コンピュータ理工学実験

第4単元(1/2/3回):LCR共振回路

本単元の流れ:これまでの基礎知識を踏まえて、LCRによる共振回路(直列共振・並列共振)を理解し、実験で確認する。

- 理論的背景を踏まえて、実験前にグラフを描いてみる。
- 周波数特性を測定し、共振現象について理解する。

【注意】 第4単元レポート締切り:第5単元の始まりまで。

実験許可条件

・実験ノート・電卓を各自準備すること

・ハンドアウトなどの資料、グラフ用紙(メモのグラフなど)はバインダへ
(過去の資料も含めてまとめて手元で見れるようにする)

共振とは何か？

エネルギーのやりとり

- 身の回りにある共振（ブランコ）
  - ひもの長さで決まる固有周波数で振動
  - 固有周波数のエネルギー入力は蓄積される。
    - 同期して蹴ると振れが大きくなる。
  - ブランコの振動は、位置エネルギーと運動エネルギーとの交換現象
- 電気回路にも振動がある。
  - コンデンサ（電界のエネルギー）とコイル（磁界のエネルギー）とが交換されつつ振動するLC回路がある
  - 固有周波数の入力エネルギーを蓄積し、増幅したりする
    - ラジオの選局（同調）回路など
  - 水晶振動子：時計、コンピュータのクロック（圧電現象：電圧と固体振動）

子供向け遊具（豊島製作所）

L、C にエネルギーが蓄えられる

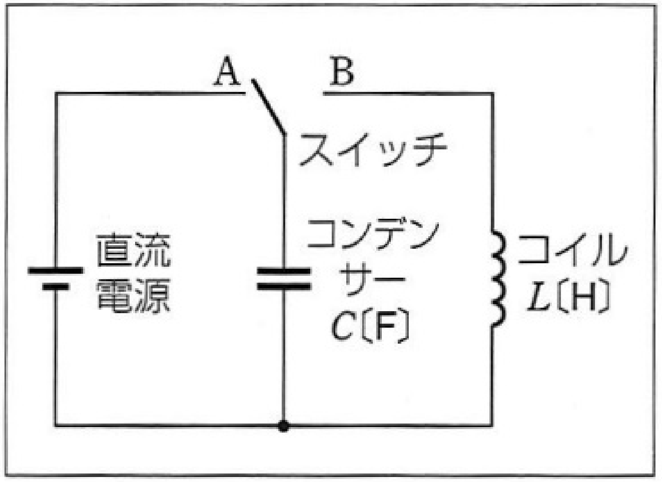
$$E=\int_0^V Q\cdot dv=\int_0^V Cv\cdot dv=\left[\frac{1}{2}Cv^2\right]_0^V=\frac{1}{2}CV^2$$

$$W=\int Vi\cdot dt\,,\quad V=L\frac{di}{dt}$$

Q1：ここで上式のEと下式のWが、いずれも同じ次元を持つことを確認せよ。

$$\therefore\ W=\int L\frac{di}{dt}\cdot i\cdot dt=L\int_0^I i\cdot di=\frac{1}{2}LI^2$$

電気の共振現象(1)



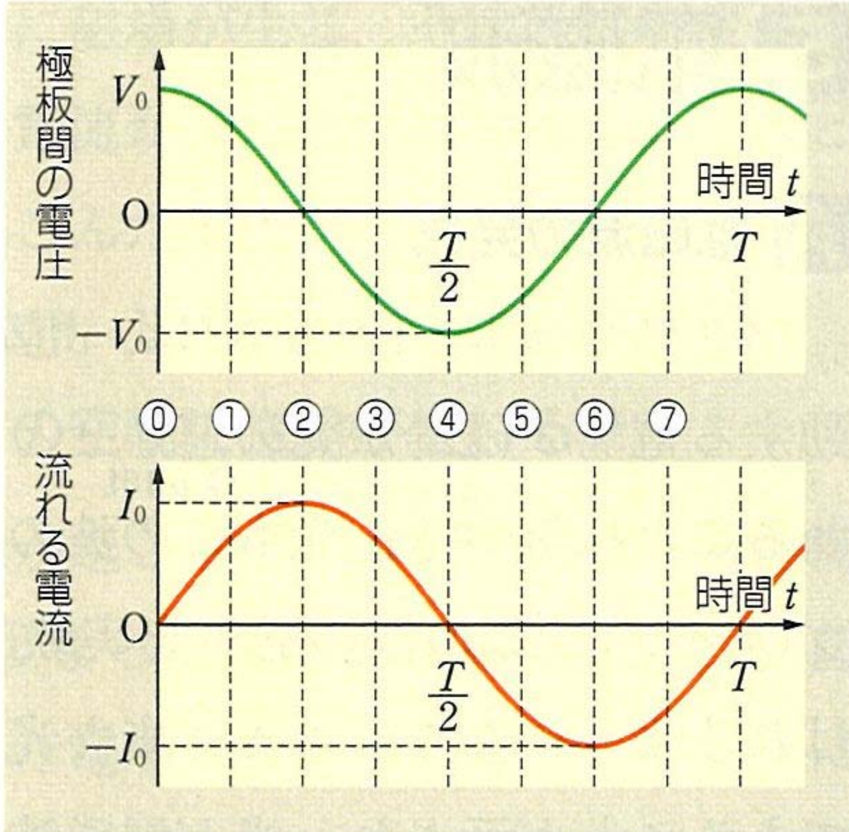
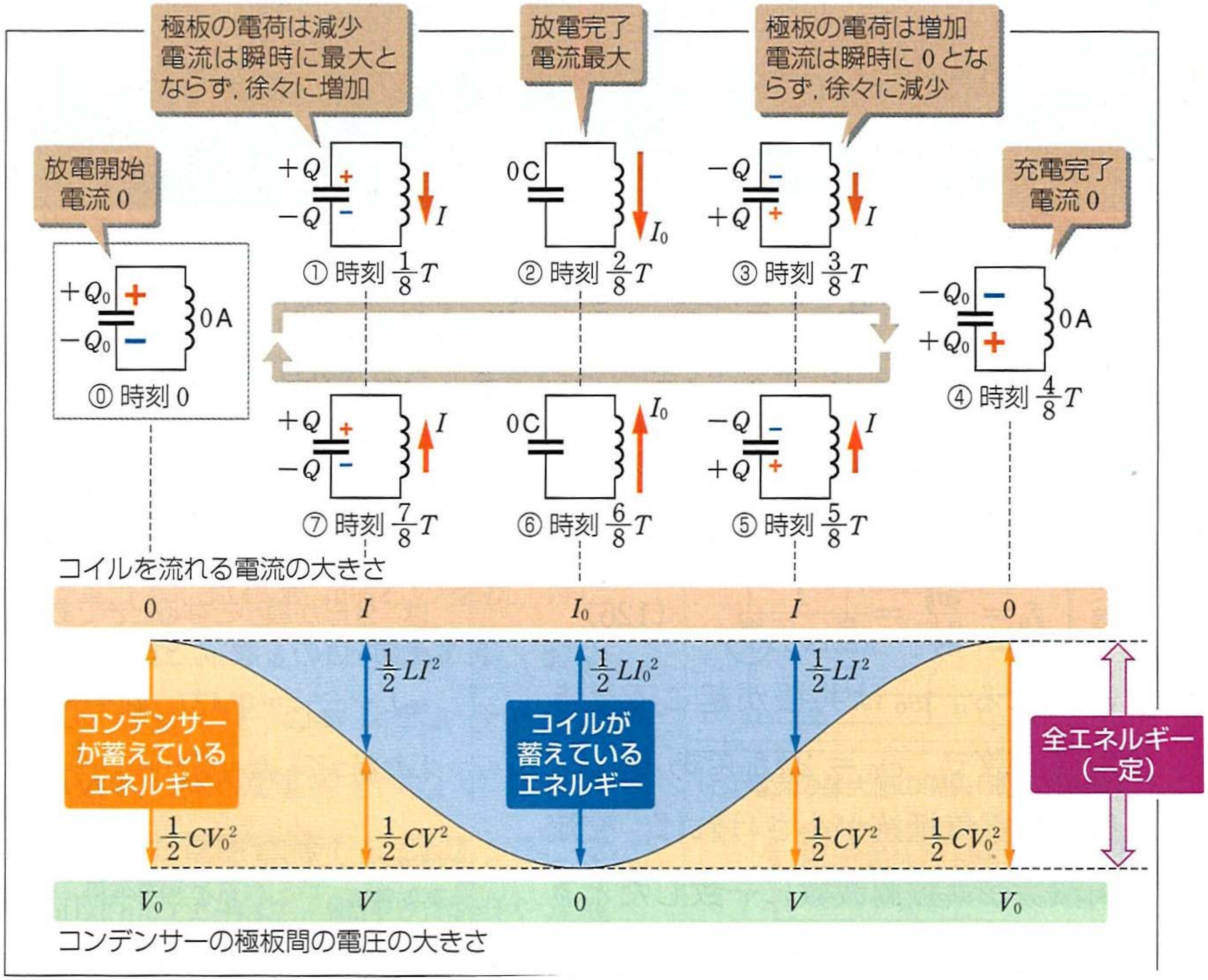


