Independência do caminho
Campos vetoriais conservativos

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Independência do caminho
  - Integrais de trabalho
  - Independência do caminho
  - Teorema fundamental das integrais de linha
  - Integrais de linha ao longo de caminhos fechados
- Campos vetoriais conservativos
  - Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Campos vetoriais conservativos no espaço tridimensional
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Integrais de linha
  - Cálculo de integrais de linha

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \le t \le b) \qquad \int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

  - Integrais de linha em relação a x, y e z

$$\int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = \int_C f(x, y)\, dx + \int_C g(x, y)\, dy$$

  - Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Trabalho como integral de linha
    - Aplicação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \le t \le b)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

  - Integrais de linha por partes

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$

Independência de caminho

Independência de caminho

- Motivação
  - Para certos tipos de campos vetoriais, a integral de linha de F ao longo de uma curva depende somente dos pontos extremos da curva e não da própria curva.
    - Exemplo: Campos gravitacionais e eletrostáticos

Independência de caminho

- Integrais de trabalho
  - Outro nome para integrais de linha
  - O trabalho realizado por uma partícula que sai de um ponto inicial P até um ponto final Q, é dado pela integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

    - Pode ser expressa na forma escalar:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy \qquad \boxed{\text{Espaço bidimensional}}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f(x, y, z)\, dx + g(x, y, z)\, dy + h(x, y, z)\, dz \qquad \boxed{\text{Espaço tridimensional}}$$

onde f, g e h são as funções componentes de F

Independência de caminho

- Problema: Determinar como o caminho de integração afeta o trabalho realizado por um campo vetorial de um ponto P a um ponto Q
  - A curva paramétrica C em uma integral de trabalho é chamada de **caminho de integração**
  - Se o campo vetorial **F** for **conservativo** (ou seja, é o gradiente de alguma função potencial φ), o trabalho não depende do caminho

Independência de caminho

- Exemplo/Exercício: O campo vetorial **F** é conservativo (é o gradiente de φ). Qual o trabalho da partícula que sai de (0,0) a (1,1) pelos caminhos dados

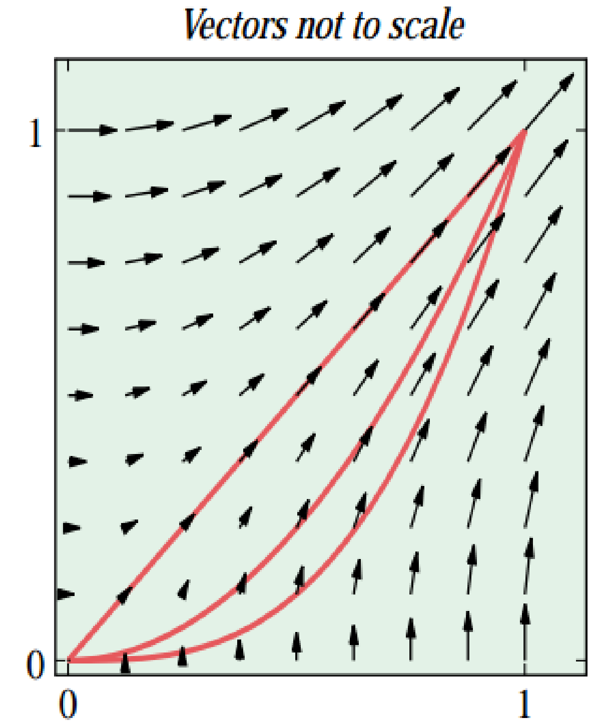
$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

$$\phi(x, y) = xy$$

O segmento de reta $y = x$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

A parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

A cúbica $y = x^3$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.



