矩阵的秩

K阶子式：对矩阵任取K行，K列，共同经过的元素组成的行列式，叫K阶子式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$ 叫做2阶子式

观察 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1阶子式：1，1，1，……

2阶子式：-1，0，3 ……

3阶子式：0，0，0 ……

秩为2

秩：非零子式的最高阶数就叫做秩. 很用r表示：$r(A)=r$

① $A_{m\times n}$ $0\le r(A)\le \min(m,n)$

$r(A)=m$ 代表取所有行，叫做行满秩

$r(A)=n$，所有行，列满秩

满秩

$r(A)=\min(m,n)$ 满秩

$r(A)<\min(m,n)$ 降秩

② 如果A是方阵，并且是满秩，那么A可逆

证：$A_{n\times n}$，满秩则 $r(A)=n$，即 $|A|\ne 0$，所以可逆，反之一样.

定理：对矩阵A，$r(A)=r$，则所有的r阶高的子式均为0

证：$A_{6\times 8}$，$r(A)=3$，所以第4阶子式一定为0，

5阶子式按行展开为元素乘以代数余子式，同样为0

所以：比3高的子式均为0.

个人理解：这里用标准形更好理解：

$A_{6\times 8}$，$r(A=3)$，则标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$

所以：4，5，6阶子式一定为0

☆☆☆ 重要：

阶梯形矩阵

定义：左起首非零元左边0的个数随行数严格增加

左起第一个非0元素叫首非零元.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 首非0元为：1，1，5　0的个数：0，1，3

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 首非0元为：1，4　0的个数：0，3

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 首非0元为：1，1，1，3　0的个数：0，1，3，3

非严格增加。所以：不是梯形矩阵

☆☆☆ 更重要.

行简化阶梯形，首先必须是阶梯形

① 非零行的首非零元为1

② 首非零元所在列的其余元素都是0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分三步来确定：① 画线确定阶梯形

② 画出所有首非零元

③ 对所有首非零元列画出虚线.

观察：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 取3阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$

因此，梯形矩阵，首非零元的个数就是矩阵的秩

$r(A)=$ 非零行的行数.

定理：初等变换不改变矩阵的秩

例题：① 求 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A)=3$$

② 已知

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$ $r(A)=3$，求k

解：

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ k+3 & k & 1 & 1 \\ k+3 & 1 & k & 1 \\ k+3 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

由于 $r(A)=3$，所以 $|A|=(k+3)(k-1)^3=0$

所以：① $k=1$，代入原题发现，$r(A)=1$，不符合

√ ② $k=-3$，成立

性质：① $r(A)=r(A^T)$

② 任意矩阵乘以可逆矩阵，秩不变.

推论：$A_{m\times n}$，P_m阶方阵，Q_n阶方阵.

$r(A)=r(PA)=r(PQ)=r(PAQ)$