Área de superfície

Cálculo Diferencial e Integral III

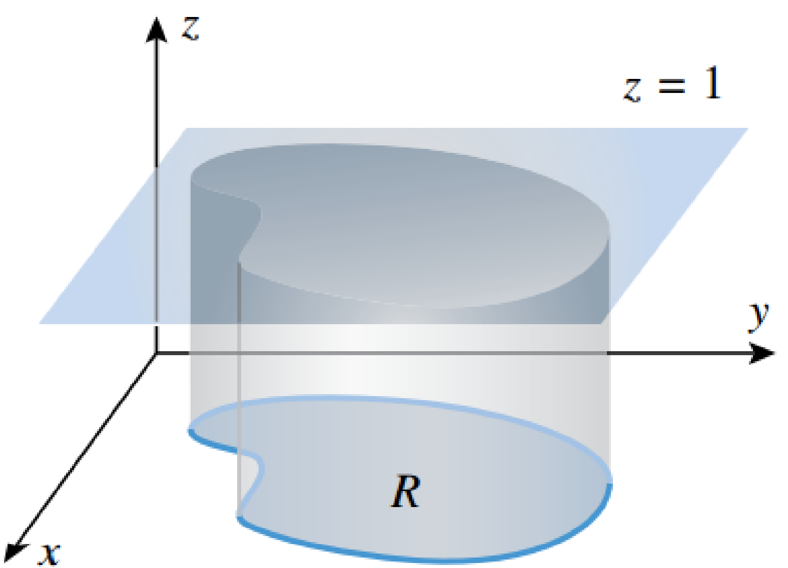
Suzana M. F. de Oliveira

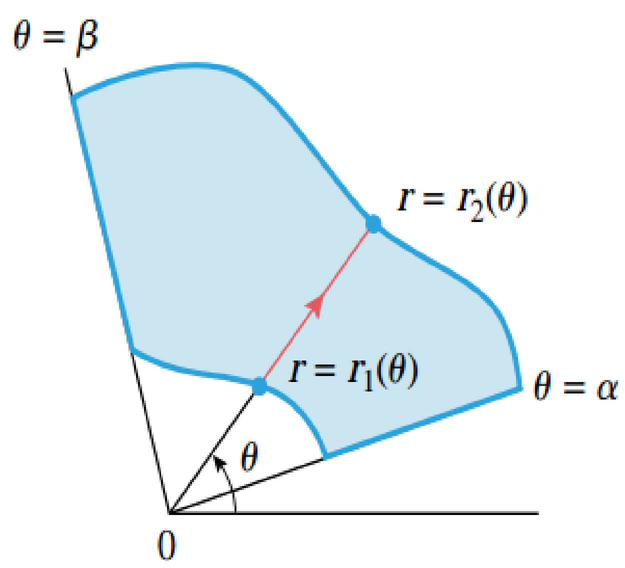
Índice

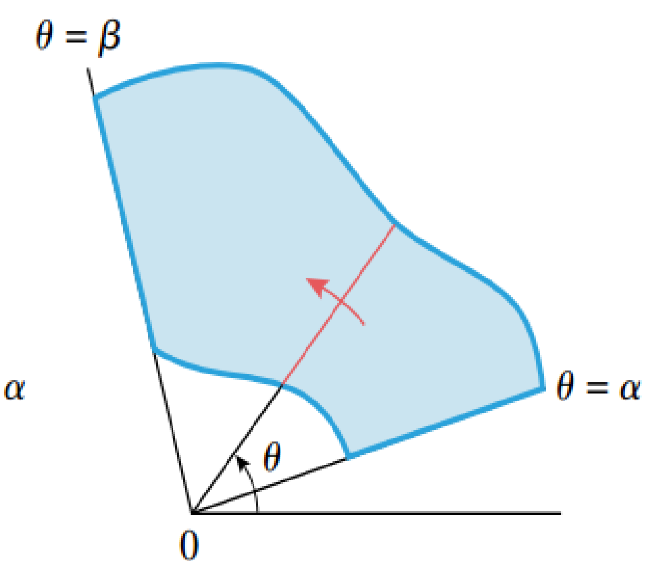
Revisão

Revisão

- Integral dupla
  - Inversão da ordem de integração
  - Cálculo da área da região
  - Coordenadas polares





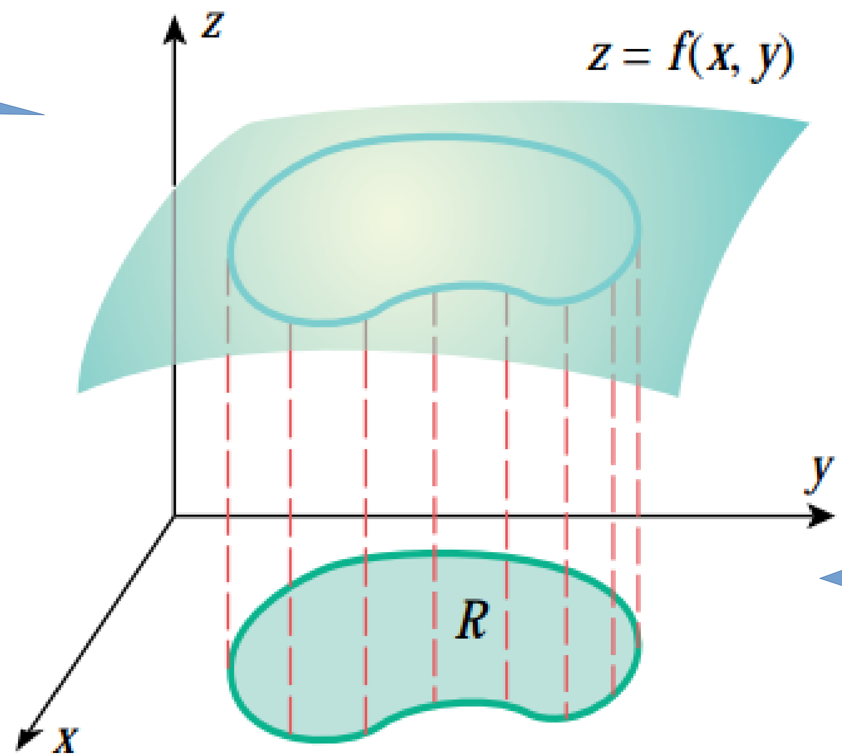


Área de superfícies

Área de superfícies

- Motivação

Vai aprender:
O cálculo da área
da superfície

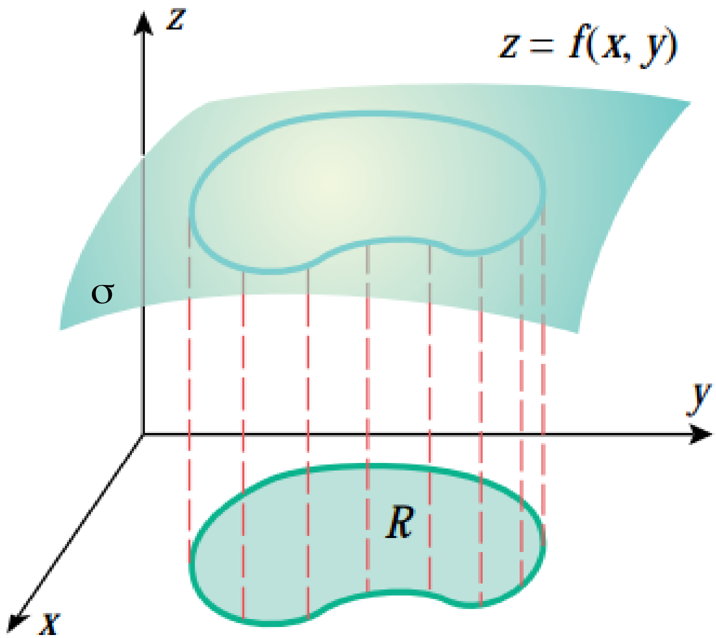


Já se sabe:
O cálculo do
volume sob a curva
e o cálculo da área
da região R

Área de superfícies

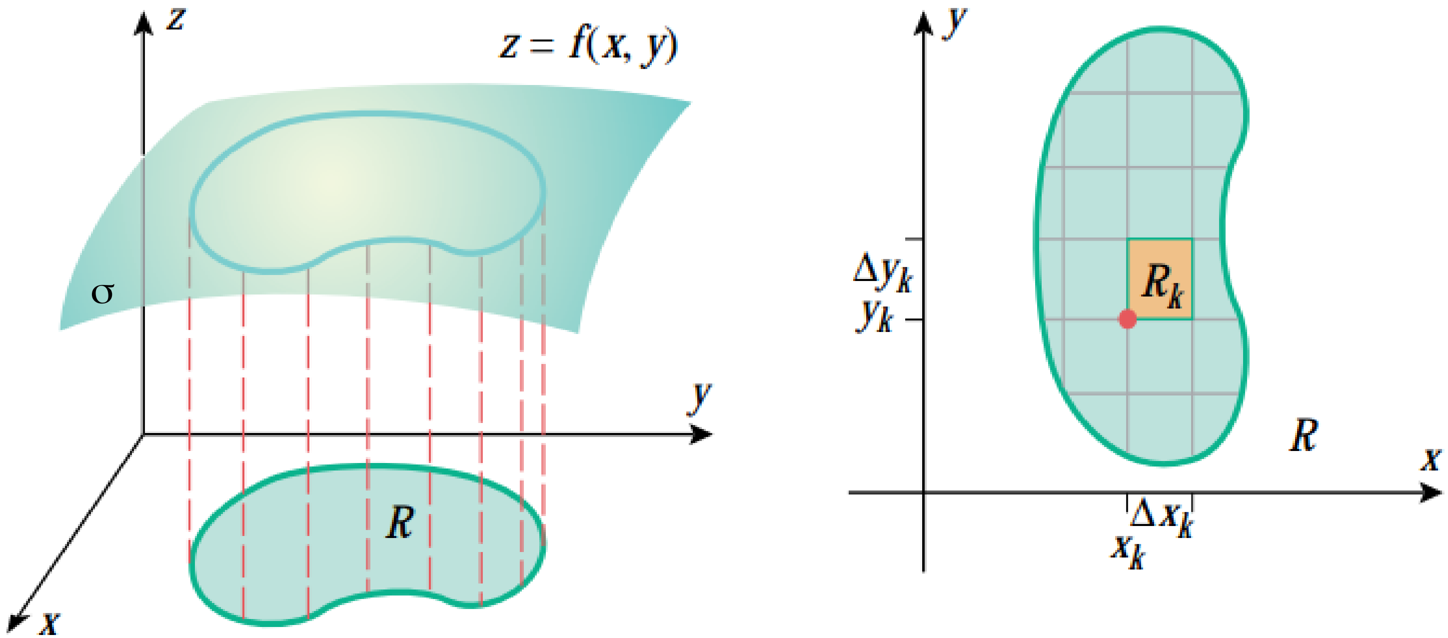
- Considere uma superfície σ da forma z = f(x, y) acima de uma região R do plano xy
  - Suponha f com derivadas parciais de primeira ordem contínuas nos pontos interiores de R

Diferenciável → Plano tangente não vertical



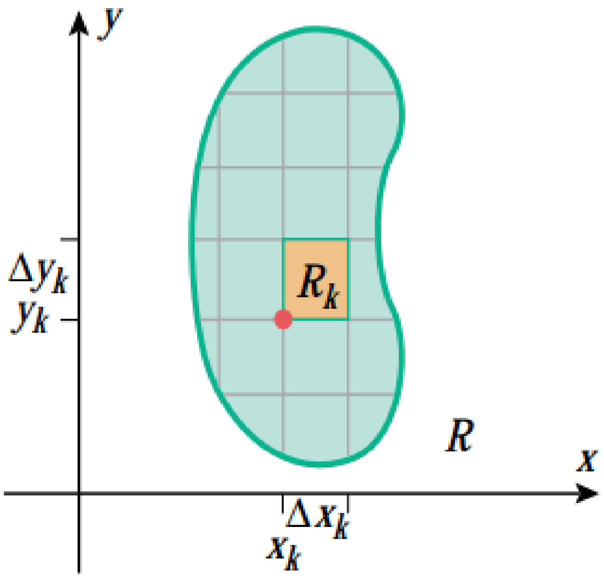
Área de superfícies

- Considere uma superfície σ da forma z = f(x, y) acima de uma região R do plano xy
  - Subdividindo R em regiões retangulares com retas paralelas aos eixos x e y
  - Considerando os sub-retângulos internos a R



