余子式：指定某个元素，将所在行，列删除，剩余的行列式叫做余子式使用 M_{ij} 表示，i是行标，j是列标。

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0&3\\1&1&1&1\\2&2&3&4\\5&5&6&6\end{vmatrix}\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&1\\5&6&6\end{vmatrix}$$

代数余子式：为余子式添加符号就叫代数余子式，使用 A_{ij} 表示 i是行标，j是列标。符号使用 $i+j$ 的奇偶性来确定。

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0&3\\1&1&1&1\\2&2&3&4\\5&5&6&6\end{vmatrix}\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&1\\5&6&6\end{vmatrix}\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&1\\5&6&6\end{vmatrix}$$

定理1：按行(列)展开，等于那一行(列)乘以对应的代数余子式之和。

按行：$D=a_{i1}A_{i1}\ a_{i2}A_{i2}\cdots a_{in}A_{in}$

按列：$D=a_{1j}A_{1j}\ a_{2j}A_{2j}\cdots a_{ij}A_{ij}$

示例：按0多的那一行展开

按第1行展开：$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\3&5\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&0\\2&5\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}$

按第2行展开：$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}$

定理2：异乘变0，某行(列)元素乘以另一行(列)元素的代数余子式之和为0

第四行元素乘以第一行元素

$$\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&0&8&9\\2&5&5&4\\9&9&9&10\end{vmatrix}\qquad 9\times A_{11}+9\times A_{12}+9\times A_{13}+10\times A_{14}$$

$$\begin{vmatrix}9&9&9&10\\0&0&8&9\\2&5&5&4\\9&9&9&10\end{vmatrix}$$ 按第1行展开 $=9\times A_{11}+9\times A_{12}+9\times A_{13}+10\times A_{14}=0$

拉普拉斯定理：取定k行，由k行元素组成的所有k阶子式与代数余子式乘积之和为D

k阶子式：$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&5\\1&1&0&8\\9&9&9&10\end{vmatrix}$ 2阶子式 $=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}$ 余子式 $=\begin{vmatrix}0&8\\9&10\end{vmatrix}$ 代数余子式 $=(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}0&8\\9&10\end{vmatrix}$

符号：1,2行，1,2列

$\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\\6&6&8&3&1\end{vmatrix}$ 取定第一行，不为0的只有一种

$$=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}3&4&5\\1&1&1\\8&3&1\end{vmatrix}$$

行列式相乘定理：同阶行列式，每一行乘以另一个行列式的每一列

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\0&0&3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&2\\3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&7&6\\2&4&6\\9&6&3\end{vmatrix}$$