1. 纯数字行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

①先交换1,2行,变号,然后化成上三角行列式
②第2行加到第1行,然后计算.

2. 求余子式 已知: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

求: $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$

$= (-1)\times A_{41} + 1\times A_{42} + (-1)\times A_{43} + 1\times A_{44}$

(相当于按第四行展开)

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 7\times 6 = 42$

3. 特殊行列式

方法: 制造行和

$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} =$

①将各列都加到第1列,得到

$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & \\ x+(n-1)a & x & \cdots & \\ x+(n-1)a & & x & \\ x+(n-1)a & & \cdots & x \end{vmatrix}$

②提取公因子

$= x+(n-1)a \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & \\ 1 & x & \cdots & \\ \vdots & \vdots & x & \cdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

③第1列乘以 $-a$,加到其它列

$= x+(n-1)a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x-a & & & \\ \vdots & & x-a & & \\ 1 & & & & x-a \end{vmatrix}$

$= (x+(n-1)a)\times(x-a)^{n-1}$

4. 主对角线为1+n,其它为1 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \vdots & 1+a_2 & & & \\ 0 & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 1 & & & & 1+a_n \end{vmatrix}$

①第1行乘以-1,消除 1

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & & \\ -1 & 0 & & & & a_n \end{vmatrix}$

①加边不改变行值
②三叉型行列式,用每列消除第一列
③有字母出现,在分母上,不能为0

②用每列消除第一列的-1

$= \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix}$

$= \left(1+\frac{1}{a_1}+\cdots\frac{1}{a_n}\right)\times a_1a_2a_3\cdots a_n$

5. 范德蒙德行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<x\leqslant n}(x_i-x_j)$ (∏表示连乘)

6. 反对称行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & 6 \\ -2 & 5 & 0 & -8 \\ -3 & -6 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

①主对角线均为0
②上下位置成对互为相反数

定义: $a_{ij}=-a_{ji}$, 当$i=j$时, $a_{ii}=-a_{ii}$,所以$2a_{ii}=0$, $a_{ii}=0$

7. 对称行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

①主对角线元素[illegible]
②上下对应相等.

定义: $a_{ij}=a_{ji}$

8. 奇数阶的反对称行列式, $D=0$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -D^T = -D = 0$$