確率統計学レポート用紙

学籍番号: S12 40234	氏名: 根本 優太

教科書ページ53. 演習問題

2.11. $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, 平均、分散、積率母関数、分布関数を求めよ.

まず積率母関数を求めると

$$M_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}e^{tx}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{tx}e^{x}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{tx}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{t+1}e^{(t+1)x}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{1}{t-1}e^{(t-1)x}\right]_{0}^{\infty}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t+1}(1-0)+\frac{1}{t-1}(0-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)=\frac{t-1-t-1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{(t-1)(t+1)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{1-t^2}}}$$

次に平均は、

$E(X)=M'_x(0)$ であり、ここで

$M'_x(t)=\frac{-2t}{(1-t^2)^2}$ であるから、$M'_x(0)=0$.

よって $\underline{\underline{E(X)=0}}$

次に分散について

$V(X)=M''_x(0)$ であり、ここで

$$M''_x(t)=\frac{2}{(1-t^2)^2}+2t\frac{-2(-2t)}{(1-t^2)^3}=\frac{2(1-t^2)+8t^2}{(1-t^2)^3}$$

$$=\frac{2+6t^2}{(1-t^2)^3}$$

よって、$M''(0)=2$ であるから、

$V(X) = \underline{\underline{2}}$

分布関数 $F(x)$ について

定義より、$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ (このとき $-1<t<1$ と考える)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-|t|}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[e^{-t}\right]_{0}^{x}$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(e^{-x}-1)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{-x}}}$$

//