向量间的线性关系.

线性组合：$\beta, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$，若存在 $k_1, k_2 \cdots k_n$，使 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，则 β 叫做 α 向量组的线性组合. 或 β 可以由 α 向量组线性表示.
$k_1\ k_2 \cdots k_n$ 叫做线性系数.

性质：
① 零向量可以由任意向量组表示.
② 向量组中任意一个向量，可以由这个向量组来表示
③ 任意向量可以由下列向量组表示.

$$n\text{维单位向量组}\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, \cdots 0) \\ \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots 0) \\ \varepsilon_n = (0, 0, \cdots 1) \end{cases}$$

例：求系数，已知：$\beta = (-3, 2, -4)$ $\alpha_1 = (1, 0, 1)$ $\alpha_2 = (2, 1, 0)$ $\alpha_3 = (-1, 1, -2)$

解：设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 - 2k_3 = -3 \\ k_2 + k_3 = 2 \\ k_1 - 2k_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 3 \end{cases}$$

向量组等价

两个同维向量组的每个向量，可以由另一个向量组线性表示，就叫做等价.

$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_2$ $\quad \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$

α_n 和 β_n 同维，$\alpha_1 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 \cdots k_n\beta_n$，$\alpha_2 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 \cdots + k_n\beta_n$

$$\{\alpha_1, \cdots \alpha_n\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_n\}$$

① 反身性：$\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\} \cong \{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\}$
② 对称性：$\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_n\}$，则 $\{\beta_1 \cdots \beta_n\} \cong \{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$
③ 传递性：$\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_n\}$ $\{\beta_1 \cdots \beta_n\} \cong \{\gamma_1 \cdots \gamma_n\}$
则 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\} \cong \{\gamma_1 \cdots \gamma_n\}$

线性相关：$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是n个m维向量，若存在至少一组不全为0的系数 $k_1 \cdots k_n$，使得：
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$ 成立，则 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是线性相关

线性无关：不存在不全为0的系数使等式成立，则 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是线性无关

① 向量组中，两个向量成比例，必相关
② 含有零向量的向量组，必相关
③ 一个零向量，必相关
④ 一个非零向量，必无关
⑤ 一个向量 α 线性相关的充要条件是 $\alpha = 0$
⑥ 部分组相关，则整体组相关. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相关，则 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \cdots \alpha_n$ 相关
⑦ 整体组无关，则部分组无关
⑧
$\alpha_1 = (a_1 \cdots a_n)$ $\quad \beta_1 = (a_1 \cdots a_n\ A_1 \cdots A_n)$
$\alpha_2 = (b_1 \cdots b_n)$ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关，则 $\beta_2 = (b_1 \cdots b_n\ B_1 \cdots B_n)$ 也无关
$\alpha_3 = (c_1 \cdots c_n)$ $\quad \beta_3 = (c_1 \cdots c_n\ C_1 \cdots C_n)$

证：设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$

$$\begin{cases} k_1a_1 + k_2b_1 + k_3c_1 = 0 \\ k_1a_2 + k_2b_2 + k_3c_2 = 0 \\ \vdots \\ k_1a_n + k_2b_n + k_3c_n = 0 \\ \vdots \\ k_1A_n + k_2B_n + k_3C_n = 0 \end{cases}$$

因为 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关，所以 $k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$
$\Downarrow$
所以 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 线性无关

无关的向量组，增加分量之后的接长向量组也线性无关
⑨ 相关的向量组，截短的向量组也相关
⑩ n个n维向量组构成的行列式 $|A| \neq 0$，则线性无关
$|A| = 0$，则线性相关

克莱姆法则：$k_j = \dfrac{D_j}{D}$，可以查看1.6章节克莱姆法则

⑪ 单位向量组 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$，线性无关

例题：已知 α, β, γ 无关，证明 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma$ 无关.

设 $k_1(\alpha+\beta) + k_2(\beta+\gamma) + k_3(\alpha+\gamma) = 0$

$(k_1+k_3)\alpha + (k_1+k_2)\beta + (k_2+k_3)\gamma = 0$

所以 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{matrix}$ 则：$\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma$ 无关