図 123　電気振動のグラフ　電圧は，図122 の⓪，電流は②のときの向きを正とする。

コイル・配線の抵抗が無いと永遠に振動する

高校教科書
「物理」（数研出版）より

電気の共振現象(2)



電圧最大
電流ゼロ

電流最大
電圧ゼロ

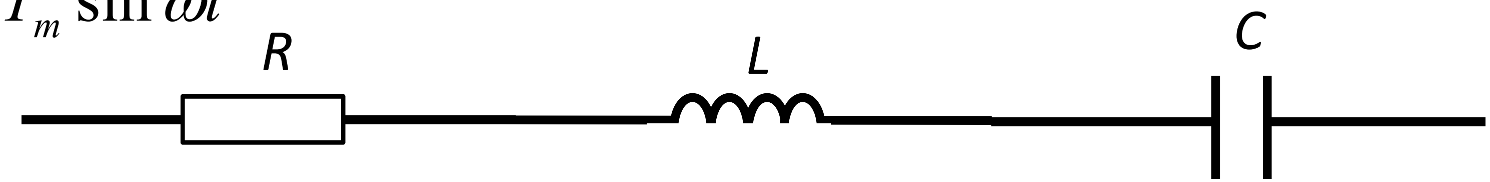
高校教科書
「物理」（数研出版）より

直列共振回路

共振回路とリアクタンス特性

- インピーダンスの実部Rの抵抗成分では、仕事がなされて損失が生じる。
- リアクタンスとは、交流回路で生じる『擬似的な抵抗』で、エネルギー損失は無い。

$$I = i(t) = I_m \sin \omega t$$



$$P_R = \int_0^T i(t)v(t)_R dt = \int_0^T i(t)^2 R dt = I_m{}^2 R \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m{}^2 R}{2} = I_e{}^2 R$$

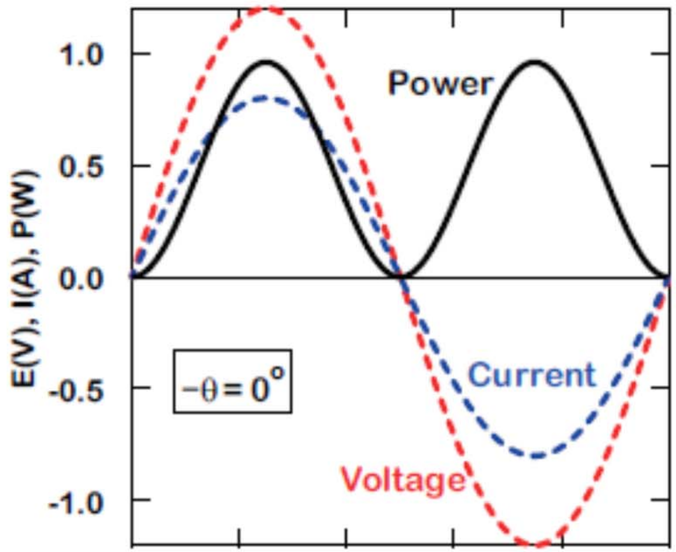
$$P_L = \int_0^T i(t)v(t)_L dt = \omega L I_m{}^2 \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = \omega L I_m{}^2 \int_0^T \frac{(\sin 2\omega t)}{2} dt = 0$$

$$P_C = \int_0^T i(t)v(t)_C dt = 0?$$

Q2:本当にゼロになるか、証明せよ。

各素子の交流電力について

(a) R



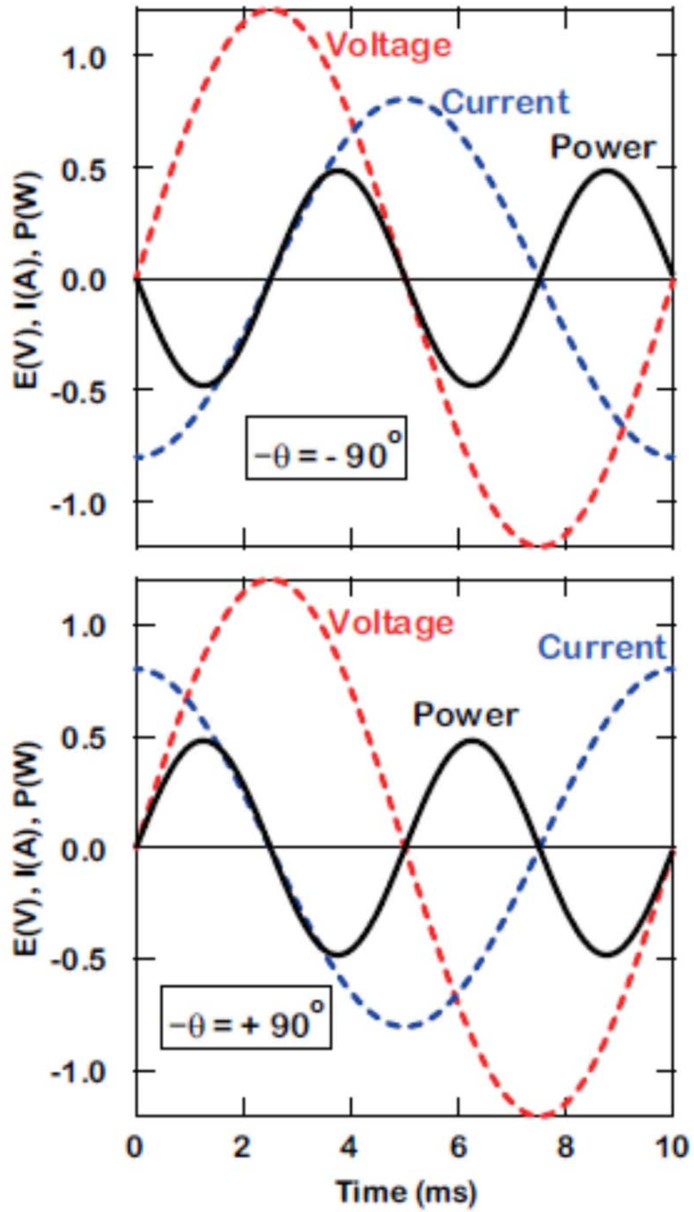
抵抗
➔消費される

(b) L

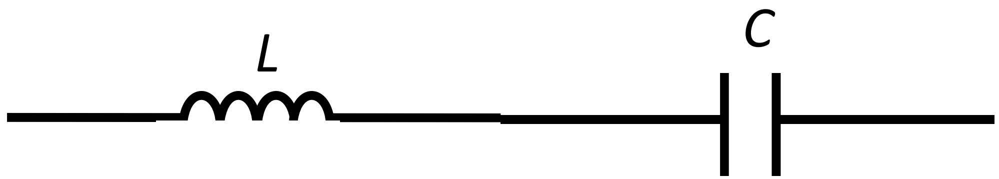
インダクタ
➔消費0

(c) C

キャパシタ
➔消費0



LC直列回路の共振特性



- 直列接続されたLC回路について、インピーダンスZ_Sとリアクタンス成分Xは次のとおり。

正（誘導性リアクタンス）

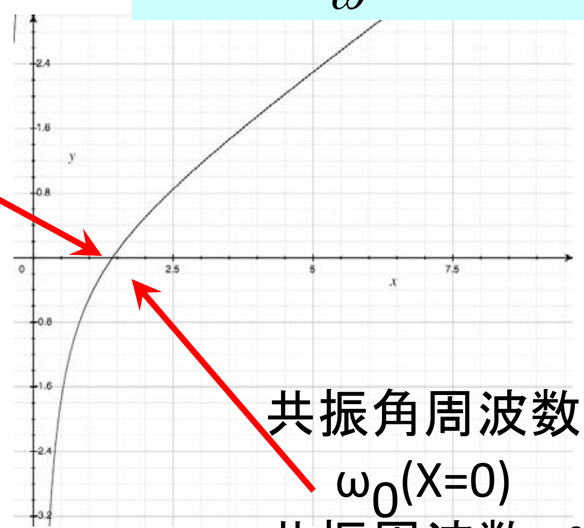
$$Z_S = Z_L + Z_C = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \Leftrightarrow R + jX \therefore X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