Independência de caminho

- Exemplo/Exercício: O campo vetorial **F** é conservativo (é o gradiente de φ). Qual o trabalho da partícula que sai de (0,0) a (1,1) pelos caminhos dados

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

$$\phi(x, y) = xy$$

O segmento de reta $y = x$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

A parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

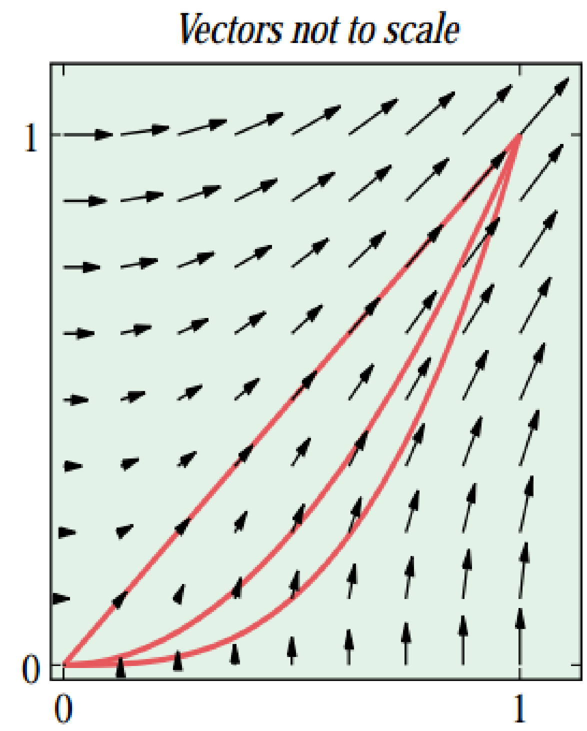
A cúbica $y = x^3$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

  - Reta

$$x = t, \quad y = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C y\,dx + x\,dy$$

$$= \int_0^1 2t\,dt = 1$$



Independência de caminho

- Exemplo/Exercício: O campo vetorial **F** é conservativo (é o gradiente de φ). Qual o trabalho da partícula que sai de (0,0) a (1,1) pelos caminhos dados

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

$$\phi(x, y) = xy$$

O segmento de reta $y = x$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

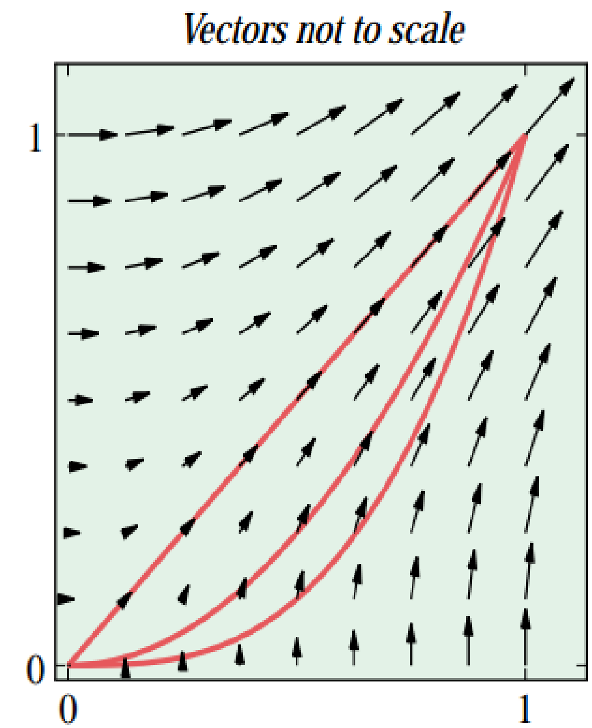
A parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

A cúbica $y = x^3$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$.

  - Parábola

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx + x\,dy = \int_0^1 3t^2\,dt = 1$$



Independência de caminho

- Exemplo/Exercício: O campo vetorial **F** é conservativo (é o gradiente de φ). Qual o trabalho da partícula que sai de (0,0) a (1,1) pelos caminhos dados

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

$$\phi(x, y) = xy$$

O segmento de reta $y = x$ de (0, 0) até (1, 1).

