Diagonalização

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Diagonalização
  - Matrizes semelhantes
  - Processo de diagonalização
  - Potências de uma matriz
  - Multiplicidades geométrica e algébrica
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Resumo

- Autovalores e autovetores

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

  - Equação característica

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

  - Polinômio característico
    - É possível descobrir os autovalores achando as raízes

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

  - Autoespaço
    - É possível descobrir o autovetor associado a um autovalor λ descobrindo a base do espaço nulo da matriz dos coeficientes atualizada

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Diagonalização

Diagonalização

Transformação de semelhança da matriz A

Problema 1

Dada uma matriz A de tamanho n×n, existe alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Problema 2

Dada uma matriz A de tamanho n×n, existem n autovetores de A linearmente independentes?

Diagonalização

- Definição 1:
  - Se A e B forem matrizes quadradas, dizemos que **B é semelhante a A** se existir alguma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$

Diagonalização

- Definição 1:
  - Se A e B forem matrizes quadradas, dizemos que **B é semelhante a A** se existir alguma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$
    - Observação:
      - B for semelhante a A, então também é verdade que A é semelhante a B
        - $A = Q^{-1}BQ$ tomando $Q = P^{-1}$
      - Assim diz-se que **A e B são matrizes semelhantes**

Diagonalização

- Matrizes semelhantes
  - Matrizes semelhantes têm algumas propriedades em comum
    - Exemplo: A e B têm o mesmo determinante

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$$

$$= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

Diagonalização

- Matrizes semelhantes
  - Matrizes semelhantes têm algumas propriedades em comum

Propriedade invariante por semelhança ou invariante de semelhança

Propriedade	Descrição
Determinante	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo determinante.
Invertibilidade	A é invertível se, e só se, $P^{-1}AP$ é invertível.
Posto	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo posto.
Nulidade	A e $P^{-1}AP$ têm a mesma nulidade.
Traço	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo traço.
Polinômio característico	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinômio característico.
Autovalores	A e $P^{-1}AP$ têm os mesmos autovalores.
Dimensão de autoespaço	Se λ for um autovalor de A e, portanto, de $P^{-1}AP$, então o autoespaço de A associado a λ e o autoespaço de $P^{-1}AP$ associado a λ têm a mesma dimensão.

Traço: Soma da diagonal principal

Diagonalização

- Matrizes semelhantes

Problema 1

Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existe alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

- É equivalente a perguntar se a matriz A é semelhante a alguma matriz diagonal.

Uma matriz diagonal é mais simples de se trabalhar

Diagonalização

- Definição 2:
  - Uma matriz quadrada A é dita **diagonalizável** se for semelhante a alguma matriz diagonal,
    - Se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.
    - Dizemos que a matriz **P diagonaliza A**

Diagonalização

Problema 1

Dada uma matriz A de tamanho n×n, existe alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Problema 2

Dada uma matriz A de tamanho n×n, existem n autovetores de A linearmente independentes?

Formas diferentes do mesmo problema matemático.

Diagonalização

- Teorema 1:
  - Se A for uma matriz $n \times n$, são equivalentes as afirmações seguintes.
    - (a) A é diagonalizável.
    - (b) A tem n autovetores linearmente independentes.

Diagonalização

(a) A é diagonalizável.
(b) A tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: (a)⇒(b)

- Supondo que A é diagonalizável
  - Existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$

$$AP = PD$$

onde pode-se definir

$$P = [\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n] \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Diagonalização

(a) A é diagonalizável.
(b) A tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: (a)⇒(b)

- Supondo que A é diagonalizável
  - Existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$

$$AP = PD$$

onde pode-se definir

$$P = [\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n] \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

  - Lado esquerdo pode ser expresso por

$$AP = A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n]$$

  - Lado direito pode ser expresso por

$$PD = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n]$$

Definição de autovalores e autovetores

  - Igualando

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$$

São LI porque P é invertível

Diagonalização

(a) A é diagonalizável.
(b) A tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: (b)⇒(a)

- Suponha que A tenha n autovetores linearmente independentes $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$,…, $\mathbf{p}_n$ com autovalores associados λ_1, λ_2, …, λ_n.
  - Escrevendo

$$P=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n] \qquad D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Diagonalização

(a) A é diagonalizável.
(b) A tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: (b)⇒(a)

- Suponha que A tenha n autovetores linearmente independentes $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ com autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
  - Escrevendo

$$P=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n] \qquad D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

  - Multiplicando A pela matriz dos autovetores P

A ordem influencia!

$$\begin{aligned} AP &= A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n] = PD \end{aligned}$$

  - Por hipótese, os vetores p_i são linearmente independentes, então P é invertível, então pode ser reescrito como $P^{-1}AP = D$

Diagonalização

(a) A é diagonalizável.
(b) A tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: (b)⇒(a)

