Integrais duplas

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

Revisão

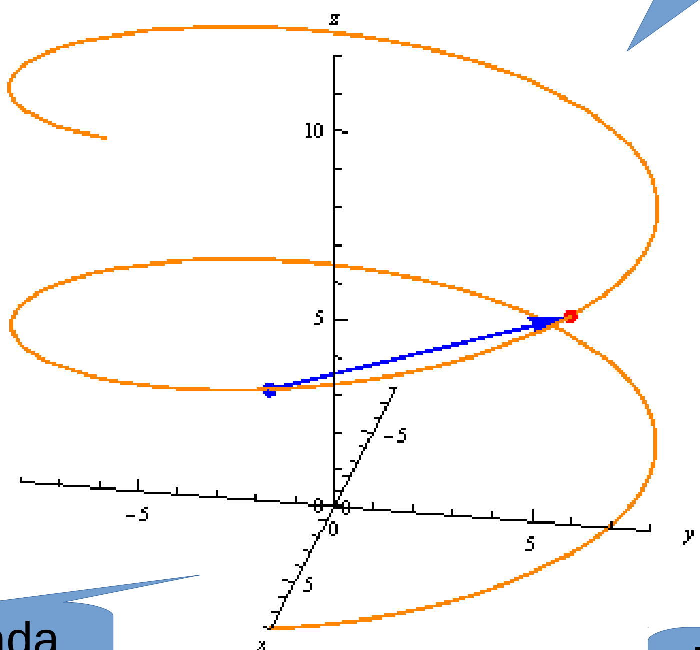
Revisão

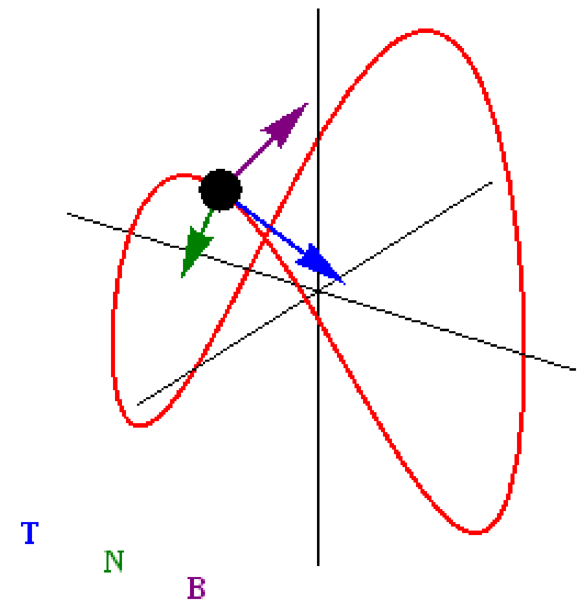
- Funções vetoriais

Limite e continuidade

Vetores tangente, normal e binormal

Comprimento de curva





Derivada

Integral

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

FONTE: https://instruct.math.lsa.umich.edu/lecturedemos/ma215/docs/13_2/examples.html
e https://www.revolvy.com/main/index.php?s=Frenet%E2%80%93Serret+formulas

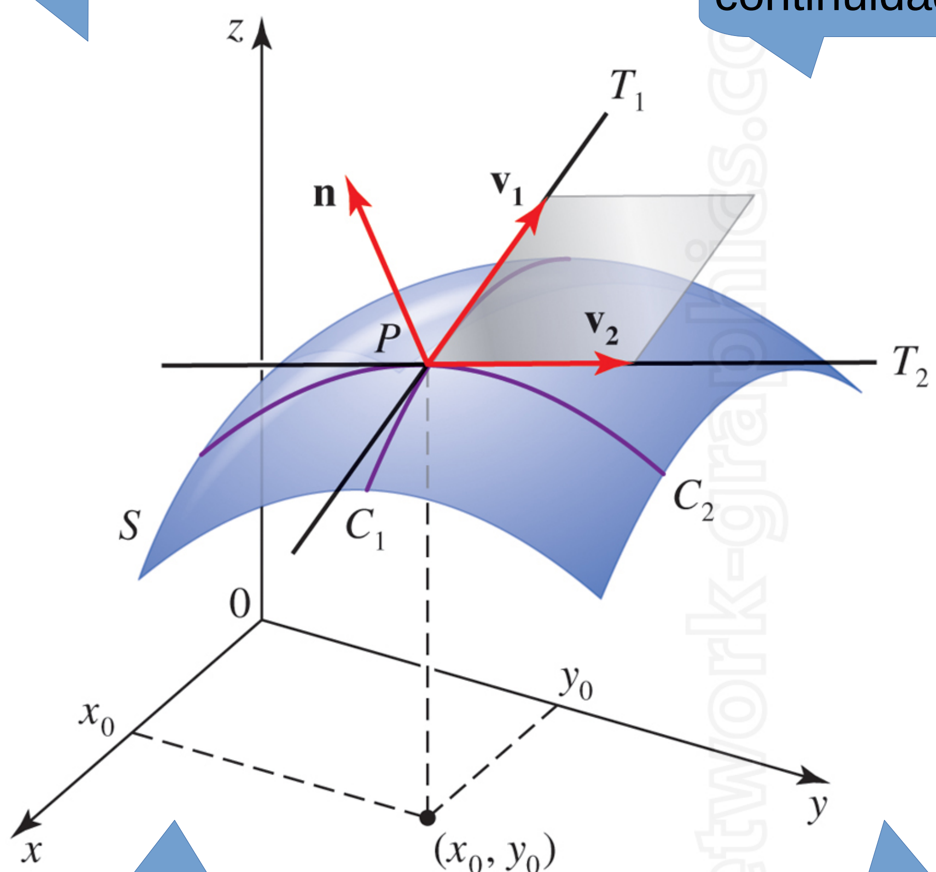
Revisão

- Funções de duas ou mais variáveis

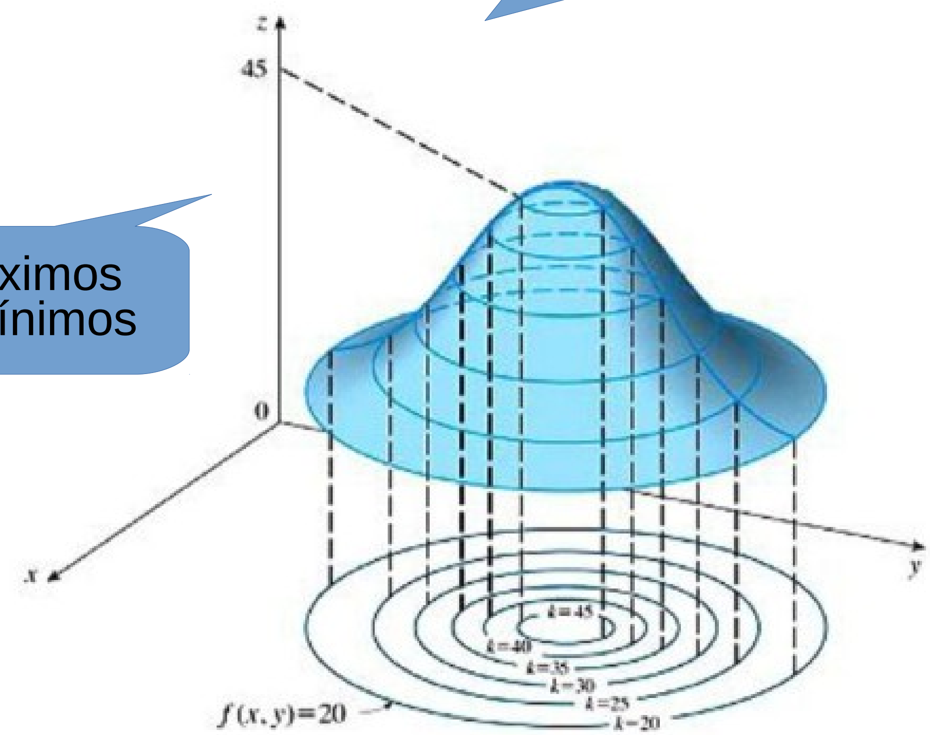
Derivadas parciais

Limite e continuidade

Curvas de nível



Máximos e mínimos



Diferenciabilidade

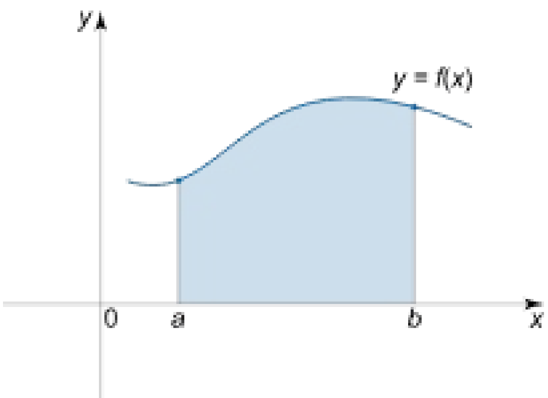
Gradiente

Derivadas direcionais

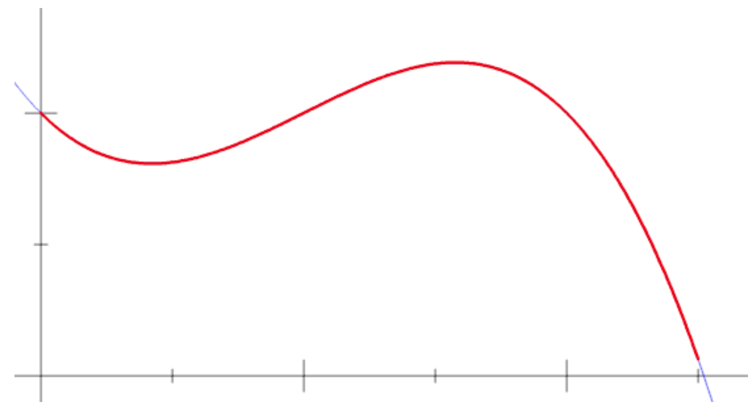
Integrais duplas

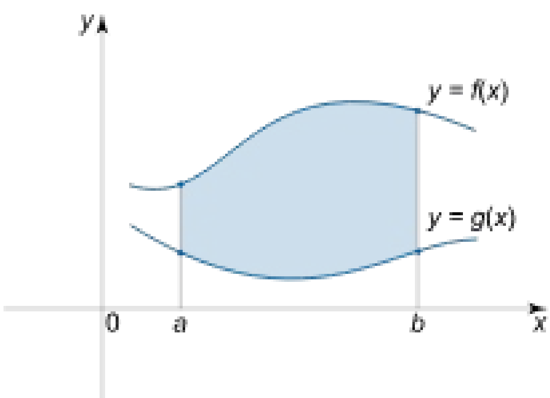
Integrais duplas

- Motivação



Função de uma variável



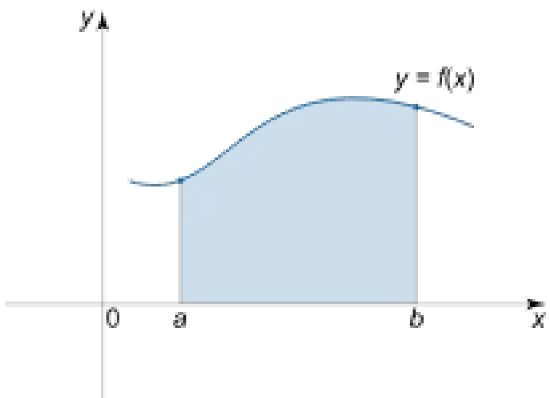


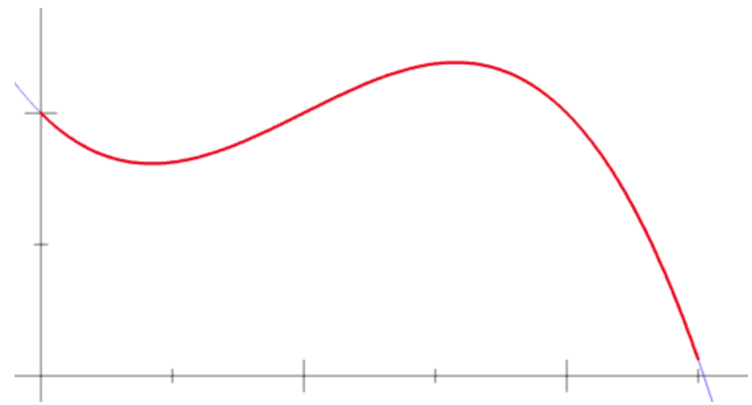
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