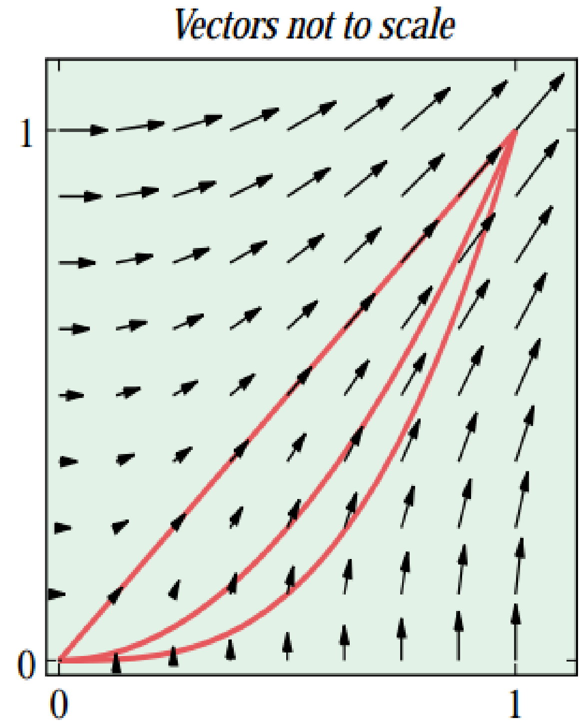
A parábola $y = x^2$ de (0, 0) até (1, 1).

A cúbica $y = x^3$ de (0, 0) até (1, 1).

  - Cúbica

$$x = t, \quad y = t^3 \quad (0 \le t \le 1)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx + x\,dy = \int_0^1 4t^3\,dt = 1$$



Independência de caminho

- Teorema fundamental das integrais de linha
  - Suponha que $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ seja um campo vetorial conservativo em alguma região aberta D contendo os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) e que f (x, y) e g(x, y) sejam contínuas nessa região.
  - Se $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$ e se C for uma curva paramétrica lisa por partes entre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) e esteja toda contida na região D, então

$$\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$$

Ou de forma equivalente

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

sendo F a antiderivada de f

Independência de caminho

- Teorema fundamental das integrais de linha
  - Consequência
    - Esse teorema mostra que o valor de uma integral de linha ao longo de um caminho liso por partes de um campo vetorial conservativo é **independente do caminho**
    - Isto é, o valor da integral depende dos pontos inicial e final
    - Assim, para as integrais de linha de campos vetoriais conservativos, é comum expressar

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$$

Independência de caminho

- Exercício: Use o Teorema Fundamental das Integrais de Linha para calcular $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ onde $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ $\quad \phi(x, y) = xy$

Independência de caminho

- Exercício: Use o Teorema Fundamental das Integrais de Linha para calcular $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ onde $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ $\quad \phi(x, y) = xy$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1, 1) - \phi(0, 0) = 1 - 0 = 1$$

