コンピュータ理工学実験

第3単元（1/2/3回）：RC回路（フィルタ）

概要：交流回路(インピーダンス、特性周波数）の理解

◆ CRによるフィルター回路（ハイパス、ローパス）

- 理論的背景　あらかじめグラフを書いてみる
- 周波数特性の測定
- 過渡応答特性の測定

実験許可条件

・実験ノート・電卓を各自準備すること

・ハンドアウトなどの資料、グラフ用紙（メモのグラフなど）はバインダへ
(過去の資料も含めてまとめて手元で見れるようにする）

教科書対応個所

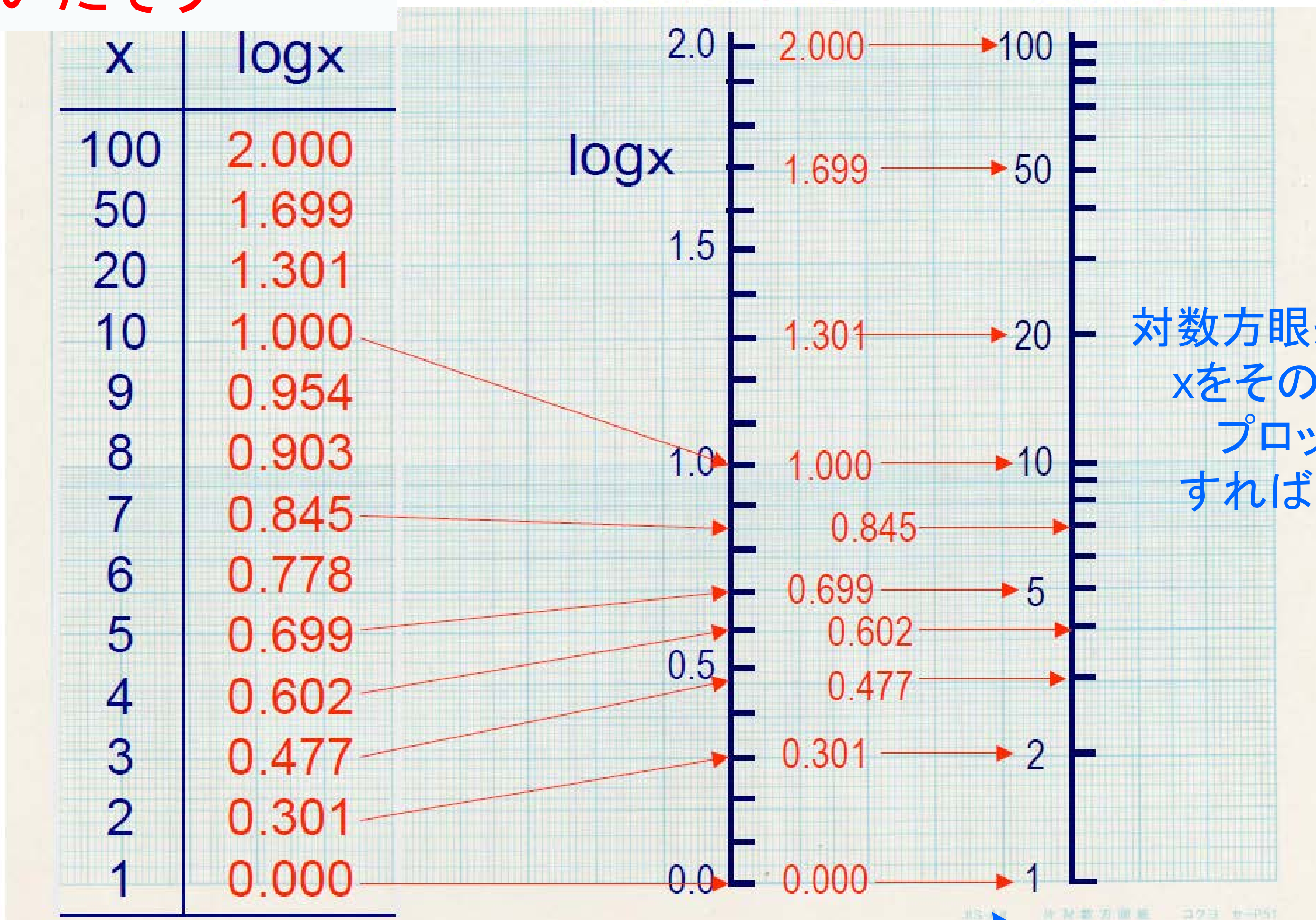
- エッセンシャル電気回路
  - ４．４　回路の伝送特性と周波数特性[1]のみ

- ３週掛けて行う。１週で座学、２週で実験。
  - ハイパス／ローパスフィルタおよび
    過渡応答の実験とレポート作成。

対数を取ると直線になる関数は、グラフの軸を対数目盛にすると特徴が読み取りやすい。線形（等間隔）目盛と違って、対数を取る作業をグラフ用紙がやってくれている。

単元1 を思いだそう

等間隔目盛　　対数目盛



対数方眼紙では
xをそのまま
プロット
すればよい

片対数方眼紙

dB（デシベル）とは

$$dB = 10Log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10Log_{10}\frac{V_2^2}{V_1^2} = 10Log_{10}\frac{I_2^2}{I_1^2}$$

$$= 20Log_{10}\frac{V_2}{V_1} = 20Log_{10}\frac{I_2}{I_1}$$

- 単位ではない。比較するだけの倍率表示。
  - ある基準に対する値の大小関係を表現するのに用いる
  - 基準に対する比の対数をとる
  - 電気回路の場合、電力の比を考える
  - 他に、音の大きさなどの表現でも用いる
  - 基本となるべき数量を省略し、+5dB, -2dB などと表現する

倍率（比）	電圧比	電力比
1倍	0.00dB	0.00dB
2倍	6.02dB	3.01dB
3倍	9.54dB	4.77dB
4倍	12.04dB	6.02dB
5倍	13.98dB	6.99dB
8倍	18.06dB	9.03dB
10倍	20.00dB	10.00dB
16倍	24.08dB	12.04dB
50倍	33.98dB	16.99dB
100倍	40.00dB	20.00dB

電力比、電圧比のdB表記

$$\text{デシベル}(dB)=10\cdot\log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$ 【電力の比】

P_1とP_2は電力(W)を表す。

電力は抵抗値が同じであれば、電圧の2乗に比例するので、

$$\text{デシベル}(dB)=10\cdot\log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)=10\cdot\log\left(\frac{{V_2}^2}{{V_1}^2}\right)=20\cdot\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$ 【電圧の比】

また、抵抗値が同じであれば、電流の2乗にも比例するので、

$$\text{デシベル}(dB)=10\cdot\log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)=10\cdot\log\left(\frac{{I_2}^2}{{I_1}^2}\right)=20\cdot\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$ 【電流の比】

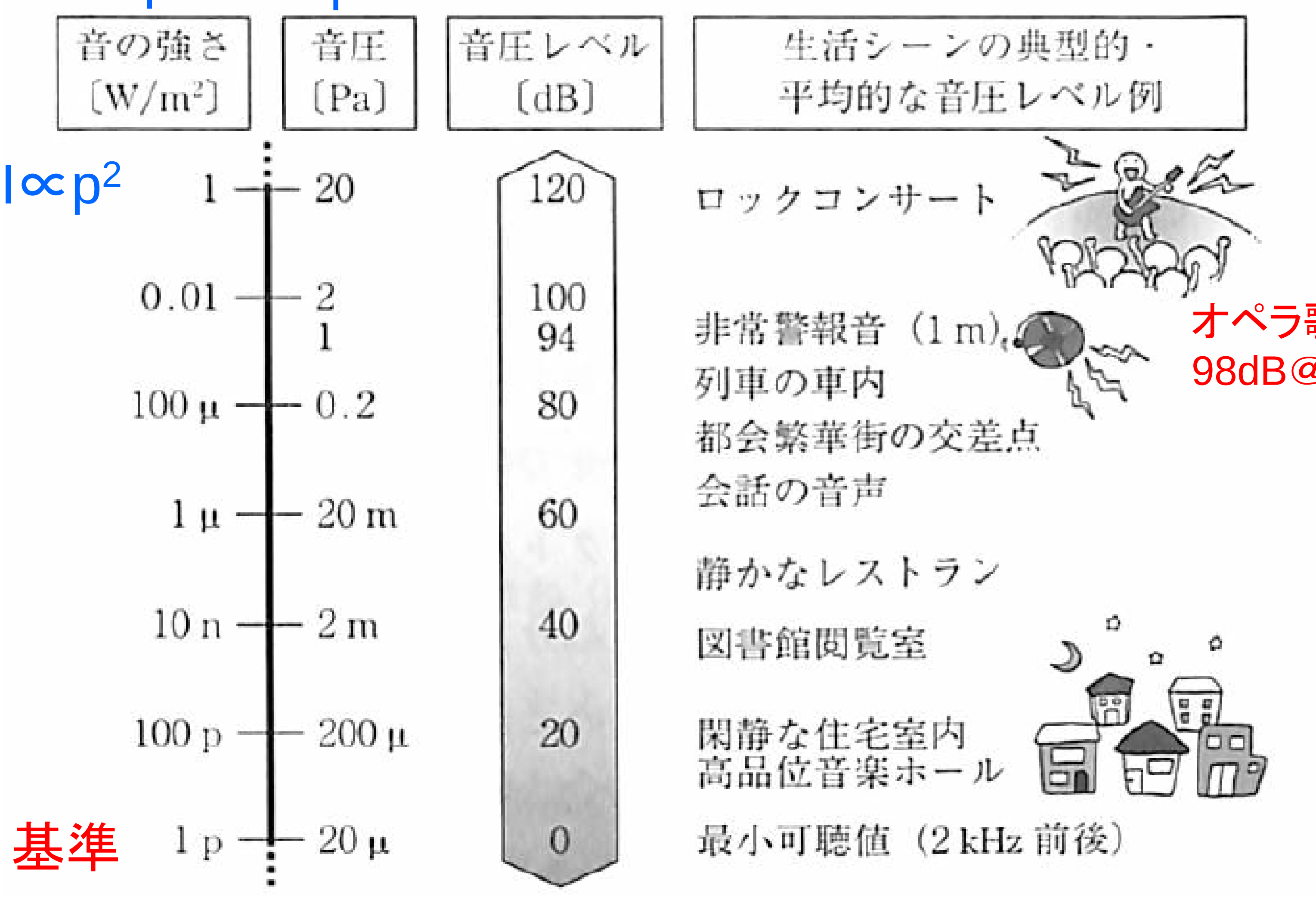
音の場合も人間の感覚的には大きさが比例して聞こえないので,
パワーの比の常用対数の10倍で定義するデシベル(dB)表示が適する。