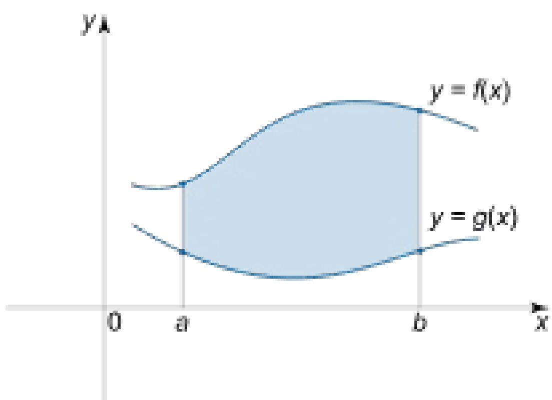
FONTE: https://www.math24.net/definition-properties-double-integrals/
e https://pt.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Riemann

Integrais duplas

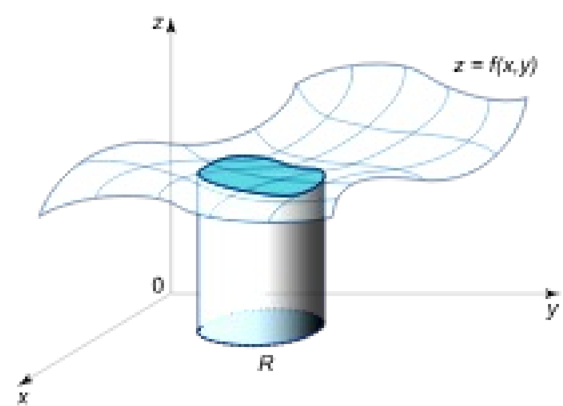
- Motivação







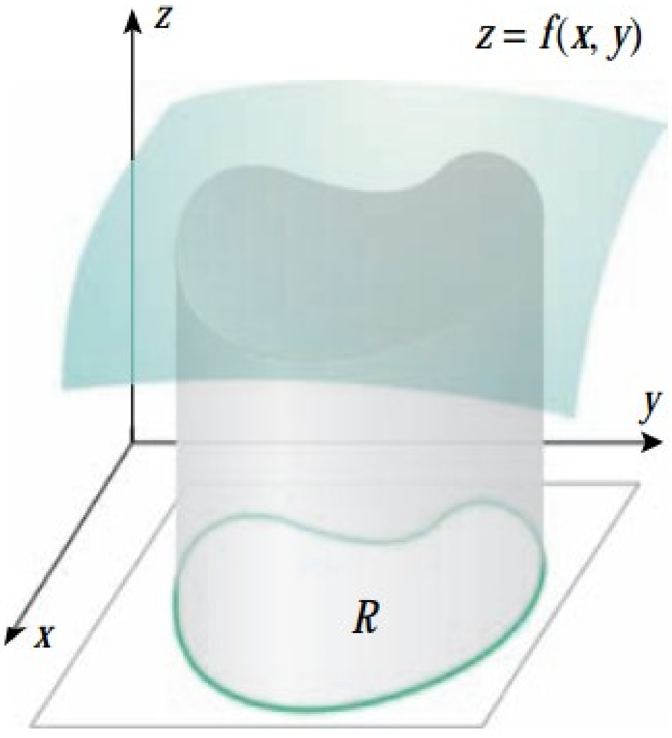
A base pode ter qualquer formato



FONTE: https://www.math24.net/definition-properties-double-integrals/
e https://pt.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Riemann

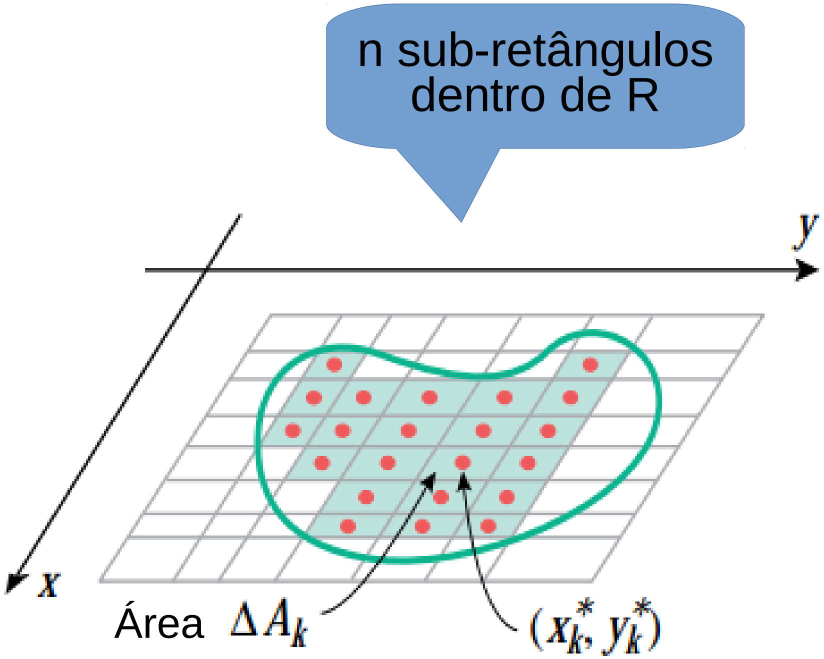
Integrais duplas

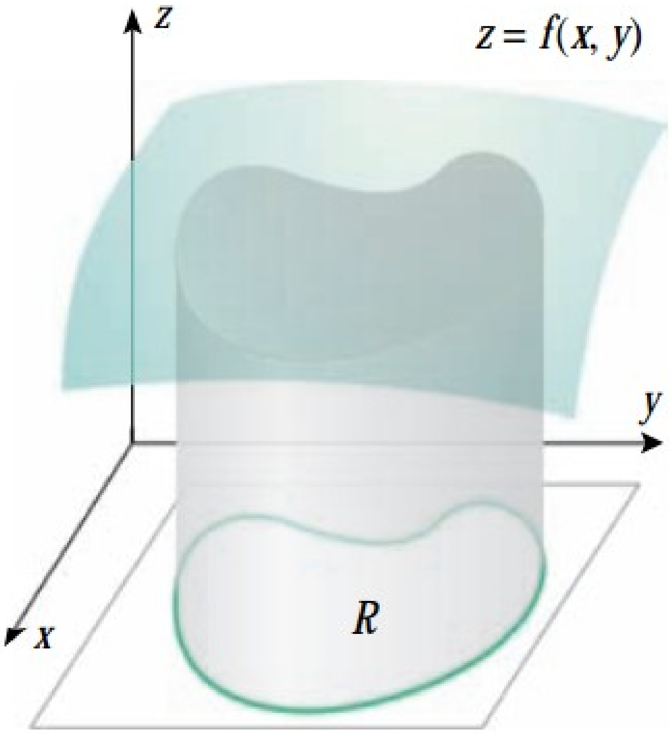
- O problema do volume
  - Dada uma função f de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região R do plano xy, encontre o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x, y) e a região R



Integrais duplas

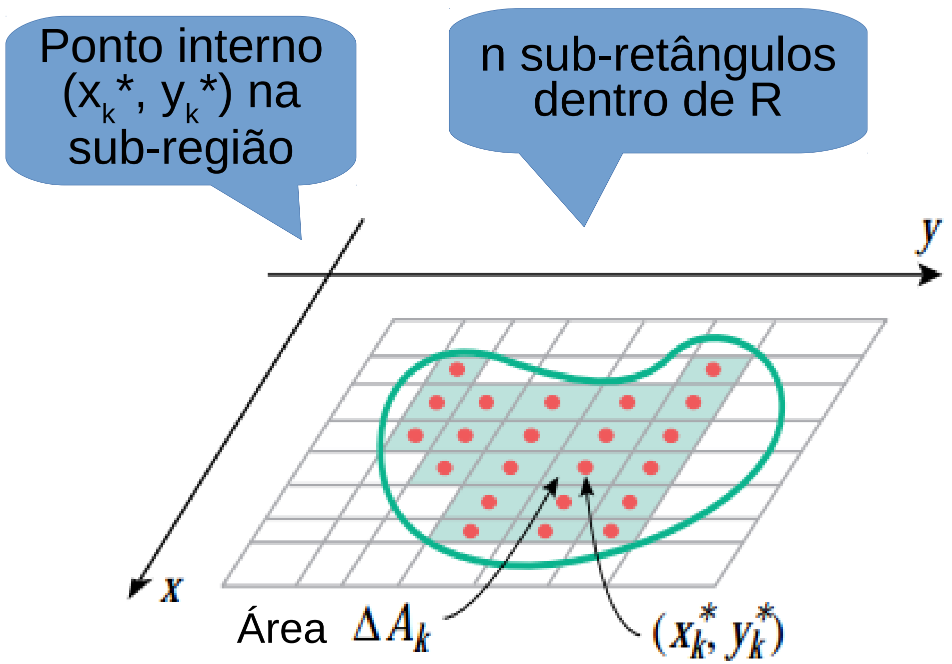
- O problema do volume
  - Dada uma função f de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região R do plano xy, encontre o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x, y) e a região R

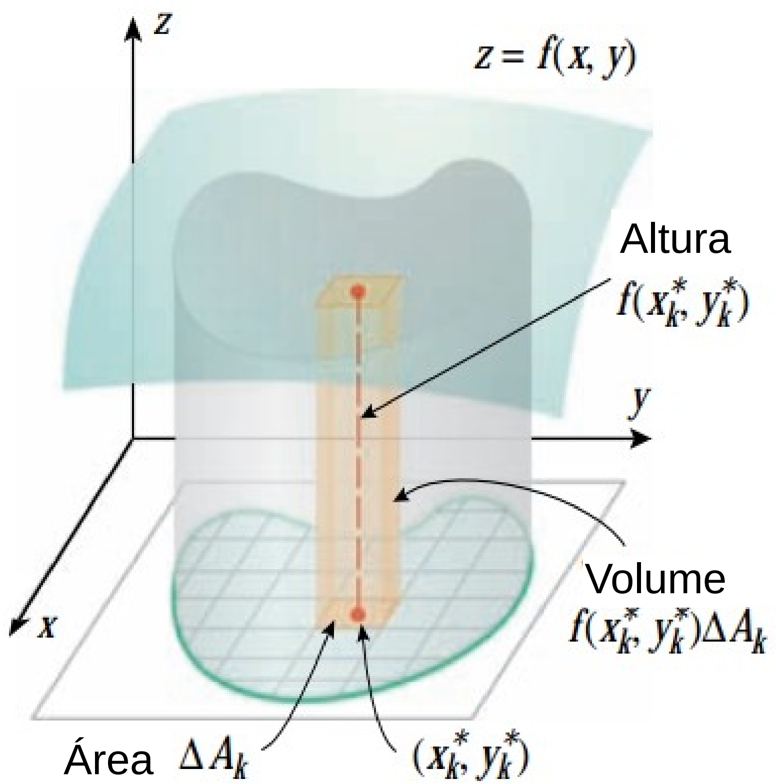




Integrais duplas

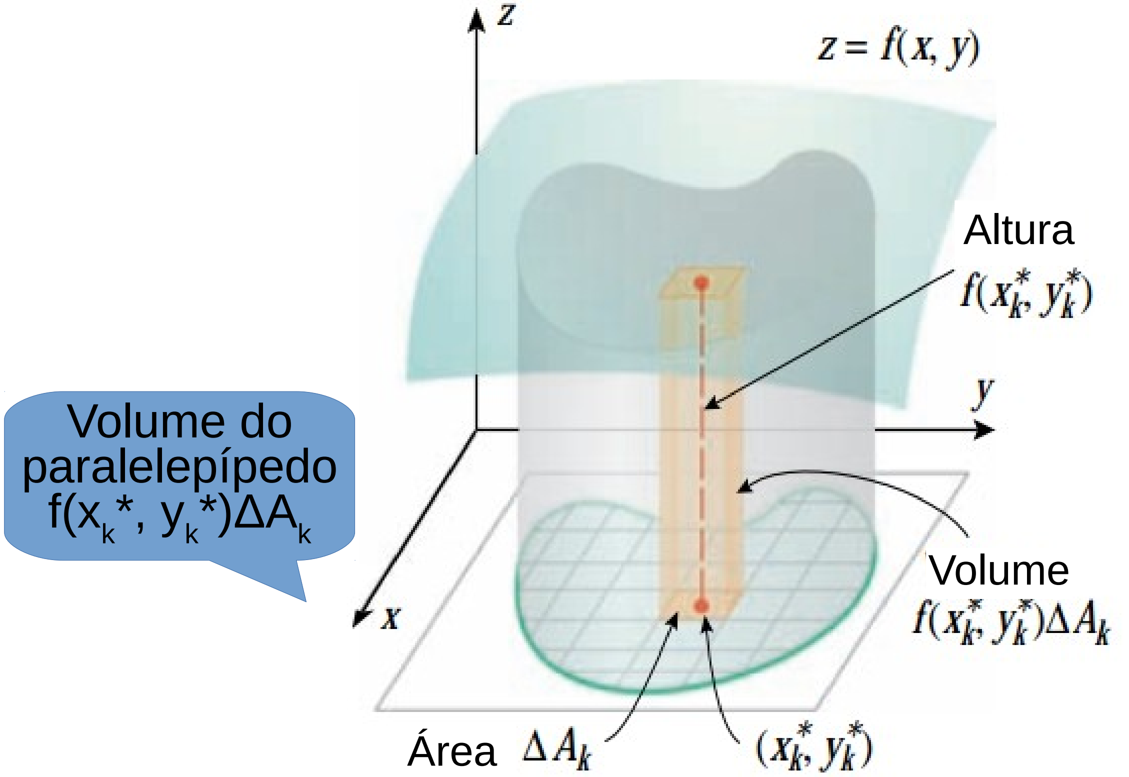
- O problema do volume
  - Dada uma função f de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região R do plano xy, encontre o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x, y) e a região R