Área de superfícies

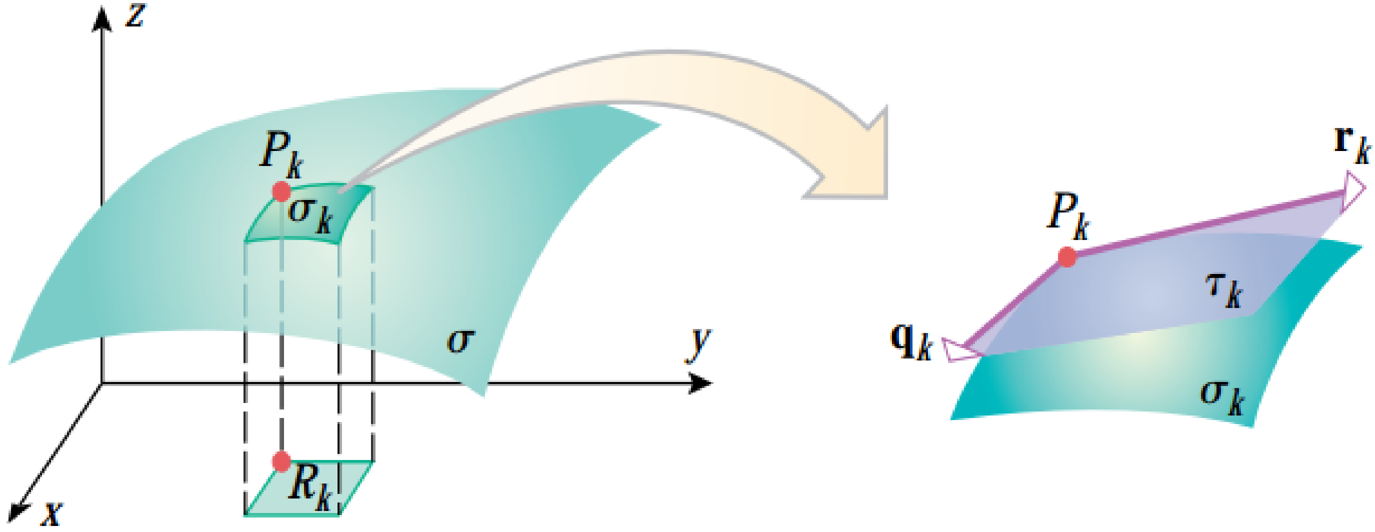
- Considere uma superfície σ da forma $z = f(x, y)$ acima de uma região R do plano xy
  - Seja (x_k, y_k) o canto inferior esquerdo do k-ésimo retângulo R_k de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$



Área de superfícies

- Considere uma superfície σ da forma $z = f(x, y)$ acima de uma região R do plano xy
  - A porção de σ que fica acima de R_k é uma porção curvilínea da superfície que tem um vértice em $P_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ de área ΔS_k

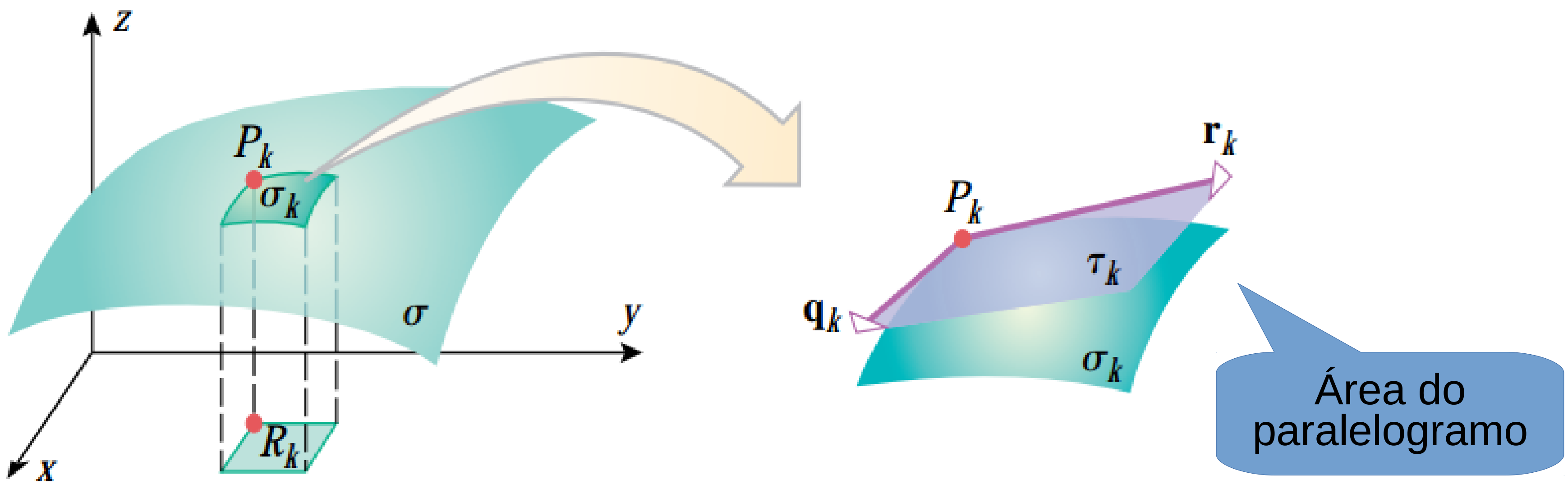
Pode ser aproximada pela porção da área do plano tangente



Área de superfícies

- Considere uma superfície σ da forma z = f(x, y) acima de uma região R do plano xy
  - Equação do plano tangente

$$z = f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f_y(x_k, y_k)(y - y_k)$$

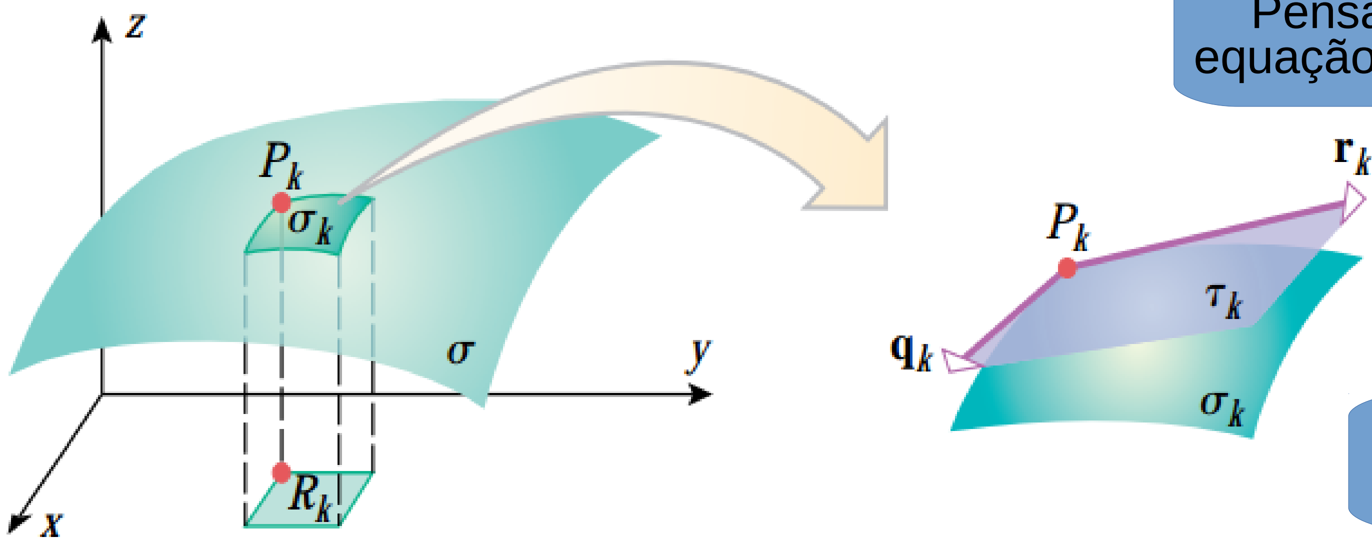


Área de superfícies

- Considere uma superfície σ da forma z = f(x, y) acima de uma região R do plano xy
  - Paralelogramo τ_k com vértice em P_k e lados adjacentes determinados pelos vetores

$$\mathbf{q}_k = \left\langle \Delta x_k, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x_k \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_k = \left\langle 0, \Delta y_k, \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y_k \right\rangle$$

Pensar na equação da reta



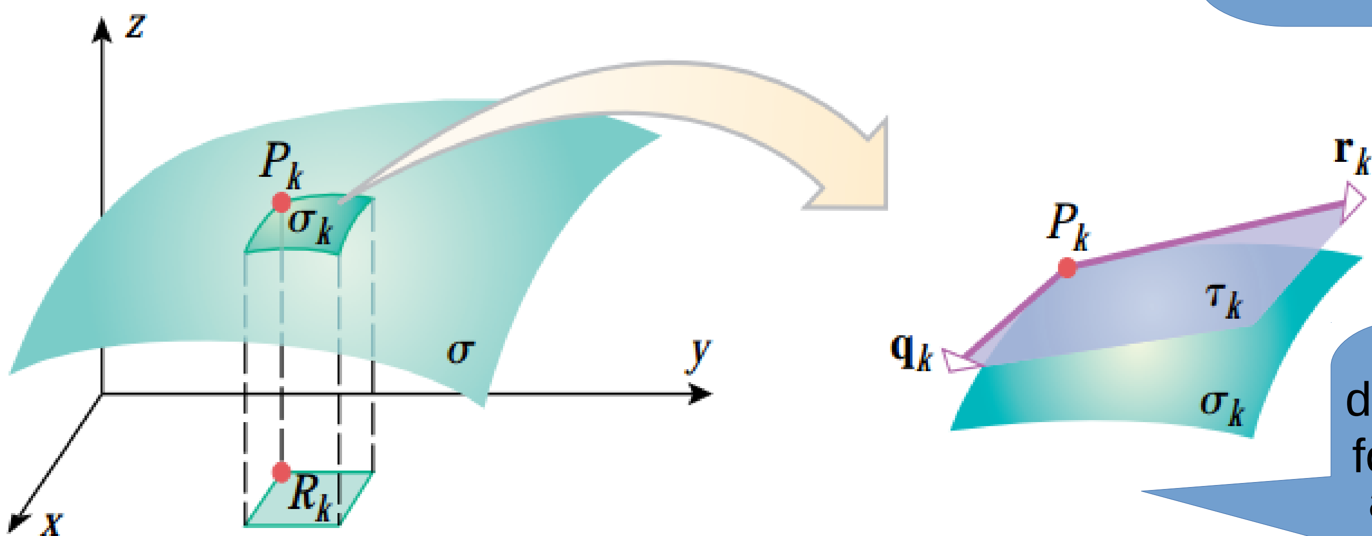
Área do paralelogramo

Área de superfícies

- Considere uma superfície σ da forma z = f(x, y) acima de uma região R do plano xy
  - Área do paralelogramo

$$\Delta S_k \approx \text{área } \tau_k = \|\mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k\|$$

Lembrar que
||u×v|| = ||u|| ||v|| sinθ
e que a área do paralelogramo é b.h



Se o as dimensões de R_k forem pequenas a aproximação é boa

Área de superfícies

- Considere uma superfície σ da forma z = f(x, y) acima de uma região R do plano xy
  - Área do paralelogramo

$$\|\mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y_k \end{matrix} \right\|$$

$$\Delta S_k \approx \left\| \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \Delta x_k \Delta y_k \right\| = \left\| -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right\| \Delta x_k \Delta y_k$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, \Delta A_k$$

Área de superfícies

- Considere uma superfície σ da forma z = f(x, y) acima de uma região R do plano xy
  - Área da superfície aproximada

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, \Delta A_k$$

    - No limite

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, \Delta A_k$$

    - Equivalente a:

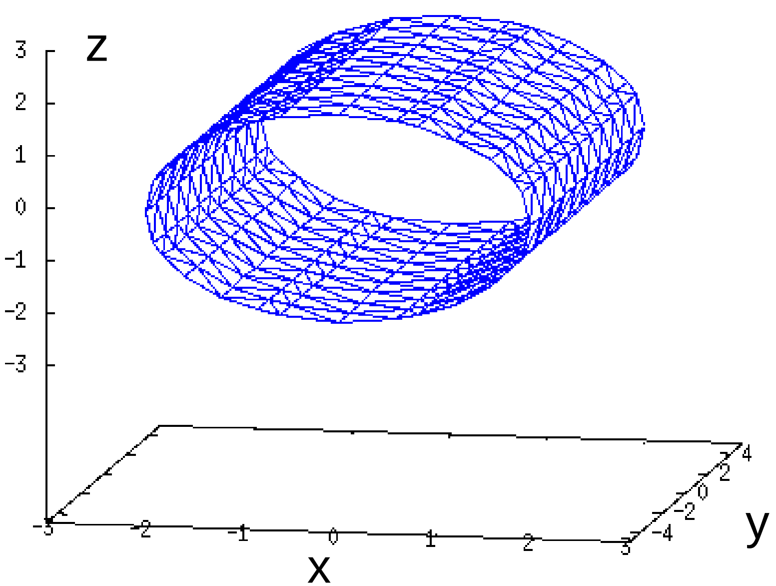
$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