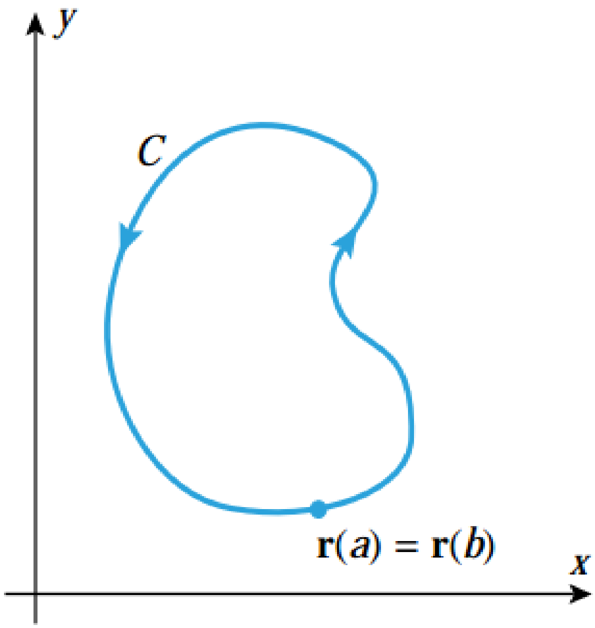
Condiz com os exemplos anteriores

Independência de caminho

- Integrais de linha ao longo de caminhos fechados
  - Uma curva paramétrica C que é representada pela função vetorial **r**(t) com a ≤ t ≤ b é **fechada** se o ponto inicial **r**(a) e o ponto final **r**(b) coincidem
  - A integral de linha de um campo vetorial conservativo ao longo de um caminho fechado C que começa e termina em (x_0, y_0) é zero.

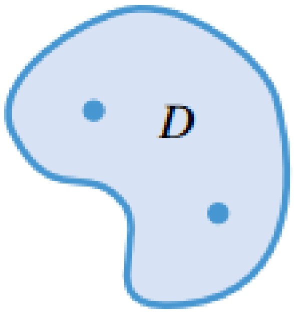
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) = 0$$

Começam e terminam no mesmo ponto

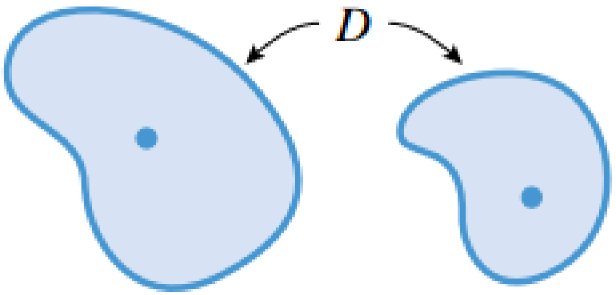


Independência de caminho

- Integrais de linha ao longo de caminhos fechados
  - Domínio conexo e não conexo
    - Sendo conexo, dois pontos em D podem ser unidos por alguma curva lisa por partes que esteja inteiramente contida em D.



Conexo



Não conexo

Independência de caminho

- Integrais de linha ao longo de caminhos fechados
  - Teorema: Se f(x, y) e g(x, y) forem contínuas em alguma região D aberta e conexa, então são equivalentes (todas verdadeiras ou todas falsas):
    - $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ é um **campo vetorial conservativo** na região D.
    - $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ com qualquer **curva fechada** C lisa por partes em D
    - $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** de qualquer ponto P em D para qualquer ponto Q em D com qualquer curva C lisa por partes em D.

Independência de caminho

- Integrais de linha ao longo de caminhos fechados
  - Teorema: Se f(x, y) e g(x, y) forem contínuas em alguma região D aberta e conexa, então são equivalentes (todas verdadeiras ou todas falsas):
    - $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ é um **campo vetorial conservativo** na região D.
    - $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ com qualquer **curva fechada** C lisa por partes em D
    - $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** de qualquer ponto P em D para qualquer ponto Q em D com qualquer curva C lisa por partes em D.

