基于多阶段多模型微粒群算法的非线性方程组解法

赵 嘉

(南昌工程学院信息工程学院,江西 南昌 330099)

摘 要:多阶段多模型的微粒群优化算法是一种改进的微粒群优化算法,具有较强的全局搜索能力。将非线性方程或非线性方程组的求解问题转化为函数优化问题,应用多阶段多模型的微粒群优化算法求解非线性方程组的解。计算中不需要使用目标函数的导数信息和初始点的信息,数值实验结果表明了该算法的有效性和可行性。

关键词:微粒群优化算法;多阶段;多模型;非线性方程组;函数优化

0 引言

在科学技术及生产实践中,许多问题的求解最终往往是转化成求解非线性方程或非线性方程组。非线性方程或非线性方程组的求解是数值计算领域中较困难的问题,传统的解法如牛顿迭代法的收敛性和性能特征在很大程度上依赖于初始点的选择,对于许多复杂的非线性方程组,要选择一个较好的初始点是一件非常困难的事情。

微粒群优化算法[2,3](Particle Swarm Optimization,PSO)是由美国社会心理学家 James Kennedy 和电气工程师 Russell Eberhart 根据鸟群觅食行为模拟,于 1995 年共同提出的一种新的演化计算技术。该新的优化算法具有许多特点如:实现容易、收敛性强、性能良好等。

多阶段多模型的微粒群优化算法[4](MM-PSO)是一种改进的微粒群优化算法,将微粒群分多个阶段利用多种进化模型迭代进化,该改进算法具有比标准微粒群优化算法更容易找到全局最优解的优点。

本文利用多阶段多模型的微粒群优化算法求解非线性方程组,首先将求解非线性方程或非线性方程组的问题转化为函数的优化问题,然后利用转化过来的优化函数当作 PSO 算法的适应度函数进行优化求解,方程的求解不依赖于初始点和目标函数的导数信息。实验结果表明,应用多阶段多模型的微粒群优化算法对转化过来的函数进行优化求解,求解的结果是非线性方程或非线性方程组的有效解。

1 多阶段多模型的微粒群优化算法

微粒群优化算法基于群体与适应度的优化算法,是通过对鸟群觅食行为的模拟得来。首先系统初始化微粒为一组随机解,所有微粒有位置和速度两个特征,微粒的适应度值是由其位置决定的,通过迭代来改变其速度与位置求出问题的解。其数学表述为:由 N 个微粒组成的群体,在 D 维的目标搜索空间中,第 i(i=1,2,⋯,N)个微粒在第 t 代的位置坐标可表成向量 $x_i^t=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{id},\cdots,x_{iD})^T$,速度可表示为:$v_i^t=(v_{i1}^t,v_{i2}^t,\cdots,v_{id}^t,\cdots,v_{iD}^t)^T$,个体最优位置 pBest 可表示为:$p_i^t=(p_{i1}^t,p_{i2}^t,\cdots,p_{id}^t,\cdots,p_{iD}^t)^T$,种群的全局最优 gBest 可表示为:$p_g^t=(p_{g1}^t,p_{g2}^t,\cdots,p_{gd}^t,\cdots,p_{gD}^t)^T$。

对于第 i 个微粒的第 d 维在第 t+1 代根据如下公式迭代更新:

$$v_{id}^{t+1}=\omega v_{id}^t+c_1r_1(p_{id}^t-x_{id}^t)+c_2r_2(p_{gd}^t-x_{id}^t) \tag{1}$$

$$x_{id}^{t+1}=x_{id}^t+v_{id}^{t+1} \tag{2}$$

其中,v_{id}^t—当前的速度,

v_{id}^{t+1}—粒子 i 在第 t 次迭代后的新速度,

ω—惯性权重,

c_1,c_2—加速(学习)因子,

r_1,r_2—0 到 1 之间均匀分布的随机数,

x_{id}^t—粒子 i 当前的位置,

x_{id}^{t+1}—粒子 i 第 t 次迭代后的新位置。

加速因子 c_1,c_2 是调整微粒的自身经验与社会经验在其速度中所起作用的权重。如果 $c_2=0$,则微粒没有群体共享信息,只有自身经验,微粒个体之间没有交互,每个微粒仅受自己的飞行经验的影响,不受其它微粒的影响。它的特点是:微粒在目标空间里大范围搜索,不容易陷入局部最优点。此模型称之为 Cognition Only 模型[5],其迭代公式为:

