

齐次方程组求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

常数项均为0, 一定有解, 至少有0解.

$r(A)$ 一定等于 $r(\bar{A})$

1) $r(A) = r(\bar{A}) = n$, 只有零解. $\Leftrightarrow r(A) = n$

2) 有非零解. $\Leftrightarrow r(A) < n$

3) 方程个数 < 未知量个数, 有非零解.

证: 已知 $m < n$, 且 $r(A) \leq \min\{m, n\}$, $r(A) < n$, 有非零解.

例: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 一定有非零解.

从向量角度考虑: $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

3个2维向量一定相关, 所以 x_1, x_2, x_3 有非零解

4) 方程个数 = 未知量个数, 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

5) - - - 只有零解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

证: 4) ① $|A| = 0$, 则向量组线性相关, 有非零解

② $|A| = 0$, 则 $r(A) < n$, 有非零解.

③ $|A| = 0$, 则 A 不可逆, $r(A) < n$, 有非零解.

5) ① $|A| \neq 0$, 则向量组线性无关, 只有零解.

② $|A| \neq 0$, 则 $r(A) = n$, 只有零解.

③ $|A| \neq 0$, 则 A 可逆, $r(A) = n$, 只有零解.