition de la coordination en antiphase à la coordination en phase avec l'augmentation de la fréquence d'oscillation. Schmidt, Carello et Turvey (1990) ont suggéré d'appliquer ce modèle à la synchronisation interpersonnelle à travers une série d'expérimentations dans lesquelles ils demandaient à deux participants assis de faire osciller la partie inférieure de leurs jambes tout en se coordonnant visuellement. Ils ont montré que cette coordination interpersonnelle présentait de fortes similarités avec la coordination bimanuelle : les coordinations en phase et en antiphase émergeaient comme des comportements intrinsèquement stables, la coordination en antiphase était moins stable que la coordination en phase, et des transitions spontanées de la coordination en antiphase à la coordination en phase étaient aussi observées avec l'augmentation de la fréquence d'oscillation.

Des résultats similaires ont été obtenus dans diverses tâches interpersonnelles, telle que le balancement côte à côte dans des rocking-chairs (Richardson, Marsh, Isenhower, Goodman, & Schmidt, 2007), ou l'oscillation coordonnée de pendules (Schmidt, Bienvenu, Fitzpatrick, & Amazeen, 1998). Quelques prédictions importantes du modèle original comme l'effet d'une différence entre les fréquences propres (i.e. les tempos préférés) des deux oscillateurs furent aussi mises en évidence dans les tâches de coordination interpersonnelle. Contrairement à l'approche précédente, la perspective de la dynamique de coordination ne suggère aucune forme de correction discrète, cycle à cycle, des asynchronies.

4.1.3. L'appariement des complexités

L'appariement des complexités (« *complexity matching* ») est un troisième cadre théorique récemment proposé pour rendre compte des processus de coordination interpersonnelle (Abney, Paxton, Dale, & Kello, 2014; Delignières & Marmelat, 2014; Marmelat & Delignières, 2012). Le concept d'appariement des complexités a été introduit par West, Geneston, et Grigolini (2008). Ce concept fait référence à un échange maximisé d'informations entre deux réseaux complexes lorsque la complexité de ces deux réseaux est similaire. Ces auteurs ont en effet prouvé que la réponse d'un réseau complexe à la stimulation d'un autre réseau complexe était fonction de l'appariement effectif de leurs complexités et la maximisation de cette propriété nécessitait que les deux réseaux génèrent des fluctuations en $1/f$. Au contraire la réponse d'un réseau complexe à un stimulus harmonique est très faible comparée à celle obtenue avec une stimulation issue d'un autre réseau de complexité similaire (Aquino, Bologna, Grigolini, & West, 2010). L'appariement des complexités a été interprété comme étant une sorte de « résonance de fluctuations en $1/f$ » (Aquino, Bologna, West, & Grigolini, 2011).

Une hypothèse intéressante exploitant l'effet d'appariement des complexités suppose que deux systèmes complexes couplés ont tendance à harmoniser leurs complexités respectives afin d'optimiser l'échange d'informations et donc d'améliorer leur synchronisation. Comme nous l'avons vu, l'exposant fractal d'un signal quantifie la complexité du système qui a produit ce signal, ainsi cette conjecture implique une correspondance étroite entre les exposants d'échelle caractérisant les séries produites par chaque système. De tels résultats ont été mis en évidence par Marmelat & Delignières (2012) dans le cadre d'une tâche de coordination interpersonnelle au cours de laquelle les participants devaient réaliser des oscillations coordonnées de pendules, ainsi que par Abney et al. (2014), dans l'analyse des signaux de parole lors de conversations dyadiques. Plus récemment, Mahmoodi, West, et Grigolini (2017, 2018) ont souligné l'importance des événements cruciaux, jouant un rôle fondamental dans le transport de l'information entre les réseaux complexes. Les événements cruciaux sont générés par des processus d'auto-organisation, et la série de temps d'attente séparant les événements cruciaux successifs présente une fluctuation en $1/f$. Le transfert d'information entre systèmes s'opère par mise en correspondance des propriétés fractales des séries de temps d'attente des systèmes en interaction.

De plus, ces auteurs ont montré en adoptant une approche théorique basée sur la théorie de la subordination, que lorsque deux systèmes de niveaux de complexité différents interagissent, le système le plus complexe attire le moins complexe, entraînant une augmentation de la complexité de ce dernier.

Les processus qui sous-tendent cette adaptation des fluctuations restent toutefois mal compris. D'une part, Stephen et Dixon (2011) ont proposé une hypothèse intéressante expliquant que cette harmonisation des exposants d'échelle pouvait être issue d'une dynamique multifractale en cascade dans laquelle les fluctuations perceptivo-motrices sont coordonnées à travers plusieurs échelles de temps. Cette coordination temporelle multi-échelles pourrait expliquer les aspects apparemment prédictifs du comportement sans nécessiter de modèle interne. D'autre part Mahmoodi et al. (2017) considèrent l'appariement des complexités comme étant un transfert de multifractalité entre les systèmes complexes.

4.1.4. Trois cadres théoriques pour trois situations différentes ?

Ces trois cadres théoriques ont été examinés conjointement dans une série d'articles consacrés à l'analyse des processus d'anticipation et distinguant plusieurs formes d'anticipation (Dubois, 2003; Stephen & Dixon, 2011; Stepp & Turvey, 2010). Dubois (2003) a considéré que la synchronisation avec des environnements fluctuants reposait sur une sorte de « prédiction » de leurs comportements à venir. Cet auteur a suggéré de qualifier « d'anticipation faible » une première forme d'anticipation basée sur des processus de représentation permettant d'effectuer cette prédiction du comportement à venir de l'environnement. L'approche du traitement de l'information que nous avons présentée précédemment correspond à ce type de processus. Cet auteur a aussi proposé une deuxième forme « forte » qui ne repose pas sur des modèles internes. Le propos de l'anticipation forte repose sur la suggestion que l'organisme est intégré dans son environnement et que cette intégration impose des contraintes macroscopiques tant sur les actions de l'organisme que sur l'effet de l'environnement sur ces actions, l'anticipation émerge comme une régularité du système organisme-environnement.

Stephen & Dixon (2011) ont soutenu qu'il fallait distinguer deux approches de l'anticipation forte. La première suggère qu'une l'anticipation forte résultait d'un couplage approprié entre l'organisme et son environnement.

Un exemple intéressant a été présenté par Voss (2000), qui a montré que lors de la synchronisation dans un système maître-esclave, la présence de feedback retardés dans le système maître amène le système esclave à se synchroniser avec les états futurs du système maître. Le modèle des oscillateurs couplés proposé dans la perspective de la dynamique de coordination se réfère clairement à ce genre de processus locaux d'anticipation forte. Cette conception suggère que l'anticipation est basée sur des échelles de temps locales et que la qualité de l'anticipation est supposée être étroitement liée à la force de couplage entre les deux systèmes (Stepp & Turvey, 2010). La deuxième approche suppose que l'anticipation forte est basée sur une coordination plus globale entre l'organisme et son environnement. Stephen et al. (2008) furent les premiers à mettre en évidence ce genre d'anticipation forte dans une expérimentation dans laquelle ils ont observé la synchronisation avec un métronome chaotique. Dans une telle situation l'existence de prédictions locales semble difficilement concevable à cause de la nature imprédictible du rythme du métronome. Malgré cette imprédictibilité, les auteurs ont rapporté une synchronisation acceptable. Ils ont aussi observé une correspondance étroite entre les exposants fractals du métronome et de la série temporelle d'intervalles inter-tapes produite par les participants. Cette correspondance de l'exposant fractal a d'abord été interprétée comme une preuve satisfaisante de l'effet d'appariement des complexités. Toutefois, dans notre papier « *Multifractal signatures of complexity matching* » nous avons considéré que cette convergence entre les exposants fractals ne représentait pas une preuve univoque de l'appariement des complexités et nous avons proposé de distinguer l'appariement statistique caractérisé par cette convergence des exposants d'échelle et l'appariement authentique des complexités, défini comme une harmonisation des complexités. Je développerai cette réflexion dans les parties dédiées à la WDCC et aux signatures multifractales.

Pour résumer, ces trois cadres théoriques ont reçu un soutien considérable dans leurs domaines d'émergence respectifs, y compris en ce qui concerne les tâches de synchronisation interpersonnelle. Comme nous l'avons vu à propos des processus d'anticipation, nous ne sommes pas sûrs que ces cadres représentent des hypothèses alternatives pour rendre compte de phénomènes similaires. En effet, selon la nature et les contraintes de la situation, différents processus de synchronisation pourraient être à l'œuvre, chaque cadre rendant ainsi compte de tâches spécifiques.

L'approche du traitement de l'information semble particulièrement pertinente pour décrire des situations dans lesquelles il est nécessaire de synchroniser des mouvements discrets, comme ceux d'une série de tapping, avec une série de signaux discrets tel qu'un métronome (Konvalinka et al., 2010; Repp, 2005). La perspective de la dynamique de coordination a été essentiellement développée pour rendre compte de la synchronisation de mouvements oscillatoires continus (Schmidt et al., 1990). Enfin, le champ d'application de l'appariement des complexités reste à définir, toutefois cette approche a déjà été appliquée à des situations très diverses telle que des interactions non périodiques entre systèmes complexes (Abney et al., 2014).

Dans « *Multifractal signatures of complexity matching* » (Delignières, Almurad, Roume, & Marmelat, 2016), « *Complexity matching in side-by-side walking* » (Almurad et al., 2017) et « *Windowed detrended cross-correlation analysis of synchronization processes* » (C. Roume et al., 2018), nous avons proposé et formalisé un ensemble de signatures statistiques afin de tester la pertinence de chacun de ces cadres dans des situations spécifiques. Notre objectif était de concevoir et de tester des outils statistiques capables d'identifier sans ambiguïté les processus à l'œuvre dans la synchronisation interpersonnelle.

4.2. WDCC : L'analyse de corrélation croisée sur fenêtres redressées

Le premier outil que nous avons développé afin de rendre compte des processus qui sous-tendent la synchronisation est l'analyse de corrélation croisée sur fenêtres redressées (WDCC pour *Windowed detrended cross-correlation analysis*). Le principe de la corrélation croisée sur fenêtres redressées a été initialement introduit par Boker, Rotondo, Xu, & King, (2002), pour analyser les associations entre des séries comportementales dans des études longitudinales. Ces auteurs considéraient que dans de telles situations l'hypothèse de stationnarité des associations sur l'ensemble des séries temporelles pouvait ne pas être garantie. En effet, la nature et la force de l'association pouvant varier avec le temps. Il en résulte que le calcul de la corrélation croisée sur l'ensemble de la série ne peut donner qu'une image médiocre de la véritable nature des relations entre les deux séries. Les auteurs ont donc proposé de faire une analyse par la fonction de corrélation croisée sur de petites fenêtre glissantes afin de rendre compte l'évolution de l'association avec le temps.

Cette méthode a été utilisée par Konvalinka et al. (2010) dans une expérimentation où des paires de participants devaient taper en synchronie l'un avec l'autre. Le feedback auditif était manipulé afin d'induire des modes de couplages spécifiques entre les deux participants (i.e. sans couplage, couplage unidirectionnel, couplage bidirectionnel). Les auteurs ont cependant considéré, vu le caractère contrôlé d'une telle expérience, que la force et la nature de l'association était suffisamment stable dans le temps pour permettre d'utiliser une fonction moyenne de corrélation croisée sur fenêtre.

Delignières et Marmelat (2014) ont proposé de retirer la tendance de la série dans chaque fenêtre avant de calculer la fonction de corrélation croisée. Notons toutefois que cette procédure de fenêtrage-redressement a été initialement introduite par Lemoine et Delignières (2009), afin d'améliorer les performances des analyses d'autocorrélation dans la distinction des modes de timing émergents et événementiels. L'introduction de procédure de retrait des tendances par Delignières et Marmelat était motivée par l'observation récurrente que les séries comportementales, au vu de leurs comportements en $1/f$, comportaient de multiples tendances sur un ensemble de fenêtres de temps différentes. Ces multiples tendances pouvant affecter fortement le calcul des corrélations croisées, augmentant artificiellement les valeurs obtenues.

Cette procédure de redressement des séries a aussi été utilisée par Podobnik et Stanley (2008) dans le développement de l'analyse de corrélation croisée redressée (DCCA pour *Detrended Cross-Correlation Analysis*) qui est une méthode visant à mettre en évidence la nature à long terme des corrélations croisées entre des séries temporelles enregistrées simultanément. Comme pour notre méthode, la procédure de redressement des séries a été introduite pour contrôler les effets des non-stationnarités dans les séries. L'objectif principal de la DCCA est de décrire l'évolution du lag 0 moyen de la fonction de cross-corrélation sur des fenêtres de longueur croissante. Le but de la WDCC consiste en revanche à évaluer une fonction de corrélation croisée moyenne sur des intervalles courts et fixes. Cette analyse se concentre donc uniquement sur les processus locaux de synchronisation.

4.2.1. L'algorithme de la WDCC

Soit deux séries $I_1(t)$ et $I_2(t)$ de longueur N . Le principe de base est de calculer la cross-corrélation de ces deux séries du décalage $-k_{max}$ au décalage $+k_{max}$ sur une fenêtre de longueur L . Ainsi la première fenêtre considérée est l'intervalle $[I_1(k_{max} + 1), I_1(k_{max} + L)]$. La corrélation croisée de décalage $k = -k_{max}, \dots, 0, \dots, k_{max}$ et le coefficient de corrélation $r(k)$ entre le premier intervalle et l'intervalle $[I_2(k_{max} + 1 + k), I_2(k_{max} + L + k)]$. Les deux intervalles sont ensuite décalés d'un point et une seconde fonction de corrélation croisée est calculée. Cette procédure est répétée jusqu'aux derniers intervalles $[I_1(N - L - k_{max} + 1), I_1(N - k_{max})]$ et $[I_2(N - L - k_{max} + 1 + k), I_2(N - k_{max} + k)]$. Il est important de noter que dans la plupart des papiers antérieurs à l'analyse formelle que nous avons présenté dans Roume et al. (2018), la WDCC était calculée sur des fenêtres adjacentes. Nous avons préféré utiliser des fenêtres glissantes tel que préconisé par Boker, Rotondo, Xu, & King (2002) car nous considérons que cette méthode donne une image plus complète des corrélations croisées entre les deux signaux. Avant le calcul de chaque fonction de corrélation croisée, les tendances étaient retirées des données dans l'intervalle de $I_1(t)$ et l'intervalle décalé de $I_2(t)$. Enfin, l'ensemble des fonctions de corrélations croisées étaient moyennées selon la procédure suivante : les coefficients de corrélation $r(k)$ étaient convertis dans une métrique à distribution normale via la transformation z' de Fisher $Zr(k)$:

$$Zr(k) = \tanh^{-1}(r(k)) \quad (69)$$

Puis les coefficients étaient moyennés sur l'ensemble des fenêtres, puis reconvertis dans la métrique de corrélation :

$$\bar{r}(k) = \tanh(\overline{Zr(k)}) \quad (70)$$

Pour résumer cette procédure et afin de formaliser cette description, je présente dans le tableau 6 l'algorithme de la WDCC rédigé en pseudo code aisément transposable dans divers langages de programmation :

Algorithme $r_m(k) = \text{WDCC}(I_1, I_2, k, L)$	
Arguments	I_1 : Première série de longueur N I_2 : Deuxième série de longueur N k : Décalage de $-k_{max}$ à $+k_{max}$ L : Longueur des fenêtres
Fonctions globales	$\text{detrend}(v)$: retrait de la tendance linéaire d'un vecteur v $\text{corrcoef}(v_1; v_2)$: coefficient de corrélation de deux vecteurs v_1 et v_2 \tanh^{-1} : tangente hyperbolique inverse $\text{moyenne}(m(:, c))$: moyenne des lignes d'une matrice $m(l, c)$ \tanh : tangente hyperbolique
Variables locales	i : index des fenêtres de longueur L f_1 : vecteur fenêtre glissante de longueur L de la première série I_1 f_2 : vecteur fenêtre glissante de longueur L de la deuxième série I_2 f_1d : vecteur fenêtre glissante redressée de la première série I_1 f_2d : vecteur fenêtre glissante redressée de la deuxième série I_2 r : matrice des coefficients de corrélation entre f_1d et f_2d Zr : matrice des coefficients de corrélation en métrique z' de Fisher Zr_m : vecteur moyen des coefficients de corrélation en métrique z'
<p>pour i de 0 à $N - 2k_{max} - L$ par pas de 1 fenêtre</p> <p style="padding-left: 20px;">$f_1 = I_1$ de $(k_{max} + 1 + i)$ à $(k_{max} + L + i)$</p> <p style="padding-left: 20px;">$f_1d = \text{detrend}(f_1)$</p> <p style="padding-left: 20px;">pour k de $-k_{max}$ à $+k_{max}$ par pas de 1 décalage</p> <p style="padding-left: 40px;">$f_2 = I_2$ de $(k_{max} + 1 + i + k)$ à $(k_{max} + L + i + k)$</p> <p style="padding-left: 40px;">$f_2d = \text{detrend}(f_2)$</p> <p style="padding-left: 40px;">$r(i + 1, k) = \text{corrcoef}(f_1d, f_2d)$</p> <p style="padding-left: 40px;">$Zr(i + 1, k) = \tanh^{-1}(r(i + 1, k))$</p> <p style="padding-left: 20px;">fin pour</p> <p>fin pour</p> <p>$Zr_m(k) = \text{moyenne}(Zr(:, k))$</p> <p>$r_m(k) = \tanh(Zr_m(k))$</p>	

Tableau 6 : Algorithme de la WDCC en pseudo code

La logique de la WDCC est d'utiliser des fenêtres très étroites ($L = 15$ dans l'analyse formelle subséquente) et d'exclure les tendances linéaires, ainsi l'on ne peut espérer trouver des corrélations significatives dans le sens classique du test de corrélation de Bravais-Pearson. La WDCC donne donc des traces locales des corrélations originelles, et nous nous sommes plus intéressés au signe des coefficients moyens qu'à leur caractère significatif. Par conséquent, nous avons testé les signes des coefficients moyens donnée par la WDCC en les comparant avec 0 via un test de localisation t bilatéral.

Enfin, notons que l'analyse formelle qui suit a été faite au niveau des covariances qui sont plus aisément décomposables que les corrélations. Toutefois nous avons présenté les résultats dans la métrique de la corrélation pour faciliter leur lecture et permettre une comparaison directe avec les ensembles de données que nous avons analysé. Quoi qu'il en soit, le signe de la covariance et celui de la corrélation sont par définition identiques.

4.2.2. Données expérimentales et conceptions préliminaires à l'analyse formelle

4.2.2.1. Quatre ensembles de données

Afin d'illustrer les principales étapes de notre argumentation, nous avons utilisé quatre ensembles de données issues d'expérimentations de coordination interpersonnelles menées dans notre laboratoire et exploitées dans des publications ou mémoires. Le premier ensemble de données est constitué de séries d'intervalles inter-tapes produites dans une expérimentation de tapping en synchronie menée par Maxime Scotti dans le cadre de son mémoire de master à l'UFR STAPS de Montpellier. Ce genre de tâche est supposé mettre en jeu de manière spécifique un mode de synchronisation basé sur la correction des asynchronies. Le second ensemble de données est issu d'une expérimentation présentée dans le papier de Torre et Delignières (2008a) où les participants devaient réaliser des oscillations bimanuelles synchronisées. Dans cette situation, la synchronisation est supposée être gouvernée par un couplage continu entre les deux mains. Pour le troisième jeu de données, des dyades oscillaient des pendules en synchronie. Dans ces séries issues du papier de Marmelat et Delignières (2012), le mode de synchronisation est là aussi supposé être soutenu par un couplage continu (Schmidt et al., 1998). Enfin, le dernier jeu de données est l'un de ceux que l'on a analysé dans « *Complexity matching in side-by-side walking* ». Dans cette condition de l'étude, deux participants marchaient bras-dessus-bras-dessous en coordonnant leurs pas sur la piste

d'athlétisme couverte de l'université. Nous avons présenté la synchronisation étudiée dans cette tâche comme étant issue de l'appariement des complexités.

4.2.2.2. Propriétés basiques des asynchronies

Quelle que soit la tâche considérée et le cadre théorique utilisé pour décrire les propriétés de synchronisation, nous avons mis en évidence quelques propriétés fondamentale des asynchronies qui sont présentes du moment où les deux systèmes étudiés sont effectivement synchronisés. Réutilisons les deux variables $I_1(t)$ et $I_2(t)$ de longueur N comme étant les séries d'intervalles de temps produites respectivement par le premier et le deuxième système. Soit $A_1(t)$ l'asynchronie du système 1 par rapport au système 2 au temps t :

$$A_1(t) = A_1(0) + \sum_{i=1}^t I_1(i) - \sum_{i=1}^t I_2(i) \quad (71)$$

Où $A_1(0)$ est l'asynchronie initiale. Par définition, lorsque $A_1(t)$ est négatif, cela signifie le premier système guide le second et inversement. Cette relation est exprimée par l'équation de l'asynchronie inverse $A_2(t) = -A_1(t)$. Si l'on considère que les deux systèmes sont étroitement synchronisés, $A_1(t)$ est un processus stationnaire.

Selon l'équation (71) et quel que soit le mode de synchronisation, une augmentation dans $I_1(t)$ devrait induire une augmentation dans l'asynchronie concomitante $A_1(t)$ indiquant une covariance positive de ces deux variables :

$$cov[I_1(t), A_1(t)] > 0 \quad (72)$$

De la même manière, afin de maintenir la synchronisation, une augmentation de l'asynchronie $A_1(t)$ devrait être suivie d'une diminution de l'intervalle produit au temps suivant $I_1(t+1)$, induisant une covariance négative entre ces deux variables :

$$cov[A_1(t), I_1(t + 1)] < 0 \quad (73)$$

Nous avons testé ces hypothèses en calculant la WDCC avec $k_{max} = 10$ entre les séries d'intervalles de temps $I_1(t)$ et d'asynchronies $A_1(t)$ issues des quatre ensembles de données décrits précédemment, nous avons présenté les résultats dans la figure 16.