コラム

音量とデシベル値

I　　p

$I \propto p^2$



オペラ歌手の歌声：
98dB＠ホールの後ろ

基準

0dB=1pW/m²

図 1.4　音の強さ，音圧と音圧レベル（1-A）

音響学入門
（コロナ社）

インピーダンスの復習

今回は、抵抗R＋コイルL、または抵抗R＋コンデンサCを直列接続したもの。
交流電流Iを流す。直列なので、各素子両端電圧の和が全体の電圧。

$$V = V_R + V_C$$

$$= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) I \quad \Leftrightarrow \quad \left(Z_R + Z_C \right) I = ZI$$

$$Z = Z_R + Z_C = R - j\left(\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$V = V_R + V_L$$

$$= \left(R + j\omega L \right) I \quad \Leftrightarrow \quad \left(Z_R + Z_L \right) I = ZI$$

$$Z = Z_R + Z_L = R + j\omega L$$

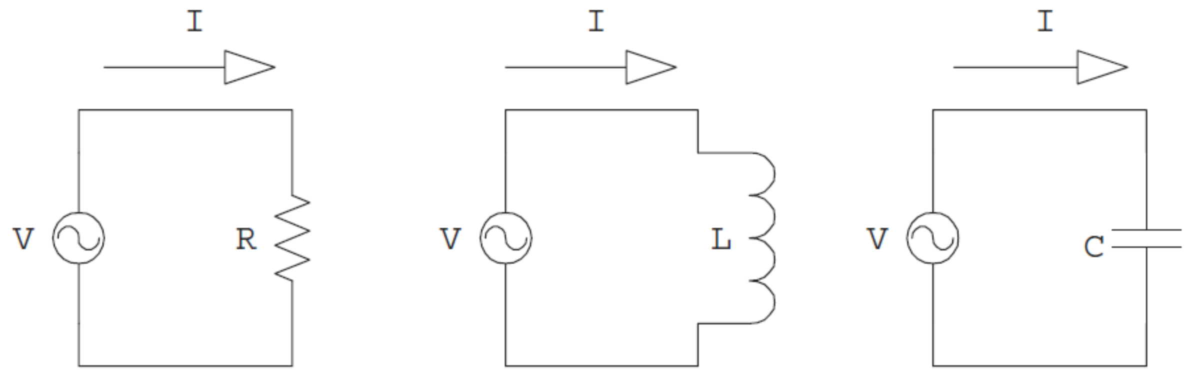
角周波数ω：[rad/sec] $\omega = 2\pi f$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

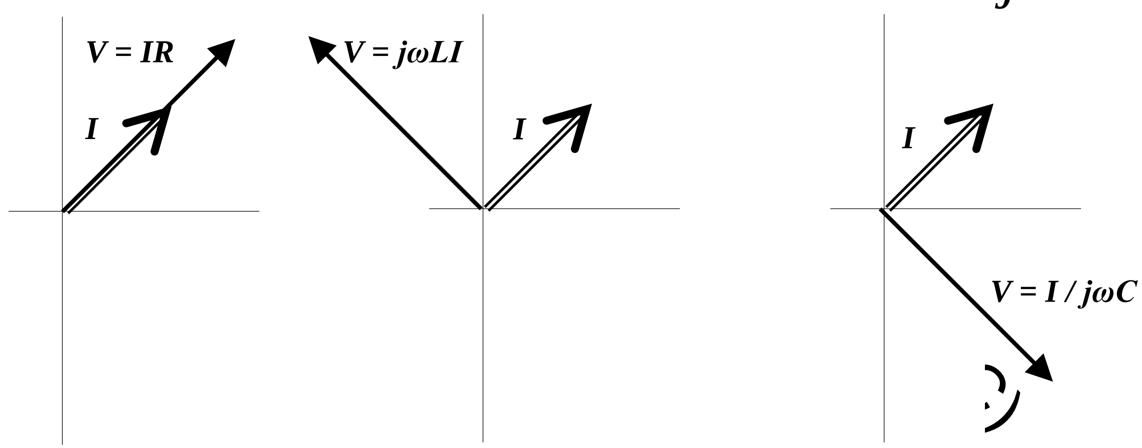
Z_Rは実数、Z_C、Z_L は虚数＞＞＞ 電圧/電流の位相が異なる！！
電圧振幅は、それぞれの絶対値に比例する。（Rの分圧と同じ）

復習：複素平面で考える

$I = I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m \angle \phi$　とすると



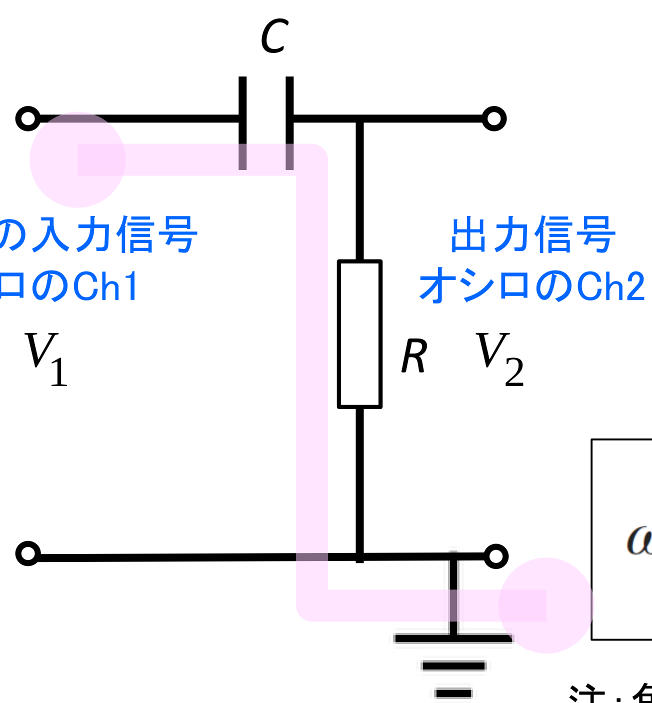
$V = IR$　　$V = j\omega LI$　　$V = \dfrac{I}{j\omega C}$



(a)　(b)　(c)

ハイパスフィルタ

抵抗R＋コンデンサCを直列接続したもの。交流電流Iを流す。
直列なので、各素子両端電圧の和が全体の電圧。



$$V_1 = V_R + V_C$$

$$= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) I \quad = \left(Z_R + Z_C \right) I = ZI$$

$$Z = Z_R + Z_C = R - j\left(\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}$$

特性角周波数
“カットオフ角周波数”とも

注：角周波数を単に周波数と呼ぶ時もある

演習：右の式を導きなさい。
(このページの図、式も
活用すること)

$$\left| \frac{V_2}{V_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega_0 / \omega \right)^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_0}{\omega}$$

演習解説

$$V_2 = V_1 \frac{R}{R+Z_C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}$$ 特性角周波数

“カットオフ角周波数”とも

$$\therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{R+Z_C} = \frac{R}{R+\dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{j\omega CR}} = \frac{1}{1-j\dfrac{\omega_0}{\omega}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1+j\dfrac{\omega_0}{\omega}}{1+(\dfrac{\omega_0}{\omega})^2}$$

これを有理化して絶対値と偏角を求める。

$$\tan\theta = +\frac{\dfrac{\omega_0}{\omega}}{1}$$:符号あり)

$$\left|\frac{V_2}{V_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0/\omega)^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega}$$

グラフ実習：周波数特性の直線近似（ボード線図）

$$\left|\frac{V_2}{V_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0/\omega)^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega}$$ 変数はω

振幅周波数特性；

$\omega=2\pi f \rightarrow 0 \quad V_2/V_1 \rightarrow$ ？　＝？dB

$\omega=2\pi f \rightarrow \infty \quad V_2/V_1 \rightarrow$ ？　＝？dB

位相周波数特性；

$\omega=2\pi f \rightarrow 0 \quad V_2/V_1 \rightarrow$ ？°　進み/遅れ？

（V_2の位相は、Cに流れる電流の位相に等しい）

$\omega=2\pi f \rightarrow \infty \quad V_2/V_1 \rightarrow$ ？°

特性角周波数 $\omega = \omega_0$

振幅特性　$V_2/V_1=$ ？　＝？dB

位相特性　$V_2/V_1=\tan^{-1}1=$ ？°

思考実験：

左のグラフの形を考えよう
極端・特異点を考えよう。
以下の時のV_2/V_1の近似式を求める。

★ω_0/ωの変化に注目

- 角周波数ωがゼロに近づいた時
  $\omega_0/\omega >> 1$
- 角周波数ωが特性周波数の時
  $\omega = \omega_0 \rightarrow \omega_0/\omega=1$
- 角周波数ωが非常に大きい時
  $\omega_0/\omega << 1$

周波数が10倍(decade)変化した時の振幅の変化は何dBか？

周波数が2倍（octave)変化した時の振幅の変化は何dBか？

$0.1\omega_0$、$10\omega_0$の時の位相は？

ハイパスフィルタの周波数特性（伝達関数ともいう）

重要な事項

特性周波数f_0において

　3dB減衰,位相差45°

高周波数域

　減衰なし, 位相差なしへ漸近

低周波数域

減衰曲線の傾き

　-20dB/Dec (x10)

　-6dB/Oct (x2)

