特征值和特征向量的性质

性质 ① A 和 A^T 有相同的特征，特征向量不一定相同

证明：$|\lambda E - A^T| = |\lambda E^T - A^T| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A|$

② 对矩阵 A，若 ① $\sum |a_{ij}| < 1$，$i = 1 \cdots n$，每行元素绝对值的和小于1

② $\sum |a_{ij}| < 1$，$j = 1 \cdots n$ 列

则 $|\lambda_k| < 1$

☆☆☆ ③ 方阵 A 有 n 个特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$，则 1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ② $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$

证：引理：① $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$，若 x_1, x_2, x_3 为根

则可表示为 $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$

② $(x + c_1)(x + c_2) \cdots (x + c_n)$

$= x^n + (c_1 + c_2 \cdots + c_n) x^{n-1} + \cdots + c_1 c_2 \cdots c_n$

①
$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

将行列式展开则 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$ 是其中一项

$= \cdots + (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) + \cdots$

$= \cdots + \lambda^n - (a_{11} + \cdots a_{nn}) \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$

特征多项式展开之后，无论 λ 为多少，常数项不变，

令 $\lambda = 0$，则得常数项 $|0 - A| = (-1)^n |A|$

② $|\lambda E - A|$ 是特征多项式，根据引理1可得：

因为行列式展开取不同行，不同列，所以其余项不存在 λ^{n-1} 的项。

$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$

$= \lambda^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$

根据 ①② 的结论得到：$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \cdots \lambda_n = |A| \end{cases}$，即 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

定义：$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$，叫做矩阵的迹，记做 $tr(A)$

推论：若特征根有一个为0 则 $\lambda_1 \cdots \lambda_n = |A| = 0$，$A$ 不可逆

④ n 阶方阵 A，互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$

则对应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关。

证：数学归纳法：

令 $m = 1$，则对应的特征向量 α_1 只有一个，且是非零向量，线性无关。

可得 ① 对 $s-1$ 成立，即 $\alpha_1 \cdots \alpha_{s-1}$ 无关。

② $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_s\alpha_s = 0$

左乘 A 得：$k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \cdots + k_s A\alpha_s = 0$

③ $k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 + \cdots + k_s\lambda_s\alpha_s = 0$

对②乘以 λ_s：④ $k_1\lambda_s\alpha_1 + k_2\lambda_s\alpha_2 + \cdots + k_s\lambda_s\alpha_s = 0$

④ − ③：$k_1(\lambda_s - \lambda_1)\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}(\lambda_s - \lambda_{s-1})\alpha_{s-1} = 0$

由 ① 可知：$k_1(\lambda_s - \lambda_1) = k_2(\lambda_s - \lambda_2) = k_{s-1}(\lambda_s - \lambda_{s-1}) = 0$

因为 $\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 是不同特征值，所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{s-1} = 0$

则 $0 + 0 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，即 $k_s\alpha_s = 0$

因为 α_s 非零，所以 $k_s = 0$，因此：$\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 无关

⑤ n 阶方阵 A，互不相同的特征值 $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

则对应的无关向量组 $\underbrace{\{\alpha_1 \alpha_2\}}_{\text{无关}}$ $\underbrace{\{\alpha_3, \alpha_4 \alpha_5\}}_{\text{无关}}$ $\underbrace{\{\alpha_m\}}_{\text{无关}}$，组合一起也无关

证：根据小性质 ④ 任何一个向量均不能用其它向量线表。

⑥ n 阶方阵 A，λ 是特征多项式 $(\lambda E - A)$ 的 k 重特征值，则对应于 λ 的线性无关的特征向量最多是 k 个

1) 若 λ 是单根，则对应于 λ 的线性无关的特征向量只有1个

2) 所有线性无关的特征向量的个数不超过 n 个

例：6阶方阵，$\lambda = 1$（3重） $\lambda = 0$（2重） $\lambda = 5$（单根）

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ $\{\alpha_n\}$

$1 \le n \le 3$ $\quad 1 \le n \le 2$ $\quad n = 1$

证：λ 是由特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 求得。

将 $|\lambda E - A|$ 化为上三角的形式为：
$$\begin{vmatrix} \lambda - x_1 & a_1 & a_2 \cdots \\ & \lambda - x_2 & a_3 \cdots \\ & & \ddots \\ & & & \lambda - x_n \end{vmatrix}$$

假设 λ_0 为 k 重特征根，则对应的主对角线 k 个位置均为0

若①，其后均为0，则自由未知量加1

其后不全为0，自由未知量不变

所以自由未知量个数 $m \le k$，则线性无关向量个数 $\le k$

其它性质：方阵 A，λ 是 A 的特征值

① $k\lambda$ 是 kA 的特征值。

证：$A\alpha = \lambda\alpha$，则 $(kA)\alpha = (k\lambda)\alpha$

② λ^2 是 A^2 的特征值，且 λ^k 是 A^k 的特征值

证：$A\alpha = \lambda\alpha$，$AA\alpha = A\lambda\alpha = \lambda A\alpha = \lambda(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$

③ $f(A)$ 是关于 A 的表达式，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值。

证：$f(A)$ 中每一项，均可由 ①② 得到特征值，经过加减乘除，$f(\lambda)$ 就是 $f(A)$ 的特征值

④ 1) $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值。

2) $\frac{1}{\lambda}|A|$ 是 A^* 的特征值。

证：1) $A\alpha = \lambda\alpha$，则 $A^{-1}\lambda\alpha = A^{-1}A\alpha$，$A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$

2) $A\alpha = \lambda\alpha$，则：$A^*\lambda\alpha = A^*A\alpha$

$A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$

例题①：已知 A 是四阶方阵，$|3E + A| = 0$，$AA^T = 2E$，$|A| < 0$，求 A^* 的一个特征值

解：$|3E + A| = 0$

$\Rightarrow (-1)^4 |-3E - A| = 0$

所以 $\lambda = -3$，λ 是 A 的特征值，

所以 A^* 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}|A|$

$|AA^T| = |2E| = |A||A^T| = 2^4 = |A|^2$

因为 $|A| < 0$，所以 $|A| = -4$

A^* 的一个特征值为 $\frac{4}{3}$

例题②：已知
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 6 & -6 & b \end{pmatrix}$$
$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3$

解：$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + a + b = 2 + \lambda_3 \\ &\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| \\ &|\lambda_1 E - A| = 0 \end{aligned}\right\}$ 解 a, b, λ_3