NO.

DATE

フーリエ解析第2部　演習レポート　s1240234 根本優大

問題1,(5)

$f_5(x)=e^x$

(5-1)

$f_5(x)$において、複素フーリエ級数の定義によりc_nを求めると、

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x e^{-inx}dx \quad (n=\pm1,\pm2,\pm3,\dots)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x(1-in)}dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}e^{x(1-in)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left\{e^{\pi(1-in)}-e^{-\pi(1-in)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{(1-in)(1+in)}\left(e^\pi\frac{1}{e^{in\pi}}-\frac{1}{e^\pi}e^{in\pi}\right)$$

ここでオイラーの公式から、$e^{ix}=\cos x+i\sin x$であるから、

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left\{e^\pi\frac{1}{\cos n\pi+i\sin n\pi}-\frac{1}{e^\pi}(\cos n\pi+i\sin n\pi)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left\{e^\pi\frac{1}{(-1)^n}-e^{-\pi}(-1)^n\right\}$$

$\frac{1}{(-1)^n}=(-1)^n$とできるから、

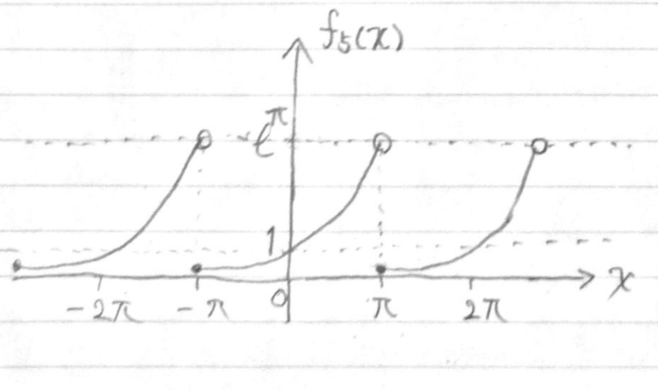
$$c_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}(e^\pi-e^{-\pi})(-1)^n$$

よって複素フーリエ級数の指数関数表示に当てはめると、

$$f_5(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}=\frac{(e^\pi-e^{-\pi})}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1+in)(-1)^n}{n^2+1}e^{inx}$$

となり、これは与式と一致する。

(5-2)



(5-3)

まず、f_5のフーリエ級数 $\frac{e^\pi-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1+in)(-1)^n}{n^2+1}e^{inx}$ を$S(x)$とおく。

グラフよりf_5は区分的になめらかであり、

f_5は$x=n\pi$ (nは奇数) で不連続だから、

$S(x)$は$x=(2k-1)\pi$において

$\dfrac{\lim_{n \to \pi} f_5(n) + \lim_{n \to -\pi} f_5(n)}{2} = \dfrac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$ に収束する。

また f_5 は $x = n\pi$ (n は偶数) と $x = \pm\frac{\pi}{2}$ で連続であり、$S(x)$ は

$x = \frac{\pi}{2}$ で $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}$,

$x = -\frac{\pi}{2}$ で $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$,

また $x = 2k\pi$ で 1 に収束する。

$$\boxed{\begin{array}{l} f_5(x) = e^x \\ C_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{n^2+1}(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n \end{array}}$$

$$\boxed{(-1)^{2n} = 1}$$

$$\boxed{\frac{1+in}{1-in} = 1}$$

(5-4) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \pi \cdot \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$.

Persevalの不等式より、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_5(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

$f_5(x)$ と C_k に当てはめると、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{n^2+1}(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n\right\}^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi^2}(e^{\pi} - e^{-\pi})^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+in)^2}{(n^2+1)^2}(-1)^{2n}$$

$$\cancel{\frac{1}{4\pi}}(e^{2\pi} - e^{-2\pi}) = \cancel{\frac{1}{4\pi}}\frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cancel{(1+in)}(1+in)}{(n^2+1)\cancel{(1+in)}(1-in)} \cdot 1$$

$$(e^{\pi} + e^{-\pi})\cancel{(e^{\pi} - e^{-\pi})} = \frac{1}{\pi}\cancel{(e^{\pi} - e^{-\pi})}(e^{\pi} - e^{-\pi})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

$$\pi\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

これは与式と一致する。