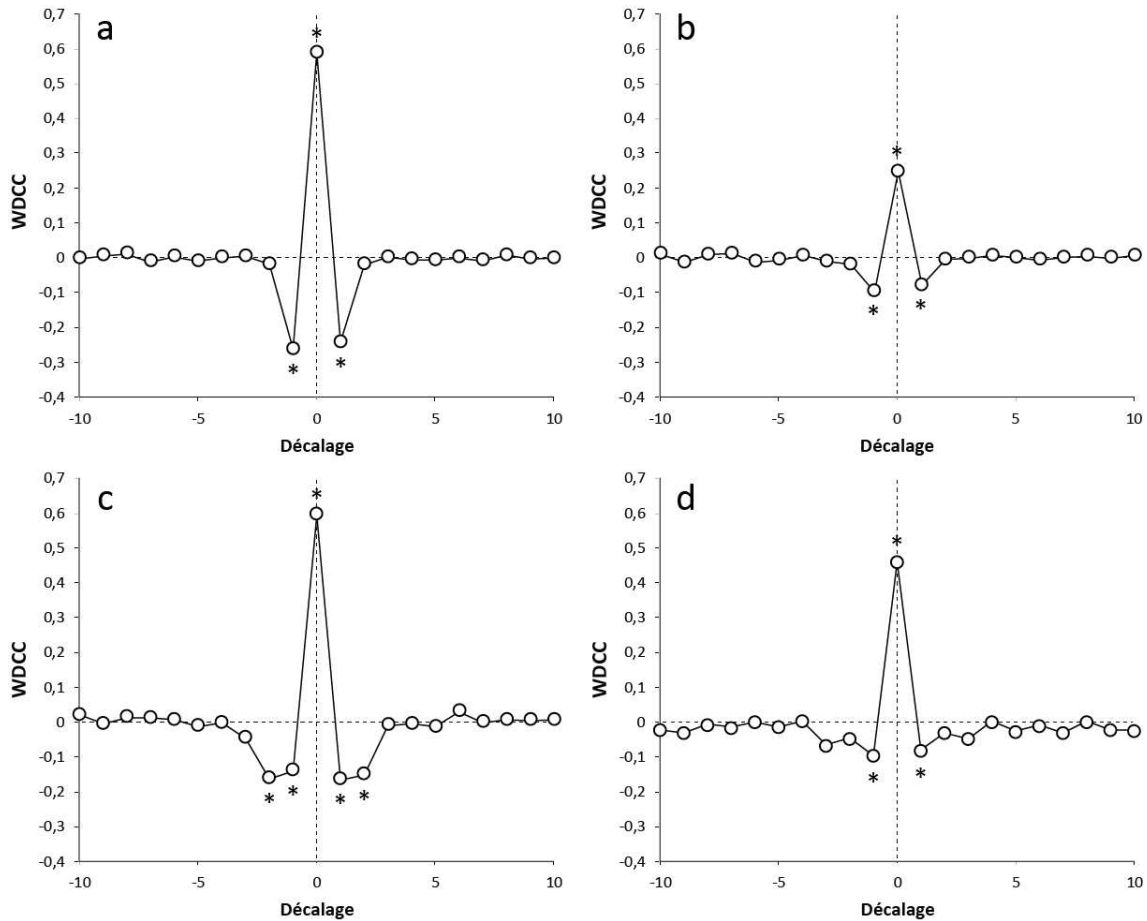


Figure 16 : WDCC du décalage -10 au décalage 10, entre les intervalles temporels et les asynchronies des données issues du : (a) jeu de données n°1, tâche de tapping interpersonnel ; (b) jeu de données n°2, oscillations bimanuelles intrapersonnelles ; (c) jeu de données n°3, tâche d'oscillation de pendule interpersonnelle ; (d) jeu de données n°4, marche synchronisée bras dessus, bras dessous. * : $p < 0,01$).

Dans chaque cas, la WDCC présentait comme attendu : (1) un pic positif au décalage nul ; (2) des pics négatifs au premier décalage. Comme décrit précédemment, nous avons testé le signe des coefficients moyen de la WDCC au moyen d'un test de localisation t bilatéral. Dans tous les cas : (1) la corrélation croisée au décalage nul $r_m(0)$ était positive : jeu de données n°1 : $t_9 = 27,36$ $p < 0,01$; jeu de données n°2 : $t_{11} = 14,85$ $p < 0,01$; jeu de données n°3 : $t_{10} = 39,12$ $p < 0,01$; jeu de données n°4 : $t_{10} = 8,33$ $p < 0,01$. (2) la corrélation

croisée au premier décalage était négative tant dans le sens positif $r_m(1)$: jeu de données n°1 : $t_9 = -11,76$ $p < 0,01$; jeu de données n°2 : $t_{11} = -5,44$ $p < 0,01$; jeu de données n°3 : $t_{10} = -7,10$ $p < 0,01$; jeu de données n°4 : $t_{10} = -3,47$ $p < 0,01$, que dans le sens négatif $r_m(-1)$: jeu de données n°1 : $t_9 = -11,05$ $p < 0,01$; jeu de données n°2 : $t_{11} = -7,38$ $p < 0,01$; jeu de données n°3 : $t_{10} = -4,42$ $p < 0,01$; jeu de données n°4 : $t_{10} = -3,22$ $p < 0,01$.

Les propriétés décrites par les équations (72) et (73) suggèrent que l'autocovariance au premier décalage $r_m(1)$ de l'asynchronie $A_I(t)$ est négative, ainsi :

$$cov[A_1(t), A_1(t + 1)] < 0 \quad (74)$$

Là aussi, nous avons testé cette hypothèse sur les quatre ensembles de données avec un algorithme d'autocorrélation sur fenêtres redressées WDAC basé sur les mêmes principes que celui de la WDCC. Nous avons présenté les résultats pour un décalage maximum de 20 dans la figure 17. Comme attendu, l'autocovariance au premier décalage $r_m(1)$ de l'asynchronie $A_I(t)$ était négatif dans tous les cas : jeu de données n°1 : $t_9 = -9,60$ $p < 0,01$; jeu de données n°2 : $t_{11} = -38,62$ $p < 0,01$; jeu de données n°3 : $t_{10} = -7,63$ $p < 0,01$; jeu de données n°4 : $t_{10} = -4,30$ $p < 0,01$.

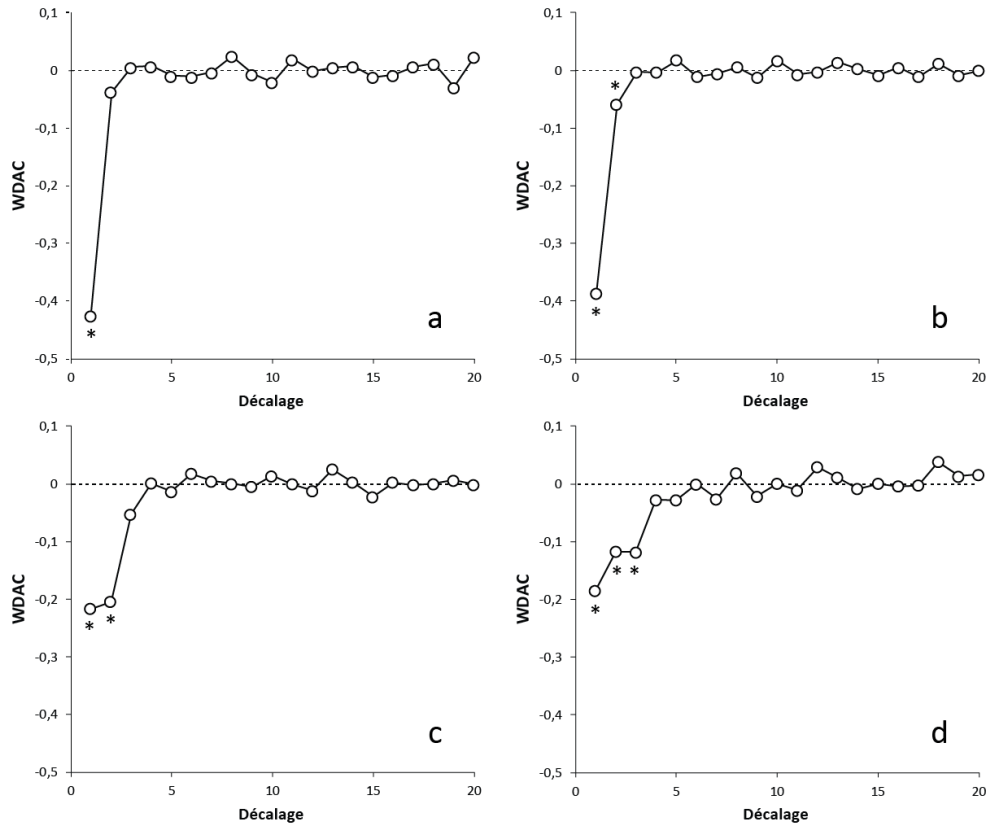


Figure 17 : WDAC du décalage 1 au décalage 20, des asynchronies des données issues du : (a) jeu de données n°1, tâche de tapping interpersonnel ; (b) jeu de données n°2, oscillations bimanuelles intrapersonnelles ; (c) jeu de données n°3, tâche d'oscillation de pendule interpersonnelle ; (d) jeu de données n°4, marche synchronisée bras dessus, bras dessous. * : $p < 0,01$.

4.2.2.3. Fenêtrage et redressement

La procédure de retrait des tendances suppose que la série peut être décomposée comme la somme de la tendance $x_{tend}(t)$ et des résidus $x_{res}(t)$:

$$x(t) = x_{tend}(t) + x_{res}(t) \quad (75)$$

Dans l'algorithme WDCC nous retirons des tendances linéaires, ce choix est motivé par l'hypothèse que pour des fenêtres de petite taille (par exemple 15 points) le retrait d'une tendance linéaire devrait être suffisant pour redresser l'intervalle. Notons que si la série est stationnaire et de moyenne nulle alors $x_{res}(t) = x(t)$.

Les séries comportementales sont souvent modélisées comme une combinaison linéaire de composants en série (Delignières, Torre, & Lemoine, 2008; Pressing & Jolley-Rogers, 1997; Torre & Delignières, 2008b; Vorberg & Wing, 1996; Wing & Kristofferson, 1973). Certains de ces composants sont stationnaires en tous points : c'est le cas des asynchronies comme vu précédemment ainsi que des séries d'erreurs motrices modélisées comme des bruits blancs. En revanche d'autres composants sont caractérisés par des fluctuations en $1/f$ modélisés par des bGf ou des ARFIMA(0, d ,0). Comme nous l'avons vu en première partie, ces modèles sont stationnaires sur le long terme mais sont aussi caractérisés par des transients non-stationnaires. Autrement dit, ces séries présentent diverses tendances interpénétrées sur différentes échelles de temps (voir graphique *a* de la figure 18). Dans de tels cas, le découpage en fenêtres étroites isole des segments dans lesquels le retrait des tendances linéaires suffit à supprimer les transients.

Nous avons illustré dans les graphiques *b* et *c* de la figure 18 l'effet du retrait des tendances sur une fenêtre de 15 points. La série originale (graphique *b*) présente une tendance positive et la série redressée (graphique *c*) est stationnaire de moyenne nulle. Les séries en $1/f$ sont donc considérées comme stationnaires autour de la tendance locale. Sur cette échelle locale, le graphique *c* suggère une sorte d'alternance des points successifs autour de la tendance. Nous avons aussi présenté sur le graphique *d* de la figure 18 (cercles noir) la fonction d'autocorrélation moyenne du décalage 1 au décalage 30 de 12 séries simulées de longueur $N = 1024$ avec un exposant d'échelle $\alpha = 0,9$. Comme attendu, la fonction d'autocorrélation met en avant la propriété de longue mémoire des séries fractales où l'autocorrélation reste significative sur les 30 premiers décalages. Nous avons aussi présenté sur ce graphe, en cercles blanc, la fonction d'autocorrélation sur fenêtres redressées, utilisant des fenêtres glissantes de 15 points sur le même ensemble de séries. On peut y voir que le caractère persistant des séries est effacé par la procédure de fenêtrage / redressement. Ceci suggère que dans les séries corrélées à long terme, la persistance est principalement soutenue par les tendances. Plus intéressant encore, une localisation avec un test t montre que les coefficients d'autocorrélation sont négatifs du décalage 2 au décalage 9. Ceci renforce l'idée que dans chaque fenêtre la série redressée présente une sorte d'anti-persistance autour de sa tendance locale. Cette observation aura une certaine importance dans l'analyse formelle menée dans les parties subséquentes.

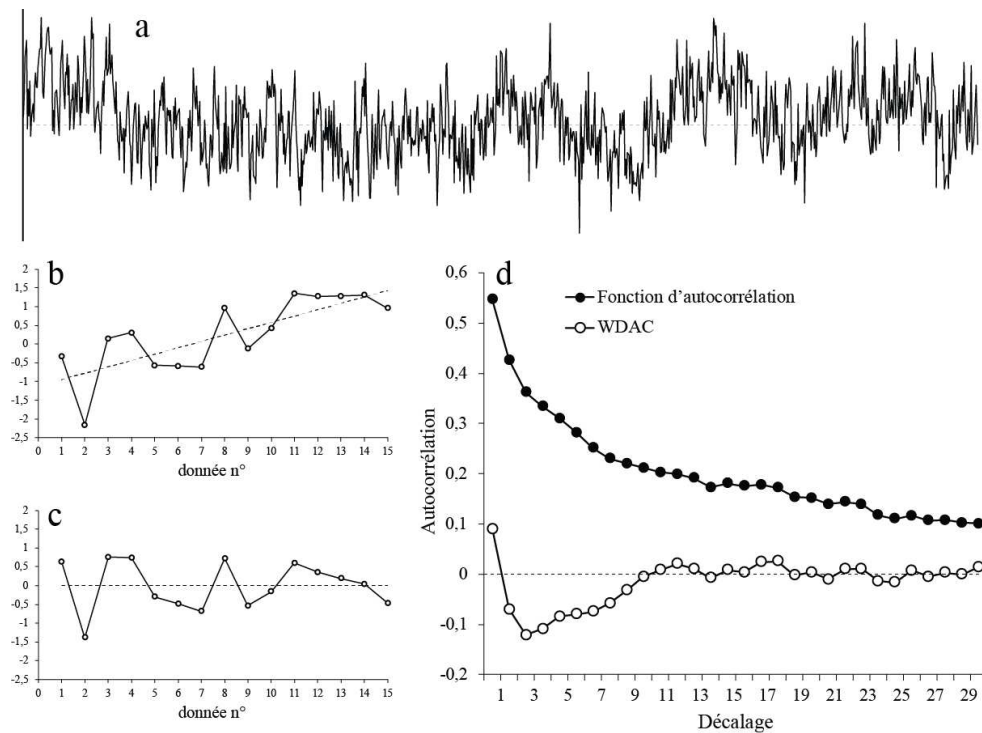


Figure 18 : Graphique a : Série de bruit simulée avec $\alpha = 0,9$. Graphique b : Fenêtre de 15 points extraite de la série présentée dans a. La ligne en pointillés représente la tendance linéaire de l'intervalle. Graphique c : le même intervalle redressé. Graphique d cercles noirs : fonction d'autocorrélation moyenne, du décalage 1 au décalage 30 pour 12 séries simulées de longueur $N = 1024$ et avec $\alpha = 0,9$. Graphique d cercles blancs : fonction moyenne d'autocorrélation sur fenêtres redressées (WDAC), du décalage 1 au décalage 30, avec une fenêtre glissante de 15 points, sur l'ensemble des 12 séries simulées.

4.3. Analyse formelle des cadres théoriques de la synchronisation

Dans cette partie, nous avons analysé les modèles qui ont été proposés dans les trois cadres théoriques présentés en introduction et avons essayé de dériver de façon formelle les résultats pouvant être attendus dans chaque cas avec l'application de la WDCC.

4.3.1. Correction mutuelle des asynchronies

Ce premier modèle est censé rendre compte de la synchronisation de deux participants dans des tâches de timing événementiel (e.g. tâche de tapping synchronisé). Il s'agit d'une extension du modèle proposé par Vorberg et Wing (1996) ou Pressing et Jolley-Rogers (1997) pour rendre compte d'une tâche de tapping en synchronisation avec un métronome régulier. Ce modèle initial est exprimé tel que :

$$I(t) = I^*(t) - \alpha A(t - 1) + \gamma [B(t) - B(t - 1)] \quad (76)$$

Où $I(t)$ représente l'intervalle inter-tapes produit par le participant, $I^*(t)$ l'intervalle produit par une horloge interne, $A(t)$ l'asynchronie entre la $n^{ième}$ tape et le $n^{ième}$ signal du métronome, et $B(t)$ un processus bruit blanc correspondant à l'erreur produite par les composants moteurs à la $n^{ième}$ tape. La présence du terme différencié de bruit blanc $[B(t) - B(t - 1)]$ est lié à la nature événementielle du mode de timing de la tâche : $I(t)$ est défini par la production de deux tapes successives et est donc affecté par les deux erreurs motrices successives (Wing & Kristofferson, 1973). Initialement $I^*(t)$ était considéré comme une source de bruit blanc (Vorberg & Wing, 1996; Wing & Kristofferson, 1973), mais l'analyse d'essais prolongés a montré que les séries d'intervalles produits par l'horloge interne présentaient des propriétés fractales, et devaient être modélisés comme sources de bruit en $1/f$ (Delignières et al., 2004; Gilden et al., 1995).

Ce modèle peut être étendu de la manière suivante pour le tapping en synchronisation :

$$\begin{cases} I_1(t) = I_1^*(t) - \alpha_1 A_1(t - 1) + \gamma_1 [B_1(t) - B_1(t - 1)] \\ I_2(t) = I_2^*(t) - \alpha_2 A_2(t - 1) + \gamma_2 [B_2(t) - B_2(t - 1)] \end{cases} \quad (77)$$

Où $I_1(t)$ et $I_2(t)$ représentent les intervalles inter-tapes respectivement produits par le premier et le deuxième participant, $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$ les intervalles produits par leurs horloges internes respectives, $A_1(t)$ et $A_2(t)$ leurs asynchronies mutuelles, et $B_1(t)$ et $B_2(t)$ leurs termes d'erreur respectifs. A cette étape, nous n'avons pas d'hypothèse spécifique sur une relation possible entre les horloges internes $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$ qui pourraient être soit indépendantes soit corrélées.

Maintenant nous considérons l'effet du redressement. Chaque intervalle inter-tapes peut être décomposé comme la somme de la régression linéaire et des résidus associés selon l'équation (75). La combinaison des équation (77) et (75) donne pour le participant 1 :

$$\begin{aligned} I_1(t) = & I_{1tend}^*(t) + I_{1res}^*(t) - \alpha_1 A_{1tend}(t - 1) - \alpha_1 A_{1res}(t - 1) + \gamma_1 B_{1tend}(t) \\ & + \gamma_1 B_{1res}(t) - \gamma_1 B_{1tend}(t - 1) - \gamma_1 B_{1res}(t - 1) \end{aligned} \quad (78)$$

Comme indiqué précédemment, $A_I(t)$ devrait être stationnaire et pour simplifier nous supposons que les asynchronies sont centrées autour de zéro (notons toutefois que cette hypothèse suppose que les corrections sont réciproques sans relation systématique de meneur / suiveur). D'autre part, $B_I(t)$ est par définition un processus de bruit blanc stationnaire et de moyenne nulle. Ainsi, $A_{Ires}(t) = A_I(t)$ et $B_{Ires}(t) = B_I(t)$ et $A_{Irend}(t) = B_{Irend}(t) = 0$. Sur la base de ces hypothèses, l'équation précédente peut être simplifiée telle que :

$$I_1(t) = I_{1tend}^*(t) + I_{1res}^*(t) - \alpha_1 A_1(t-1) + \gamma_1 B_1(t) - \gamma_1 B_1(t-1) \quad (79)$$

La combinaison de l'équation (75) et de l'équation (78) donne :

$$I_{1res}(t) = I_{1tend}^*(t) - I_{1tend}(t) + I_{1res}^*(t) - \alpha_1 A_1(t-1) + \gamma_1 [B_1(t) - B_1(t-1)] \quad (80)$$

Finalement, vu que l'on considère que les asynchronies et les erreurs motrices sont des processus stationnaires, on peut supposer que la contribution essentielle des tendances dans $I_I(t)$ vient de $I_I^*(t)$. Ainsi :

$$I_{1tend}^*(t) = I_{1tend}(t) \quad (81)$$

Le système d'équation (77) peut donc être réécrit :

$$\begin{cases} I_{1res}(t) = I_{1res}^*(t) - \alpha_1 A_1(t-1) + \gamma_1 [B_1(t) - B_1(t-1)] \\ I_{2res}(t) = I_{2res}^*(t) - \alpha_2 A_2(t-1) + \gamma_2 [B_2(t) - B_2(t-1)] \end{cases} \quad (82)$$

La propriété de distributivité de la covariance (Vorberg & Wing, 1996) permet de dériver une expression de la covariance au décalage k entre les résidus des séries d'intervalle inter-tapes produites par les participants :

$$\begin{aligned}
cov[I_{1res}(t), I_{2res}(t+k)] = & cov[I_{1res}^*(t), I_{2res}^*(t+k)] \\
& - \alpha_2 cov[I_{1res}^*(t), A_2(t+k-1)] \\
& + \gamma_2 cov[I_{1res}^*(t), B_2(t+k)] \\
& - \gamma_2 cov[I_{1res}^*(t), B_2(t+k-1)] \\
& - \alpha_1 cov[A_1(t-1), I_{2res}^*(t+k)] \\
& + \alpha_1 \alpha_2 cov[A_1(t-1), A_2(t+k-1)] \\
& - \alpha_1 \gamma_2 cov[A_1(t-1), B_2(t+k)] \\
& + \alpha_1 \gamma_2 cov[A_1(t-1), B_2(t+k-1)] \\
& + \gamma_1 cov[B_1(t), I_{2res}^*(t+k)] \\
& - \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t), A_2(t+k-1)] \\
& + \gamma_1 \gamma_2 cov[B_1(t), B_2(t+k)] \\
& - \gamma_1 \gamma_2 cov[B_1(t), B_2(t+k-1)] \\
& - \gamma_1 cov[B_1(t-1), I_{2res}^*(t+k)] \\
& + \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t-1), A_2(t+k-1)] \\
& - \gamma_1 \gamma_2 cov[B_1(t-1), B_2(t+k)] \\
& + \gamma_1 \gamma_2 cov[B_1(t-1), B_2(t+k-1)]
\end{aligned} \tag{83}$$

Cette expression peut être simplifiée en considérant que : (1) $A_I(t) = -A_2(t)$; (2) toutes les covariances impliquant du bruit blanc sont nulles exceptées celles entre les bruits et asynchronies simultanés. En effet, à la $n^{ième}$ tape, $B_I(t)$ et $B_I(t-1)$ devraient affecter directement $A_I(t)$ dans des directions opposées, $cov[A_I(t), B_I(t)]$ étant positif et $cov[A_I(t), B_I(t-1)]$ étant négatif. Il suit donc :

$$\begin{aligned}
cov[I_{1res}(t), I_{2res}(t+k)] = & cov[I_{1res}^*(t), I_{2res}^*(t+k)] \\
& + \alpha_2 cov[I_{1res}^*(t), A_1(t+k-1)] \\
& + \alpha_1 cov[A_2(t-1), I_{2res}^*(t+k)] \\
& - \alpha_1 \alpha_2 cov[A_1(t-1), A_1(t+k-1)] \\
& + \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t+k)] \\
& - \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t+k-1)] \\
& + \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t), A_1(t+k-1)] \\
& - \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t-1), A_1(t+k-1)]
\end{aligned} \tag{84}$$

Considérons la covariance au premier décalage ($k = 1$) :

$$\begin{aligned}
cov[I_{1res}(t), I_{2res}(t+1)] = & cov[I_{1res}^*(t), I_{2res}^*(t+1)] \\
& + \alpha_2 cov[I_{1res}^*(t), A_1(t)] \\
& + \alpha_1 cov[A_2(t-1), I_{2res}^*(t+1)] \\
& - \alpha_1 \alpha_2 cov[A_1(t-1), A_1(t)] \\
& + \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t+1)] \\
& - \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t)] \\
& + \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t), A_1(t)] \\
& - \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t-1), A_1(t)]
\end{aligned} \tag{85}$$

Dans la partie droite de l'équation (85) :

- $+ cov[I_{1res}^*(t), I_{2res}^*(t+1)]$ devrait être négligeable, même si les horloges internes sont positivement corrélées. Comme vu dans la figure 18, la procédure de fenêtrage / redressement tend à effacer les corrélations dans les séries corrélées à long terme.
- $+ \alpha_2 cov[I_{1res}^*(t), A_1(t)]$ devrait être positif selon l'équation (72)
- $+ \alpha_1 cov[A_2(t-1), I_{2res}^*(t+1)]$ devrait être négligeable, vu que les deux termes sont séparés par deux décalages.
- $- \alpha_1 \alpha_2 cov[A_1(t-1), A_1(t)]$ devrait être positif selon l'équation (74), sa magnitude dépendant du niveau des correction α_1 et α_2 dans le modèle.
- $+ \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t+1)]$ et $- \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t)]$ devraient être négligeable, vu que les deux termes de bruit sont ultérieurs aux asynchronies et donc ne les affectent pas.
- Au contraire, $+ \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t), A_1(t)]$ et $- \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t-1), A_1(t)]$ devraient être positifs au vu de nos suppositions sur l'influence des bruits moteurs sur les asynchronies.

