

线性方程组有解判定

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ 增广系数矩阵 $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 9 & 10 & 11 \end{array} \right)$

向量表示形式 $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$

增广矩阵的情况

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

唯一解: $r(A) = r(\bar{A}) = 3 = \text{未知量个数}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 9 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

无穷解: $r(A) = r(\bar{A}) < 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

无解: $r(A) = 2 \neq r(\bar{A}) = 3$

总结: ① $r(A) = r(\bar{A})$ 有解 $\begin{cases} r(A) = r(\bar{A}) = n & \text{唯一解} \\ r(A) = r(\bar{A}) < n & \text{无穷解} \end{cases}$

② $r(A) \neq r(\bar{A})$ 无解

变量 m, n 含义: $\begin{cases} m \text{ 表示方程个数} \\ n \text{ 表示未知量个数} \end{cases}$

判定有解的过程: ① 写增广矩阵 \bar{A}
② 只初等行变换化为阶梯形
③ 对比 $r(A)$ 和 $r(\bar{A})$

同解方程组:

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

一般解: $\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \end{cases}$

x_3, x_4 为自由未知量.

同解方程组