Integrais duplas

- O problema do volume
  - Dada uma função f de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região R do plano xy, encontre o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x, y) e a região R



Integrais duplas

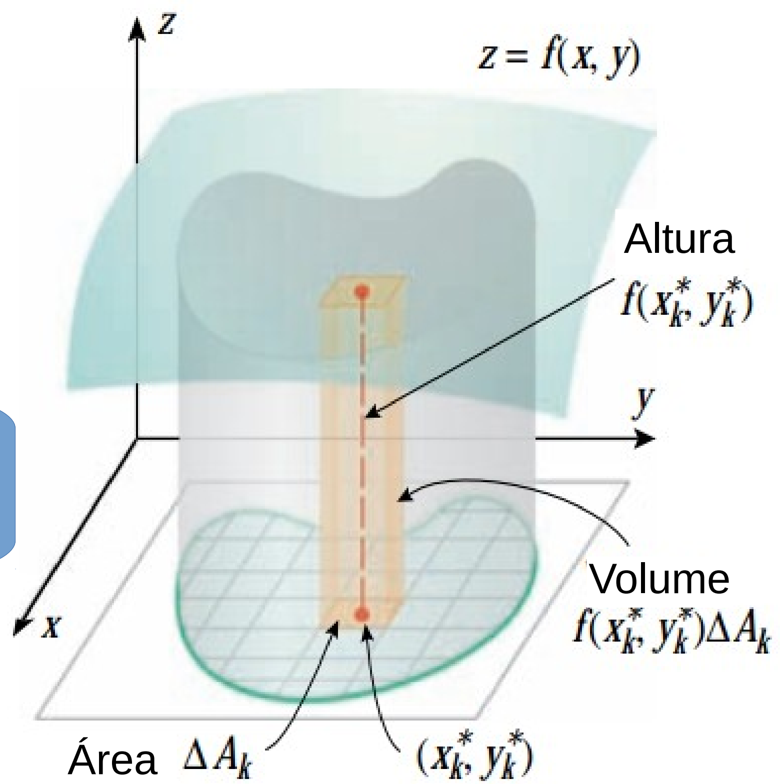
- O problema do volume
  - Dada uma função f de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região R do plano xy, encontre o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x, y) e a região R
    - Volume aproximado

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

Bases não cobrem todo o domínio

Volume do paralelepípedo $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$

Paralelepípedos com topo plano



Integrais duplas

- O problema do volume
  - Dada uma função f de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região R do plano xy, encontre o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x, y) e a região R
    - Volume aproximado

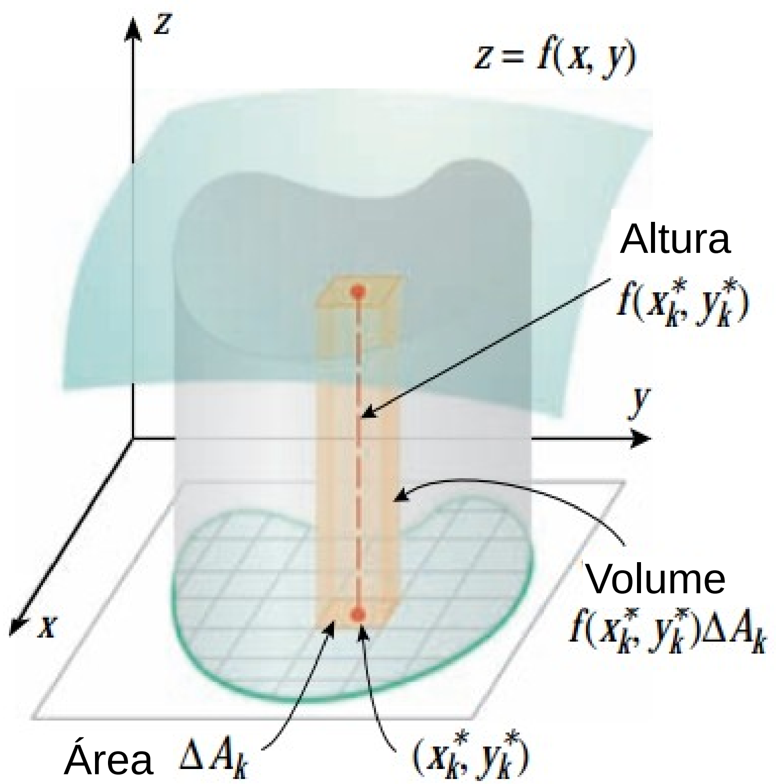
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

    - Diminuindo o erro

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

A área da base tende a zero

O erro tende a zero



Integrais duplas

- Definição: Volume sob uma Superfície
  - Se f for uma função de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região R do plano xy, então o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x, y) e a região R será definido por

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

Aumentando o número de retângulos, diminui a área da base

Se f tiver valores positivos e negativos então será uma **diferença** de volumes

Integrais duplas

- Definição: Volume sob uma Superfície
  - Se f for uma função de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região R do plano xy, então o volume do sólido compreendido entre a superfície z = f(x, y) e a região R será definido por

Isso lembra o quê?

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

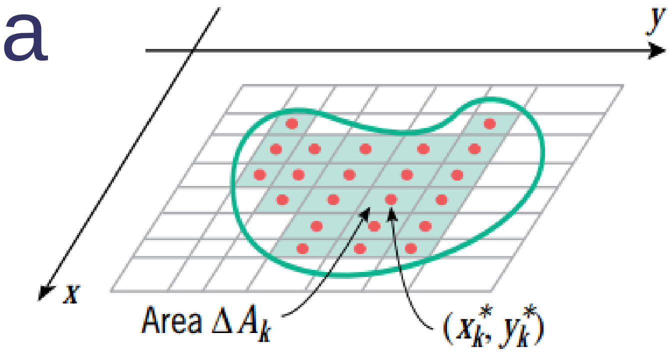
Aumentando o número de retângulos, diminui a área da base

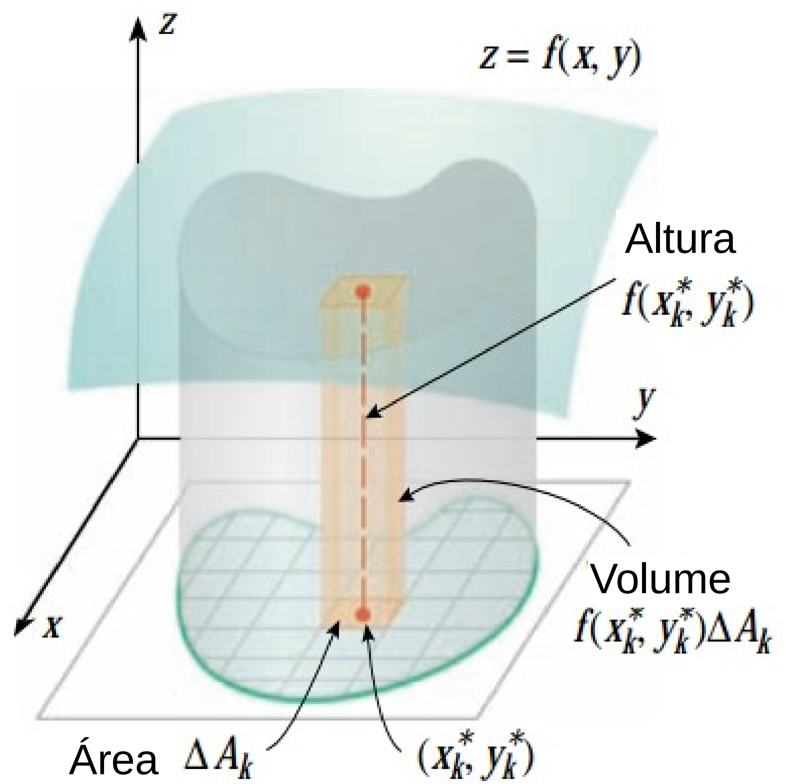
Se f tiver valores positivos e negativos então será uma **diferença** de volumes

Integrais duplas

- Definição de uma integral dupla
  - Limite das somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A$$

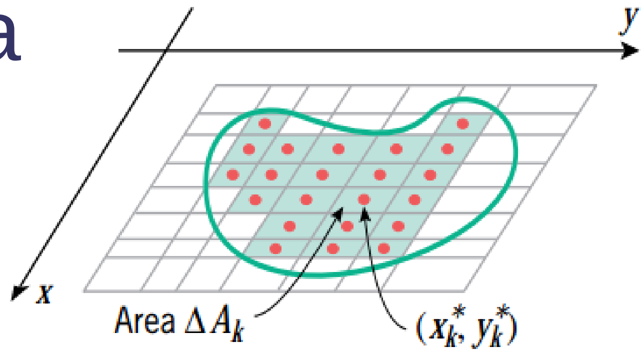




Resulta um volume

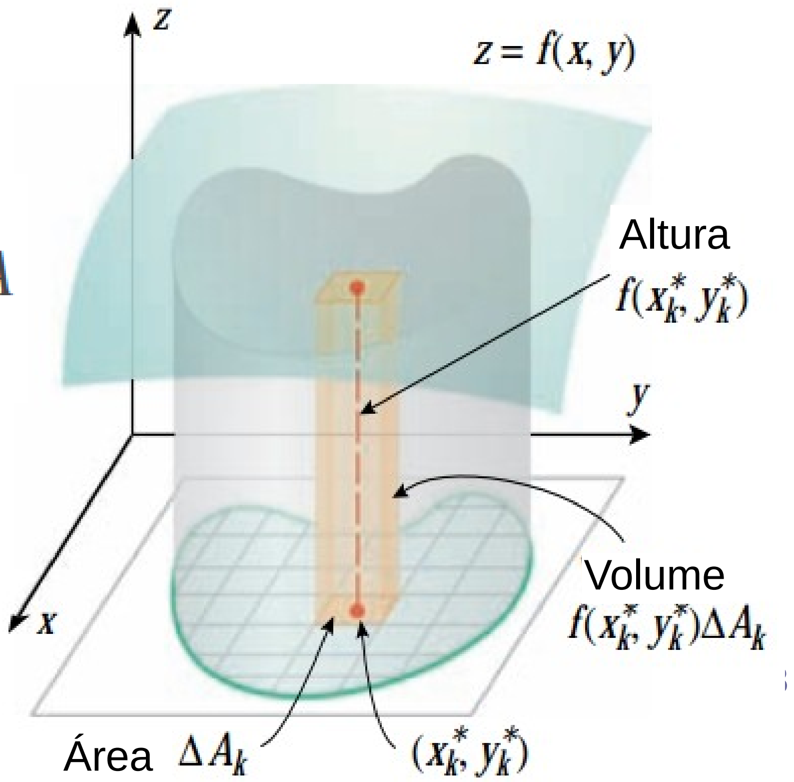
Integrais duplas

- Definição de uma integral dupla
  - Limite das somas de Riemann



$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n} f\left(x_{ij},\, y_{ij}\right) \Delta A$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,\,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij},\, y_{ij}\right) \Delta A$$