Ainsi dans l'ensemble, la covariance au premier décalage entre les résidus des séries d'intervalle produites par les participants devrait être positive. Considérant la symétrie de l'équation (82), le même raisonnement prévaut pour la covariance au premier décalage négatif (e.g. $k = -1$) qui devrait être elle aussi positive.

Considérons maintenant la covariance au décalage nul ($k = 0$)

$$\begin{aligned}
 cov[I_{1res}(t), I_{2res}(t)] = & cov[I_{1res}^*(t), I_{2res}^*(t)] \\
 & + \alpha_2 cov[I_{1res}^*(t), A_1(t-1)] \\
 & + \alpha_1 cov[A_2(t-1), I_{2res}^*(t)] \\
 & - \alpha_1 \alpha_2 cov[A_1(t-1), A_1(t-1)] \\
 & + \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t)] \\
 & - \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t-1)] \\
 & + \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t), A_1(t-1)] \\
 & - \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t-1), A_1(t-1)]
 \end{aligned} \tag{86}$$

Dans la partie droite de l'équation (86) les termes :

- $+ cov[I_{1res}^*(t), I_{2res}^*(t)]$ devrait être positif, sa magnitude dépendant du niveau de corrélation croisée entre les deux horloges.
- $+ \alpha_2 cov[I_{1res}^*(t), A_1(t-1)]$ et $+ \alpha_1 cov[A_2(t-1), I_{2res}^*(t)]$ devraient être négatifs selon l'équation (73)
- $- \alpha_1 \alpha_2 cov[A_1(t-1), A_1(t-1)]$ est de toute évidence négatif.
- $+ \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t)]$ et $+ \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t), A_1(t-1)]$ devraient être négligeable, vu que les deux termes de bruit sont ultérieurs aux asynchronies et donc ne les affectent pas.
- Au contraire, $- \alpha_1 \gamma_2 cov[A_2(t-1), B_2(t-1)]$ et $- \alpha_2 \gamma_1 cov[B_1(t-1), A_1(t-1)]$ devraient être négatifs au vu de nos suppositions sur l'influence des bruits moteurs sur les asynchronies.

Ainsi le signe de la covariance au décalage nul dépend des influences opposées du niveau de corrélation entre les deux horloges internes et la magnitude des composants d'erreur.

Nous avons simulé le système décrit dans l'équation (82) dans le but d'analyser l'effet de la corrélation entre les horloges internes $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$ sur la fonction WDCC. Pour simuler $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$, nous avons utilisé deux séries corrélées à long terme obtenues via la méthode décrite dans Balocchi, Varanini, et Macerata (2013) et Zebende, (2011). Dans cette méthode, les séries $x(t)$ et $y(t)$ cross-corrélées à long terme sont obtenues via :

$$\begin{cases} x(t) = WX(t) + (1 - W)Y(t) + \delta_x \varepsilon_x \\ y(t) = (1 - W)X(t) + WY(t) + \delta_y \varepsilon_y \end{cases} \quad (87)$$

Où, les termes ε sont des processus bruit blanc indépendants de moyenne nulle et de variance unité et les termes δ représentent le poids relatif de ces composants aléatoires. $X(t)$ et $Y(t)$ sont des processus ARFIMA $(0,d,0)$ tel que décrits dans la première partie. Et enfin W est un paramètre libre allant de 0,5 à 1 contrôlant la force de la corrélation croisée entre les séries $x(t)$ et $y(t)$. Pour $W = 0,5$ la corrélation croisée est maximale, tandis que pour $W = 1$ la corrélation croisée est nulle.

Dans notre simulation, nous avons fixé $\delta_x = \delta_y = 0$, puis nous avons généré 12 paires de séries de longueur $N = 1024$ pour 6 valeurs de W (0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9 ; 1). Pour toutes ces simulations l'exposant d'échelle H était égal à 0,9. La corrélation croisée moyenne calculée sur ces séries simulées était égale à : 1 ; 0,92 ; 0,71 ; 0,45 ; 0,20 ; -0,02 respectivement. Nous avons ensuite simulé les intervalles inter-tapes $I_1(t)$ et $I_2(t)$ en accord avec l'équation (77) avec $I_1^*(t) = x(t)$ et $I_2^*(t) = y(t)$ et en fixant $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ et $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$. Nous avons présenté les fonctions WDCC moyennes obtenues entre les séries $I_1(t)$ et $I_2(t)$ pour les 6 valeurs de W dans la figure 19.

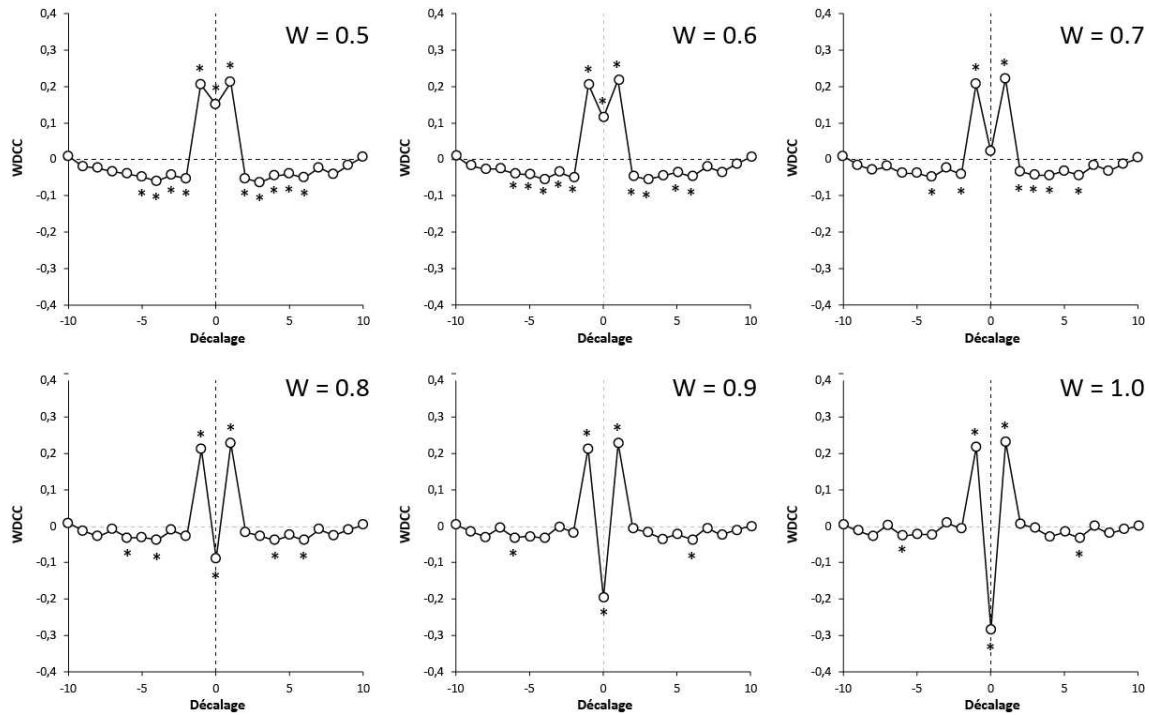


Figure 19 : WDCC moyenne pour un ensemble de 12 séries simulées via les équations (77) et (87) pour des valeurs de W allant de 0,5 à 1,0. * : $p < 0,01$

Comme attendu, la WDCC moyenne aux premiers décalages (négatif où $k = -1$ et positif où $k = 1$) était positive dans tous les cas, et le niveau de corrélation croisée entre $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$ n'a eu qu'un effet négligeable sur les valeurs obtenues. En revanche, le niveau de corrélation croisée entre $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$ a une forte influence sur la WDCC moyenne au décalage nul (où $k = 0$) qui était positive pour les valeurs élevées de corrélation croisée ($W = 0,5$ et $0,6$) et négative pour $W = 0,8$, $0,9$ et 1 . Notons toutefois que les niveaux les plus élevés de corrélations croisées restent non réalistes du point de vue de la synchronisation interpersonnelle.

Nous avons appliqué la WDCC au jeu de données n°1 collecté lors d'une tâche de tapping synchronisé et nous avons présenté les résultats dans la figure 20. Les résultats ont révélé la présence de pics positifs aux premiers décalages et un pic négatif au décalage nul. Les tests de localisation t montrent que la corrélation croisée moyenne était en effet positive au décalage -1 ($t_9 = 5,36$; $p < 0,01$) et au décalage 1 ($t_9 = 6,32$; $p < 0,01$), et négative au décalage 0 ($t_9 = -4,40$; $p < 0,01$).

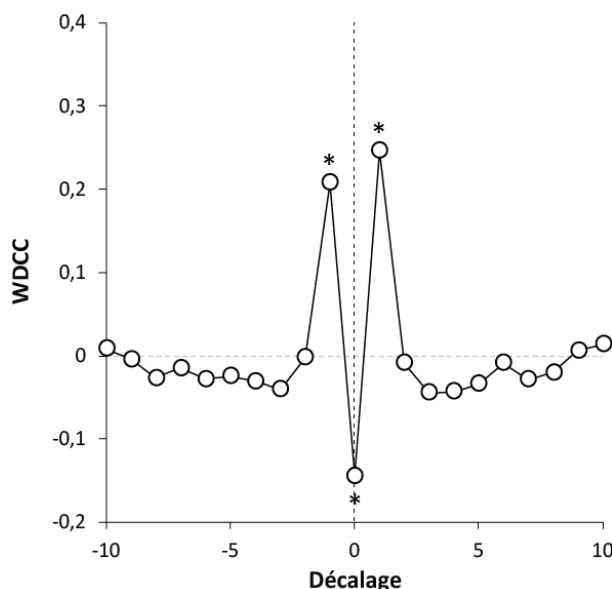


Figure 20 : Fonction WDCC moyenne pour le jeu de données n°1 (tapping interpersonnel) . * : $p < 0,01$.

Un résultat similaire a été mis en évidence par Konvalinka et al., (2010) au moyen d'une corrélation croisée moyenne égale à -0,35 au décalage nul et égale à 0,3 aux premiers décalages -1 et 1. Les valeurs obtenues par ces auteurs doivent toutefois être comparées avec précaution aux nôtres car ils n'ont pas utilisé la procédure de retrait des tendances. La valeur moyenne de la WDCC au décalage nul que nous avons obtenu pour cet ensemble de données correspond à peu près à celles obtenues via la simulation pour des valeurs de W égales à 0,8 et 0,9 suggérant que les horloges internes des participants étaient modérément corrélées. Ceci peut être interprété comme un phénomène d'appariement partiel des complexités entre les deux horloges internes. Cette hypothèse requiert toutefois des approfondissements vu que nous avons considéré ces deux phénomènes comme mutuellement exclusifs (Almurad et al., 2017).

En conclusion, la WDCC semble être capable d'identifier clairement les processus discrets de correction cycle à cycle essentiellement à travers la présence de pics positifs aux premiers décalages -1 et 1. De plus, la valeur de la WDCC au décalage nul donne des informations sur la force de la corrélation entre les horloges internes des participants. Notons aussi que la WDCC peut montrer une asymétrie entre les valeurs aux premiers décalages -1 et 1 révélant une relation de meneur / suiveur entre les participants.

Le meneur est sensé présenter un paramètre de correction plus bas que le suiveur (i.e. $\alpha_1 \ll \alpha_2$), dans de tels cas la somme des quatre derniers termes de l'équation (85) sont différents pour les décalages -1 et 1.

Finalement, les processus de correction peuvent être plus complexes, prenant en compte une plus grande étendue des asynchronies précédentes. Par exemple, Pressing & Jolley-Rogers, (1997) et Vorberg & Wing, (1996) ont proposé des modèles basés sur la correction des deux précédentes asynchronies. De tels modèles sont exprimés comme :

$$\begin{cases} I_1(t) = I_1^*(t) - \alpha_1 A_1(t-1) - \beta_1 A_1(t-2) + \gamma_1 [B_1(t) - B_1(t-1)] \\ I_2(t) = I_2^*(t) - \alpha_2 A_2(t-1) - \beta_2 A_2(t-2) + \gamma_2 [B_2(t) - B_2(t-1)] \end{cases} \quad (88)$$

Il devrait résulter de ce genre de processus la présence de pics positifs aux premiers décalages -1 et 1 ainsi qu'aux deuxièmes décalages -2 et 2 dans la fonction WDCC.

4.3.2. Le modèle des oscillateurs couplés

Comme nous l'avons vu en introduction, ce modèle, basé sur l'hypothèse d'un couplage continu entre les membres effecteurs considérés comme des oscillateurs autoentretenus, fût initialement développé pour l'analyse des coordinations bimanuelles (Haken et al., 1985; Schöner et al., 1986). Ce modèle est décrit comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \delta \dot{x}_1 + \lambda \dot{x}_1^3 + \gamma x_1^2 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)[a + b(x_1 - x_2)^2] \\ \ddot{x}_2 + \delta \dot{x}_2 + \lambda \dot{x}_2^3 + \gamma x_2^2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)[a + b(x_2 - x_1)^2] \end{cases} \quad (89)$$

Où x_i est la position de l'oscillateur i et les points correspondent à la notation de Newton pour la dérivée temporelle. La partie gauche des équations représente la dynamique en cycle limite de chaque oscillateur, déterminée par un paramètre de raideur linéaire ω et trois paramètres d'amortissement δ , λ et γ . La partie droite correspond à une fonction de couplage déterminée par les paramètres a et b .

En vue de notre analyse, nous avons utilisé une version modifiée de ce modèle où le paramètre de raideur linéaire ω est remplacé par un paramètre variable ω_i représentant des changements cycle à cycle de raideur (Torre & Delignières, 2008a).

Le but de cette modification était de rendre compte de la présence de fluctuation en $1/f$ dans les séries de périodes produites par un membre effecteur oscillant (Delignières et al., 2008) et dans les séries de phases relatives dans les coordinations bimanuelles.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \delta \dot{x}_1 + \lambda \dot{x}_1^3 + \gamma x_1^2 \dot{x}_1 + \omega_t^2 x_1 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)[a + b(x_1 - x_2)^2] + q_1 \varepsilon_1 \\ \ddot{x}_2 + \delta \dot{x}_2 + \lambda \dot{x}_2^3 + \gamma x_2^2 \dot{x}_2 + \omega_t^2 x_2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)[a + b(x_2 - x_1)^2] + q_2 \varepsilon_2 \end{cases} \quad (90)$$

Où ω_t est un processus fractal d'exposant d'échelle α , de moyenne ω_0 et d'écart type σ . Et où les termes ε_i sont des processus bruit blanc de moyenne nulle et d'écart type unité, pondérés par les facteurs q_i , et représentant des perturbations aléatoires et continues affectant indépendamment chaque oscillateur. Ce modèle suggère que les deux oscillateurs partagent la même raideur variable et que les perturbations sont contrebalancées par la fonction de couplage. Considérant que la période des oscillateurs est essentiellement déterminée par la raideur, ce modèle continu peut être représenté dans le domaine des cycles en utilisant la notation précédente comme suit :

$$\begin{cases} I_1(t) = I^*(t) + \gamma_1 B_1(t) \\ I_2(t) = I^*(t) + \gamma_2 B_2(t) \end{cases} \quad (91)$$

$I^*(t)$ représentant une « horloge interne » commune, correspondant à la série de raideur ω_t dans l'équation (90) et les termes de bruits résumant les perturbations cycliques. Notons qu'au contraire du modèle présenté par l'équation (77), la synchronisation n'est pas obtenue au moyen de correction cycle à cycle des asynchronies mais simplement par la présence de cette horloge interne commune.

Ce système prédit que la covariance au décalage nul entre les deux séries d'intervalles est égale à la variance de l'horloge interne, et donc est positive :

$$cov[I_{1res}(t), I_{2res}(t)] = var[I_{res}^*(t)] > 0 \quad (92)$$

En ce qui concerne les autres décalages, nos observations sur l'effet de la procédure de fenêtrage / redressement sur l'autocorrélation des processus fractals peuvent être ici appliquées (voir figure 18). Nous avons donc prédit l'observation de covariances négatives, et plus particulièrement au-delà des premiers décalages -1 et 1.

Nous avons simulé l'équation (90) en posant $\delta = 0,5$; $\lambda = 0,02$; $\gamma = 1$; $a = 1$; $b = 0,25$ et $q_1 = q_2 = 0,03$. ω_t était une série fractale avec $H = 0,9$; $\omega_0 = 4\pi$ et $\sigma = 0,04$. Les simulations ont été effectuées en utilisant la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4 décrite dans Burrage, Lenane, et Lythe (2007) pour les équations différentielles stochastiques d'ordre 2 bruitées. Nous avons utilisé un pas fixe de 0,001s et avons généré 12 paires de séries de longueur $n = 1024$. La fonction WDCC moyenne de cet ensemble de données simulées est présentée sur la partie gauche de la figure 21. Comme attendu, nous avons obtenu un pic positif au décalage 0 ($t_{II} = 47,86$ $p < 0,01$), et des corrélations croisées négatives aux décalages négatifs -5, -4 et -3 ainsi qu'aux décalages positifs de 3 à 6. Nous avons finalement appliqué la WDCC aux séries de coordinations bimanuelles du jeu de données n°2. La fonction WDCC moyenne est présentée sur la partie droite de la figure 21. Les résultats sont similaires à ceux obtenus via la simulation avec un pic positif au décalage nul ($t_{II} = 10,40$; $p < 0,01$) et des valeurs négatives de corrélations en dessous du décalage -2 et au-dessus du décalage 1. Ces résultats confirment que lors d'une tâche de coordination bimanuelle les deux mains partagent la même fluctuation de la raideur.

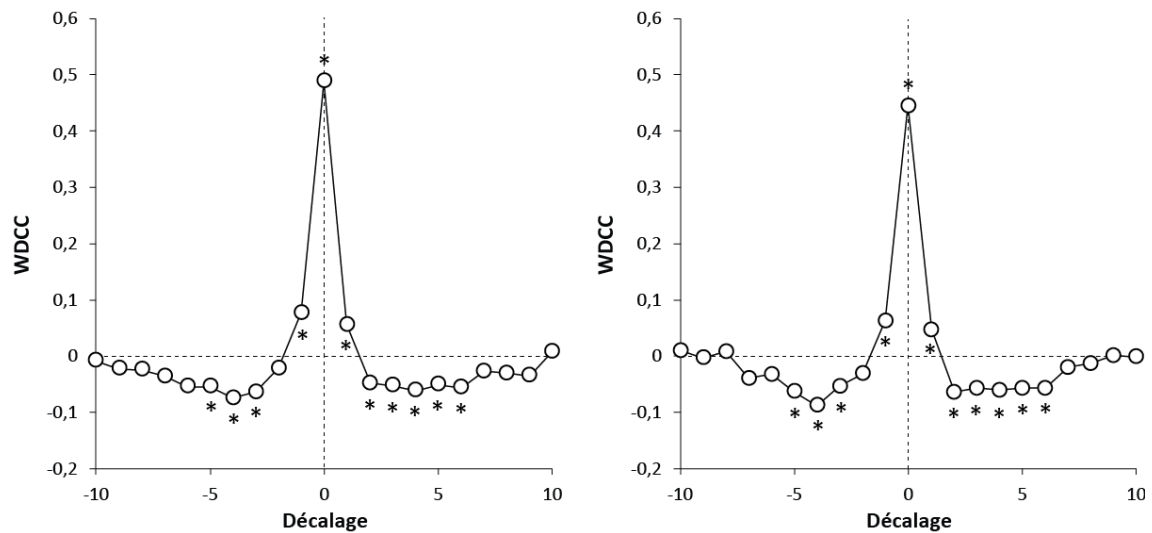


Figure 21 : Gauche : Fonction WDCC moyenne de l'ensemble des 12 simulations de l'équation (90). Droite : Fonction WDCC moyenne pour le jeu de donnée n°2 : coordinations bimanuelles. * : $p < 0,01$.

Comme indiqué en introduction, ce modèle des oscillateurs couplés a été exploité pour rendre compte des coordinations interpersonnelles, et plus particulièrement pour les tâches impliquant des mouvements continus (Richardson et al., 2007; Schmidt et al., 1998, 1990). Notre troisième jeu de données qui a été collecté dans le cadre d'une expérimentation où des participants appariés en dyades devaient faire osciller des pendules de manière synchrone (Marmelat & Delignières, 2012) correspond clairement à cette extension du modèle.

Nous avons présenté dans la figure 22 la fonction WDCC moyenne obtenue pour ce jeu de données. De façon claire, les résultats sont différents de ceux attendus par l'hypothèse des oscillateurs couplés. Nous avons obtenu des pics positifs aux premiers décalages -1 ($t_{10} = 3,90$; $p < 0,01$) et 1 ($t_{10} = 4,38$; $p < 0,01$) et un pic négatif au décalage nul ($t_{10} = -5,63$; $p < 0,01$).

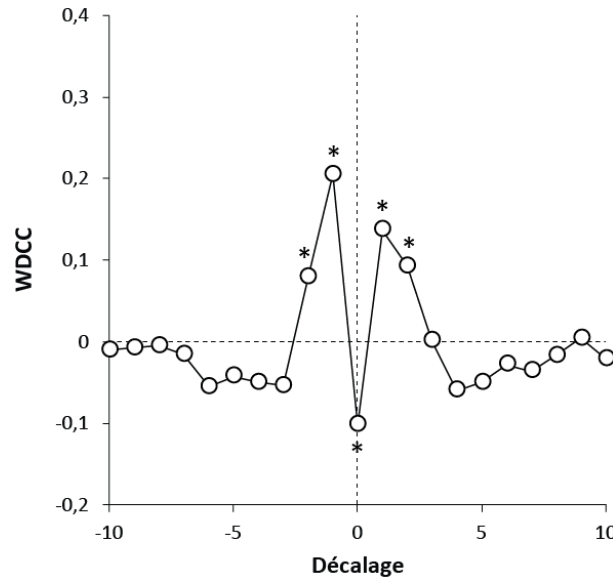


Figure 22 : Fonction WDCC moyenne pour le jeu de donnée n°3 : Tâche d'oscillation de pendules en dyades. * : $p < 0,01$.