Área de superfícies

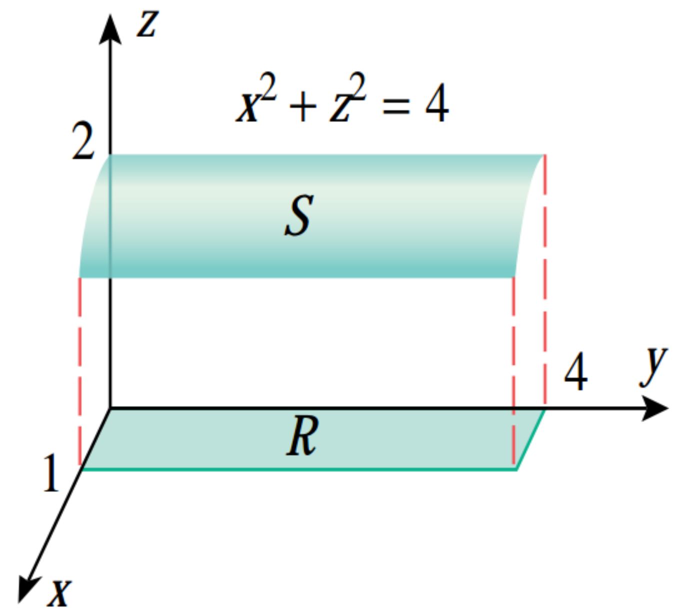
- Exemplo: Encontre a área da parte da superfície acima do retângulo R

$$z = \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 4$$

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$



Uma parte do cilindro



Área de superfícies

- Exemplo: Encontre a área da parte da superfície acima do retângulo R

$$z = \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 4$$

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\, dA$$

Área de superfícies

- Exemplo: Encontre a área da parte da superfície acima do retângulo R

$$z = \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 4$$

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\, dA = \int_0^4 \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx\, dy$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{asin}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Área de superfícies

- Exemplo: Encontre a área da parte da superfície acima do retângulo R

$$z = \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 4$$

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\, dA = \int_0^4 \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx\, dy$$

$$= 2\int_0^4 \left[\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_{x=0}^{1} dy$$

$$\frac{d}{dx} asin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

sin(30)=1/2
sin(0) =0

Área de superfícies

- Exemplo: Encontre a área da parte da superfície acima do retângulo R

$$z = \sqrt{4 - x^2} \qquad\qquad 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 4$$

$$\begin{aligned}
S &= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \\
&= \iint_R \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\, dA = \int_0^4 \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx\, dy \\
&= 2\int_0^4 \left[\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_{x=0}^{1} dy = 2\int_0^4 \frac{\pi}{6}\, dy = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} asin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

sin(30)=1/2
sin(0) =0

Área de superfícies

- Exercício: Encontre a área de superfície da porção do paraboloide abaixo do plano

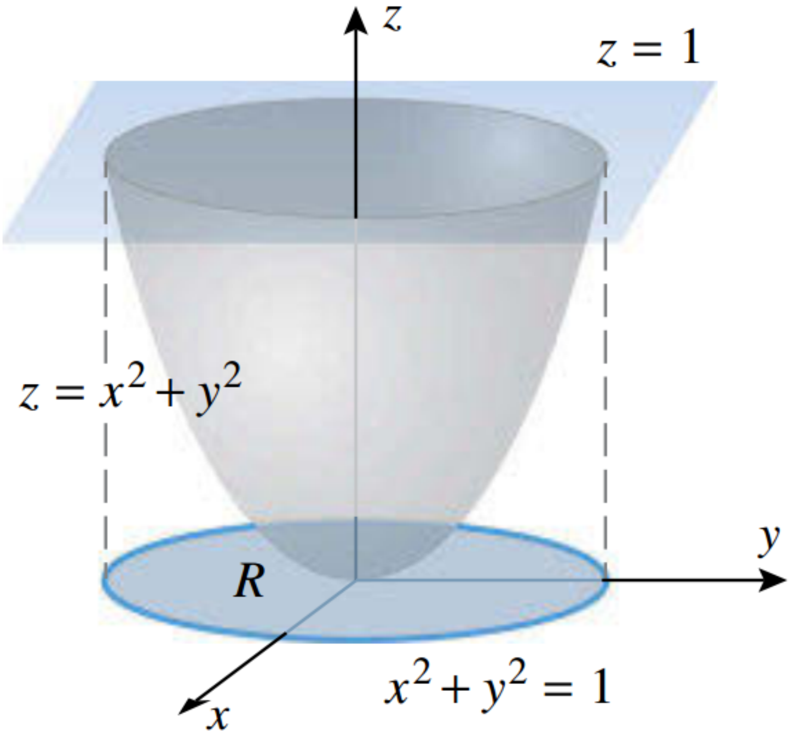
$$z = x^2 + y^2 \qquad z = 1$$

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$S = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

Ideal usar coordenadas polares
x = r cos θ; y = r sin θ

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r\, dr\, d\theta$$

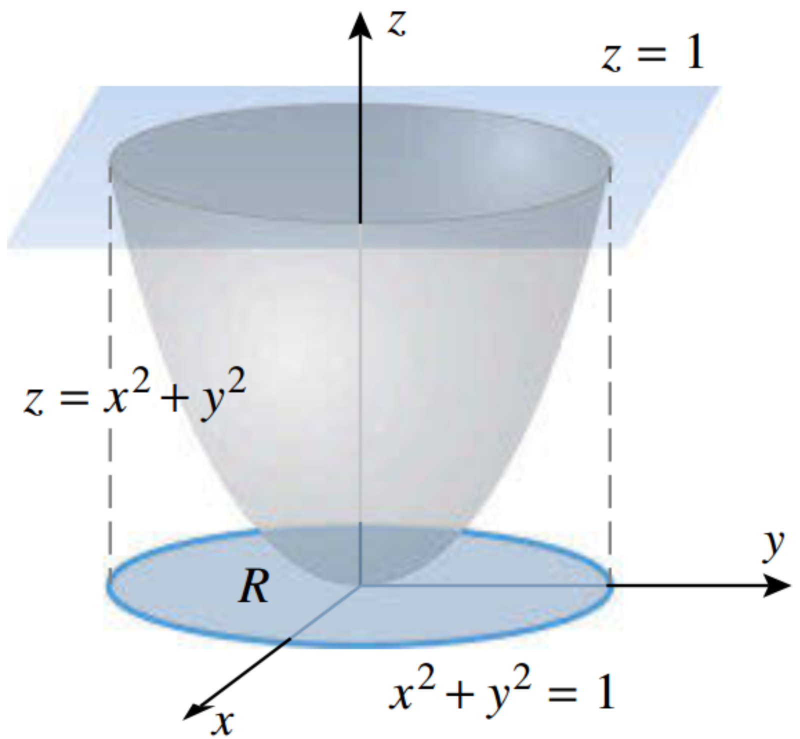


Área de superfícies

- Exercício: Encontre a área de superfície da porção do paraboloide abaixo do plano

$$z = x^2 + y^2 \qquad\qquad z = 1$$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2} \right]_{r=0}^{1} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)\, d\theta \\
&= \frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1)
\end{aligned}
$$



Área de superfícies

- Representação paramétrica
  - Algumas superfícies podem não ser convenientemente descritas em termos de funções $z = f(x, y)$

Área de superfícies

- Representação paramétrica
  - Curvas no espaço tridimensional

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

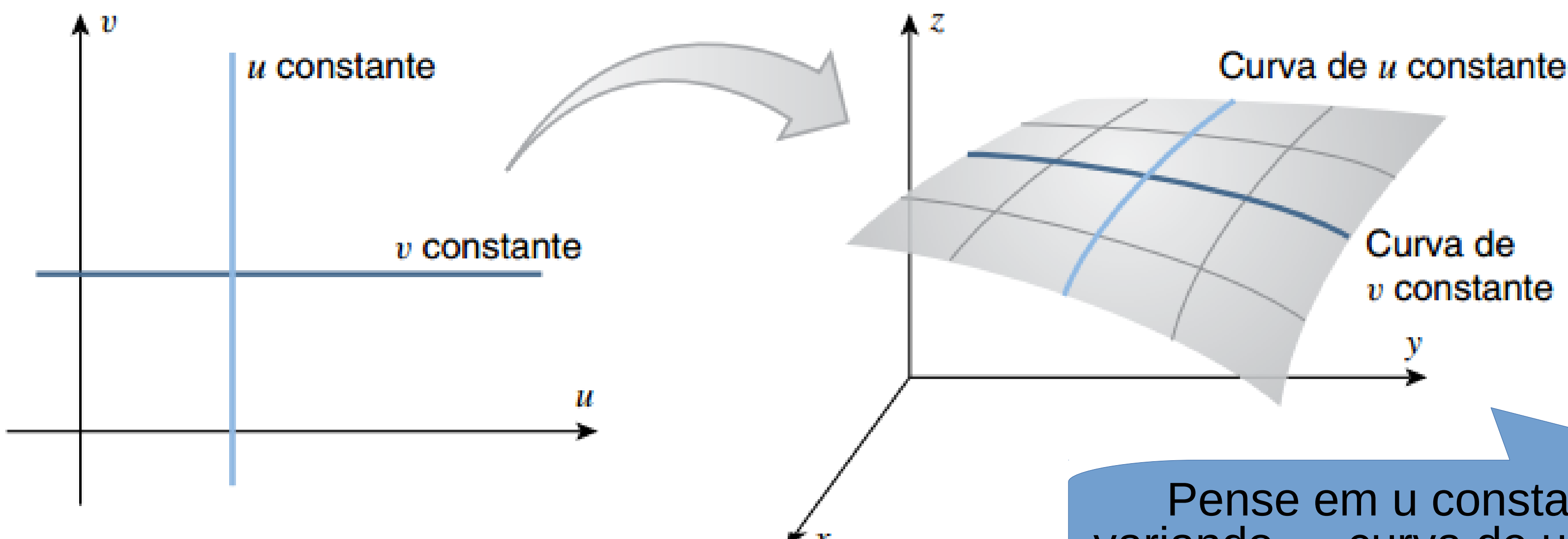
Área de superfícies

- Representação paramétrica
  - Curvas no espaço tridimensional

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

  - Superfície no espaço tridimensional

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

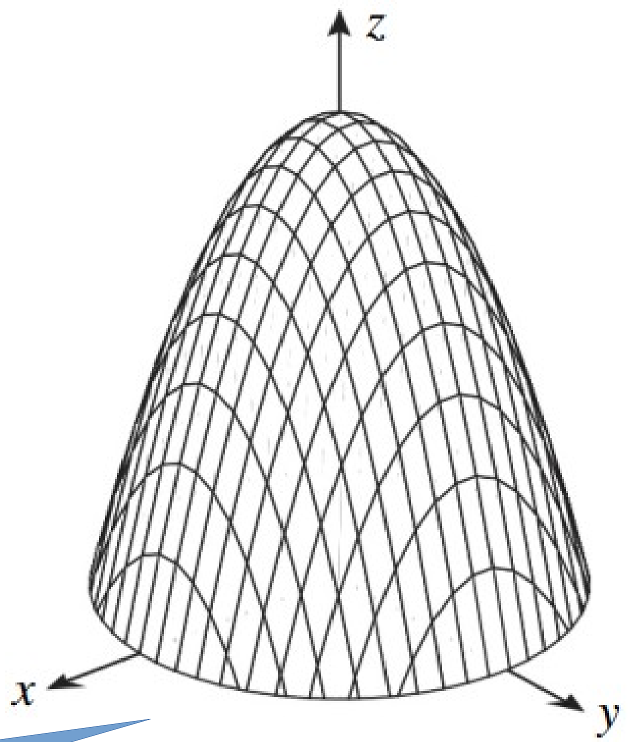


Pense em u constante e v variando → curva de u constante

Área de superfícies

- Representação paramétrica de superfície
  - Exemplo: Considere o paraboloide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$



- Usando a parametrização

$$x = u, \quad y = v,$$
$$z = 4 - u^2 - v^2$$

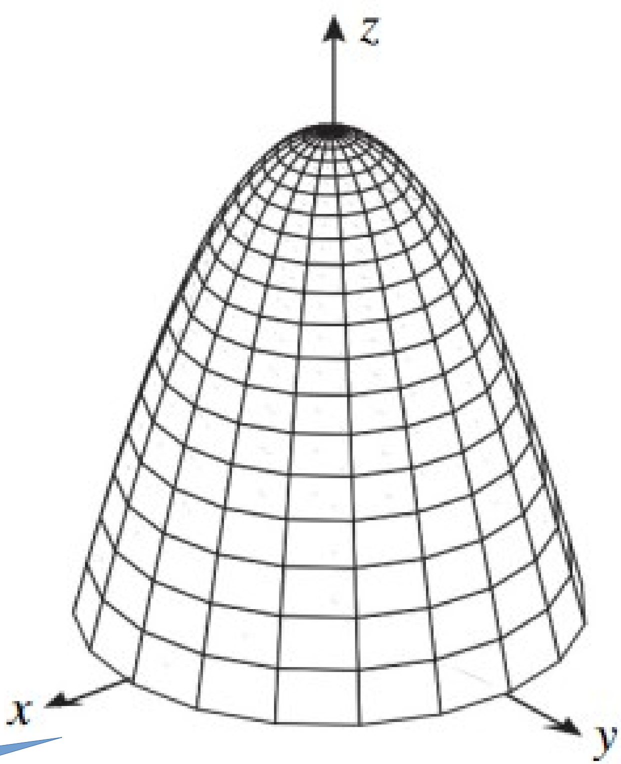
As linhas seguem
as curvas
u e v contantes

$$u^2 + v^2 \leq 4$$

Área de superfícies

- Representação paramétrica de superfície
  - Exemplo: Considere o paraboloide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$



