初等变换　作用→表示（ ）→（ ）

按行变换
- 交换两行　$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&2\\1&1&1\\4&4&4\end{pmatrix}$
- 用k(k≠0)乘某行　$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&6&6\\2&2&2\\4&4&4\end{pmatrix}$
- 某行的L倍加到另一行　$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

按列变换

若A是方阵，
- 交换两行，　$|A|=-|B|$
- K(K≠0)乘某行　$k|A|=|B|$
- 某行的L倍加到另一行　$|A|=|B|$

定理：　任意矩阵，都可通过初等变换化为标准形

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-1&0\\0&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

等价：　A经过初等变换得到B，A等价于B，记做 $A\cong B$

性质：
① 反身性　$A\cong A$
② 对称性，若 $A\cong B$，则 $B\cong A$
③ 传递性，若 $A\cong B$，$B\cong C$，则 $A\cong C$

结论：　$A\cong$ 标准形

A变换成标准形有什么用呢？

$A_{4\times4}$的标准形：

$$\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

秩　0　1　2　3　4

标准形可以表示出矩阵的形状。

比如：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$$　后三行无意义，都可以由第一行元素获得。

初等方阵．这里的定理很重要．

定义：对单位阵E做一次初等变换得到的矩阵，就叫做初等方阵

1) 交换两行　$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{pmatrix}$　记做$E(i,j)$，交换第i,j行(列)

2) k乘某行　$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&5&\\&&&1\end{pmatrix}$　$E(i(k))$　k≠0，使用k乘第i行(列)

3) 某行L倍加另一行上去　$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$　$E(i,j(k))$　第j行乘k加到第i行上去

结论：
第一种初等方阵的行列式　$|E(i,j)|=-1$
第二种　$|E(i(k))|=k$　$k\neq0$
第三种　$|E(i,j(k))|=1$

①所有初等方阵的行列式不为0，均可逆　②其逆矩阵也是初等方阵　③初阵的转置也是初阵

① $E^{-1}(i,j)=E(i,j)$

② $E^{-1}(i(k))=E(i(\frac{1}{k}))$

③ $E^{-1}(i,j(k))=E(i,j(-k))$

例题：已知

$$E(2(3))=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&1\end{pmatrix}\quad E(1,3)=\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

求 1) $E(2(3))A$　2) 求 $AE(1,3)$

1) $E(2(3))A=\begin{pmatrix}1&2&3\\12&15&18\\7&8&9\end{pmatrix}$

2) $AE(1,3)=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix}$

注意观察上面例题：

定理：
① 初等方阵左乘任一矩阵，相当于对矩阵实施同样的行变换
② 　　　　右乘　　　　　　　　　　　　　　　　　　列
③ 任意矩阵都可以通过初等变换化为标准形
④ A可逆的标准条件是变换后的标准形为单位阵E，也就是为1

证：　A可逆，标准形用D表示，则
$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=D$
由于初阵可逆，A可逆，所以$|D|$不为0，D一定是单位阵

⑤ A可逆，则A可表示为$P_1\cdots P_s$，P为初等方阵

证：　A可逆，标准形为E，则
$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=E$

$AA^{-1}=E$　　$P_s^{-1}P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=P_s^{-1}E$
$A=P_s^{-1}\cdots P_1^{-1}EQ_1^{-1}\cdots Q_t^{-1}$
由于初阵的逆仍为初阵，所以$A=P_1\cdots P_s$

初等变换求逆阵

假设A可逆，则A^{-1}可逆，所以可以得到：
$$A^{-1}=P_1\cdots P_s\cdot E$$
$$E=P_1\cdots P_s\cdot A$$

观察两个式子可以得到结论：
①对A做某些初等变换得到E
②对E做同样的初等变换得到A^{-1}

初等行变换法：对矩阵A只做行变换，A化成E的同时右边就得到A^{-1}

$$(A,E)\xrightarrow{行}(E,A^{-1})$$

例题：求 $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵．

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&2&7&-2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)=(E,A^{-1})$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\5&-1&1\\\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

注意：
① 先第1列，再第2列，再第3列
② 整行操作
③ 第n列处理完之后，第n行不再主动参与运算．
④ 变换符号为 →
⑤ 只做初等行变换
⑥ 如果无法化成E，则A不可逆或写错了．

为什么不能行，列同时变换？
逆矩阵定义：　$AB=BA=E$
① 从$AB=E$来看，是右乘B，也就是对A做初等列变换（没有行变换）
② 从$BA=E$来看，是左乘B，也就是对A做初等行变换（没有列变换）
所以：在变换过程中，行，列不能同时变换！