確率統計学　演習レポート3　s1240234 根本優太

問題C

平均の定義より、

$E\{a\varphi(X)+b\varphi(X)\}$

これについてEのスカラー倍とすれば、

$E\{a\varphi(X)+b\varphi(X)\} = aE\{\varphi(X)\}+bE\{\varphi(X)\}$

~~となり、これは自明である。~~ となる。 //

問題D.

(1) $f(x)$ が密度関数となることを示せ.

まず $f(x)$ について、λ は正の定数であるから、$f(x) \geqq 0$ である。

また、$0<x<\infty$ における $f(x)$ の x の積分は、

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx$$

$$= \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_{-\infty}^{\infty} = -\left[e^{-\lambda x}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= (-0+1) = 1$$

よって、$f(x)$ は密度関数の定義を満たしているため、確率密度関数となる。

(2) 部分積分をすると、

$$E(x) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)'dx$$

$$= \lambda\left\{\left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right\}$$

$$= -\lambda\frac{1}{\lambda}\left\{\left[xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^\infty\right\}$$

$$= -\left\{(0-0)+\frac{1}{\lambda}(0-1)\right\} = \frac{1}{\lambda}$$

(3) (2)と同様に、

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty x^2\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)'dx$$

$$= \lambda\left\{-\frac{1}{\lambda}\left[x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx\right\}$$

$$= \left\{-(0-0)+2\int_0^\infty x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)'dx\right\}$$

$$= 2\left\{-\frac{1}{\lambda}\left[xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right\}$$

$$E(x^2) = 2\left\{-\frac{1}{\lambda}\left[xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left\{-(0-0) + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)(0-1) = \frac{2}{\lambda^2}$$

ここで式(2.25)より $Var(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$ だから

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \lambda^{-2}$$

よって $Var(X) = \lambda^{-2}$

//