Notons aussi que nous avons obtenu des pics positifs de corrélations aux décalages -2 ($t_{10} = 3,78$; $p < 0,01$) et 2 ($t_{10} = 4,94$; $p < 0,01$) suggérant qu'un modèle plus complet, incluant des corrections des deux asynchronies précédentes serait plus pertinent :

$$\begin{cases} I_1(t) = I_1^*(t) - \alpha_1 A_1(t-1) - \beta_1 A_1(t-2) + \gamma_1 B_1(t) \\ I_2(t) = I_2^*(t) - \alpha_2 A_2(t-1) - \beta_2 A_2(t-2) + \gamma_2 B_2(t) \end{cases} \quad (93)$$

Cette équation (93) n'inclut qu'un seul terme d'erreur à la différence de l'équation (88) qui inclut un terme d'erreur différencié. Ceci correspond à l'hypothèse qu'une telle tâche de couplage continu devrait mettre en œuvre un mode de timing émergent (Delignières et al., 2004). On peut toutefois montrer aisément que cette modification ne devrait pas affecter le signe attendu de la fonction WDCC.

Ainsi, de façon assez surprenante, ces résultats montrent que la synchronisation dans cette expérimentation était gouvernée par un processus de correction cycle à cycle des asynchronies et contredisent donc la pertinence de l'utilisation du modèle des oscillateurs couplés dans de telles tâches de coordinations interpersonnelles. Dans le cadre de son travail de master, M. Scotti a tenté de reproduire ces résultats dans le cadre d'une expérimentation d'oscillations uni-manuelles synchronisées dans deux conditions. Dans la première condition « *full* », les participants, assis face à face, avaient accès à l'ensemble des retours sensoriels produit par l'autre participant (information visuelle et auditive) tandis que dans la deuxième condition « *digital* » les participants étaient séparés par un écran opaque et portaient un casque à réduction de bruit. La seule information qu'ils recevaient sur le mouvement de leur partenaire était une série de bips discrets transmis via des écouteurs et correspondant à leur pronation/supination maximale. Notons que les deux participants étant face à face, le participant A entendait un bip à chaque supination maximale du participant B tandis que le participant B entendait un bip à chaque pronation maximale du participant A. Notons aussi que le dispositif d'oscillation était très similaire à celui présenté dans le premier chapitre de cette thèse.

Nous présentons dans la figure 23 les fonctions WDCC moyennes pour ces deux conditions expérimentales. Dans une première application de la WDCC, nous nous sommes rendu compte qu'il existait dans chaque dyade une relation évidente de meneur / suiveur, les résultats que nous présentons ont été réarrangés pour prendre en compte cette observation, ainsi le participant A est systématiquement le suiveur et le participant B le meneur.

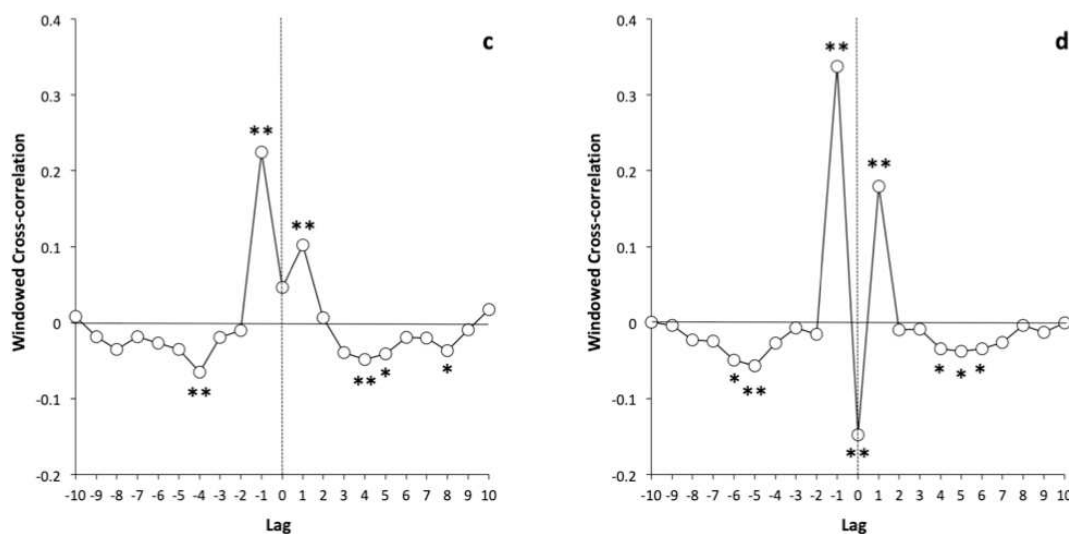


Figure 23 : Fonction WDCC moyenne pour la tâche d'oscillation synchronisée de joysticks. A gauche : condition 1 « full » ; à droite : condition 2 « digital » * : $p < 0,05$; ** : $p < 0,01$.

Quelle que soit la condition, nous avons obtenu des pics de corrélation croisée positifs aux premiers décalages -1 et 1. Condition « full » : $r(-1) = 0,23$ ($t_9 = 10,51$; $p < 0,01$) et $r(1) = 0,10$ ($t_9 = 4,12$; $p < 0,01$). Condition « digital » : $r(-1) = 0,36$ ($t_9 = 8,17$; $p < 0,01$) et $r(1) = 0,18$ ($t_9 = 5,58$; $p < 0,01$). Ces résultats confortent les résultats obtenus avec le jeu de données n°3 et confirment que le mode de synchronisation dans ces tâches de nature oscillatoire est dominé par un mécanisme de correction des asynchronies.

L'autre observation remarquable que l'on peut tirer de ces résultats concerne la corrélation croisée moyenne au décalage nul. Significativement négative dans la condition « digital » : $r(0) = -0,15$ ($t_9 = -5,24$; $p < 0,01$) et positive mais non différente de 0 dans la condition « full » $r(0) = 0,05$ ($t_9 = 1,37$; $p > 0,05$). Si l'on se réfère à la figure 19, ces résultats suggèrent que les deux horloges internes sont modérément corrélées, avec un couplage plus important dans la condition « full » que dans la condition « digital ». Ce résultat tend à confirmer la présence d'une dose d'appariement des complexités dans le processus de synchronisation malgré sa domination par un mécanisme de correction des asynchronies.

4.3.3. L'appariement des complexités

Tournons-nous maintenant vers ce troisième cadre théorique évoqué en introduction qu'est l'appariement des complexités. Cette hypothèse suppose un modèle assez similaire à celui utilisé pour le modèle de couplage continu à l'exception que les deux systèmes ne sont pas conduits par une même horloge interne mais qu'ils tendent plutôt à harmoniser leurs complexités. Ce modèle peut être exprimé comme :

$$\begin{cases} I_1(t) = I_1^*(t) + \gamma_1 B_1(t) \\ I_2(t) = I_2^*(t) + \gamma_2 B_2(t) \end{cases} \quad (94)$$

Avec $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$ étant considérées comme deux séries fractales corrélées à long terme. Notons ainsi que l'hypothèse d'appariement des complexités suppose que la synchronisation n'est pas réalisée via une correction des asynchronies. Sur la base de ce modèle, on peut évidemment s'attendre à trouver un pic de corrélation positif au décalage nul. Afin de tester cette hypothèse, nous avons généré 12 paires de séries $I_1(t)$ et $I_2(t)$ selon le système d'équations (94) avec $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$. $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$ ont été générées via des ARFIMA(0,d,0) selon la procédure donnée par l'équation (87) avec $H = 0,9$ et $W = 0,7$.

Nous avons présenté dans le graphique de gauche de la figure 24 la fonction WDCC moyenne de cette simulation. Comme nous nous y attendions, la fonction présentait un pic positif au décalage nul ($t_{11} = 23,46$; $p < 0,01$) mais aussi aux premiers décalages -1 ($t_{11} = 3,01$; $p < 0,05$ et 1 ($t_{11} = 4,62$; $p < 0,01$). Nous avons toutefois aussi observé des pics négatifs aux décalages -4 ($t_{11} = -3,82$; $p < 0,01$), -5 ($t_{11} = -2,94$; $p < 0,05$) et -6 ($t_{11} = -3,85$; $p < 0,01$), ainsi qu'aux décalages 3 ($t_{11} = -2,76$; $p < 0,05$), 4 ($t_{11} = -2,42$; $p < 0,05$), 5 ($t_{11} = -2,33$; $p < 0,05$), 6 ($t_{11} = -2,74$; $p < 0,05$), 7 ($t_{11} = -2,48$; $p < 0,05$) et 8 ($t_{11} = -3,44$; $p < 0,01$).

Finalement, nous avons reporté sur le graphique de droite de la figure 24 la fonction moyenne de WDCC pour le jeu de donnée n°4 (marche synchronisée bras dessus, bras dessous). Cette fonction présente une forme similaire à celle obtenue via la simulation avec la présence d'un pic positif au décalage nul ($t_{10} = 5,56$; $p < 0,01$) ainsi qu'aux

premiers décalages -1 ($t_{10} = 5,71$; $p < 0,01$) et 1 ($t_{10} = 4,60$; $p < 0,01$) et la présence de pic négatifs aux décalages -6 ($t_{10} = -4,39$; $p < 0,01$) et -4 ($t_{10} = -3,57$; $p < 0,01$) ainsi qu'aux décalages 4 ($t_{10} = -6,67$; $p < 0,01$) et 6 ($t_{10} = -4,51$; $p < 0,01$).

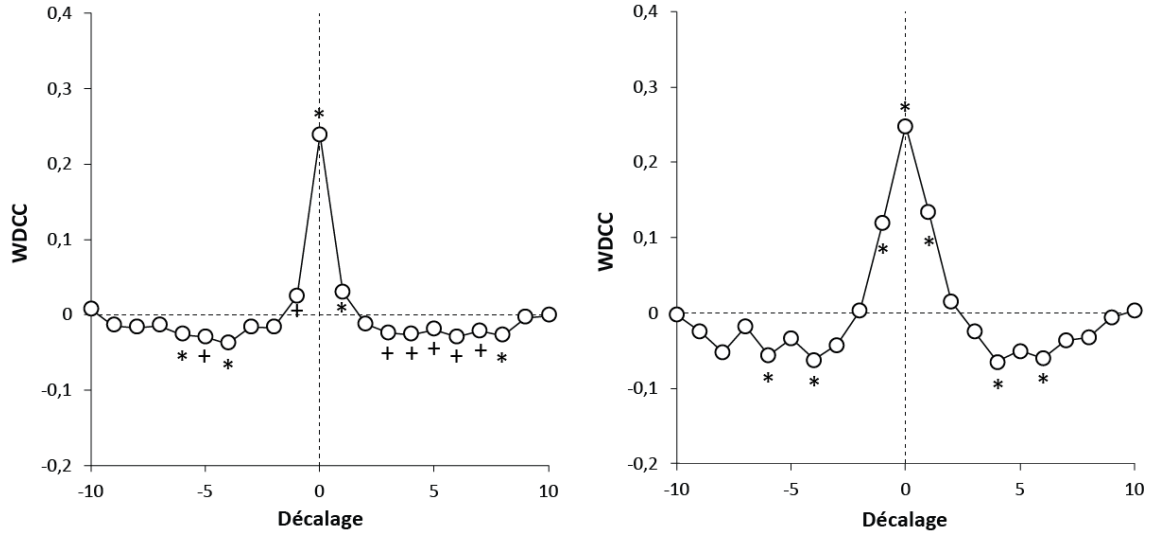


Figure 24 : Gauche : Fonction WDCC moyenne de l'ensemble des 12 simulations de l'équation (94). Droite : Fonction WDCC moyenne pour le jeu de donnée n°4 : marche synchronisée bras dessus, bras dessous. $+$: $p < 0,05$ et $*$: $p < 0,01$.

Notons toutefois que les coefficients de corrélation croisée expérimentaux aux premiers décalages -1 et 1 semblent être supérieur à ceux obtenus via la simulation. Ceci peut être expliqué par un processus minoritaire de correction de pas à pas qui serait superposé à l'appariement des complexités. Ceci peut être modélisé via :

$$\begin{cases} I_1(t) = I_1^*(t) - \alpha_1 A_1(t-1) + \gamma_1 B_1(t) \\ I_2(t) = I_2^*(t) - \alpha_2 A_2(t-1) + \gamma_2 B_2(t) \end{cases} \quad (95)$$

Ce modèle est proche de celui présenté dans l'équation (77) à la différence que le terme de bruit différencié a été remplacé par un terme de bruit simple afin de rendre compte de la nature continue de la tâche. Comme pour la simulation précédente, nous avons généré 12 paires de séries $I_1(t)$ et $I_2(t)$ selon le système d'équations (95) avec $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ et des valeurs faibles de correction $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,2$. $I_1^*(t)$ et $I_2^*(t)$ ont été là aussi générées via des ARFIMA(0, d ,0) selon la procédure donnée par l'équation (87) avec $H = 0,9$ et $W = 0,7$. La fonction moyenne de WDCC de cette simulation est présentée dans la figure 25 :

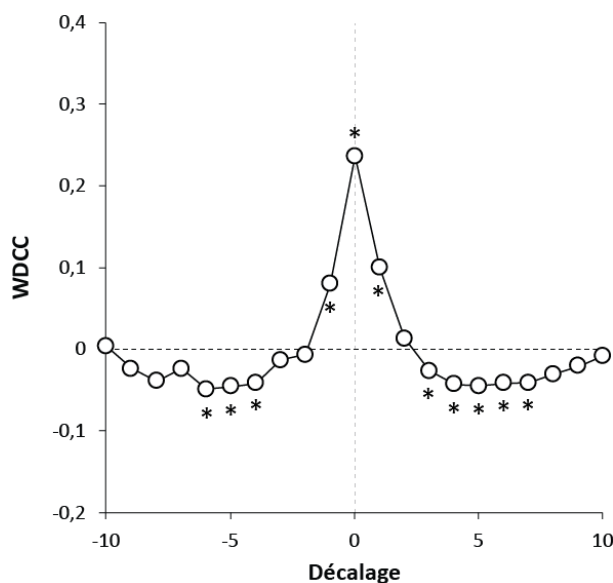


Figure 25 : Fonction WDCC moyenne des 12 simulations de l'équation (95).
 * : $p < 0,01$.

Comme on peut le voir, l'introduction de petits paramètres de corrections n'affectent pas la forme globale de la fonction, mais augmente de manière sélective le niveau moyen des corrélations aux premiers décalages -1 et 1.

Cette simulation montre que même si l'appariement des complexités tend à être le processus de synchronisation dominant, il devrait être complété par un processus minoritaire discret de correction pas à pas. Nous avons testé cette hypothèse dans une expérimentation où les participants marchent en synchronie avec une relation claire de meneur / suiveur. Les résultats, que je présenterai dans la dernière partie de cette thèse, tendent à confirmer que les valeurs moyennes de corrélation aux premiers décalages reflètent cette asymétrie, confortant ainsi l'hypothèse que des processus de correction discrets sont à l'œuvre dans ce genre de synchronisation.

4.3.4. Discussion

A travers cette analyse formelle des covariances complétée par des simulations et l'étude de données empiriques, nous avons montré que l'utilisation de la WDCC permettait de mettre en évidence des processus variés qui sont à la base de la synchronisation interpersonnelle.

La fonction WDCC est particulièrement affectée par (1) la force des processus de correction discrètes (2) le niveau de corrélation croisée des horloges internes, et (3) la quantité de bruit dans le système.

Les processus de corrections discrètes essai-à-essai ou cycle-à-cycle sont révélés par la présence de pics positifs de WDCC aux premiers décalages -1 et 1. Ces processus de correction peuvent être distribués sur plus d'essais ou de cycles, et dans ce cas on observe des pics de corrélations croisées s'étendant sur plus de décalages (par exemple sur les décalages -2, -1, 1 et 2 dans le jeu de données n°3). Finalement, une asymétrie entre les décalages positifs et négatifs est susceptible de révéler une relation de meneur / suiveur dans la synchronisation.

La WDCC au décalage nul reflète le niveau de corrélation croisée entre les deux horloges internes. Dans le cas limite de la tâche de coordination bimanuelle, dans laquelle chacune des deux mains est gouvernée par la même horloge interne (voir jeu de données n°2), la WDCC devrait révéler une forte corrélation positive au décalage 0. Toutefois, lorsque les deux systèmes synchronisés sont gouvernés par des processus fractals distincts mais corrélés de manière croisée à long terme, comme attendu dans les situations où la synchronisation est soutenue par un processus d'appariement des complexités, on s'attend aussi à trouver un pic positif de WDCC au décalage nul mais avec des valeurs plus modérées que dans le premier exemple (voir jeu de données n°4).

Nous avons toutefois montré que la WDCC est aussi affectée par le bruit et les processus correctifs. Obtenir un pic de WDCC proche de zéro voire même négatif au décalage nul n'indique pas que les horloges internes sont indépendantes ou anti-corrélées. Ce genre de résultats nous donne simplement des informations sur l'importance respective des différents facteurs affectant la WDCC au décalage nul. Ceci est peut-être le message principal du travail que nous avons mené dans « *Windowed detrended cross-correlation analysis of synchronization processes* », au-delà de la présentation théorique et méthodologique de la WDCC.

En effet, dans nos papiers précédents, nous avons présenté les différents cadres théoriques pour l'analyse des synchronisations interpersonnelles comme étant des hypothèses alternatives et exclusives se référant à des processus ciblés en fonction des contraintes spécifiques des tâches utilisées (Almurad et al., 2017; Delignières et al., 2016).

Cette étude suggère l'adoption d'un autre point de vue. Nous avons montré, à travers l'analyse de notre premier jeu de données (tapping interpersonnel) ainsi que celle des données issues des d'oscillations uni-manuelles synchronisées, que derrière les processus apparents de correction des asynchronies essai-à-essai, un appariement des complexités entre les deux horloges internes des participants devrait être considéré pour rendre entièrement compte des corrélations empiriques. De la même manière, nous avons montré à travers l'analyse de notre quatrième jeu de données (marche synchronisée bras dessus, bras dessous) que derrière l'appariement des complexités, un processus léger de corrections discrètes pas-à-pas était également à l'œuvre. Ainsi, dans chaque situation, la synchronisation semble être dominée soit par la correction des asynchronies soit par l'appariement des complexités sans que l'influence discrète de l'autre processus ne puisse être ignorée. Enfin, toutes les situations peuvent être décrites par un seul et même modèle qui ne diffère selon la situation que par la force de la contribution relative de ces composants essentiels.

Un autre résultat inattendu fût la preuve que la tâche d'oscillation synchronisée de pendules soit dominée par un processus de correction. En raison de son caractère oscillatoire, cette tâche était une bonne candidate pour mettre en évidence les caractéristiques essentielles du modèle des oscillateurs couplés, et plus spécifiquement la forte corrélation croisée entre les horloges internes et l'absence de correction cycle à cycle. Ce ne fût clairement pas le cas, et récemment M. Scotti a présenté des résultats similaires dans son mémoire de recherche dans le cadre d'une tâche où des paires de participants devaient réaliser des oscillations synchronisées de l'avant-bras. Ce résultat mérite des investigations plus poussées, surtout lorsque l'on considère le nombre de travaux expérimentaux et théoriques qui ont été dédiés dans les dernières décades à l'application du modèle des oscillateurs couplés à la coordination interpersonnelle.

Finalement, nous pouvons nous demander quels sont les avantages de la WDCC sur les approches conventionnelles de corrélation croisée. Nous avons présenté dans la figure 26 les fonctions de corrélation croisée moyennes de nos quatre jeux de données. Ces fonctions furent calculées sur les séries entières du décalage -60 au décalage 60.

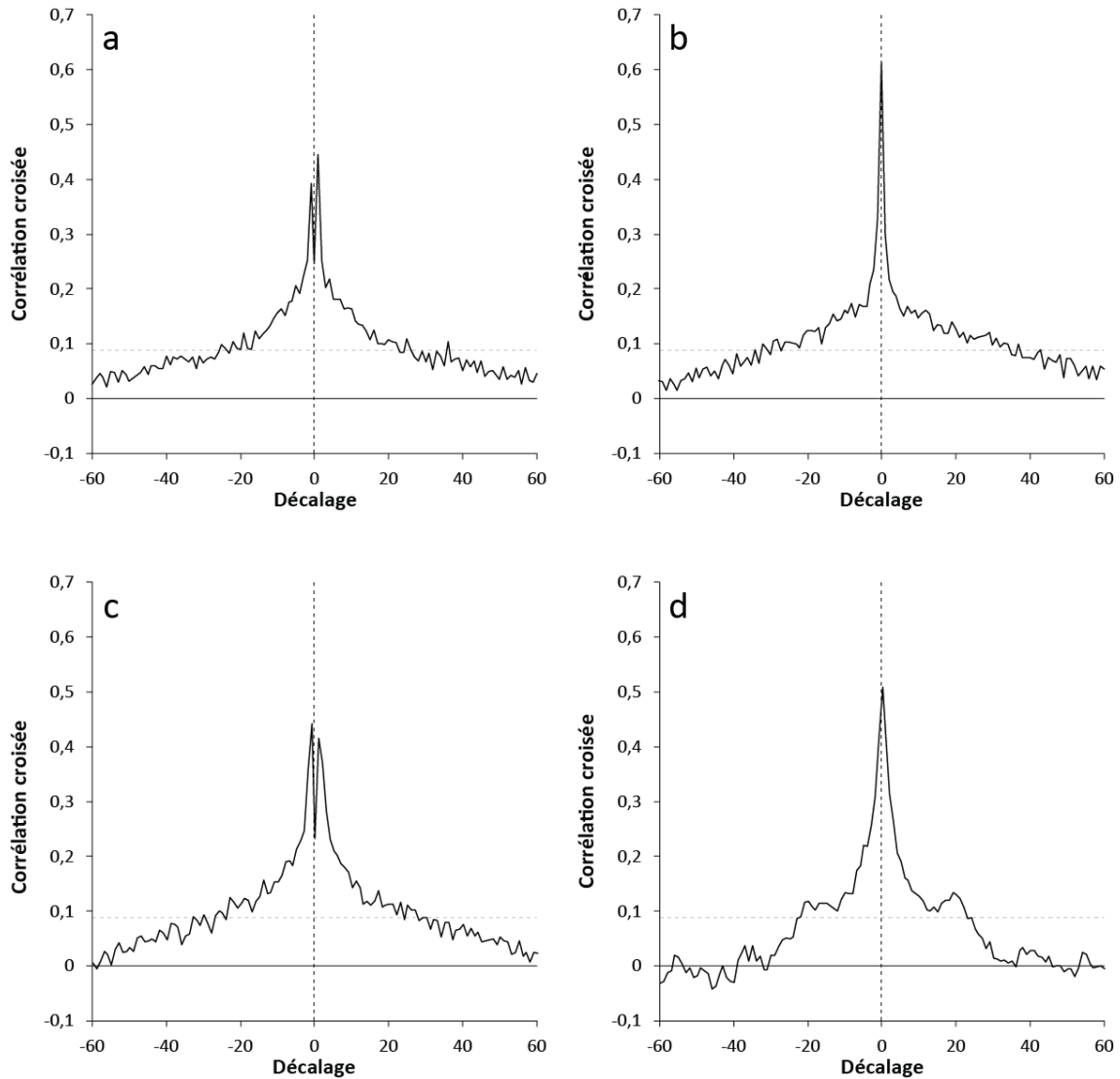


Figure 26 : Fonction de corrélations croisées calculée du décalage -60 au décalage 60 : (a) jeu de donnée n°1, tâche de tapping interpersonnel ; (b) jeu de donnée n°2, oscillations bimanuelles intrapersonnelles ; (c) jeu de données n°3, tâche d'oscillation de pendule interpersonnelle ; (d) jeu de données n°4, marche synchronisée bras dessus, bras dessous. La ligne en pointillés représente le seuil de probabilité $p = 0,05$.