- Suponha que A tenha n autovetores linearmente independentes $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ com autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
  - Escrevendo

$$P=[\boldsymbol{p}_1 \;\; \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n] \qquad D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Garante que uma matriz A de tamanho n×n com n autovetores Linearmente independentes é diagonalizável,

  - Multiplicando A pela matriz dos autovetores P

$$\begin{aligned} AP &= A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n] = PD \end{aligned}$$

  - Por hipótese, os vetores p_i são linearmente independentes, então P é invertível, então pode ser reescrito como $P^{-1}AP = D$

Diagonalização

- Procedimento para diagonalizar uma matriz
  - **Passo 1.**
    - Confirme que a matriz é realmente diagonalizável encontrando n autovetores linearmente independentes.
      - Encontrar uma base de cada autoespaço e juntar todos esses vetores num único conjunto S.
      - Se esse conjunto tiver menos do que n elementos, a matriz não é diagonalizável.
  - **Passo 2.**
    - Forme a matriz $P = [\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2 \ldots \mathbf{p}_n]$ que tem os vetores de S como vetores coluna.
  - **Passo 3.**
    - A matriz $P^{-1}AP$ será diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ correspondentes aos autovetores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ como entradas diagonais sucessivas.

Diagonalização

- Procedimento para diagonalizar uma matriz
  - Exemplo: Encontre uma matriz P que diagonalize A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Equação característica $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$
- Autovalores e autovetores

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Procedimento para diagonalizar uma matriz
  - Exemplo: Encontre uma matriz P que diagonalize A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Equação característica $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$
- Autovalores e autovetores

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Montando matriz P

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Porém, não provamos que são linearmente independentes

Diagonalização

- Procedimento para diagonalizar uma matriz
  - Exemplo: Encontre uma matriz P que diagonalize A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Diagonalizando a matriz A

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Procedimento para diagonalizar uma matriz
  – Exemplo: Encontre uma matriz P que diagonalize A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Em geral, não existe uma ordem preferencial para as colunas de P.

- Diagonalizando a matriz A

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Outra opção

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Matrizes não diagonalizáveis
  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

    - Equação característica

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

    - Bases do autoespaço

$$\lambda = 1: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 2: \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

    - A não é diagonalizável porque é uma matriz 3×3 porém tem somente 2 autovetores

Diagonalização

- Matrizes não diagonalizáveis
  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Solução alternativa: Verificar a dimensão dos autoespaços (Teorema fundamental da Álgebra linear)
  - nulidade(Iλ - A) = n - posto(Iλ - A)
  - λ =1
  - λ = 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pensar na transposta

Diagonalização

- Teorema 2:
  - Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$ forem autovetores de uma matriz A associados a autovalores distintos, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto linearmente independente

Não será provado, porém a ideia é provar por contradição

Diagonalização

- Teorema 2:
  - Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Diagonalização

- Teorema 2:
  - Se uma matriz A de tamanho n×n tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Usando os dois teoremas anteriores

- Demonstração
  - Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ então, pelo Teorema anterior *[Anton 5.2.2]*, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes.
  - Assim, A é diagonalizável pelo primeiro Teorema da aula *[Anton 5.2.1]*

(a) A é diagonalizável.
(b) A tem n autovetores linearmente independentes.

Diagonalização

- Exemplo: Ache a matriz diagonal semelhante a A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

OCTAVE:
Função p = poly(A)
e r = roots(p)

Diagonalização

- Exemplo: Ache a matriz diagonal semelhante a A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

OCTAVE:
Função p = poly(A)
e r = roots(p)

  - Autovalores distintos

$$\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3} \text{ e } \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

  - Matriz diagonal

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Diagonalização de matrizes triangulares
  - Exercício: Qual a matriz diagonal similar a A?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Diagonalização de matrizes triangulares
  - Exercício: Qual a matriz diagonal similar a A?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

  - Autovalores

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = -2$$

  - Matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Calculando as potências de uma matriz

Como calcular A^{13}?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Calculando as potências de uma matriz
  - Digamos que A seja uma matriz diagonalizável de tamanho n×n, que P diagonaliza A e que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

Diagonalização

- Calculando as potências de uma matriz
  - Digamos que A seja uma matriz diagonalizável de tamanho n×n, que P diagonaliza A e que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

  - Elevando ambos os lados ao quadrado

$$(P^{-1}AP)^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} = D^2$$

Diagonalização

- Calculando as potências de uma matriz

$$(P^{-1}AP)^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} = D^2$$

  - Reescrevendo o lado direito

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

  - Assim, encontramos

$$P^{-1}A^2P = D^2$$

Lembrar que os autovalores de A^2 são λ^2 e os autovetores são os mesmos

Diagonalização

- Calculando as potências de uma matriz
  - De forma análoga, para um inteiro positivo k:

$$P^{-1}A^kP = D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

  - Reescrevendo

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

Cálculos: k multiplicações matriciais

Cálculos: 3 multiplicações matriciais e potências das entradas de D

Diagonalização

- Calculando as potências de uma matriz
  - Exercício: Calcule A^{13}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

O que precisa?