直線で近似できる

　位相差は+90° へ漸近

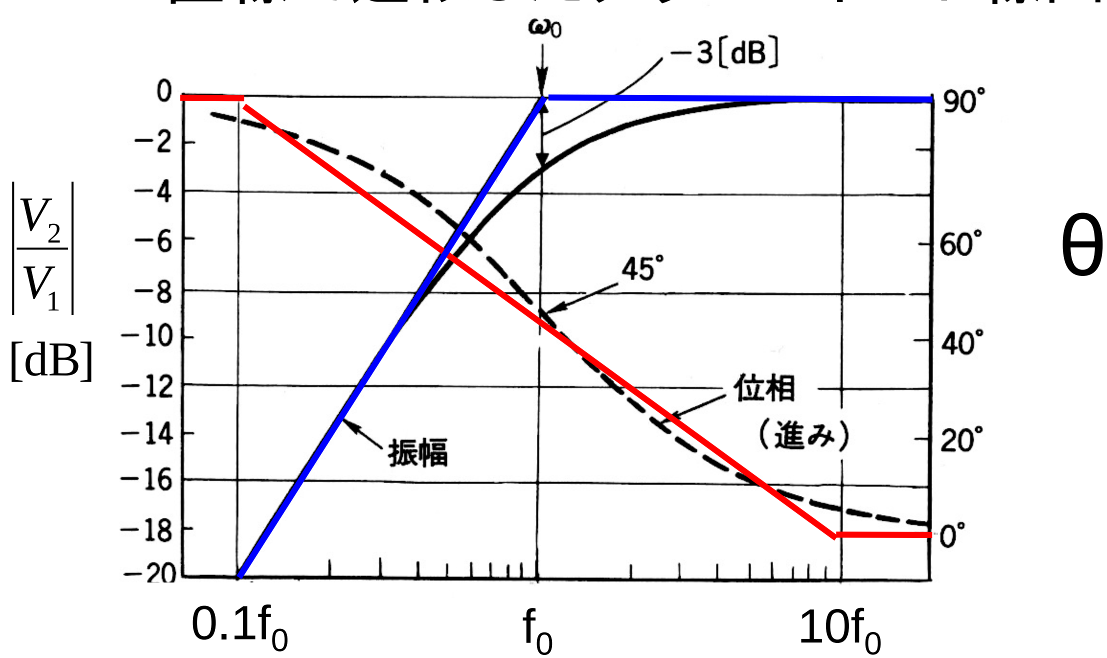
$$f_0 = \omega_0 / 2\pi$$

下記は模式図である

実際にはR, Cから特性周波数を求め

横軸を通常の周波数Hz, kHzなどで表現すること

直線で近似したグラフ＝ボード線図



演習：伝達特性のグラフを描く

実験で利用するC,Rの数値を用いてグラフを描け

1. 手持ちのC,Rの組み合わせ5点で、特性周波数を求める。
2. 5kHz～50kHzになるものから選ぶ。
   プロット上の都合で10^nを避ける。条件に合うものがなければ交換します。
3. 直線近似（ボード線図）を描く。特性周波数の位置で折れ曲がる。傾きを見よ。
4. 特徴的な周波数（ <<f_0、0.1f_0、f_0、10f_0、<<∞）での理論値を算出し、それらを滑らかにつなげるために必要な実測点数はどれくらいか考えなさい。

（一般的留意事項：グラフソフトを利用する場合も通用することが多い）

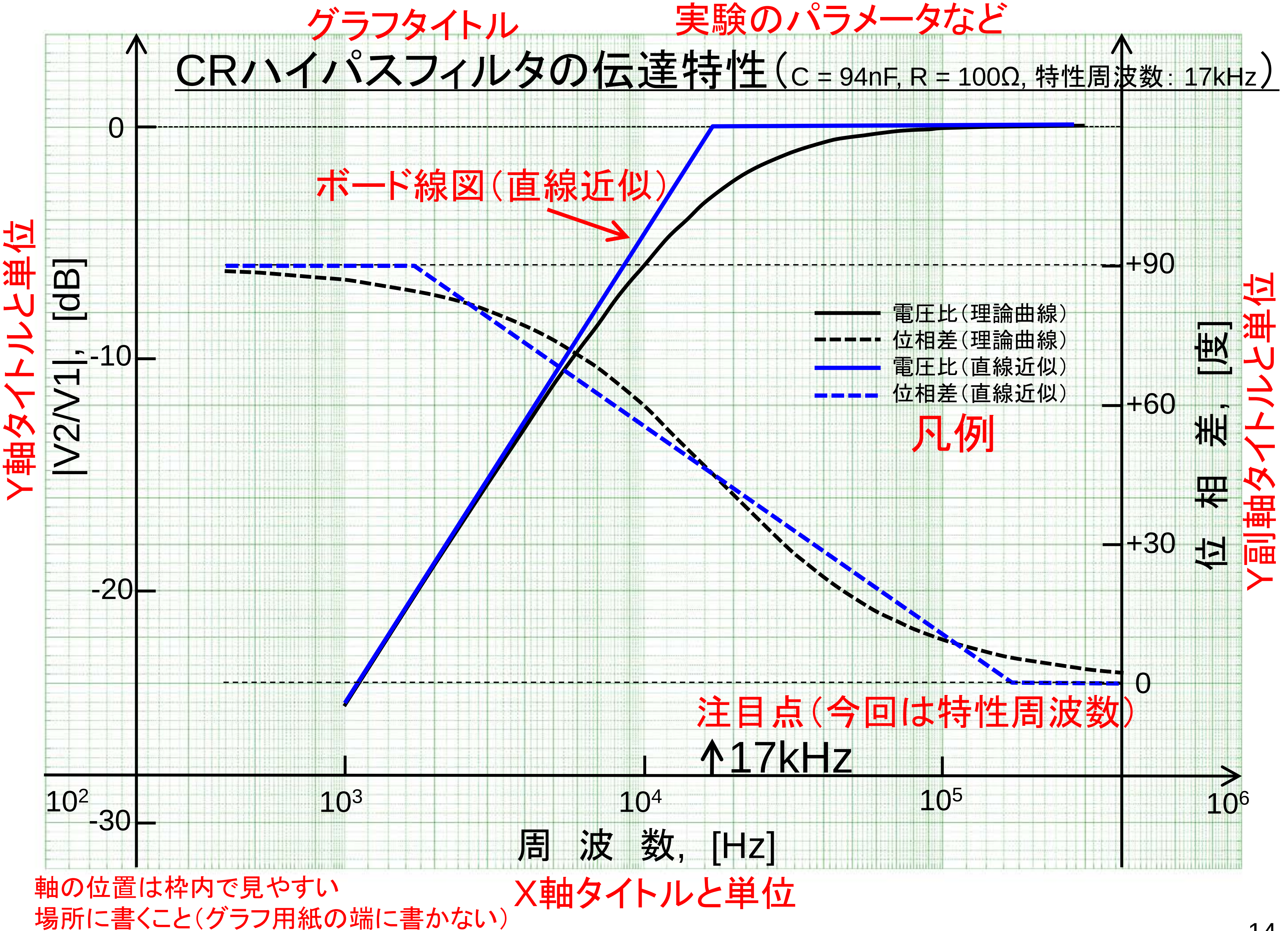
1）なるべく用紙の端（罫線の引かれている領域外）は使わない。

2）軸は、見やすい場所であれば、必ずしもきりのいい数字でなくて
構わない。(原点でなくても良い。）

3）グラフのタイトルをつける。

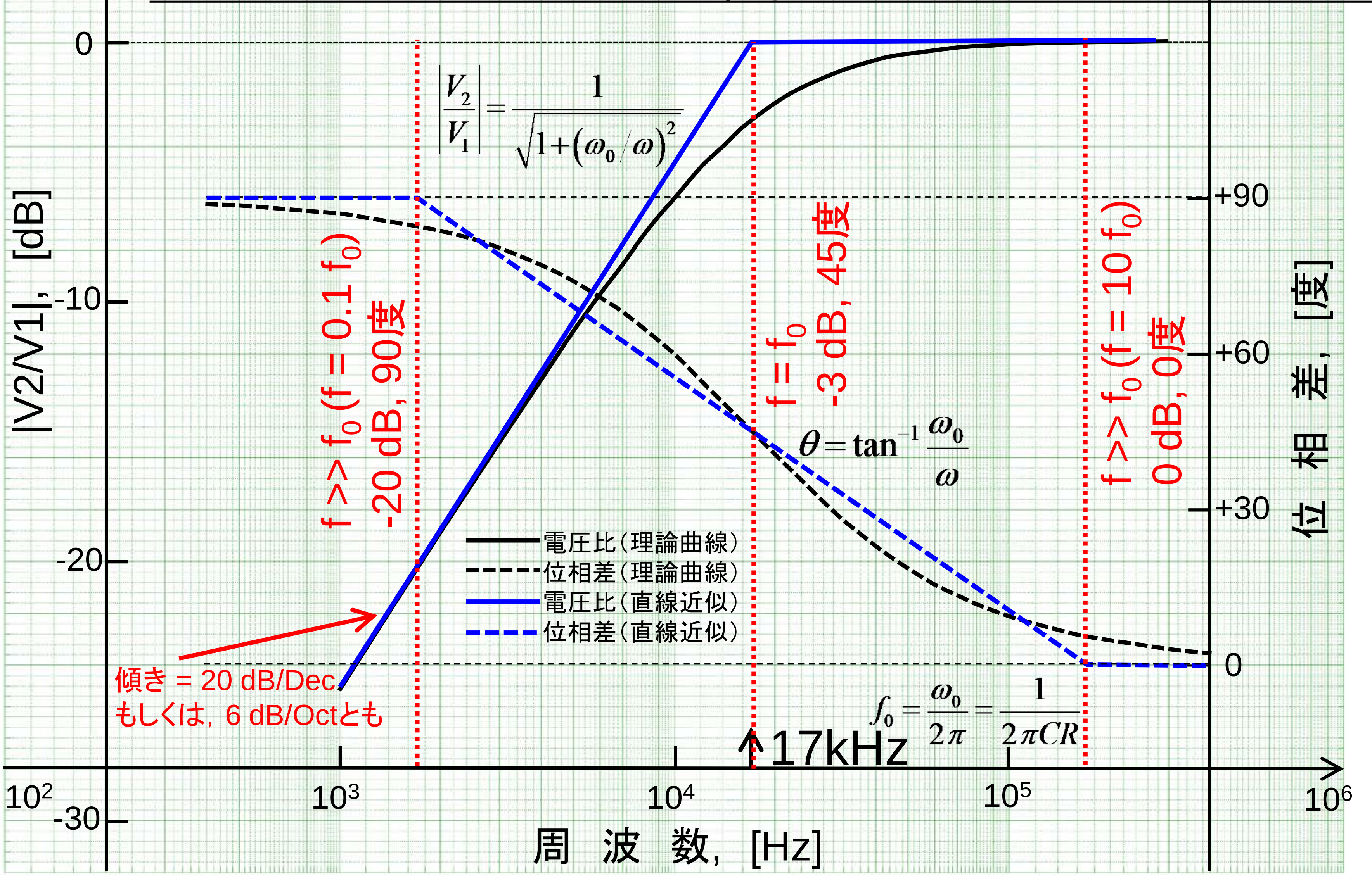
4）軸のタイトル、目盛、単位をつける。(向きも注意）

5）記号（計算値、測定点）と線は明確にわかるように区別する。



グラフタイトル
実験のパラメータなど
CRハイパスフィルタの伝達特性（C = 94nF, R = 100Ω, 特性周波数：17kHz）
ボード線図（直線近似）
Y軸タイトルと単位
|V2/V1|, [dB]
0
-10
-20
-30
+90
+60
+30
0
位 相 差, [度]
Y副軸タイトルと単位
電圧比（理論曲線）
位相差（理論曲線）
電圧比（直線近似）
位相差（直線近似）
凡例
注目点（今回は特性周波数）
17kHz
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
周 波 数, [Hz]
X軸タイトルと単位
軸の位置は枠内で見やすい
場所に書くこと（グラフ用紙の端に書かない）

