確率統計学レポート用紙

学籍番号: s1240234	氏名: 根本 優太

2章の問題（ハンドアウト1ページ）

1.

(1) Xが偶数になる確率

まず，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda)\lambda^k = (1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k$

これを用いると，

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k} = (1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^0+\lambda^2+\lambda^4+\lambda^6+\cdots\cdots)$$

$$\cancel{= (1-\lambda)\frac{\lambda^0(1-\lambda^{2n})}{1-\lambda^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^0(1-\lambda^{2n})}{1-\lambda^2}\cdot(1-\lambda)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\lambda^n)(1-\lambda^n)}{1-\lambda^2}\cdot(1-\lambda)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\lambda^n)(1-\lambda^n)}{(1+\lambda)\cancel{(1-\lambda)}}\cancel{(1-\lambda)}$$

ここで $0<\lambda<1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lambda^n = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k} = \frac{1}{1+\lambda}$$

(2) Xの母平均 $\mu = E(X)$

まず，$\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\lambda)\lambda^k = (1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty} k\lambda^k$

ここで $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k\lambda^k$ の値を求める。

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\lambda^k = 0\cdot\lambda^0 + 1\cdot\lambda^1 + 2\cdot\lambda^2 + \cdots + n\cdot\lambda^n$$

$$-)\ \lambda\sum_{k=0}^{\infty} k\lambda^k = 0\cdot\lambda^1 + 1\cdot\lambda^2 + \cdots + (n-1)\lambda^n + n\lambda^{n+1}$$

$$(1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty} k\lambda^k = \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n - n\lambda^{n+1}$$

よって

$$(1-\lambda)\sum_{k=0}^{n} k\lambda^k = \frac{\lambda(1-\lambda^n)}{1-\lambda} - n\lambda^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\lambda^k = \frac{\lambda(1-\lambda^n)-n(1-\lambda)\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k\lambda^k = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\lim_{n\to\infty}\left\{(1-\lambda^n)-n\lambda^n(1-\lambda)\right\}$$

$$= \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\lim_{n\to\infty}(1-\lambda^n-n\lambda^n+n\lambda^{n+1})$$

$$= \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\lim_{n\to\infty}\left\{1-\lambda^n(1+n-n\lambda)\right\}$$

ここで $0<\lambda<1$ より、$\lim_{n\to\infty}\lambda^n = 0$，$\lim_{n\to\infty}\lambda^n(1+n-n\lambda) = 0$.

よって $\lim_{n\to\infty}\left\{1-\lambda^n(1+n-n\lambda)\right\} = 1$ となり、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k\lambda^k = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$$

すなわち、$\sum_{k=0}^{\infty} k\lambda^k = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$ とできる。

したがって Xの母平均について

$$E(X) = (1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty} k\lambda^k = \cancel{(1-\lambda)}\frac{\lambda}{(1-\lambda)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

となる。

//