Resulta um volume

Integrais duplas

- Cálculo de uma integral dupla
  - É quase que impraticável obter o valor de uma integral dupla pelo limite
  - Cálculo de duas integrais sucessivas

Assumindo, inicialmente, R um retângulo paralelo aos eixos

Integrais duplas

- Cálculo de uma integral dupla
  - É quase que impraticável obter o valor de uma integral dupla pelo limite
  - Cálculo de duas integrais sucessivas
    - Integração parcial
      - Integral definida parcial

$$\int_a^b f(x, y)\, dx \qquad \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Parecido com as derivadas parciais: assume uma variável como constante

Integrais duplas

- Calculo de uma integral dupla
  - Exemplo:

$$\int_0^1 xy^2\,dx =$$

$$\int_0^1 xy^2\,dy =$$

Integrais duplas

- Calculo de uma integral dupla
  - Exemplo:

$$\int_0^1 xy^2\,dx = y^2\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{y^2x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{y^2}{2}$$

$$\int_0^1 xy^2\,dy = x\int_0^1 y^2\,dy = \left.\frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{1} = \frac{x}{3}$$

Integrais duplas

- Calculo de uma integral dupla
  - Calculo de duas integrais sucessivas
    - Uma integral definida parcial em relação a x é uma função de y
    - Portanto, pode ser integrada em relação a y

Análogo para a outra variável

Integrais duplas

- Calculo de uma integral dupla
  - Calculo de duas integrais sucessivas
    - Uma integral definida parcial em relação a x é uma função de y
    - Portanto, pode ser integrada em relação a y
  - Integrais iteradas (ou repetidas)

Análogo para a outra variável

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

Integrais duplas

- Integrais iteradas
  - Exemplo e exercício:

$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\, dy\, dx \qquad \int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\, dx\, dy$$

Integrais duplas

- Integrais iteradas
  - Exemplo e exercício:

$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\,dx \qquad\qquad \int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^3 \left[\int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\right] dx$$

$$= \int_1^3 \left(40y - xy^2\right)\Big]_{y=2}^{4}\,dx$$

$$= \int_1^3 [(160 - 16x) - (80 - 4x)]\,dx$$

$$= \int_1^3 (80 - 12x)\,dx$$

$$= \left(80x - 6x^2\right)\Big]_1^3 = 112$$

Integrais duplas

- Integrais iteradas
  - Exemplo e exercício:

$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_1^3 \left[\int_2^4 (40 - 2xy)\,dy \right] dx$$

$$= \int_1^3 \left. (40y - xy^2) \right]_{y=2}^{4} dx$$

$$= \int_1^3 [(160 - 16x) - (80 - 4x)]\,dx$$

$$= \int_1^3 (80 - 12x)\,dx$$

$$= \left. (80x - 6x^2) \right]_1^3 = 112$$

$$\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_2^4 \left[\int_1^3 (40 - 2xy)\,dx \right] dy$$

$$= \int_2^4 \left. (40x - x^2 y) \right]_{x=1}^{3} dy$$

$$= \int_2^4 [(120 - 9y) - (40 - y)]\,dy$$

$$= \int_2^4 (80 - 8y)\,dy$$

$$= \left. (80y - 4y^2) \right]_2^4 = 112$$

Mesmo valor

Integrais duplas

- Integrais iteradas
  - Exemplo e exercício:

$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_1^3 \boxed{\left[\int_2^4 (40 - 2xy)\, dy\right]} dx$$

$$= \int_1^3 (40y - xy^2)\Big]_{y=2}^{4} dx$$

$$= \int_1^3 [(160 - 16x) - (80 - 4x)]\, dx$$

$$= \boxed{\int_1^3 (80 - 12x)\, dx}$$

$$= (80x - 6x^2)\Big]_1^3 = 112$$

$$\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_2^4 \boxed{\left[\int_1^3 (40 - 2xy)\, dx\right]} dy$$

$$= \int_2^4 (40x - x^2 y)\Big]_{x=1}^{3} dy$$

$$= \int_2^4 [(120 - 9y) - (40 - y)]\, dy$$

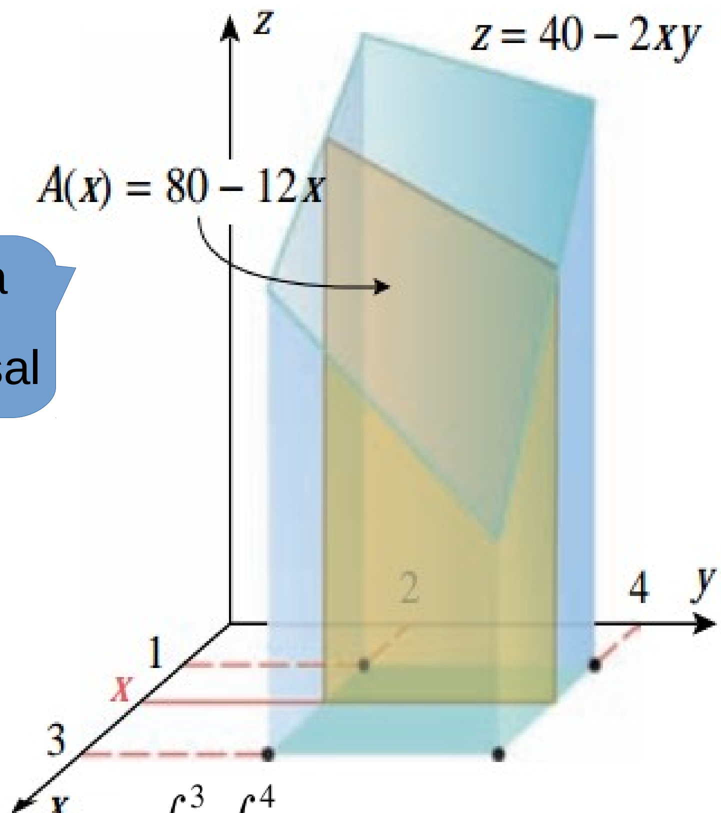
$$= \boxed{\int_2^4 (80 - 8y)\, dy}$$

$$= (80y - 4y^2)\Big]_2^4 = 112$$

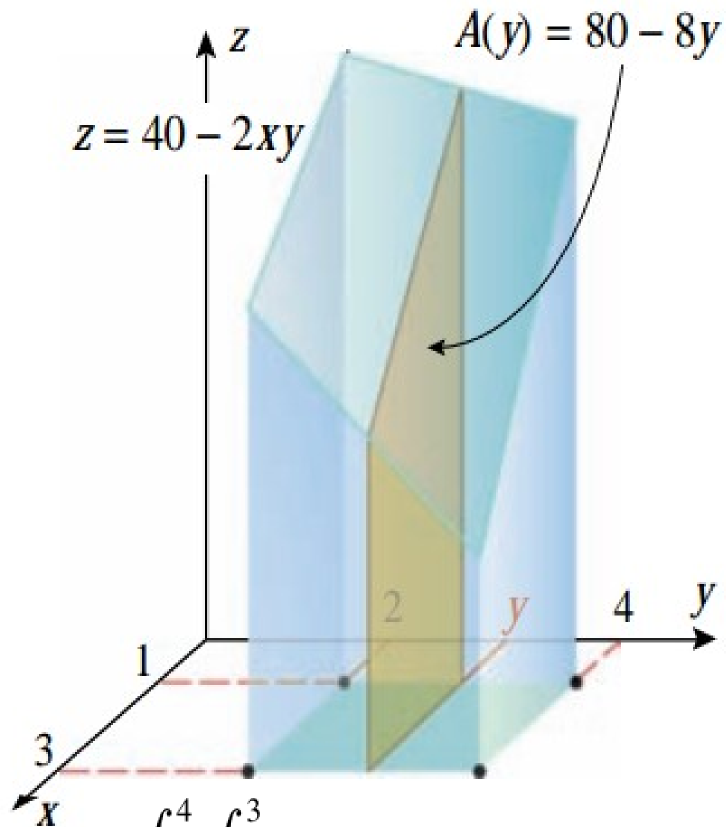
Integrais duplas

- Integrais iteradas
  - Exemplo e exercício:
    - Sólido limitado pela função

Área da seção transversal



$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\, dy\, dx$$



$$\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\, dx\, dy$$

Integrais duplas

- Teorema de Fubini:
  - Seja R o retângulo definido pelas desigualdades

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

  - Se f(x, y) for contínua nesse retângulo, então

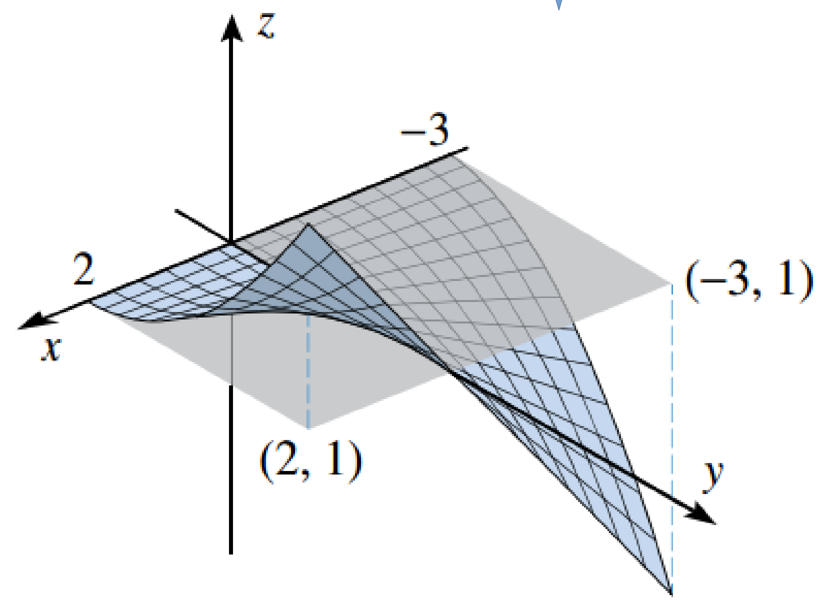
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

Integrais duplas

- Exercício: Calcule a integral dupla no retângulo R = { (x, y) : −3 ≤ x ≤ 2, 0 ≤ y ≤ 1 }

$$\iint_R y^2 x \, dA$$

Volume líquido com sinal



$z = y^2 x$ em $[-3, 2] \times [0, 1]$

Integrais duplas

- Exercício: Calcule a integral dupla no retângulo $R = \{ (x, y) : \ -3 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 1 \}$

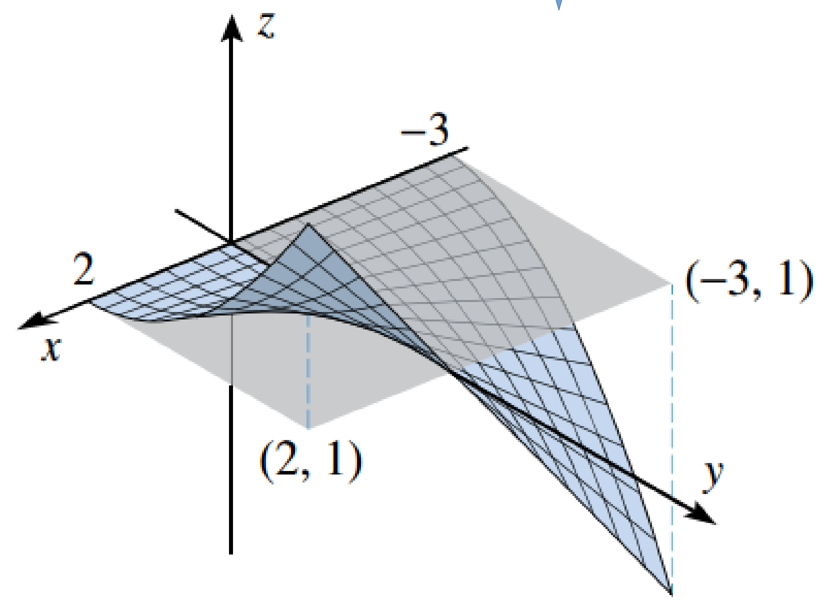
$$\iint_R y^2 x \, dA = \int_0^1 \int_{-3}^2 y^2 x \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 x^2 \right]_{x=-3}^{2} dy$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{5}{2} y^2 \right) dy$$

$$= -\frac{5}{6} y^3 \Big]_0^1 = -\frac{5}{6}$$

Volume líquido com sinal



$z = y^2 x$ em $[-3, 2] \times [0, 1]$

Integrais duplas

- Propriedades:

Herdadas de limite

$$\iint_R c f(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA \quad (c \text{ uma constante})$$

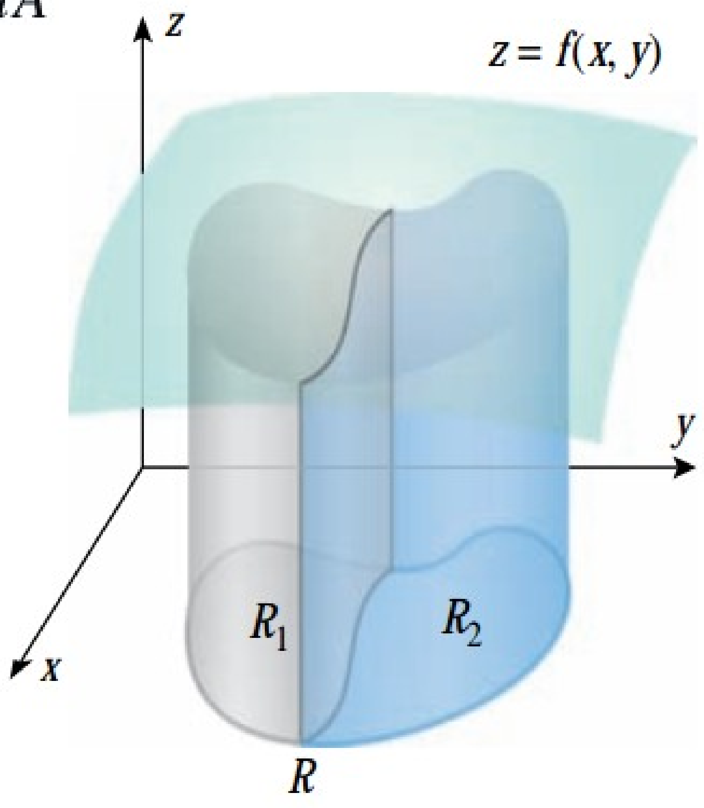
$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$$

$$\iint_R [f(x, y) - g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA - \iint_R g(x, y)\, dA$$

Integrais duplas

- Propriedades:
  - Subdivisão do sólido

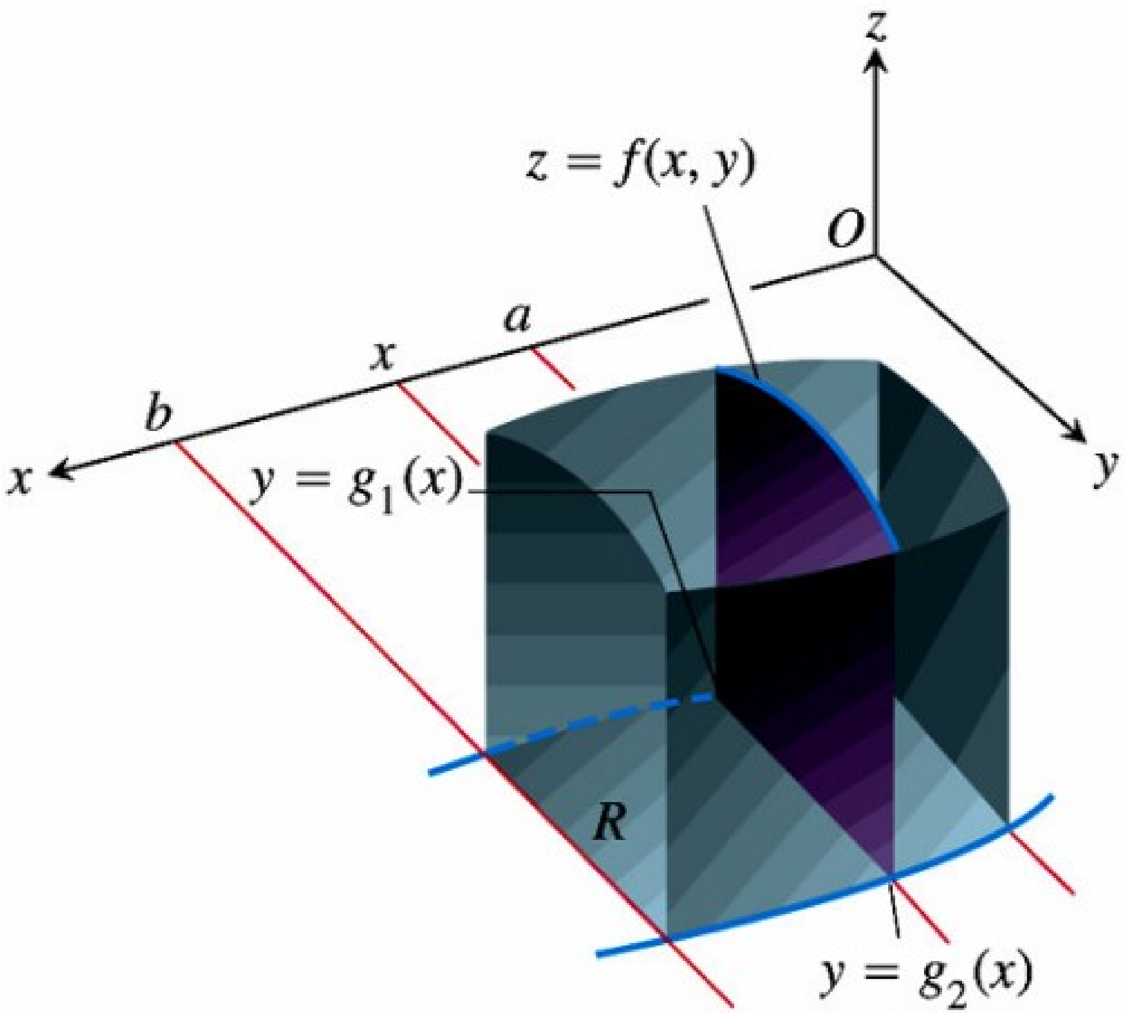
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$



O volume do sólido inteiro é a soma dos volumes dos sólidos acima de R_1 e R_2.

Integrais duplas

- Regiões não retangulares



Integrais duplas

- Integrais iteradas com limites de integração não constantes

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

Integrais duplas

- Integrais iteradas com limites de integração não constantes
  - Exemplo:

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \, dx$$

Integrais duplas

- Integrais iteradas com limites de integração não constantes
  - Exemplo: $$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \right] dx = \int_0^1 \left. \frac{y^3 x}{3} \right]_{y=-x}^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^7}{3} + \frac{x^4}{3} \right] dx = \left(\frac{x^8}{24} + \frac{x^5}{15} \right) \Big]_0^1 = \frac{13}{120}$$

Integrais duplas

- Integrais iteradas com limites de integração não constantes
  - Exercício: $$\int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y \, dx \, dy$$

Integrais duplas

- Integrais iteradas com limites de integração não constantes
  - Exercício: $$\int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left[\int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y \, dx \right] dy = \int_0^{\pi/3} \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} y \Big]_{x=0}^{\cos y} dy$$

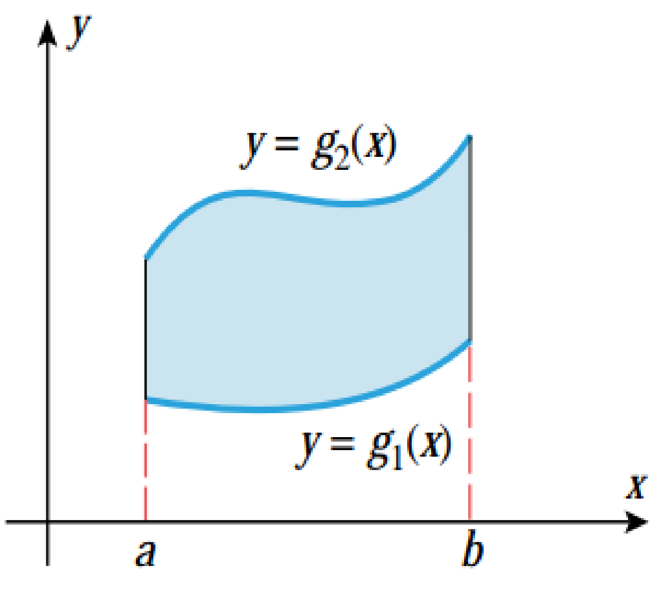
$$= \int_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} \cos^2 y \operatorname{sen} y \right] dy = -\frac{1}{6} \cos^3 y \Big]_0^{\pi/3} = \frac{7}{48}$$

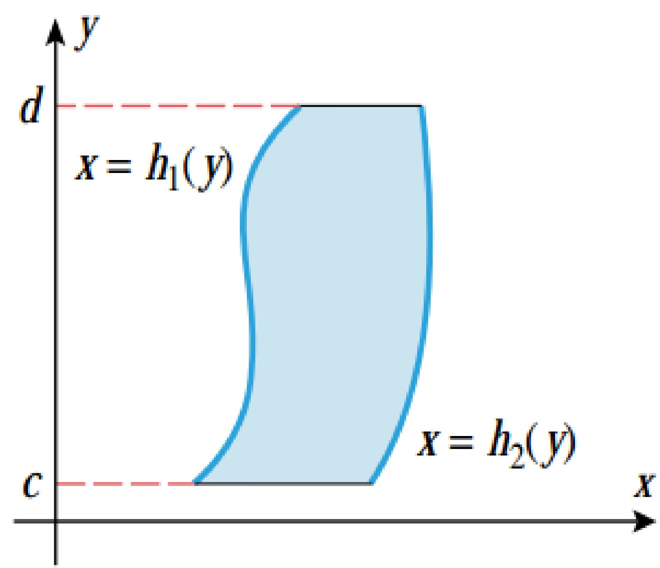
u=cos(y)

Integrais duplas

- Regiões não retangulares
  - O estudo se limitará a integrais de dois tipos

Região do tipo I





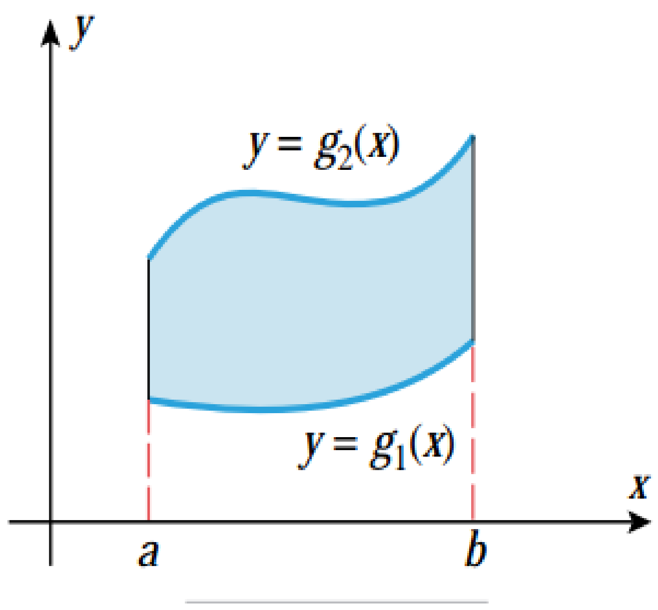
Região do tipo II

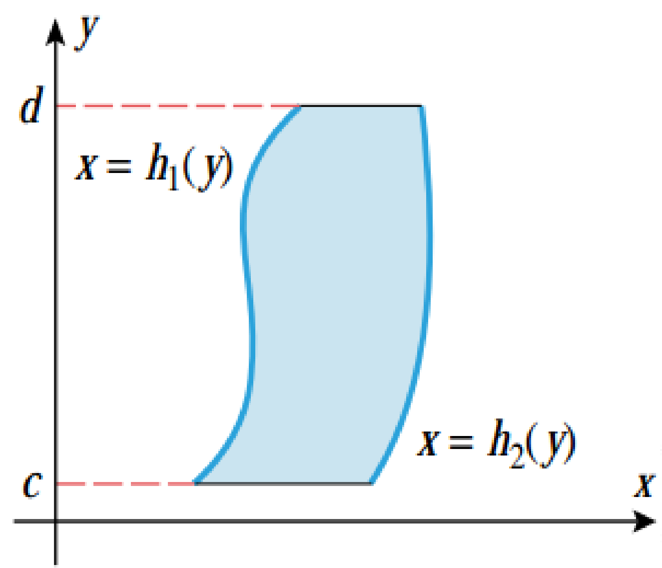
Integrais duplas

- Regiões não retangulares
  - O estudo se limitará a integrais de dois tipos

Os exemplos anteriores, se encaixam em qual tipo?