負（容量性リアクタンス）

- このZもXも周波数の関数である。
  - リアクタンスXがω軸を切る（X＝0）＝２つのリアクタンスが相殺しあう。
  - すなわち擬似抵抗成分が0で、回路のインピーダンスの絶対値がゼロで、電流値は無限大となる。この時、回路は<u>共振</u>する、という。
    - リアクタンスXの角周波数ω依存性を示した図をリアクタンス線図という。

X はωと$\frac{1}{\omega}$の合成関数

X



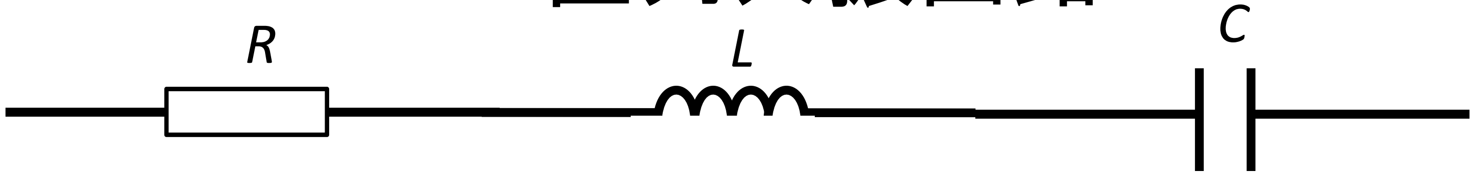
ω

共振角周波数

ω_0(X=0)

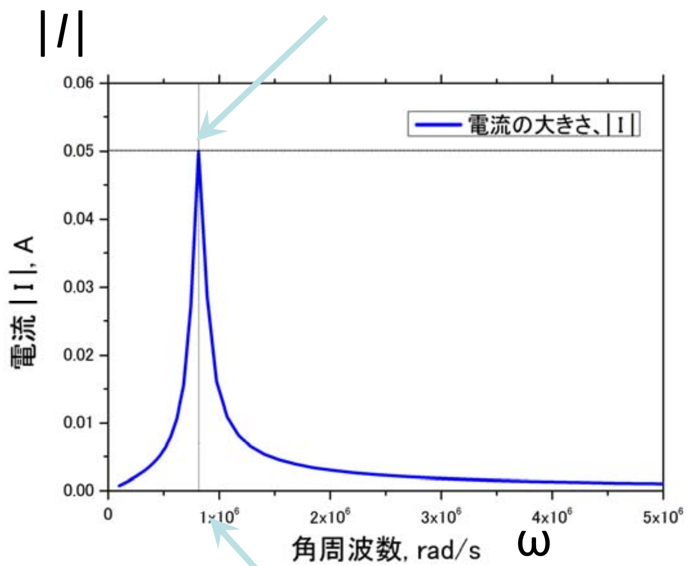
共振周波数 f_0

損失のある、実際の共振回路
LCR直列共振回路



- この回路に周波数ωの交流電圧V(ω)を印加する。その時の電流 *I* は拡張されたオームの法則から求められ、その絶対値のω依存性は右図の通り。

$I_{max}=V(\omega_0)/R$



ω_0 (|*I*|極大)

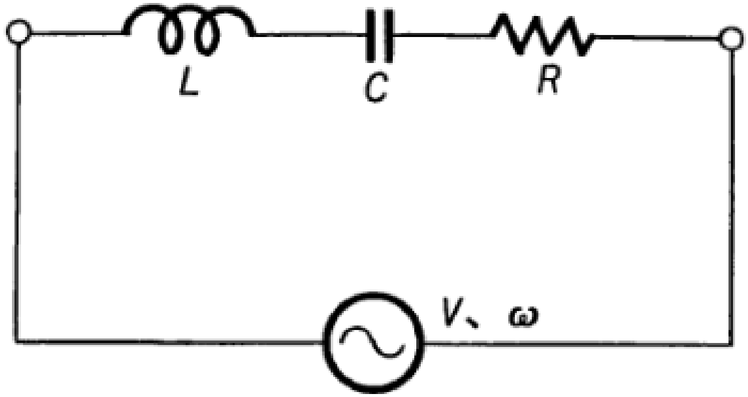
$$I(\omega)=\frac{V(\omega)}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}},\quad \left|I(\omega)\right|=\frac{V(\omega)}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

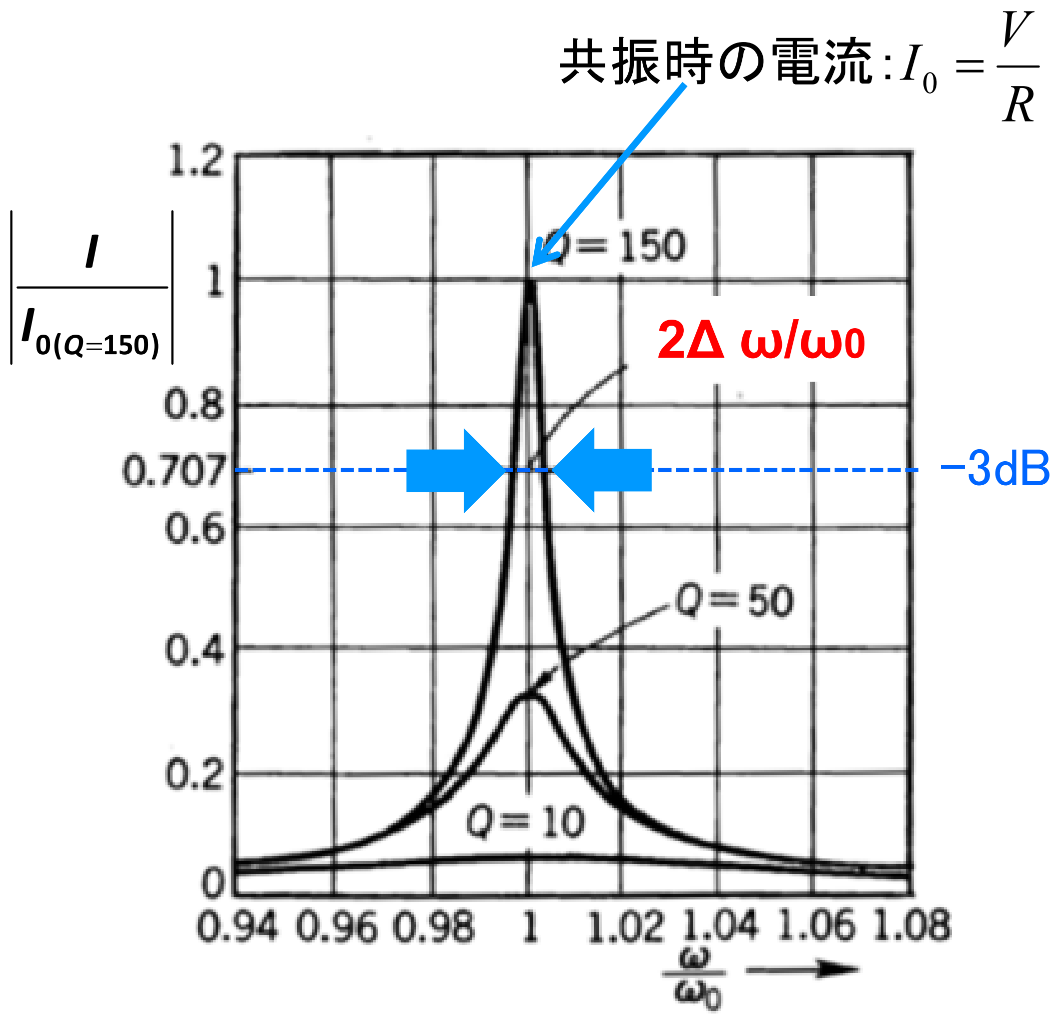
I_{max}でリアクタンス0になるから、$I_{max}=V_{\omega 0}/R$

