目录

第 1 章　外在导数, 内蕴导数和线性泛函导数

本章内容主要参考引用自 (Ren et al., 2021),(王凤雨 等, 2020),(Bao et al., 2021) 和 (Wang et al., 2024).

Lions 导数可以看作是 Frechet 导数的延伸, 这一章则主要介绍 Gateaux 导数或方向导数的概念在测度变量的函数上的应用. 参考文献是在 Riemann 流形上对一般情况定义了几种导数, 为简单起见, 此处只考虑欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 的情形.$\mathscr{M}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上有限测度全体, 记 $\mathscr{M}_p = \{\mu \in \mathscr{M} : \mu(|\cdot|^p) < \infty\}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上 p 阶矩有限测度的全体,$p \in [0, \infty)$, 配备通常的加法, 减法和数乘. 定义

$$W_p(\mu, \nu) = (\mu(\mathbb{R}^d) \wedge \nu(\mathbb{R}^d)) W_p(\frac{\mu}{\mu(\mathbb{R}^d)}, \frac{\nu}{\nu(\mathbb{R}^d)}) + |\mu(\mathbb{R}^d) - \nu(\mathbb{R}^d)|,$$

$(\mathscr{M}_p, W_p)$ 是一个完备度量空间.

1.1　定义

我们首先给出外在导数的定义.

定义 1.1　设 $p \geq 0$. 称 $f : \mathscr{M}_p \to \mathbb{R}$ 在 $\mathscr{M}_p$ 上是外在可导的, 是指: 任意 $(x, \eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathscr{M}_p$ 极限

$$D^E f(\eta)(x) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{f(\eta + \epsilon \delta_x) - f(\eta)}{\epsilon}$$

存在, 其中 δ_x 表示 $x \in \mathbb{R}^d$ 处的 Diarc 质量.$D^E f$ 称为 f 的外在导数.

注　在内蕴导数的定义的基础上, 定义若干常用的函数类.

称函数 $f : \mathscr{M}_p \to \mathbb{R} \in C^{E,1}(\mathscr{M}_p)$, 是指:$f$ 在 $\mathscr{M}_p$ 上是外在可导的, 且映射 $(x, \eta) \mapsto D^E f(\eta)(x)$ 是 $\mathbb{R}^d \times \mathscr{M}_p$ 上的连续函数.

称函数 $f : \mathscr{M}_p \to \mathbb{R} \in C_K^{E,1}(\mathscr{M}_p)$, 是指:$f \in C^{E,1}(\mathscr{M}_p)$, 且对任意紧集 $K \subset \mathscr{M}_p$, 存在常数 C, 使得任意 $\eta \in K$,$|D^E f(\eta)(x)| \leq C(1 + |x|^p)$.

称函数 $f : \mathscr{M}_p \to \mathbb{R} \in C^{E,1,1}(\mathscr{M}_p)$, 是指:$f \in C^{E,1}(\mathscr{M}_p)$,$D^E f(\eta)(x)$ 关于 x 可微, 且 $\nabla D^E f(\eta)(x)$ 是 $\mathbb{R}^d \times \mathscr{M}_p$ 上的连续函数.

此外,$C_b^{E,1}(\mathscr{M}_p)$, $C_b^{E,1,1}(\mathscr{M}_p)$ 分别表示 $C^{E,1}(\mathscr{M}_p)$, $C^{E,1,1}(\mathscr{M}_p)$ 和 $\mathscr{M}_p$ 上有界函数的交集.

容易看出, 外在导数的定义不能直接限制在 p 阶矩有限的的概率测度组成的集合 $\mathscr{P}_p \subset \mathscr{M}_p$ 上, 因此对以上定义稍作修改, 引入凸外在导数的概念.

定义 1.2　设 $p \geq 0$. 称函数 $f : \mathscr{P}_p \to \mathbb{R}$ 凸外在可导, 是指: 对任意 $(x, \mu) \in$

$\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_p$, 极限

$$\tilde{D}^E f(\mu)(x) := \lim_{s\downarrow 0} \frac{f((1-s)\mu + s\delta_x)}{s}$$

存在,$\tilde{D}^E f$ 称为 f 的凸外在导数.

注　类比外在导数, 同样可以类似的函数空间.

称函数 $f : \mathscr{P}_p \to \mathbb{R} \in C^{E,1}(\mathscr{P}_p)$, 是指:$f$ 在 $\mathscr{P}_p$ 上是外在可导的, 且映射 $(x,\eta) \mapsto \tilde{D}^E f(\eta)(x)$ 是 $\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_p$ 上的连续函数.