- Usando a coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$z = 4 - r^2$$

As linhas seguem
as curvas
r e θ contantes

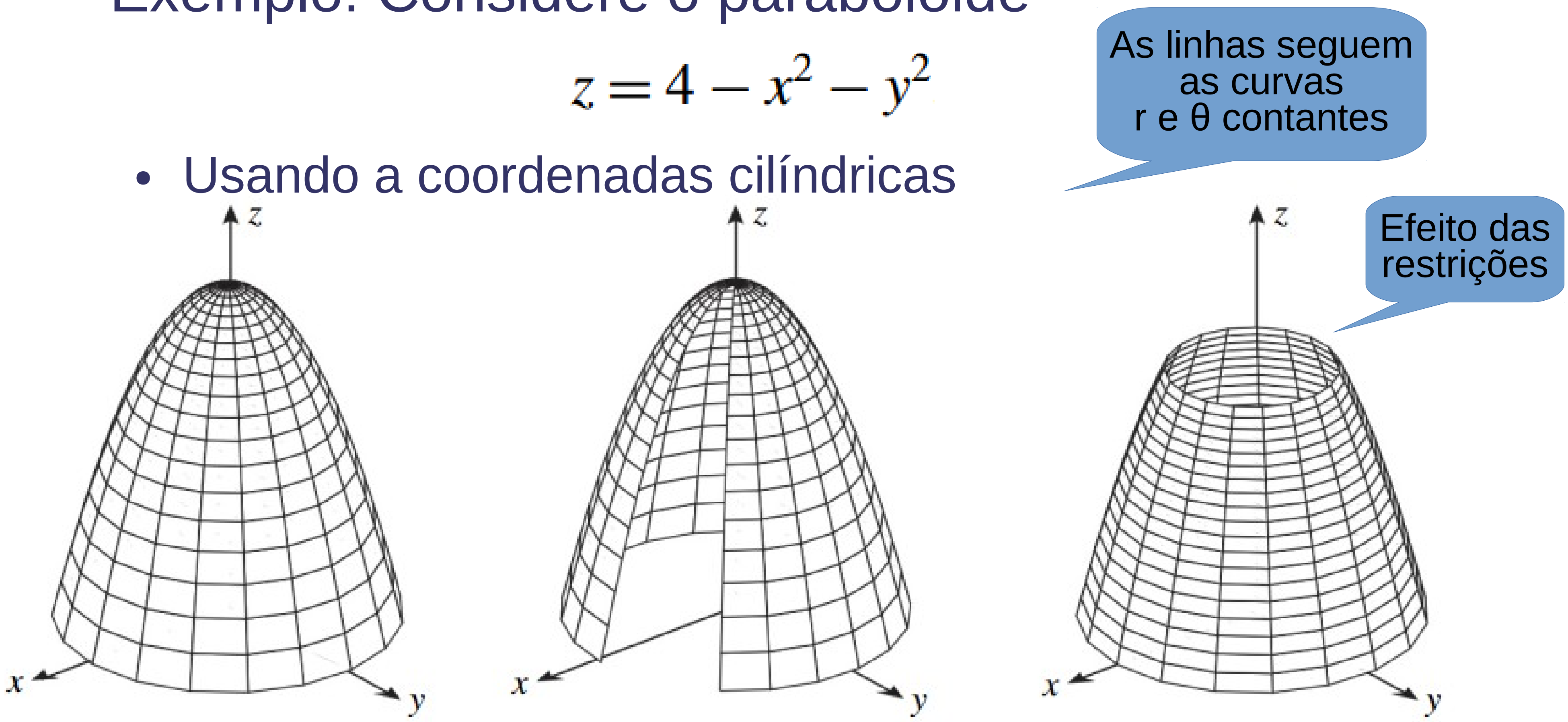
$$0 \le r \le 2$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$

Área de superfícies

- Representação paramétrica de superfície
  - Exemplo: Considere o paraboloide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

    - Usando a coordenadas cilíndricas



$0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le r \le 2$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le 2\pi$

$1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

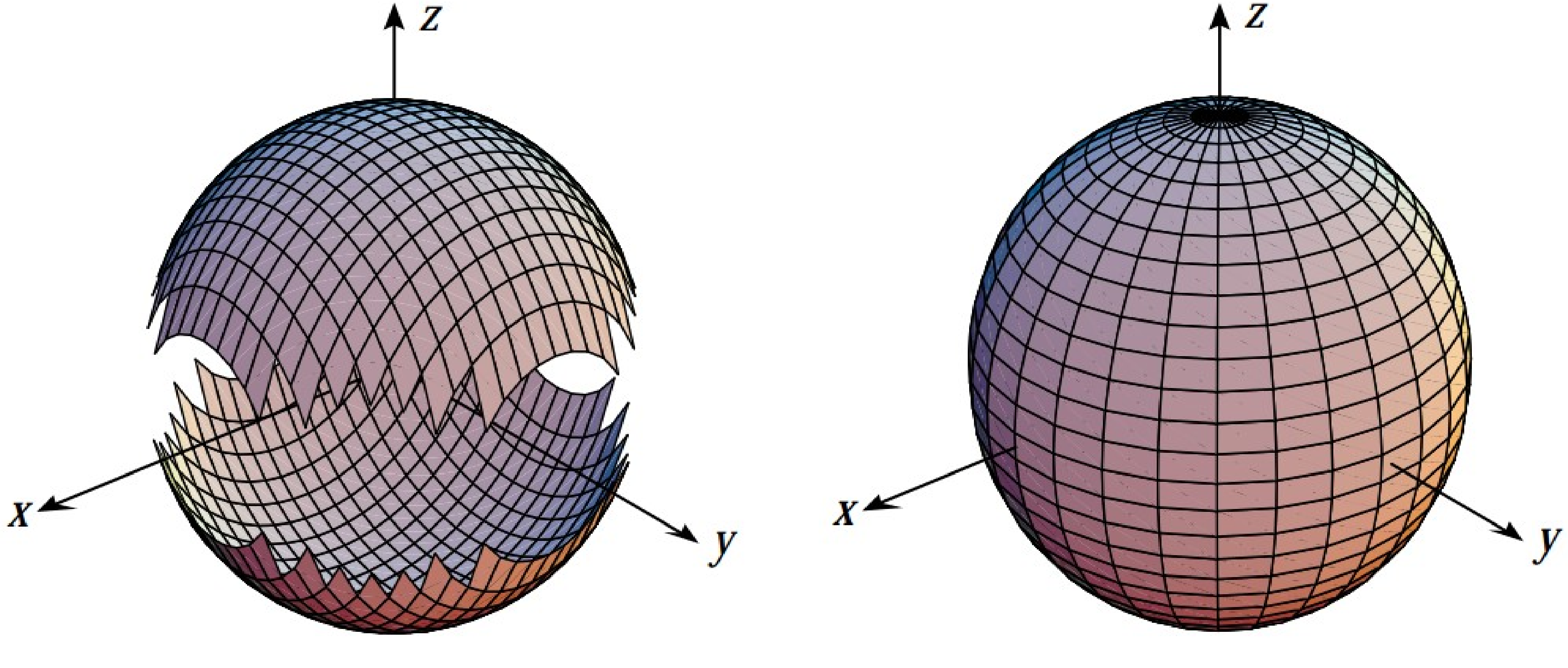
Área de superfícies

- Representação paramétrica de superfície
  - Exemplo: Considere uma esfera de raio 1

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

    - Usando a coordenadas esféricas

$$x = \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad z = \cos\phi$$

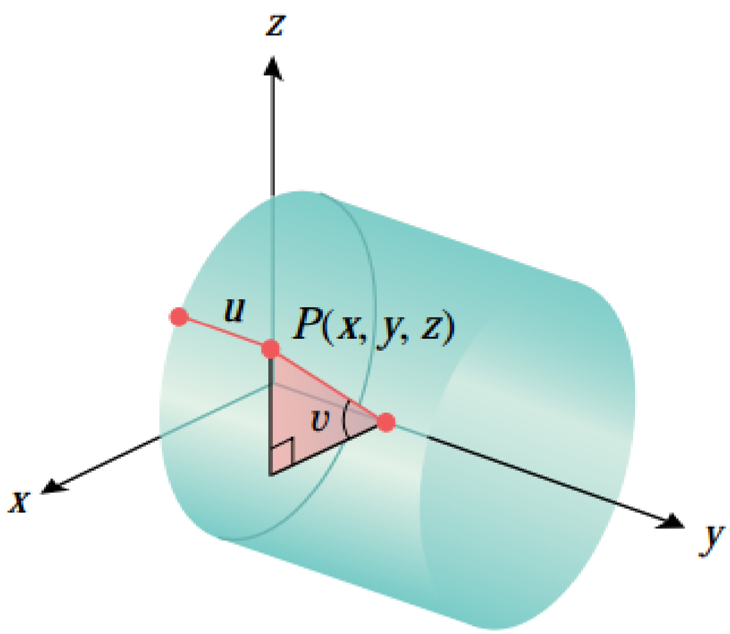


Área de superfícies

- Representação paramétrica de superfície
  - Exercício: Considere um cilindro de raio 3

$$x^2 + z^2 = 9 \qquad\qquad 0 \le y \le 5$$

Coordenadas cilíndricas?



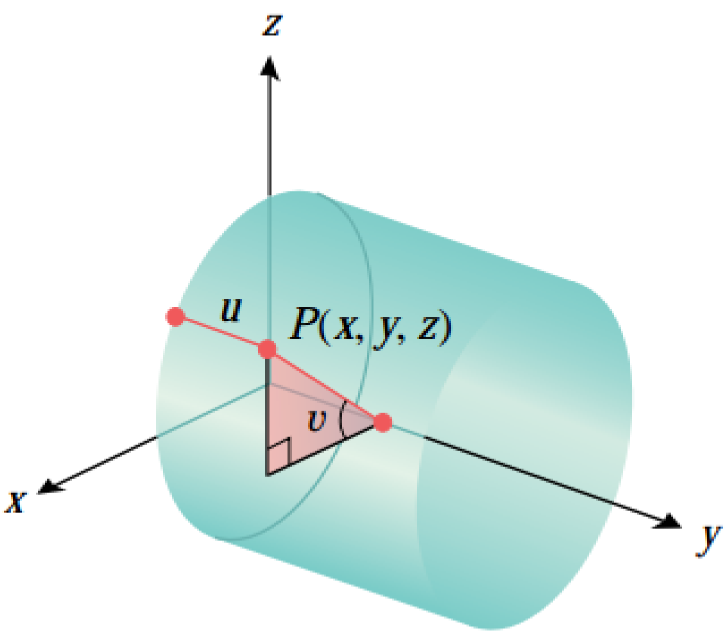
Área de superfícies

- Representação paramétrica de superfície
  - Exercício: Considere um cilindro de raio 3

$$x^2 + z^2 = 9 \qquad\qquad 0 \le y \le 5$$

$$x = 3\cos v, \quad y = u, \quad z = 3 \operatorname{sen} v$$

$$0 \le u \le 5 \quad 0 \le v \le 2\pi$$



Área de superfícies

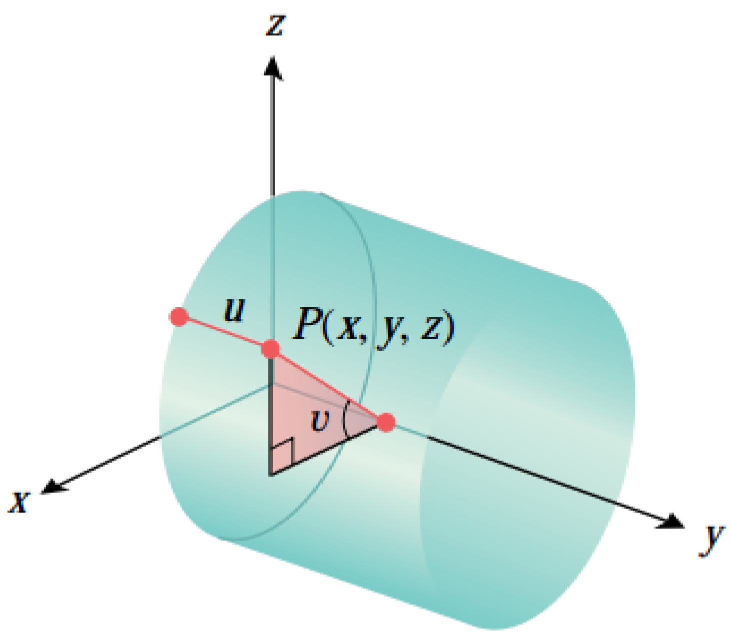
- Representação paramétrica de superfície
  - Exercício: Considere um cilindro de raio 3

$$x^2 + z^2 = 9 \qquad\qquad 0 \leq y \leq 5$$

Coordenadas cilíndricas?