CRハイパスフィルタの伝達特性(C = 94nF, R = 100Ω, 特性周波数: 17kHz)



課題1：ハイパスフィルター

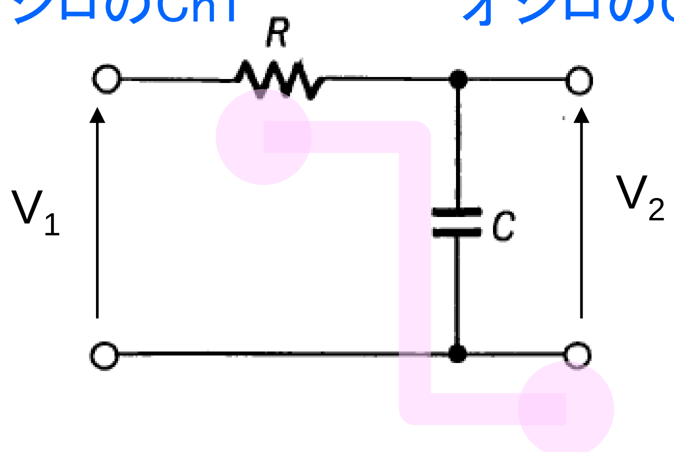
1. 選択されたCRの組み合わせのf_0を求めなさい。
2. 伝達特性（周波数特性、位相特性、特性周波数）を測定しなさい。
   i. f_0よりも大きい周波数帯でV_2/V_1が1に飽和（＝0dB、無減衰）して直線になる部分を測定する。位相も測定する。
   ii. f_0よりも小さい周波数帯でV_2/V_1が直線的に変化する部分（20dB/decになる筈）を測定する。位相も測定する。
   iii. グラフが滑らかに繋がるよう、特性周波数付近のV_2/V_1と位相を複数点測定する。
3. ボード線図・理論値と併せてグラフに描き、両者を比較。

グラフ上で特性周波数がどう現れるかを次の3通り確認しなさい。
ボード線図（直線の交点）、−3dBになる所、位相が45度ずれる所。

ローパスフィルタ

FGからの入力信号
オシロのCh1

出力信号
オシロのCh2



第9.5図　ローパス形CR回路

振幅周波数特性は、

$$\left|\frac{V_2}{V_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

位相周波数特性は、

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}$$ 特性角周波数

ローパスフィルタの周波数特性（伝達関数ともいう）

重要な事項

特性周波数f_0において

　3dB減衰,位相差45°

低周波数域

　減衰なし, 位相差なしへ漸近

高周波数域

減衰曲線の傾き

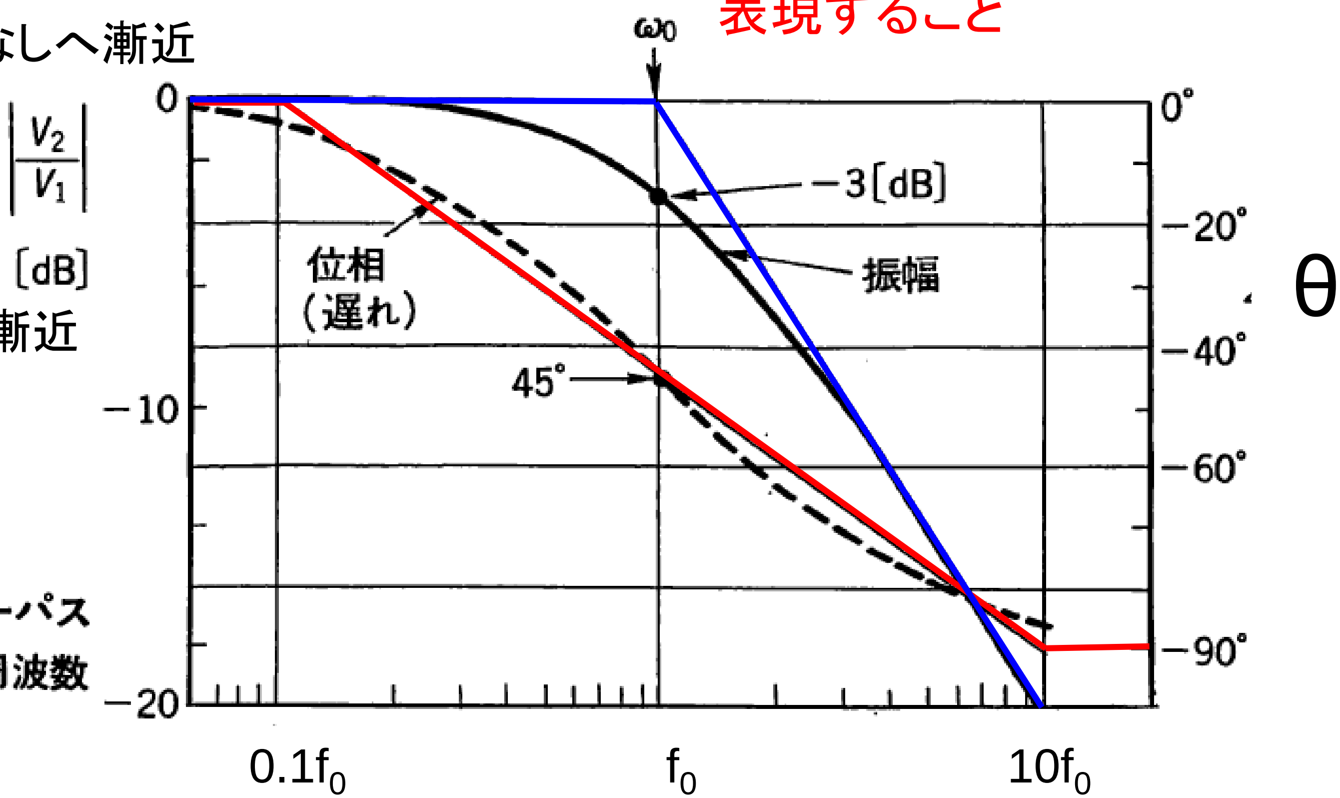
　-20dB/Dec (x10)

　-6dB/Oct (x2)

　位相差は-90° へ漸近

直線で近似できる

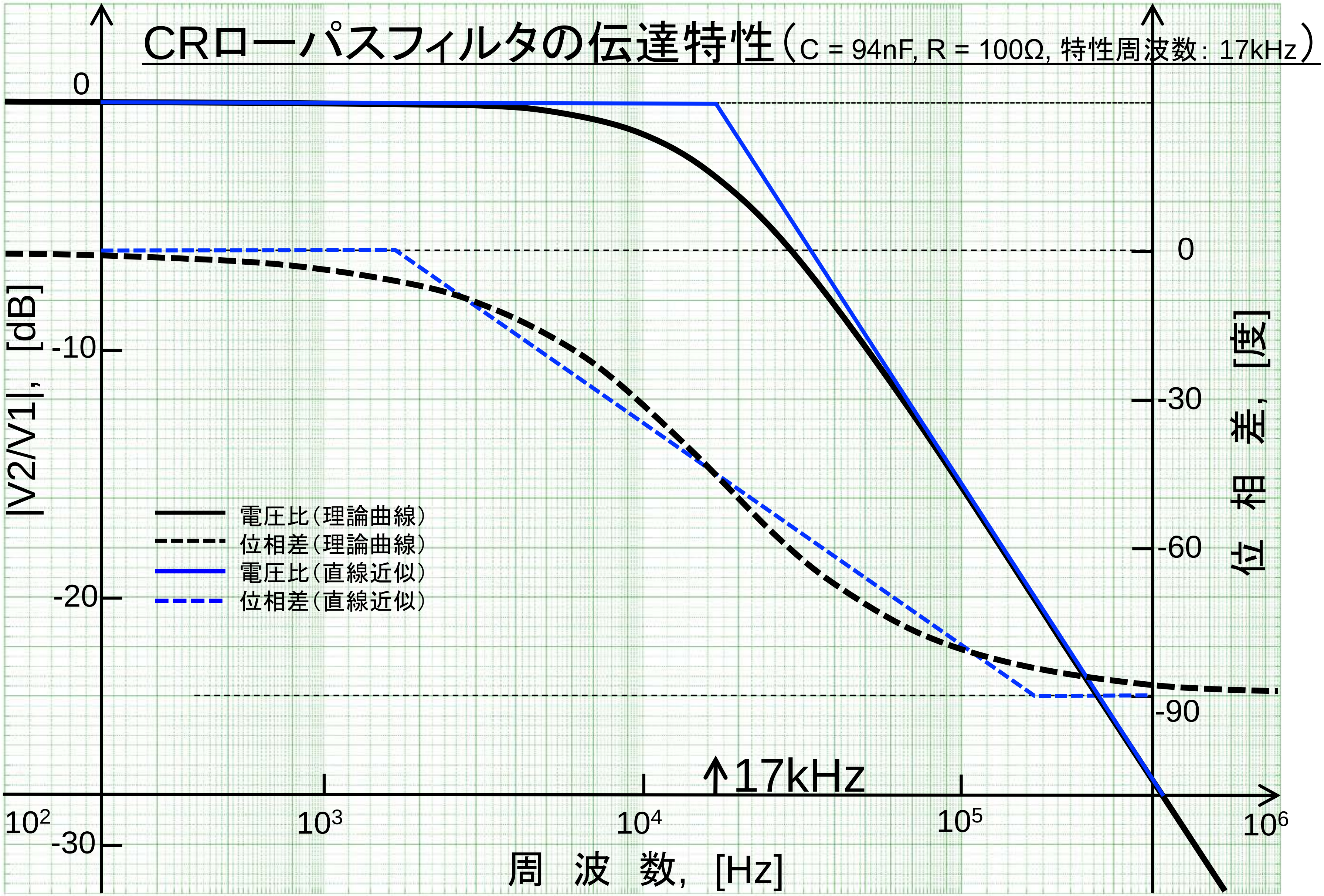
下記は模式図である
実際にはR, Cから特性周波数を求め
横軸を通常の周波数Hz, kHzなどで
表現すること