称函数 $f : \mathscr{P}_p \to \mathbb{R} \in C_K^{E,1}(\mathscr{P}_p)$, 是指:$f \in C^{E,1}(\mathscr{P}_p)$, 且对任意紧集 $K \subset \mathscr{P}_p$, 存在常数 C, 使得任意 $\eta \in K$,$|\tilde{D}^E f(\eta)(x)| \leq C(1+|x|^p)$.

称函数 $f : \mathscr{P}_p \to \mathbb{R} \in C^{E,1,1}(\mathscr{P}_p)$, 是指:$f \in C^{E,1}(\mathscr{P}_p)$,$\tilde{D}^E f(\eta)(x)$ 关于 x 可微, 且 $\nabla \tilde{D}^E f(\eta)(x)$ 是 $\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_p$ 上的连续函数.

此外,$C_b^{E,1}(\mathscr{P}_p), C_b^{E,1,1}(\mathscr{P}_p)$ 分别表示 $C^{E,1}(\mathscr{P}_p), C^{E,1,1}(\mathscr{P}_p)$ 和 $\mathscr{P}_p$ 上有界函数的交集.

虽然凸外在导数和外在导数定义上稍有差别, 但存在着紧密关联: 若函数 $f : \mathscr{M}_p \to \mathbb{R} \in C_b^{E,1}(\mathscr{M}_p)$, 则 $f|_{\mathscr{P}_p} \in C^{E,1}(\mathscr{P}_p)$, 且对任意 $\mu \in \mathscr{P}_p$,

$$\tilde{D}^E f|_{\mathscr{P}_p}(\mu) = D^E f(\mu) - \mu(D^E f(\mu)),$$

在这个意义下, 可以将凸外在导数看作外在导数的中心化.

给定向量场 $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$, 定义

$$\phi_s(x) := x + s\phi(x), s \geq 0,$$

也即 $\phi_s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} + s\phi, s \geq 0$.

对于任意测度 $\eta \in \mathscr{M}_p, p \in (0,2]$, 定义 η 处的切空间为 $L^2(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d); \eta)$, 这是一个 Hilbert 空间, 可以应用 Riesz 表示定理, 将其上的连续线性泛函视为其中一个元素.

定义 1.3　设 $p \in [0,2]$. 称函数 $f : \mathscr{M}_p \to \mathbb{R}$ 在 $\eta \in \mathscr{M}_p$ 内蕴可导, 是指: 对于任意 $\phi \in L^2(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d); \eta)$, 极限

$$D_\phi^I f(\eta) := \lim_{s\downarrow 0} \frac{f(\eta \circ \phi_s^{-1}) - f(\eta)}{s}$$

存在, 且是 ϕ 的连续线性泛函. 此时存在唯一的 $D^I f(\eta) \in L^2(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d); \eta)$, 使得

$$D_\phi^I f(\eta) = \langle D^I f(\eta), \phi \rangle_{L^2(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d); \eta)} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle D^I f(\eta), \phi \rangle \mathrm{d}\eta,$$

称 $D^I f(\eta)$ 为 f 在 η 处的内蕴导数, 若对任意 $\mu \in \mathscr{M}_p$,f 在 μ 处都是内蕴可导的, 则称 f 在 $\mathscr{M}_p$ 上内蕴可导或简称内蕴可导.

注　由于内蕴导数的定义不依赖于 $\mathscr{M}_p$ 的线性结构, 因此对 $\mathscr{P}_p$ 上的实值函数有完全相同的定义.

作为比较, 这里给出 Lions 导数的另一种定义. 在第二章中, 是将测度变量函数 $f:\mathscr{P}_2\to\mathbb{R}$ 提升为以随机变量为变量的函数 $\tilde{f}=f\circ\mathscr{L}:L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$, 然后用随机变量空间上的 Frechet 导数来刻画 f 的局部性态. 在考虑差 $\tilde{f}(X+Y)-\tilde{f}(X)$ 以及 $\|Y\|_{L^2}$ 逐渐趋于 0 时, 如果固定一个方向取 $Y=s\phi(X)$, 则

$$\begin{aligned}\tilde{f}(X+Y)-\tilde{f}(X)&=\tilde{f}(X+s\Phi(X))-\tilde{f}(X)\\&=f(\mathscr{L}(X)\circ(\mathrm{id}+s\phi)^{-1})-f(\mathscr{L}(X))\\&=f(\mathscr{L}(X)\circ\phi_s^{-1})-f(\mathscr{L}(X)),\end{aligned}$$

这就是内蕴导数的形式. 而 Lions 导数本质是 Frechet 导数, 应该考虑任意方向, 所以在令 Y 的二阶矩趋于 0 的过程不应该通过给一个固定的函数做伸缩来实现, 而应该让函数本身充分小, 用严格的数学语言来叙述即如下定义.