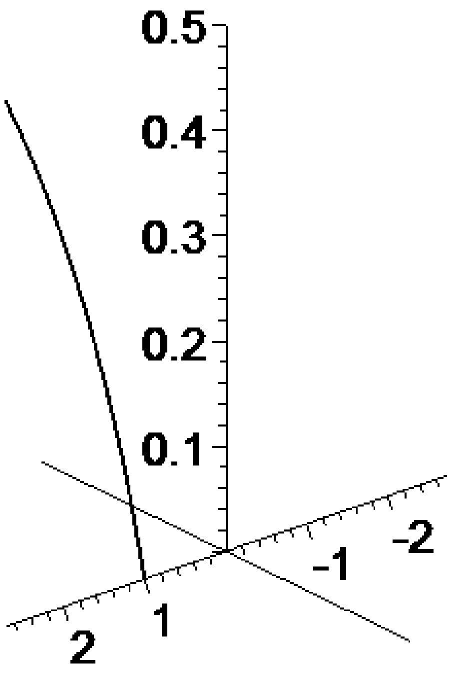
$$x = 3\cos v, \quad y = u, \quad z = 3\,\text{sen}\, v$$

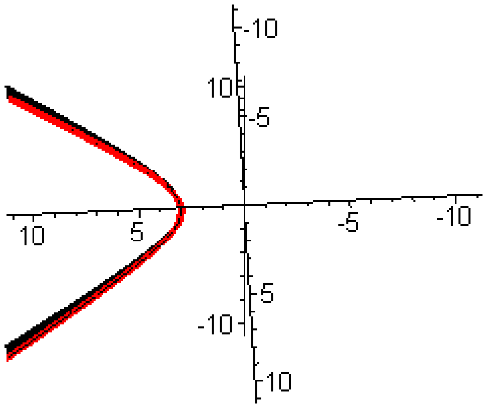
$$0 \leq u \leq 5 \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$



Área de superfícies

- Representação paramétrica das superfícies de revolução



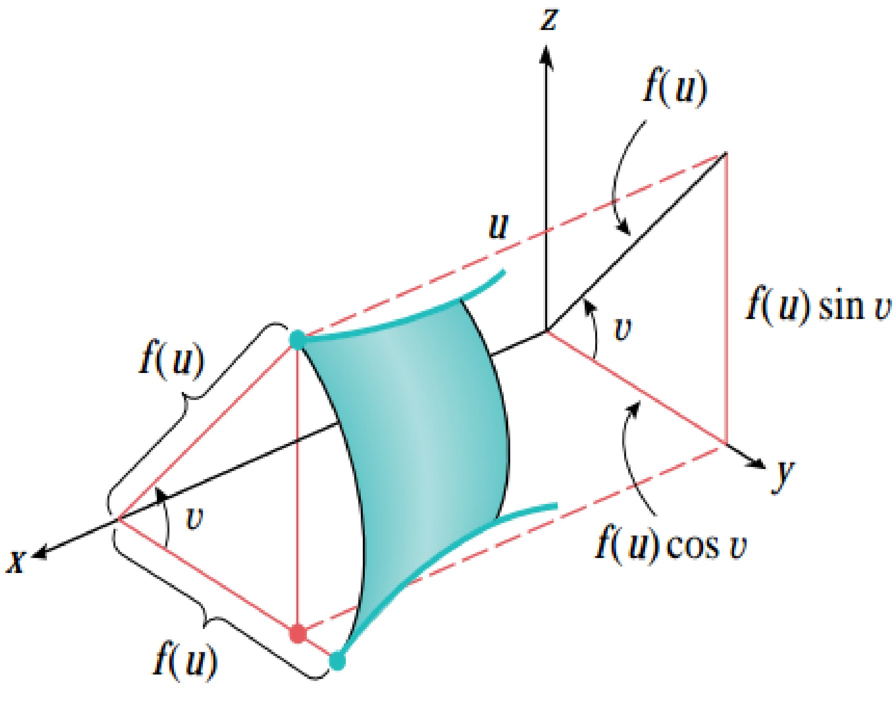


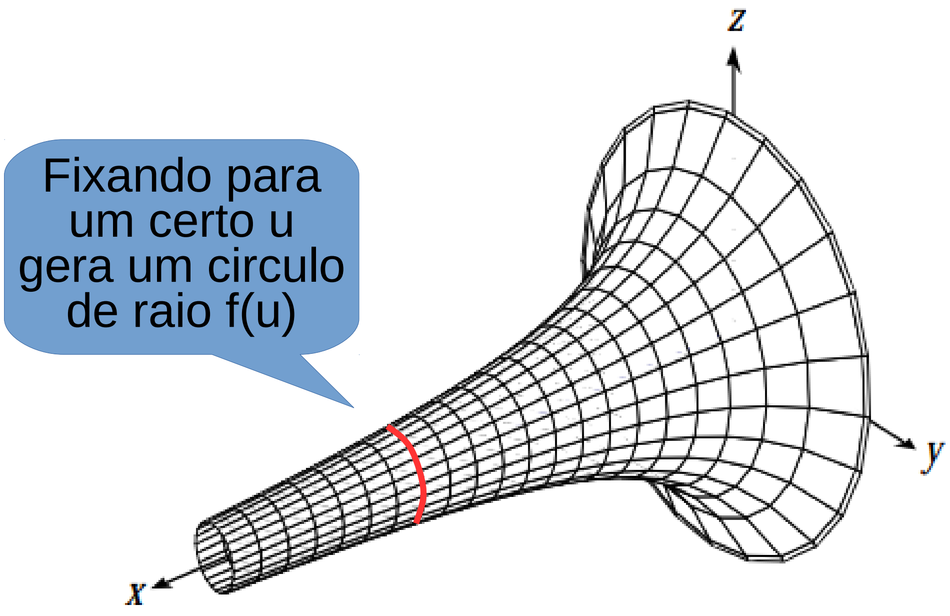
FONTES: http://ritaccs.pro.br/site/geometria-tridimensional/
http://www.mat.ufpb.br/lenimar/animacoes.htm
http://www.mat.uc.pt/~picado/curvsup/anima/suprevol.html

Área de superfícies

- Representação paramétrica das superfícies de revolução
  - Equações paramétricas da superfície gerada pela revolução da curva plana y=f(x) em torno do eixo x

$$x = u, \quad y = f(u)\cos v, \quad z = f(u) \operatorname{sen} v$$

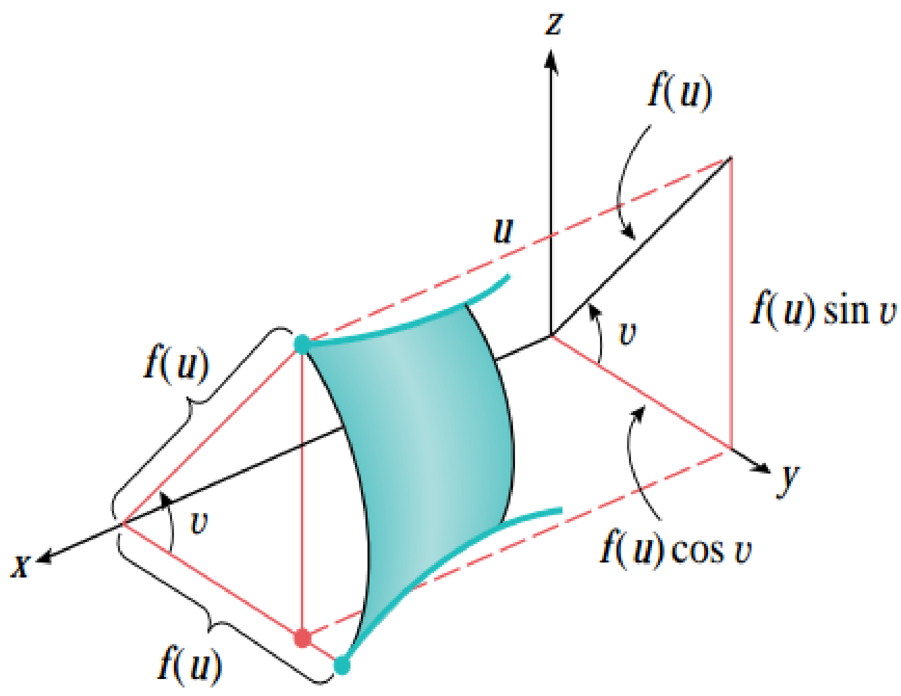


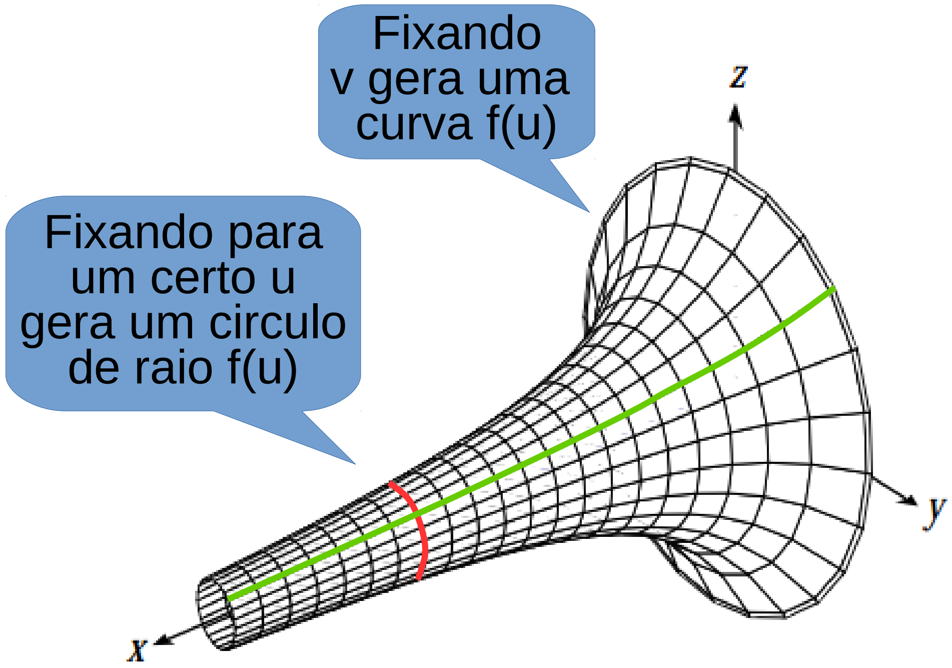


Área de superfícies

- Representação paramétrica das superfícies de revolução
  - Equações paramétricas da superfície gerada pela revolução da curva plana y=f(x) em torno do eixo x

$$x = u, \quad y = f(u)\cos v, \quad z = f(u)\,\mathrm{sen}\, v$$





Área de superfícies

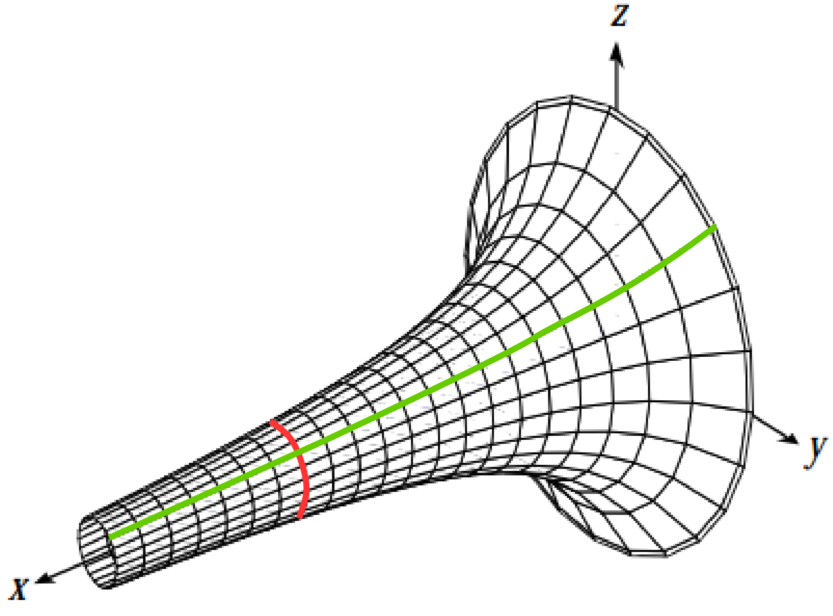
- Representação paramétrica das superfícies de revolução
  - Exemplo: Superfície gerada pela revolução da curva y = 1/x em torno do eixo x

$$x = u, \quad y = \frac{1}{u}\cos v, \quad z = \frac{1}{u}\,\text{sen}\, v$$

    - Para o domínio:

$$0{,}7 \le u \le 5$$

$$0 \le v \le 2\pi$$



Área de superfícies

- Funções vetoriais
  - Uma variável
    - Equação paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

- Forma vetorial

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

- Vetor posição

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Se move na cuva a medida que t varia (duas direções)