Les informations essentielles fournies par la WDCC sont manifestement discernables dans ces fonctions de corrélation croisée, cela concerne notamment les pics positifs aux premiers décalages -1 et 1 des jeux de données n° 1 et 3 et le pic plus élevé au décalage nul du jeu de données n°2 comparé à celui du jeu de données n°4. La WDCC a l'avantage d'être focalisée sur les processus à court terme et de normaliser les résultats sur des tailles de fenêtres standardisées permettant les comparaisons entre les conditions expérimentales. Comme vu précédemment, la WDCC permet de distinguer de manière fine les multiples processus qui peuvent être à la base de la synchronisation. Les fonctions de corrélations croisées classiques donnent toutefois des informations additionnelles sur la persistance et le taux de décroissance des corrélations entre les séries étant cachées par la WDCC. Informations restant essentielles pour rendre compte de la nature à long terme des corrélations croisées dans le cadre de l'appariement des complexités.

Dans ce papier, nous avons insisté sur le fait que la fonction de WDCC devait être considérée comme un pattern et non comme un échantillon des coefficients de corrélation. La comparaison entre les graphiques de la figure 26 et les autres graphiques présentés précédemment laisse comprendre pourquoi nous considérons que la fonction WDCC ne contient que les traces des corrélations croisées originales. Chaque situation expérimentale semble être caractérisée par un pattern de WDCC spécifique, et la bonne manière pour analyser la fonction WDCC est de tester l'uniformité des patterns sur l'ensemble des dyades réalisant des conditions similaires et non de regarder la significativité statistique de chaque coefficient de WDCC.

Finalement, nous pouvons aisément concevoir que l'utilisation de la WDCC est nécessairement restreinte aux tâches discrètes ou cycliques mais pouvant être discrétisées. Et qu'additionnellement, l'application correcte de cette méthode requiert d'une part que les signaux analysés soient stationnaires sur le long terme et d'autre part que la synchronisation soit stable sur le temps de l'expérimentation. Ceci devrait être sécurisé lors de la conception des protocoles expérimentaux. Les processus de synchronisation peuvent toutefois être étudiés dans des situations où les signaux sont typiquement continus et non-stationnaires et où la synchronisation peut être intermittente comme par exemple dans la coordination du regard et des oscillations posturales pendant la

conversation (Shockley, Richardson, & Dale, 2009). Dans de tels cas, d'autres méthodes telle que l'analyse de quantification de récurrence croisée (CRQA pour *Cross-Recurrence Quantification Analysis* en anglais) peuvent se révéler plus pertinentes (Richardson & Dale, 2005; Zbilut, Giuliani, & Webber, 1998).

4.4. Les signatures multifractales de l'appariement des complexités

Le développement de cette deuxième méthode que nous avons exposée dans notre papier « *Multifractal signatures of complexity matching* » fait suite au caractère questionnable de l'idée que l'appariement des exposants d'échelle puisse être considéré comme une signature non ambiguë de l'appariement des complexités. En effet, plusieurs auteurs ont considéré qu'il pouvait être nécessaire de distinguer l'appariement statistique, c'est-à-dire la convergence des exposants d'échelles et l'appariement des complexités véritable, autrement dit l'harmonisation des complexités. Par exemple, dans une expérimentation de coordination rythmique interpersonnelle, Fine, Likens, Amazeen, et Amazeen (2015) ont observé, comme dans de précédentes expérimentations, un appariement typique des exposants d'échelle, mais ils suggèrent que cet appariement statistique pouvait juste résulter d'ajustements locaux et continus de la phase et non d'une harmonisation globale de la complexité. Delignières et Marmelat (2014) ont quant à eux mis en évidence cet appariement dans des séries de durées de pas produites par des participants tentant de marcher en synchronie avec un métronome fractal. Ils ont essayé de simuler leurs résultats empiriques au moyen d'un modèle basé sur des corrections locales des asynchronies et ont montré que ce modèle était capable de reproduire de manière adéquate l'appariement statistique observé dans les séries expérimentales. Ces auteurs ont conclu que marcher de façon synchronisée avec un métronome fractal pouvait essentiellement impliquer des processus de correction à court terme et que la corrélation observée entre les exposants d'échelle dans de tels cas pouvait représenter une simple conséquence de ces processus de correction locale. Torre et al. (2013) ont aussi soutenu cette hypothèse au moyen d'une tâche de tapping en synchronie avec des métronomes non-isochrones où ils mirent en évidence que l'intervalle inter-tapes pouvait être modélisé indépendamment du niveau de fluctuation en $1/f$ du métronome.

Notre but fût donc de mettre en évidence des signatures statistiques qui pourraient distinguer sans ambiguïté un appariement des complexités global et véritable, de processus locaux de corrections ou d'ajustements. Nous avons proposé de baser notre approche sur les analyses multifractales car elles permettent de décrire de manière plus détaillée la complexité des signaux fractals que les approches monofractales classique (e.g. les méthodes d'analyse fractales présentées en première partie). De fait, l'une des hypothèses les plus intéressantes sur l'origine des fluctuations fractales dans le comportement des systèmes complexes fait référence à l'idée que les interactions entre les réseaux du système sont gouvernées par une dynamique de cascade multiplicative (Ihlen & Vereijken, 2010). Or une telle dynamique est supposée générer des fluctuations multifractales plutôt que monofractales et, de fait, Ihlen et Vereijken ont montré que c'était le cas dans la plupart des séries analysées précédemment dans la littérature. Les processus multifractals présentent des fluctuations plus complexes qui ne peuvent être caractérisées par un exposant unique, les sous-ensembles de fluctuations courtes et larges sont caractérisés par des échelonnements différents, ainsi leur description complète nécessite un ensemble d'exposants d'échelle (Podobnik & Stanley, 2008).

Nous avons donc proposé d'évaluer l'appariement statistique au moyen d'une fonction de corrélation point par point entre les ensembles d'exposants d'échelle issus des signaux étudiés.

4.4.1. L'analyse multifractale des fluctuations redressées

Notre analyse est basée sur une version modifiée de l'analyse des fluctuations redressées que j'ai déjà présentée en première partie. La MF-DFA (pour *Multifractal detrended fluctuation analysis*) a été introduite par Kantelhardt et al. (2002) et est très similaire à l'algorithme initial de la DFA. Les auteurs proposent d'analyser les moments statistiques supérieurs et inférieurs via une modification de l'équation (41) :

$$F_q(n) = \sqrt[q]{\frac{1}{N_n} \sum_{s=1}^{N_n} [F^2(n, s)]^{q/2}} \quad (96)$$

Où $F_q(n)$ est la fonction de fluctuation au $q^{\text{ième}}$ ordre, et q peut prendre n'importe quelle valeur réelle excepté 0. Notons que pour $q = 2$, l'équation (96) redevient l'équation (41) utilisée dans la DFA classique. Comme l'équation n'est pas calculable pour $q = 0$, une procédure de moyennage logarithmique est utilisée telle que :

$$F_0(n) = e^{\frac{1}{2N_n} \sum_{s=1}^{N_n} \ln[F^2(n,s)]} \quad (97)$$

Les exposants généralisés de Hurst $h(q)$ sont calculés comme avec la DFA via la pente de la régression linéaire entre $\log[F_q(n)]$ et $\log(n)$. Pour les valeurs positives de q , les exposants généralisés de Hurst décrivent le comportement des fluctuations larges tandis que pour les valeurs négatives de q ils décrivent le comportement des fluctuations courtes. Les résultats de la MF-DFA peuvent être convertis dans le formalisme multifractal classique par de simples transformations : d'abord, les exposants généralisés de Hurst sont liés aux exposants de Renyi définis par le formalisme multifractal standard basé sur la fonction de partition via :

$$\tau(q) = qh(q) - 1 \quad (98)$$

Pour les signaux monofractals $\tau(q)$ est une fonction linéaire de q , tandis que pour les signaux multifractals $\tau(q)$ est une fonction non-linéaire de q . Une autre manière de caractériser les processus multifractals est la représentation en spectre de singularité $f(\alpha)$ qui est lié à $\tau(q)$ via une transformation de Legendre :

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (99)$$

Et

$$f(\alpha) = q\alpha(q) - \tau(q) \quad (100)$$

Où $f(\alpha)$ est la dimension fractale du support des singularités dans la mesure avec l'exposant de Lipschitz-Hölder $\alpha(q)$. Le spectre de singularité d'un signal monofractal est représenté par un point unique dans le plan de la fonction $f(\alpha)$ tandis qu'un processus multifractal donne une fonction parabolique

Il a été montré que l'algorithme de MF-DFA fonctionnait aussi bien que les autres méthodes multifractales (Oświecimka, Kwapien, & Drożdż, 2006; Schumann & Kantelhardt, 2011). Toutefois, il a été observé que cet algorithme produisait souvent des spectres dit inversés, c'est-à-dire en forme de zigzag plutôt qu'en forme parabolique, lorsqu'il est utilisé en particulier sur des séries empiriques (Makowiec, Rynkiewicz, Gałaska, Wdowczyk-Szulc, & Żarczyńska-Buchowiecka, 2011; Mukli, Nagy, & Eke, 2015). Mukli, Nagy, et Eke (2015) ont récemment introduit une approche basée sur la focalisation qui permet d'éviter cette embûche. La méthode standard évalue les exposants d'échelle généralisés $h(q)$ indépendamment pour chaque valeur de q . Cette procédure peut être considérée comme adéquate si l'hypothèse d'une structure homogène de la fonction de fluctuation est valable. Cette propriété n'est toutefois pas toujours présente et spécifiquement dans les signaux empiriques. Théoriquement, quel que soit q les fonctions de fluctuation devraient converger vers une valeur limite commune à l'échelle la plus grande. En effet, lorsqu'on substitue la longueur de l'intervalle n par la longueur du signal N dans l'équation (96) on obtient :

$$F_q(N) = \sqrt[q]{\frac{1}{N_N} \sum_{s=1}^{N_N} [F^2(N, s)]^{q/2}} = \sqrt[q]{[F^2(N, s)]^{q/2}} = F(N, s) \quad (101)$$

$F(N, s)$ peut être considéré comme le focus théorique de la fonction de fluctuation, et Mukli et al. (2015) ont proposé d'utiliser ce focus comme une référence de guidage lors de la régression pour calculer $h(q)$ ce qui permet d'éviter avec succès l'occurrence de spectres inversés.

Comme avec la DFA, le principe de la MF-DFA est de répéter le calcul de la fonction $F_q(n)$ sur un ensemble de longueurs d'échelle n différentes. Usuellement, ces fonctions sont calculées de la longueur $n = 8$ ou 10 à la longueur $n = N/4$ ou $N/2$. Cependant, les signaux présentent très souvent des régimes de fluctuation différents sur le court et le long terme, et les auteurs effectuent des estimations séparées sur différentes plages de longueur d'échelles (Delignières & Marmelat, 2014).

Nous avons donc proposé d'estimer d'abord l'ensemble des exposants multifractals sur la plage la plus grande de longueur d'échelle (i.e. de 8 à $N/2$) puis sur des plages de plus en plus restreintes en excluant les longueurs d'échelle les plus petites (i.e de 16 à $N/2$, de 32 à $N/2$ et de 64 à $N/2$). Que la synchronisation soit issue de corrections locales ou de l'appariement des complexités nous nous attendions à trouver une forte corrélation entre les exposants lorsque l'on considère les intervalles les plus long. Si la synchronisation est juste basée sur des corrections locales, alors l'appariement statistique des intervalles longs n'est qu'une conséquence de ces corrections locales, mais vu que les corrections locales entre deux systèmes imprédictibles restent approximatives, nous avons fait l'hypothèse que les corrélations devraient diminuer considérablement lorsque les longueurs d'échelle les plus petites sont prises en considération. Au contraire, dans le cas de l'appariement véritable des complexités, la synchronisation entre les systèmes est supposée émerger des interactions multi-échelles, et nous avons donc fait l'hypothèse de trouver dans ces cas une corrélation forte, même lorsque l'on analysait la plus grande plage de longueur d'échelle.

4.4.2. *Analyses de données empiriques*

Dans la mouture originale de « *Multifractal signatures of complexity matching* » nous avons analysé trois jeux de données. Le premier est le jeu de données n°2 (coordination bimanuelle) utilisée dans l'analyse formelle de la WDCC, le deuxième lui aussi utilisée dans la partie précédente est le jeu de données n°3 (oscillation synchronisée de pendules), le troisième utilisée dans l'article de Delignières et Marmelat, (2014) a été collecté lors d'une étude pilote où les participants devaient marcher sur un tapis roulant en synchronisant leurs pas avec un métronome fractal. Nous avons résumé les résultats que nous avons obtenus dans la figure 27 :

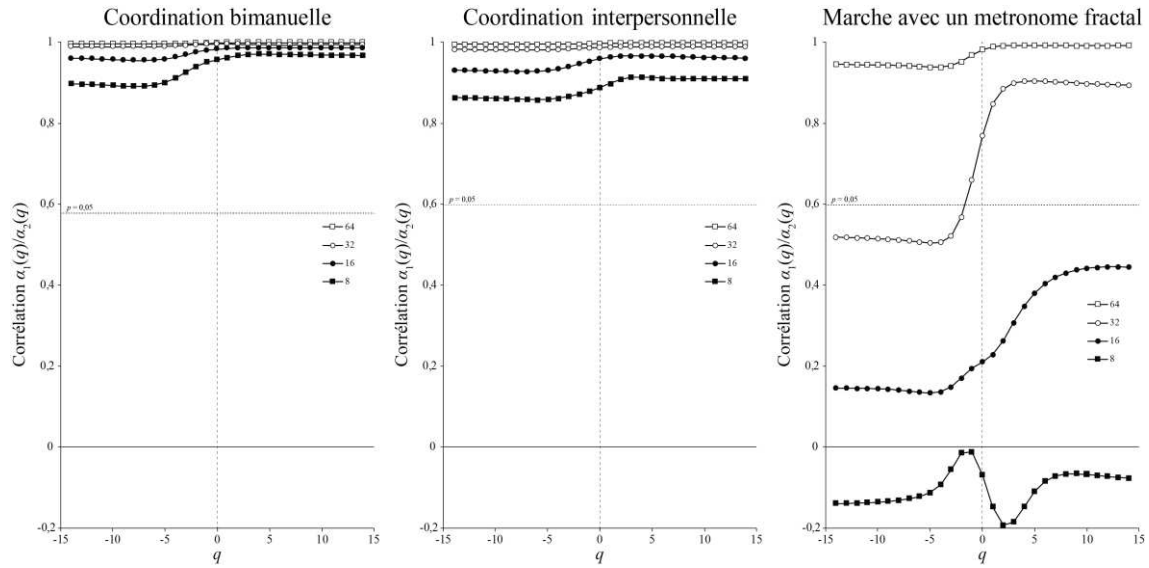


Figure 27 : Fonction de corrélation pour les 4 plages de longueur d'échelle considérées (de 8 à $N/2$, de 16 à $N/2$, de 32 à $N/2$ et de 64 à $N/2$) dans les tâches : de coordination bimanuelles (gauche), d'oscillation coordonnée de pendules (centre) et de marche synchronisée avec un métronome fractal (droite).

Dans le cas des jeux de données n°2 et n°3 les fonctions de corrélations obtenues restèrent toutes proches de 1 quelle que soit la plage de longueurs d'échelle considérée, bien que les corrélations soient légèrement plus faibles tout en restant au-dessus du seuil de significativité dans le cas de l'oscillation de pendules. Au contraire, dans le jeu de données issues de la tâche de marche avec un métronome fractal, la corrélation entre les exposants d'échelle est proche de 1 lorsque l'on observe la plage se concentrant sur les longueurs d'échelle les plus larges mais perd toute significativité statistique lorsque l'on considère les plages intégrant les échelles les plus courtes.

Ainsi, les tâches de coordinations bimanuelles et d'oscillations synchronisées de pendules montrent un appariement statistique des spectres multifractals quelle que soit la plage de longueurs d'échelles considérées, ceci suggère que la synchronisation est gouvernée par une coordination globale multi-échelle. En revanche, dans la tâche de synchronisation avec un métronome fractal cet appariement disparaît lorsque l'on prend en compte les longueurs d'échelles les plus petites, suggérant que la synchronisation est issue d'un processus de correction locale.

Nous avons conforté cette hypothèse en simulant un modèle de correction des asynchronies similaire à celui présenté dans l'équation (93), et avons mis en évidence que les corrélations entre les exposants de Lipschitz–Hölder $\alpha(q)$ issues de cette simulation avaient un comportement similaire à celles issues de la tâche de synchronisation avec un métronome fractal.

Au moment de la parution de ce papier, vu l'hypothèse récente à l'époque proposée par Fine et al. (2015) suggérant que l'appariement statistique des exposants d'échelle pouvait être issu d'un couplage local et continu entre deux oscillateurs, nous n'étions pas sûr que l'appariement statistique des spectres multifractals soit effectivement dû à un processus d'appariement des complexités rendant cette signature potentiellement inopérante pour distinguer l'appariement véritable des complexités de ce type de couplage continu. Afin d'obtenir des pistes de réponses nous avons simulé un modèle d'oscillateurs couplés semblable à celui de l'équation (90) s'étant révélé capable de mimer l'appariement statistique des spectres multifractals. Toutefois les signaux issus de ce modèle présentaient des trajectoires extrêmement proches qui semblaient inobservables dans des conditions expérimentales. Cette dernière observation nous avait mené à la conclusion que la synchronisation dans les tâches de coordination bimanuelles et d'oscillation de pendules étaient effectivement issues de l'appariement des complexités. A ce moment-là, les signatures multifractales constituaient donc un moyen de distinguer les processus de synchronisation issus de l'anticipation faible de ceux issus de l'anticipation forte.

Il fallut attendre notre analyse formelle via la WDCC pour distinguer réellement les différents processus qui sous-tendent la synchronisation. Pour rappel, le résultat le plus surprenant était celui issu de la tâche d'oscillation de pendules, nous avons mis en évidence que la synchronisation était en réalité gouvernée par un processus de correction des asynchronies. Ce résultat pourrait jeter le discrédit sur la présente analyse se révélant ainsi incapable de distinguer effectivement les modes de synchronisation issus de l'anticipation faible de ceux issus de l'anticipation forte lorsque les deux signaux sont produits par deux personnes mutuellement synchronisées. Toutefois, l'hypothèse que nous avons formulé à l'issue de notre analyse via la fonction WDCC selon laquelle dans chaque situation, la synchronisation semble être dominée soit par la correction des

asynchronies soit par l'appariement des complexités sans que l'influence discrète de l'autre processus ne puisse être ignorée, suggère que l'appariement des spectres multifractals pourrait être simplement sensible à la présence d'appariement des complexités des horloges internes, ceci indépendamment du processus majoritaire soutenant le mode de synchronisation.

Afin de tester cette hypothèse, je présente d'une part sur le graphe de gauche de la figure 28 les corrélations moyennes entre les exposants Lipschitz–Hölder calculés sur le jeu de données n°1 (i.e. tapping interpersonnel) où nous avons montré que la synchronisation est soutenue majoritairement par une correction des asynchronies et minoritairement par l'appariement des complexités. Et d'autre part, je présente sur le graphe de droite de la figure 28 les corrélations moyennes entre les exposants Lipschitz–Hölder calculés sur les 12 paires de séries simulées via les équations (77) et (87) avec $W = 1$ (i.e. séries dont la fonction WDCC moyenne a été présentée dans la figure 19 en bas à droite). Par définition, le couplage entre les horloges internes de ces paires de séries est nul, ainsi la synchronisation n'est maintenue que par correction des asynchronies.

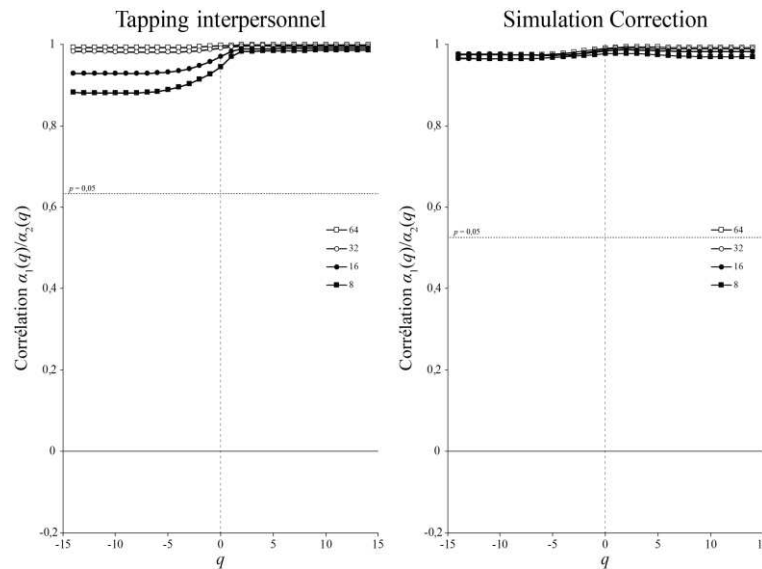


Figure 28 : Fonction de corrélation pour les 4 plages de longueur d'échelle considérées (de 8 à $N/2$, de 16 à $N/2$, de 32 à $N/2$ et de 64 à $N/2$) : A gauche pour le jeu de données n°1 : tapping interpersonnel. A droite pour l'ensemble de 12 paires de séries simulées via les équations (77) et (87) avec $W = 1,0$.

Dans les deux cas les fonctions de corrélations sont similaires à celles obtenues dans les tâches d'oscillation bimanuelles et de synchronisation de pendules, autrement dit les corrélations entre les exposants multifractals restent proches de 1. Avec même un degré de corrélation supérieur pour les données simulées. Ce résultat me pousse donc à rejeter l'hypothèse de la sensibilité des signatures multifractales à la présence d'un appariement des complexités même si ce processus est minoritaire dans l'émergence de la synchronisation. En allant même plus loin, ces résultats étant issus d'une expérimentation et d'une simulation dont nous avons suggéré qu'elles relevaient de processus d'anticipation faible, invalident la conclusion selon laquelle les signatures multifractales permettent de distinguer les processus de synchronisation issus de l'anticipation faible de ceux issus de l'anticipation forte.