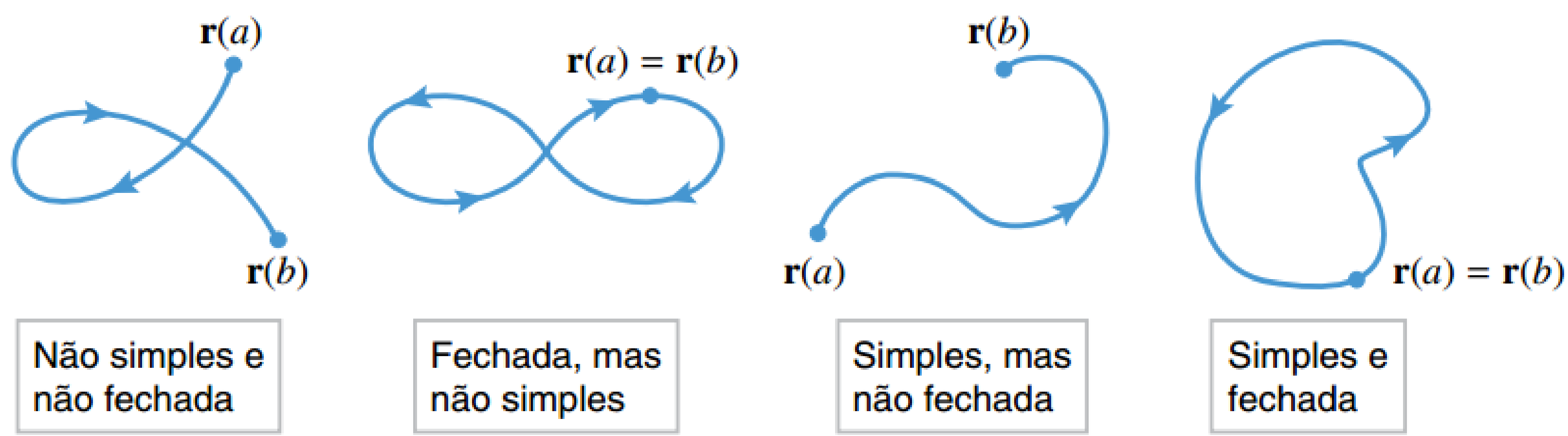
Não é uma ferramenta de cálculo eficiente

Geralmente, não é possível calcular a integral de trabalho em todas as curvas lisas por partes em D.

Campos vetoriais conservativos

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Para desenvolver um método para determinar se um campo vetorial é conservativo, precisamos introduzir alguns conceitos sobre curvas paramétricas e conjuntos conexos.
    - Curva paramétrica simples:
      - Não intersecta a si mesma entre seus pontos extremos.
      - Pode ser ou não fechada



Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Para desenvolver um método para determinar se um campo vetorial é conservativo, precisamos introduzir alguns conceitos sobre curvas paramétricas e conjuntos conexos.
    - Conjunto conexo
      - **Simplesmente conexo**: nenhuma curva simples fechada em D envolver pontos que não pertençam a D (sem buracos).
      - **Multiplamente conexo**: um ou mais buracos

Simplesmente conexo

Multiplamente conexo

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Teorema: Teste de Campo Conservativo
    - Se f(x, y) e g(x, y) forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em alguma região aberta D e se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

for conservativo em D, então $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ em cada ponto de D.

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Teorema: Teste de Campo Conservativo
    - Se f(x, y) e g(x, y) forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em alguma região aberta D e se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

for conservativo em D, então $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ em cada ponto de D.

    - Reciprocamente, se D for simplesmente conexo e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ valer em cada ponto de D, então

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

é conservativo

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Verificando:
    - Para isso, suponha que **F** = ∇φ, podemos escrever:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = g$$

    - Assim

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

    - Contudo, as derivadas parciais mistas nessas equações são iguais

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exercício: Use o Teorema para determinar se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$$

é conservativo em algum conjunto aberto.

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exercício: Use o Teorema para determinar se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$$

é conservativo em algum conjunto aberto.

$f(x, y) = x + y$ $\qquad$ $g(x, y) = y - x$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -1$$

- Assim, F não é conservativo em qualquer conjunto aberto

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exercício: Use o Teorema para determinar se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$$