第9.6図　ローパスCR回路の周波数伝達特性

課題2：ローパスフィルター

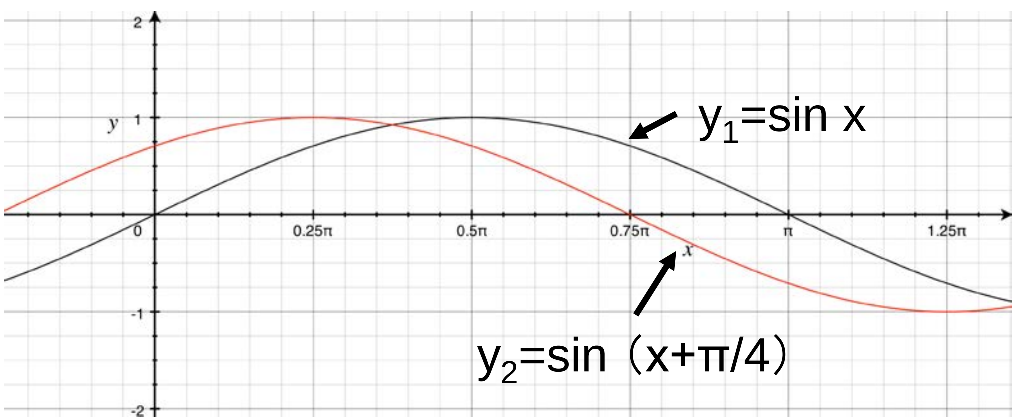
- ハイパスフィルターと同様の計算を行い、ボード線図を作成せよ。また、厳密な理論曲線を描くため特徴的な周波数（ <<f_0 、0.1f_0、f_0 、10f_0、<<∞）での値を求め、滑らかに結びグラフ化せよ。
- ハイパスフィルターと同じC,Rを使って伝達特性（周波数特性、位相特性）を測定し、あらかじめ作成したボード線図・理論曲線のグラフに測定結果を追加せよ。十分なめらかな曲線になるように測定点を工夫して曲線を描け。


CRローパスフィルタの伝達特性(C = 94nF, R = 100Ω, 特性周波数：17kHz)
0
-10
-20
-30
|V2/V1|, [dB]
0
-30
-60
-90
位 相 差, [度]
電圧比(理論曲線)
位相差(理論曲線)
電圧比(直線近似)
位相差(直線近似)
↑17kHz
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
周 波 数, [Hz]

補足情報：考え方のヒント

- 位相差の求め方：信号の周期Tと信号波形の時間差⊿tから求める

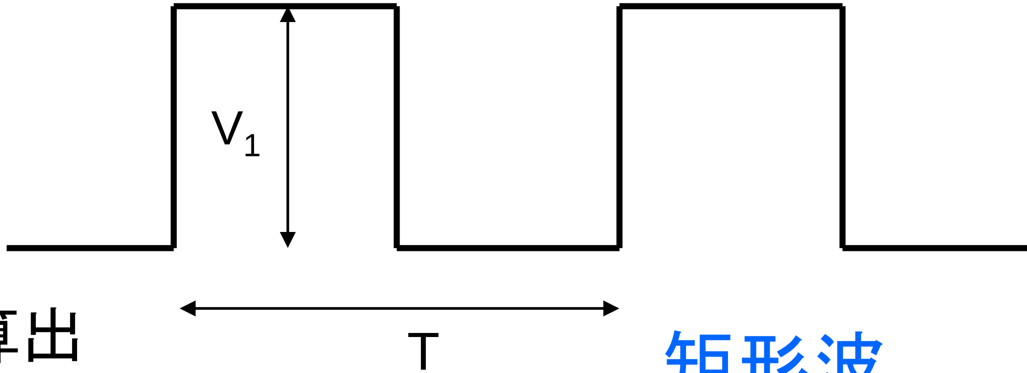
  位相差（°）=360x(⊿t/T）
- 下図において、信号y_2はy_1に対して位相が「進んでいる」ことになるので注意（ x+π/4 の意味を間違えるな。座標の移動とは異なる！！）
- 特性周波数での振幅特性が-3dBである理由は、抵抗と容量のリアクタンスの大きさを考えるとよい
- 傾きが±20dB/decであることを式から導くためには、周波数がゼロ、あるいは無限大の極限を考えてみること



