向量组的秩

极大线性无关组：向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots\alpha_n\}$ 的部分组，设 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$

满足 ① α_1 α_2 线性无关，并且是无关组中向量个数最大的

② $\alpha_3\cdots\alpha_n$ 均可由 α_1,α_2 线性表示

则 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 就是向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots\alpha_n)$ 的极大线性无关组

定理：① 若由 r 个向量构成的部分组是极大无关组，则

① $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 无关

② 任意 $r+1$ 个向量构成的向量组均相关

② 任意两个极大无关组所含向量的个数是相同的.

性质：① 全是0的向量组无极大无关组

② 线性无关组的极大无关组是它本身

③ 任意两个极大无关组是等价的

向量组的秩：极大线性无关组中向量的个数，记做 $r(\alpha_1\cdots\alpha_n)$

注：① 全是0的向量组秩为0

② $0\leqslant r(\alpha_1\cdots\alpha_n)\leqslant n$，修正为：$0\leq r(\alpha_1\cdots\alpha_n)\leq \min$(向量个数，维数)

③ 若 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r=s$

④ 若 线性相关 $\Leftrightarrow r<s$

A 定理：若 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 可由 $\beta_1\cdots\beta_t$ 表示，则 $r(\alpha_1\cdots\alpha_n)\leqslant r(\beta_1\cdots\beta_t)$

证：设 $\beta_{x_1},\beta_{x_2},\beta_{x_3}\cdots\beta_{x_s}$ 为 β 的极大无关组，记做 T_s

则 β 向量组任意一个向量均可由 T_s 表示.

那么 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 同样可由 T_s 线性表示，线性表示过程中最多使用 s 个向量

所以 $r(\alpha_1\cdots\alpha_n)\leqslant r(\beta_1\cdots\beta_t)$

推论：若向量组 T_α 和 T_β 等价，则 $r(T_\alpha)=r(T_\beta)$

证：由定理可得 $r(T_\alpha)\leq r(T_\beta)$ $r(T_\beta)\leq r(T_\alpha)$，所以 $r(T_\alpha)=r(T_\beta)$

行秩与列秩

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&3\\ 0&2&1&1&5&6\\ 9&1&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

行向量组：$\alpha_1=(1,1,1,1,1,3)$ $\alpha_2=(0,2,1,1,5,6)$ α_3

列向量组：$\alpha_1=(1,0,9)$ $\alpha_2\cdots\cdots\alpha_6$

行秩：行向量组的秩　列秩：列向量组的秩

定理：① 矩阵的行秩 = 列秩 = 矩阵的秩

② $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$

证：① 首先，任一矩阵都可以通过初等变换化为标准形.

并且，初等变换不改变矩阵的秩，可以得到：

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&0&\cdots&0\\ 0&\vdots&1&\cdots&0\\ 0&\vdots&\vdots&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&0\\ 0&0&0&\cdots&1/0 \end{pmatrix}$$

无论行秩还是列秩，均是忽略全为0的行，取得剩下的不全为0的向量是一样的.

所以. 行秩 = 列秩.

矩阵的秩是非零子式的最高阶数，也是这部分. 所以：行秩 = 列秩 = 矩阵的秩

② 由矩阵乘法可知：$\begin{cases}AB\text{的列向量组可以由}A\text{的列向量组表示}.\\AB\text{的行向量组可以由}B\text{的行向量组表示}.\end{cases}$

根据定理A：AB的列秩 $\leq$ A的列秩 $=r(A)$

AB的行秩 $\leq$ B的行秩 $=r(B)$

所以：$r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$

举例：$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}=0$　$r(A)=2$　$r(B)=1$，$r(AB)=0$

定理：对矩阵A仅做初等行变换，化成矩阵B. 那么矩阵A的列向量组，同矩阵B的列向量组，有完全相同的线性关系

简述：初等行变换不改变矩阵列向量组间的线性关系.

例：求 $\alpha_1=(1,-2,2,-1)$ $\alpha_2=(2,-4,8,0)$ $\alpha_3=(-2,4,-2,3)$ $\alpha_4=(3,-6,0,-6)$ 的极大无关组

① 构造矩阵
$$\begin{pmatrix} 1&2&-2&3\\ -2&-4&4&-6\\ 2&8&-2&0\\ -1&0&3&-6 \end{pmatrix}$$

② 化阶梯形
$$\begin{pmatrix} 1&0&-3&6\\ 0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

③ 首非零元所在列，就是极大无关组　α_1 和 α_2

④ 线性关系，$\alpha_3=-3\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$　$\alpha_4=6\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2$