NO.

DATE

フーリエ解析第3部　演習レポート　S1240234 根本優太

問題2.

(2-1)

$G_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_a(x) e^{-i\xi x} dx$ であるから、

$$G_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\xi x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-i\xi x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\xi x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{a-i\xi}\left[e^{(a-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+i\xi}\left[e^{-(a+i\xi)x}\right]_{0}^{\infty}\right.$$

ここで $\lim_{x\to-\infty} e^{(a-i\xi)x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} e^{-(a+i\xi)x} = 0$ であるから、

$$G_a(\xi) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{a-i\xi}(1-0) - \frac{1}{a+i\xi}(0-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{a+i\xi+a-i\xi}{2\pi(a+i\xi)(a-i\xi)}\right\}$$

$$= \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}\pi}\frac{1}{a^2+\xi^2}$$

$$= \frac{a}{\pi(a^2+\xi^2)}$$

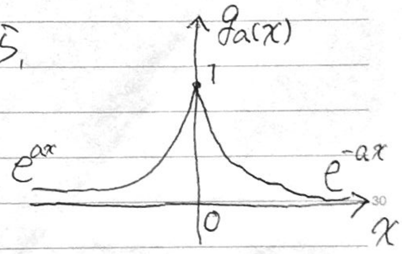
したがって $g_a(x)$ のフーリエ変換は

$$G_a(\xi) = \frac{a}{\pi(a^2+\xi^2)}$$

となる。

(2-3)

まず、関数 $g_a(x)$ は $x \neq 0$ でなめらかでかつ連続だから、



フーリエ積分 (フーリエ逆変換) $\int_{-\infty}^{\infty} G_a(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ は

関数 $g_a(x)$ に収束する。

すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi(a^2+\xi^2)} \cancel{\pi} e^{ix\xi} d\xi = e^{-a|x|}$

ここでオイラーの公式より $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ だから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\cos x\xi + i\sin x\xi)}{\pi(a^2+\xi^2)} d\xi = e^{-a|x|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\xi + i\sin x\xi}{a^2+\xi^2} d\xi = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|}$$ とできる。

さらに $\sin\theta$ は奇関数であり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\xi}{\xi^2+a^2} = 0$$ となるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\xi}{\xi^2+a^2} d\xi = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|}$$ となる。

(2-4)

$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+b^2}$ とおく。

それぞれのフーリエ変換を $F(x)$, $G(x)$ とすると、

$F(x) =$