逆矩阵

1、方阵的行列式，使用 $|A|$ 表示

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\3&3&3\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad |A|=\begin{vmatrix}2&2&2\\3&3&3\\1&1&1\end{vmatrix}$$

性质 ① $|A^T|=|A|$，行列式转置，值不变

☆ ② $|KA|=K^n|A|$

③ $|AB|=|A||B|$

例题：1) A 5阶方阵，$|A|=3$

① $|-A|=(-1)^5|A|=-3$

② $|2A^T|=2^5|A^T|=192$

③ $||A|A|=|3A|=3^5|A|=3^6$

2. 伴随矩阵，只有方阵才有伴随矩阵

定义：使用所有元素的代数余子式，按列放置，构成的矩阵，使用 A^* 表示

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\A_{1n}&\cdots&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

例：①

技巧：按行求，按列放。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&1&4\end{pmatrix}$$

$A_{11}=\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=1$ $\quad A_{12}=\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}=-5$ $\quad A_{13}=1$

$A_{21}=-3$ $\quad A_{22}=3$ $\quad A_{23}=0$

$A_{31}=2$ $\quad A_{32}=-1$ $\quad A_{33}=-1$

所以：$A^*=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-5&3&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$

定理：① $AA^*=A^*A=|A|E$，对任意方阵都成立。

证：

异乘变0

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|&0&\cdots&0\\0&|A|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&|A|\end{pmatrix}=|A|E$$

推论：无论 $|A|$ 是否为0，$|A^*|=|A|^{n-1}$

已知：$AA^*=|A|E$，则 $|AA^*|=||A|E|$

$|A||A^*|=|A|^n|E|$

$|A^*|=|A|^{n-1}\times 1=|A|^{n-1}$

3 逆矩阵，对于n阶方阵A，存在n阶方阵B，使 $AB=BA=E$，B就是A的逆矩阵，记做 $A^{-1}=B$

① 未必所有方阵均可逆。

② 若可逆，则逆矩阵唯一

证明：设A的逆矩阵为 B_1 和 B_2，则：

$AB_1=B_1A=E \qquad AB_2=B_2A=E$

$B_1=B_1E=B_1(AB_2)=(B_1A)B_2=EB_2=B_2$

所以：$B_1=B_2$，逆矩阵是唯一的。

核心问题：1) 如何判断方阵是否可逆 2) 若可逆，则 $A^{-1}=$?

若 $|A|\neq 0$，则A叫做非奇异、非退化、满秩方阵，可逆

$|A|=0$， 奇异、退化、降秩方阵，不可逆

定理①：A可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

证明：$|A|\neq 0$，$\qquad AA^*=A^*A=|A|E$

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=E$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

推论：n方阵A和B，$AB=E$ 或 $BA=E$，则A可逆，$A^{-1}=B$

求 A^{-1} 的方法 { ① 伴随矩阵方法 ② 初等变换法

例：已知 $A+B=AB$，1) 证明 $A-E$ 可逆 2). 求 A^{-1}

1) 证：$AB-A-B=0$

$AB-A-B+E=E$

$(A-E)B-(A-E)=E$

$(A-E)(B-E)=E$

2) $A^{-1}=B-E$

4. 矩阵方程：

已知：$Ax=A+2x$，$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求 x.

注意：

1) 注意提取方向 ① $Ax-2x=A$

2) $A-2E$ ② $(A-2E)x=A$

3) 矩阵不能是分母 ③ $(A-2E)^{-1}(A-2E)x=(A-2E)^{-1}A$

④ $x=(A-2E)^{-1}A$

4) 一定要判断 $A-2E$ 可逆

性质：① A可逆，A^{-1} 可逆，$(A^{-1})^{-1}=A$

② A、B均可逆，则AB可逆，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

证：$ABB^{-1}A^{-1}=AEA^{-1}=E$

所以 $AB^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

③ 若A可逆，A^T 可逆 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

$K\neq 0$，KA也可逆 $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1}$

证：$A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$

$KA\left(\frac{1}{K}A^{-1}\right)=AA^{-1}=E$

④ 若A可逆，则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

证：$AA^{-1}=E$

$|AA^{-1}|=1$

$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$

⑤ 若A可逆，则 A^* 可逆，$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

证：$AA^*=|A|E$

$\left(\frac{1}{|A|}A\right)A^*=E$

总结 A^*

① 按行求，按列放

② $AA^*=A^*A=|A|E$

③ $|A^*|=|A|^{n-1}$

④ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ $\Rightarrow$ $A^*=|A|A^{-1}$

例① 求 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}$

$=|A|^{n-1}\left(\frac{1}{|A|}A\right)$

$=|A|^{n-2}A$

② 求 $((A^*)^*)^*=|A^*|^{n-2}A^*$

$=(|A|^{n-1})^n$