NO.

DATE

確率統計学　演習レポート4　s1240234 根本優太

問題

離散確率変数 X の実現値は $x=0, 1, 2$ であり、その確率関数は

$p_X(0)=p,\ p_X(1)=q,\ p_X(2)=1-p-q$ である。但し

p, q は $0<p, 0<q, 0<p+q<1$ を満たす定数である。

(a) X の積率母関数 $M_X(t)$ を求めなさい。

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{k=0}^{2}e^{tk}p_k$$

$$=p+e^{t}q+e^{2t}(1-p-q)$$

(b) X の平均と分散を積率母関数から求めなさい。

まず、積率母関数 $M_X(t)$ を1回、2回と微分すると、

$$M_X'(t)=e^{t}q+2e^{2t}(1-p-q)$$

$$M_X''(t)=e^{t}q+4e^{2t}(1-p-q)$$

平均 $E(X)=M_X'(0)$ より、

$$E(X)=q+2(1-p-q)$$

$$=2-2p-q$$

分散 $Var(X)=M_X''(0)-(M_X'(0))^2$ より、

$$Var(X)=M_X''(0)-(M_X'(0))^2$$

$$=q+4(1-p-q)-(q+2(1-p-q))^2$$

$$=q+4(1-p-q)-(2-2p-q)^2$$

//

問題

連続確率変数 X の密度関数は

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{e-1}e^{x} & (0\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (x<0, 1<x)\end{cases}$$ である。

(a) X の平均 $E(X)$ を定義 $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$ から求めなさい。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\frac{1}{e-1}e^{x}dx=\frac{1}{e-1}\int_0^1 xe^{x}dx$$

$$=\frac{1}{e-1}\int_0^1 x(e^{x})'dx=\frac{1}{e-1}\left([xe^{x}]_0^1-\int_0^1 e^{x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{e-1}\{e-(e-1)\}=\frac{1}{e-1}$$

KOKUYO

裏面に続く。

(b) Xの積率母関数 $m_X(t)$ を求めよ.

$t \neq -1$ のとき.

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{e-1}e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{e-1}\int_0^1 e^{tx}e^x\,dx = \frac{1}{e-1}\int_0^1 e^{(t+1)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{e-1}\left[\frac{1}{t+1}e^{x(t+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{e-1}\,\frac{e^{t+1}-1}{t+1} \quad (t \neq -1)$$

$t = -1$ のとき.

$$m_X(t) = E(e^{-X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} f_X(-x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\frac{1}{e-1}e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{e-1}\int_0^1 1\,dx = \frac{1}{e-1}[x]_0^1 = \frac{1}{e-1}$$

(c) 積率母関数からXの平均 $E(X)$ を求めなさい

$t \neq -1$ のとき. $m_X(t)$ を微分すると.

$$m_X'(t) = \frac{1}{e-1}\,\frac{e^{t+1}(t+1)-(e^{t+1}-1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{e-1}\,\frac{e^{t+1}t+1}{(t+1)^2}$$ となるが

求めたいのは $\lim_{t\to -1} m_X'(t)$ である。

$f(t) = e^{t+1}t+1$, $g(t) = (t+1)^2$ とすれば

$f'(t) = e^{t+1}t + e^{t+1}$, $f''(t) = e^{t+1}t + 2e^{t+1}$,

$g'(t) = 2(t+1)$, $g''(t) = 2$ となる.

$$\lim_{t\to -1}\frac{f''(t)}{g''(t)} = \lim_{t\to -1}\frac{e^{t+1}t+2e^{t+1}}{2} = 1$$ であり,

ロピタルの定理より $\lim_{t\to -1}\frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_{t\to -1}\frac{f''(t)}{g''(t)} = 1$ となる.

もう一度ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{t\to -1}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to -1}\frac{f''(t)}{g''(t)} = 1$$ であるから,

$$\lim_{t\to -1} m_X'(t) = \frac{1}{e-1}\lim_{t\to -1}\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1}{e-1}$$

//