Diagonalização

- Calculando as potências de uma matriz
  - Exercício: Calcule A^{13}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OCTAVE:
[V,D] = eig(A)

Diagonalização

- Calculando as potências de uma matriz
  - Exercício: Calcule A^{13}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{13} = PD^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8.190 & 0 & -16.382 \\ 8.191 & 8.192 & 8.191 \\ 8.191 & 0 & 16.383 \end{bmatrix}$$

O maior trabalho é achar P, D e P^{-1}, porém pode-se calcular qualquer potência!

Diagonalização

Teorema: Se uma matriz A de tamanho n×n tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

- A reciproca do Teorema 2 é falsa
  - Garante que uma matriz quadrada com n autovalores distintos é diagonalizável
  - Não impede a possibilidade de existirem matrizes diagonalizáveis com menos que n autovalores distintos.

Diagonalização

> Teorema: Se uma matriz A de tamanho n×n tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

- A reciproca do Teorema 2 é falsa
  - Exemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

Teorema: Se uma matriz A de tamanho n×n tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

- A reciproca do Teorema 2 é falsa
  - Exemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Ambas tem um autovalor, λ=1, de multiplicidade 3
  - Exercício: Calculo dos autovalores

$$(\lambda I - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\lambda I - J)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Diagonalização

Teorema: Se uma matriz A de tamanho n×n tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

- A reciproca do Teorema 2 é falsa
  - Exemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Ambas tem um autovalor, λ=1, de multiplicidade 3
  - Exercício: Calculo dos autovalores

$$\underbrace{(\lambda I - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}}_{v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}; v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}; v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad \underbrace{(\lambda I - J)\mathbf{x} = \mathbf{0}}_{v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}$$

Diagonalização

Teorema: Se uma matriz A de tamanho n×n tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

- A reciproca do Teorema 2 é falsa
  - Exemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Ambas tem um autovalor, λ=1, de multiplicidade 3
  - Exercício: Calculo dos autovalores

$$(\lambda I - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\lambda I - J)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Produzimos duas matrizes 3×3 com menos do que 3 autovalores distintos, uma sendo diagonalizável e a outra não.

Diagonalização

- Terminologia
  - Seja λ_0 for um autovalor de uma matriz A n×n
    - A dimensão do autoespaço associado a λ_0 é denominada **multiplicidade geométrica** de λ_0
    - O número de vezes que $\lambda-\lambda_0$ aparece como um fator do polinômio característico de A é denominado **multiplicidade algébrica** de λ_0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \Leftarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$: $\quad \lambda = 2$:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$: $\quad \lambda = 1$:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Terminologia
  - Seja λ_0 for um autovalor de uma matriz A n×n
    - A dimensão do autoespaço associado a λ_0 é denominada **multiplicidade geométrica** de λ_0
    - O número de vezes que $\lambda-\lambda_0$ aparece como um fator do polinômio característico de A é denominado **multiplicidade algébrica** de λ_0.

Para λ=2
Mult.g. = 1
Mult.a. = 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Para λ=2
Mult.g. = 2
Mult.a. = 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1:$ $\quad$ $\lambda = 2:$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2:$ $\quad$ $\lambda = 1:$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Teorema 3: Multiplicidades geométrica e algébrica
  - Se A for uma matriz quadrada, valem as afirmações seguintes:

    (a) Dado qualquer autovalor de A, a multiplicidade geométrica é **menor ou igual** à multiplicidade algébrica.

    (b) A é diagonalizável se, e só se, a multiplicidade geométrica de cada autovalor é **igual** à multiplicidade algébrica.

Não se tem um espaço nulo com uma dimensão maior que a multiplicidade no polinômio

Resumo

Resumo

- Diagonalização
  - Matrizes semelhantes
    - $B = P^{-1}AP$
    - Existem propriedades invariantes por semelhança
  - Processo de diagonalização
    - Achar n autovalores e n autovetores
  - Potências de uma matriz
    - A matriz diagonal semelhante D, e a matriz P que diagonaliza A, diminuem o custo do cálculo de potencias altas
  - Multiplicidades geométrica e algébrica
    - Dimensão do autoespaço e multiplicidade no polinômio
    - Para A ser diagonalizável, é preciso que sejam iguais

Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Anton seção 5.2
    - 1-6
    - 12-15

Resumo

- Próxima aula:
  - Diagonalização ortogonal
    - Matrizes ortogonalmente semelhantes

$$P^T A P = D$$

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 5.2
  - DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
    - Seção 5.4