NO.

DATE

フーリエ解析第4部 演習レポート　s124.234 根本優太

問題2

(3) $y' - 2y = x,\ y(0) = 0$

まず、$x = t$ とおき、両辺をラプラス変換すると、

$\mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t)$

すなわち、

$s\mathcal{L}(y) - y(+0) - 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t)$

ここで $y(0) = 0$ より $y(+0) = 0$、またラプラス変換表より $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ であるから、

$(s-2)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2(s-2)}$

ここで、$\mathcal{L}(y) = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s-2}$ とすると、

$\frac{1}{s^2(s-2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s-2}$

$1 = (As+B)(s-2) + Cs^2$

$s = 0$ とすると、

$1 = -2B \qquad B = -\frac{1}{2}$

$s = 2$ とすると、

$1 = 4C \qquad C = \frac{1}{4}$

$s = 1$ のとき

$1 = -(A - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

これを解くと、

$A = -\frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{4}$

したがって

$\mathcal{L}(y) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-2} = -\frac{1}{4}\mathcal{L}(1) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(t) + \frac{1}{4}\mathcal{L}(e^{2t})$

以上より、$y = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$ となる。

//

(10) $y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = \sin bt,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$

両辺をラプラス変換すると、

$\mathcal{L}(y'') - (\alpha+\beta)\mathcal{L}(y') + \alpha\beta\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin bt)$

$s^2\mathcal{L}(y) - sy(+0) - y'(+0) \quad + (\alpha+\beta)\{s\mathcal{L}(y) - y(+0)\} + \alpha\beta\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin bt)$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ であるから、

$\{s^2 + s(\alpha+\beta) + \alpha\beta\}\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin bt)$

$(s+\alpha)(s+\beta)\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin bt)$

ラプラス変換表より、$\mathcal{L}(\sin bt) = \frac{b}{s^2+b^2}$ であるから、

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)} \frac{b}{s^2+b^2}$$

ここで. $\mathcal{L}(y) = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta} + \frac{Cs+Db}{s^2+b^2}$ とおくと.

$$\frac{b}{(s-\alpha)(s-\beta)(s^2+b^2)} = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta} + \frac{Cs+Db}{s^2+b^2}$$

$$b = A(s^2+b^2)(s-\beta) + B(s-\alpha)(s^2+b^2) + (Cs+Db)(s-\alpha)(s-\beta)$$

$s=\alpha$ とすると.

$$b = A(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)$$

よって.

$$\underline{A = \frac{b}{(\alpha^2+b^2)(\alpha-\beta)}}$$

$s=\beta$ とすると.

$$b = B(\beta-\alpha)(\beta^2+b^2)$$
$$= -B(\alpha-\beta)(\beta^2+b^2)$$

よって.

$$\underline{B = -\frac{b}{(\beta^2+b^2)(\alpha-\beta)}}$$

$s = ib$ とすると.

$$b = b(iC+D)(ib-\alpha)(ib-\beta)$$

$$D+iC = \frac{1}{(ib-\alpha)(ib-\beta)}$$

これを有理化すれば.

$$D+iC = \frac{\alpha\beta-b^2+ib(\alpha+\beta)}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}$$

$$= \frac{\alpha\beta-b^2}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)} + i\frac{b(\alpha+\beta)}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}$$

よって.

$$\underline{C = \frac{b(\alpha+\beta)}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}} \qquad \underline{D = \frac{\alpha\beta-b^2}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}}$$

したがって.

$$\mathcal{L}(y) = \frac{b}{(\alpha^2+b^2)(\alpha-\beta)}\frac{1}{s-\alpha} - \frac{b}{(\beta^2+b^2)(\alpha-\beta)}\frac{1}{s-\beta}$$
$$+ \frac{b(\alpha+\beta)}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}\frac{s}{s^2+b^2} + \frac{\alpha\beta-b^2}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}\frac{b}{s^2+b^2}$$

$$= \frac{b}{(\alpha^2+b^2)(\alpha-\beta)}\mathcal{L}(e^{\alpha}) - \frac{b}{(\beta^2+b^2)(\alpha-\beta)}\mathcal{L}(e^{\beta}) + \frac{b(\alpha+\beta)}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}\mathcal{L}(\cos bt)$$
$$+ \frac{\alpha\beta-b^2}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}\mathcal{L}(\sin bt)$$

よって.

$$y = \frac{be^{\alpha}}{(\alpha^2+b^2)(\alpha-\beta)} - \frac{be^{\beta}}{(\beta^2+b^2)(\alpha-\beta)} + \frac{b(\alpha+\beta)\cos bt + (\alpha\beta-b^2)\sin bt}{(b^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)} \quad //$$