Finalement, l'unique apport de l'approche des signatures multifractales est d'avoir montré que lorsqu'un participant tente de se synchroniser avec un métronome fractal censé reproduire la variabilité naturelle, alors l'appariement de leurs exposants n'est qu'une conséquence statistique issue des interactions dans les grandes échelles. On peut aisément déduire que dans ce cas précis le processus de synchronisation est soutenu par une correction unilatérale des asynchronies et en aucun cas soutenu par un appariement des complexités le métronome n'étant pas adaptable. Ceci suggère que les signatures multifractales ne montreraient des corrélations significatives que lorsqu'il existe une coadaptation entre les deux systèmes ayant généré les signaux. Si tel est le cas, alors la fonction moyenne de WDCC de la tâche de marche synchronisée avec un métronome fractal devrait montrer d'une part une corrélation égale à 0 au décalage nul. De fait, si l'on recalcule l'équation (86) avec $\alpha_2 = \gamma_2 = 0$ (i.e. par définition le métronome ne corrige pas ces asynchronies et ne produit pas de terme d'erreur) alors la corrélation au décalage nul entre les deux intervalles $cov[I_{1res}(t), I_{2res}(t)]$ est égale à zéro. D'autre part cette fonction ne devrait montrer de valeurs positives qu'au décalage -1, en effet lorsqu'on recalcule l'équation (84) avec les paramètres utilisés ci avant il vient :

$$cov[I_{1res}(t), I_{2res}(t - 1)] = -\alpha_1 cov[A_1(t - 1), I_{2res}^*(t - 1)] \quad (102)$$

Dans notre analyse formelle nous avons simplifié les expressions en associant systématiquement les intervalles I_1 et I_2 avec leurs asynchronies respectives A_1 et A_2 . Dans ce cas précis, le métronome ne s'adaptant pas (i.e. A_2 n'existe pas) donc les opérations de simplification ne peuvent donc pas être réalisées, toutefois on peut aisément déduire de l'équation (71), qu'une augmentation dans l'intervalle I_2 induit une diminution de l'asynchronie du sujet A_1 , il vient donc :

$$\text{cov}[A_1(t), I_{2\text{res}}^*(t)] < 0 \quad (103)$$

Ainsi, $\text{cov}[I_{1\text{res}}(t), I_{2\text{res}}(t - 1)]$ devrait être positif. Afin de tester cette hypothèse, je présente dans la figure 29 la fonction moyenne de WDCC pour la tâche de marche synchronisée avec un métronome fractal.

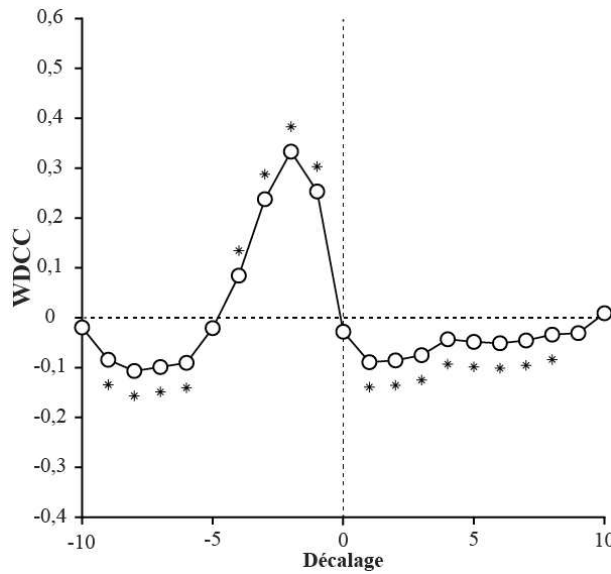


Figure 29 : Fonction WDCC moyenne de la marche en synchronie avec un métronome fractal. * : $p < 0,01$.

Conformément à ce qui était attendu, la corrélation au décalage nul n'est pas différente de 0. De plus, la fonction de WDCC pour les décalages négatifs (i.e. du participant vers le métronome) montre des pics positifs aux décalages -1, -2, -3, et -4 montrant que le participant se synchronise avec le métronome en prenant en compte les quatre asynchronies précédentes.

Ces résultats suggèrent donc bel et bien que la synchronisation avec un métronome fractal met en œuvre un processus de correction des asynchronies unilatéral et en aucun cas un appariement des complexités. Notons toutefois que le modèle de correction de la première asynchronie n'est dans ce cas précis pas suffisant, un modèle étendu permettrait de mieux décrire le phénomène.

Finalement, notons que la fonction de WDCC pour les décalages positifs est homogène à celle observée dans la figure 15 (i.e. l'autocorrélation sur fenêtres redressées des séries fractales), ce côté de la WDCC correspond évidemment à la corrélation croisée du métronome vers le participant, le métronome ne se synchronisant pas la seule trace que l'on observe est celle de son autocorrélation. Les résultats présentés dans les figures 28 et 29 invalident donc l'idée que les signatures multifractales permettent de discriminer les processus d'anticipation faible des processus d'anticipation forte.

En définitive, le seul intérêt qui subsiste dans l'utilisation des signatures multifractales est de discriminer les situations où la synchronisation est issue d'une adaptation unilatérale de situations de coadaptation.

4.5. De l'appariement de complexité dans la marche à la restauration de la complexité de la locomotion des personnes âgées

La marche constitue un domaine d'application de choix pour l'effet d'appariement des complexités. Dans cette dernière partie nous avons fait une mise en pratique de l'ensemble des points théoriques précédemment abordés. Si l'on en croit la théorie, lorsque deux systèmes complexes de niveau de complexité différents interagissent, c'est le système le plus complexe qui attire le système le moins complexe. Ainsi, théoriquement, lorsqu'une personne jeune marche avec une personne âgée, alors la personne âgée devrait voir son niveau de complexité augmenter pour rejoindre le niveau de complexité de la personne jeune.

4.5.1. L'appariement de la complexité dans la marche côte à côte

C'est dans notre article « *Complexity matching in side-by-side walking* » (Almurad et al., 2017) que nous avons commencé à nous intéresser à l'application du cadre théorique de l'appariement des complexités dans les activités de marche.

Comme nous l'avons vu en conclusion du deuxième chapitre de cette thèse, la marche est un mouvement humain facilement étudiable qui permet la plus grande expression de la complexité chez les participants. Ainsi par extension la marche devient le domaine d'application parfait pour l'appariement des complexités. Bien que cette remarque conclusive ne soit pas concomitante avec la parution de cet article, nous étions tout de même guidés par cette intuition. Outre les développements méthodologiques et les résultats expérimentaux que l'on a présentés, l'objectif de cet article concernait la réhabilitation des personnes âgées via une potentielle restauration de la complexité de la marche.

4.5.1.1. Méthode

26 participants ont pris part à cette étude, 16 hommes, 10 femmes d'âge moyen $28,07 \pm 8,88$ ans. Ces participants ont été distribués dans 13 dyades homogènes en termes de poids et de taille. L'expérimentation fût menée sur la piste d'athlétisme couverte de l'université et comprenait trois conditions expérimentales :

- Condition 1 : Marche indépendante, chaque participant marchait de son côté à sa vitesse préférentielle.
- Condition 2 : Marche côte-à-côte, les deux membres de chaque dyade marchaient ensemble côte-à-côte et avaient pour instruction de synchroniser leurs pas.
- Condition 3 : Marche bras dessus, bras dessous, les deux membres de chaque dyade marchaient ensemble bras dessus, bras dessous et avaient pour instruction de synchroniser leurs pas. Notons que le jeu de données n°4 utilisé dans le troisième chapitre de cette thèse est issu de cette condition.

Les données furent récoltées avec deux systèmes Mobility Lab (APDM, Inc), un pour chaque participant. Les données étaient transmises sans fil à deux ordinateurs différents, les systèmes calculant automatiquement des séries brutes de durées de pas.

Nous avons soumis nos données aux analyses : (1) de signatures multifractales sur les plages de longueur d'échelles de 8 à $N/2$, de 16 à $N/2$, de 32 à $N/2$ et de 64 à $N/2$; (2) de corrélation croisée moyennes du décalage -60 au décalage 60 ; et de WDCC du décalage -10 au décalage 10 sur des fenêtres de 15 points.

4.5.1.2. Résultats

Nous avons présenté dans la figure 30 les fonctions de corrélation $r(q)$ entre les exposants de Lipschitz–Hölder $\alpha(q)$ pour les trois conditions expérimentales sur les quatre plages de longueurs d’échelles considérées. Dans la condition de marche indépendante (graphique de gauche), les fonctions de corrélation étaient sous le seuil de significativité quelle que soit la plage de longueur d’échelle. Au contraire, dans les conditions de marche côte à côte (graphique central) et bras dessus, bras dessous, (graphique de droite) les fonctions de corrélation étaient supérieures au seuil de significativité quelle que soit la plage de longueur d’échelle considérée. Les fonctions de corrélations dans la condition bras dessus, bras dessous étaient proche de 1 pour les plages les plus courtes (i.e. de 32 à $N/2$ et de 64 à $N/2$) tandis qu’elles apparaissaient un peu plus faibles dans la condition côte-à-côte ou elles étaient en moyenne, pour les mêmes plages de longueur d’échelle, de 0,9 pour les valeurs positives de q et de 0,82 pour les valeurs négatives.

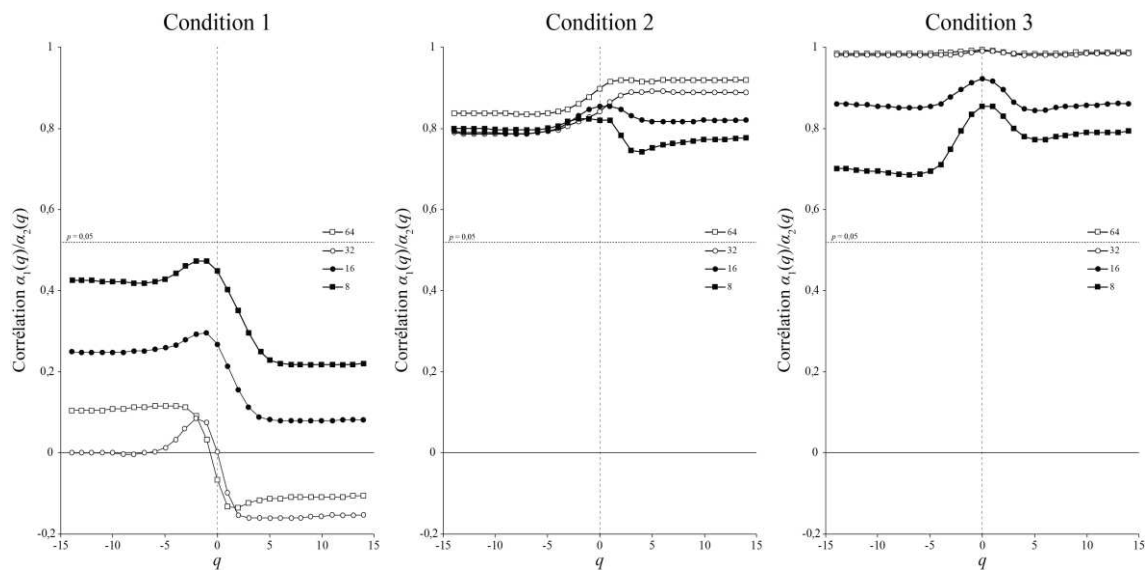


Figure 30 : Fonction de corrélation $r(q)$ entre les exposants de Lipschitz–Hölder $\alpha(q)$ pour les 4 plages de longueur d’échelle considérées (de 8 à $N/2$, de 16 à $N/2$, de 32 à $N/2$ et de 64 à $N/2$) pour les conditions : (1, gauche) marche indépendante ; (2, centre) marche côte à côte ; (3, droite) marche bras dessus, bras dessous.

Le graphe supérieur que nous avons présenté dans la figure 31 représente les fonctions de corrélation croisées moyennes dans les trois conditions. Dans la première condition, aucune corrélation n'a été observée sur l'ensemble de la plage de décalages. Au contraire, dans les conditions 2 et 3 les fonctions de corrélation croisées étaient organisées autour d'un pic au décalage nul et l'ensemble des corrélations restèrent significatives sur la plage de décalage considérée. Enfin, les corrélations furent systématiquement supérieures dans la condition 3, montrant l'efficacité du renforcement du couplage comparé à la condition 2. Les fonctions de WDCC sont présentées dans les trois graphes en bas de la figure 31, où là aussi les condition 2 et 3 montrent un pic de corrélation au décalage nul.

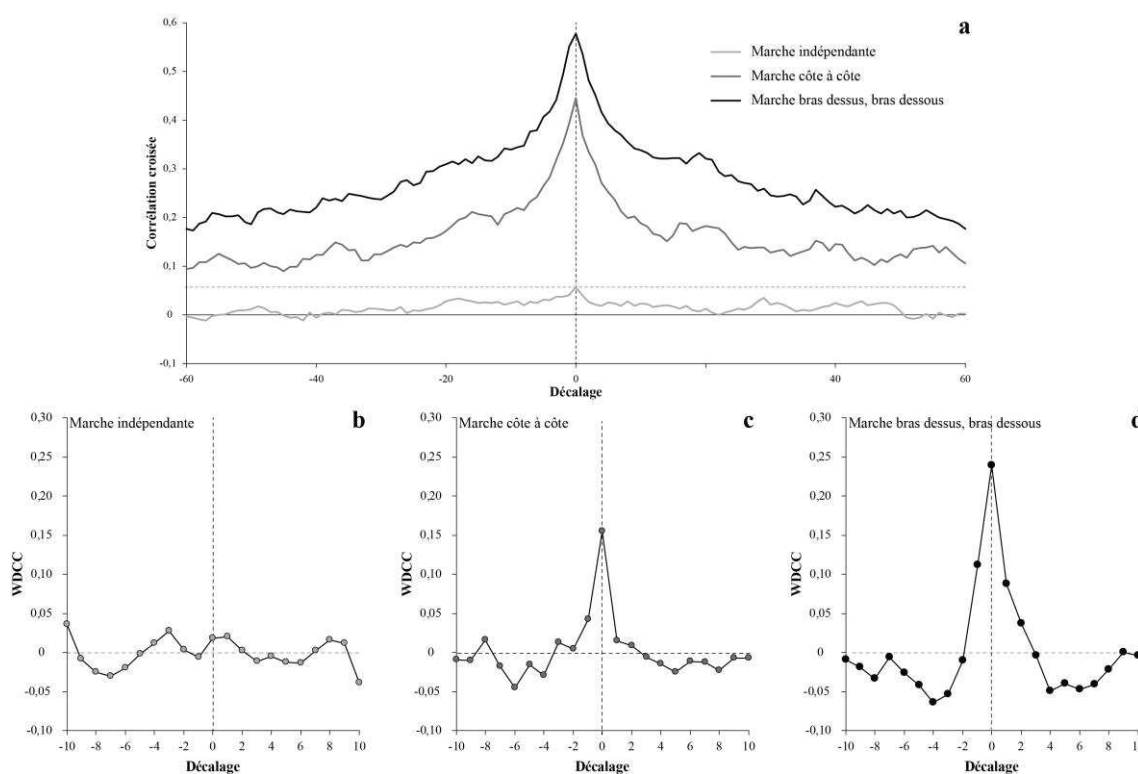


Figure 31 : Panneau a : Fonction de corrélation croisée moyenne du décalage -60 au décalage 60 pour : la marche indépendante (gris clair), la marche côte à côte (gris foncé) et la marche bras dessus, bras dessous (noir). La ligne horizontale en pointillés représente le seuil de significativité ($p = 0,05$). Panneaux b, c, d : Fonction WDCC moyenne du décalage -10 au décalage 10 sur fenêtres de 15 points pour : (b) la marche indépendante, (c) la marche côte à côte et (d) la marche bras dessus, bras dessous.

4.5.1.3. Discussion et remarques conclusives

Ces résultats présentent des preuves solides de la présence d'un processus d'appariement des complexités dans la marche synchronisée. Les résultats de la première analyse basée sur les signatures multifractales soutiennent la présence de processus d'appariement des complexités des horloges internes des participants dans les conditions 2 et 3. Quelle que soit la plage de longueurs d'échelle considérée les fonctions de corrélation entre exposants multifractals étaient au-dessus du seuil de significativité. Notons que nous nous attendions à trouver des corrélations plus fortes dans la condition bras dessus, bras dessous quelle que soit la plage de longueurs considérées. Ceci a été observé pour les plages les plus restreintes centrées sur les longues échelles (i.e. de 32 à $N/2$ et de 64 à $N/2$) : les corrélations étaient dans les deux cas proches de 1 alors qu'elles étaient comprises entre 0,8 et 0,9 dans la condition côte à côte (voir figure 30). Toutefois, lorsque que l'on observe l'intervalle de longueurs le plus large (de 8 à $N/2$) la fonction de corrélation présente des valeurs légèrement inférieures dans la marche bras dessus, bras dessous spécifiquement pour les valeurs négatives de q . A l'heure actuelle, nous n'avons pas d'explication satisfaisante de ce résultat. Enfin, nous n'avons évidemment pas trouvé de corrélation significative entre les exposants de Lipschitz–Hölder dans la condition de marche indépendante.

Les analyses de corrélations croisées tendent à confirmer ces résultats. La fonction de corrélations croisées dans la première condition présentait des valeurs non significatives sur l'ensemble des décalages étudiés, résultat évidemment attendu de séries a priori indépendantes. Au contraire le fort pic positif observé au décalage nul dans les conditions 2 et 3 montre la domination d'un processus d'appariement des complexités sur le mode de synchronisation. Une seconde observation importante est la persistance des corrélations croisées du décalage -60 au décalage 60, cette persistance peut être soit interprétée comme une preuve supplémentaire de l'appariement des complexités, les ajustements à court terme générant plutôt une décroissance exponentielle desdites corrélations, soit comme dues à la présence intrinsèque de mémoire à long terme dans les séries de chaque participant, cette alternative méritera d'être testée dans de futurs travaux.

Enfin, nous avons aussi observé un niveau de corrélation globalement plus élevé dans la condition bras dessus, bras dessous que dans la condition côte à côte, ceci montre que la manipulation des conditions expérimentales a induit une différence effective dans la force du couplage entre les deux membres de la dyade.

Comme nous l'avons suggéré dans la partie consacrée à la WDCC, même si l'appariement des complexités semble dominer le mode de synchronisation dans la condition bras dessus, bras dessous, nous ne pouvons ignorer qu'il existe un processus minoritaire de correction de cycle à cycle dans cette condition. Ce résultat est bien moins évident pour la condition côte-à-côte, là aussi, ce résultat méritera d'être plus profondément exploré dans nos futures recherches.

Le phénomène d'appariement des complexités peut apparaître comme étrange, de par sa nature multi-échelles ou même ses implications de prédiction de l'intervalle à venir (Repp, 2005) et peut certainement froisser les tenants des conceptions et modèles plus communs. Toutefois, ce cadre théorique propose une manière de penser innovatrice et fructueuse à propos de la coordination entre les êtres vivants. Les approches de traitement de l'information et la perspective de coordination ont été soutenues par beaucoup de protocoles expérimentaux (fortement contrôlés), mais leur pertinence pourrait n'être limitée qu'à ces situations artificielles. Cette supposition est soutenue par l'analyse de situations plus complexes qui suggère que la coordination entre les êtres vivants repose sur une composition équilibrée de processus dont la domination par l'un sur les autres est déterminée par la situation rencontrée.

La mise en évidence de la domination de l'appariement des complexités sur les processus de synchronisation dans la marche pourrait avoir des implications importantes, spécifiquement dans une optique de réhabilitation. En effet, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, l'exposant fractal peut être considéré comme un marqueur de santé, et, dans la marche spécifiquement, son altération semble être prédictive de la chute. Ceci pose une question centrale : Est-il possible de restaurer la complexité dans un système altéré ?

Le phénomène de l'appariement des complexités pourrait offrir des perspectives intéressantes à cet égard. Lorsqu'un système dont la complexité est altérée est entraîné par un système complexe, on peut supposer qu'il résulterait de l'appariement des complexités un appariement momentané des complexités des deux systèmes, et spécifiquement une augmentation de la complexité du système altéré. En d'autres termes, si une personne âgée est invitée à marcher en synchronie avec une personne jeune, on peut s'attendre à observer (au moins temporairement) à une restauration de sa complexité. Nous avons évalué la possibilité de cette restauration de la complexité dans notre papier « *Complexity matching: Restoring the complexity of locomotion in older people through arm-in-arm walking* » que je vais maintenant vous présenter.

4.5.2. La restauration de la complexité de la locomotion

Les hypothèses que nous avons testées dans le papier « *Complexity matching: Restoring the complexity of locomotion in older people through arm-in-arm walking* » sont issues de l'ensemble des considérations que nous avons formulé précédemment et étaient dirigées vers une possible restauration de la complexité chez les personnes âgées. Elles étaient les suivantes :

1. Si une personne âgée est invitée à marcher bras dessus, bras dessous et de manière synchronisée avec une personne jeune, alors nous devrions observer le phénomène d'appariement des complexités au sein de la dyade.
2. Considérant l'asymétrie des complexités, il devrait résulter de l'appariement des complexités une hausse de la complexité de la personne âgée.
3. Un entraînement prolongé de marche synchronisée avec des partenaires en bonne santé devrait entraîner une restauration pérenne de la complexité des personnes âgées.

4.5.2.1. Matériel et méthode

24 participants ont pris part à cette étude, 7 hommes, 17 femmes d'âge moyen $72,46 \pm 4,96$ ans. Ils ont été recrutés dans les associations locales de retraités et peuvent être considérés comme présentant un vieillissement normal. Aucun n'était porteur d'une maladie pouvant affecter la posture, incluant tout désordre neurologique, musculosquelettique, cardiovasculaire ou respiratoire.

Ils ont été répartis aléatoirement dans deux groupes : un groupe expérimental (12 participants, 2 hommes et 10 femmes et d'âge moyen $72,83 \pm 6,01$ ans) et un groupe contrôle (12 participants, 5 hommes et 7 femmes et d'âge moyen $72,08 \pm 3,87$ ans).

Comme précédemment l'expérimentation a été menée sur la piste couverte d'athlétisme de 200m de notre université. Les participants ont suivi un entraînement à la marche sur quatre semaines consécutives (notées semaine 1, 2, 3 et 4). Chaque semaine était composée de trois sessions d'entraînement effectuées le lundi, le mercredi et le vendredi. Chaque semaine, la session du lundi commençait avec une séquence solo durant laquelle le participant marchait individuellement aussi régulièrement que possible sur la piste à son rythme préférentiel pendant 15 minutes. Le but de cette séquence en solo était d'évaluer la complexité des séries de durées de pas produite par le participant. Cette séquence étant volontairement placée en début de semaine afin d'éviter toute altération due à la fatigue.

Puis les participants effectuaient chaque semaine trois séquences en duo le lundi et quatre le mercredi et le vendredi. Durant ces séquences ils étaient invités à marcher avec l'expérimentatrice pendant 15 minutes. L'ensemble des participants ont marché avec la même expérimentatrice (femme de 46 ans). Ce choix méthodologique était motivé par un but de standardisation des conditions expérimentales auprès des participants. Dans le groupe expérimental, les participants marchaient bras dessus, bras dessous avec l'expérimentatrice, et avaient pour instruction de synchroniser leurs pas avec ceux de l'expérimentatrice durant tout la séquence. Dans le groupe contrôle, les participants et l'expérimentatrice marchaient ensemble sans contact physique et sans instruction de synchronisation. Notons que cette dernière condition ne peut pas être comparée à la condition côte à côte présentée ci-avant où les participants avaient reçu la consigne explicite de se synchroniser. Cette condition contrôle ne visait qu'à vérifier l'effet d'un entraînement à la marche, d'intensité similaire à celui du groupe expérimental. Enfin, dans les deux groupes, l'expérimentatrice adaptait systématiquement sa vitesse à celle adoptée par les participants.

Les participants avaient une période de repos d'au moins 10 minutes entre deux séquences consécutives. Chaque participant a effectué 44 séquences en duo durant ce programme d'entraînement, soit en moyenne 11 heures de marche et 67 kilomètres parcourus.

Finalement, une séquence solo a été effectuée 2 semaines après la fin du programme d'entraînement (en semaine 7) comme test de rétention.