過渡応答

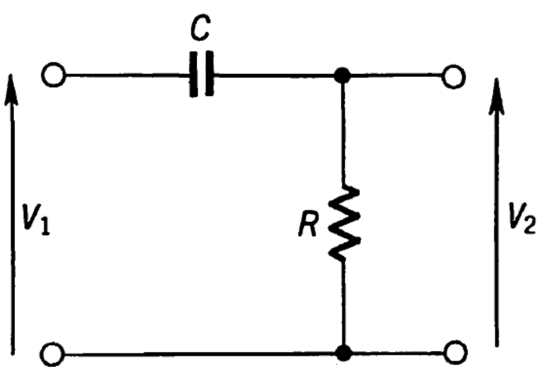
ハイパス/ローパスフィルタに矩形波を入力して
その時間変化を見る。

- 求めるのは時定数。
  - 時定数の計算(理論値)
  - 実測結果の表とグラフ
  - 実測値に基づく時定数算出
  - それを比較して考察する

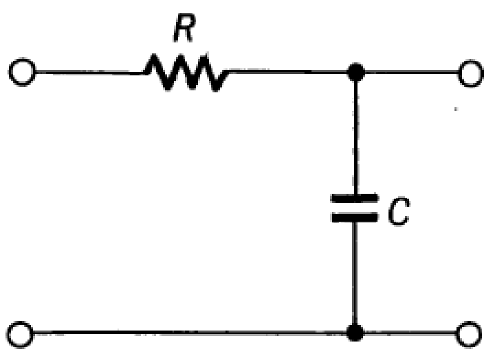


矩形波

？

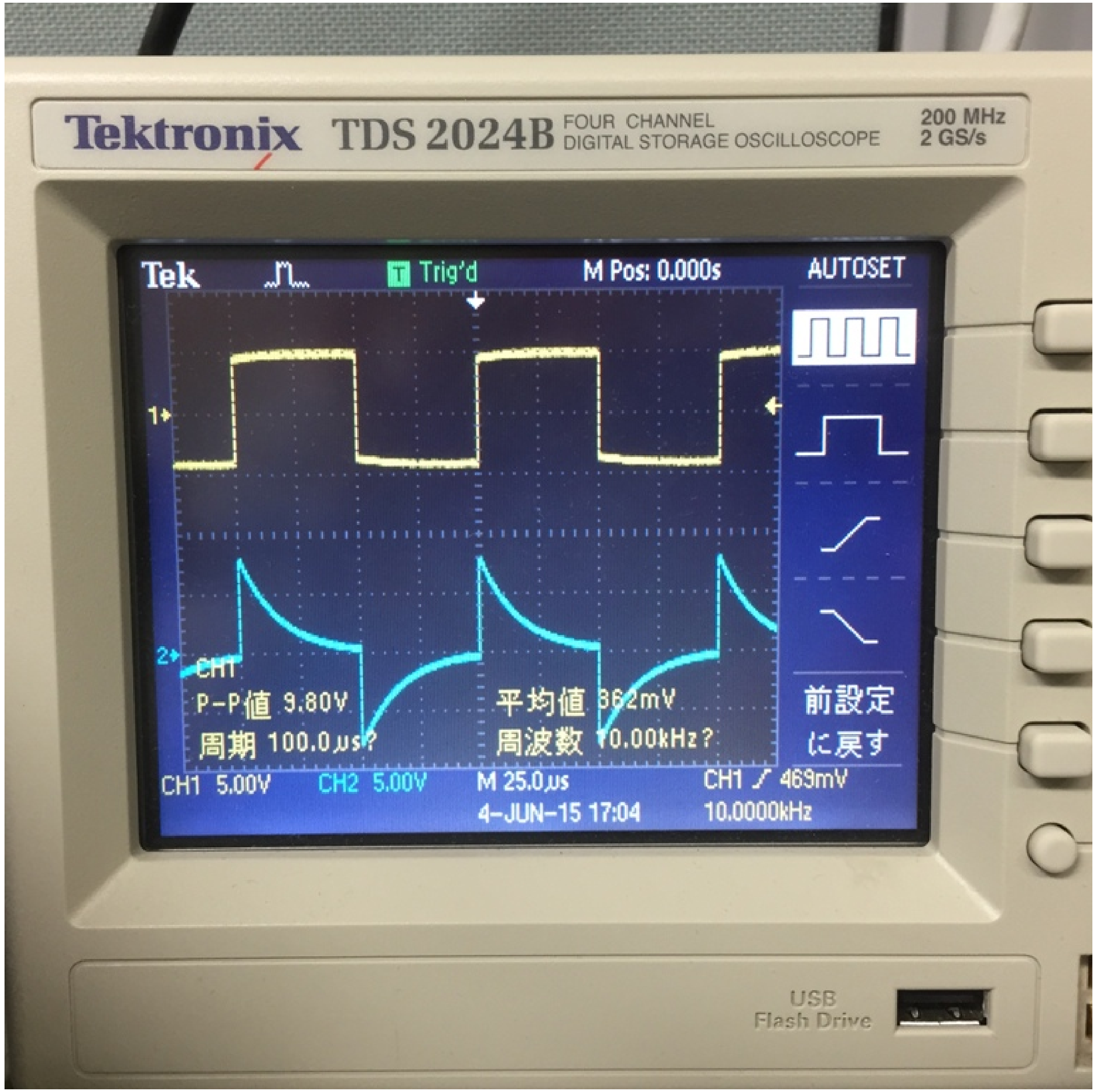


第9.1図　ハイパス形CR回路



第9.5図　ローパス形 CR 回路

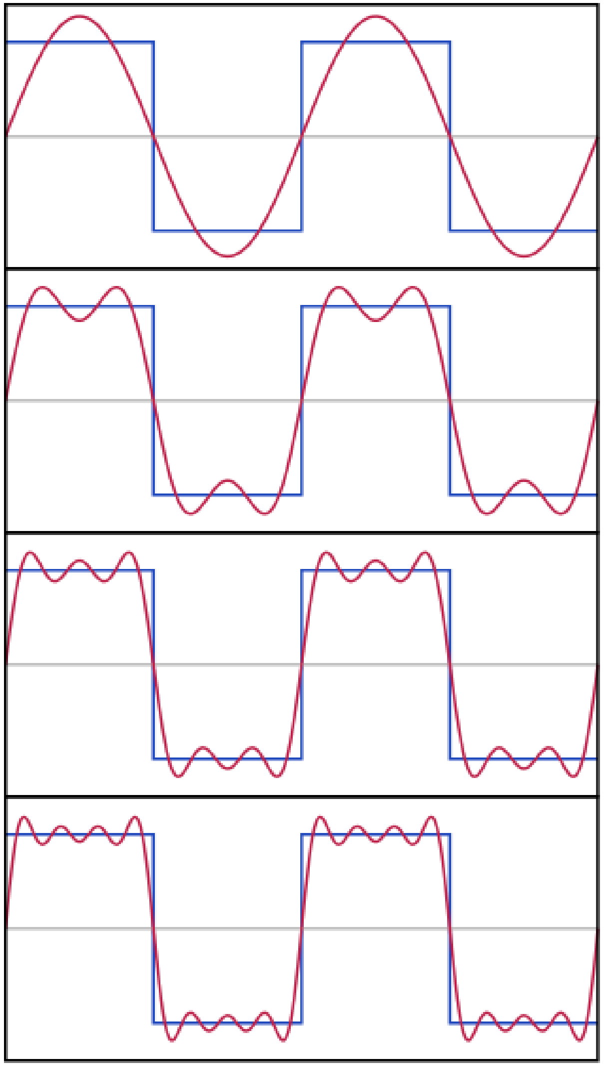
過渡応答の波形例：ハイパスフィルタ



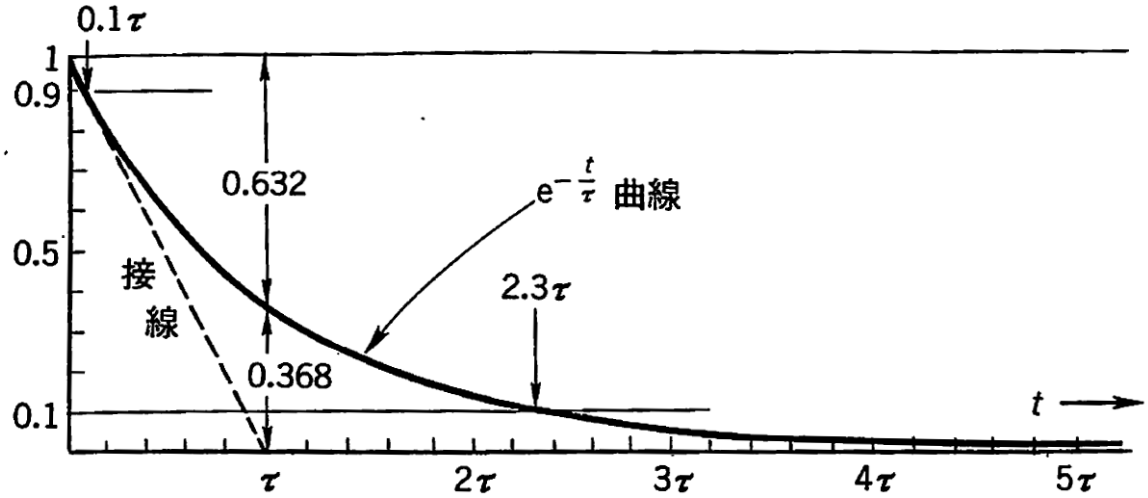
フーリエ級数を思い出して下さい

- 世の中のどんな関数も、
  正弦波の和で表せる。
  - 右図、矩形波（青）を正弦波の和（赤）
    で表そうとしたもの。低周波側1−4項。
  - 矩形波は、（直流成分を含む）低周波数
    成分と、高周波数成分の和で表せる。

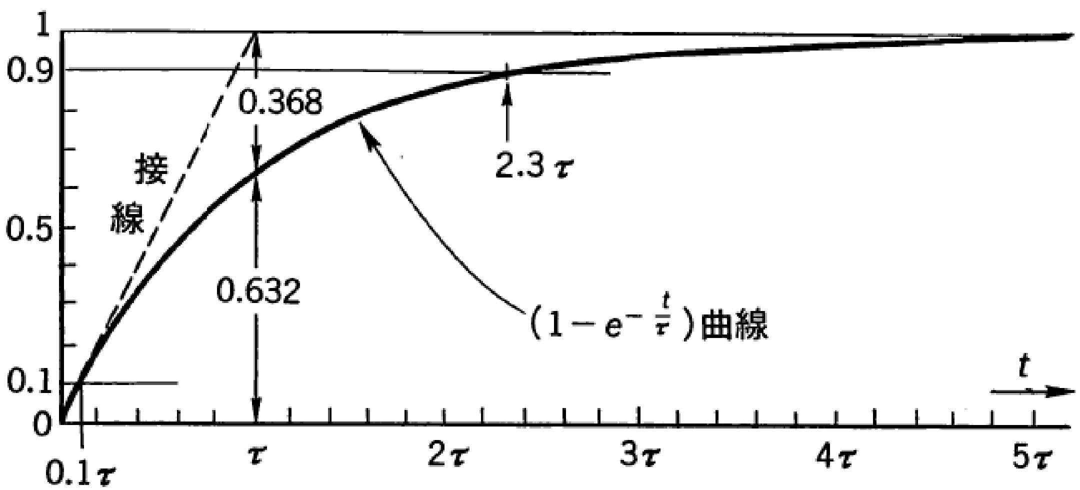
- 矩形波の角の部分は高周波成分が、
  上下辺は低周波成分が、それぞれ卓越。
  - ハイパスフィルタ：矩形波の高周波数成分
    を通し、低周波数成分をカット。
    →減衰曲線になる。
  - ローパスフィルタ：矩形波の高周波数成分
    をカット、低周波数成分を通す。
    →飽和曲線になる。 ➔付録参照



一つのパルス入力に対する出力(応答)



第9.12図　ハイパス形 CR 回路のパルスレスポンス(微分曲線)



第9.13図　ローパス形CR回路のパルス応答(積分曲線)

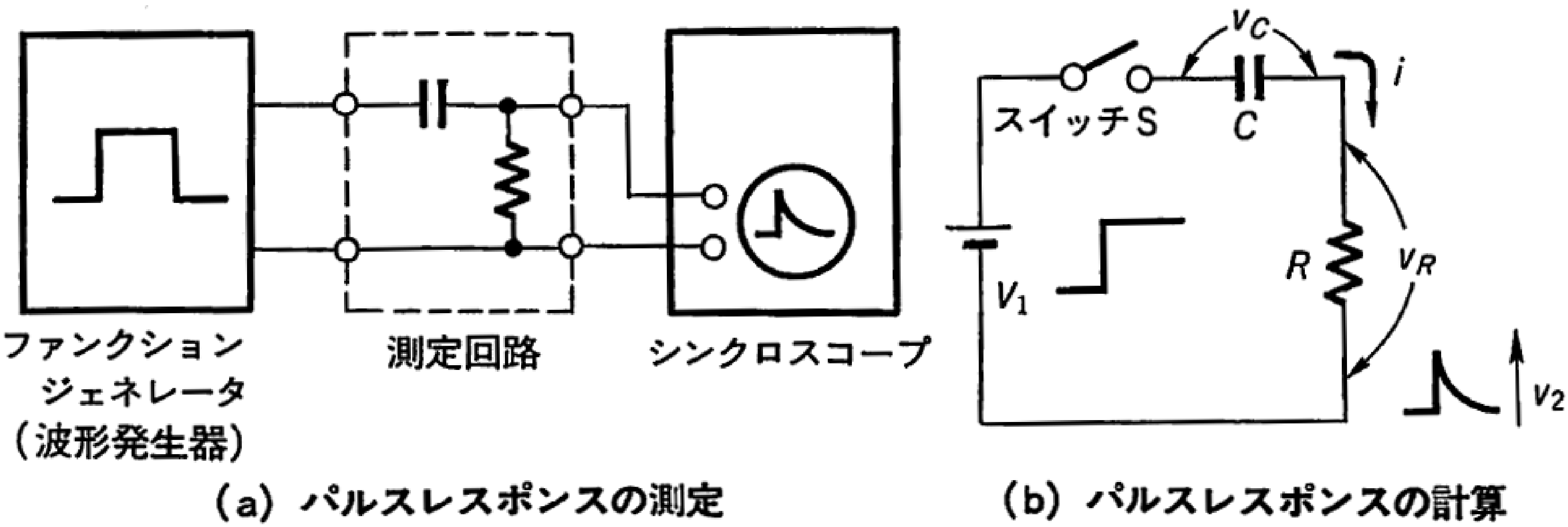
- 時間とともに減衰あるいは飽和する波形を得る
- 波形の形を決める定数 τを時定数と呼び、以下の式で求めることができる

$$CR = \tau \ \text{[s]}$$

逆数の関係!!