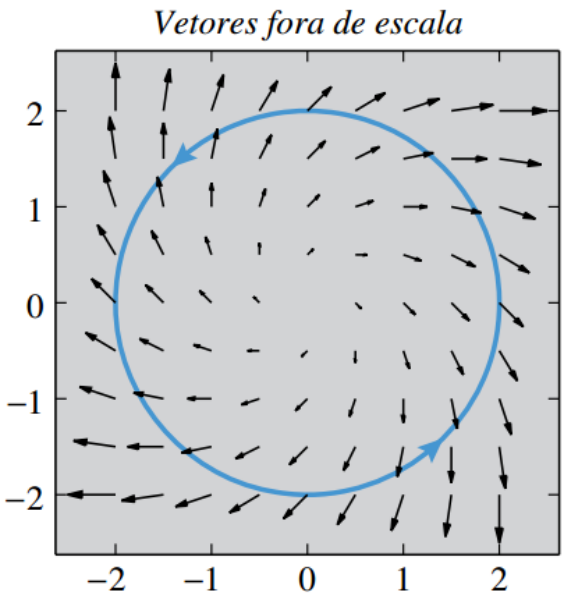
é conservativo em algum conjunto aberto.

- Observação: devem existir curvas fechadas lisas por partes em cada conjunto aberto conexo no plano xy, nas quais

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \neq 0$$

- A figura sugere que **F** · **T** < 0 em cada ponto, de modo que:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds > 0$$



$\mathbf{F}(x, y) = (y + x)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exemplo: $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1 + 3x^2y^2)\mathbf{j}$
    - F é um campo vetorial conservativo em todo o plano xy?

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exemplo: $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1 + 3x^2y^2)\mathbf{j}$
    - F é um campo vetorial conservativo em todo o plano xy?

$$f(x, y) = 2xy^3 \qquad g(x, y) = 1 + 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exemplo: $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1 + 3x^2y^2)\mathbf{j}$
    - Determine φ integrando primeiro ∂φ/∂x

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exemplo: $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1 + 3x^2y^2)\mathbf{j}$
    - Determine φ integrando primeiro ∂φ/∂x
      - Como o campo F é conservativo, há uma função potencial φ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2$$

Justifica-se tratar a constante de integração como uma função de y, visto que y é mantida constante no processo de integração

      - Integrando a primeira em relação a x

$$\phi = \int 2xy^3\,dx = x^2y^3 + k(y)$$

      - Derivando em relação a y e igualando a equação dada

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2y^2 + k'(y) = 1 + 3x^2y^2$$

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exemplo: $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1 + 3x^2y^2)\mathbf{j}$
    - Determine φ integrando primeiro ∂φ/∂x
      - Com k'(y) = 1, tem-se que:

$$k(y) = \int k'(y)\,dy = \int 1\,dy = y + K$$

onde K é uma constante de integração (numérica)

      - Substituindo:

$$\phi = x^2y^3 + y + K$$

    - O surgimento da constante arbitrária K nos diz que φ não é única.

Pode-se chegar a mesma conclusão integrando primeiro ∂φ/∂y

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exemplo: Use a função potencial obtida no exemplo anterior para calcular a integral

$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3\,dx + (1 + 3x^2y^2)\,dy$$

Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exemplo: Use a função potencial obtida no exemplo anterior para calcular a integral

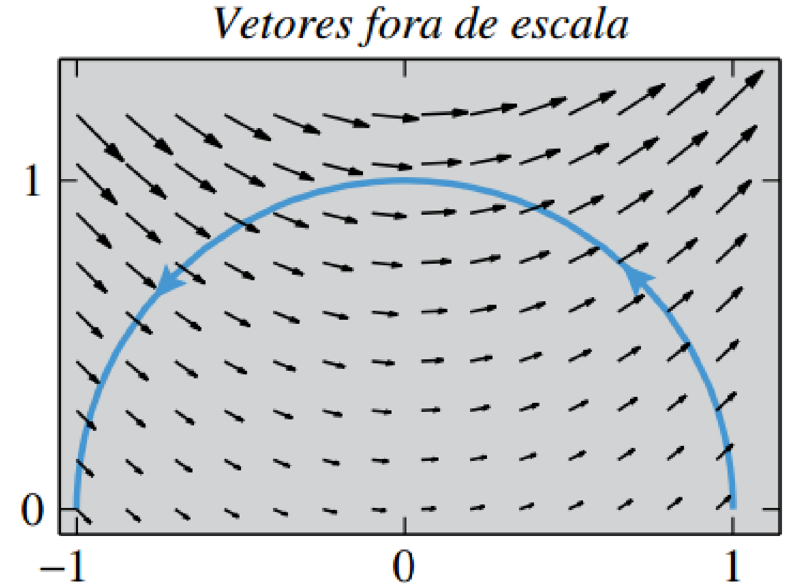
$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3\,dx + (1+3x^2y^2)\,dy$$