Região do tipo I

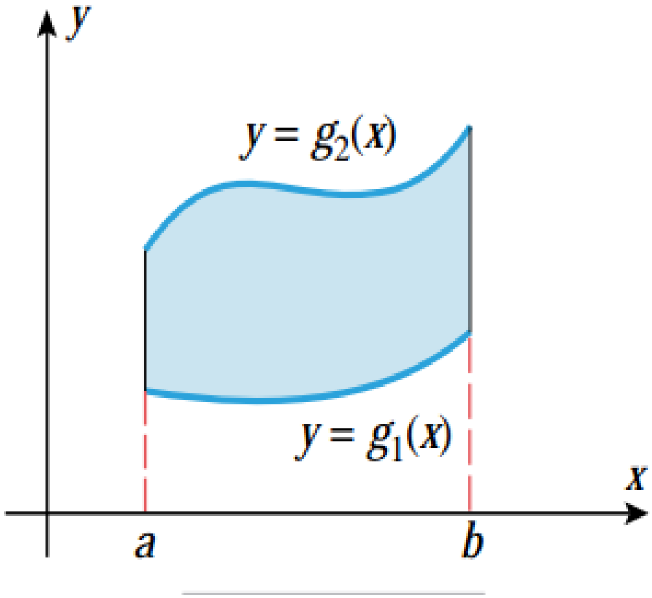




Região do tipo II

Integrais duplas

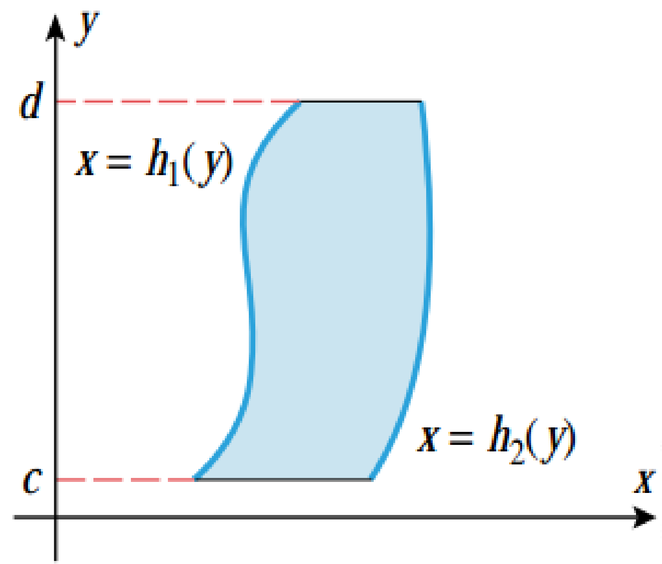
- Regiões não retangulares
  - O estudo se limitará a integrais de dois tipos
    - Tipo I:
      - Limitada à esquerda e à direita por retas verticais $x = a$ e $x = b$ e
      - Limitada abaixo e acima por curvas contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, onde $g_1(x) \leq g_2(x)$ com $a \leq x \leq b$



Região do tipo I

Integrais duplas

- Regiões não retangulares
  - O estudo se limitará a integrais de dois tipos
    - Tipo II:
      - Limitada abaixo e acima por retas horizontais $y = c$ e $y = d$ e
      - Limitada à direita e esquerda por curvas contínuas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, que satisfazem $h_1(y) \leq h_2(y)$ com $c \leq y \leq d$



Região do tipo II

Integrais duplas

- Regiões não retangulares
  - Teorema:
    - Se R for uma região do tipo I na qual f(x, y) é contínua, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

    - Se R for uma região do tipo II na qual f(x, y) é contínua, então

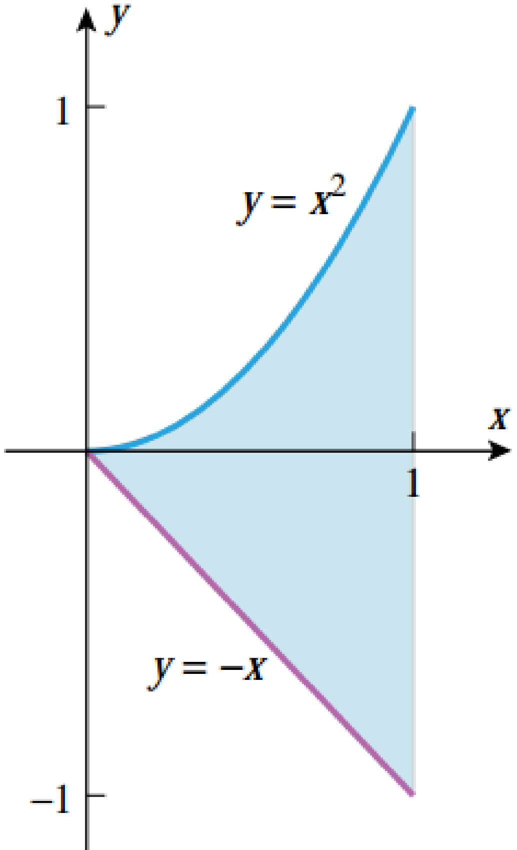
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

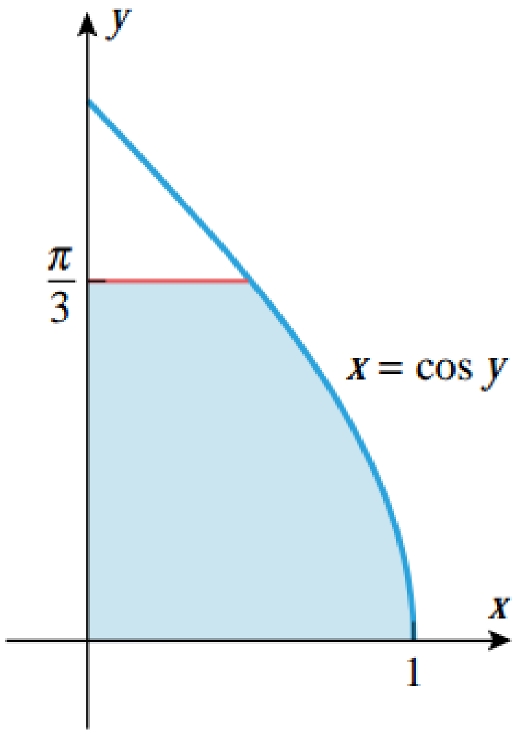
Integrais duplas

- Regiões não retangulares
  - Exemplo

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \, dx$$

$$\int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y \, dx \, dy$$



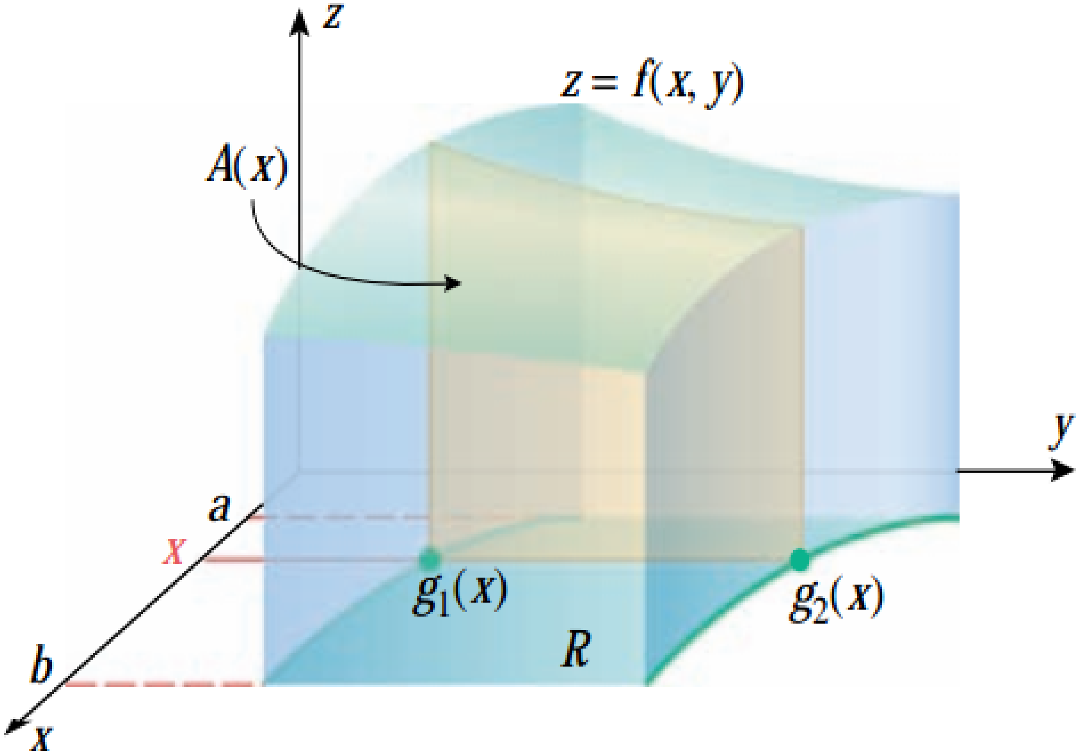


Integrais duplas

- Regiões não retangulares
  - Volume
    - Para um valor fixo de x, f depende só de y

Seção transversal

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$



Integrais duplas

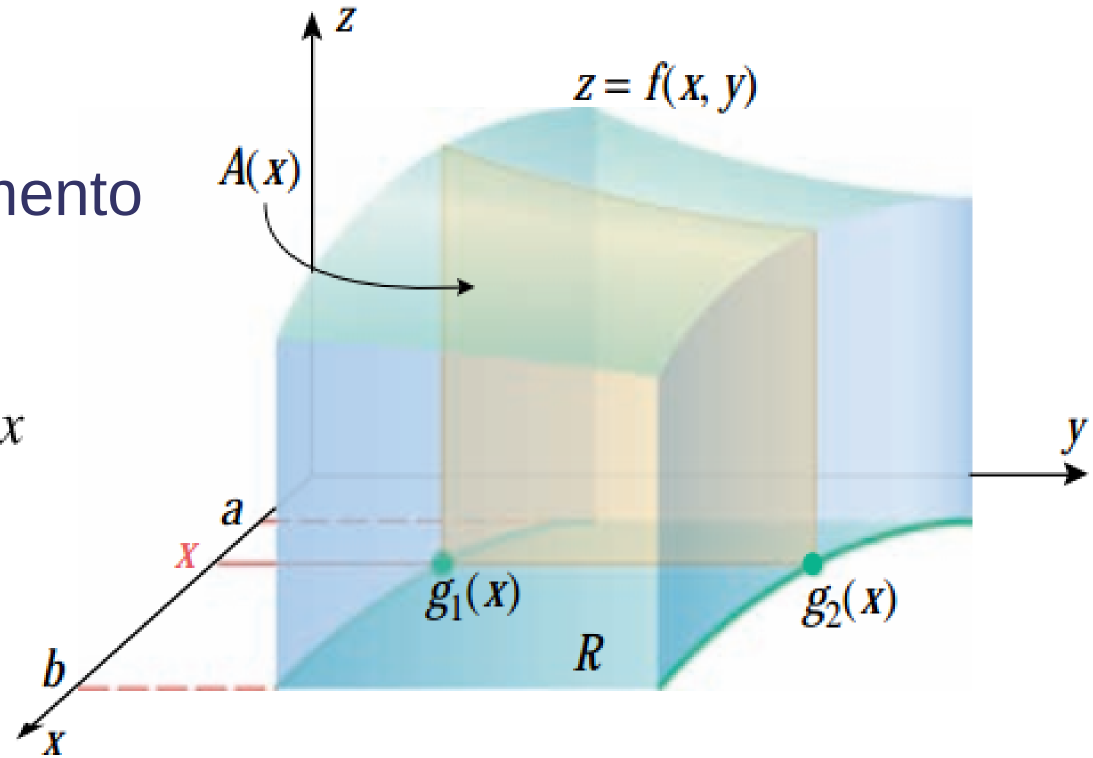
- Regiões não retangulares
  - Volume
    - Para um valor fixo de x, f depende só de y