定义 1.4　给定 $p\in[0,2]$. 称函数 $f:\mathscr{P}_p\to\mathbb{R}$ 在 $\eta\in\mathscr{P}_p$L-可导, 是指:f 是内蕴可导的, 且

$$\lim_{\|\phi\|_{L^2(\eta)}\downarrow 0}\frac{|f(\eta\circ(\mathrm{id}+\phi)^{-1})-f(\eta)-D^I_\phi f(\eta)|}{\|\phi\|_{L^2(\eta)}}=0,$$

若 f 在任意 $\eta\in\mathscr{P}_p$ 都 L-可导, 则称 f 是 L-可导的, 此时将 D^If 记为 D^Lf.

注　根据第二章的相关讨论, 在这个定义中, 要求 f 内蕴可导是自然的; 另外, 在这个 L-可导的定义下,L-可导显然强于内蕴可导, 而当 fL-可导时, 其 L-导数就是内蕴导数. 以上定义对 $\mathscr{M}_p$ 上的函数同样成立.

在第一章中, 对于 Banach 空间之间的映射如果是可微的并满足合适的条件, 则有中值定理成立. 对于 $\mathscr{M}_p$ 或 $\mathscr{P}_p$, 则可以用” 中值定理” 来定义一点处的导数, 从而一定程度上在形式上与 Banach 空间上的 Frechet 导数保持一致.

定义 1.5　设 $p\in[0,\infty)$. 给定 $f:\mathscr{M}_p\to\mathbb{R}$, 称可测函数 $D^Ff(\eta):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是 f 在 η 处的线性泛函导数, 是指: 对任意 $L>0$, 存在 C_L 使得

$$\sup_{\eta(|\cdot|^p)\le L}|D^Ff(\eta)(y)|\le C_L(1+|y|^p),y\in\mathbb{R}^d,$$

且对任意 $\mu,\nu\in\mathscr{M}_p$,

$$f(\mu)-f(\nu)=\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}D^Ff(\nu+t(\mu-\nu))(y)(\mu-\nu)(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t.$$

注　由于只涉及到凸组合, 所以线性泛函导数的定义对 $\mathscr{P}_p$ 上的实值函数完全成立.

1.1.1　几种导数的关系

1.1.1.1　外在导数和 L-导数

由于 L-导数可以视为更强的内蕴导数, 所以这里只讨论外在导数和 L-导数的关系. 从定义的形式上来看, 外在导数的定义要比 L-导数的计算” 简单” 一些,

所以希望能找到它们间的关联, 从而通过计算外在导数来简化 L-导数的计算. 事实上, 有以下定理.

定理 1.1　设

1.1.1.2　L-导数和线性泛函导数

1.1.2　若干例子

对上一节定义的几种导数, 我们介绍几个简单可计算的例子, 并体现它们之间的联系.

称函数 $f:\mathscr{M}_p\to\mathbb{R}$ 为 C_b^1- 柱函数或 $f\in\mathscr{F}C_b^1(\mathscr{M}_p)$, 是指: 存在 $n\in\mathbb{N}$,$g\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 和 $h_i:1\le i\le n\subset C_b^1(\mathbb{R}^d)$, 使得

$$f(\mu)=g(\mu(h_1),\cdots,\mu(h_n)),\mu\in\mathscr{P}_p.$$

柱函数是较大的一类的函数, 例如线性函数就是一种特殊的柱函数, 在此给出柱函数的外在导数公式.

参考文献

王凤雨, 任盼盼, 2020. 关于测度值过程的随机分析[J]. 中国科学（数学）, 50(2): 231-252. 1

Bao J, Ren P, Wang F Y, 2021. Bismut formula for lions derivative of distribution-path dependent SDEs[J]. Journal of Differential Equations, 282: 285-329. 1

Ren P, Wang F Y, 2021. Derivative formulas in measure on riemannian manifolds[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 53(6): 1786-1800. 1

Wang F Y, Ren P, 2024. Distribution dependent stochastic differential equations[M]. WORLD SCIENTIFIC. 1