NO.

DATE

フーリエ解析第1部 演習レポート　　s1240234 根本優太

問題1.(4)

$f_4(x) = x(\pi^2 - x^2)$　　$f_4(x) \sim 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \sin nx$

$f_4(x)$においては、

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\pi^2 - x^2)\cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

ここで$g(x) = a_n$とおくと、$g(-x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\pi^2 - x^2)\cos nx\, dx = -g(x)$

であるから、a_nは奇関数であり、$a_n = 0$である。

また、

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\pi^2 - x^2)\sin nx\, dx \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

ここで$g(x) = b_n$とおくと、$g(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\pi - x^2)\sin nx\, dx = g(x)$

であるから、b_nは偶関数であり、

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(\pi^2 - x^2)\sin nx\, dx$　とできる。

$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx - \int_0^{\pi} x^3 \sin nx\, dx\right)$

ここで、

$$\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx = \int_0^{\pi} x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)' dx = -\frac{1}{n}[x\cos nx]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx$$

$$= -\frac{1}{n}(\pi\cos n\pi) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi\cos n\pi}{n}$$

また、

$$\int_0^{\pi} x^3\sin nx\, dx = \left[x^3\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_0^{\pi} - \left[3x^2\left(-\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\right]_0^{\pi}$$

$$+ \left[6x\left(\frac{1}{n^3}\cos nx\right)\right]_0^{\pi} - \left[6\left(\frac{1}{n^4}\sin nx\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n}[x^3\cos nx]_0^{\pi} + \frac{3}{n^2}[x^2\sin nx]_0^{\pi}$$

$$+ \frac{6}{n^3}[x\cos nx]_0^{\pi} - \frac{6}{n^4}[\sin nx]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n}(\pi^3\cos n\pi) + \frac{6}{n^3}(\pi\cos n\pi)$$

$$= \frac{\pi}{n}\cos n\pi\left(\frac{6}{n^2} - \pi^2\right)$$

よって、$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos n\pi}{n} + \frac{\pi^3\cos n\pi}{n} - \frac{6\pi\cos n\pi}{n^3}\right)$

整理して、

$$b_n = -\frac{12\cos n\pi}{n^3}$$

よって、$a_n = 0\ (n=0,1,2,\cdots)$, $b_n = -\frac{12\cos n\pi}{n^3}$

$$f_4(x) \sim 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\cos n\pi}{n^3}\sin nx\,dx$$

ここで、$-\cos n\pi = (-1)^{n-1}$ とできるから、

$$f_4(x) \sim 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin nx\,dx$$

これは与式と一致する。

//