Nous avons récupéré les données avec le dispositif de marche que j'ai présenté dans le troisième chapitre. Vu que l'objectif de marche était temporel (i.e. 15 minutes) chaque série brute dépendait de la vitesse de marche des participants. Afin d'éliminer les transients, le début et parfois la fin des séries temporelles furent exclus de l'analyse. Les séries ont été analysées avec la DFA, les signatures multifractales et la WDCC.

4.5.2.2. Résultats

Nous avons présenté dans la figure 32 l'évolution moyenne de l'exposant d'échelle α calculé via la DFA dans les séquences solos, pour les deux groupes, sur les quatre semaines d'entraînement et le test de rétention. Une ANOVA 2 x 5 à mesures répétées met en évidence une interaction significative entre les groupes et les semaines ($F(4,88) = 5,08$; $p = 0,001$; $\eta^2 = 0,19$). L'effet principal des semaines était aussi significatif ($F(4,88) = 6,44$; $p = 0,0001$; $\eta^2 = 0,23$). Un test post-hoc LSD de Fischer a montré une différence significative entre le α moyen obtenu dans le groupe expérimental durant la quatrième semaine et le test de rétention et l'ensemble des autres α moyens.

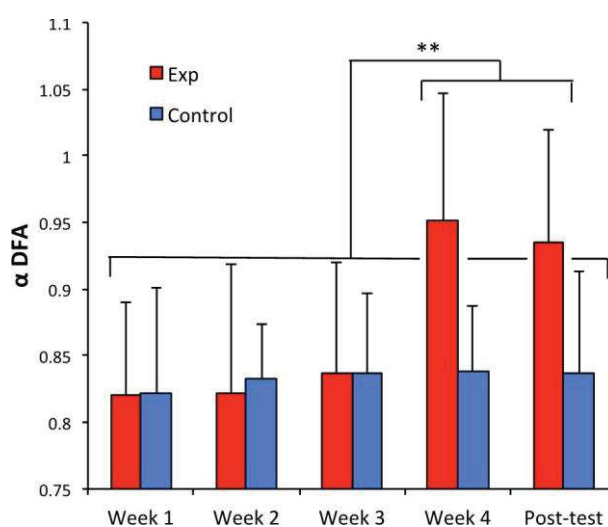


Figure 32 : Exposants d'échelle α , calculés via la DFA, pour les participants dans les séquences solo (rouge : groupe expérimental, bleu : groupe contrôle), sur l'ensemble des quatre semaines d'entraînement plus le test de rétention. Les barres d'erreur représentent l'écart type. ** : $p < 0,01$

Nous avons présenté dans la figure 33 l'évolution des α moyens durant les 4 semaines de l'expérimentation dans les séquences duo et solo. Le α moyen de l'expérimentatrice venant d'une seule personne, l'analyse de variance ne peut être effectuée. Cette figure suggère toutefois une convergence entre l'exposant moyen de l'expérimentatrice et ceux des participants dans le groupe expérimental sur les quatre semaines. Notons aussi que cette convergence apparaît moins évidente dans le groupe contrôle. Nous avons présenté dans le tableau 7 la corrélation moyenne entre les exposants α des participants et l'exposant correspondant de l'expérimentatrice, calculée sur les quatre semaines du protocole expérimental et pour les deux groupes. Des corrélations moyennes élevées furent observées dans le groupe expérimental, révélant un appariement statistique entre les séries produites simultanément par l'expérimentatrice et les participants. Au contraire, la corrélation moyenne est apparue plus modérée et largement plus variable dans le groupe contrôle, suggérant un appariement statistique faible entre les séries.

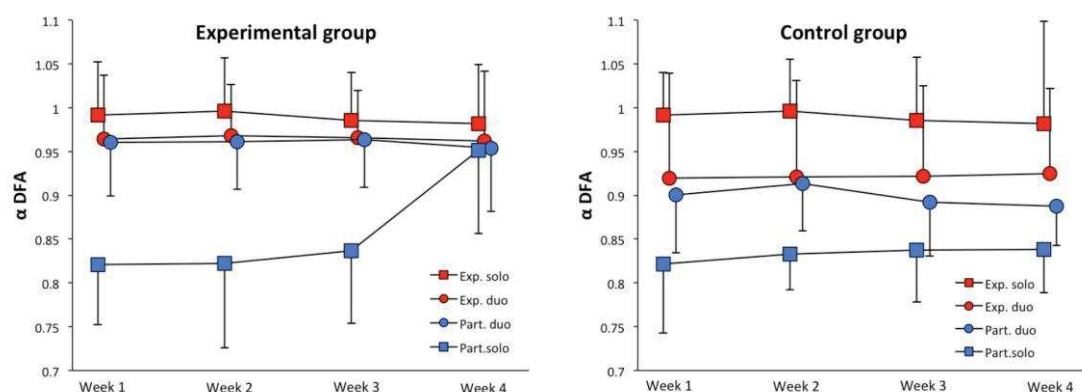


Figure 33 : Evolution de l'exposant α moyen durant les quatre semaines (rouge : expérimentatrice, bleu : participants, carrés : séquences solo, disques : séquences duo). A gauche : groupe expérimental, à droite : groupe contrôle

	Semaine 1	Semaine 2	Semaine 3	Semaine 4
Groupe expérimental	0,95 (0,05)	0,97 (0,04)	0,96 (0,05)	0,98 (0,01)
Groupe contrôle	0,34 (0,44)	0,51 (0,30)	0,33 (0,39)	0,44 (0,33)

Tableau 7 : Corrélation moyenne entre les exposants α des participants et l'exposant correspondant de l'expérimentatrice (écart-type entre parenthèses) calculée sur les quatre semaines du protocole expérimental et pour les deux groupes

Nous avons reporté dans la figure 34 les fonctions de corrélation moyennes $r(q)$ entre les exposants de Lipschitz–Hölder $\alpha(q)$ pour les deux groupes (ligne du haut : groupe expérimental, ligne du bas : groupe contrôle) et les quatre semaines sur les quatre pages de longueurs d’échelle considérées (partant de 8, 16, 32 et 64 allant jusqu’à $N/2$). Dans le groupe expérimental les corrélations sont significatives quelle que soit la plage de longueurs d’échelles considérée suggérant un appariement des complexités des horloges internes dans chaque dyade. Notons que l’appariement des complexités apparaît dès la première semaine et tend à se renforcer au fil des semaines. Au contraire, dans le groupe contrôle, les fonctions de corrélation moyennes tendent à être plus basses voire non significatives, spécifiquement pour les plages les plus longues (i.e. de 8 à $N/2$ et de 16 à $N/2$).

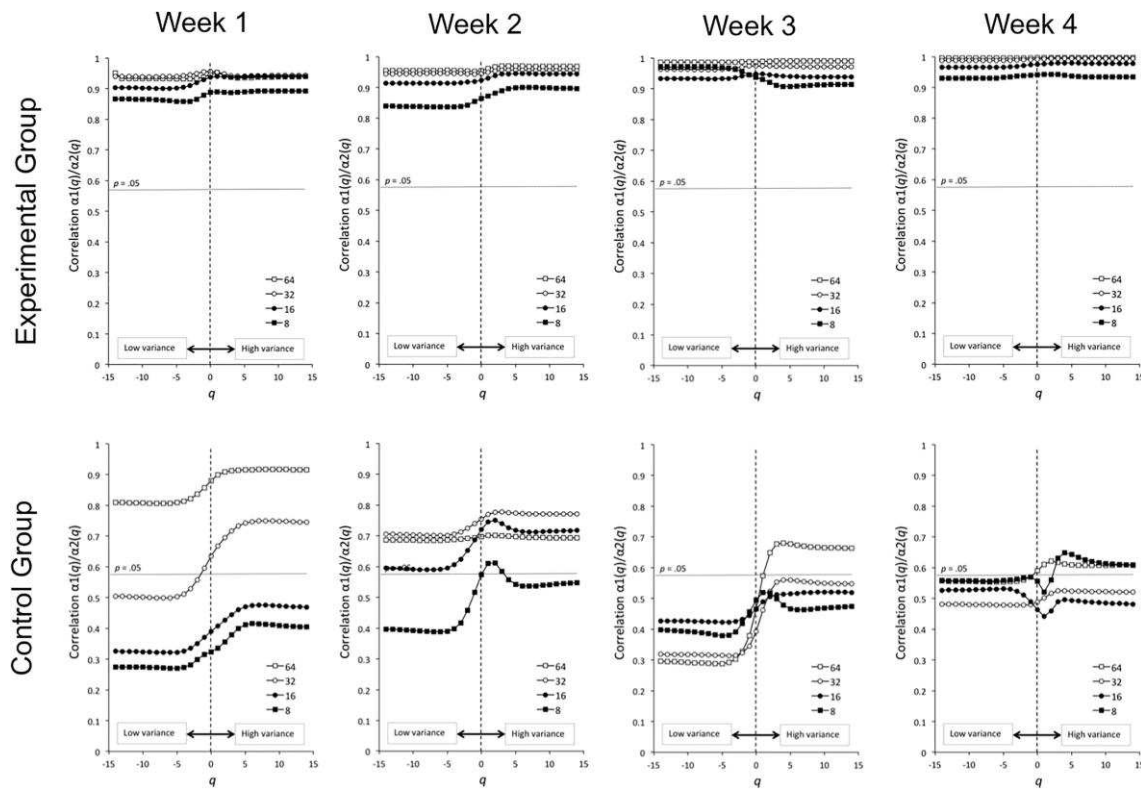


Figure 34 : Fonction de corrélation $r(q)$ entre les exposants de Lipschitz–Hölder $\alpha(q)$ pour les 4 plages de longueur d’échelle considérées (de 8 à $N/2$, de 16 à $N/2$, de 32 à $N/2$ et de 64 à $N/2$) pour le groupe expérimental (ligne du haut) et le groupe contrôle (ligne du bas), et sur les quatre semaines d’expérimentation.

Les fonction WDCC moyennes pour le groupe expérimental (ligne du haut) et le groupe contrôle (ligne du bas) et sur les quatre semaines sont reportées dans la figure 35. Ces fonctions présentent toutes un pic positif (significativement différent de 0) au décalage nul qui apparaît plus haut pour le groupe expérimental (environ 0,3) que pour le groupe contrôle (environ 0,15). Ces résultats apportent la preuve que dans le groupe expérimental la synchronisation est dominée par l'appariement des complexités. Au contraire, les valeurs extrêmement faibles du groupe contrôle suggèrent une synchronisation assez faible voire intermittente.

Un autre résultat intéressant et mis en valeur par les corrélations aux premiers décalages -1 et 1 qui apparaissent positives et différentes de zéro dans le groupe expérimental. Outre le fait qu'elles indiquent une dose de correction pas à pas dans le mécanisme de synchronisation, leur dissymétrie (corrélation au décalage 1 plus forte qu'au décalage -1) indiquent que les participants ont corrigé leurs pas sur la base des asynchronies de manière plus forte que l'expérimentatrice.

Notons finalement que cette dissymétrie négligeable au début de l'expérimentation est devenue de plus en plus saillante au fil des semaines.

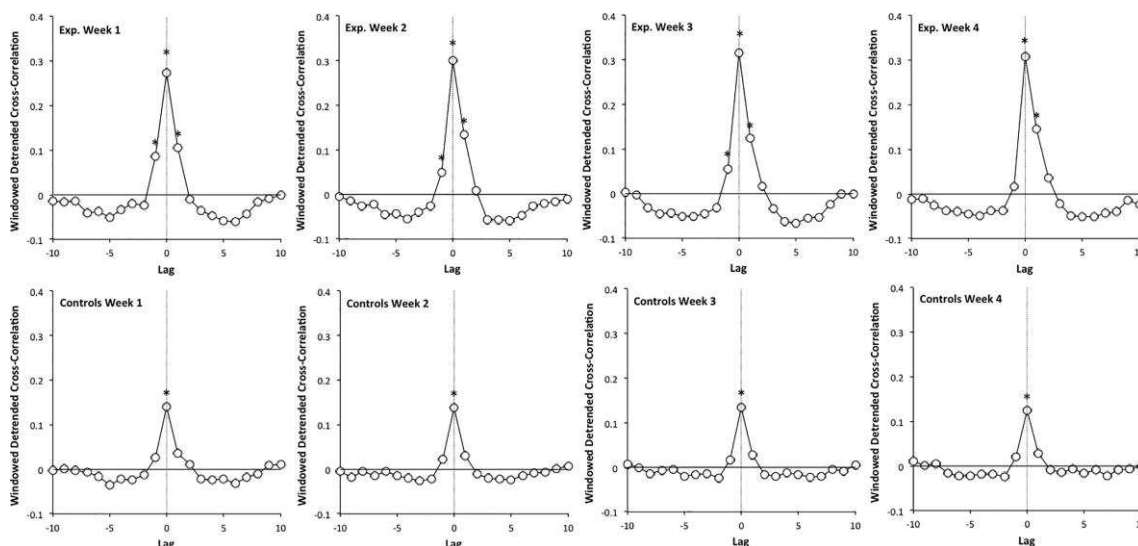


Figure 35 : Fonctions WDCC moyennes du décalage -10 au décalage 10 sur fenêtres de 15 points, pour le groupe expérimental (ligne du haut) et le groupe contrôle (ligne du bas) et sur les quatre semaines. Les étoiles * indiquent des valeurs différentes de zéro.

4.5.2.3. Discussion et remarques conclusives

Les trois hypothèses qui motivaient ce travail expérimental ont été validées :

(1) Lorsqu'une personne âgée est invitée à marcher bras dessus, bras dessous de manière synchronisée avec une personne jeune, la synchronisation est majoritairement soutenue par l'appariement des complexités. Cette hypothèse a été validée d'une part via les résultats issus des signatures multifractales indiquant une synchronisation globale et multi-échelles des horloges interne des participants et de l'expérimentatrice et d'autre part par la forme typique de pic au décalage nul de la fonction WDCC moyenne indiquant que la synchronisation est effectivement gouvernée par l'appariement des complexités même si une dose de correction pas-à-pas a été détectée. Le résultat principal à ce niveau est que la synchronisation forcée de deux systèmes présentant des complexités différentes est basée sur les mêmes processus que la synchronisation forcée entre deux systèmes de complexité similaire. Notons enfin que cet appariement des complexités est apparu dès la première séquence en duo.

(2) Considérant deux systèmes de complexités différentes, l'appariement des complexités devrait résulter de l'attraction du système le moins complexe vers le système le plus complexe. Ce résultat est certainement l'un des plus intéressants de cette étude, étant en ligne directe avec les conclusions théoriques formulées par Mahmoodi et al. (2018). Notons toutefois que les résultats obtenus pour le groupe contrôle (les deux systèmes étant attirés l'un par l'autre) nous poussent à relativiser l'impact de cette hypothèse notamment lorsque les deux systèmes ne sont pas fortement couplés et/ou n'ont pas la consigne explicite de se synchroniser. Une condition hybride où les participants âgés devraient se synchroniser dans la marche côte-à-côte ou bien une autre où les participants âgés marchent bras dessus bras dessous avec une personne jeune sans instruction explicite de synchronisation pourraient nous aider à dresser un tableau plus complet de ce mécanisme.

(3) Une expérience prolongée d'appariement des complexités entre deux systèmes de complexités différentes permet d'élever la complexité du système le moins complexe, cet effet étant persistant dans le temps. Dans le contexte de notre expérimentation ce résultat suggère une possible restauration de la complexité des personnes âgées. Notons que nous n'avons testé la persistance de cette restauration qu'au moyen d'un seul test de rétention deux semaines après la fin des sessions d'entraînement.

Là encore, de nouvelles études seront nécessaires pour analyser la persistance de cet effet, son déclin probable, et les effets d'une session d'entraînement additionnelle lorsqu'un déclin significatif est observé (on peut faire l'hypothèse que la restauration pourrait intervenir plus tôt lors d'une deuxième session de réhabilitation).

A notre connaissance, ceci est la première preuve en faveur de la restauration de la complexité dans un système altéré. Récemment, Warlop et al. (2017), ont évoqué les effets de la marche nordique pour la restauration de la complexité chez des patients souffrant de la maladie de Parkinson, mais leur expérimentation se concentre essentiellement sur les effets immédiats de l'adoption d'un schéma de locomotion spécifique plutôt que sur les effets à long terme d'un protocole de réhabilitation.

Dans cette expérimentation, l'effet statistique a été obtenu au début de la quatrième semaine. Durant une période de pré-tests nous avons tenté de poursuivre l'entraînement pour obtenir une augmentation des corrélations à long terme. Nous avons systématiquement obtenu cet effet lors de la quatrième semaine et avons décidé de limiter le protocole à quatre semaines consécutives. Toutefois, l'analyse des résultats individuels montre que cette restauration peut intervenir plus tôt au début de la troisième semaine. L'observation la plus importante est que l'entraînement intensif seul (i.e. celui du groupe contrôle) ne permet pas une restauration de la complexité, ainsi, marcher en synchronisation forcée avec un partenaire en bonne santé semble être un facteur clé dans le processus de restauration, et nos analyses suggèrent que l'appariement des complexités pourrait en être l'ingrédient principal.

Certaines limitations de cette étude doivent toutefois être pointées. D'abord, il devrait être pris en compte que nous démontrons dans cette étude la possibilité d'une restauration de la complexité, et nous ne faisons que supposer, sur la base de nos hypothèses précédentes, qu'il devrait en résulter une locomotion plus stable et adaptable et une diminution de la propension à la chute. Des études longitudinales, utilisant des tests cliniques et un suivi systématique devraient être nécessaires pour confirmer cette hypothèse. Deuxièmement, cette expérimentation fût extrêmement difficile à organiser (en raison de la disponibilité de la piste d'athlétisme) et exigeante tant pour les participants que pour l'expérimentatrice. Nous avons mis 14 mois pour effectuer l'ensemble du protocole. Pour des raisons pratiques, nous avons décidé de concevoir le protocole avec un seul expérimentateur, qui a participé à toutes les séquences avec chaque participant.

Ceci a pour avantage de standardiser les conditions expérimentales, mais a introduit un possible biais dans le sens où nos résultats pourraient être liés à des qualités cachées et non supposée de l'expérimentatrice. Il semble évident qu'il est nécessaire de répliquer cette expérimentation avec d'autres accompagnants. Une seconde expérimentation est en cours dans notre laboratoire afin de clarifier ce point. Finalement, considérant la difficulté intrinsèque du protocole expérimental, nous avons recruté des participants qui présentaient un vieillissement normal et non pathologique, et en conséquence une altération modérée de leur complexité. L'exposant d'échelle moyen caractérisant la durée des pas de nos participant était de 0,83, cette valeur moyenne est clairement plus élevée que celle rapportée par Hausdorff et al., (1997) pour leur groupe de participants âgés (0,68). De futures investigations sont requises pour adapter et tester ce genre de protocole avec des participants souffrant d'altérations de complexité plus prononcées.

En conclusion, cette expérimentation ne doit pas être considérée comme une étude clinique dont le but serait de valider et promouvoir une stratégie de réhabilitation, mais plutôt comme un travail fondamental testant une hypothèse théorique (la restauration de la complexité dans les organismes vivants via l'appariement des complexités). Nous espérons évidemment qu'elle puisse inspirer les cliniciens dans le développement, la validation et la diffusion de protocoles de réhabilitation effectifs.

4.6. La réhabilitation par l'interaction

A l'heure actuelle, la plupart des recherches en réhabilitation de la locomotion mettent l'accent sur l'utilisation de dispositifs sophistiqués tels que la réalité virtuelle, le guidage métronomique, l'assistance robotique etc. Les résultats et hypothèses que nous avons présentés jusqu'ici nous poussent à penser que l'appariement des complexités ne peut émerger de l'interaction avec ces dispositifs artificiels. La dernière expérimentation que j'ai présentée suggère que l'on peut atteindre des objectifs de réhabilitation avec des moyens plus simples, moins onéreux et surtout plus humains. Nous pensons de façon spécifique au pays et aux situations où l'accès aux soins médicaux sophistiqués reste difficile et souvent inconcevable. Nous serions fiers que notre travail puisse donner un soutien scientifique à cette simple prescription : « Prend le bras de ton aïeul et marchez ensemble »

Bibliographie

- Abney, D. H., Paxton, A., Dale, R., & Kello, C. T. (2014). Complexity matching in dyadic conversation. *Journal of Experimental Psychology: General*, 143(6), 2304-2315.
<https://doi.org/10.1037/xge0000021>
- Almurad, Z. M. H., & Delignières, D. (2016). Evenly spacing in Detrended Fluctuation Analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 451, 63-69.
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.155>
- Almurad, Z. M. H., Roume, C., Blain, H., & Delignières, D. (2018). Complexity Matching : Restoring the Complexity of Locomotion in Older People Through Arm-in-Arm Walking. *Frontiers in Physiology*, 9, 1766.
<https://doi.org/10.3389/fphys.2018.01766>
- Almurad, Z. M. H., Roume, C., & Delignières, D. (2017). Complexity matching in side-by-side walking. *Human Movement Science*, 54, 125-136.
<https://doi.org/10.1016/j.humov.2017.04.008>
- Aquino, G., Bologna, M., Grigolini, P., & West, B. J. (2010). Publisher's Note : Beyond the Death of Linear Response: $1/f$ Optimal Information Transport [Phys. Rev. Lett. **105** , 040601 (2010)]. *Physical Review Letters*, 105(6), 069901.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.069901>
- Aquino, G., Bologna, M., West, B. J., & Grigolini, P. (2011). Transmission of information between complex systems : $1/f$ resonance. *Physical Review E*, 83(5), 051130.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.051130>
- Atlan, H. (2011). *Le vivant post-génomique, ou, Qu'est-ce que l'auto-organisation?* Paris: Odile Jacob.
- Balocchi, R., Varanini, M., & Macerata, A. (2013). Quantifying different degrees of coupling in detrended cross-correlation analysis. *EPL (Europhysics Letters)*, 101(2), 20011. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/101/20011>
- Beltz, B. C., & Kello, C. T. (2006). On the Intrinsic Fluctuations of Human Behavior. In *Focus on Cognitive Psychology Research* (p. 25-41). M. Vanchevsky.
- Beran, J. (2013). *Long-memory processes : Probabilistic properties and statistical methods* (1st ed). New York: Springer.

