確率統計学レポート用紙

学籍番号: S1240234	氏名: 根本 優太

過去問題3

(1) $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$ を求めよ

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ここで、

$$tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{2\sigma^2 tx - x^2 + 2\mu x - \mu^2}{2\sigma^2} = -\frac{x^2 - 2x(\sigma^2 t+\mu) + \mu^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{\{x-(\sigma^2 t+\mu)\}^2 - (\sigma^2 t+\mu)^2 + \mu^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{\{x-(\sigma^2 t+\mu)\}^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$$

よって、

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\{x-(\sigma^2 t+\mu)\}^2}{2\sigma^2}} dx$$

ここでさらに、

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\{x-(\mu+\sigma^2 t)\}}{2\sigma^2}}$ は正規分布 $N(\mu+\sigma^2 t, \sigma^2)$ の密度関数であることを用いると、

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\{x-(\sigma^2 t+\mu)\}^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ であるから、

$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ となる。

$$\boxed{M_X(t) = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t)t}}$$

(2) $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$ を示せ

まず積率母関数を1回微分、2回微分すると、

$$M_X'(t) = \mu e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + t\sigma^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$= (\mu + t\sigma^2) e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$M_X''(t) = \sigma^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + (\mu + t\sigma^2)^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

となる。

$E(X) = M'(0)$, $V(X) = M''(0) - M_X'(0)^2$ であるから、

$E(X)=\mu$

$V(X)=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$

これは~~与式~~と一致する。

(3) $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ は、標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数である。$\mu=10,\ \sigma^2=16$ のとき、$P(8<X<11)$ を $\Phi(x)$ を用いて表すと、$\boxed{\Phi(0.25)+\Phi(0.5)-1}$

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<X^*<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$ だから、

$$P(8<X<11)=P\left(\frac{8-10}{4}<X^*<\frac{11-10}{4}\right)=P\left(-\frac{1}{2}<X^*<\frac{1}{4}\right)$$

$$=\underline{\Phi(0.25)-\Phi(-0.5)}$$

$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ より、

$$P(8<X<11)=\underline{\Phi(0.25)+\Phi(0.5)-1}$$

$$=0.5987+0.6915-1$$

$$=1.2902-1=\underline{0.2902}$$

$$\begin{array}{r} 5987 \\ +6915 \\ \hline 12902 \end{array}$$

となり、正規分布表を用いて計算すると、 $0.\boxed{2902}$ となる。

/