- Função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Área de superfícies

- Funções vetoriais
  - Duas variáveis
    - Equação paramétrica

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

      - Forma vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

    - Vetor posição

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Se move
na superfície
a medida que
u e v variam
(infinitas direções)

    - Função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

Área de superfícies

- Funções vetoriais
  - Duas variáveis
    - Equação paramétrica

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

r(u, v) é contínua
se cada componente
for contínuo

– Forma vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

- Vetor posição

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Se move
na superfície
a medida que
u e v variam
(infinitas direções)

- Função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

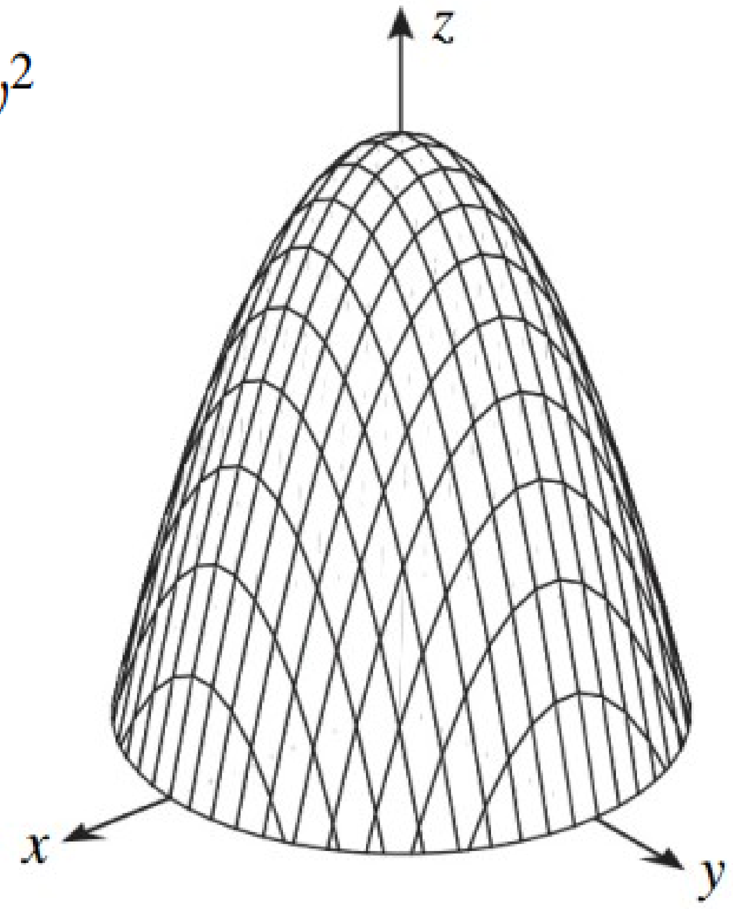
Área de superfícies

- Funções vetoriais de duas variáveis
  - Exemplo: Paraboloide
    - Equações paramétricas

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 4 - u^2 - v^2$$

    - Forma vetorial

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}$$



Área de superfícies

- Derivadas parciais de funções vetoriais
  - Derivadas parciais das componentes

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Área de superfícies

- Derivadas parciais de funções vetoriais
  - Derivadas parciais das componentes

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

    - Notação

$$\mathbf{r}_u \qquad \mathbf{r}_v \qquad \mathbf{r}_u(u, v) \qquad \mathbf{r}_v(u, v)$$

Área de superfícies

- Derivadas parciais de funções vetoriais
  - Derivadas parciais das componentes
    - Obtidas com os limites

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u} = \lim_{w \to u} \frac{\mathbf{r}(w, v) - \mathbf{r}(u, v)}{w - u}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v} = \lim_{w \to v} \frac{\mathbf{r}(u, w) - \mathbf{r}(u, v)}{w - v}$$

Área de superfícies

- Derivadas parciais de funções vetoriais
  - Exercício: Obtenha as derivadas parciais

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}$$

Área de superfícies

- Derivadas parciais de funções vetoriais
  - Exercício: Obtenha as derivadas parciais

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}[u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}] = \mathbf{i} - 2u\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}[u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}] = \mathbf{j} - 2v\mathbf{k}$$

Área de superfícies

Já visto: funções diferenciávais têm um plano tangente

- Planos tangentes a superfícies paramétricas
  - Plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície que corresponde aos valores dos parâmetros $u = u_0$ e $v = v_0$

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

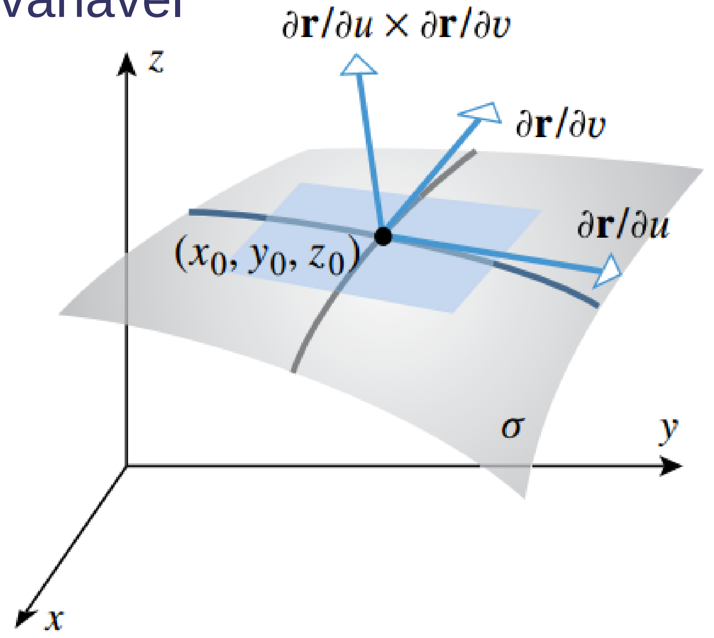
Área de superfícies

Já visto: funções diferenciávais têm um plano tangente

- Planos tangentes a superfícies paramétricas
  - Plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície que corresponde aos valores dos parâmetros $u = u_0$ e $v = v_0$

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

- Se $v = v_0$ for mantido fixo e u puder variar
  - $r(u, v_0)$ é uma função vetorial de uma variável
  - Seu gráfico é a curva de v constante que passa pelo ponto (u_0, v_0)
- Pela interpretação geométrica da derivada, se $\partial r/\partial u \neq 0$ em (u_0, v_0), então esse vetor é tangente à curva de v



O mesmo para a outra variável

Área de superfícies

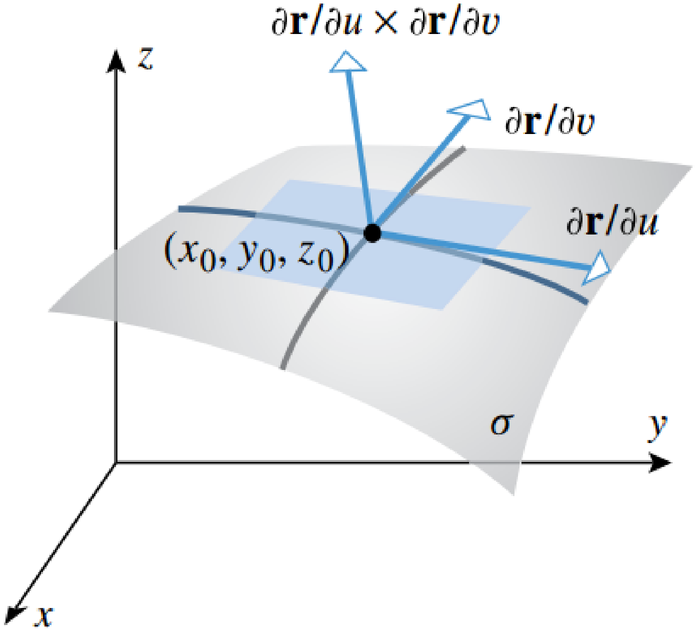
Já visto: funções diferenciávais têm um plano tangente

- Planos tangentes a superfícies paramétricas
  - Plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície que corresponde aos valores dos parâmetros $u = u_0$ e $v = v_0$

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

    - Normal calculada com o produto vetorial

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

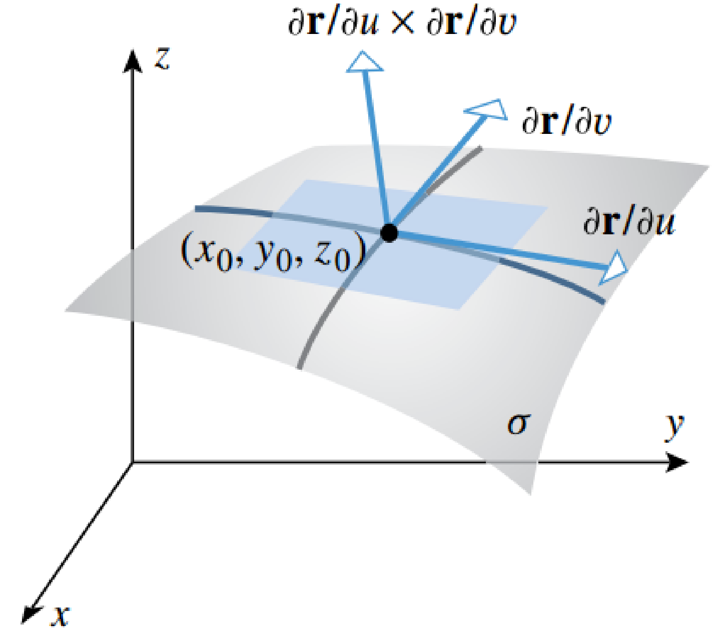


Área de superfícies

Já visto: funções diferenciávais têm um plano tangente

- Planos tangentes a superfícies paramétricas
  - Definição: Se uma superfície paramétrica σ for o gráfico de r = r(u, v) e se $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v \neq 0$ em um ponto da superfície, então o **vetor normal unitário principal** à superfície naquele ponto será denotado por **n** ou **n**(u, v) e definido por

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}$$

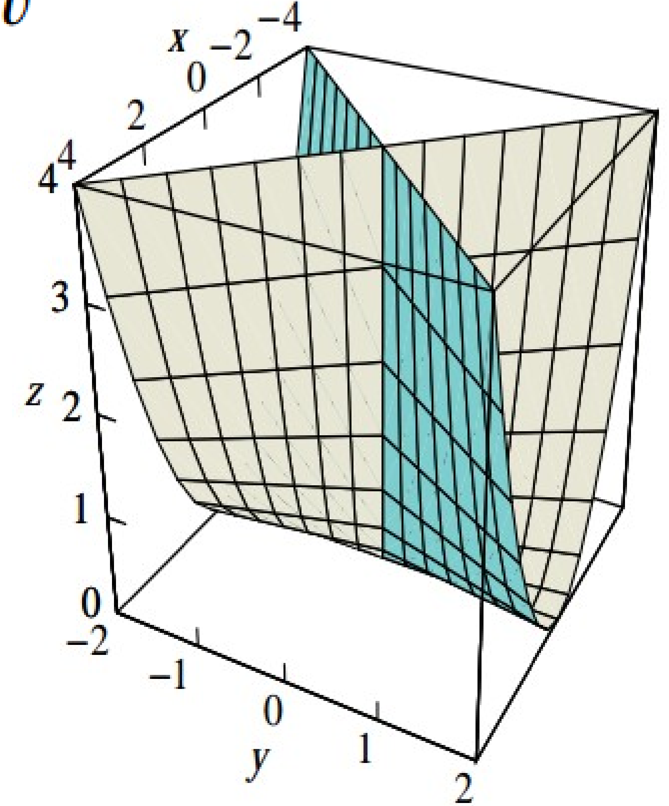


Área de superfícies

- Planos tangentes a superfícies paramétricas
  - Exercício: Encontre uma equação do plano tangente à superfície paramétrica no ponto u = 2 e v = −1

$$x = uv, \quad y = u, \quad z = v^2$$

Superfície denominada guarda-chuva de Whitney



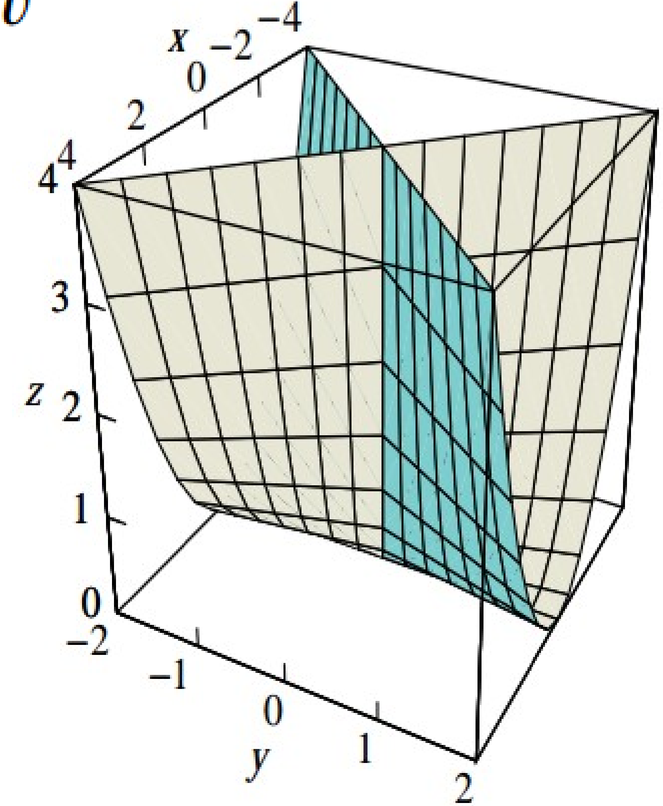
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Equação do plano tangente $n \cdot (p - p_0)$

