確率統計学レポート用紙

学籍番号: s1240234	氏名: 根本優太

問題 (3.2.6. 正規分布(ガウス分布) ページ12)

この計算を完成させ、=1となることを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$$

$u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ とおくと、$x = \sqrt{2}\sigma u + \mu$, $dx = \sqrt{2}\sigma du$.

x	$-\infty \to \infty$
u	$-\infty \to \infty$

ガウス積分

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2} du + \int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right)$$

ここで、ガウス積分について $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ となるから、

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2} du + \int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2} du + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ここで $t = -u$ とおくと、$dt = -du$

u	$-\infty \to 0$
t	$\infty \to 0$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2} du + \frac{1}{2} = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{0} e^{-t^2} dt + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \frac{1}{2} = 1$$

よって $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ となる。

問題 (教科書 ページ69)

Xが正規分布 $N(10, 16)$ に従うとき $P(8 < X < 11)$ を求めよ。

正規分布 $N(10, 16)$ より、$\mu = 10$, $\sigma^2 = 16$, $\sigma = 4$.

Pについて、$\alpha = \frac{a-\mu}{\sigma} = \frac{8-10}{4} = -\frac{1}{2}$,

$\beta = \frac{b-\mu}{\sigma} = \frac{11-10}{4} = \frac{1}{4}$ であるから、

$P(8 < X < 11) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$

$= \Phi\left(\frac{1}{4}\right) + \left\{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right\}$

ここで正規分布表より、$\Phi(0.25) = 0.5987$、

$\Phi(0.5) = 0.6915$ であるから、

$P(8 < X < 11) = 0.6915 + 0.5987 - 1$

$= 0.2902$

となる。 //