確率統計学レポート用紙

学籍番号: S124 0234	氏名: 根本 優太

演習問題 7. 推定量

(1) パラメータθの推定量$\hat{\theta}$が $E(\hat{\theta})=\theta$ を満たすとき、

$X_1, \ldots\ldots, X_n$を平均μ, 分散σ^2の母集団からの無作為標本とする。

このとき、標本平均$\bar{X}$は母平均μの~~不変~~不偏推定量である。

標本分散S^2は母分散σ^2の不偏推定量ではない。

不偏分散U^2は母分散σ^2の不偏推定量である。

(2) サンプルサイズをn, パラメータθの推定量を$\hat{\theta}=\hat{\theta}_n$とする。

$P(|\hat{\theta}-\theta|>\varepsilon)\to 0$ ($n\to\infty$, 確率収束)が満たされるとき、

$\hat{\theta}$をθの一致推定量という。このとき、

標本平均$\bar{X}$は母平均μの一致推定量である。

標本分散S^2は母分散σ^2の一致推定量である。

不偏分散U^2は母分散σ^2の一致推定量である。

演習問題 8.

$X_1, \ldots\ldots, X_n$を母平均μ, 母分散σ^2の母集団からの無作為標本とすると、標本平均$\bar{X}=\dfrac{X_1+\cdots\cdots+X_n}{n}$について、

(i) $E(\bar{X})=\mu$, $Var(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(ii) $\bar{X}$は$n\to\infty$のとき 0 に確率収束するというのが大数の弱法則の内容であり、これは標本平均が母平均μの不偏推定量であることを言っている。

(iii) $n>>1$のとき$\bar{X}$は近似的に分布$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$に従うというのが中心極限定理の内容であり、正規分布の重要性の根拠を与える。

(iv) 平均 $\mu=-1$, 分散$\sigma^2=20$のとき、サイズ$n=200$の無作為標本による標本平均$\bar{X}$は近似的に $N(-1, 0.1)$ に従う。

演習問題（確率分布）

2項分布 $B(n, p)$

答 (1) 2項分布に従う

(2) まず X の ~~積率母~~ 関数について

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} p_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \underset{2項定理}{=} (pe^t + q)^n$$

よって $M'_X(t) = npe^t(pe^t + q)^{n-1}$

$$M''_X(t) = npe^t(pe^t+q)^{n-1} + n(n-1)p^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2}$$

したがって

$$M'_X(0) = np$$

$$M''_X(0) = np + n(n-1)p^2$$

ゆえに $E(X) = np$

$Var(X) = npq$