Funções de duas ou mais variáveis

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

Revisão

Revisão

- Comprimento de curva $L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt$

Revisão

- Comprimento de curva $L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt$
  - Parametrização lisa

Revisão

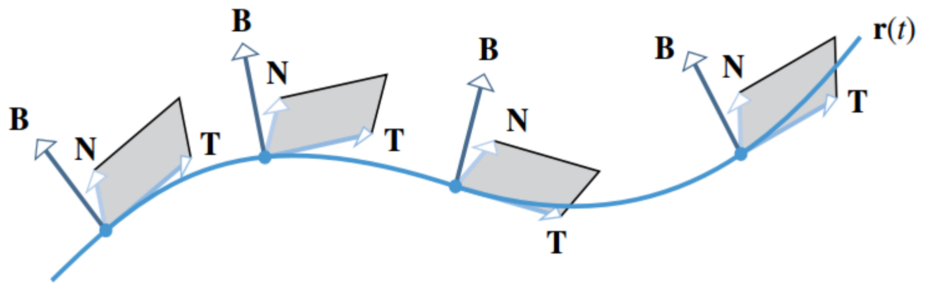
- Comprimento de curva $L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt$
  - Parametrização lisa
- Mudança de parâmetro
  - Produzir uma nova função vetorial ***r**(g(τ))* com mesmo gráfico de ***r**(t)*
  - Regra da cadeia para funções vetoriais $\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$

Revisão

- Comprimento de curva $L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt$
  - Parametrização lisa
- Mudança de parâmetro
  - Produzir uma nova função vetorial ***r(g(τ))*** com mesmo gráfico de ***r(t)***
  - Regra da cadeia para funções vetoriais $\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$
- Vetores tangente, normal e binormal

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|} \qquad \boldsymbol{N}(t) = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}$$

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t)$$



Objetivos da aula

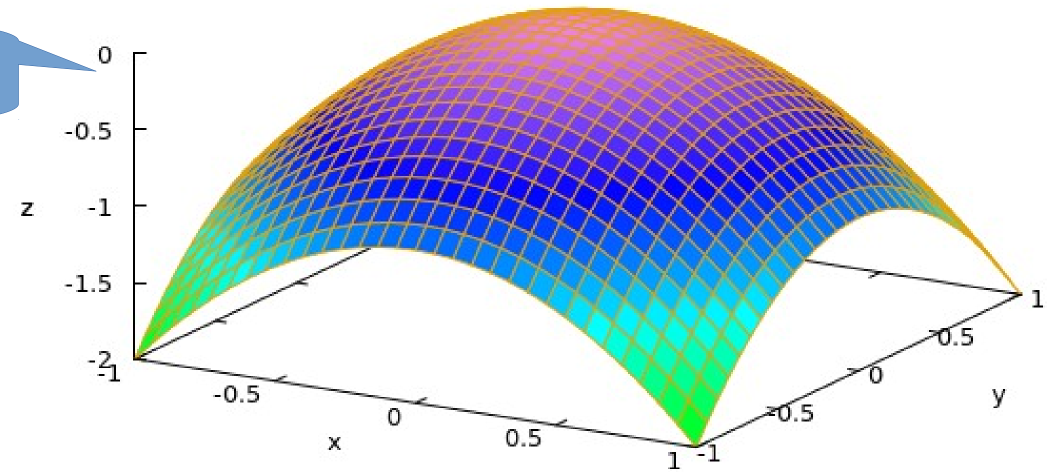
- Compreender o que são funções de duas ou mais variáveis e como desenhar o seu gráfico por curvas/superfícies de nível
- Compreender o limite ao longo de curvas
- Entender o conceito de conjuntos aberto e fechados para funções de duas ou mais variáveis

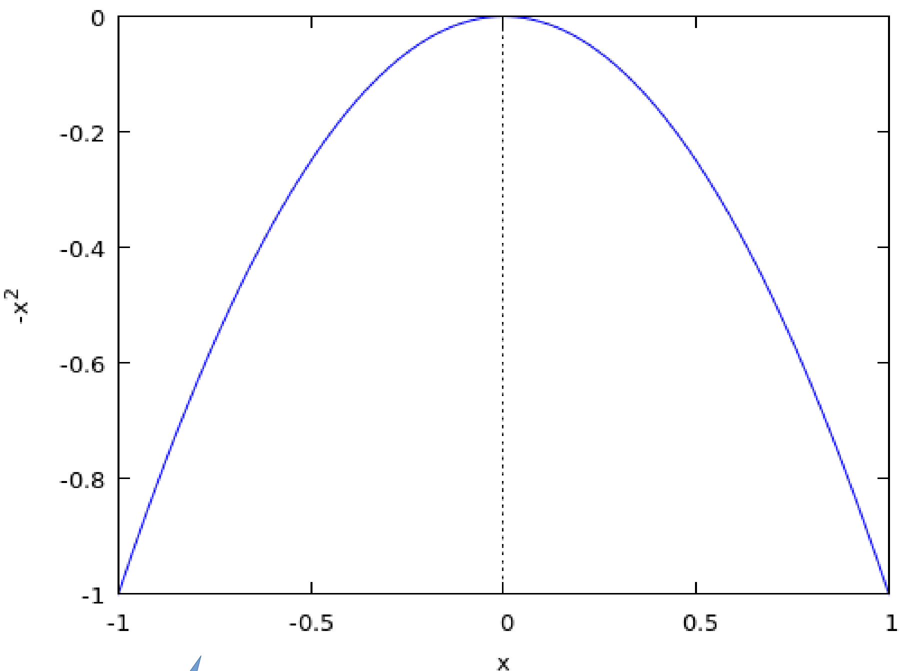
Funções de duas ou mais variáveis

Funções de duas ou mais variáveis

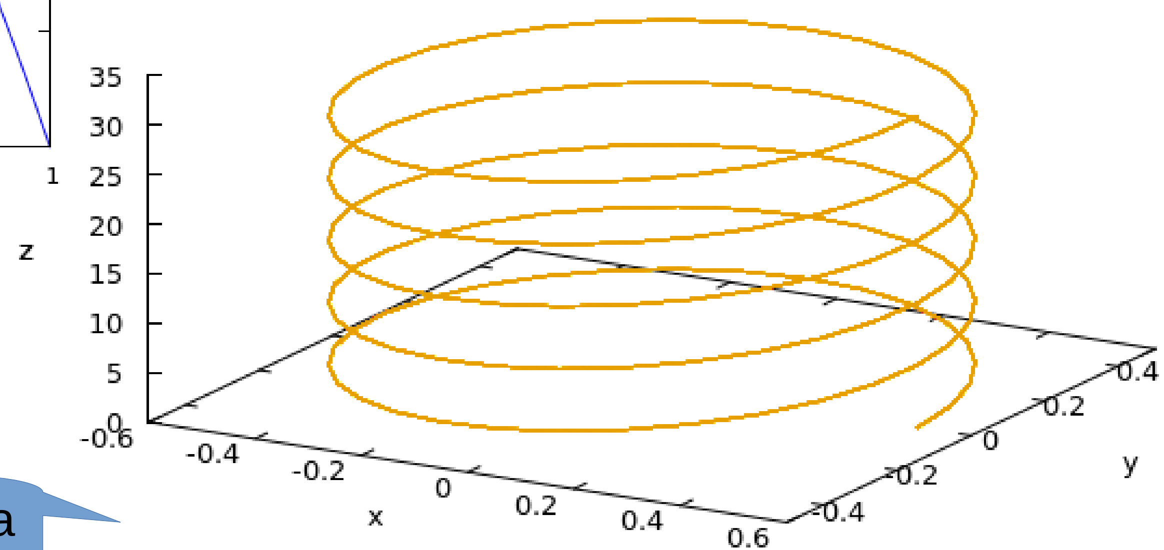
- Motivação

A partir de agora





Antes



Até aula passada

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Existem muitas funções que dependem de duas ou mais variáveis
    - Área de um triângulo: base e altura
    - Volume de uma caixa: base, altura e profundidade
    - Volume de um cilindro: raio e altura
    - Média da turma de disciplina de Cálculo III: m_1, m_2,...m_n

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Existem muitas funções que dependem de duas ou mais variáveis
    - Área de um triângulo: base e altura
    - Volume de uma caixa: base, altura e profundidade
    - Volume de um cilindro: raio e altura
    - Média da turma de disciplina de Cálculo III: m_1, m_2,...m_n

$$z=f(x,y) \qquad w=f(x,y,z) \qquad u=f(x_1,x_{2,}\ldots,x_n)$$

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Existem muitas funções que dependem de duas ou mais variáveis
    - Área de um triângulo: base e altura
    - Volume de uma caixa: base, altura e profundidade
    - Volume de um cilindro: raio e altura
    - Média da turma de disciplina de Cálculo III: m_1, m_2,...m_n

$$z=f(x,y) \qquad w=f(x,y,z) \qquad u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Variável dependente

Variáveis independentes

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Domínio de f
    - As variáveis independentes podem estar restritas a um conjunto *D*
    - Restrições físicas podem definir o domínio
    - Domínio natural
      - Consiste em todos os pontos para os quais a fórmula dá um valor real para a variável dependente

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Definições:
    - Uma função f de duas variáveis, x e y, é uma regra que associa um único número real $f(x, y)$ a cada ponto (x, y) de algum conjunto D no plano $x\ y$

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Definições:
    - Uma função *f* de duas variáveis, *x* e *y*, é uma regra que associa um único número real *f(x, y)* a cada ponto *(x, y)* de algum conjunto *D* no plano *x y*
    - Uma função *f* de três variáveis, *x, y* e *z*, é uma regra que associa um único número real *f(x, y, z)* a cada ponto *(x, y, z)* de algum conjunto *D* no espaço tridimensional.

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Definições:
    - Uma função *f* de duas variáveis, *x* e *y*, é uma regra que associa um único número real *f(x, y)* a cada ponto *(x, y)* de algum conjunto *D* no plano *x y*
    - Uma função *f* de três variáveis, *x, y* e *z*, é uma regra que associa um único número real *f(x, y, z)* a cada ponto *(x, y, z)* de algum conjunto *D* no espaço tridimensional.

É possível generalizar para uma função com *n* valores

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Exemplo: Encontre *f(e, 0)* e esboce o domínio natural de *f*

$$f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$$

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Exemplo: Encontre *f(e, 0)* e esboce o domínio natural de *f*

$$f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$$

    - Substituindo

$$f(e, 0) = \sqrt{0+1} + \ln(e^2 - 0) = \sqrt{1} + \ln(e^2) = 1 + 2 = 3$$

    - Domínio natural
      - Raiz quadrada → maior ou igual a zero

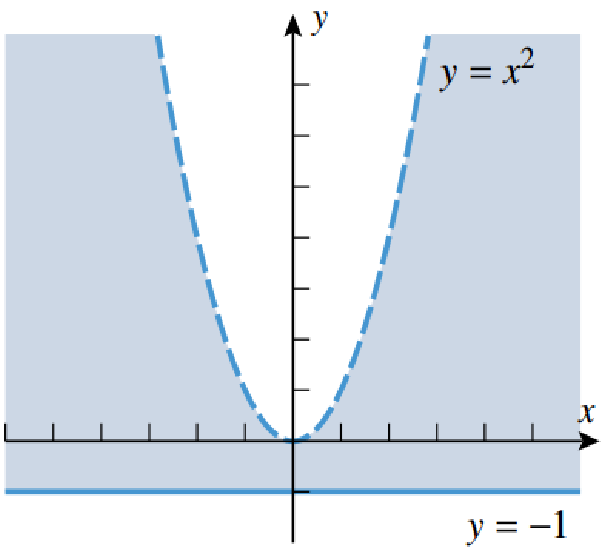
$$y+1 \geq 0 \rightarrow y \geq -1$$

      - Logaritmo natural → maior que zero

$$x^2 - y > 0 \rightarrow x^2 > y$$

      - Resultado

$$-1 \leq y < x^2$$



Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Exemplo: Determine f(0, ½,-½) e o domínio natural de f

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Funções de duas ou mais variáveis

- Notação e terminologia
  - Exemplo: Determine f(0, ½,-½) e o domínio natural de f

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

    - Substituindo

$$f\left(0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - (0)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

    - Reescrevendo $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
    - Domínio natural: todos os pontos dentro da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Funções de duas ou mais variáveis

- Funções descritas por tabelas
  - Funções são muito complicadas (custosas)
  - Dados experimentais

Funções de duas ou mais variáveis

- Funções descritas por tabelas
  - Exemplo: Sensação térmica W
    - Depende do tempo e da velocidade do vento

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16}$$

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h) \ TEMPERATURA T (°F)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
15	6	13	19	25
25	3	9	16	23
35	0	7	14	21
45	−2	5	12	19

Funções de duas ou mais variáveis

- Funções descritas por tabelas
  - Exemplo: Sensação térmica W
    - Depende do tempo e da velocidade do vento

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16}$$

- Qual a sensação térmica para a temperatura seja de 30°F e a velocidade do vento seja de 7 milhas por hora?

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h) \ TEMPERATURA T (°F)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
15	6	13	19	25
25	3	9	16	23
35	0	7	14	21
45	−2	5	12	19

Funções de duas ou mais variáveis

- Funções descritas por tabelas
  - Exemplo: Sensação térmica W
    - Depende do tempo e da velocidade do vento

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16}$$

- Qual a sensação térmica para a temperatura seja de 30°F e a velocidade do vento seja de 7 milhas por hora?

