確率統計学　演習レポート5　s1240234 根本優太

レポート問題（3.確率分布 ページ5）

3次のモーメント $E(X^3)$ を求めよ。

Xがポアソン分布に従うとき、$E(X)=Var(X)=\lambda$。

$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$

$M'_X(t)=\lambda e^t M_X(t)$

$M'_X(0)=\lambda M_X(0)=\lambda$

$M''_X(t)=\lambda e^t M_X(t)+\lambda e^t M'_X(t)$

$M''_X(0)=\lambda M_X(0)+\lambda M'_X(0)=\lambda+\lambda=2\lambda$.

3次のモーメントを求めるために積率母関数の3回微分を行う。

$$M'''_X(t)=\lambda e^t M_X(t)+\lambda e^t M'_X(t)+2\lambda^2 e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}+\lambda^2 e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t$$
$$=\lambda e^t M_X(t)+\lambda e^t M'_X(t)+\lambda^2 e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}(2+\lambda e^t)$$
$$=M''_X(t)+\lambda e^t(2+\lambda e^t)M'_X(t)$$

$$M'''_X(0)=M''_X(0)+\lambda e^0(2+\lambda e^0)M'_X(0)$$
$$=2\lambda+\lambda(2+\lambda)\lambda$$
$$=\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda=\lambda(\lambda^2+2\lambda+2)$$

よって、$E(X^3)=M'''_X(0)=\lambda(\lambda^2+2\lambda+2)$

問題（3.確率分布，ページ7）

計算を完成させよ。

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=}$$

$$E(X)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2(b-a)}[x^2]_a^b=\frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2)$$
$$=\frac{1}{2(b-a)}(b-a)(b+a)=\frac{1}{2}(a+b)$$

$$\boxed{E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=}$$

$$E(X^2)=\frac{1}{b-a}\int_a^b \cancel{x^2}dx=\frac{1}{3(b-a)}[x^3]_a^b=\frac{1}{3(b-a)}(b^3-a^3)$$

裏面へ続く

$$E(X^2) = \frac{1}{3(b-a)}(b-a)(b^2+ab+a^2) = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = }$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{1}{3}(a^2+b^2+ab) - \left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{3}(a^2+b^2+ab) - \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2) \\
&= \frac{1}{12}(4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2) \\
&= \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) = \frac{1}{12}(a-b)^2
\end{aligned}$$

//

問題（3.確率分布，ページ3）

チェックせよ。

定義より，$E(X) = \cancel{M_X(t)} = M'_X(0)$

$$\begin{aligned}
&= npe^0(pe^0+q)^{n-1} \\
&= np(p+q)^{n-1}
\end{aligned}$$

2項分布の確率変数の定義 $q = 1-p$ より $p+q=1$ だから，

$$E(X) = np \cdot 1^{n-1} = np$$

また定義より $Var(X) = M''_X(0) - \{M'_X(0)\}^2$ ~~だ~~ であり，

$M''_X(0) = np + n(n-1)p^2$ であるから，

$$\begin{aligned}
Var(X) &= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

ここで $q = 1-p$ より，

$$Var(X) = npq$$

//