Seção transversal

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

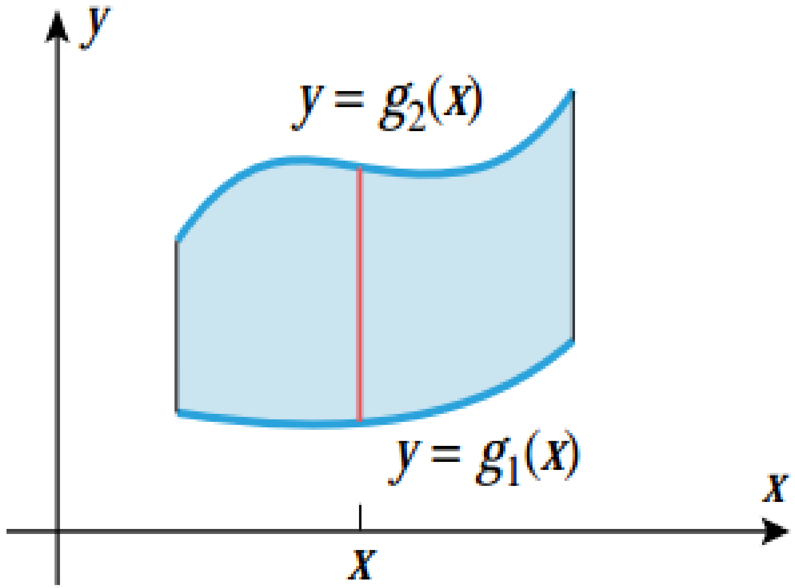
- Pelo método do fatiamento

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$



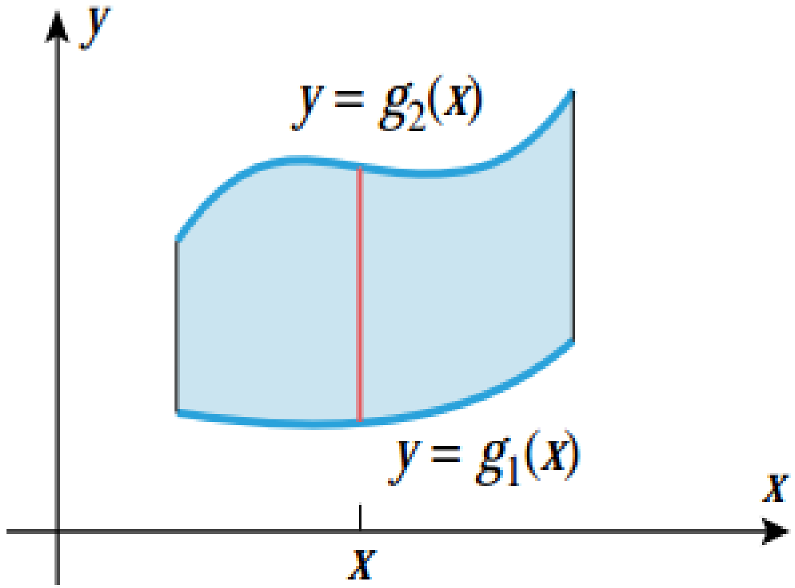
Integrais duplas

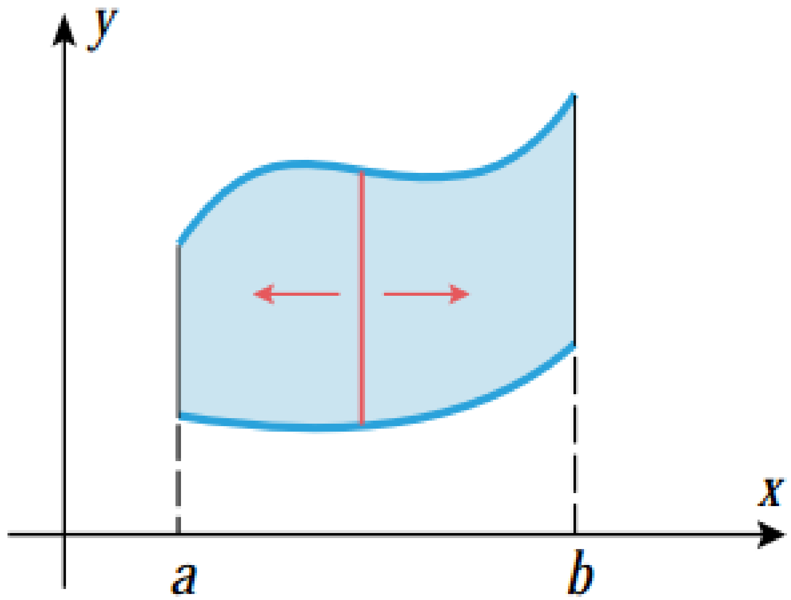
- Determinação dos Limites de Integração:
  - Região do Tipo I



Integrais duplas

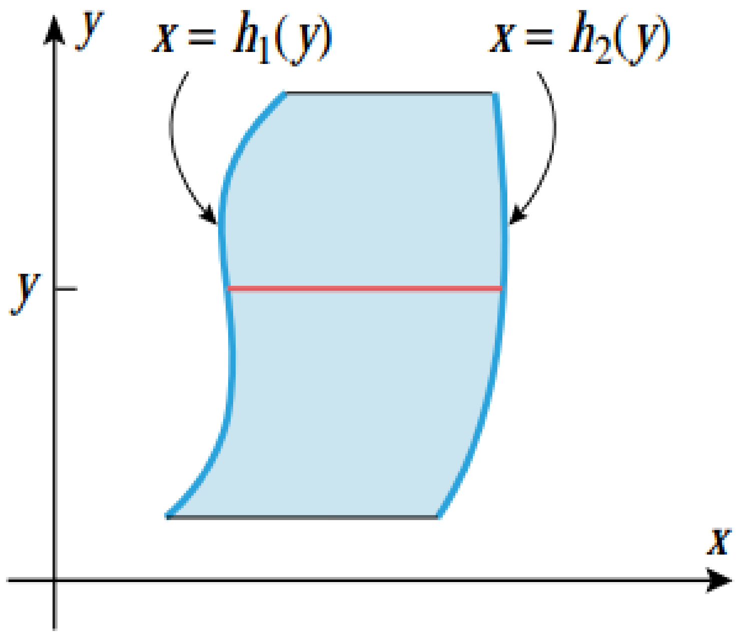
- Determinação dos Limites de Integração:
  - Região do Tipo I





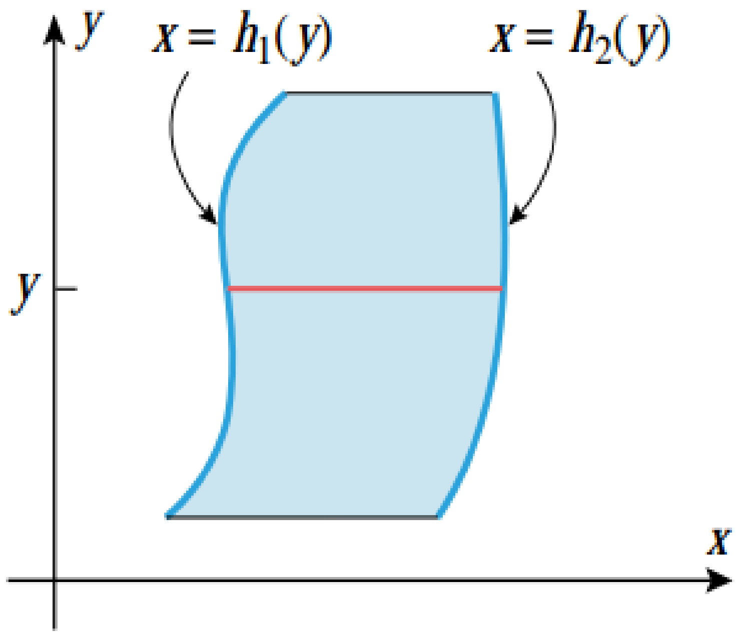
Integrais duplas

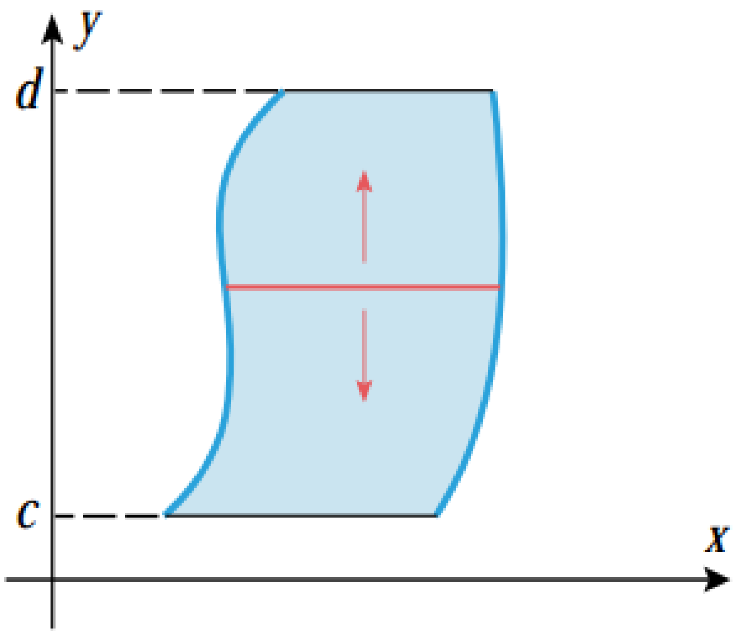
- Determinação dos Limites de Integração:
  - Região do Tipo II



Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Região do Tipo II





Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exemplo:

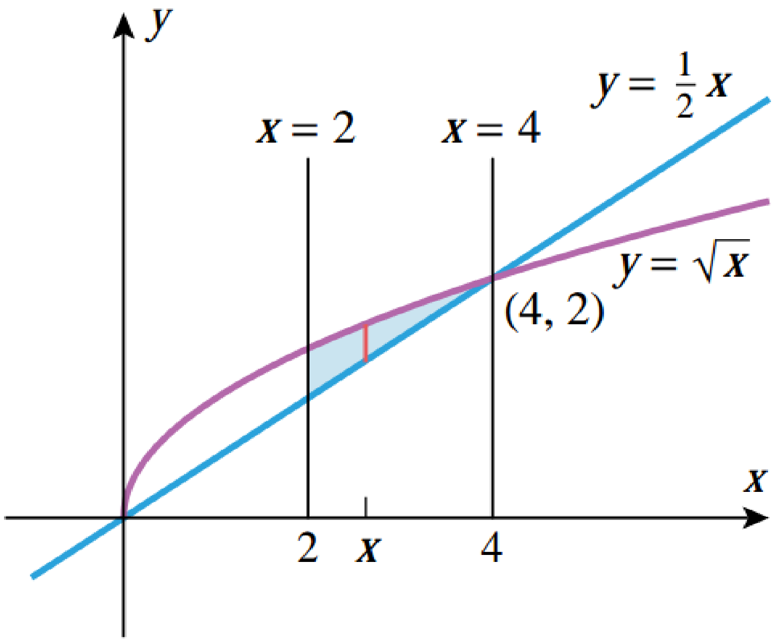
$$\iint_R xy\, dA \qquad y = \frac{1}{2}x \quad y = \sqrt{x} \qquad x = 2 \quad x = 4$$

Qual o tipo?