Interpolação linear

TEMPERATURA T (°F)

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
15	6	13	19	25
25	3	9	16	23
35	0	7	14	21
45	−2	5	12	19

Funções de duas ou mais variáveis

- Funções descritas por tabelas
  - Exemplo: Sensação térmica W
    - Depende do tempo e da velocidade do vento

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16}$$

- Qual a sensação térmica para a temperatura seja de 30°F e a velocidade do vento seja de 7 milhas por hora?
  - 23,8ºF

Interpolação linear

TEMPERATURA T (°F)

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
15	6	13	19	25
25	3	9	16	23
35	0	7	14	21
45	−2	5	12	19

Funções de duas ou mais variáveis

- Gráficos de funções de duas variáveis
  - Definimos o gráfico de $f(x, y)$ no espaço xyz como sendo o gráfico da equação $z = f(x, y)$
  - Em geral é uma superfície no espaço tridimensional

Funções de duas ou mais variáveis

- Gráficos de funções de duas variáveis
  - Exemplo: $f(x, y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$

Plano

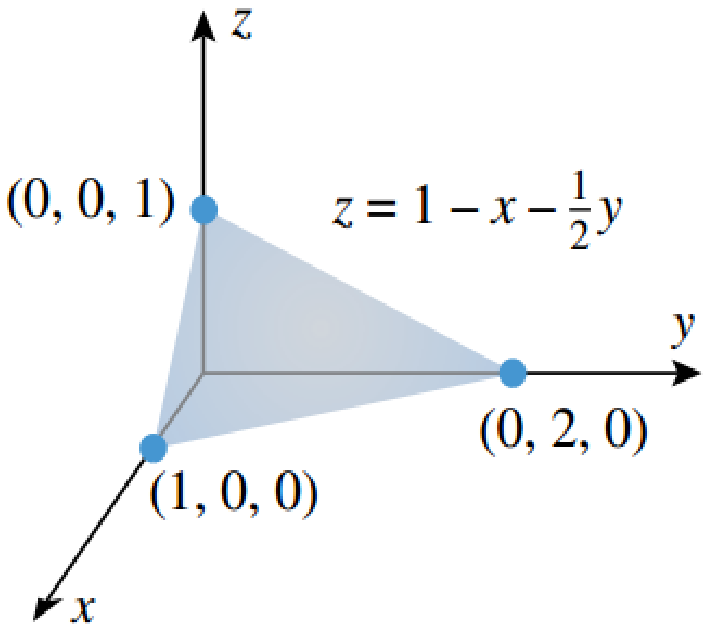
Funções de duas ou mais variáveis

- Gráficos de funções de duas variáveis
  - Exemplo:

$$f(x, y) = 1 - x - \tfrac{1}{2}y$$

Plano

É preciso de 3 pontos



Funções de duas ou mais variáveis

- Gráficos de funções de duas variáveis
  - Exemplo: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Eleva ao quadrado os dois lados

Funções de duas ou mais variáveis

- Gráficos de funções de duas variáveis
  - Exemplo: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Eleva ao quadrado os dois lados

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Com z sempre positivo

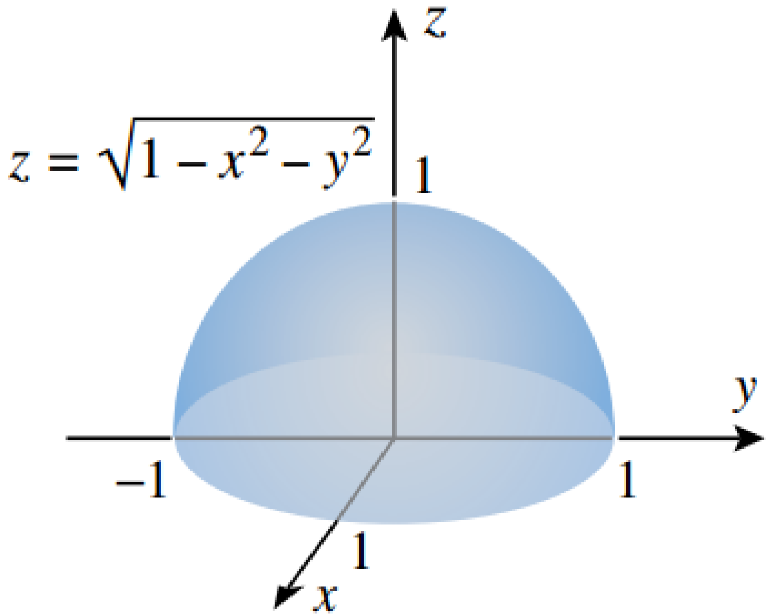
Funções de duas ou mais variáveis

- Gráficos de funções de duas variáveis
  - Exemplo: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Eleva ao quadrado os dois lados

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Com z sempre positivo



Funções de duas ou mais variáveis

- Gráficos de funções de duas variáveis
  - Exemplo: $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

Eleva ao quadrado os dois lados

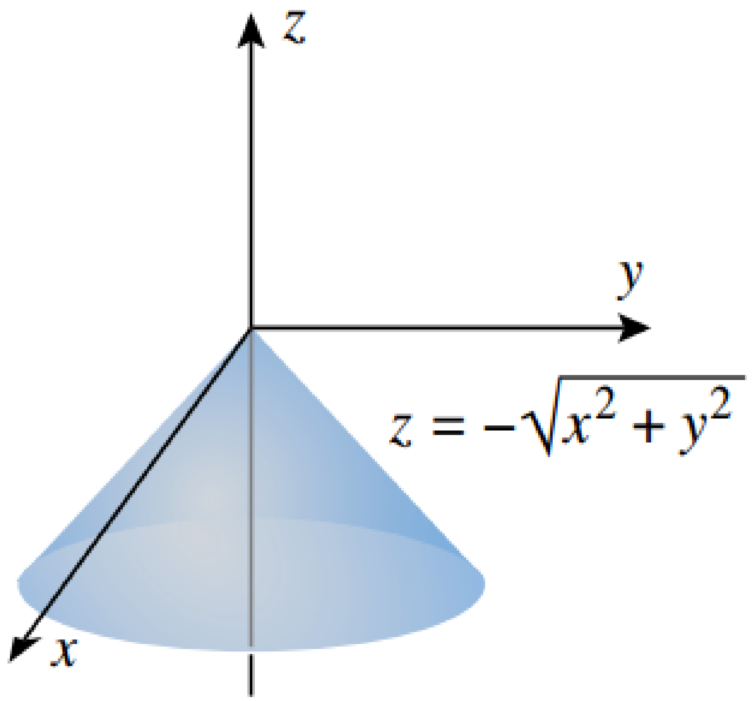
Com z sempre negativo

Funções de duas ou mais variáveis

- Gráficos de funções de duas variáveis
  - Exemplo: $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

Eleva ao quadrado os dois lados

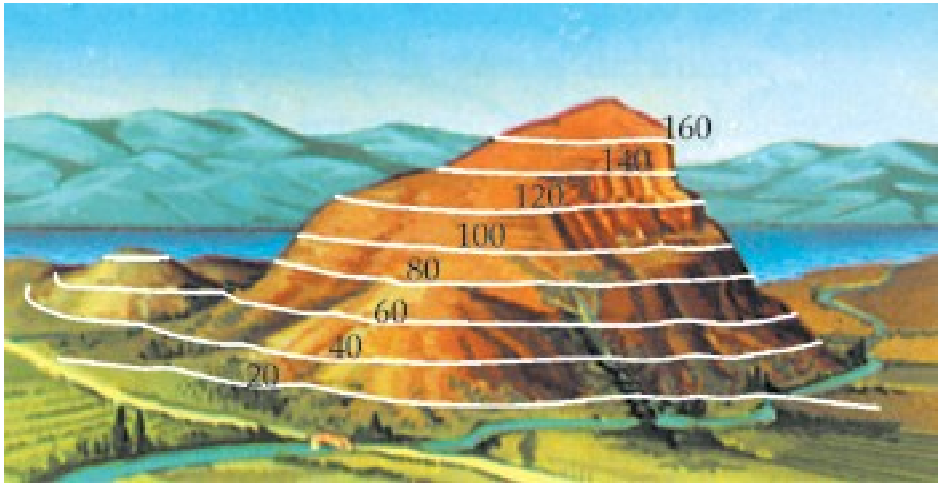
Com z sempre negativo

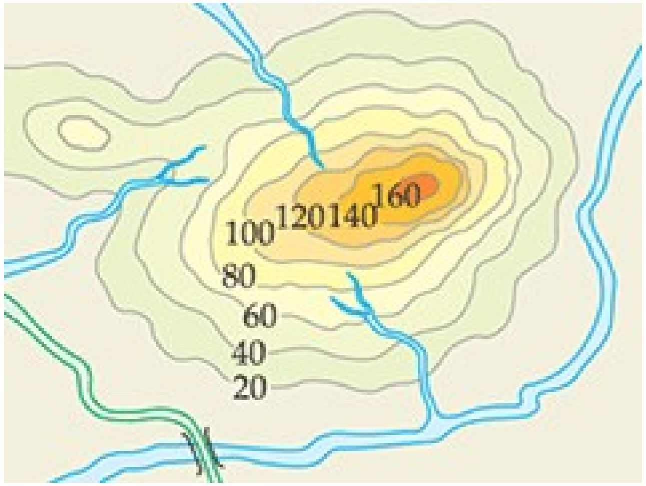


Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível

Mapas topográficos



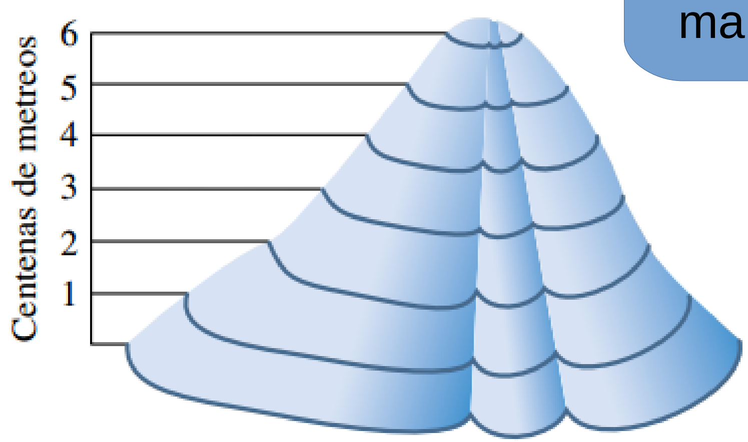


Funções de duas ou mais variáveis

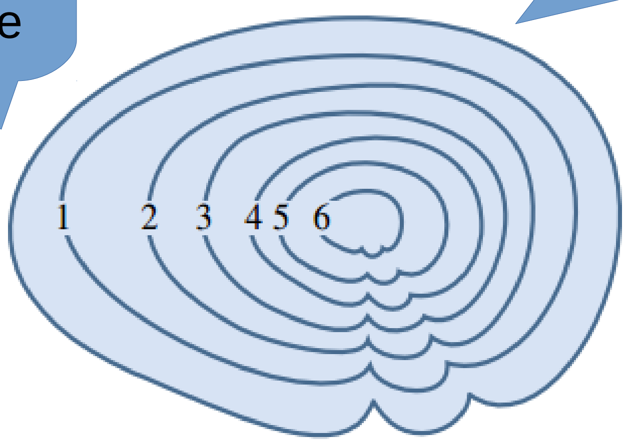
- Curvas de nível
  - O mapa de contornos é construído passando planos de elevação constante pela montanha

Mais longe indica mais inclinação mais suave

Mais próximo indica mais ingrime



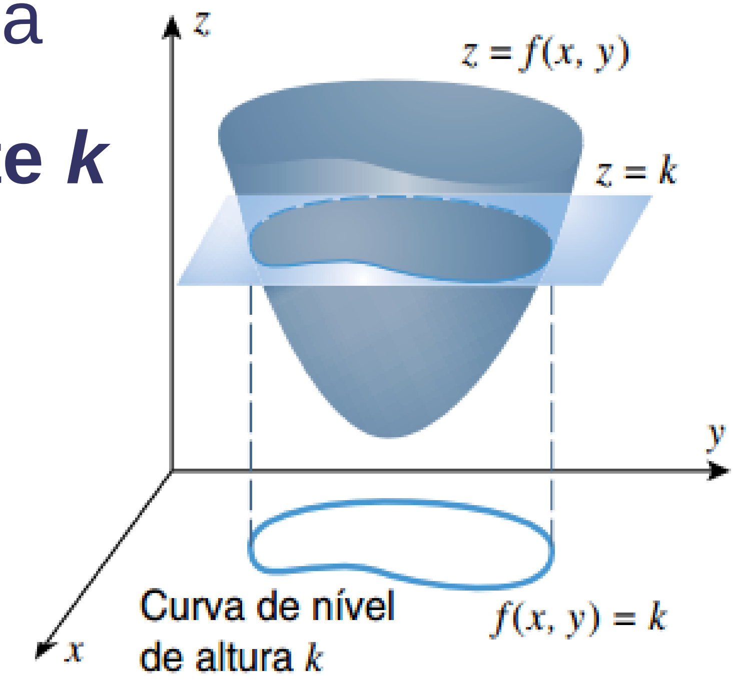
Uma vista em perspectiva de uma montanha modelo com dois sulcos



Um mapa de contornos da montanha modelo

Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Se a superfície $z = f(x, y)$ for cortada pelo plano horizontal $z = k$, então todos os pontos da interseção têm $f(x, y) = k$
  - A projeção dessa interseção sobre o plano *xy* é denominada **curva de nível de altura *k*** ou **curva de nível com constante *k***
  - Um conjunto de curvas de nível é denominado de **esboço de contornos** ou **mapa de contornos** de *f*



Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: $$f(x, y) = y^2 - x^2$$

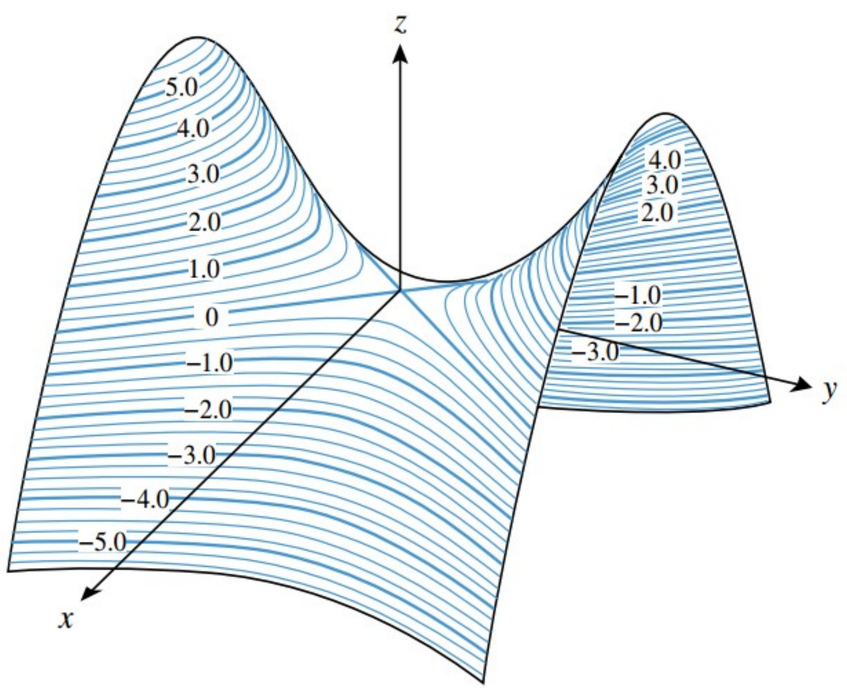
Paraboloide hiperbólico
(superfície de sela)

