矩阵的特征值和特征向量

研究对象为方阵，只有方阵才有特征值和特征向量。

A为n阶方阵，对于一个数 λ，存在一个非零列向量，使 $A\alpha=\lambda\alpha$，则：

λ 叫做特征值，α 叫做对应于 λ 的特征向量

λ 可以为0，α 不能为0

根据定义可得：$\lambda\alpha-A\alpha=(\lambda E-A)\alpha=0$，$\alpha\neq0$

根据线性方程组可知：α 为 $(\lambda E-A)$ 的非零解。

由克莱姆法则或 $r(A)<n$ 可知：$|\lambda E-A|=0$

定义：$\lambda E-A$ 叫特征矩阵

$|\lambda E-A|$ 叫特征多项式

$|\lambda E-A|=0$ 特征方程

性质 ① λ 是A的特征值，α 是对应 λ 的特征向量，则 $c\alpha\ (c\neq0)$ 也是对应 λ 的特征向量

证：已知 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $cA\alpha=c\lambda\alpha$，$c\neq0$

$A(c\alpha)=\lambda(c\alpha)$，所以 $c\alpha$ 也是对应 λ 的特征向量。

② 一个特征值可以有无数个特征向量，一个特征向量只能对应一个特征值，

证：$\Rightarrow$ α 是对应 λ 的特征向量，则 $c\alpha$ 也是，$c\neq0$，有无数个。

$\Leftarrow$ 假设 α 是 λ_1 和 λ_2 的特征向量，且 $\alpha\neq0$

$\lambda_1\alpha=\lambda_2\alpha$，则 $(\lambda_1-\lambda_2)\alpha=0$

因为 $\alpha\neq0$，所以 $\lambda_1-\lambda_2$ 必须为0，若不为0则矛盾，成立。

③ α_1,α_2 是对应 λ 的特征向量，则 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$ 也是对应 λ 的特征向量。

证：
$$\begin{aligned}A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)&=Ac_1\alpha_1+Ac_2\alpha_2\\&=c_1A\alpha_1+c_2A\alpha_2\\&=\lambda c_1\alpha_1+\lambda c_2\alpha_2=\lambda(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)\end{aligned}$$

例题：已知方阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ 求特征值 λ 和特征向量 α

解：
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\0&\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\0&1&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left(-1\times\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\2&-4\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda+2\end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}&=(\lambda-2)(4\lambda-8+\lambda^2+\lambda-6)\\&=(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14)\\&=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+7)\end{aligned}$$

1) $\lambda_1=-7$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行简化阶梯形}}\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}$

2) $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}$

最终得到 α 为基础解系线性组合，若只有一个则 $c_1\neq0$，若两个解系 $c_1\ c_2$ 不同时为0