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}$$ 特性角周波数

過渡応答の理論的背景



第9.11図　パルスレスポンスの測定と計算

$$v_R + v_C = v_1$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v_1$$

$$V_R = V_1 e^{-t/(CR)}$$

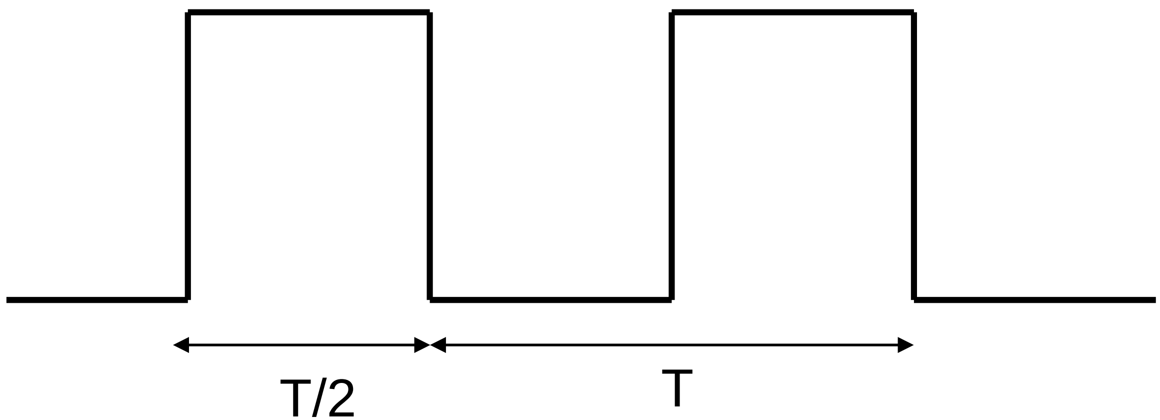
課題3：過渡応答

- 実験に使用するC、Rの値を用いて実時間（τ で正規化したものではなく）を横軸に取り、スライド22のグラフを描け（2種類）。
- 上記を実測し、作成したグラフに追加せよ。十分なめらかな曲線になるように測定点を工夫し、なめらかな曲線を描け。
- 測定結果から、時定数 τ を求め、CRから算出した値と比較せよ。

過渡応答の見方

☆過渡応答を見るときは矩形波を信号に用いる
➔立上がり、立下りの変化に対する回路の応答
（一般にステップ応答と呼ぶ）

矩形波



T/2（半周期）を十分大きくとる
➔過渡応答が落ち着くまでの様子を見る
$T/2 \gg CR = \tau$

過渡応答の解析手順

- オシロスコープの計測機能(Cursor)を用いて、横軸の時間差、縦軸の電圧値を読み取り、グラフに応答波形をプロット。
- 時定数の求め方

(1) グラフの立下り、立上がり点から接線を引いて時間軸と交わった点から求める。

(2) ハイパスフィルタでは振幅が1/e=36.8%になる時間から、ローパスフィルタでは振幅が1-1/e=63.2%になる時間から直接求める。

(3) ハイパスフィルタでは振幅が10%になる時間から、ローパスフィルタでは振幅が90%になる時間から求める。

- 上記実験から求めた値と、C, Rの値から計算した時定数を比較・考察。

第3単元レポート項目

第三者が読んで、同じことを再現できるだけの情報が不可欠。

タイトル:「 RC回路特性」

1. 目的　RC回路伝達特性の図示と実験に基づく理解
2. 使用機器、測定対象素子、回路について（仕様、公称値、回路図など）
3. 実験（方法の説明が書かれていること）
   課題1（ハイパスフィルタ）、課題2（ローパスフィルタ）、課題3（過渡応答）
4. 結果（グラフだけでなく、理論値と『一致』もしくは『有意に異なる』を明記。）
   課題1／2はボード線図に実測値を載せスムーズに繋げてあること。
5. 考察（伝達特性2種・過渡応答の結果を説明し、確認できた点をまとめる。）
6. 結論・まとめ
7. 参考資料

番外　この単元に関する理解・感想など自由記述

オプション（本体が8割以上の評価でない限り加算されない。最大で50%の加点）:

A. 課題1，2について、LRの組み合わせを実験し、CRとの違いを比較・考察する。
   実験手法＋結果（グラフ）　　考察（実験せず理論的導出のみでも可）
B. 過渡応答曲線を理論的に示す。（微分方程式、積分方程式）

（実験）レポートの構成要素

参考：日大工学部電気工学実験、レポートの書き方
http://cc.ce.nihon-u.ac.jp/~inui/kamoku/jikken-2009/how2report2008-01.pdf

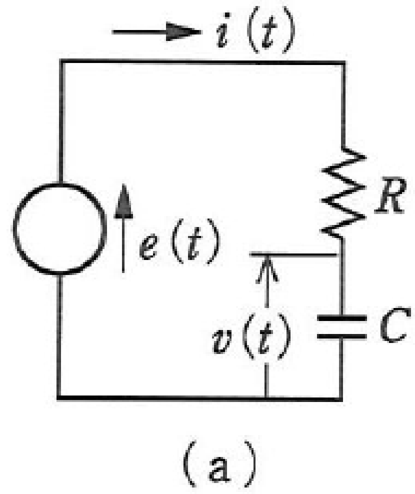
表紙：配布したものを使う。実験タイトルを書く。

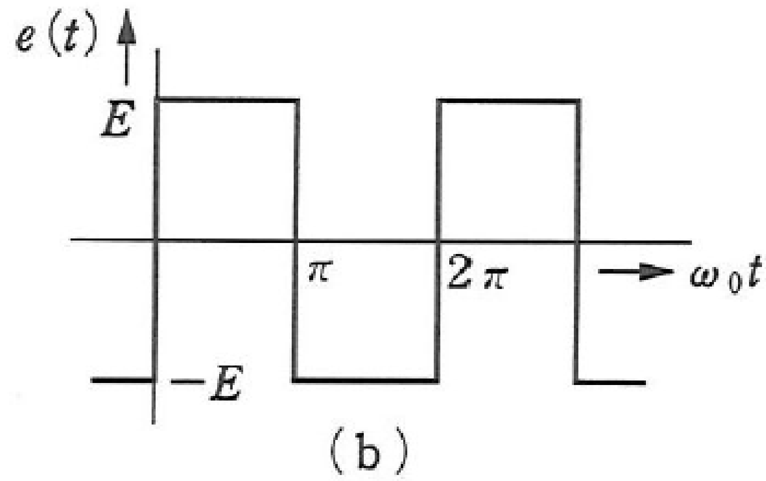
1. 目的　*例：抵抗測定方法の原理・注意点の理解*
2. 理論(原理)　*例：V−I法とは．．．*
3. 実験
   手順,結線図　*例：実験手順(過去形)、写真・スケッチ*
   使用器具＆機器、測定対象　*機材名・ID・素子名…*
4. 結果　*取得データ表と計算結果一覧、実験式、グラフ［単位］*
5. 考察　*結果の解釈と、結果から演繹される主張*
6. 結論・まとめ
7. 参考資料　*教科書・ハンドアウト以外の文献、WWW*

番外　感想

単元内容および課題内容が理解できたか否か。
要望、批判、印象など気軽に何でも。

付録 フーリエ級数から過渡応答を求める(1)





ローパスフィルタ(LPF)

出展:尾崎、電気回路(2)、オーム社

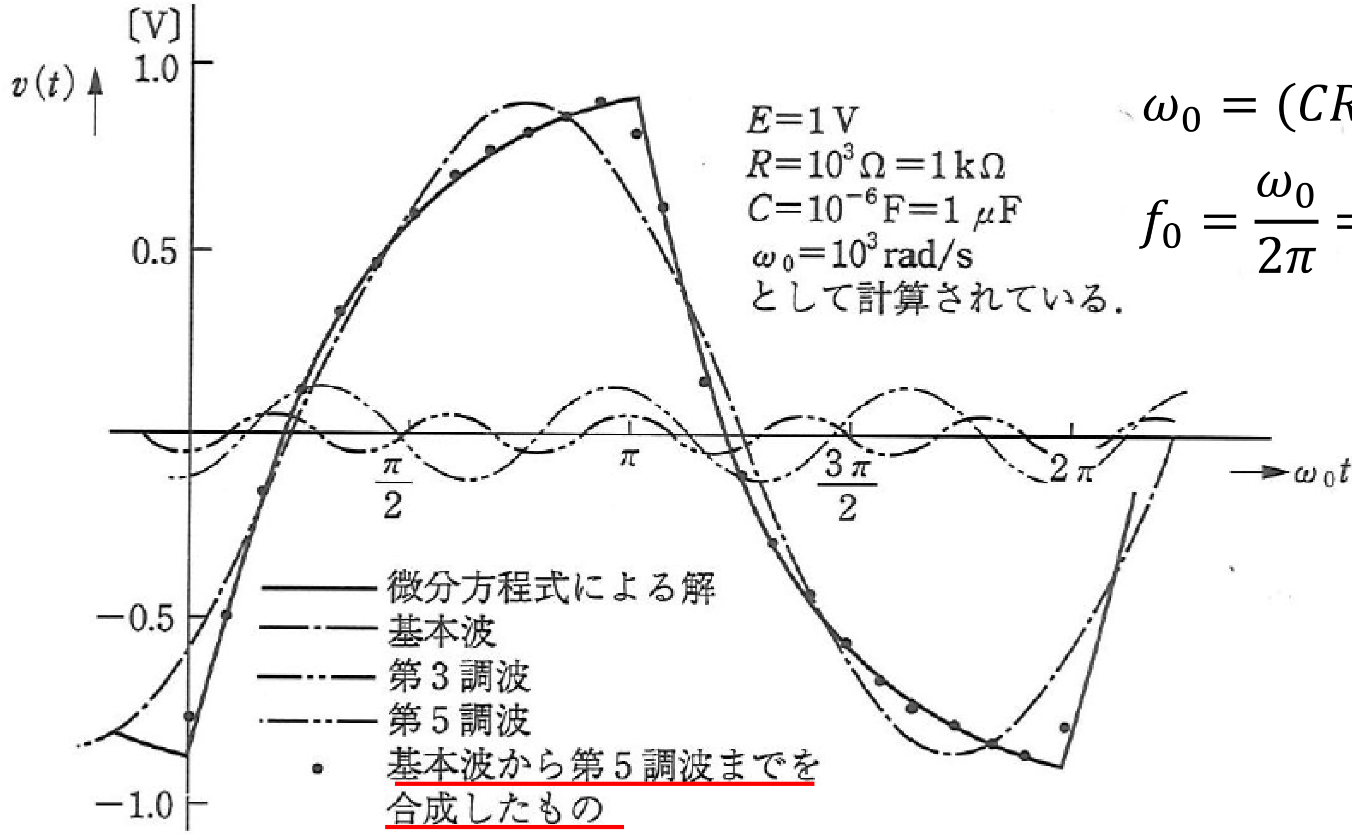
方形波のフーリエ級数:ω_0, $3\omega_0$, $5\omega_0$, … ➔奇数次のみ

$$e(t) = \left(\frac{4E}{\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\omega_0 t}{2n-1}$$

$$= \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \frac{1}{7}\sin 7\omega_0 t + \cdots\right)$$