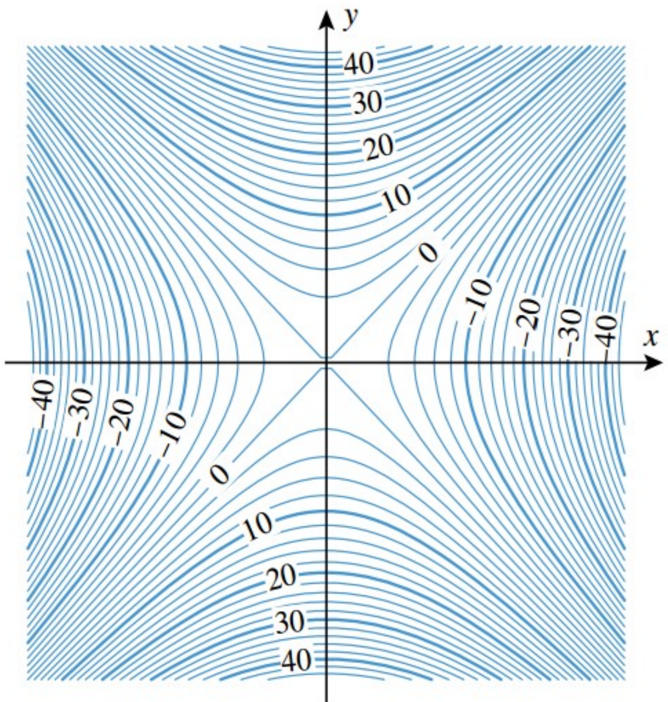
Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: $f(x, y) = y^2 - x^2$

Paraboloide hiperbólico
(superfície de sela)

    - As curvas de nível têm equações da forma $y^2 - x^2 = k$





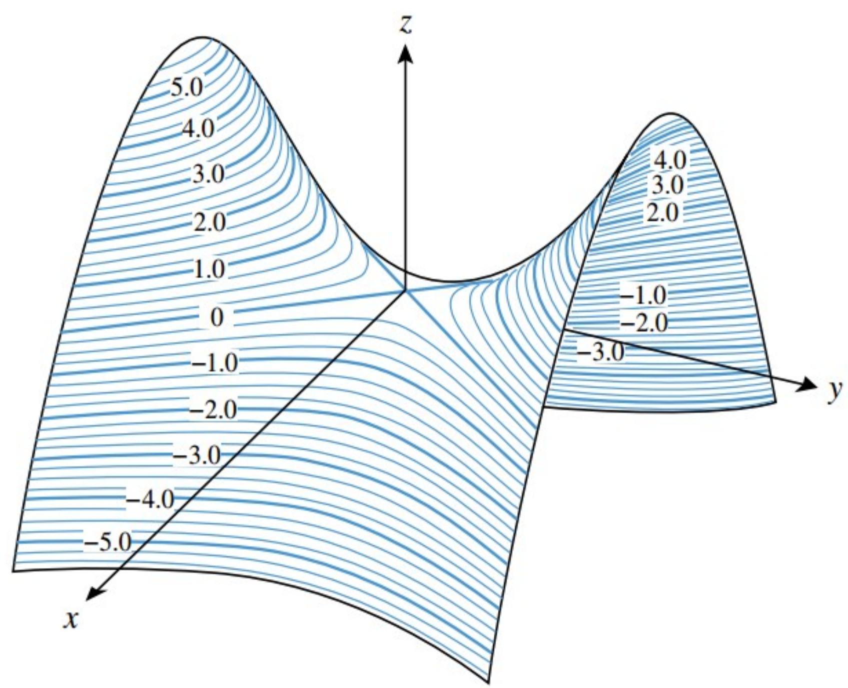
Funções de duas ou mais variáveis

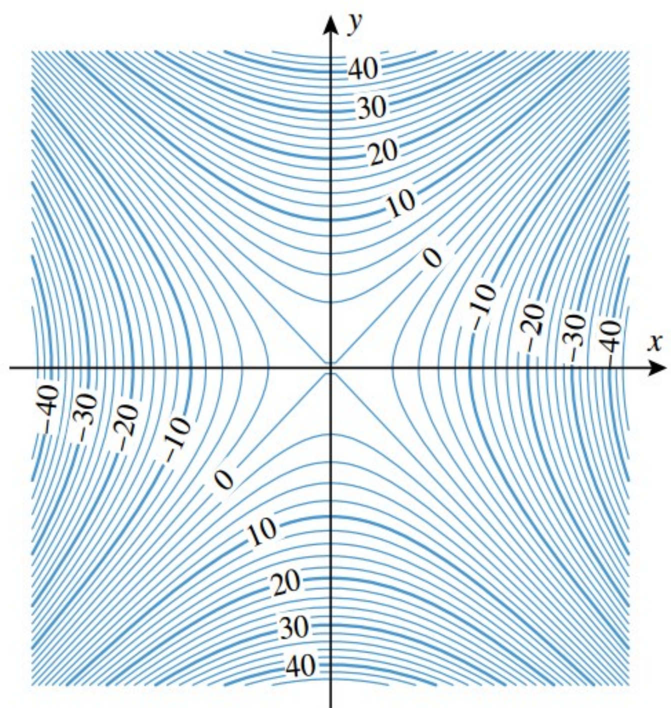
- Curvas de nível
  - Exemplo:

Paraboloide hiperbólico (superfície de sela)

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

- As curvas de nível têm equações da forma $y^2 - x^2 = k$
  - se k = 0, a curva de nível consiste nas retas que se intersectam $y + x = 0$ e $y - x = 0$



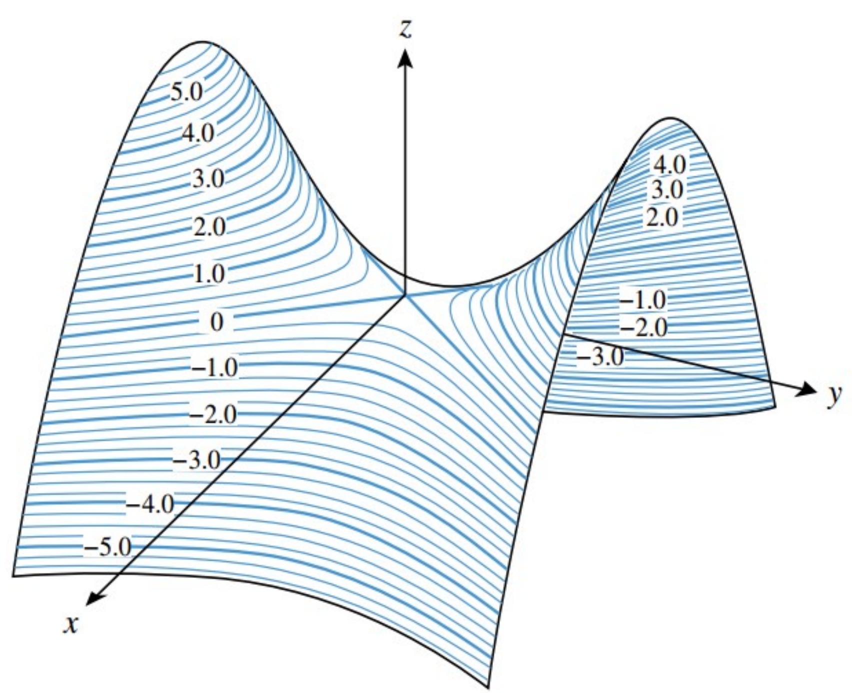


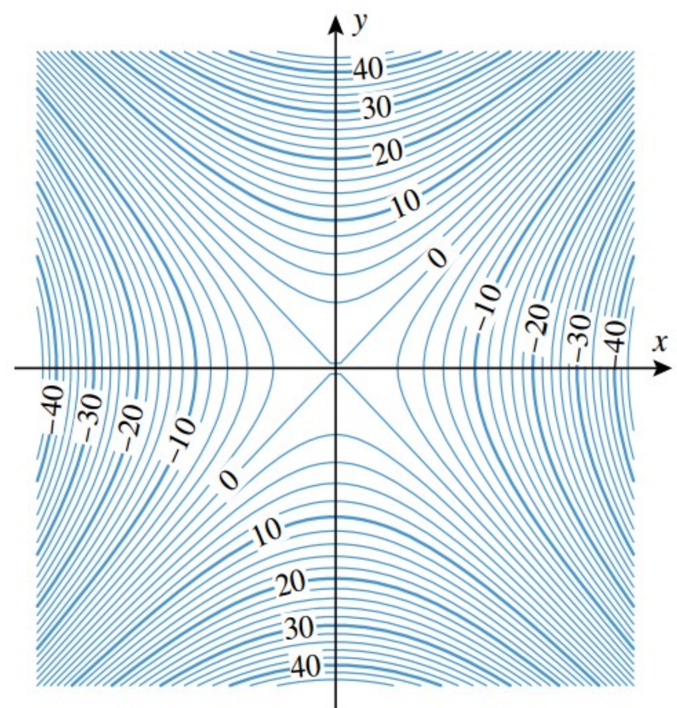
Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: $$f(x, y) = y^2 - x^2$$

Paraboloide hiperbólico
(superfície de sela)

- As curvas de nível têm equações da forma $y^2 - x^2 = k$
  - se *k>0,* são hipérboles abrindo ao longo de paralelas ao eixo *y*;



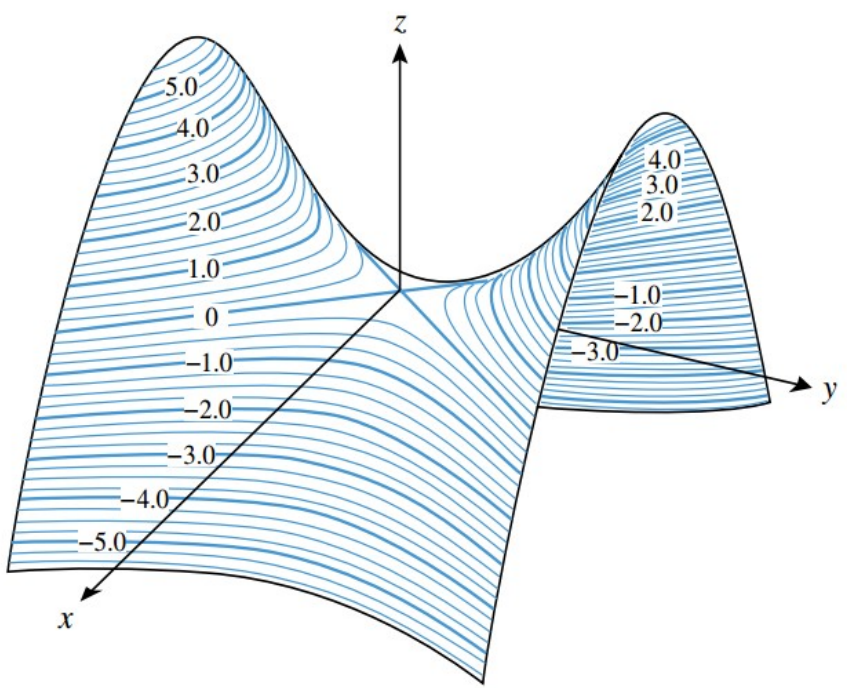


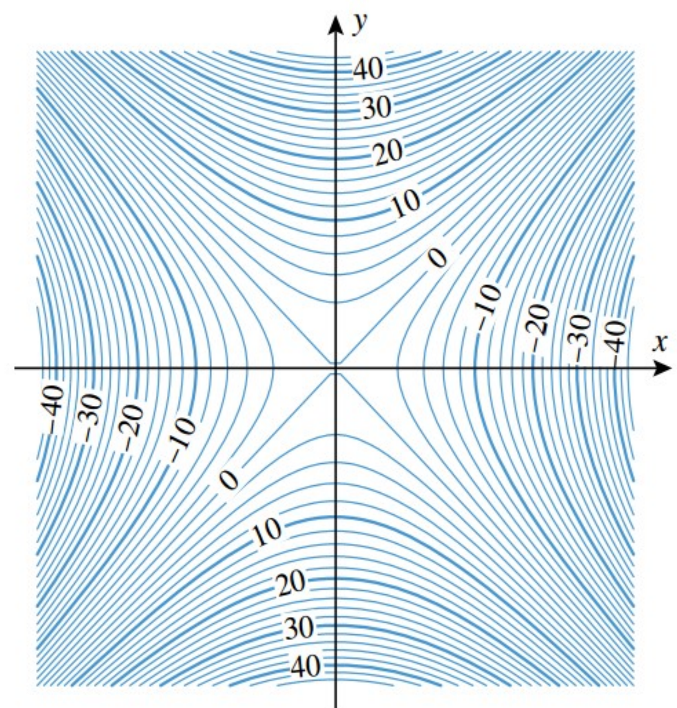
Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: $f(x, y) = y^2 - x^2$

Paraboloide hiperbólico
(superfície de sela)

  - As curvas de nível têm equações da forma $y^2 - x^2 = k$
    - se *k<0*, são hipérboles abrindo ao longo de paralelas ao eixo *x*;



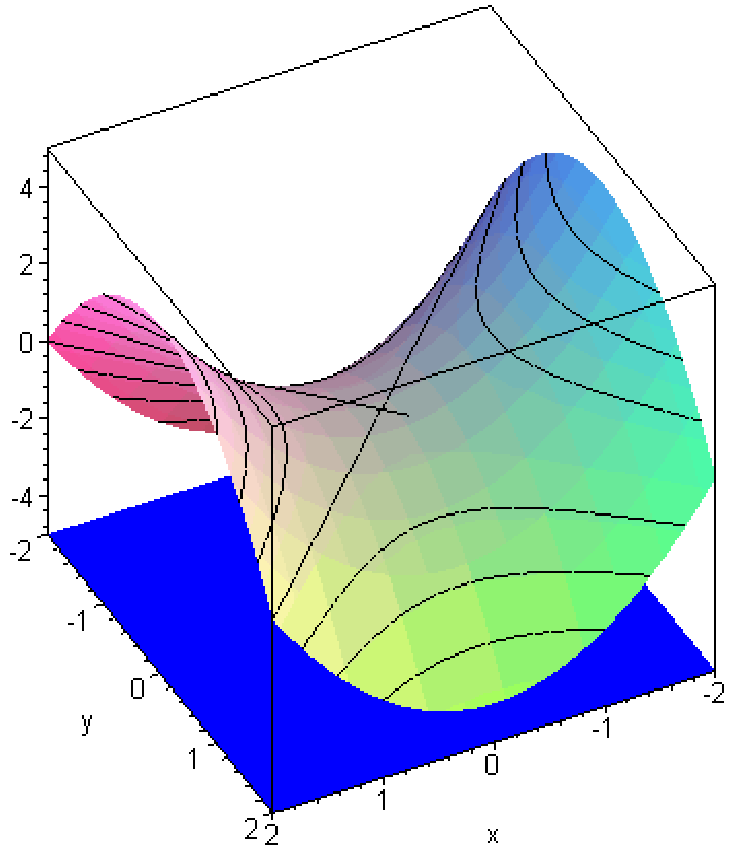


Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo:

Paraboloide hiperbólico (superfície de sela)

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$



Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: $$f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo:

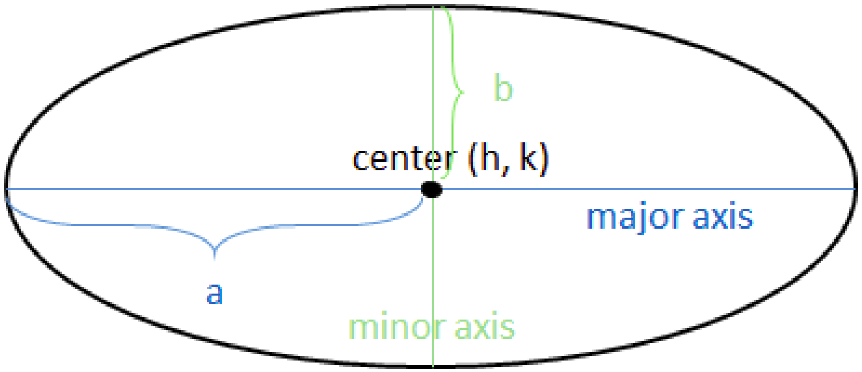
$$f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

    - Reescrevendo

$$\frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

Elipse!

