Campos vetoriais e Integrais de linha

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

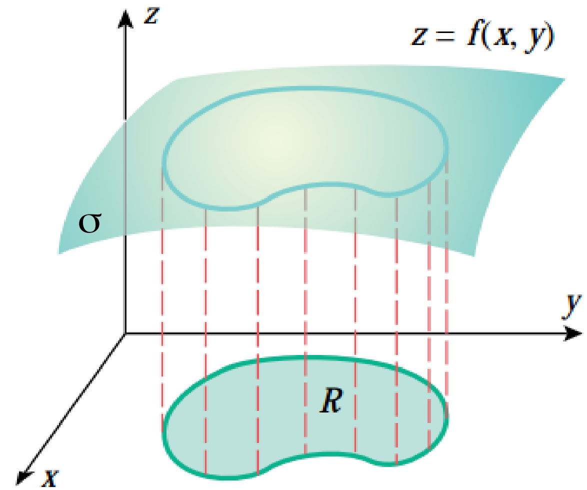
Índice

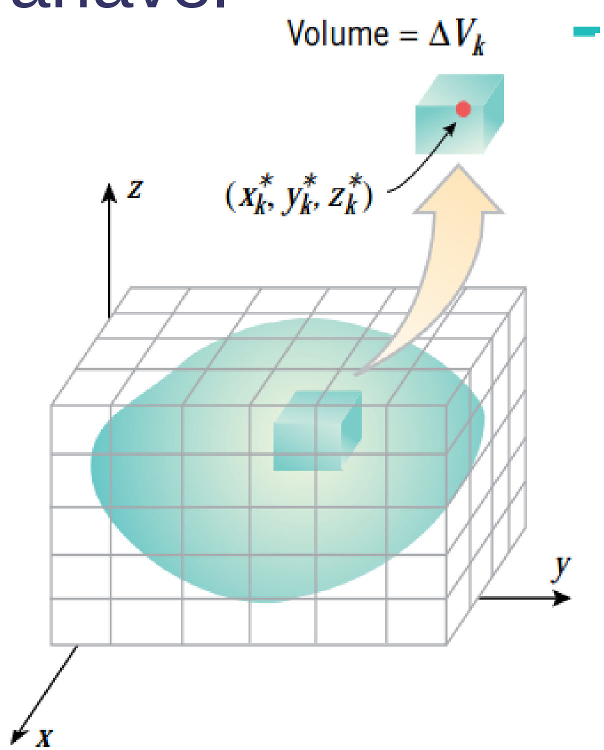
- Revisão
- Campos vetoriais
  - Definição
  - Campos de quadrado inverso
  - Campos gradientes
  - Campos conservativos e funções potenciais
  - Divergente e rotacional
  - Operadores ∇ e ∇^2
- Integrais de linha
- Resumo
- Bibliografia

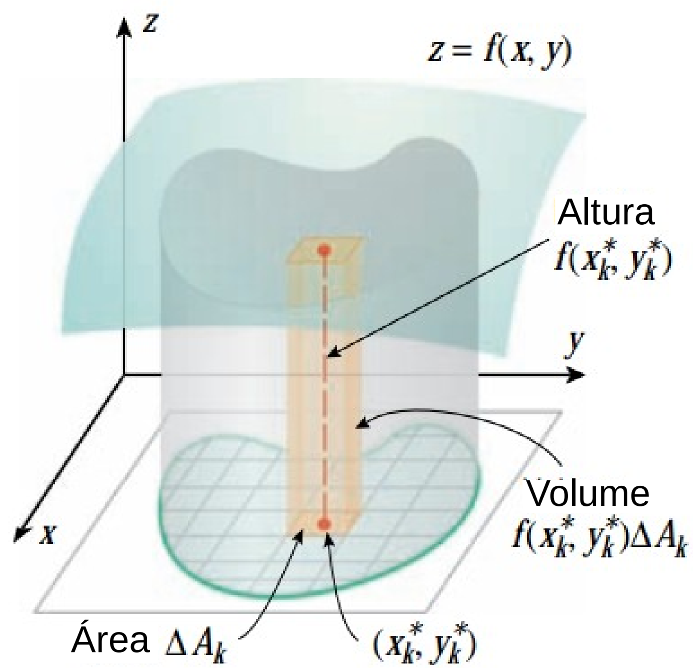
Revisão

Revisão

- Integrais múltiplas
  - Integrais duplas
  - Área de superfície
  - Integrais triplas
  - Mudança de variável
    - Jacobiano