共振角周波数ω_0における
インダクタ両端電圧とキャパシタ両端電圧(下式)を求めて比べ、
大きさが同じで符号が逆となっていることを確認しなさい。
この時、電圧源からは抵抗だけの回路に見えていることを意味します。

$$V_L=\left|I_{\max}\right|\cdot Z_L,\quad V_C=\left|I_{\max}\right|\cdot Z_C,$$

直列共振回路の特性





共振角周波数: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

電圧拡大率: $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$

実験で求める電圧拡大率: $Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{f_0}{2\Delta f}$

Q大 → 狭帯域
Q小 → 広帯域

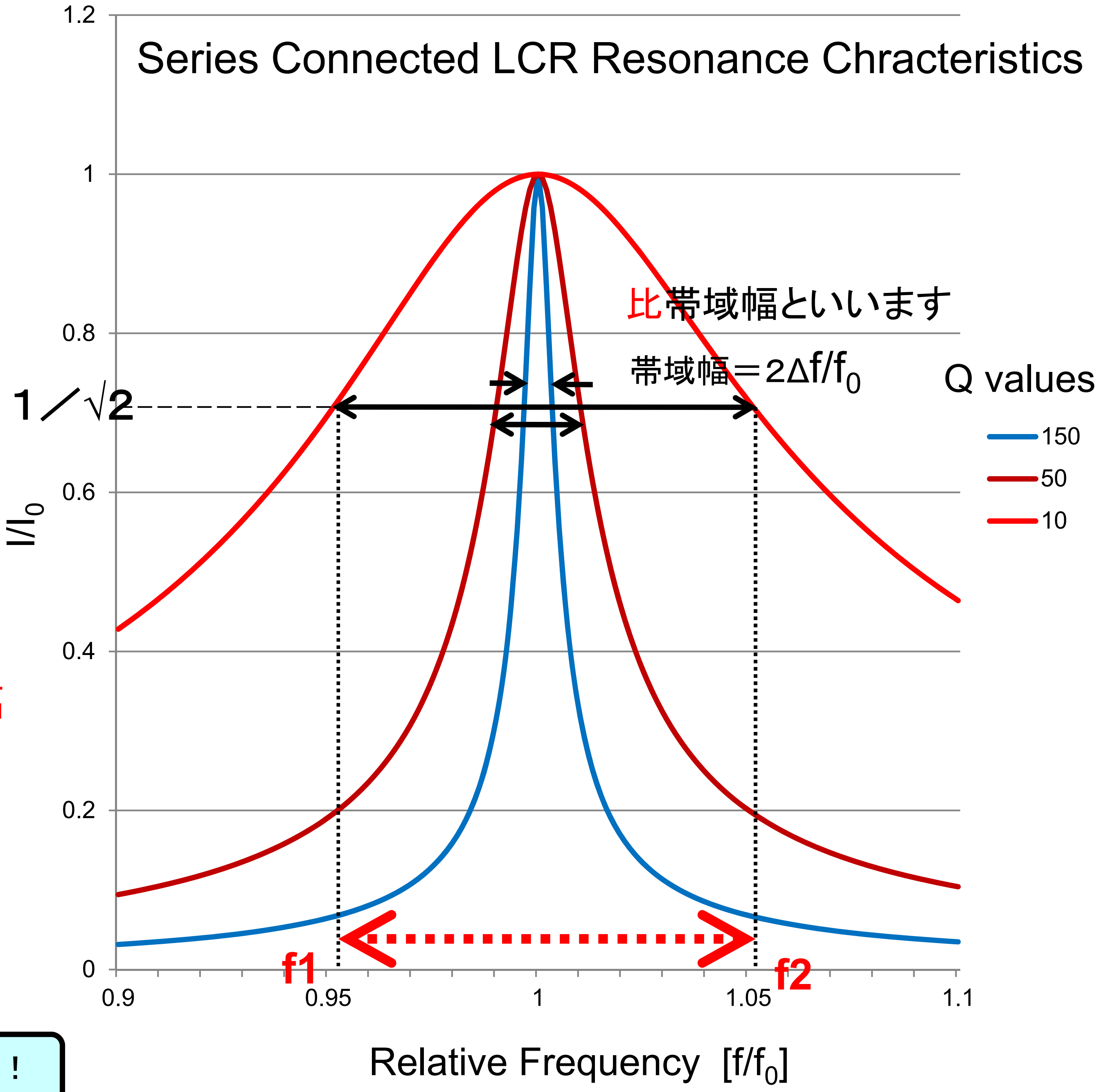
帯域幅(半値幅): 2Δf = f2 – f1

2Δω = 2(ω2 – ω1)
= 2(2πf2 – 2πf1) = 4π(f2 – f1) ≠ 2Δf

帯域幅(bandwidth)＝半値幅（FWHM)

このグラフはそれぞれf_0での電流値 I_0で正規化したものである。

−3dB相当
Powerで半分



Q値と半値幅の関係：

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{f_0}{\boxed{2\Delta f}}$$ 半値幅

半値幅（帯域幅）：

$2\Delta f = f2 - f1$

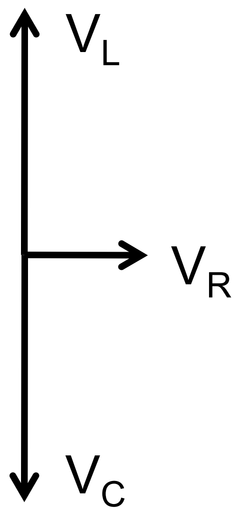
周波数空間で議論すること

参考：水晶振動子のQ値は数万以上！

直列共振回路の振幅特性など

$$V = V_L + V_C + V_R = jVQ - jVQ + V$$

$$\left|I(\omega)\right| = \frac{V(\omega)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



$$V_R = V \quad \propto I,$$

$$V_L = jVQ,$$

$$V_C = -jVQ$$

$$\left|\frac{I}{I_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

- 上図は共振時の回路の状態を複素ベクトルで示したもの。
  - L, Cにかかる電圧は逆位相で振幅は等しいため、完全に打ち消し合っている。
  - QはV(=V_R)に対する$V_{L/C}$の比に相当するため、電圧拡大率と呼ばれる。

抵抗RとQ値の関係式

共振周波数を求める　$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$Q = \dfrac{\omega_0 L}{R} = \dfrac{1}{\omega_0 CR}$ に

$\omega_0 \equiv 2\pi f_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ を代入すると

$Q = \boxed{}$ となる。

$\therefore R = \boxed{}$: Rが決まる

Q3:空白を埋めよ。

直列共振回路測定の流れ

1. 組み合わせるL,C素子のパラメータの確認
   L=10mH(103), C=330pF(331)
2. 共振周波数の算出。
3. Q=100, 10 となるR を算出。
4. 手持ちのRが上記3で求めたRに近い場合は、そのまま、無い場合は支給するので申告する。
5. 手持ちのL,C,Rを元にして実験で用いる回路のQ、半値幅を算出。
6. スライド12のグラフを実周波数でプロットせよ。
   グラフ用紙は方眼用紙をもちいる。
   （共振周波数、半値幅から形を求める。）
7. 共振回路測定　（FG：5V正弦波、オフセット 0V)
   実験値に基づいたグラフから半値幅、Q値を求める。