$$v_{id}^{t+1}=\omega v_{id}^t+c_1r_1(p_{id}^t-x_{id}^t) \tag{3}$$

$$x_{id}^{t+1}=x_{id}^t+v_{id}^{t+1} \tag{4}$$

算法迭代的终止条件一般根据具体问题选为最大迭代次数或者微粒搜索到的最优位置满足预先设定的最小适应阈值。

在应用微粒群优化算法求解普通问题时比较简单,容易求得满意的解。但是人们发现在实际应用过程中,PSO 算法对于复杂优化问题求解时容易陷入局部极值[5]。针对微粒群优化算法求解复杂问题时易出现“早熟”收敛的现象,文献[4]提出了一种多阶段多模型的改进微粒群优化算法。考虑到寻优过程中不同阶段的开发与探测能力需求的差异,算法将寻优过程分成三个阶段,不同阶段采用不同的模型。

第一阶段利用标准微粒群优化算法发现局部极值的邻域,

作者简介:赵嘉(1981-),男,江西九江人,讲师,研究方向:智能优化算法。

第二阶段利用 Cognition Only 模型快速找到局部极值点，以提高寻优效率，第三阶段，利用新的模型跳出局部极值点，以便寻找全局最优点。

其中第三阶段新的模型设计原理是为保证模型和标准 PSO 算法的结构形式一致并考虑微粒群算法的统计规律性，定义一个减速因子（与加速因子 c_1,c_2 对应）和一个 0 到 1 之间均匀分布的随机数（与 r_1,r_2 对应）。

模型迭代公式为：

$$v_{id}^{t+1}=\omega v_{id}^{t}+c_1r_1(p_{id}^{t}-x_{id}^{t})+c_2r_2(p_{gd}^{t}-x_{id}^{t})+c_3r_3(p_{bd}^{t}-x_{id}^{t}) \tag{5}$$

$$x_{id}^{t+1}=x_{id}^{t}+v_{id}^{t+1} \tag{6}$$

$$p_{bd}^{t}=\max(p_1^t,p_2^t,\cdots,p_n^t) \tag{7}$$

其中 ω,c_1,c_2,r_1,r_2 与式（1），（2）定义相同，

c_3—减速因子，

r_3—0~1 之间均匀分布的随机数。

2　求解非线性方程组的 MM-PSO 算法

2.1　非线性方程组的描述与转化

非线性方程或非线性方程组的求解问题是一个比较古老的数学问题，其数学模型一般可表示为：

$$f(X)=0 \tag{8}$$

在式（8）中，一般 X 被认为是在实数范围内待求解的 n 个未知量，可转换表示为 $f(X)=[f_1(X),f_2(X),\cdots,f_m(X)]^T$ 变量 X 的 m 维向量函数。将此方程写成分量的形式表示，即：

$$f(X)=\begin{cases}f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\ \vdots\\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\end{cases} \tag{9}$$

因此，原非线性方程或非线性方程组的求解问题，可等价于求解函数：

$$\min f(X)=\sqrt{f_1^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)+f_2^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+f_m^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

的优化问题。（10）

应用多阶段多模型的微粒群优化算法对非线性方程或非线性方程组的求解，可令转化过来的函数

$$\min f(X)=\sqrt{f_1^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)+f_2^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+f_m^2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

