方程组解的结构.

主要研究的是无穷解的情况

1) 齐次方程组解的结构.

$Ax=0$

① η_1 和 η_2 是 $Ax=0$ 的解, 则 $\eta_1+\eta_2$ 也是解

证: $A(\eta_1+\eta_2)=A\eta_1+A\eta_2=0+0=0$

② η 是 $Ax=0$ 的解, 则 $c\eta$ 也是解.

证: $A(c\eta)=cA\eta=0$

基础解系: 当 $\eta_1,\eta_2\cdots\eta_s$ 都是解, 且:

① $\eta_1\cdots\eta_s$ 线性无关

② 其余解均可由 $\eta_1,\cdots\eta_s$ 线性表示

例题: 求基础解系, 已知方程组,

一般解

通解

系数矩阵化为阶梯形 $A\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{9}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&\frac{3}{4}&-\frac{7}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

可得: $\begin{cases}x_1=\frac{9}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5\\x_2=-\frac{3}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{5}{4}x_5\end{cases}$ $x_3\ x_4\ x_5$ 为自由未知量

令 x_3,x_4,x_5 为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 得到: $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\-\frac{3}{4}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\eta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

可以任意取, 只要无关即可, 单位阵最容易计算

则: $\eta_1\eta_2\eta_3$ 是基础解系,

① 基础解系是所有解组成的向量组的极大无关组

② 基础解系的向量个数为 $n-r(A)$ = 未知量个数 − 系数矩阵的秩

定理: 设矩阵的秩为 r, 则 $\eta_1\cdots\eta_{n-r}$ 是基础解系

则 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{4}x_3\\-\frac{3}{4}x_3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{4}x_4\\\frac{7}{4}x_4\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}x_5\\-\frac{5}{4}x_5\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$=x_3\eta_1+x_4\eta_2+x_5\eta_3$

定理: $A_{m\times n}$ $B_{n\times s}$ $AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\le n$

证: 将 $B_{n\times s}$ 分块或者说用向量表示, $B=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s)$

分块相乘: $AB=(A\beta_1,A\beta_2\cdots A\beta_s)=(0,0,0\cdots0)$

因此, $A\beta_i=0$, $1\le i\le s$

$A\beta_i=0$ 可以看作齐次线性方程组, 则 β_i 是 $Ax=0$ 的解.

① 若 $r(A)=n$, 则只有零解, $\beta_i=0$, $r(A)\le n$ 成立,

② 若 $r(A)<n$, 则有非零解, 基础解系包含 $n-r(A)$ 个向量.

β_i, $1\le i\le s$ 只是无穷解中的一部分, 所以 $r(\beta_1\cdots\beta_s)\le n-r(A)$

根据列秩=矩阵的秩, 则 $r(B)\le n-r(A)$, 所以 $r(A)+r(B)\le n$, 成立.

2) 非齐次线性方程组解的结构

$Ax=b\ \longrightarrow\ Ax=0$

齐次线性方程组 $Ax=0$ 叫做非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的导出组

性质: ① $\alpha_1\ \alpha_2$ 是 $Ax=b$ 的解, 则 $\alpha_1-\alpha_2$ 是导出组 $Ax=0$ 的解

证: $A(\alpha_1-\alpha_2)=A\alpha_1-A\alpha_2=b-b=0$

② α 是 $Ax=b$ 的解, β 是 $Ax=0$ 的解, 则 $\alpha+\beta$ 是 $Ax=b$ 的解.

证: $A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=b+0=b$

定理: 若 α_0 是 $Ax=b$ 的一个解, 叫特解, η 是 $Ax=0$ 的基础解系, 则

$\alpha_0+C_1\eta_1+C_2\eta_2\cdots+C_{n-r}\eta_{n-r}$ 是 $Ax=b$ 的通解

证: $A(\alpha_0+C_1\eta_1+\cdots+C_{n-r}\eta_{n-r})$

$=A\alpha_0+C_1A\eta_1+\cdots+C_{n-r}A\eta_{n-r}$

$=A\alpha_0+0+\cdots+0=A\alpha_0=b$

例题. 求 $\begin{cases}x_1+5x_2-x_3-x_4=-1\\x_1-2x_2+x_3+3x_4=3\\3x_1+8x_2-x_3+x_4=1\\x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7\end{cases}$ 的通解.

解

① 写出增广矩阵 $\bar{A}$, 进行初等行变换, 得到行简化阶梯形

$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&5&-1&-1&-1\\1&-2&1&3&3\\3&8&-1&1&1\\1&-9&3&7&7\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{3}{7}&\frac{13}{7}&\frac{13}{7}\\0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

② 首非零元在左, 其余在右 得到 同解方程组

$\begin{cases}x_1=\frac{13}{7}-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4\\x_2=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$, $x_3\ x_4$ 为自由未知量.

同解方程组, 找出未知量

③ 令自由未知量取 0 得到特解 α_0

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 得到特解: $\alpha_0=\begin{pmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{pmatrix}$

导出组的同解方程组 $\begin{cases}x_1=-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4\\x_2=\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$ $x_3\ x_4$ 为自由未知量.

④ 令常数项为 0, 得到导出组的同解方程组, 找出未知量.

令自由未知量取单位阵的列向量组, 得到基础解系.

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 取 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{13}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$

则通解为 $\begin{pmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\eta_1+C_2\eta_2$, C_1,C_2 为任意常数.

⑤ 特解 + 基础解系的线性组合

例题: 已知四元非齐次方程组 A, $r(A)=3$, $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 是三个解, 求通解.

$\alpha_1=(2,3,4,5)$ $\alpha_2+\alpha_3=(1,2,3,4)$

解: 特解为 $\alpha_1=(2,3,4,5)$

$\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

同理: $\alpha_1-\alpha_3$ 是 $Ax=0$ 的解.

$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)$ 也是 $Ax=0$ 的解.

并且: $n=4$, 基础解系个数为 $n-r(A)=1$

所以 $\eta_1=(3,4,5,6)$

通解为 $\alpha_1+C_1\eta_1$, C_1 为任意常数.