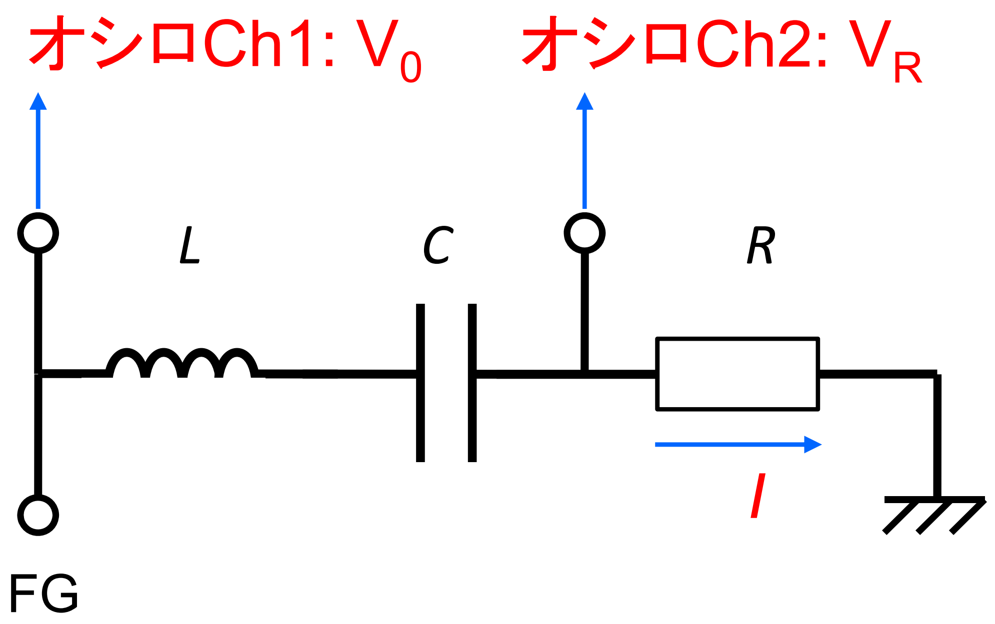
直列共振回路の測定1

Qが異なる2種の回路

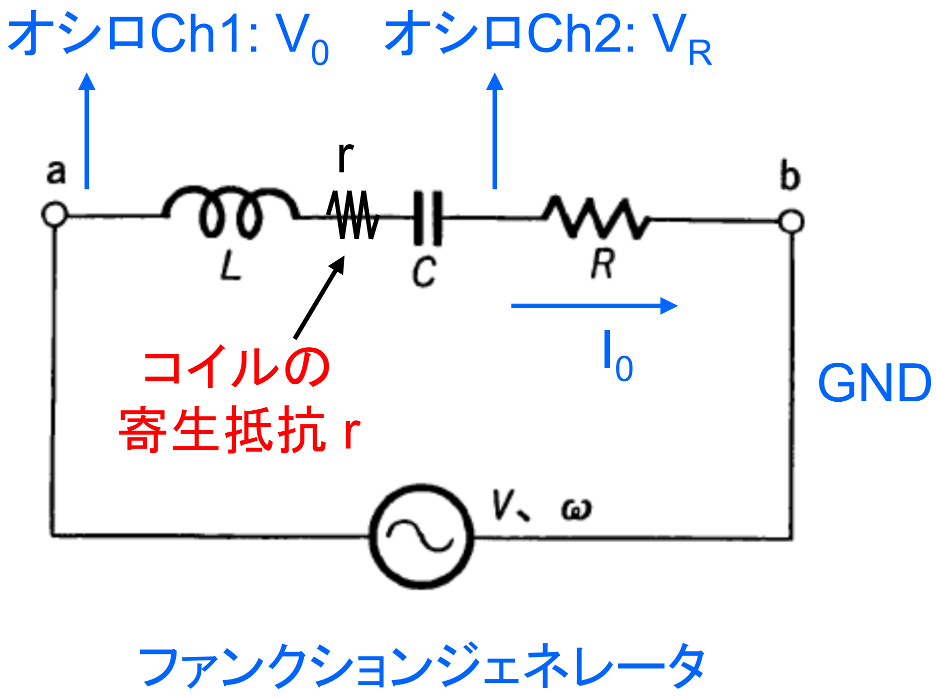
Qが大きい場合は、周波数の刻みは細かく。

1. 周波数を変えて V_0、V_R 、位相差を測定。右の注意に従い、補正値 V'_Rを求める。
   V_R ＝I･R であり、電流を測定していることになる。（グラフは共振点の電流値で正規化するため電圧値のままでよい。）
2. スライド12に相当するグラフ2種（Q＝10，100相当）を、測定値を使って描く。（位相も）
3. グラフからQ値を求めて、LCR値から求められる理論的Q値と比較する。異なる場合、理由を考察。
4. 位相差が、共振点前後で正負入れ替わる現象を、リアクタンスから考察。

注意！：FG の出力電圧は設定より低くなることがあるので、測定後 $V'_R= V_R*5/V_0$の補正を加えよ。



直列共振回路の寄生抵抗



- コイルは理想的には抵抗値0だが、実際には一定の抵抗値を持つ（寄生抵抗）
- 共振時のインピーダンスはR+rとなる

共振時の電流：$I_0 = \dfrac{V_0}{R+r}$

$$V_R(\max) = I_0 R = V_0 \cdot R/(R+r) < V_0$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

左記のQ値の公式では寄生抵抗の存在は考慮されていない

あらかじめL,C,Rから求めたQ値と、実測で求めたQ値のずれを寄生抵抗により定量的に説明できる。

寄生抵抗 rを考慮した理論式

$$|I(\omega)| = \frac{V_0}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \underline{\frac{V_0}{R+r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{+r}{}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

ピーク電流 I_0

$$\left|\frac{I}{I_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{+r}{}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

;Q_{+r}の式, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $I_0 = \frac{V_0}{R+r}$を用いて変形

ただし, $\underline{Q_{+r} = \frac{\omega_0 L}{R+r} = \frac{1}{\omega_0 C(R+r)}}$ （コイルの寄生抵抗rを考慮したQ値）

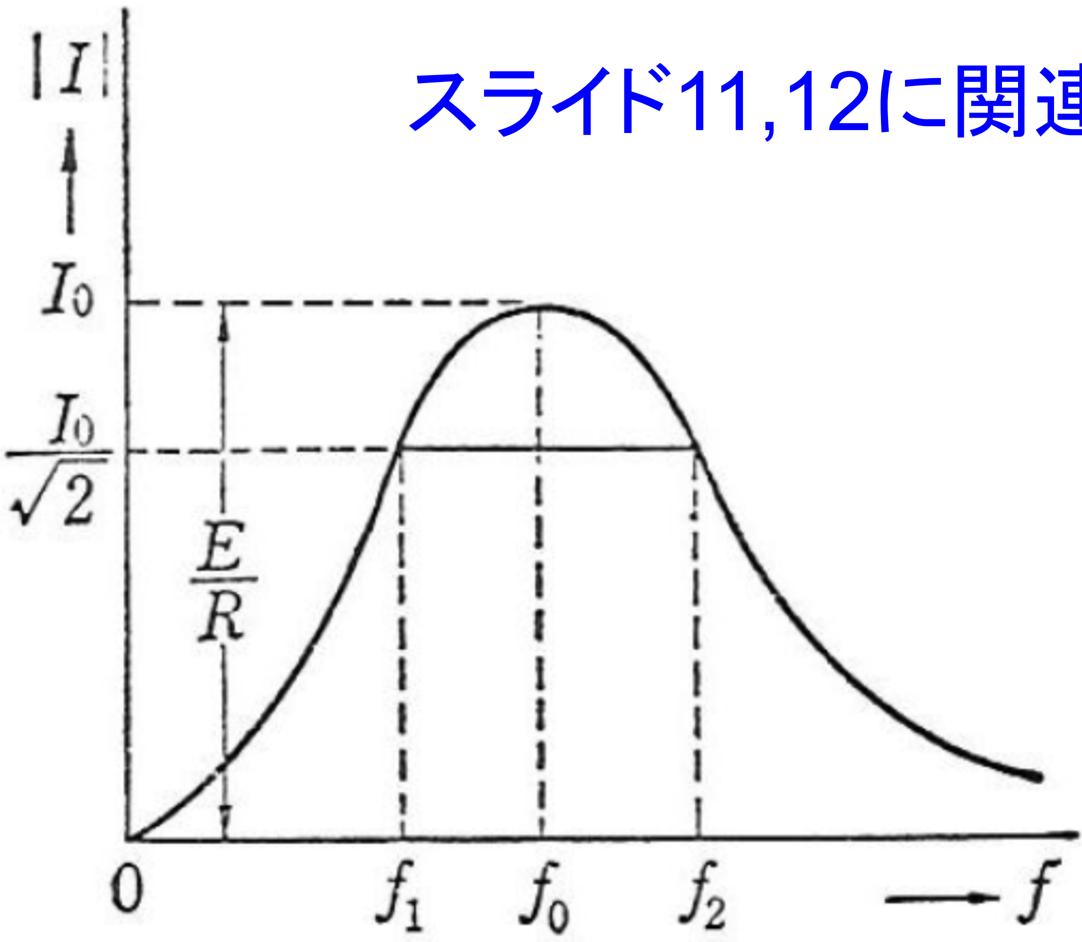
$$|V_R| = |I|R = \underline{\frac{R}{R+r} \cdot V_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{+r}{}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{V_{R(\max)}}{\sqrt{1 + Q_{+r}{}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

ピーク電圧 $V_{R(max)}$

直列共振回路のQ値の求め方（実験）

スライド11,12に関連して

IはV_R=RIと
読み替えてよい



グラフより半値幅f_2-f_1
を求めて(1)式で計算：

$$Q_{\exp} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{f_0}{2\Delta f} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \qquad (1)$$

