定理：①若$\alpha_1\cdots\alpha_n$相关 $\Leftrightarrow$ 至少一个向量可由其它向量线性表示

证明：$\Rightarrow$ $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$

$$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3-\cdots-\frac{k_n}{k_1}\alpha_n$$

$\Leftarrow$ $\alpha_1=m_1\alpha_2+\cdots+m_{n-1}\alpha_n$

$$0=m_1\alpha_2+\cdots+m_{n-1}\alpha_n-\alpha_1$$

所以，α_1的系数为-1，至少一个非零解.

②若$\alpha_1\cdots\alpha_n$无关，$\alpha_1\cdots\alpha_n\beta$相关，则$\beta$可由$\alpha_1\cdots\alpha_n$唯一线性表示

证：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\cdots+k_n\alpha_n+k_{n+1}\beta=0$

假设$k_{n+1}=0$，因为$\alpha_1\cdots\alpha_n\beta$相关，则$k_1\cdots k_n$至少一个不为0，与$\alpha_1\cdots\alpha_n$无关矛盾.

所以，$k_{n+1}\neq0$，则$\beta=-\frac{k_1}{k_{n+1}}\alpha_1-\cdots-\frac{k_n}{k_{n+1}}\alpha_n$

唯一性：设$\beta=m_1\alpha_1+\cdots m_n\alpha_n$

$\beta=n_1\alpha_1+\cdots n_n\alpha_n$

则$\beta-\beta=0=(m_1-n_1)\alpha_1+\cdots(m_n-n_n)\alpha_n$，因为$\alpha_1\cdots\alpha_n$无关，

所以 $m_1=n_1$ $\cdots$ $m_n=n_n$，线性表示唯一

③替换：$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$无关，且可由$\beta_1\cdots\beta_t$线性表示，则$n\leq t$

证：假设$\alpha_1=\beta_1+\beta_2+0\beta_3+0\beta_4\cdots0\beta_t$

$\alpha_2=\beta_1+0\beta_2+\cdots0\beta_t$

那么$\alpha_1=\alpha_2+\beta_2$，则$\alpha_1\cdots\alpha_n$相关，与无关矛盾，

所以，线性表示的过程中，必不能存在β被复用的情况.

因此：$\alpha_1=\beta_1$ $\alpha_2=\beta_2\cdots$ $\alpha_n=\beta_t$，$n\leq t$

逆否定理：若$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$可由$\beta_1\cdots\beta_t$表示，且$n>t$，则$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性相关

推论：若$m>n$，则m个n维向量一定线性相关.

证：①若n个n维向量相关，则m个n维相关.

②若n个n维向量无关，则$|A|\neq0$，转化方程组为

n个方程式，n个未知量的齐次方程组，

将齐次方程组右边的值修改为第$n+1$个向量的元素.

根据克莱姆法则，一定有非零解

推论：等价的线性无关组，含向量的个数是相同的.

证：设$\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$ $\{\beta_1\cdots\beta_s\}$

根据替换定理：$n\leq s$ $s\leq n$，因此$n=s$