➔交流の重ね合わせの理を適用して

付録 フーリエ級数から過渡応答を求める(2)



(c)

$$\omega_0 = (CR)^{-1}$$

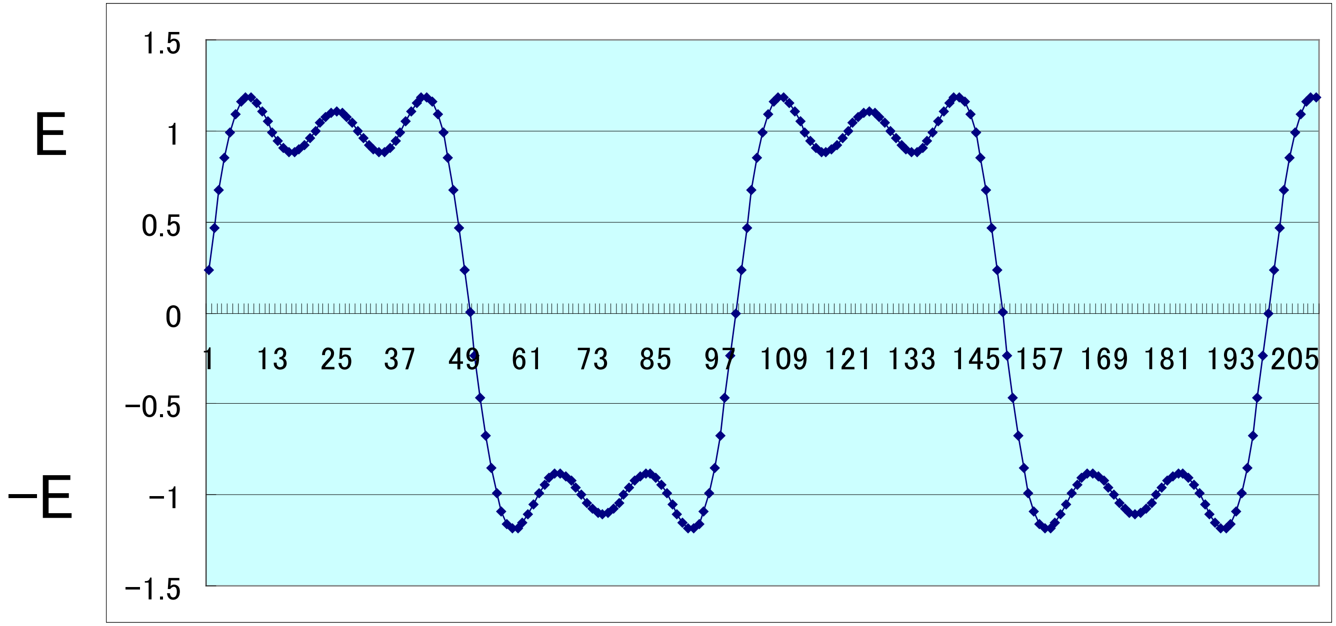
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 159Hz$$

$$v(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt{1+(2n-1)^2\omega_0^2C^2R^2}}\sin\{(2n-1)\omega_0 t+\varphi_{2n-1}\}$$

$$\tan\varphi_{2n-1} = -(2n-1)\omega_0 CR$$

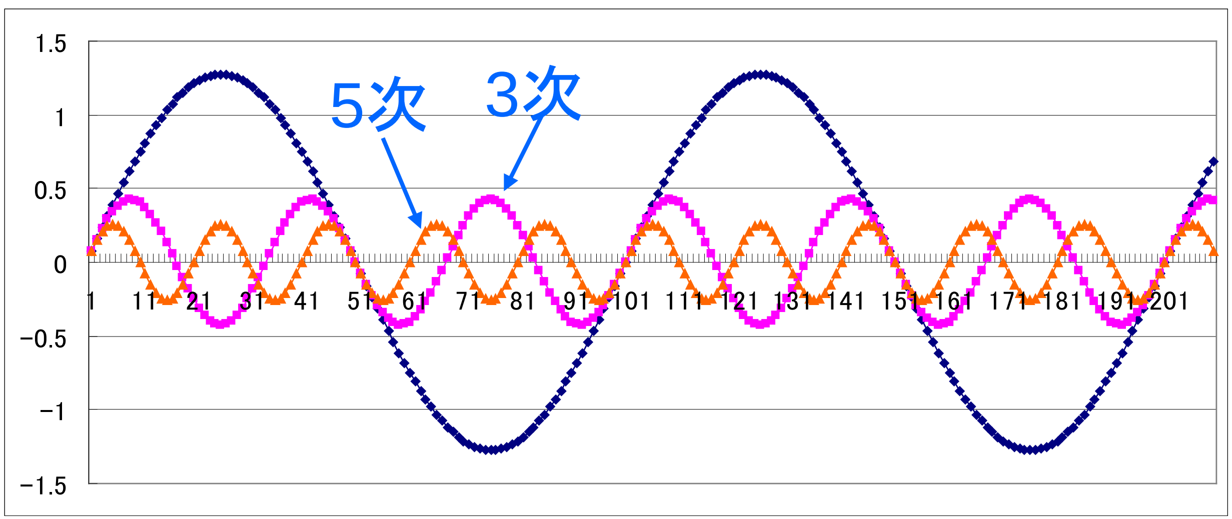
伝達関数により基本波と高調波の振幅と位相が変化

付録 方形波 $e(t)$のフーリエ級数を5次高調波まで加算



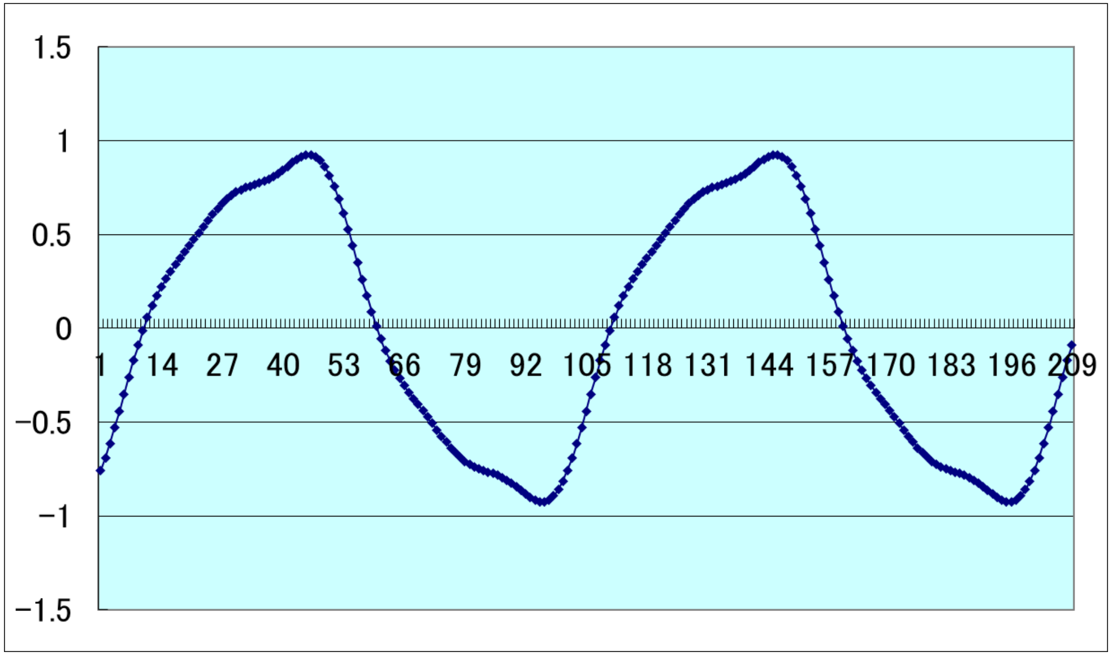
Excelで計算

なんとなく方形波
に見える



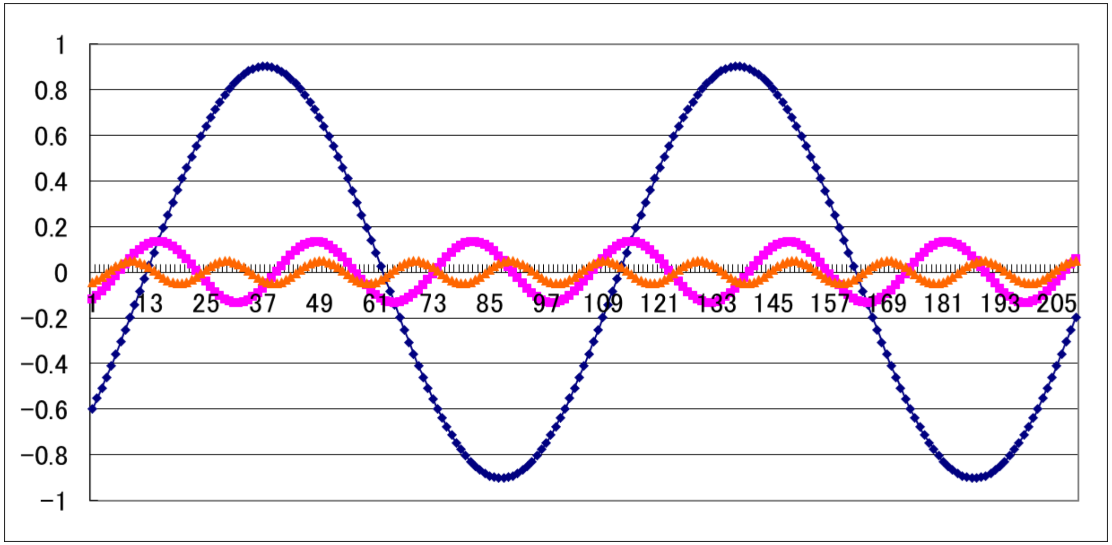
t=0において
全成分が0V
からスタート

付録　LPF出力 *v*(*t*)の計算(5次高調波まで加算)



Excelで計算

<u>1次のローパスフィルタを仮定</u>
基本周波数は特性周波数と等しいとした
$f_{fund}=f_c$ (cut-off freq.)



遅延時間が周波数で異なる＝位相の遅れが周波数に比例しない