得られたQ_{exp}よりコイルの寄生抵抗rを算出

$$Q_{+r} = \frac{\omega_0 L}{R+r} = \frac{1}{\omega_0 C(R+r)}$$ （rはコイルの寄生抵抗）

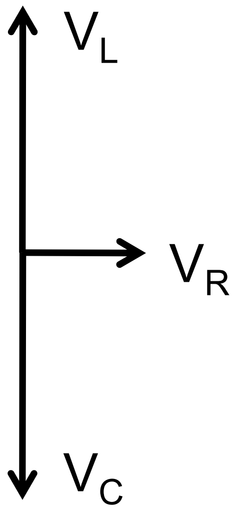
$Q_{exp} = Q_{+r}$とおいて、

$$Q_{exp} = \frac{\omega_0 L}{R+r}$$ 又は $$Q_{exp} = \frac{1}{\omega_0 C(R+r)}$$

$$R + r = \frac{\omega_0 L}{Q_{exp}}$$ 又は $$R + r = \frac{1}{\omega_0 C Q_{exp}}$$

$$r = \frac{\omega_0 L}{Q_{exp}} - R$$ 又は $$r = \frac{1}{\omega_0 C Q_{exp}} - R$$

各素子の位相と振幅の関係



$$V_R = V,$$
$$V_L = jVQ,$$
$$V_C = -jVQ$$

- 上図は共振時の回路の状態を複素ベクトルで示したもの。
  - L, Cにかかる電圧は逆位相で振幅は等しいため、完全に打ち消し合っている。
  - QはV(=V_R)に対する$V_{L/C}$の比に相当するため、電圧拡大率と呼ばれる。

直列共振回路の測定2

Q大の回路についてのみ。

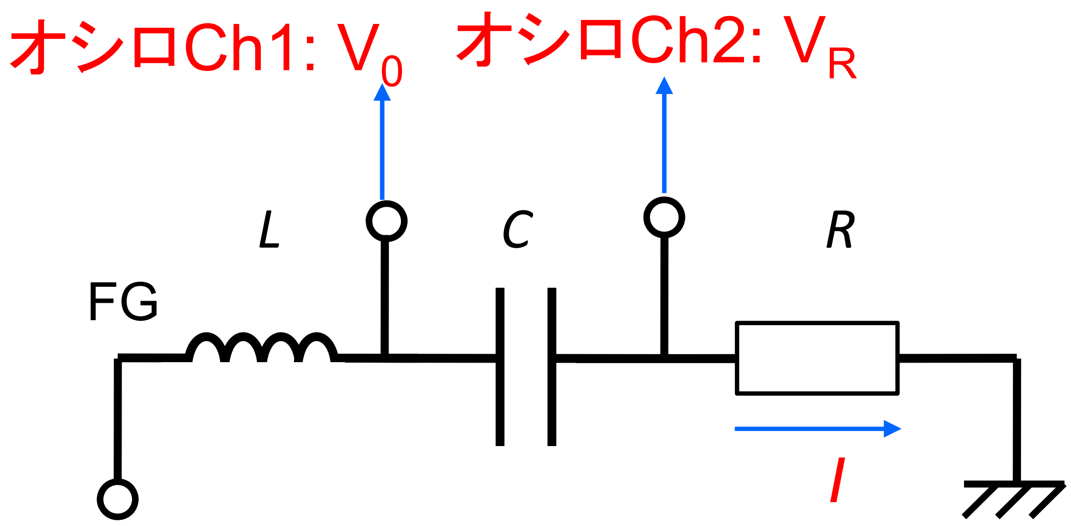
周波数は共振点近傍のみ。グラフ不要

- 周波数を変えたとき、V_0 と V_R の位相の関係を観察しなさい。具体的には、電圧と位相の数値を記録しなさい。
  そして、そうなる理由を理論的に説明しなさい。

  オシロCh1 V_0 は、V_C と V_R の和になるが、V_R の位相は、電流と一致する(＝0)。
  <u>Q値が十分大きければ、</u>
  V_0 の位相は V_C と同じになる。

- V_0 が、FGの出力電圧よりも大きくなる。なぜか？

注意！:FG の出力電圧は設定より低くなることがあるが、位相のみに注目せよ。

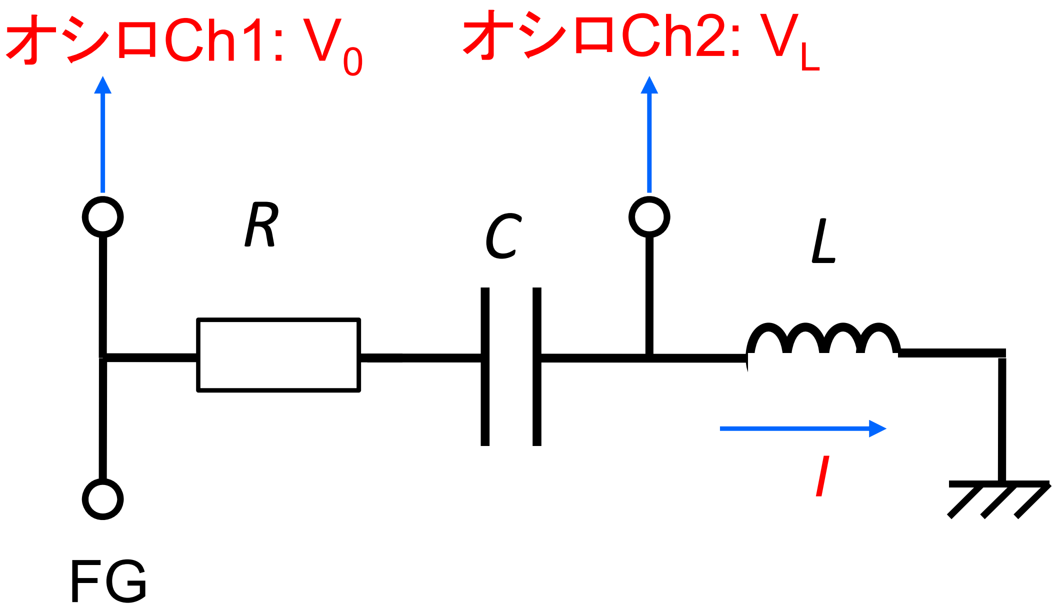


直列共振回路の測定3

Q大の回路についてのみ。

周波数は共振点近傍のみ。グラフ不要

- V_L を共振周波数付近で測定せよ。
  共振点でのV_Lと、理論的Q値、実測Q値の関係は？
  （参考：スライド13）
- V_Lが、FGの出力電圧V_0よりも大きくなる。なぜか？



並列共振回路

具体的な測定法はスライド30以降を参照

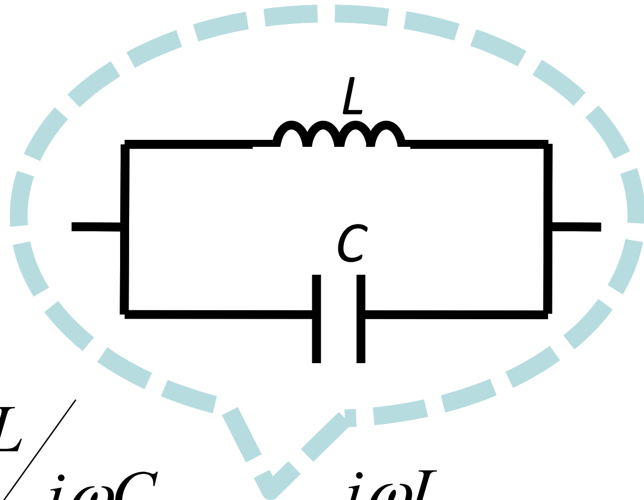
LC直列・並列回路の共振特性

- リアクタンス線図でX=0を満たす時、
  角周波数ω_0を共振角周波数、周波数f_0を共振周波数、と呼ぶ。
- 直列共振回路のインピーダンスZ_S (=リアクタンス)は、
  共振周波数でゼロに！

