矩阵运算

1. 加法　只有同型矩阵才能加减 对应元素相加减

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&3\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&2&2\end{pmatrix}$$

2. 减法

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\\4&4&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&2\\3&3&2\\4&4&4\end{pmatrix}$$

运算律：① $A+B=B+A$
② $A+B+C=A+(B+C)$
③ $A+0=A$
④ $A+-A=0$
⑤ $A+B=C \Rightarrow A=C-B$

3. 数乘

$$k\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&2k&3k\\4k&5k&6k\\7k&8k&9k\end{pmatrix}$$

提公因子：矩阵所有元素都有公因子，公因子提一次

运算法则：① $k(A+B)=kA+kB$
② $(k+l)A=kA+lA$
③ $k(lA)=(kl)A$

4. 乘法（重要）

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&1&2\end{pmatrix}$$

矩阵相乘前提：① 第一个矩阵的列数 = 第2个矩阵的行数
结果矩阵形状：② 结果矩阵的行数 = 第一个矩阵的行数
③ 结果矩阵的列数 = 第二个矩阵的列数

技巧：$A_{3\times4}\ B_{4\times5}=C_{3\times5}$
① 中间相等
② 取两头

例：
$$\begin{pmatrix}-1&1&5\\4&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\-3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&33\\10&-10\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&5\\4&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-2&7\\8&6&-4\\27&15&-27\end{pmatrix}$$
$AB \neq BA$

AB：A左乘B　B右乘A

要不满足规律
① AB有意义的时候，BA不一定有意义，$A_{52}\ B_{23}$
特殊情况 $AB=BA$，则 A, B是可交换的.

$A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&3\end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix}0&0\\2&4\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$　$AC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

② $AB=0$，不能推出 $A=0$ 或 $B=0$
③ $AB=AC$，不能推出 $B=C$，无论A是不是0

1) 与零矩阵相乘　$A_{43}O_{32}=O_{42}$
2) 与单位阵相乘　$AE=A$　$EB=B$

① 结合律：$(AB)C=A(BC)$
② 分配律：$(A+B)C=AC+BC$　$C(A+B)=CA+CB$
③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

例题① 求与 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵

① 设 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $AB=BA$，所以 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a=a+b\\a+c=c+d\\b=b\\b+d=d\end{cases}$

③ 得到结果：$\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}$ a, c为常数.

例②：线性替换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

5. 幂运算　$A^k=\underbrace{AAA\cdots A}_{k个}$　$A^0=E$（单位阵）　A必须是方阵

① $A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$
② $(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1k_2}$

注意：① $(AB)^k \neq A^kB^k$
② $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$　$(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$
③ $(A+E)^2=A^2+2AE+E^2$　$(A-E)^2=A^2-2AE+E^2$

例题①：$A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $B=(1\ 2\ 3)$ 求 AB^{10}

① $BA=6$　$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

② $AB^{10}=A(BA)(BA)\cdots B=BA^9(AB)=6^9AB$

6. 转置

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$　$A^T=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$

$A_{m\times n}$　$(A^T)_{n\times m}$

☆ ① $(A^T)^T=A$
② $(A+B)^T=A^T+B^T$
③ $(kA)^T=kA^T$
☆ ④ $(AB)^T=B^TA^T$

关于④：$A_{3\times2}\ B_{2\times5}$

$(A^T)_{2\times3}$ $(B^T)_{5\times2}$，所以 A^T 和 B^T 不能相乘.