$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3\,dx + (1+3x^2y^2)\,dy = \int_{(1,4)}^{(3,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(3,1) - \phi(1,4)$$

$$= (10+K) - (68+K) = -58$$

Campos vetoriais conservativos

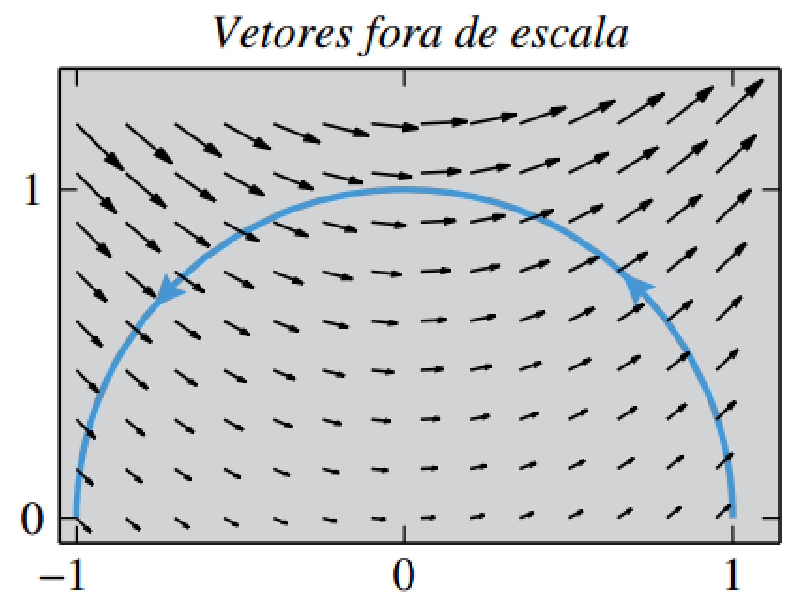
- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exercício: $\mathbf{F}(x, y) = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j}$
    - O campo vetorial F é conservativo em todo o plano xy?
    - Determine o trabalho realizado pelo campo em uma partícula que se move de (1, 0) até (−1, 0) ao longo do caminho semicircular C



Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exercício: $\mathbf{F}(x, y) = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j}$
    - O campo vetorial F é conservativo em todo o plano xy?
    - Determine o trabalho realizado pelo campo em uma partícula que se move de (1, 0) até (−1, 0) ao longo do caminho semicircular C
      - Derivadas parciais cruzadas

