分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

标准形：从左上角开始，有一串1，其余为0（1需要连续），不一定是方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

例：$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 都是

标准形分块：

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O_{r(n-r)} \\ O_{(m-r)r} & O_{(m-r)(n-r)} \end{pmatrix}$$

① 分块加法：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}$$

② 数乘：

$$k\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA_1 & kA_2 \\ kA_3 & kA_4 \end{pmatrix}$$

③ 乘法：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ A_3B_1+B_3B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{pmatrix}$$

前提：分块必须可乘

④ 转置：

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} A_1^T & A_4^T \\ A_2^T & A_5^T \\ A_3^T & A_6^T \end{pmatrix}$$

例：$H = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ A、B为m阶、n阶的可逆矩阵，1) 求$|H|$ 2).证A可逆 3) 求H^{-1}

1) $|H| = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$

$$\begin{array}{c|c} A_{m\times m} \quad m & m \quad C_{m\times n} \\ m & n \\ \hline m & n \\ O_{n\times m} \quad n & n \quad B_{n\times n} \end{array}$$

按拉普拉斯定理展开：

$(-1)^{2x}|B||A| = |A||B|$

2) 因为A、B可逆，所以 $|A||B| \neq 0$，H可逆

3) 设 $H^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{pmatrix}$

$$HH^{-1} = \begin{pmatrix} AX_1+CX_2 & AX_3+CX_4 \\ BX_2 & BX_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

得：

$$\begin{cases} AX_1+CX_2 = E \\ AX_3+CX_4 = O \\ BX_2 = O \\ BX_4 = E \end{cases}$$

① 对BX_2左乘B^{-1} 得：$X_2 = O$

② 由$BX_4 = E$ 得：$X_4 = B^{-1}$

③ 由 $AX_1+CX_2 = E$，得：$X_1 = A^{-1}$

④ 由 $AX_3+CX_4 = O$，得：$X_3 = -A^{-1}CB^{-1}$

所以 $H^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$

推论：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$$