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

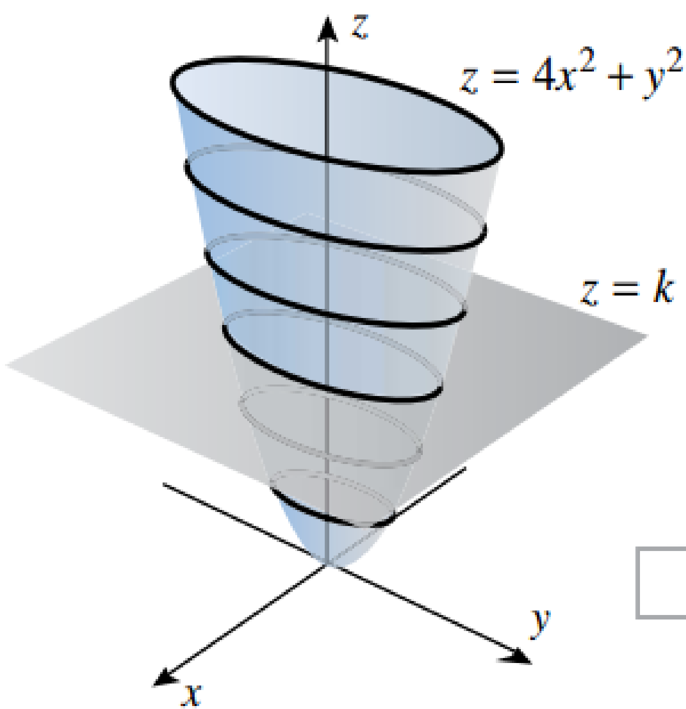


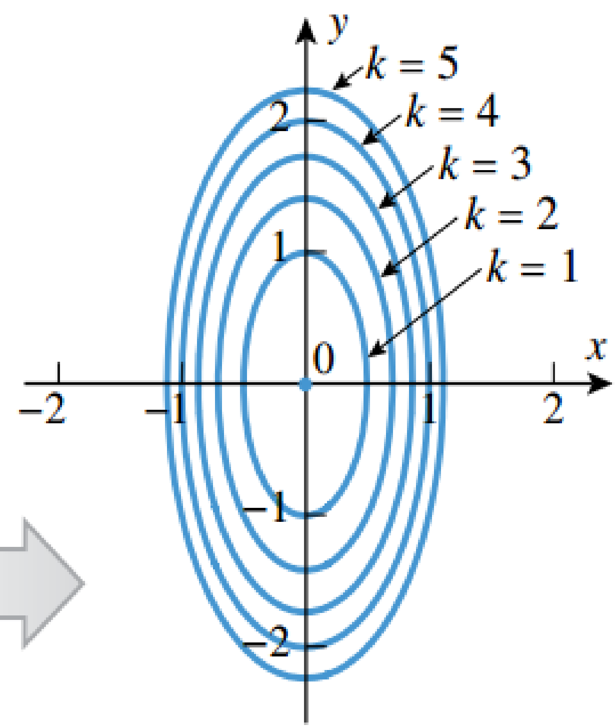
Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: $f(x, y) = 4x^2 + y^2$
    - Reescrevendo $\frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$

K não pode ser negativo

Elipse!



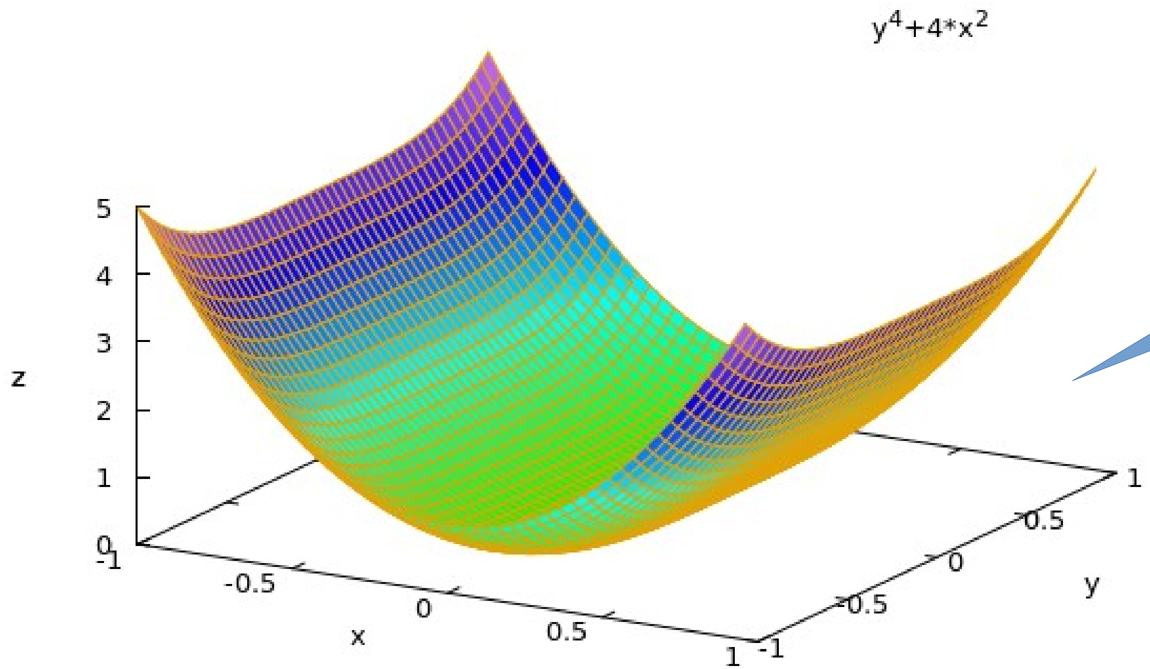


Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: $$f(x,y) = 4x^2 + y^2$$
    - Reescrevendo $$\frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

K não pode ser negativo

Elipse!

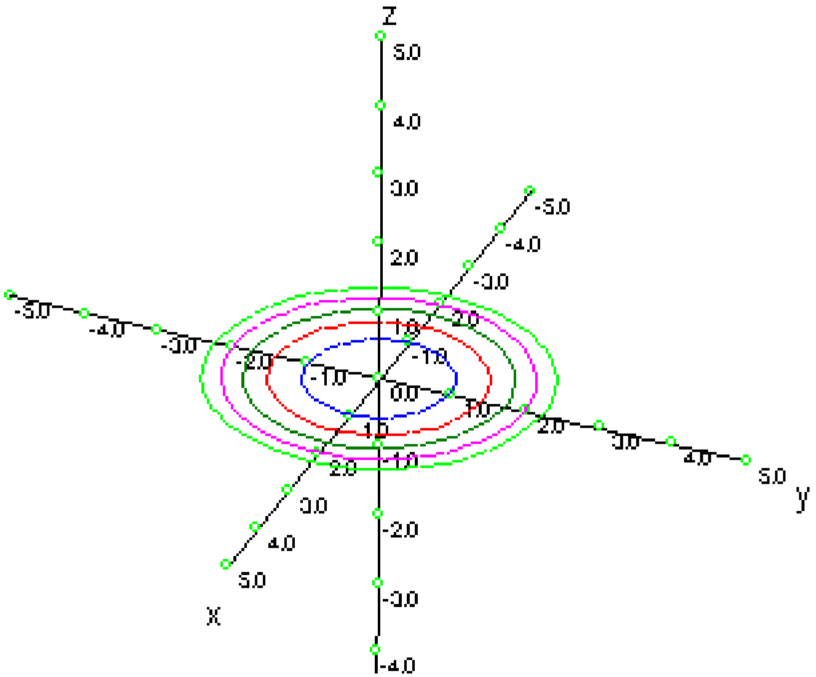


Sem curva de nível

Funções de duas ou mais variáveis

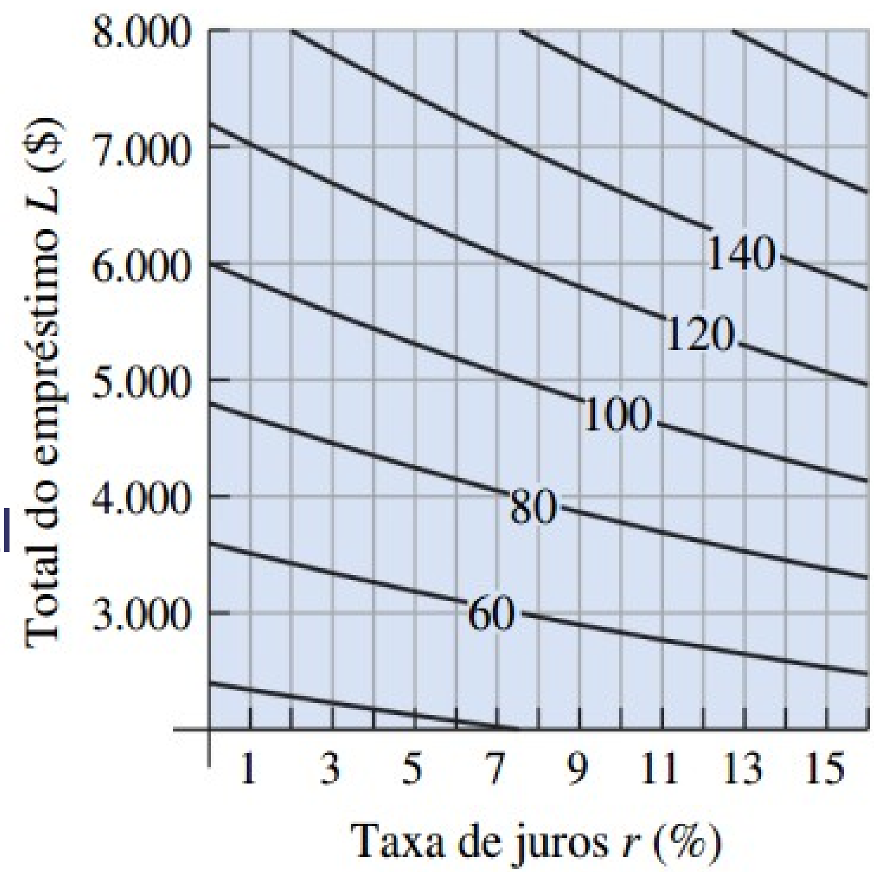
- Curvas de nível
  - Exemplo:

$$z = x^2 + y^2$$



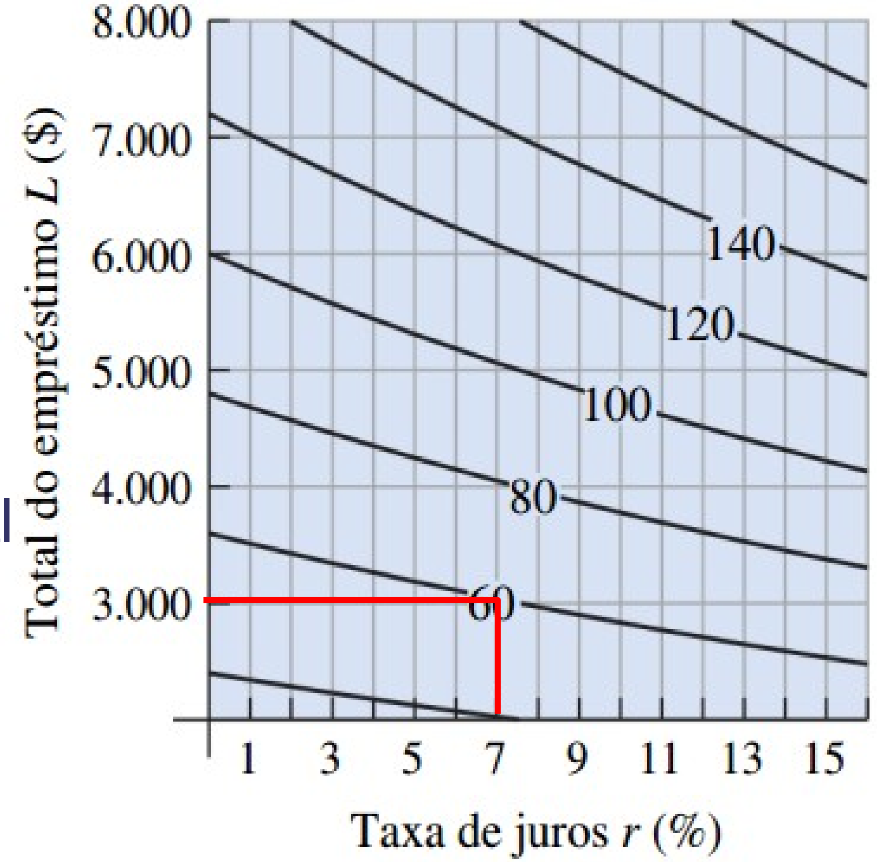
Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: Seja *f(r, L)* o pagamento mensal para um empréstimo de 5 anos na compra de uma moto como uma função da taxa de juros *r* e o total financiado *L*
    - Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 3.000 reais a uma taxa de 7%
    - Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 5.000 reais a uma taxa de 3%
    - Obtenha uma estimativa do total do empréstimo se o pagamento mensal for de 80 reais e a taxa de juros for de 3%