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y)$$



Campos vetoriais conservativos

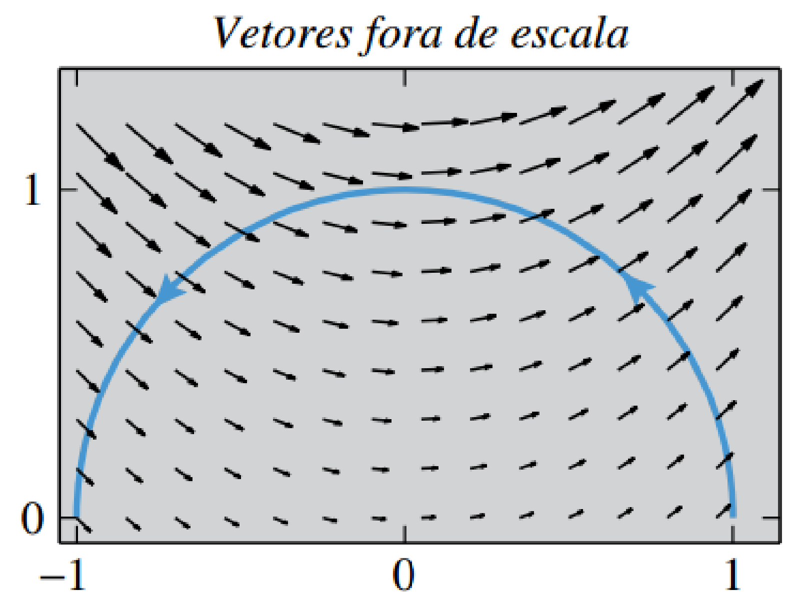
- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exercício: $\mathbf{F}(x, y) = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j}$
    - O campo vetorial F é conservativo em todo o plano xy?
    - Determine o trabalho realizado pelo campo em uma partícula que se move de (1, 0) até (−1, 0) ao longo do caminho semicircular C
      - Calculo do trabalho

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C e^y\, dx + xe^y\, dy$$

Quem é φ?

- Porém, como é independente de caminho, tem-se que

$$W = \int_{(1,0)}^{(-1,0)} e^y\, dx + xe^y\, dy = \phi(-1, 0) - \phi(1, 0)$$



Campos vetoriais conservativos

- Um teste para campos vetoriais conservativos
  - Exercício: $\mathbf{F}(x, y) = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j}$
    - O campo vetorial F é conservativo em todo o plano xy?
    - Determine o trabalho realizado pelo campo em uma partícula que se move de (1, 0) até (−1, 0) ao longo do caminho semicircular C
      - Calculando φ $\quad \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = e^y \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = xe^y$

- Integrandо em x

$$\phi = \int e^y\,dx = xe^y + k(y)$$

- Derivando em relação a y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^y + k'(y) = xe^y$$

$$\Downarrow$$

$$k'(y) = 0 \text{ ou } k(y) = K$$

- Função φ

$$\phi = xe^y + K$$

- Trabalho

$$W = \phi(-1, 0) - \phi(1, 0)$$
$$= (-1)e^0 - 1e^0 = -2$$

Campos vetoriais conservativos

- Campos vetoriais conservativos no espaço tridimensional
  - Análogo ao bidimensional
  - Teorema fundamental das integrais de linha

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0)$$

  - Se $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$
    for um campo conservativo, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

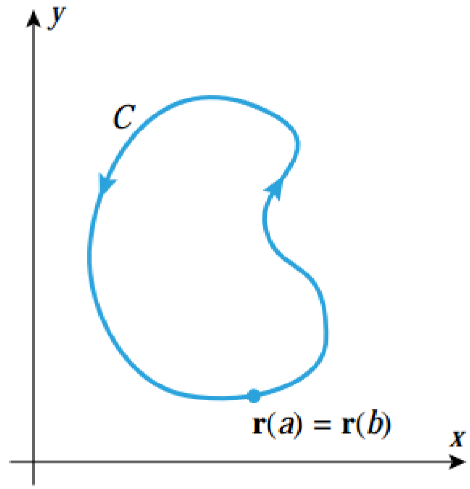
Isto é,
rot **F** = 0

Resumo

Resumo

- Integrais de linha
  - Se **F** for um campo vetorial conservativo
    - Teorema fundamental das integrais de linha

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$$



    - Integrais de linha ao longo de caminhos fechados

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) = 0$$

  - Campos vetoriais conservativos e funções potenciais
    - É possível descobrir φ a partir de **F** com integral indefinida

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = f \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = g$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}$$

Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 15.3
    - Exercícios de compreensão 15.3
    - 1-6
    - 15-18
    - 23

Resumo

- Próxima aula:
  - Revisão para a segunda prova

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 15.3