Área de superfícies

- Planos tangentes a superfícies paramétricas
  - Exercício: Encontre uma equação do plano tangente à superfície paramétrica no ponto u = 2 e v = −1

$$x = uv, \quad y = u, \quad z = v^2$$



- Equação vetorial

$$\mathbf{r} = uv\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$$

- Derivadas parciais

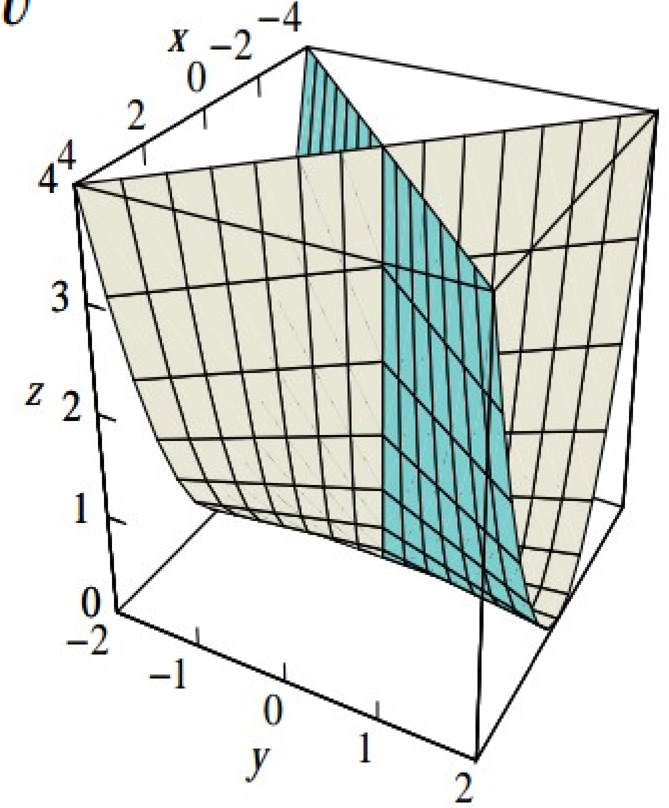
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = v\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(2, -1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = u\mathbf{i} + 2v\mathbf{k} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(2, -1) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$$

Área de superfícies

- Planos tangentes a superfícies paramétricas
  - Exercício: Encontre uma equação do plano tangente à superfície paramétrica no ponto u = 2 e v = −1

$$x = uv, \quad y = u, \quad z = v^2$$



- Normal

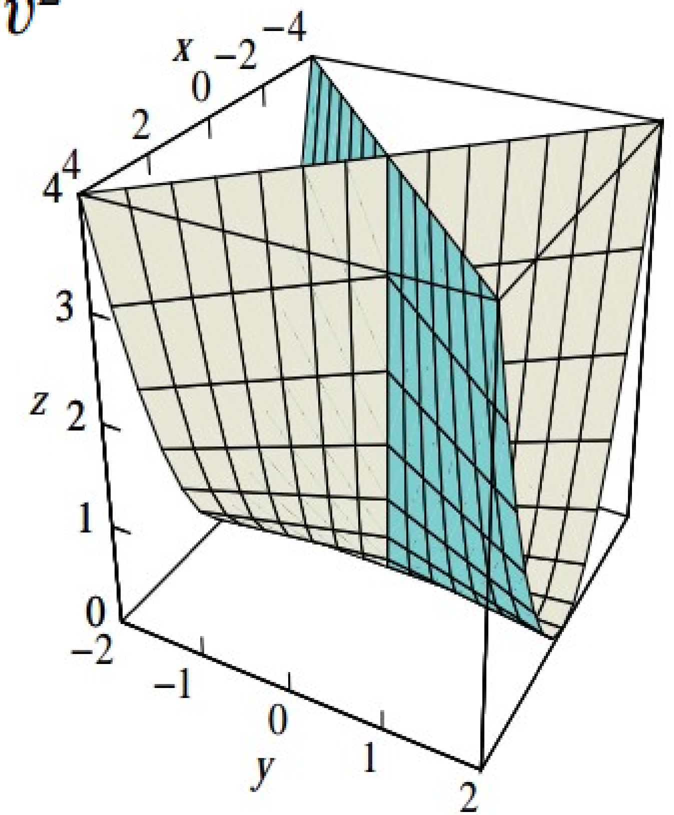
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(2, -1) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(2, -1)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Área de superfícies

- Planos tangentes a superfícies paramétricas
  - Exercício: Encontre uma equação do plano tangente à superfície paramétrica no ponto u = 2 e v = −1

$$x = uv, \quad y = u, \quad z = v^2$$



- Normal mais simples
  $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- Ponto p_0 (substituindo na função)
  $(-2, 2, 1)$

$n \cdot (p - p_0)$

- Plano tangente

$$(x + 2) + (y - 2) + (z - 1) = 0$$

$$x + y + z = 1$$

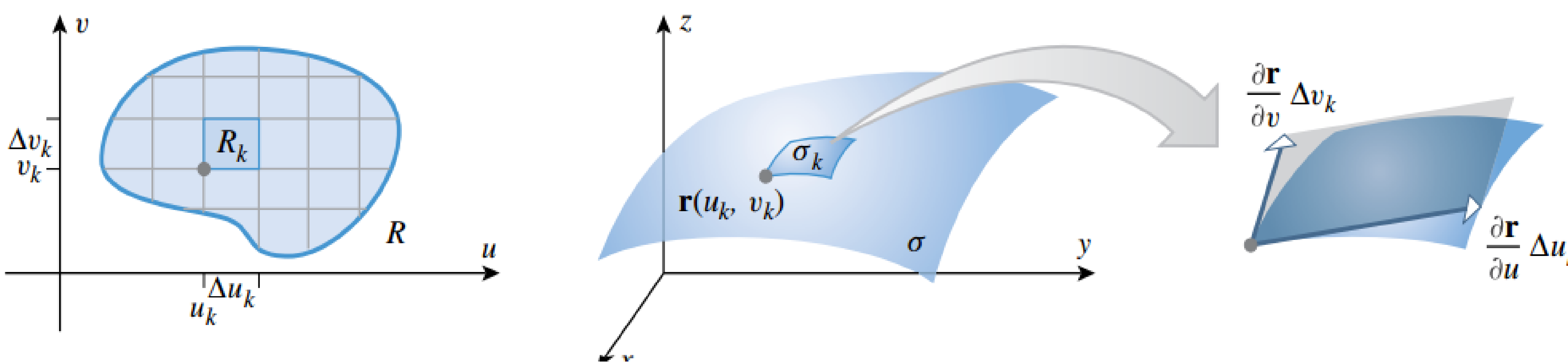
Área de superfícies

Análoga à do caso de superfícies da forma z = f(x, y)

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Seja σ uma superfície paramétrica de equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

    - Seja R_k a k-ésima região retangular e denotemos sua área por ΔA_k
    - A porção σ_k é a imagem de R_k por σ

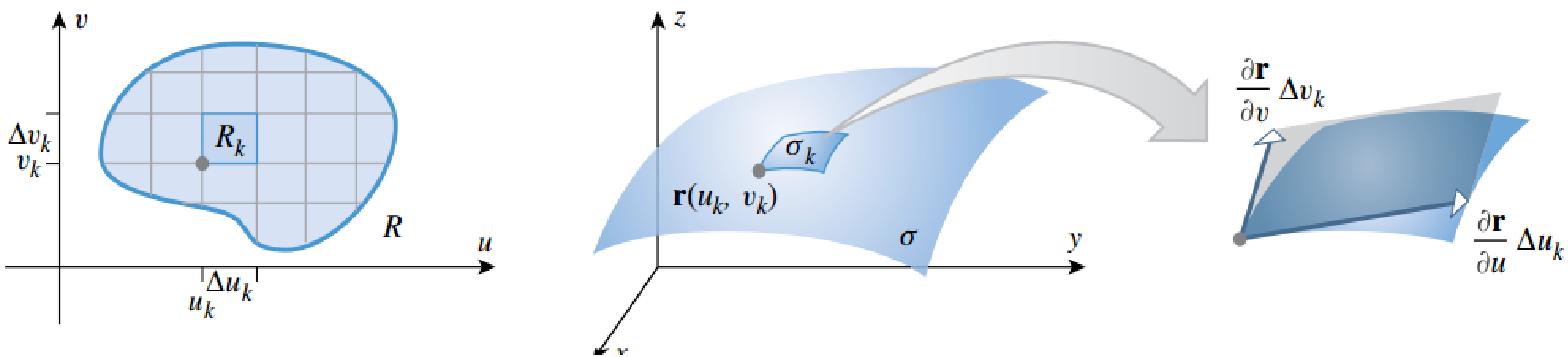


Área de superfícies

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Seja σ uma superfície paramétrica de equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

    - Existe um vértice em $r(u_k, v_k)$ na porção
    - A área de σ_k é denotada Δs_k
      - Aproximada pela área do paralelogramo



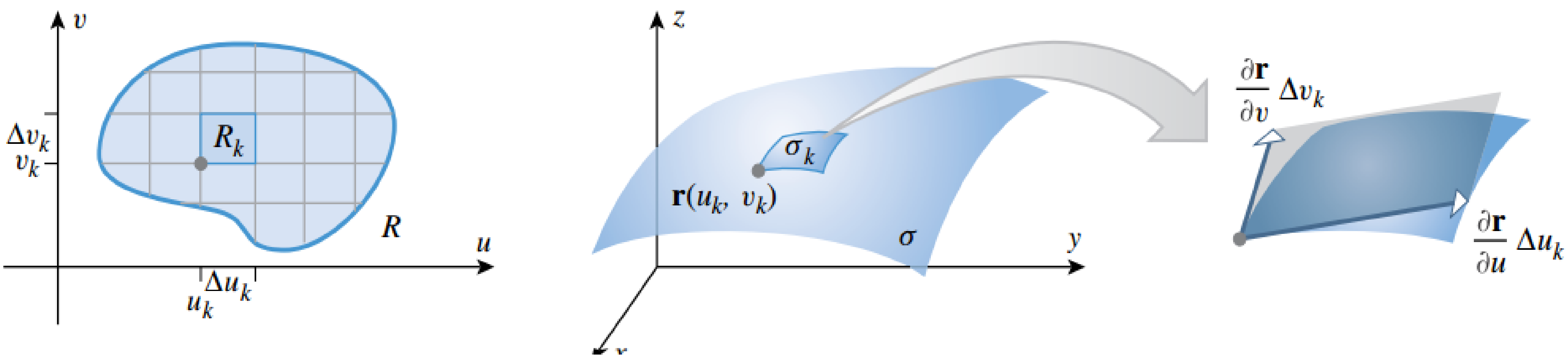
Área de superfícies

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Seja σ uma superfície paramétrica de equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

    - Paralelogramo gerado pelos vetores tangentes

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u_k \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v_k$$



Área de superfícies

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Seja σ uma superfície paramétrica de equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

    - Aproximação da área

$$\Delta S_k \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u_k \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v_k \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u_k \Delta v_k = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

Área de superfícies

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Seja σ uma superfície paramétrica de equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

- Aproximação da área

$$\Delta S_k \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u_k \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v_k \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u_k \Delta v_k = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

- Valor exato

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k \Rightarrow S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$$

Área de superfícies

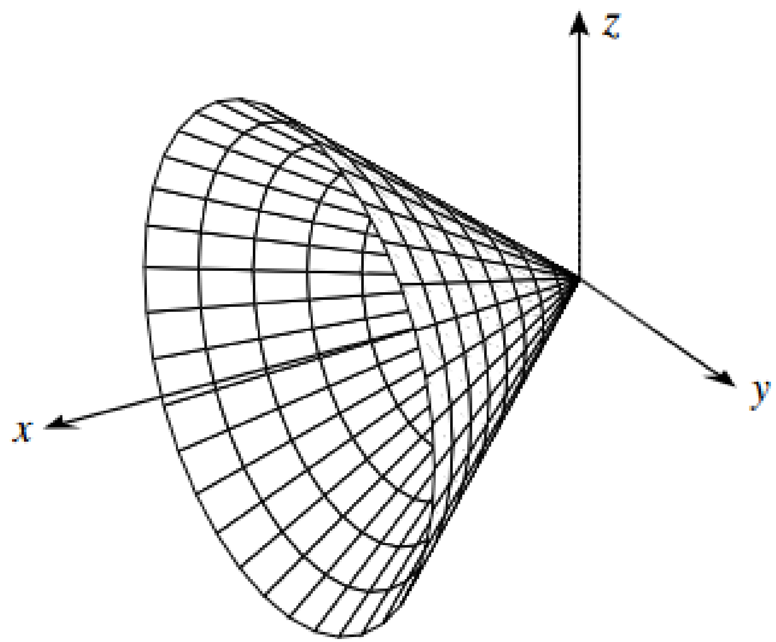
$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$$