作为微粒群优化算法的适应度函数。

2.2　求解非线性方程及方程组的流程

步骤 1　初始化设置微粒群微粒的个数、最大迭代次数、惯性权重，加速因子、减速因子、标准 PSO 迭代阈值 σ、模型迭代次数 ε、各粒子初始位置和初始速度等。

步骤 2　将要求解的非线性方程或非线性方程组转化成要优化的函数。

步骤 3　评价各微粒的初始适应值、保存初始最好位置及初始最优适应值。

步骤 4　根据式（1）计算各微粒新的速度，根据式（2）计算各微粒新的位置、并对各微粒新的速度和位置进行限幅处理。

步骤 5　更新各微粒的个体历史最好适应值和个体历史最好位置；更新全局历史最好适应值和全局历史最好位置。

步骤 6　比较前后两次全局历史最好适应值的差，如果该差值大于我们事先设定标准 PSO 迭代阈值 σ，返回步骤 4，否则进入步骤 7。

步骤 7　采用 Cognition Only 模型对粒子的速度和位置进行进化，并更新各微粒的个体历史最好适应值和个体历史最好位置；更新全局历史最好适应值和全局历史最好位置，按照设定的参数重复步骤 7ε 次后，转入步骤 8。

步骤 8　采用式（5）与式（6）对粒子的速度和位置进行进化，并更新各微粒的个体历史最好适应值和个体历史最好位置；更新全局历史最好适应值和全局历史最好位置，按照设定的参数重复步骤 8ε 次后，转入步骤 9。

步骤 9　若满足停止条件（迭代次数超过最大允许迭代次数），搜索停止，输出全局历史最好位置和全局历史最好适应值；否则，返回步骤 7 继续搜索。

3　实验结果

将多阶段多模型的微粒群优化算法应用于非线性方程或非线性方程组的求解。多阶段多模型的微粒群优化算法的参数按文献【4】的设置为：ω 取值从 0.9 线性衰变至 0.4，加速因子 c_1，c_2 为 2，减速因子 c_3 为 2，最大迭代次数为 2000，微粒的数量为 60，第三阶段模型的迭代次数 ε 为 25。最小适应度阈值设为 $|f(X)|<1.0\times10^{-6}$。

例 1[6]　$f(x)=e^x-x^2+3x-2=0,\quad x\in[-4,4]$　（11）

例 2[7]　$f(x)=x^4-12x^3+47x^2-60x=0,\quad x\in[4.5,6]$　（12）

例 3[8]　$\begin{cases}x_1^2+x_2^2-x_1=0\\ x_1^2-x_2^2-x_2=0\end{cases}\quad x_1,x_2\in\{-4\le x_i\le 4\}$　（13）

多阶段多模型的微粒群优化算法是一种随机搜索算法，为了验证算法的有效性，对于每个算例都应用 MM-PSO 算法独立运行 50 次，将这 50 次运行的最终结果统计如表 1 所示：

表 1　各方程的运行结果表

方程	精确解	搜索到解次数	成功率	x 的平均值
例 1	0.257530	50	100%	0.257530
例 2	5	50	100%	4.999999
例 3	（0，0），（0.771845，0.419643）	50	100%	（0，0），（0.771845，0.419643）

应用多阶段多模型的微粒群优化算法求解以上三个算例每次都收敛，运算速度快，算法编程实现简单，并且每次都求得满意精度的解。

4　结束语

多阶段多模型的微粒群优化算法是一种改进的微粒群优化算法，该改进算法具有更好的全局搜索寻优性能，本文应用多阶段多模型的微粒群优化算法对非线性方程及非线性方程组进行了求解。

菲林光栅冷冲压复合模设计

盛雪莲，王 乾

（常州轻工职业技术学院模具系，江苏 常州 213164）

摘 要：本文的目的是要设计一副用于加工菲林光栅的冷冲压模。为了保证工件孔与孔以及孔与边的相对位置精度；又由于工件的材料薄，凹凸模之间的间隙很小，所以采用带浮动模柄的复合模具一次冲压完成工件的所有轮廓尺寸。实践表明，该模具冲出的工件形状可靠，质量优良，满足工件的使用要求。