Esboçar o domínio

Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exemplo: $$\iint_R xy\,dA \qquad y = \tfrac{1}{2}x \quad y = \sqrt{x} \qquad x = 2 \quad x = 4$$



Integrais duplas

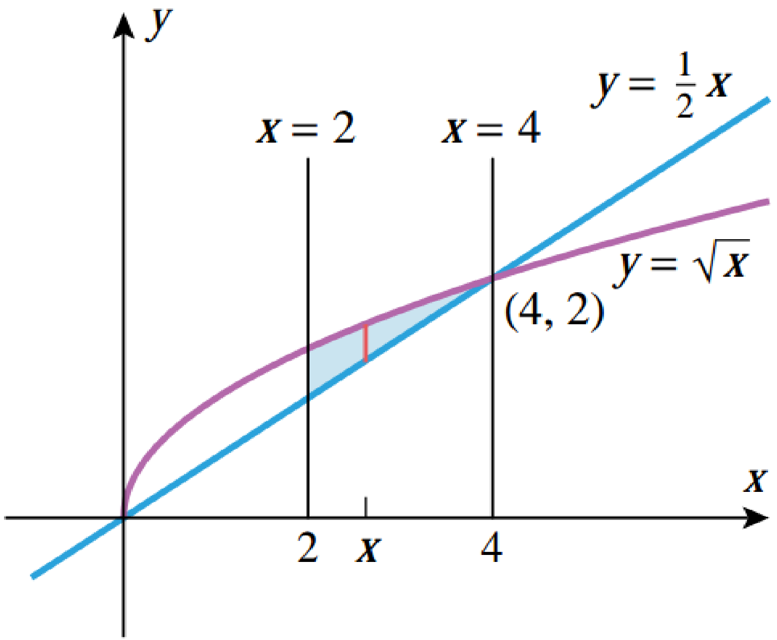
- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exemplo:

$$\iint_R xy\,dA \qquad y = \tfrac{1}{2}x \qquad x = 2$$
$$y = \sqrt{x} \qquad x = 4$$

$$= \int_2^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx = \int_2^4 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x/2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\right]_2^4$$

$$= \left(\frac{64}{6} - \frac{256}{32}\right) - \left(\frac{8}{6} - \frac{16}{32}\right) = \frac{11}{6}$$

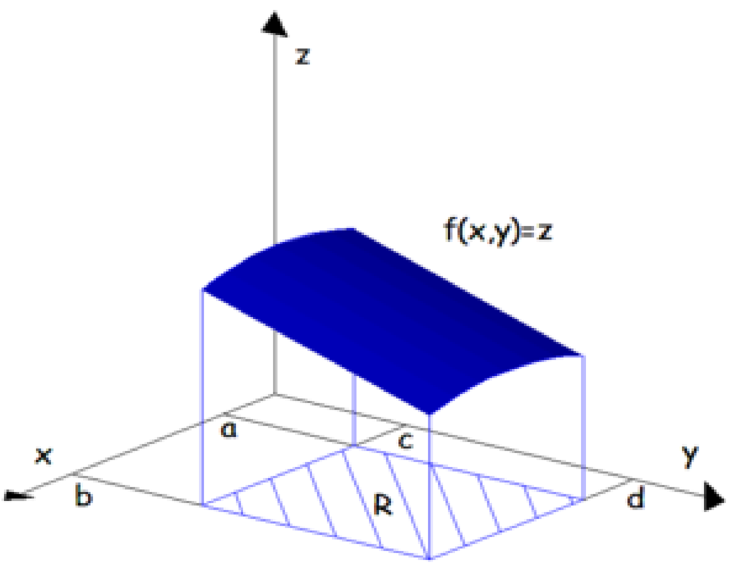


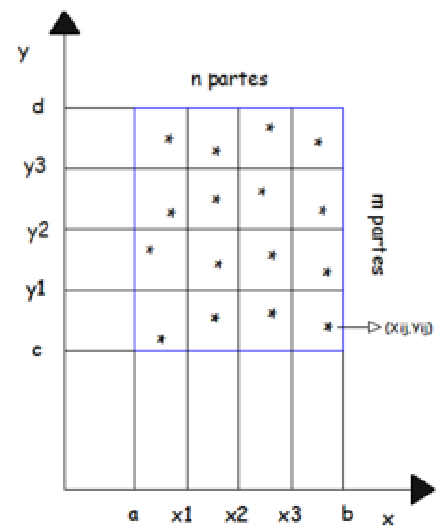
Resumo

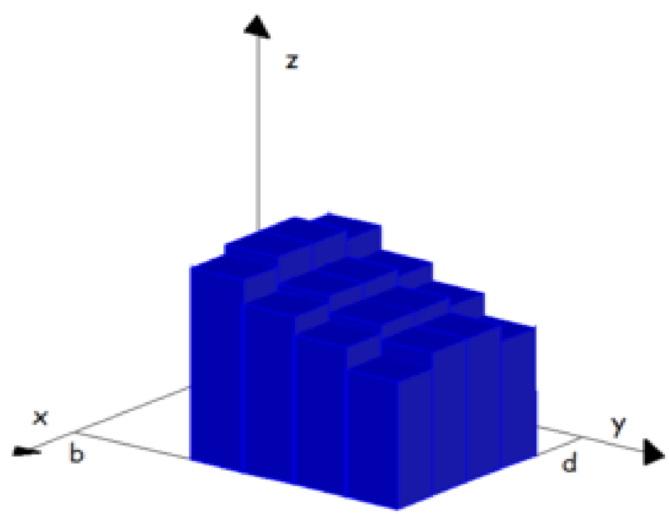
Resumo

- Calculo do volume abaixo de uma superfície
  - Região retangular

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \begin{cases} \displaystyle\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy \\[2ex] \displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \end{cases}$$



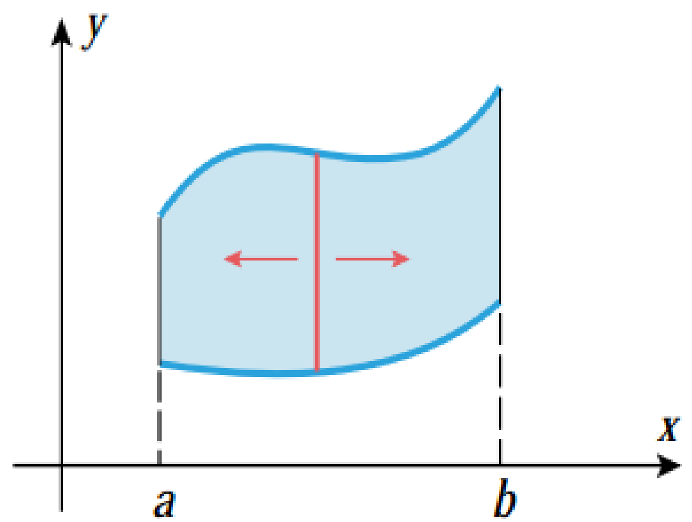


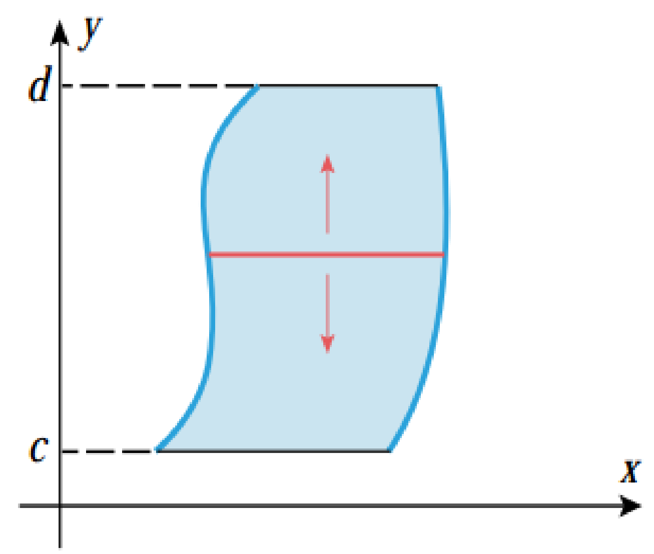


FONTE: https://www.respondeai.com.br/resumos/23/capitulos/1

Resumo

- Calculo do volume abaixo de uma superfície
  - Região não retangular
    - Tipo I $$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$
    - Tipo II $$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



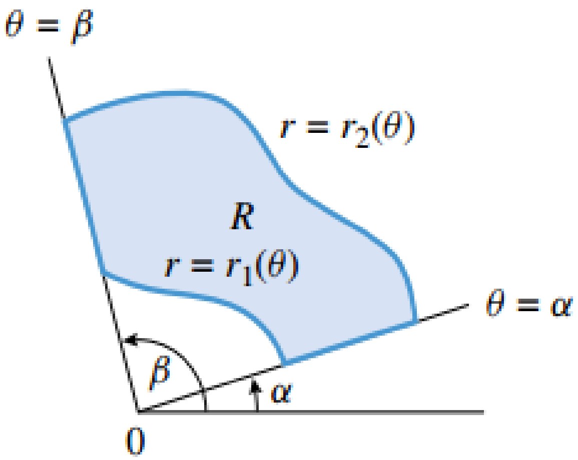


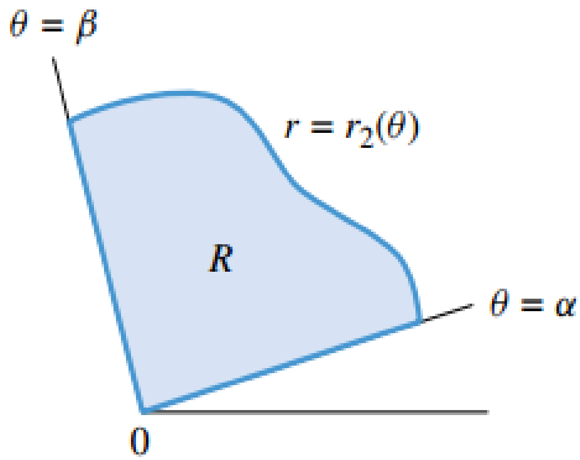
Resumo

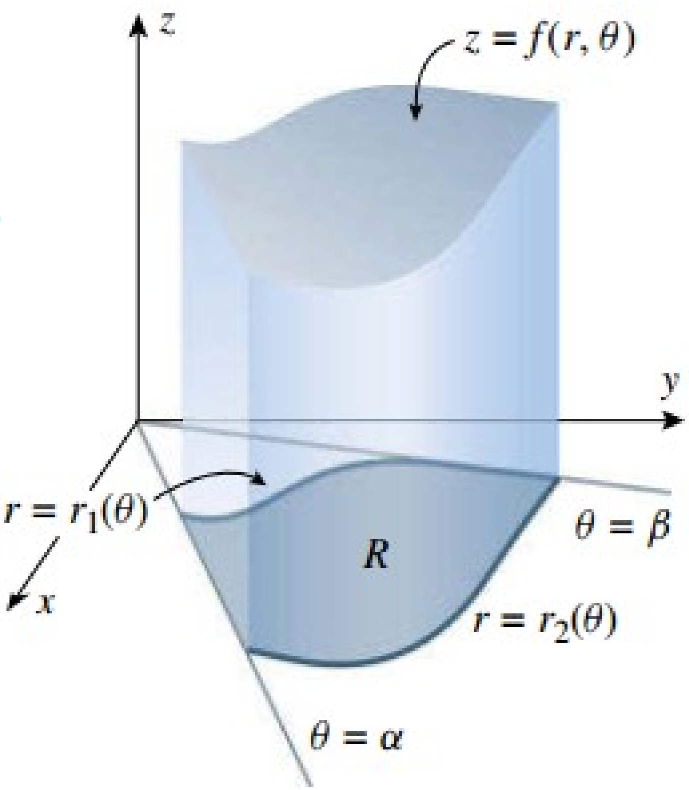
- Exercícios de fixação:
  - Seção 14.1
    - Exercícios de compreensão 14.1
    - 1-16
  - Seção 14.2
    - Exercícios de compreensão 14.2
    - 1-12

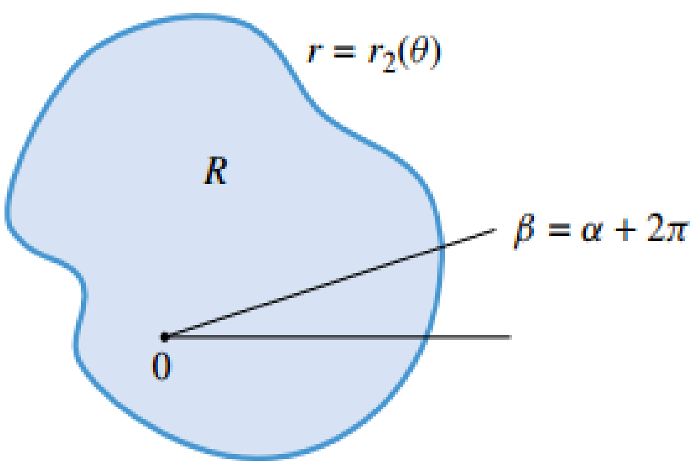
Resumo

- Próxima aula:
  - Integrais duplas em coordenadas polares









Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 14.1 e 14.2