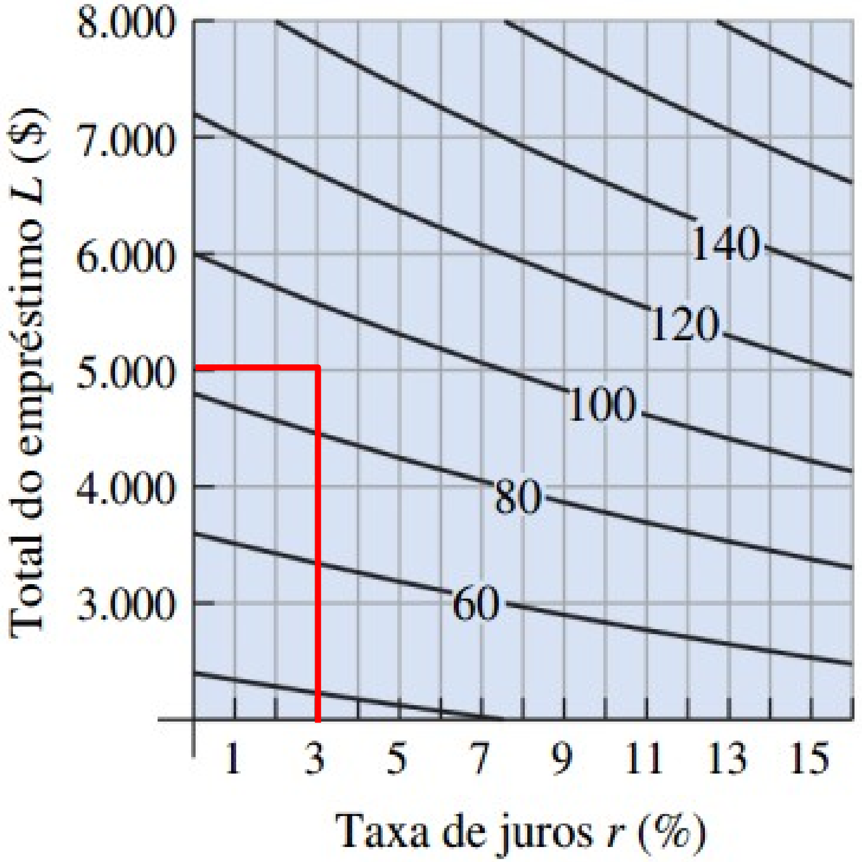
Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: Seja *f(r, L)* o pagamento mensal para um empréstimo de 5 anos na compra de uma moto como uma função da taxa de juros *r* e o total financiado *L*
    - Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 3.000 reais a uma taxa de 7%
    - Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 5.000 reais a uma taxa de 3%
    - Obtenha uma estimativa do total do empréstimo se o pagamento mensal for de 80 reais e a taxa de juros for de 3%



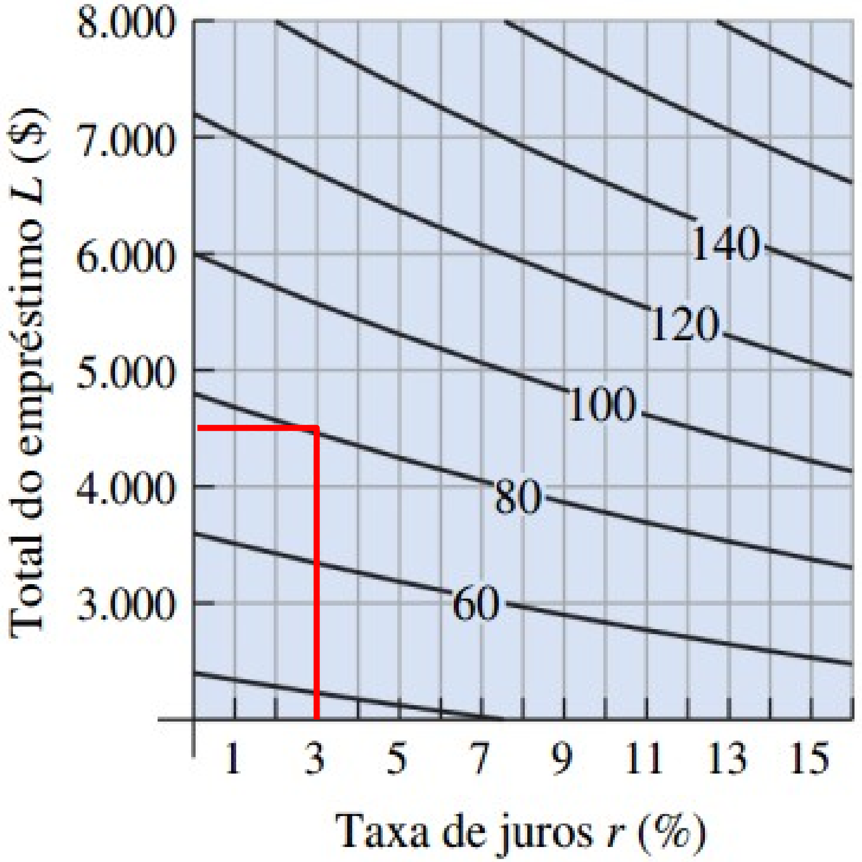
Funções de duas ou mais variáveis

- Curvas de nível
  - Exemplo: Seja *f(r, L)* o pagamento mensal para um empréstimo de 5 anos na compra de uma moto como uma função da taxa de juros *r* e o total financiado *L*
    - Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 3.000 reais a uma taxa de 7%
    - Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 5.000 reais a uma taxa de 3%
    - Obtenha uma estimativa do total do empréstimo se o pagamento mensal for de 80 reais e a taxa de juros for de 3%



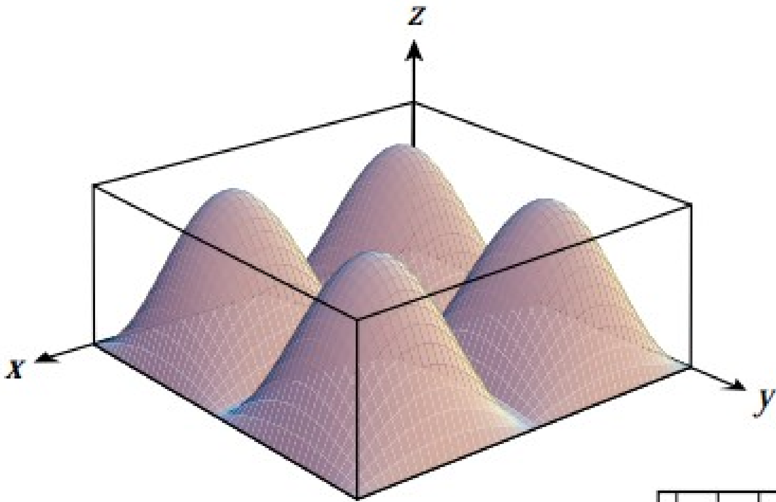
Funções de duas ou mais variáveis

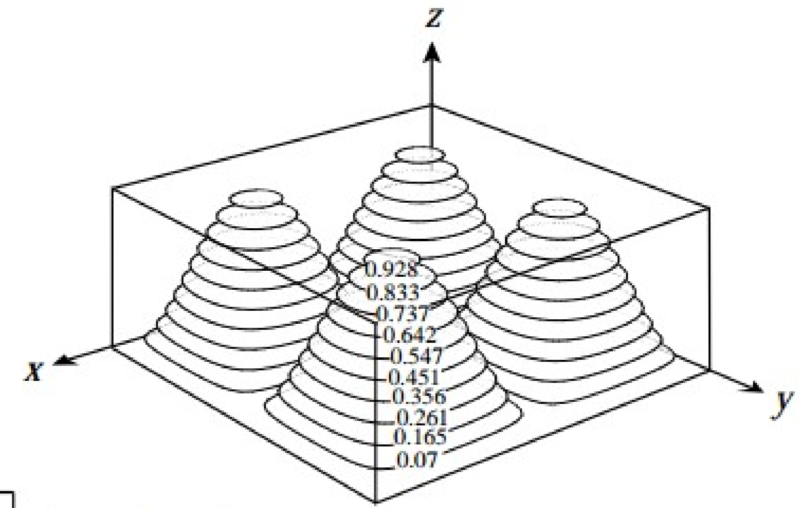
- Curvas de nível
  - Exemplo: Seja *f(r, L)* o pagamento mensal para um empréstimo de 5 anos na compra de uma moto como uma função da taxa de juros *r* e o total financiado *L*
    - Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 3.000 reais a uma taxa de 7%
    - Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 5.000 reais a uma taxa de 3%
    - Obtenha uma estimativa do total do empréstimo se o pagamento mensal for de 80 reais e a taxa de juros for de 3%



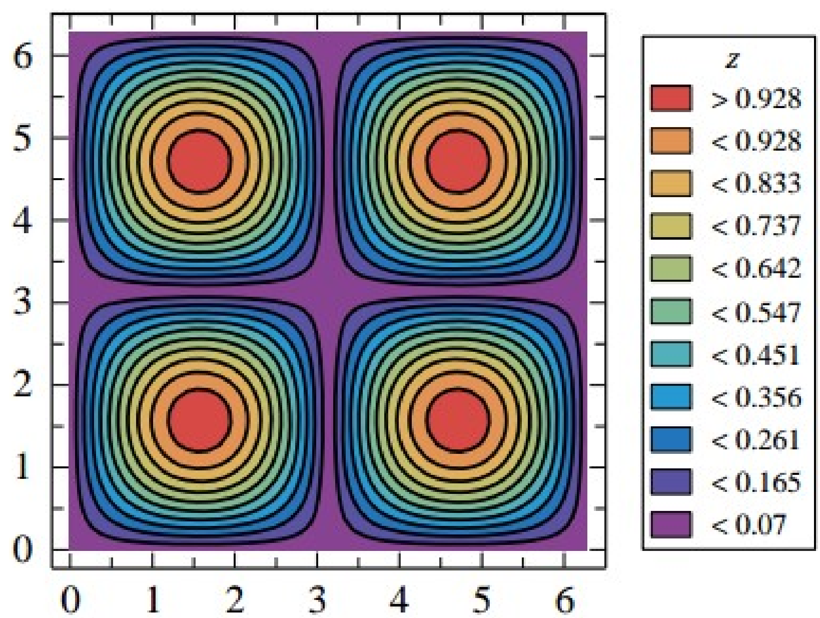
Funções de duas ou mais variáveis

- Mapas de contornos usando recursos gráficos





$$f(x, y) = |\sin x \sin y|$$



Funções de duas ou mais variáveis

- $y=f(x) \rightarrow$ espaço bidimensional
- $z=f(x,y) \rightarrow$ espaço tridimensional
- $w=f(x,y,z) \rightarrow$?

Funções de duas ou mais variáveis

- $y=f(x) \rightarrow$ espaço bidimensional
- $z=f(x,y) \rightarrow$ espaço tridimensional
- $w=f(x,y,z) \rightarrow$ precisaria de 4 dimensões!

Funções de duas ou mais variáveis

- $y=f(x)$ → espaço bidimensional
- $z=f(x,y)$ → espaço tridimensional
- $w=f(x,y,z)$ → precisaria de 4 dimensões!

E se utilizássemos os níveis?

Funções de duas ou mais variáveis

- Superfícies de nível
  - Utiliza o espaço tridimensional
    - Conhecida como **superfície de nível com constante k**

$$f(x, y, z) = k$$

Funções de duas ou mais variáveis

- Superfícies de nível
  - Utiliza o espaço tridimensional
    - Conhecida como **superfície de nível com constante k**

$$f(x, y, z) = k$$

A intuição do comportamento da função pode ser obtida com um gráfico para superfícies de nível com vários valores de k

Funções de duas ou mais variáveis

- Superfícies de nível
  - Exemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Funções de duas ou mais variáveis

- Superfícies de nível
  - Exemplo: $$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

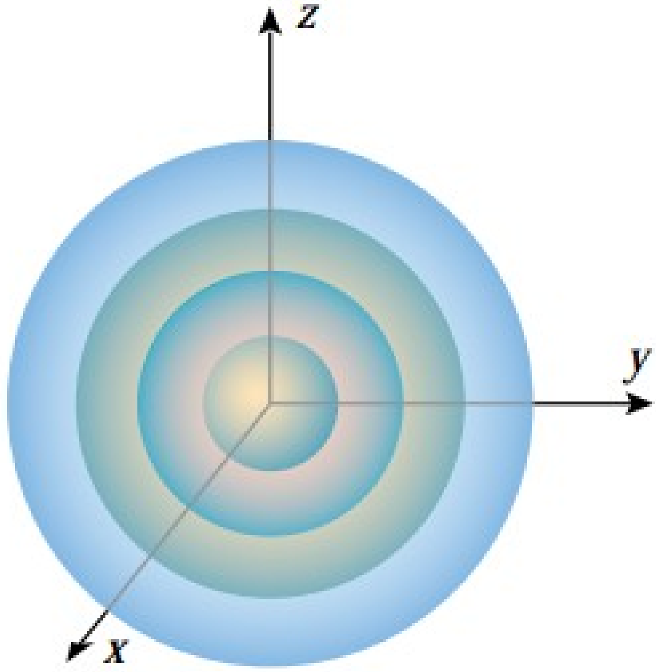
Esfera de raio $\sqrt{k}$

Funções de duas ou mais variáveis

- Superfícies de nível
  - Exemplo:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Esfera de raio $\sqrt{k}$



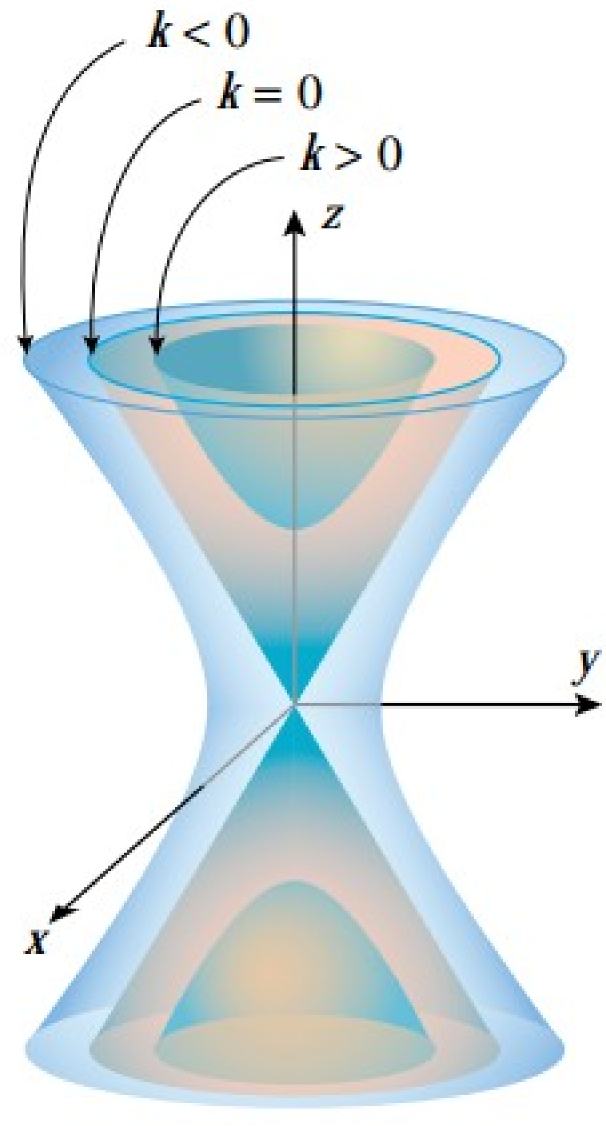
k não pode
ser negativo

Funções de duas ou mais variáveis

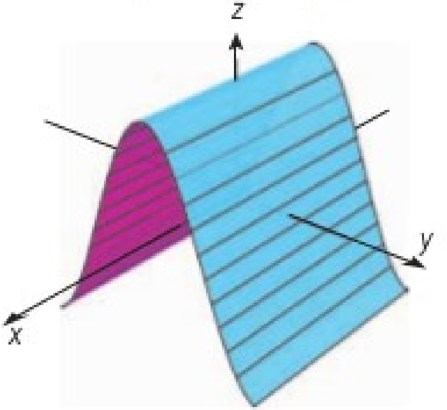
- Superfícies de nível
  - Exemplo: $$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