关键词：冷冲压模；菲林光栅；复合模；浮动模柄

0 前言

此套冷冲模的设计是根据无锡某公司的生产需要来进行的，该套冲模用于加工菲林光栅，材料是菲林的，厚度为 0.3mm，表面粗糙度为 0.8mm，月产量约 6000 个。菲林光栅是光电轴角编码器上的关键零件，而光电轴角编码器广泛应用于数控机床、纺织机械、冶金机械、印刷机械、塑料机械、试验机、电梯、航空、仪器仪表工业自动化等行业，是集光、机、电精密技术于一体的高新技术结晶，通过光电转换，可将输出轴的角位移、角速度等机械量转换成相对应的电脉冲以数字量输出，其工作原理是光电式。

此套模具设计的难度在于工件的材料薄，凹凸模之间的间隙很小，会使压力机对模具导向精度产生不良影响；再一个是在冲压时导柱不能离开导套，解决这一问题的关键是必须调整压力机的行程。工件简图如图 1 所示。

1 成型工艺设计

1.1 制件工艺分析

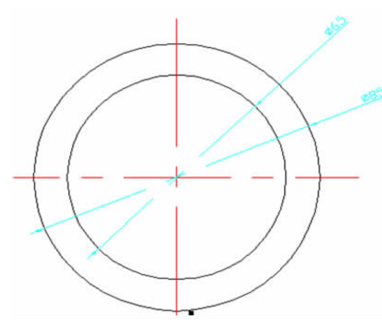

图 1 菲林光栅简图

根据制件工艺性分析，冲裁件为菲林光栅，只有落料和冲孔两个工序，结构简单，只有一个 Φ65mm 的孔和一个 Φ85mm 的外圆。孔与外圆边缘之间的距离也满足最小壁厚为 5mm 的要求，由尺寸可以看出无须考虑其最小孔距、最小圆角半径及模具最小壁厚等问题。技术要求工件成型的外圆和内孔边沿整齐无毛刺，同轴度高，不应有膜层与基片脱层脱落现象。该工件很薄、精度要求高，故在设计复合模零件时，凸、凹模间隙值、凸、凹模刃口尺寸的确定以及模具设计中常用的公差配合、形位公差与

对于非线性方程或非线性方程组的求解，传统数值方法一般都要应用到初始点信息和目标函数的导数信息，而一个好的初始点的选择是一件困难的事情。本文将非线性方程及非线性方程组的求解问题转化为函数优化问题，应用多阶段多模型的微粒群优化算法进行求解。该方法不需要初始点的信息和目标函数的导数信息，不易陷入局部解。测试实验的结果表明：该方法有效、求解精度高、算法实现简单。

参考文献：

[1] 李庆扬,莫孜中,祁力群.非线性方程组的数值解法[M].北京:科学出版社,1999.

[2] Kennedy J,Eberhart R. Particle Swarm Optimization[C].IEEE Int'l Conf. on Neural Networks. Perth, Australia, IEEE Service Center Piscataway NJ, 1995. 1942~1948.

[3] Eberhart R, Kennedy J.A New Optimizer Using Particle Swarm Theory [C]. Proc. of the 6th International Symposium on Micro Machine and Human Science, Nagoya, Japan: IEEE Service Center Piscataway NJ, 1995. 39~43.

[4] 赵嘉,孙辉.多阶段多模型的改进微粒群优化算法[J].计算机工程与应用,2010,

[5] Eberhart R. Shi Y, Particle Swarm Optimization: Developments, applications and resources[C]. Proceedings of the IEEE congress on Evolutionary Computation (CEC2001), Seoul, Korea, 2001.81~84.

[6] 孙志忠,袁慰平,闻震初.数值分析[M].南京:东南大学出版社,2002.

[7] 臧明磊,杨士俊.用遗传算法解一元非线性方程[J].济宁师专学报,1998,19(6):

[8] 林成森.数值分析[M].北京:科学出版社,2006.

项目资助：南昌工程学院青年基金科技项目（2010KJ018）。