- Boker, S. M., Rotondo, J. L., Xu, M., & King, K. (2002). Windowed cross-correlation and peak picking for the analysis of variability in the association between behavioral time series. *Psychological Methods*, 7(3), 338-355. <https://doi.org/10.1037/1082-989X.7.3.338>
- Burrage, K., Lenane, I., & Lythe, G. (2007). Numerical Methods for Second-Order Stochastic Differential Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(1), 245-264. <https://doi.org/10.1137/050646032>
- Caccia, D. C., Percival, D., Cannon, M. J., Raymond, G., & Bassingthwaight, J. B. (1997). Analyzing exact fractal time series : Evaluating dispersional analysis and rescaled range methods. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 246(3-4), 609-632. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(97\)00363-4](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(97)00363-4)
- Cannon, M. J., Percival, D. B., Caccia, D. C., Raymond, G. M., & Bassingthwaight, J. B. (1997). Evaluating scaled windowed variance methods for estimating the Hurst coefficient of time series. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 241(3-4), 606-626. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(97\)00252-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(97)00252-5)
- Chen, Y., Ding, M., & Scott Kelso, J. A. (2001). Origins of Timing Errors in Human Sensorimotor Coordination. *Journal of Motor Behavior*, 33(1), 3-8. <https://doi.org/10.1080/00222890109601897>
- Chen, Y., Repp, B. H., & Patel, A. D. (2002). Spectral decomposition of variability in synchronization and continuation tapping : Comparisons between auditory and visual pacing and feedback conditions. *Human Movement Science*, 21(4), 515-532. [https://doi.org/10.1016/S0167-9457\(02\)00138-0](https://doi.org/10.1016/S0167-9457(02)00138-0)
- Correll, J. (2008). 1/f noise and effort on implicit measures of bias. *Journal of Personality and Social Psychology*, 94(1), 48-59. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.94.1.48>
- Craigmile, P. F. (2003). Simulating a class of stationary Gaussian processes using the Davies-Harte algorithm, with application to long memory processes. *Journal of Time Series Analysis*, 24(5), 505-511. <https://doi.org/10.1111/1467-9892.00318>
- Davies, R. B., & Harte, D. S. (1987). Tests for Hurst effect. *Biometrika*, 74(1), 95-101. <https://doi.org/10.1093/biomet/74.1.95>
- Delignières, D. (2015). Correlation Properties of (Discrete) Fractional Gaussian Noise and Fractional Brownian Motion. *Mathematical Problems in Engineering*, 485623. <https://doi.org/10.1155/2015/485623>

- Delignières, D., & Marmelat, V. (2013). Degeneracy and long-range correlations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(4), 043109. <https://doi.org/10.1063/1.4825250>
- Delignieres, D., Ramdani, S., Lemoine, L., Torre, K., Fortes, M., & Ninot, G. (2006). Fractal analyses for 'short' time series : A re-assessment of classical methods. *Journal of Mathematical Psychology*, 50(6), 525-544. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2006.07.004>
- Delignières, Didier, Almurad, Z. M. H., Roume, C., & Marmelat, V. (2016). Multifractal signatures of complexity matching. *Experimental Brain Research*. <https://doi.org/10.1007/s00221-016-4679-4>
- Delignières, Didier, Lemoine, L., & Torre, K. (2004). Time intervals production in tapping and oscillatory motion. *Human Movement Science*, 23(2), 87-103. <https://doi.org/10.1016/j.humov.2004.07.001>
- Delignières, Didier, & Marmelat, V. (2014). Strong anticipation and long-range cross-correlation : Application of detrended cross-correlation analysis to human behavioral data. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 394, 47-60. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2013.09.037>
- Delignières, Didier, Torre, K., & Bernard, P.-L. (2011). Transition from Persistent to Anti-Persistent Correlations in Postural Sway Indicates Velocity-Based Control. *PLoS Computational Biology*, 7(2), e1001089. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1001089>
- Delignières, Didier, Torre, K., & Lemoine, L. (2008). Fractal models for event-based and dynamical timers. *Acta Psychologica*, 127(2), 382-397. <https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2007.07.007>
- Delignières, Didier, Torre, K., & Lemoine, L. (2009). Long-Range Correlation in Synchronization and Syncopation Tapping : A Linear Phase Correction Model. *PLoS ONE*, 4(11), e7822. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0007822>
- Diebolt, C., & Guiraud, V. (2005). A Note On Long Memory Time Series. *Quality & Quantity*, 39(6), 827-836. <https://doi.org/10.1007/s11135-004-0436-z>
- Dubois, D. M. (2003). Mathematical Foundations of Discrete and Functional Systems with Strong and Weak Anticipations. In M. V. Butz, O. Sigaud, & P. Gérard (Éd.),

- Anticipatory Behavior in Adaptive Learning Systems* (Vol. 2684, p. 110-132).
https://doi.org/10.1007/978-3-540-45002-3_7
- Eke, A., Hermán, P., Bassingthwaighe, J., Raymond, G., Percival, D., Cannon, M., ...
 Ikrényi, C. (2000). Physiological time series : Distinguishing fractal noises from
 motions. *Pflügers Archiv - European Journal of Physiology*, 439(4), 403-415.
<https://doi.org/10.1007/s004249900135>
- Eke, A., Herman, P., Kocsis, L., & Kozak, L. R. (2002). Fractal characterization of
 complexity in temporal physiological signals. *Physiological Measurement*, 23(1),
 R1-R38. <https://doi.org/10.1088/0967-3334/23/1/201>
- Fine, J. M., Likens, A. D., Amazeen, E. L., & Amazeen, P. G. (2015). Emergent
 complexity matching in interpersonal coordination : Local dynamics and global
 variability. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and
 Performance*, 41(3), 723-737. <https://doi.org/10.1037/xhp0000046>
- Fitts, P. M. (1954). The information capacity of the human motor system in controlling
 the amplitude of movement. *Journal of Experimental Psychology*, 47(6), 381-391.
<https://doi.org/10.1037/h0055392>
- Fougere, P. F. (1985). On the accuracy of spectrum analysis of red noise processes using
 maximum entropy and periodogram methods : Simulation studies and application
 to geophysical data. *Journal of Geophysical Research*, 90(A5), 4355.
<https://doi.org/10.1029/JA090iA05p04355>
- Gilden, D. L., Thornton, T., & Mallon, M. W. (1995). 1/f noise in human cognition.
Science, 267(5205), 1837-1839. <https://doi.org/10.1126/science.7892611>
- Goldberger, A. L., Amaral, L. A. N., Hausdorff, J. M., Ivanov, P. C., Peng, C.-K., &
 Stanley, H. E. (2002). Fractal dynamics in physiology : Alterations with disease
 and aging. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(suppl 1),
 2466-2472. <https://doi.org/10.1073/pnas.012579499>
- Graves, T., Gramacy, R., Watkins, N., & Franzke, C. (2017). A Brief History of Long
 Memory : Hurst, Mandelbrot and the Road to ARFIMA, 1951–1980. *Entropy*,
 19(9), 437. <https://doi.org/10.3390/e19090437>
- Haken, H., Kelso, J. A. S., & Bunz, H. (1985). A theoretical model of phase transitions
 in human hand movements. *Biological Cybernetics*, 51(5), 347-356.
<https://doi.org/10.1007/BF00336922>

- Hausdorff, J. M., Mitchell, S. L., Firtion, R., Peng, C. K., Cudkowicz, M. E., Wei, J. Y., & Goldberger, A. L. (1997). Altered fractal dynamics of gait : Reduced stride-interval correlations with aging and Huntington's disease. *Journal of Applied Physiology (Bethesda, Md.: 1985)*, 82(1), 262-269.
- Hausdorff, J. M., Peng, C. K., Ladin, Z., Wei, J. Y., & Goldberger, A. L. (1995). Is walking a random walk? Evidence for long-range correlations in stride interval of human gait. *Journal of Applied Physiology*, 78(1), 349-358. <https://doi.org/10.1152/jappl.1995.78.1.349>
- Hausdorff, J. M., Purdon, P. L., Peng, C. K., Ladin, Z., Wei, J. Y., & Goldberger, A. L. (1996). Fractal dynamics of human gait : Stability of long-range correlations in stride interval fluctuations. *Journal of Applied Physiology*, 80(5), 1448-1457. <https://doi.org/10.1152/jappl.1996.80.5.1448>
- Hunt, N., McGrath, D., & Stergiou, N. (2015). The influence of auditory-motor coupling on fractal dynamics in human gait. *Scientific Reports*, 4(1), 5879. <https://doi.org/10.1038/srep05879>
- Ihlen, E. A. F., & Vereijken, B. (2010). Interaction-dominant dynamics in human cognition : Beyond $1/f\alpha$ fluctuation. *Journal of Experimental Psychology: General*, 139(3), 436-463. <https://doi.org/10.1037/a0019098>
- Jennane, R., Harba, R., & Jacquet, G. (2001). Méthodes d'analyse du mouvement brownien fractionnaire : Théorie et résultats comparatifs. *Traitement du Signal*, 18(5-6), 419-436. Consulté à l'adresse <http://hdl.handle.net/2042/2192>
- Kaipust, J. P., McGrath, D., Mukherjee, M., & Stergiou, N. (2013). Gait Variability is Altered in Older Adults When Listening to Auditory Stimuli with Differing Temporal Structures. *Annals of Biomedical Engineering*, 41(8), 1595-1603. <https://doi.org/10.1007/s10439-012-0654-9>
- Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., & Stanley, H. E. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1), 87–114. Consulté à l'adresse <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102013833>
- Konvalinka, I., Vuust, P., Roepstorff, A., & Frith, C. D. (2010). Follow you, follow me : Continuous mutual prediction and adaptation in joint tapping. *The Quarterly*

- Journal of Experimental Psychology*, 63(11), 2220-2230.
<https://doi.org/10.1080/17470218.2010.497843>
- Lemoine, L., & Delignières, D. (2009). Detrended Windowed (lag one) Autocorrelation : A new Method for Distinguishing between Event-Based and Emergent Timing. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62(3), 585-604.
<https://doi.org/10.1080/17470210802131896>
- Liddy, J. J., & Haddad, J. M. (2018). Evenly spaced Detrended Fluctuation Analysis : Selecting the number of points for the diffusion plot. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 491, 233-248.
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.099>
- Madison, G. (2005). Timing of Action During and After Synchronization With Linearly Changing Intervals. *Music Perception: An Interdisciplinary Journal*, 22(3), 441-459. <https://doi.org/10.1525/mp.2005.22.3.441>
- Mahmoodi, K., West, B. J., & Grigolini, P. (2017). On the Dynamical Foundation of Multifractality. *arXiv preprint arXiv:1707.05988*. Consulté à l'adresse <https://arxiv.org/abs/1707.05988>
- Mahmoodi, K., West, B. J., & Grigolini, P. (2018). Complexity Matching and Requisite Variety. *arXiv:1806.08808 [nlin]*. Consulté à l'adresse <http://arxiv.org/abs/1806.08808>
- Makowiec, D., Rynkiewicz, A., Gałaska, R., Wdowczyk-Szulc, J., & Żarczyńska-Buchowiecka, M. (2011). Reading multifractal spectra : Aging by multifractal analysis of heart rate. *EPL (Europhysics Letters)*, 94(6), 68005.
<https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/68005>
- Marmelat, V., & Delignières, D. (2012). Strong anticipation : Complexity matching in interpersonal coordination. *Experimental Brain Research*, 222(1-2), 137-148.
<https://doi.org/10.1007/s00221-012-3202-9>
- Marmelat, V., Torre, K., Beek, P. J., & Daffertshofer, A. (2014). Persistent Fluctuations in Stride Intervals under Fractal Auditory Stimulation. *PLoS ONE*, 9(3), e91949.
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0091949>
- Morin, E. (2014). *Introduction à la pensée complexe*.

- Mukli, P., Nagy, Z., & Eke, A. (2015). Multifractal formalism by enforcing the universal behavior of scaling functions. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 417, 150-167. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.09.002>
- Nourrit-Lucas, D., Tossa, A. O., Zélic, G., & Delignières, D. (2015). Learning, Motor Skill, and Long-Range Correlations. *Journal of Motor Behavior*, 47(3), 182-189. <https://doi.org/10.1080/00222895.2014.967655>
- Nowicki, L., Prinz, W., Grosjean, M., Repp, B. H., & Keller, P. E. (2013). Mutual adaptive timing in interpersonal action coordination. *Psychomusicology: Music, Mind, and Brain*, 23(1), 6-20. <https://doi.org/10.1037/a0032039>
- Oświęcimka, P., Kwapień, J., & Drożdż, S. (2006). Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E*, 74(1), 016103. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.016103>
- Pecenka, N., & Keller, P. E. (2011). The role of temporal prediction abilities in interpersonal sensorimotor synchronization. *Experimental Brain Research*, 211(3-4), 505-515. <https://doi.org/10.1007/s00221-011-2616-0>
- Peitgen, H.-O., Saupe, D., & Barnsley, M. F. (1988). *The Science of fractal images*. New York: Springer-Verlag.
- Peng, C. K., Mietus, J., Hausdorff, J. M., Havlin, S., Stanley, H. E., & Goldberger, A. L. (1993). Long-range anticorrelations and non-Gaussian behavior of the heartbeat. *Physical Review Letters*, 70(9), 1343-1346.
- Peng, C.-K., Buldyrev, S. V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H. E., & Goldberger, A. L. (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49(2), 1685-1689. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1685>
- Podobnik, B., & Stanley, H. E. (2008). Detrended Cross-Correlation Analysis : A New Method for Analyzing Two Nonstationary Time Series. *Physical Review Letters*, 100(8), 084102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.084102>
- Pressing, J., & Jolley-Rogers, G. (1997). Spectral properties of human cognition and skill. *Biological Cybernetics*, 76(5), 339-347. <https://doi.org/10.1007/s004220050347>
- Rangarajan, G., & Ding, M. (2000). Integrated approach to the assessment of long range correlation in time series data. *Physical Review E*, 61(5), 4991-5001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.4991>

- Rankin, S. K., & Limb, C. J. (2014). Auditory-motor synchronization with temporally fluctuating sequences is dependent on fractal structure but not musical expertise. *Frontiers in Psychology*, 5. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00970>
- Repp, B. H. (2005). Sensorimotor synchronization : A review of the tapping literature. *Psychonomic Bulletin & Review*, 12(6), 969-992. <https://doi.org/10.3758/BF03206433>
- Repp, B. H., & Su, Y.-H. (2013). Sensorimotor synchronization : A review of recent research (2006–2012). *Psychonomic Bulletin & Review*, 20(3), 403-452. <https://doi.org/10.3758/s13423-012-0371-2>
- Richardson, D. C., & Dale, R. (2005). Looking To Understand : The Coupling Between Speakers' and Listeners' Eye Movements and Its Relationship to Discourse Comprehension. *Cognitive Science*, 29(6), 1045-1060. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0000_29
- Richardson, M. J., Marsh, K. L., Isenhower, R. W., Goodman, J. R. L., & Schmidt, R. C. (2007). Rocking together: Dynamics of intentional and unintentional interpersonal coordination. *Human Movement Science*, 26(6), 867-891. <https://doi.org/10.1016/j.humov.2007.07.002>
- Rosen, R. (2000). *Essays on life itself*. New York: Columbia University Press.
- Roume, C., Almurad, Z. M. H., Scotti, M., Ezzina, S., Blain, H., & Delignières, D. (2018). Windowed detrended cross-correlation analysis of synchronization processes. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 503, 1131-1150. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.08.074>
- Roume, Clément, Ezzina, S., Blain, H., & Delignieres, D. (2019). Biases in the Simulation and Analysis of Fractal Processes. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 14.
- Schmidt, R. C., Bienvenu, M., Fitzpatrick, P. A., & Amazeen, P. G. (1998). A comparison of intra- and interpersonal interlimb coordination : Coordination breakdowns and coupling strength. *Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance*, 24(3), 884-900.
- Schmidt, R. C., Carello, C., & Turvey, M. T. (1990). Phase transitions and critical fluctuations in the visual coordination of rhythmic movements between people.

- Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 16(2), 227-247. <https://doi.org/10.1037/0096-1523.16.2.227>
- Schöner, G., Haken, H., & Kelso, J. A. S. (1986). A stochastic theory of phase transitions in human hand movement. *Biological Cybernetics*, 53(4), 247-257. <https://doi.org/10.1007/BF00336995>
- Schumann, A. Y., & Kantelhardt, J. W. (2011). Multifractal moving average analysis and test of multifractal model with tuned correlations. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 390(14), 2637-2654. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.03.002>
- Shockley, K., Richardson, D. C., & Dale, R. (2009). Conversation and Coordinative Structures. *Topics in Cognitive Science*, 1(2), 305-319. <https://doi.org/10.1111/j.1756-8765.2009.01021.x>
- Slifkin, A. B., & Eder, J. R. (2012). Amplitude requirements, visual information, and the spatial structure of movement. *Experimental Brain Research*, 220(3-4), 297-310. <https://doi.org/10.1007/s00221-012-3138-0>
- Slifkin, A. B., & Eder, J. R. (2014). Fitts' index of difficulty predicts the 1/f structure of movement amplitude time series. *Experimental Brain Research*, 232(6), 1653-1662. <https://doi.org/10.1007/s00221-014-3834-z>
- Stadnitski, T. (2012). Some critical aspects of fractality research. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 16(2), 137-158.
- Stephen, D. G., & Anastas, J. (2011). Fractal fluctuations in gaze speed visual search. *Attention, Perception, & Psychophysics*, 73(3), 666-677. <https://doi.org/10.3758/s13414-010-0069-3>
- Stephen, D. G., & Dixon, J. A. (2011). Strong anticipation: Multifractal cascade dynamics modulate scaling in synchronization behaviors. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(1-3), 160-168. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2011.01.005>
- Stepp, N., & Turvey, M. T. (2010). On strong anticipation. *Cognitive Systems Research*, 11(2), 148-164. <https://doi.org/10.1016/j.cogsys.2009.03.003>
- Thaut, M. H., Tian, B., & Azimi-Sadjadi, M. R. (1998). Rhythmic finger tapping to cosine-wave modulated metronome sequences: Evidence of subliminal entrainment. *Human Movement Science*, 17(6), 839-863. [https://doi.org/10.1016/S0167-9457\(98\)00031-1](https://doi.org/10.1016/S0167-9457(98)00031-1)

- Torre, K., & Delignières, D. (2008). Distinct ways of timing movements in bimanual coordination tasks : Contribution of serial correlation analysis and implications for modeling. *Acta Psychologica*, 129(2), 284-296.
- Torre, Kjerstin, & Delignières, D. (2008a). Distinct ways of timing movements in bimanual coordination tasks : Contribution of serial correlation analysis and implications for modeling. *Acta Psychologica*, 129(2), 284-296. <https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2008.08.003>
- Torre, Kjerstin, & Delignières, D. (2008b). Unraveling the finding of $1/f$ β noise in self-paced and synchronized tapping : A unifying mechanistic model. *Biological Cybernetics*, 99(2), 159-170. <https://doi.org/10.1007/s00422-008-0247-8>
- Torre, Kjerstin, Delignieres, D., & Lemoine, L. (2007). $1/f$ β fluctuations in bimanual coordination : An additional challenge for modeling. *Experimental Brain Research*, 183(2), 225–234. Consulté à l'adresse <http://link.springer.com/article/10.1007/s00221-007-1035-8>
- Torre, Kjerstin, Varlet, M., & Marmelat, V. (2013). Predicting the biological variability of environmental rhythms : Weak or strong anticipation for sensorimotor synchronization? *Brain and Cognition*, 83(3), 342-350. <https://doi.org/10.1016/j.bandc.2013.10.002>
- Van Orden, G. C., Holden, J. G., & Turvey, M. T. (2003). Self-organization of cognitive performance. *Journal of Experimental Psychology. General*, 132(3), 331-350. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.132.3.331>
- Von Neumann, J., & Burks, A. W. (1966). *Theory of self-reproducing automata*. Consulté à l'adresse <http://books.google.com/books?id=4e1LAAAAMAAJ>
- Vorberg, D., & Wing, A. (1996). Chapter 4 Modeling variability and dependence in timing. In *Handbook of Perception and Action* (Vol. 2, p. 181-262). [https://doi.org/10.1016/S1874-5822\(06\)80007-1](https://doi.org/10.1016/S1874-5822(06)80007-1)
- Voss, H. U. (2000). Anticipating chaotic synchronization. *Physical Review E*, 61(5), 5115-5119. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.5115>
- Wagenmakers, E.-J., Farrell, S., & Ratcliff, R. (2004). Estimation and interpretation of $1/f\alpha$ noise in human cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, 11(4), 579-615. <https://doi.org/10.3758/BF03196615>

- Warlop, T., Detrembleur, C., Buxes Lopez, M., Stoquart, G., Lejeune, T., & Jeanjean, A. (2017). Does Nordic Walking restore the temporal organization of gait variability in Parkinson's disease? *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 14(1), 17. <https://doi.org/10.1186/s12984-017-0226-1>
- West, B. J., Geneston, E. L., & Grigolini, P. (2008). Maximizing information exchange between complex networks. *Physics Reports*, 468(1-3), 1-99. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.06.003>
- Wijnants, M. L., Bosman, A. M. T., Hasselman, F., Cox, R. F. A., & Van Orden, G. C. (2009). 1/f scaling in movement time changes with practice in precision aiming. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 13(1), 79-98.
- Wing, A. M., & Kristofferson, A. B. (1973). Response delays and the timing of discrete motor responses. *Perception & Psychophysics*, 14(1), 5-12. <https://doi.org/10.3758/BF03198607>
- Zbilut, J. P., Giuliani, A., & Webber, C. L. (1998). Detecting deterministic signals in exceptionally noisy environments using cross-recurrence quantification. *Physics Letters A*, 246(1-2), 122-128. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00457-5](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00457-5)
- Zebende, G. F. (2011). DCCA cross-correlation coefficient : Quantifying level of cross-correlation. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 390(4), 614-618. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.10.022>

La complexité du mouvement humain : aspects théoriques et pratiques de l'évaluation et de l'interaction des complexités au service de la réhabilitation

Résumé : Il suffit d'observer nos athlètes de plus haut niveau, leur capacité à s'adapter dans des temps records lors de changements soudains dans les phases tactiques, ou encore la coordination quasi parfaite des nageuses synchronisées de niveau olympique, pour comprendre que le mouvement humain ne peut se réduire à quelconque modèle d'une simplicité excessive. Nous proposons ici une mise en application des sciences de la complexité, et plus particulièrement des méthodes d'analyse fractale ayant pour but de donner une image globale de la complexité du mouvement humain. Dans un premier temps, en partant des aspects théoriques, jusqu'à leur mise en application pratique, nous montrons que l'évaluation la plus fine des exposants fractals nécessite l'utilisation combinée d'une analyse fractale et d'une tâche physiologique bien spécifique. Puis, dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la coordination de deux systèmes complexes. En partant de plusieurs cadres théoriques existant dans le champ des sciences du mouvement humain, nous proposons de nouvelles méthodes pour analyser cette synchronisation. Enfin, l'ensemble des travaux que nous présentons sont attachés à des buts de réhabilitation et nous montrons que malgré une altération typique de la complexité avec l'âge il existe des moyens simple et efficaces de rétablir cette complexité.

Mots-clés : Complexité, Fractales, Synchronisation interpersonnelles, Réhabilitation

Human movement complexity: theoretical and practical aspects of the evaluation and the interaction of complexities at the service of rehabilitation

Abstract: Just look at our top athletes, their ability to adapt in record-breaking times during sudden changes in tactical phases, or the near-perfect coordination of Olympic-level synchronized swimmers to understand that human movement cannot be reduced to any model of excessive simplicity. Here we propose an application of the complexity sciences, and more particularly of fractal analysis methods aimed at giving a global picture of the complexity of human movement. In a first step, from the theoretical aspects, until their practical application, we show that the finest evaluation of the fractal exponents requires the combined use of a very specific fractal analysis and physiological task. Then, in a second step, we are interested in the coordination of two complex systems. Starting from several theoretical frameworks existing in the field of human movement sciences, we propose new methods to analyze this synchronization. Finally, all the works that we present are attached to rehabilitation goals and we show that despite a typical alteration of complexity with aging there are simple and effective ways to restore this complexity.

Keywords: Complexity, Fractals, Interpersonal synchronization, Rehabilitation