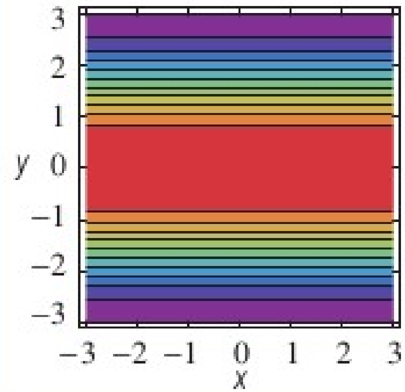
Funções de duas ou mais variáveis

- Superfícies de nível
  - Exemplo: $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$
    - Se $k=0$, cone
    - Se $k<0$, hiperboloide de uma folha
    - Se $k>0$, hiperboloide de duas folhas

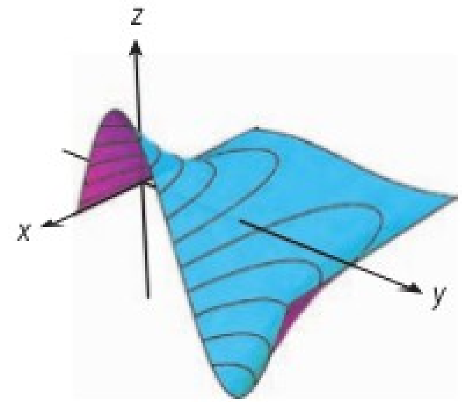


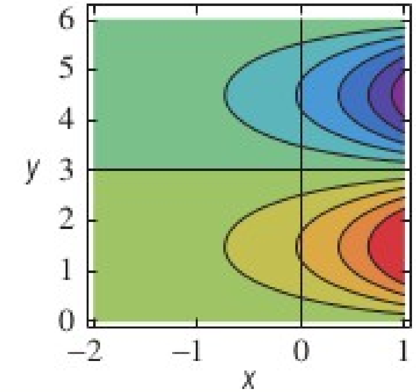
$z = \cos y$



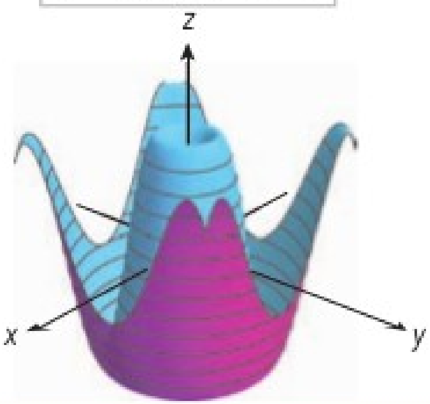


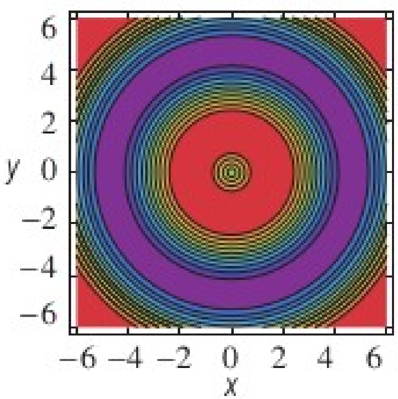
$z = 5e^{x} \sin y$



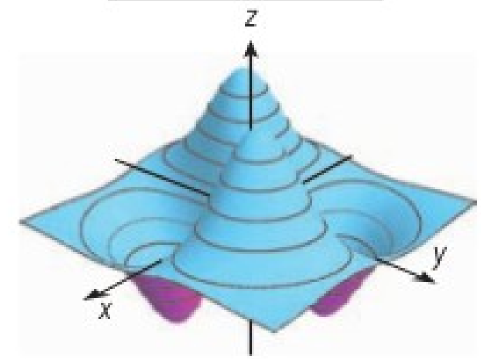


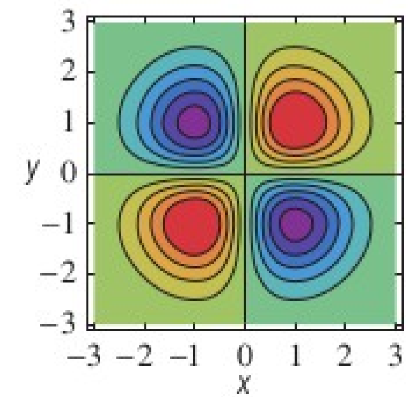
$z = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$



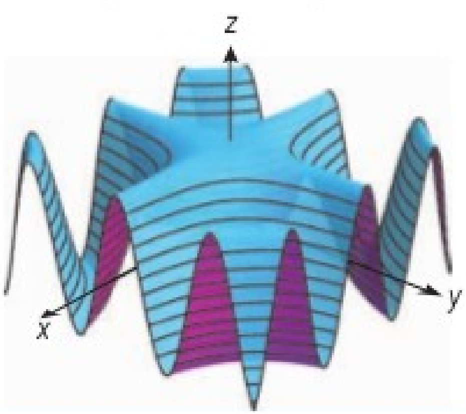


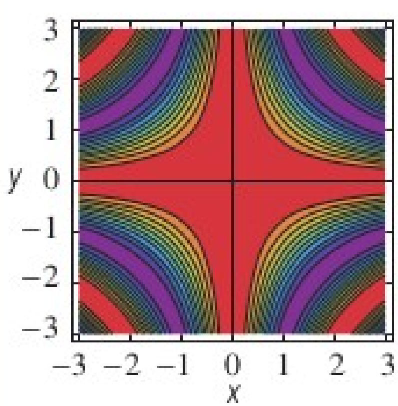
$z = xye^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$



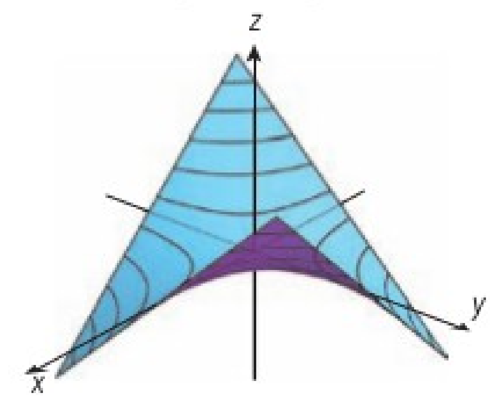


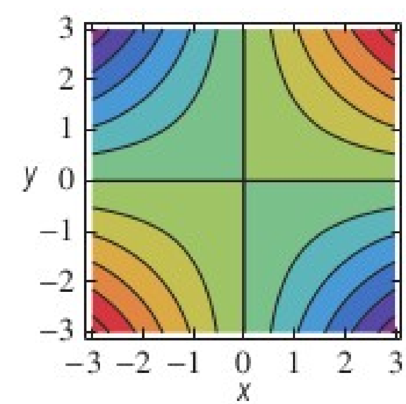
$z = \cos(xy)$





$z = xy$





Limites

Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Para funções de uma variável há somente dois sentidos pelos quais *x* pode se aproximar de x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Pela direita(+) ou pela esquerda(-)

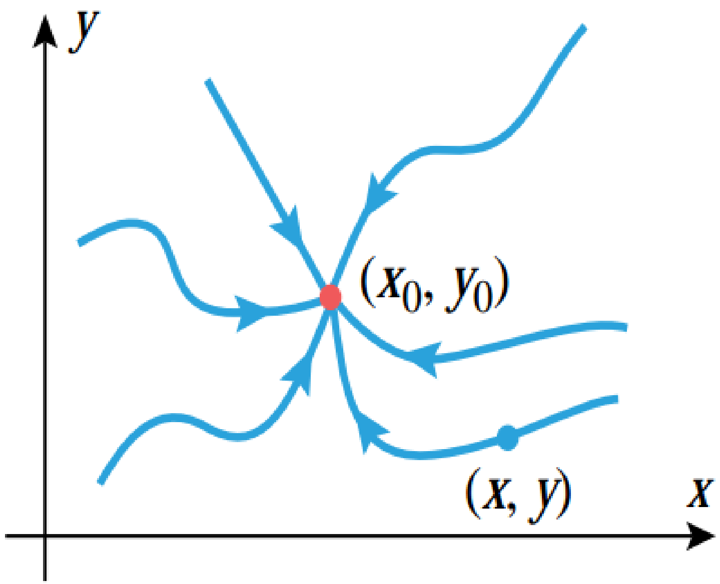
Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Para funções de uma variável há somente dois sentidos pelos quais x pode se aproximar de x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Pela direita(+) ou pela esquerda(-)

  - Para funções de duas ou mais variáveis, há uma infinidade de curvas diferentes

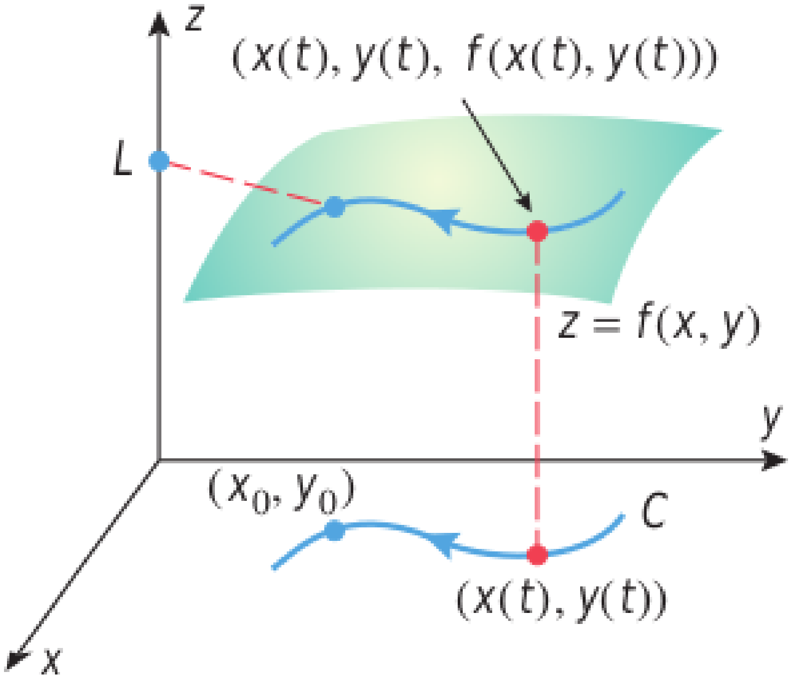


Limites

Análogo para 3 variáveis

- Limites ao longo de curvas
  - Seja o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) ao longo de uma curva *C*, definida por: $x = x(t)$, $y = y(t)$
  - Se $x_0 = x(t_0)$ e $y_0 = y(t_0)$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{(ao longo de } C)}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t))$$



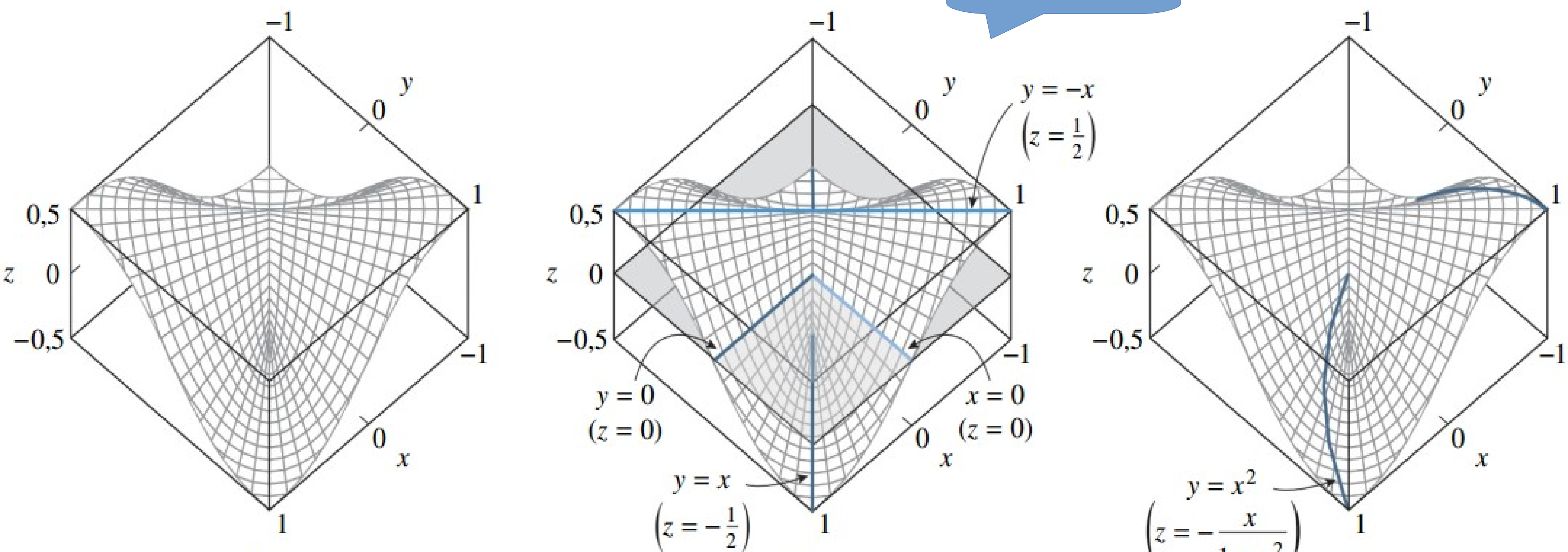
O limite da função de *t* deve ser tratado como um limite lateral se (x_0, y_0) forem extremidades de *C*

Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Exemplo:

$$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Cume y=-x



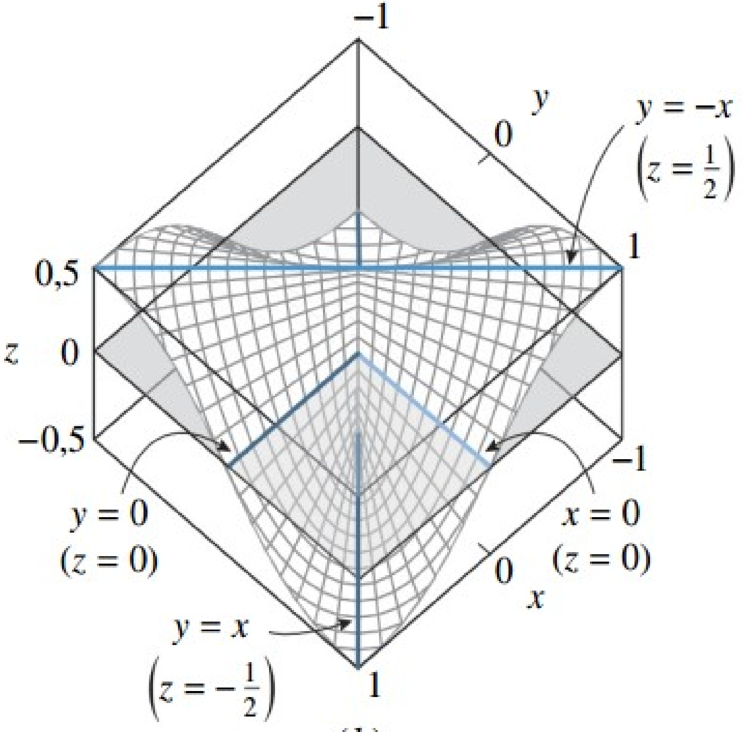
(a) (b) (c)

Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Exemplo: $$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$
    - Determine o limite ao longo
      - do eixo x
      - da reta $y = x$
      - da parábola $y = x^2$

Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Exemplo: $$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$
    - Determine o limite ao longo do eixo x
      - Tem equações paramétricas *x = t, y = 0*, com *(0, 0)* correspondendo a *t = 0*



(b)

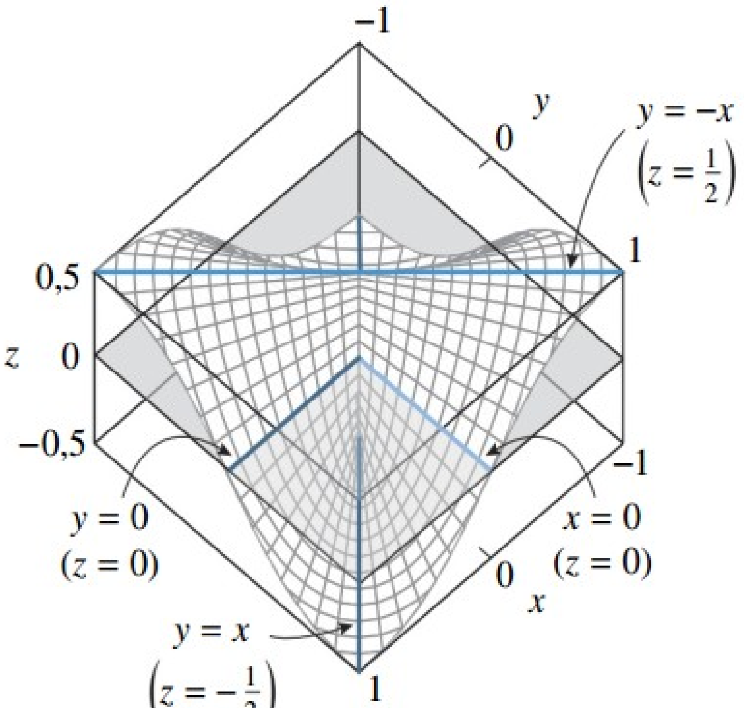
Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Exemplo: $$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$
    - Determine o limite ao longo do eixo x
      - Tem equações paramétricas *x = t, y = 0*, com *(0, 0)* correspondendo a *t = 0*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ao longo de } y=0)}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(t, 0)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(-\frac{0}{t^2}\right)$$

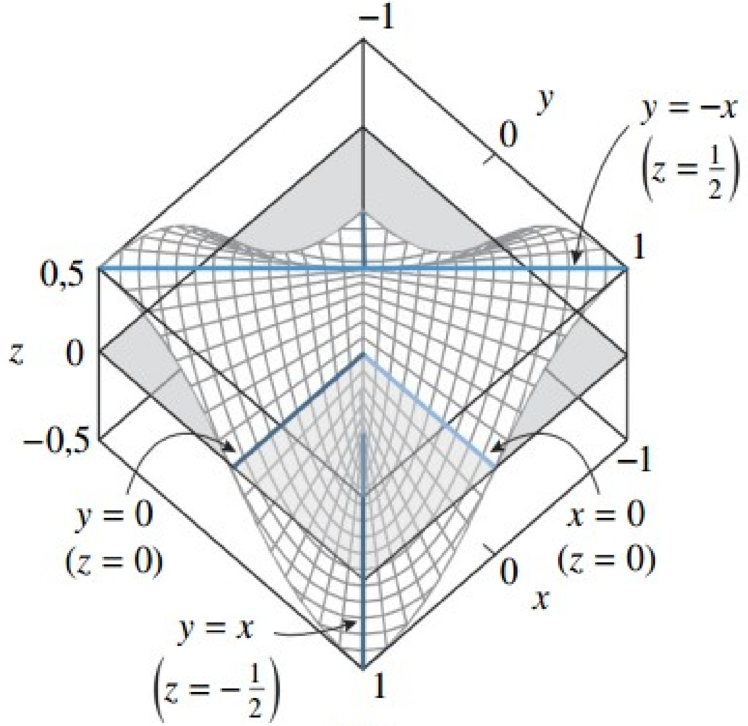
$$= \lim_{t\to 0} 0 = 0$$



(b)

Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Exemplo: $$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$
    - Determine o limite ao longo da reta y = x
      - Tem equações paramétricas *x = t, y = t*, com *(0, 0)* correspondendo a *t = 0*

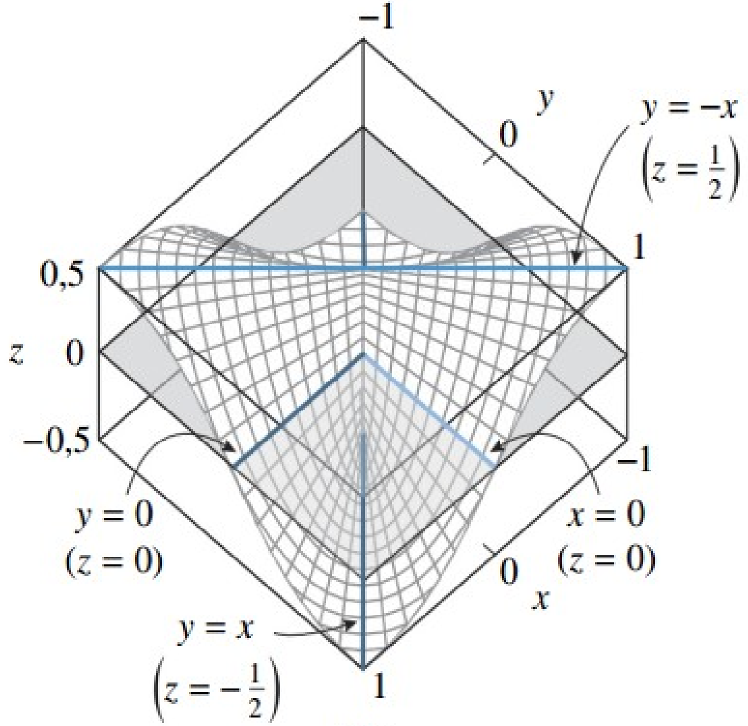


(b)

Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Exemplo: $$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$
    - Determine o limite ao longo da reta y = x
      - Tem equações paramétricas *x = t, y = t*, com *(0, 0)* correspondendo a *t = 0*

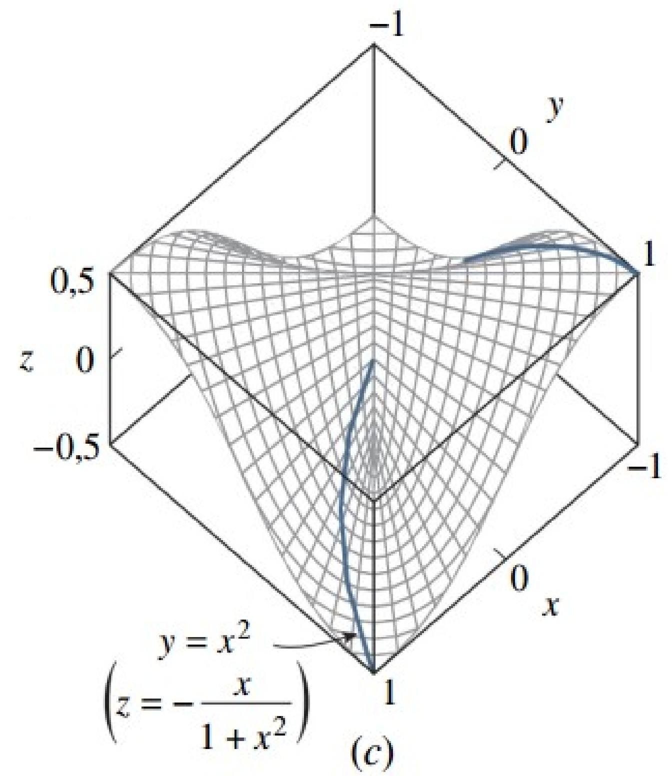
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ao longo de } y = x)}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(t, t)$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(-\frac{t^2}{2t^2}\right)$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$



(b)

Limites

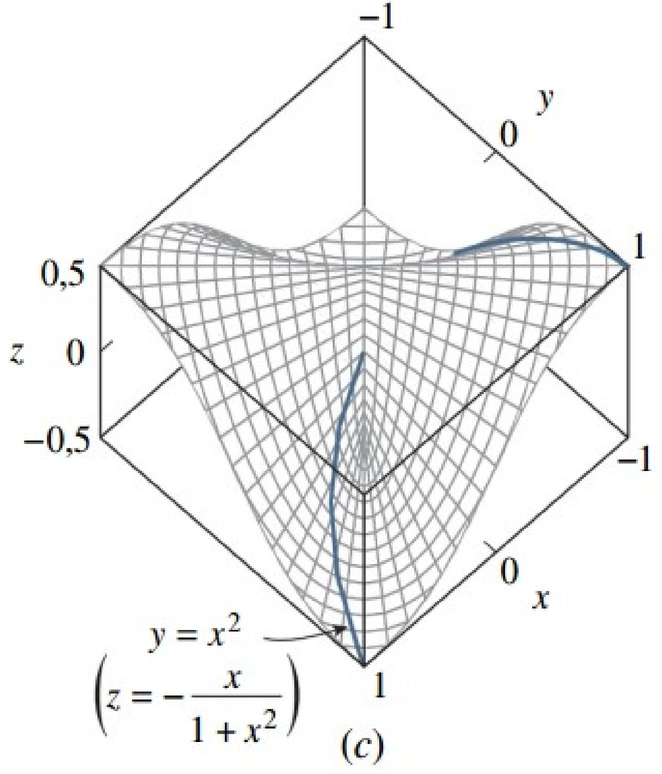
- Limites ao longo de curvas
  - Exemplo: $$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$
    - Determine o limite ao longo da parábola $y = x^2$
      - Tem equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, com $(0, 0)$ correspondendo a $t = 0$



Limites

- Limites ao longo de curvas
  - Exemplo: $$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$
    - Determine o limite ao longo da parábola y = x²
      - Tem equações paramétricas *$x = t$, $y = t^2$*, com *(0, 0)* correspondendo a *$t = 0$*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{(ao longo de } y = x^2)}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(t, t^2) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{t^3}{t^2 + t^4}\right) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{t}{1 + t^2}\right) = 0$$

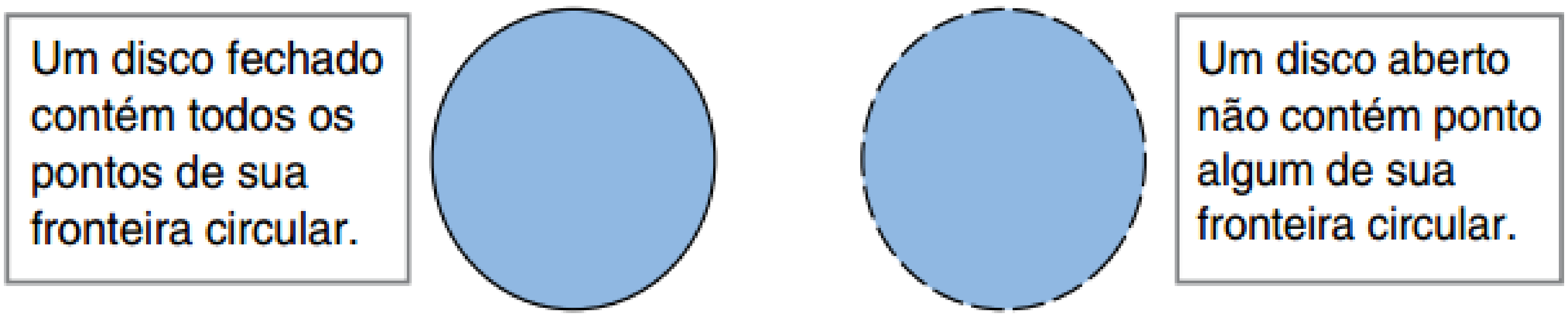


Limites

- Os limites ao longo de curvas não contam sobre o comportamento da curva completamente
- Precisa-se de um conceito de limite que dê conta do comportamento da função em toda uma vizinhança de um ponto

Limites

- Conjuntos abertos e fechados
  - Seja C um círculo no espaço bidimensional centrado em (x_0, y_0) e de raio positivo δ
    - **Disco aberto**: todos os pontos que são englobados pelo círculo, menos os da circunferência
    - **Disco fechado**: todos os pontos que são englobados pelo círculo, inclusive os da circunferência