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Exercício: Calcule a área de superfície entre $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 2\pi$

Círculos de raio u

$$x = u, \quad y = u \cos v, \quad z = u \operatorname{sen} v$$

Reta y=x gira em torno do eixo x



Área de superfícies

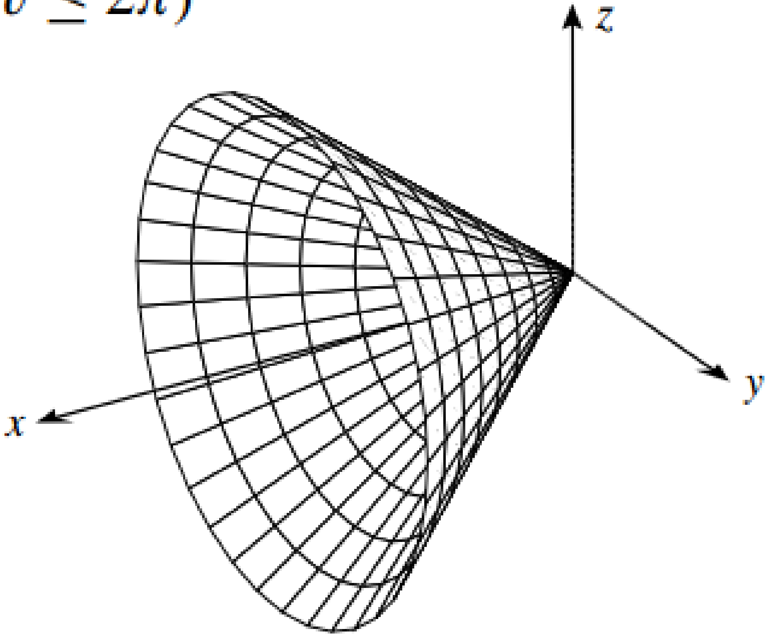
$$S=\iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$$

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Exercício: Calcule a área de superfície entre $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 2\pi$

$$x = u, \quad y = u \cos v, \quad z = u \operatorname{sen} v$$

- Forma vetorial

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j} + u \operatorname{sen} v\mathbf{k} \quad (0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi)$$



Área de superfícies

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$$

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Exercício: Calcule a área de superfície entre 0 ≤ u ≤ 2 e 0 ≤ v ≤ 2π

$$x = u, \quad y = u \cos v, \quad z = u \operatorname{sen} v$$

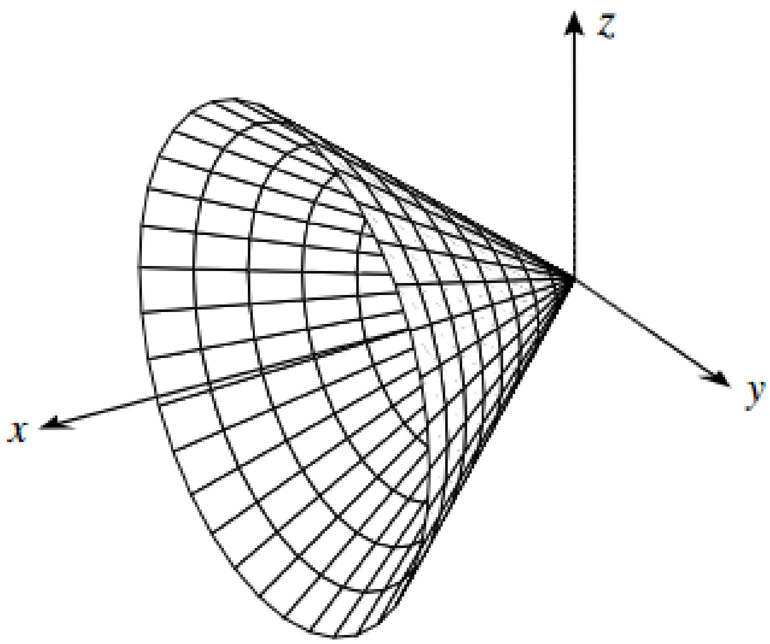
- Forma vetorial

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j} + u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

- Derivadas parciais

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \cos v\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u \cos v\mathbf{k}$$



Área de superfícies

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$$

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Exercício: Calcule a área de superfície entre 0 ≤ u ≤ 2 e 0 ≤ v ≤ 2π

$$x = u, \quad y = u \cos v, \quad z = u \operatorname{sen} v$$

- Produto vetorial

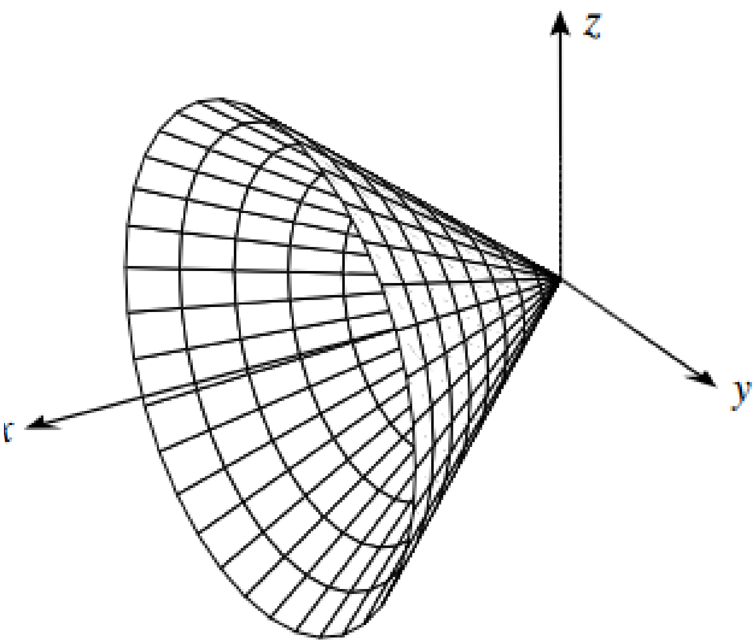
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \cos v & \operatorname{sen} v \\ 0 & -u \operatorname{sen} v & u \cos v \end{vmatrix}$$

$$= u\mathbf{i} - u \cos v\mathbf{j} - u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

- Norma do produto vetorial

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{u^2 + (-u \cos v)^2 + (-u \operatorname{sen} v)^2}$$

$$= |u|\sqrt{2} = u\sqrt{2}$$



Área de superfícies

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$$

- Áreas de superfícies paramétricas
  - Exercício: Calcule a área de superfície entre $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 2\pi$

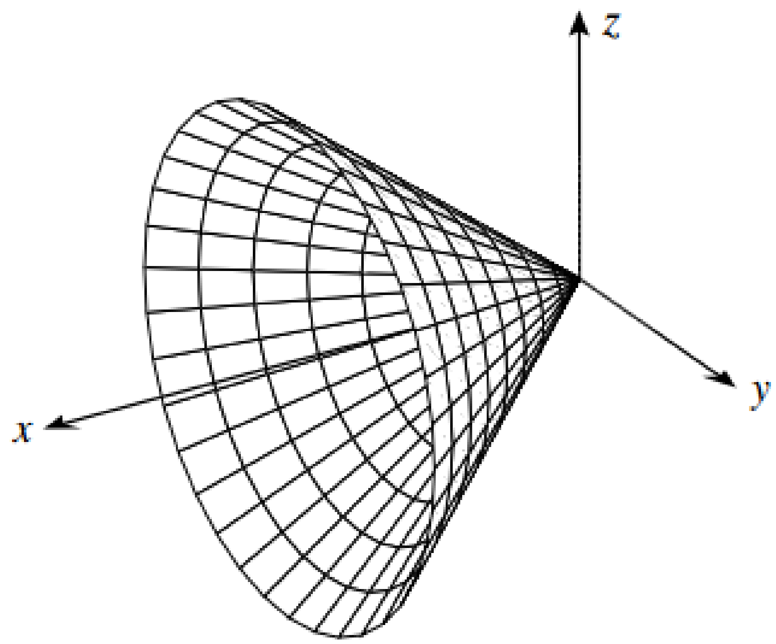
$$x = u, \quad y = u \cos v, \quad z = u \operatorname{sen} v$$

- Área da superfície

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2} u \, du \, dv$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} dv = 4\pi\sqrt{2}$$



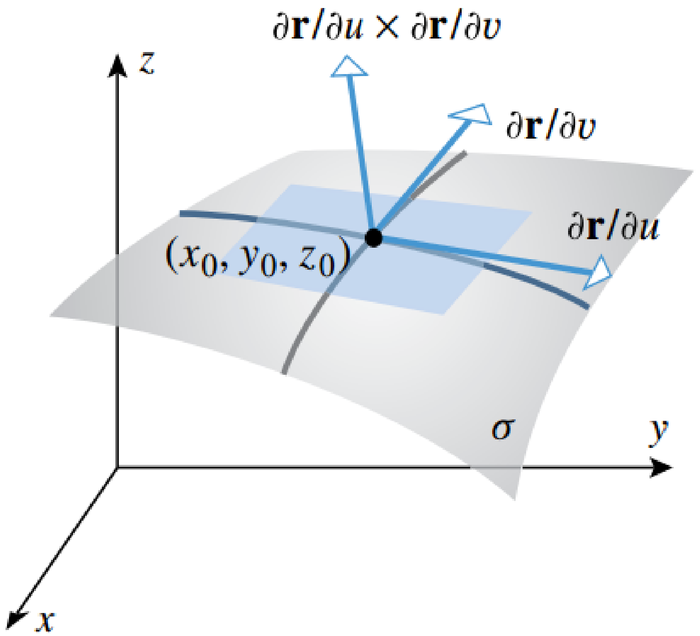
Integrais triplas

Resumo

Resumo

- Funções vetoriais
  - Derivadas parciais
  - Plano tangente
  - Área de superfícies paramétricas

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$$

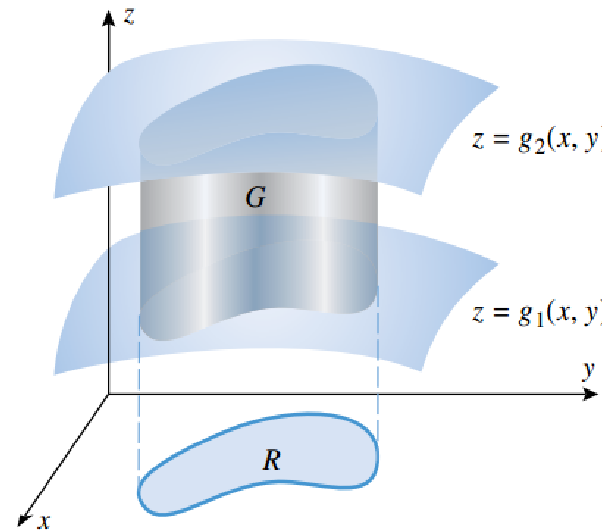


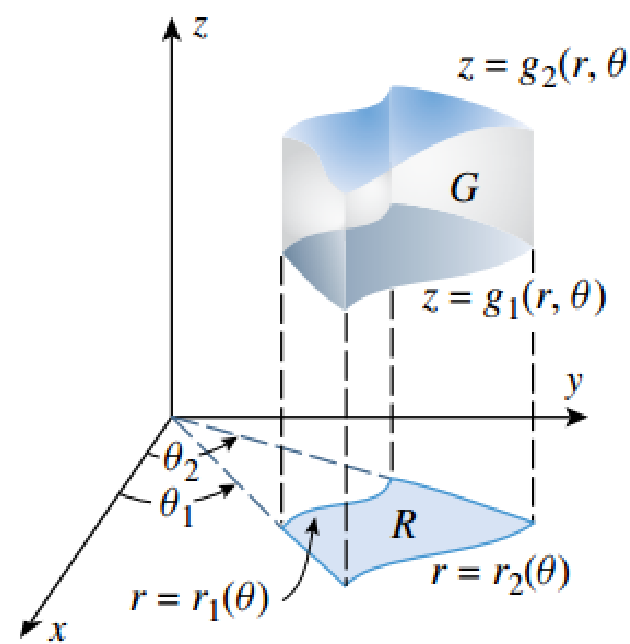
Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 14.4
    - Exercícios de compreensão 14.4
    - 1-12
    - 15-16

Resumo

- Próxima aula:
  - Integrais triplas
    - Caixas retangulares
    - Regiões mais gerais
    - Cálculo de volume
    - Coordenadas cilíndricas e esféricas
  - Mudança de variáveis em integrais múltiplas
    - Jacobianos





Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 14.4