$$Z_S = 0 + Z_L + Z_C = j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

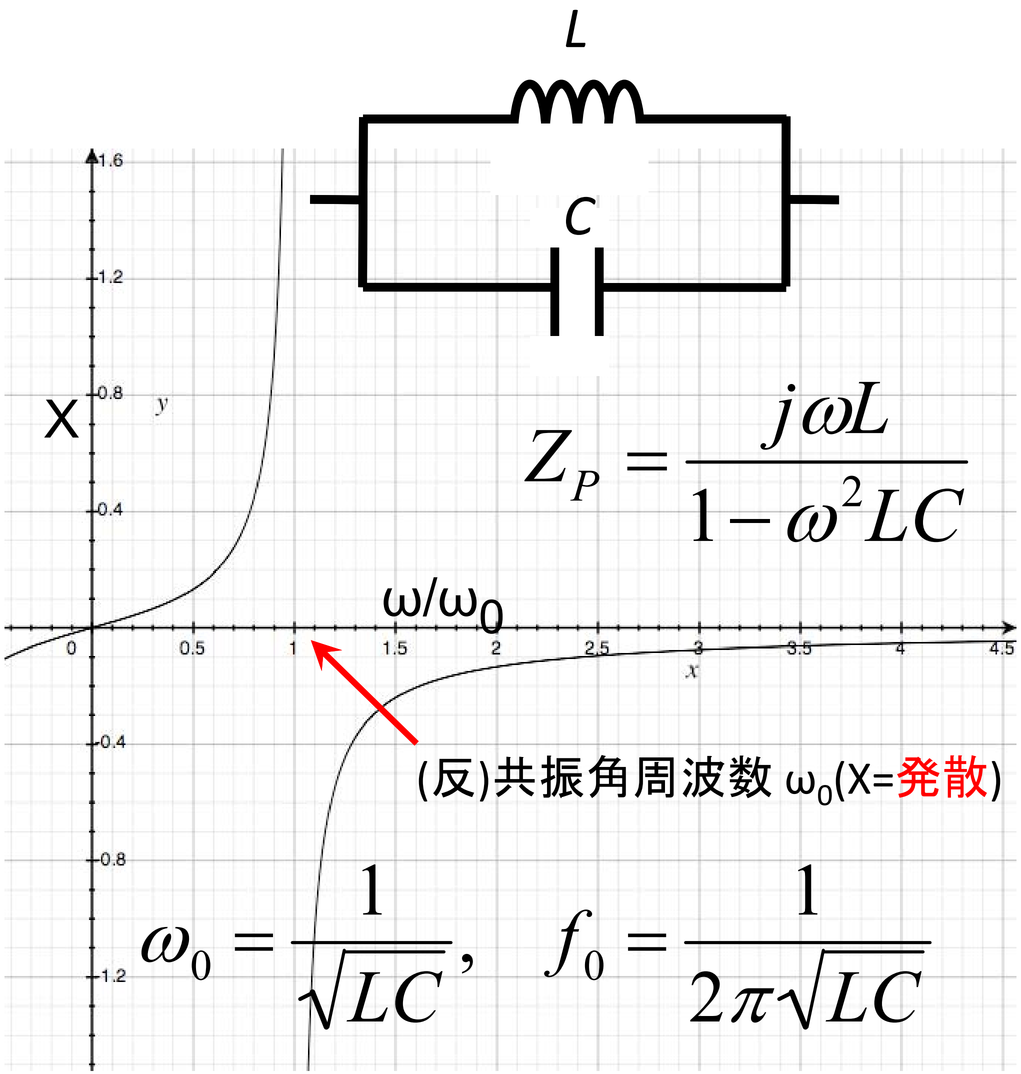
$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- 一方、並列回路（右図）において、
  インピーダンスZ_Pは、共振周波数で∞に！



$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \quad \Rightarrow \quad Z_P = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{j\omega L / j\omega C}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

LC(R)並列共振回路



$$Z_P = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

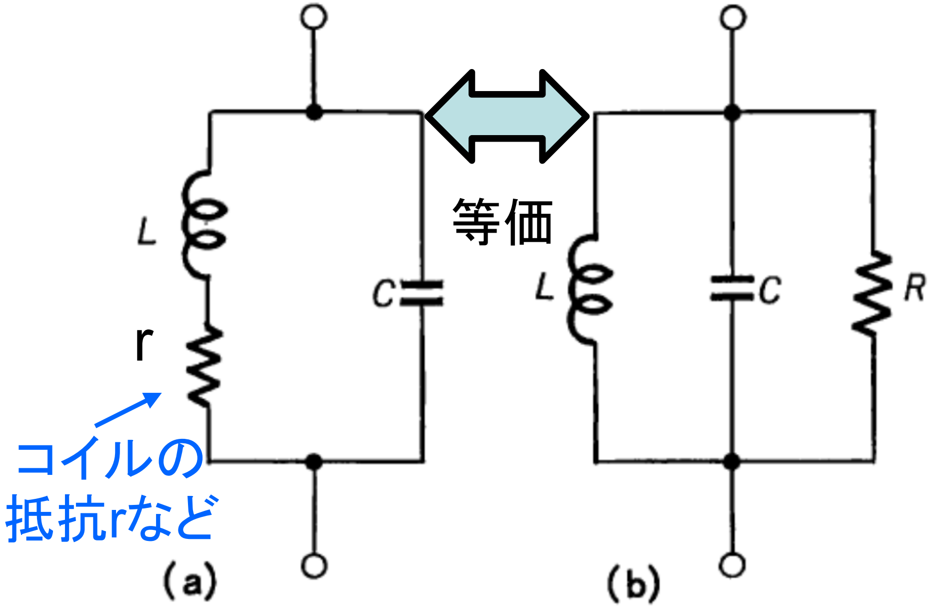
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- LC並列接続回路の合成インピーダンスZpとリアクタンス線図
  - ある角周波数でリアクタンスは発散する
  - (反)共振と呼ぶ
  - 並列共振角周波数ω_0、並列共振周波数f_0は、直列共振回路と同じ式で表現できる

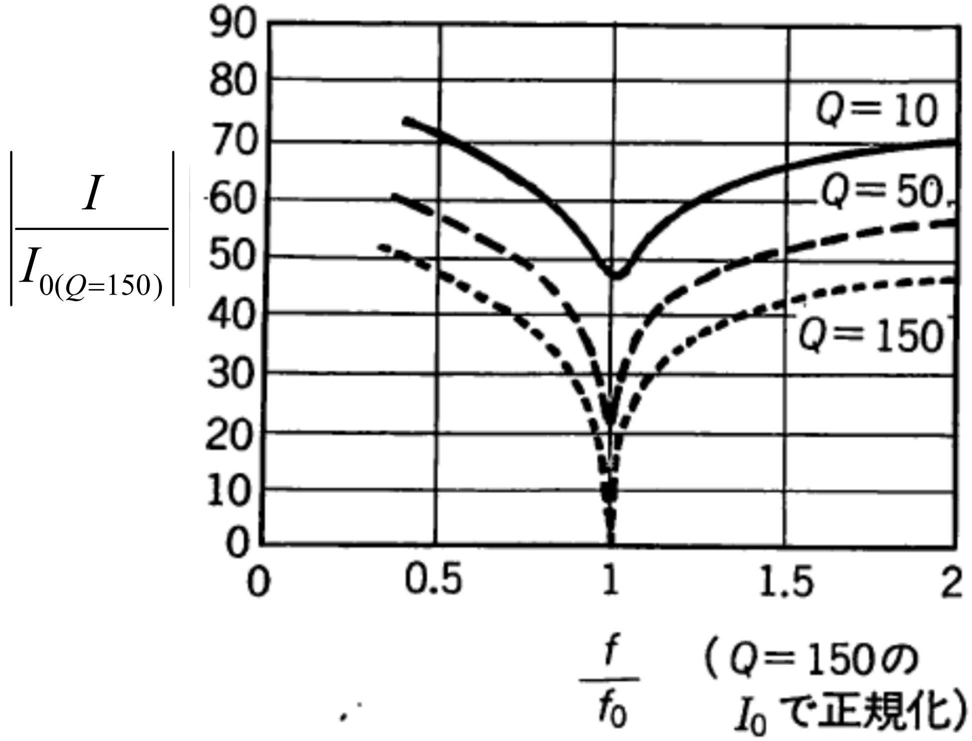
物理的意味
共振点では、
インピーダンス無限大！！

実際の並列共振回路(LCR)

$$R \cong Q_a^2 r = \frac{(\omega_0 L)^2}{r} = \frac{L}{rC}$$



第10.7図　並列振回路



第10.8図　並列共振回路の共振曲線

回路(a)　$Q_a = \dfrac{\omega_0 L}{r} = \dfrac{1}{\omega_0 Cr}$　:r小が良い

回路(b)　$Q_b = \dfrac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$　:R大が良い

$$= \frac{R}{Q_a r}$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}}$$

実際の並列共振回路 (続き)

$$\omega_0 \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \cdots\cdots(10.20)$$