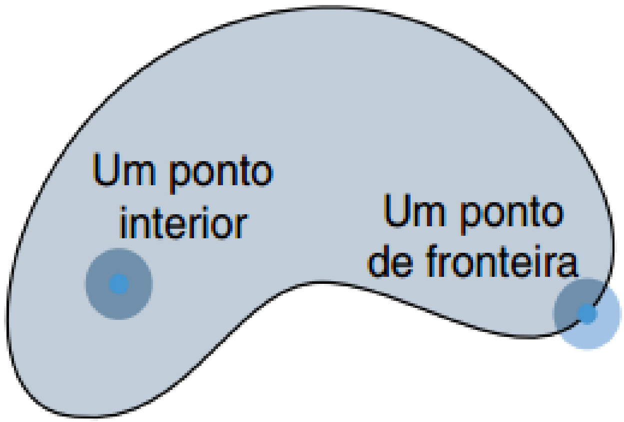


Limites

- Conjuntos abertos e fechados
  - Seja S uma esfera no espaço bidimensional centrado em (x_0, y_0, z_0) e de raio positivo δ
    - **Bola aberta**: todos os pontos que são englobados pelo esfera, menos os da esfera
    - **Bola fechada**: todos os pontos que são englobados pelo esfera, inclusive os da esfera

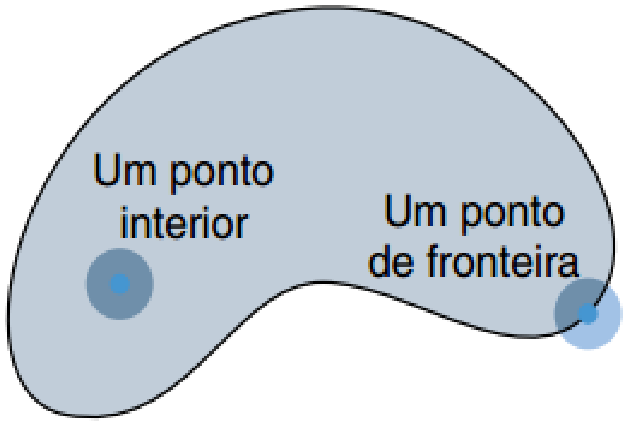
Limites

- Conjuntos abertos e fechados
  - Se D for um conjunto de pontos do espaço bi ou tridimensional
    - Diremos que (x_0, y_0) é um **ponto interior** de D se existir algum disco aberto centrado em (x_0, y_0) que contenha unicamente pontos de D
    - Dizemos que (x_0, y_0) é um **ponto de fronteira** de D se qualquer disco aberto centrado em (x_0, y_0) contiver pontos tanto de D quanto não de D



Limites

- Conjuntos abertos e fechados
  - Se D for um conjunto de pontos do espaço bi ou tridimensional
    - Dizemos que o conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto D constitui o **interior** de D
    - E o conjunto de todos os pontos de fronteira constitui a **fronteira** de D



Resumo

Resumo

- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $w=f(x,y,z)$ $u=f(x_1,x_{2,}\dots,x_n)$

Resumo

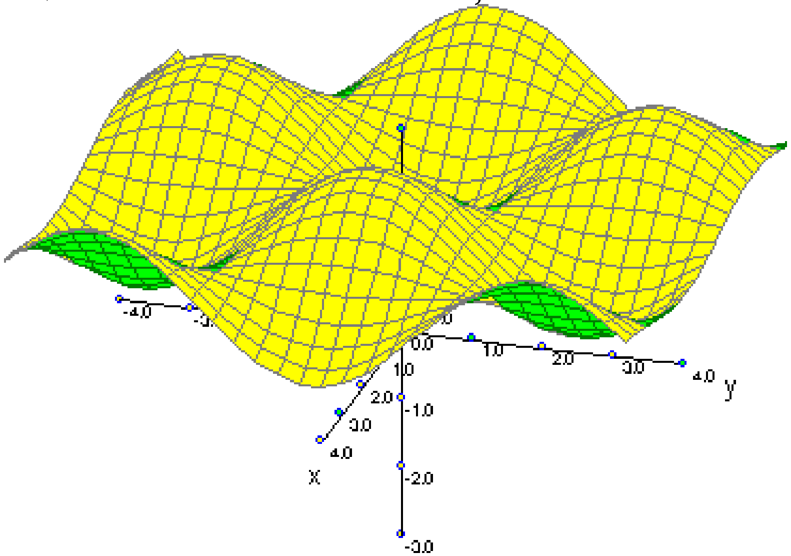
- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z = f(x, y)$ $w = f(x, y, z)$ $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - Domínio

Resumo

- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $w=f(x,y,z)$ $u=f(x_1,x_{2,}\ldots,x_n)$
  - Domínio
  - Funções definidas por tabelas

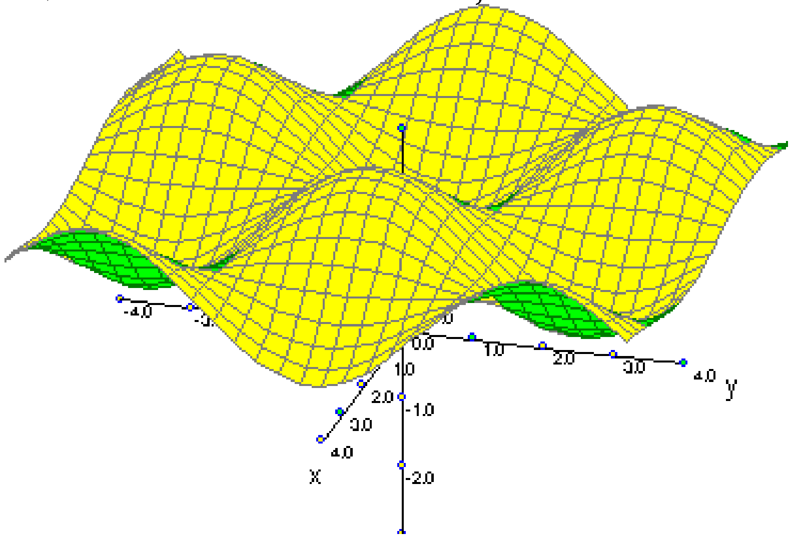
Resumo

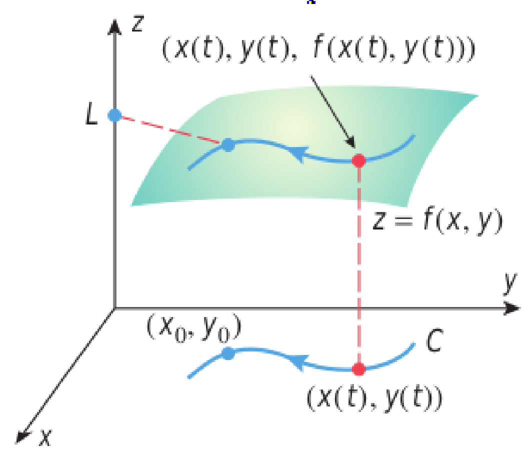
- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $w=f(x,y,z)$ $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
  - Domínio
  - Funções definidas por tabelas
  - Curvas / Superfícies de nível



Resumo

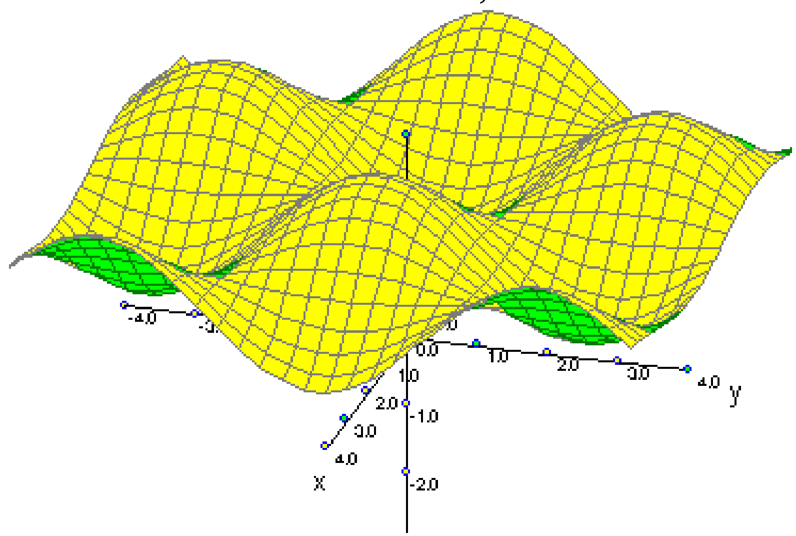
- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $w=f(x,y,z)$ $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
  - Domínio
  - Funções definidas por tabelas
  - Curvas / Superfícies de nível
- Limites
  - Limite ao longo de curva



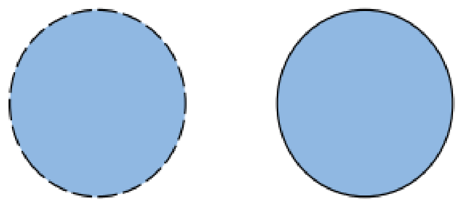


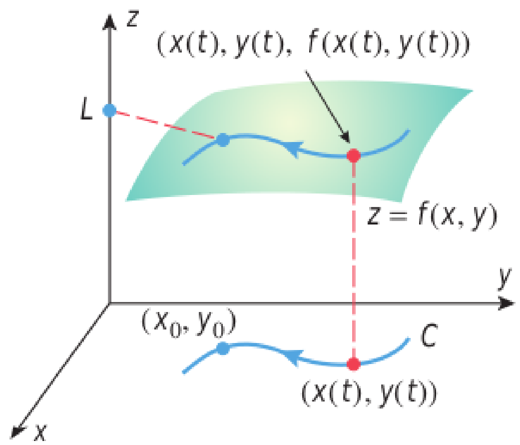
Resumo

- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $w=f(x,y,z)$ $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
  - Domínio
  - Funções definidas por tabelas
  - Curvas / Superfícies de nível



- Limites
  - Limite ao longo de curva
  - Conjuntos abertos e fechados



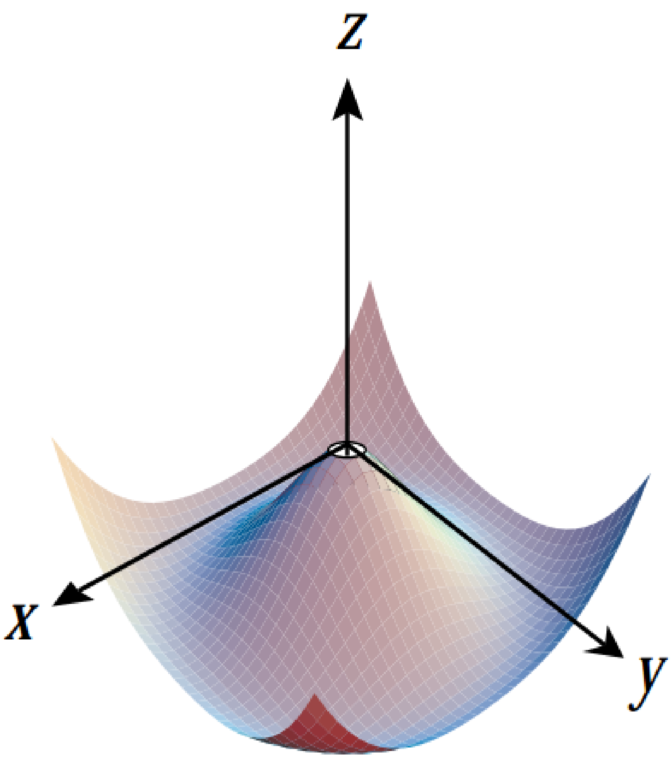


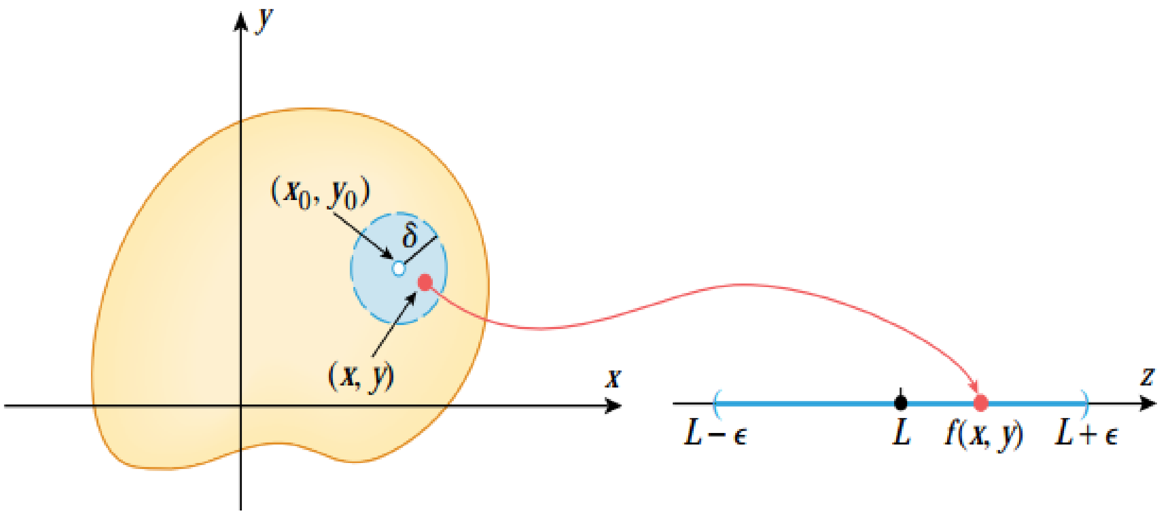
Resumo

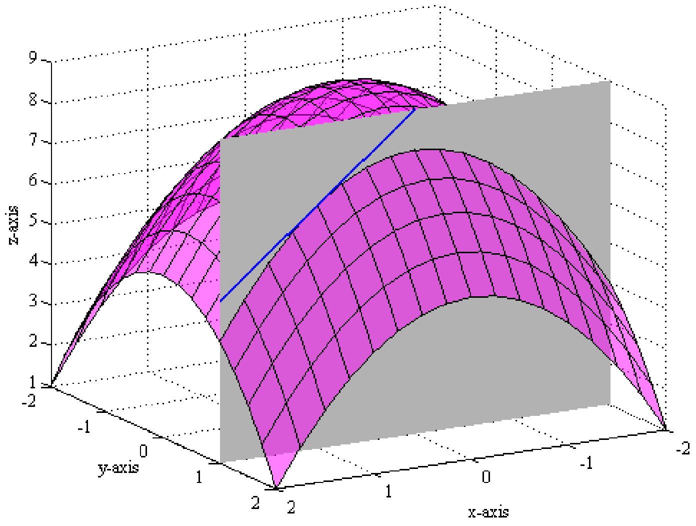
- Exercícios de fixação:
  - Seção 13.1
    - Exercícios de compreensão 13.1
    - 1-8
    - 15
    - 17-20
    - 23-26
    - 43-44
  - Seção 13.2
    - Exercícios de compreensão 13.2 (1 e 2)
    - 7 e 8

Resumo

- Próxima aula:
  - Limites e continuidade de funções de duas ou mais variáveis
  - Derivadas parciais







Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seções 13.1 e 13.2