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \fallingdotseq \frac{\omega_0 L}{r} \fallingdotseq \frac{1}{\omega_0 C r} \quad \cdots\cdots(10.21)$$

直列共振と同じ

インピーダンス　Q^2倍!!

$$Z_0 = r\left(1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{r^2}\right) = r\left(1 + Q^2\right) \fallingdotseq rQ^2 \quad \cdots(10.22)$$

$$I_0 = \frac{V}{Z_0} = \frac{V}{rQ^2} \quad \cdots\cdots(10.23)$$

$$i_L = \frac{V}{j\,\omega_0 L} = -j\,V\frac{1}{\omega_0 L} = -j\,V\frac{1}{Qr} = -j\,I_0 Q \quad \cdots\cdots(10.24)$$

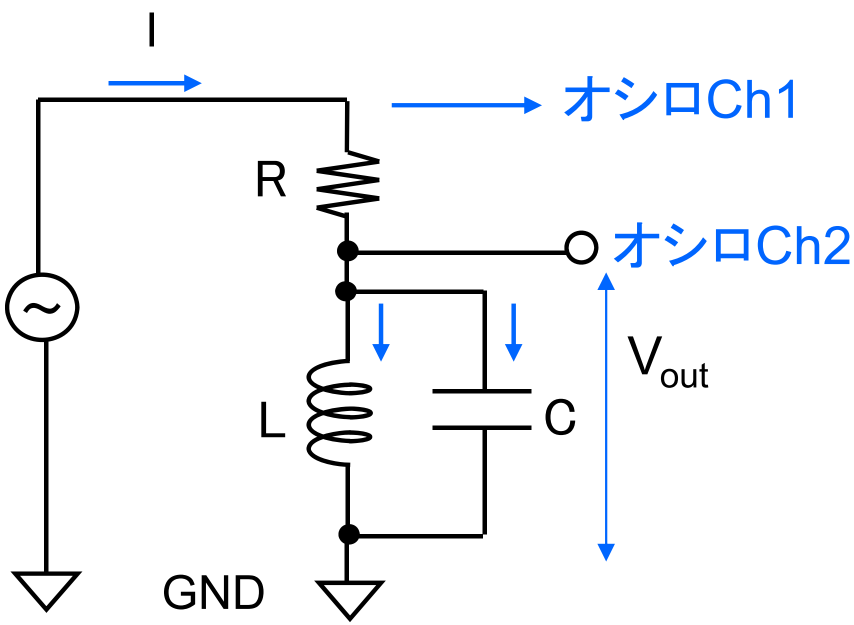
内部の電流値Q倍!!

$$i_C = V \cdot j\,\omega_0 C = j\,V\frac{1}{Qr} = j\,I_0 Q \quad \cdots\cdots(10.25)$$

オプション課題（並列共振回路）

インダクタの寄生抵抗の影響を含めたQ値の
理論的な解析はややハイレベルなので、
3年生の「電子回路」（担当：東原）で実施

オプション課題：並列共振回路の測定法

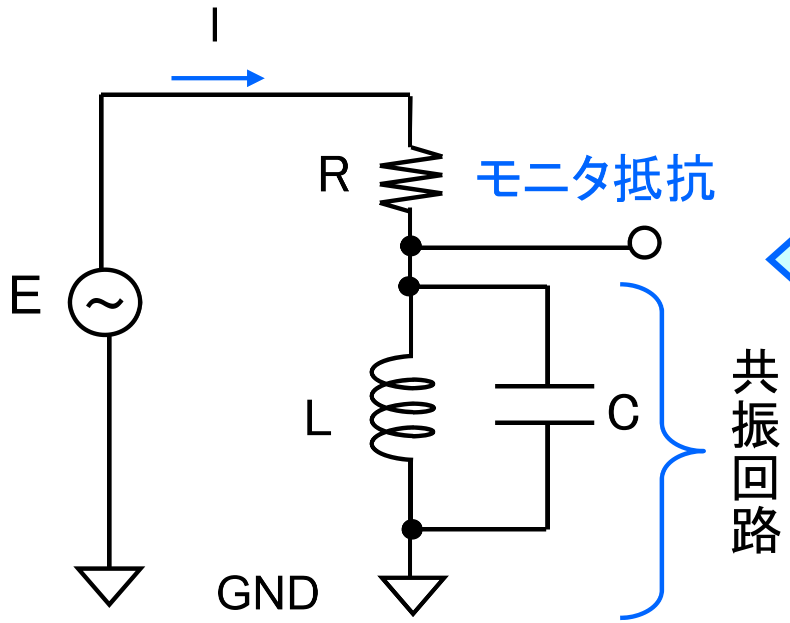


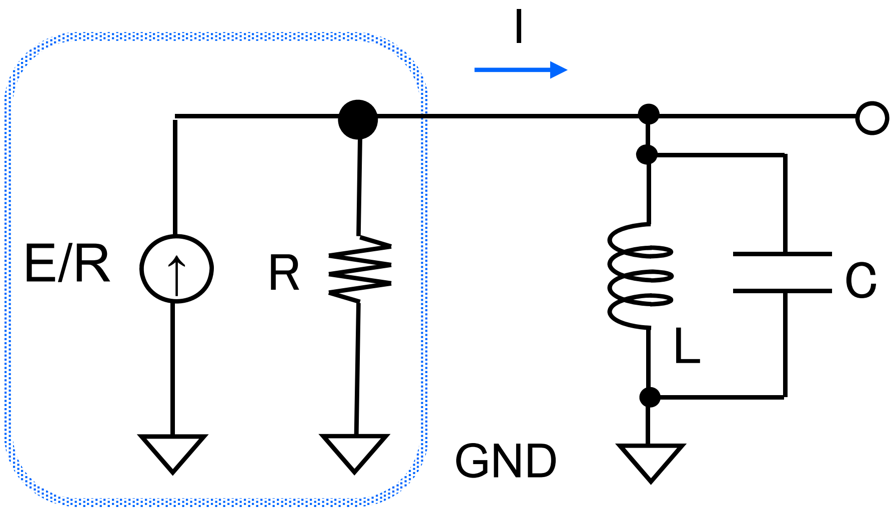
☆共振時は流れ込む電流が最小となるので、モニタ用に直列抵抗Rを入れて電圧変化に変換する。
➔直列共振回路と同様に、上に凸のグラフになる。

☆Q値はRに比例：理由は次ページに
実験では以下の値とする
(1) R=1MΩ（Q大の場合）、
(2) R=100kΩ（Q小の場合）

➔Rを考慮したQは次ページで説明

モニタ抵抗RのQ値への影響





☆並列共振回路と並列にRが入り、
スライド28の回路(b)に帰着
➔Rが無限大以外でQ値は減少

テブナン／ノートンの定理
を用いて電圧源と抵抗を
電流源と並列抵抗に変換
➔電源の等価変換

$$Q_L = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$$

理論式にはこのQ_Lの式を用いる。

並列共振回路の振幅特性(理論式)

☆共振周波数$f_0=\omega_0/2\pi$: 直列共振回路と同じ

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

☆共振周波数$f_0=\omega_0/2\pi$での電圧を基準にした出力電圧の比

f_0での出力電圧をV_0とする。

$$\left|\frac{V}{V_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+Q_L{}^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

ここで、$Q_L = \dfrac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$

➔Q値に注意すれば直列共振と同じ

レポートの内容（直列/並列共振回路）

第三者が読んで、同じことを再現できるだけの情報が不可欠。
レポート採点対象は、1-6の全要素が揃っているもののみ。

タイトル：「LCR直列/並列共振回路」

1.　目的　直列/並列共振回路の特性の理解

2.　理論（原理）　ハンドアウト、教科書を参考に直列／並列共振回路特性を
理論的に説明。　自分が勉強したと言うことをアピールする！

3./4./5. 実験

直列共振回路の測定1

3.実験の説明（回路図、素子パラメータ、測定機器など）

4.実験結果　　データ（表、グラフ）

5.考察

説明、結果、考察が繋がってOK

注）測定したQ値と理論的Q値について寄生抵抗を考慮した一般式を議論し、
そこから寄生抵抗（L の抵抗成分）を導き、LCRメータで測定したLの抵抗値と比較せよ。

直列共振回路の測定2　上と同様の3点　結果は観察記録（記述描写・写真・スケッチ）で良い

直列共振回路の測定3　上と同様の3点　結果は観察記録（記述描写・写真・スケッチ）で良い

結論・まとめ　　7.　参考資料　　番外　感想

オプション：　並列共振回路で、測定1に相当するもの