$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

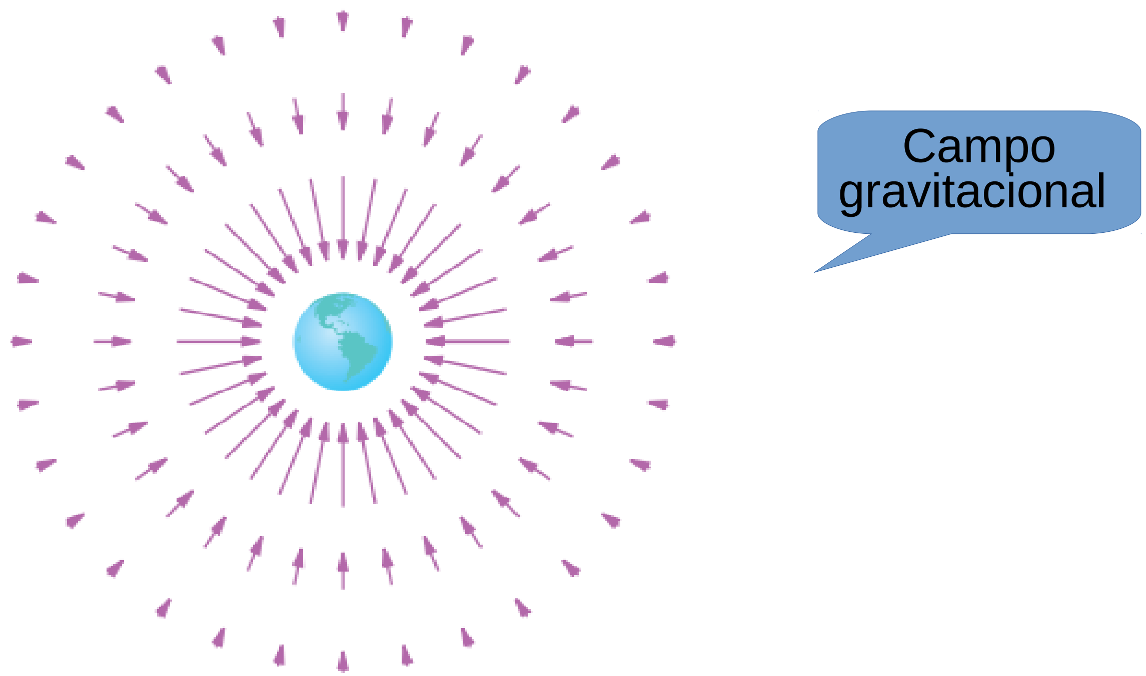
Campos vetoriais

Campos vetoriais

- Motivação
  - Funções que associam vetores a pontos no espaço bi ou tridimensional
  - Importante para os estudos: fluxos fluidos, campos de forças gravitacionais, campos de forças eletromagnéticas…

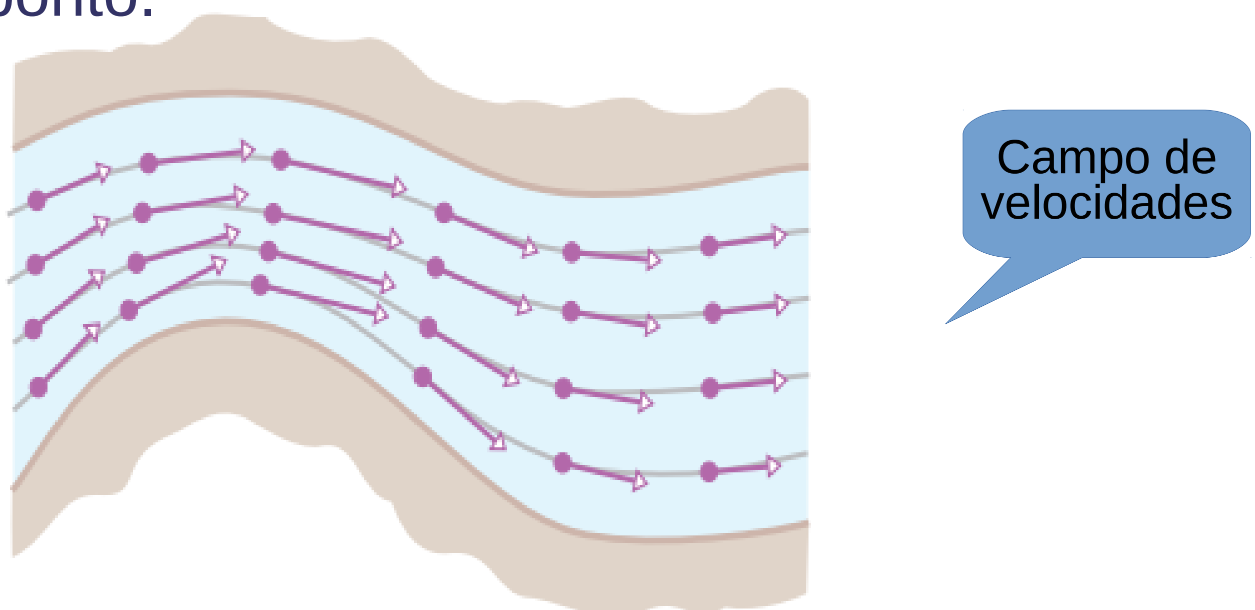
Campos vetoriais

- Motivação
  - Exemplo: Lei da Gravitação Universal de Newton
    - A Terra exerce uma força atrativa sobre a massa na direção do centro da Terra de grandeza inversamente proporcional ao quadrado da distância da massa ao centro da Terra



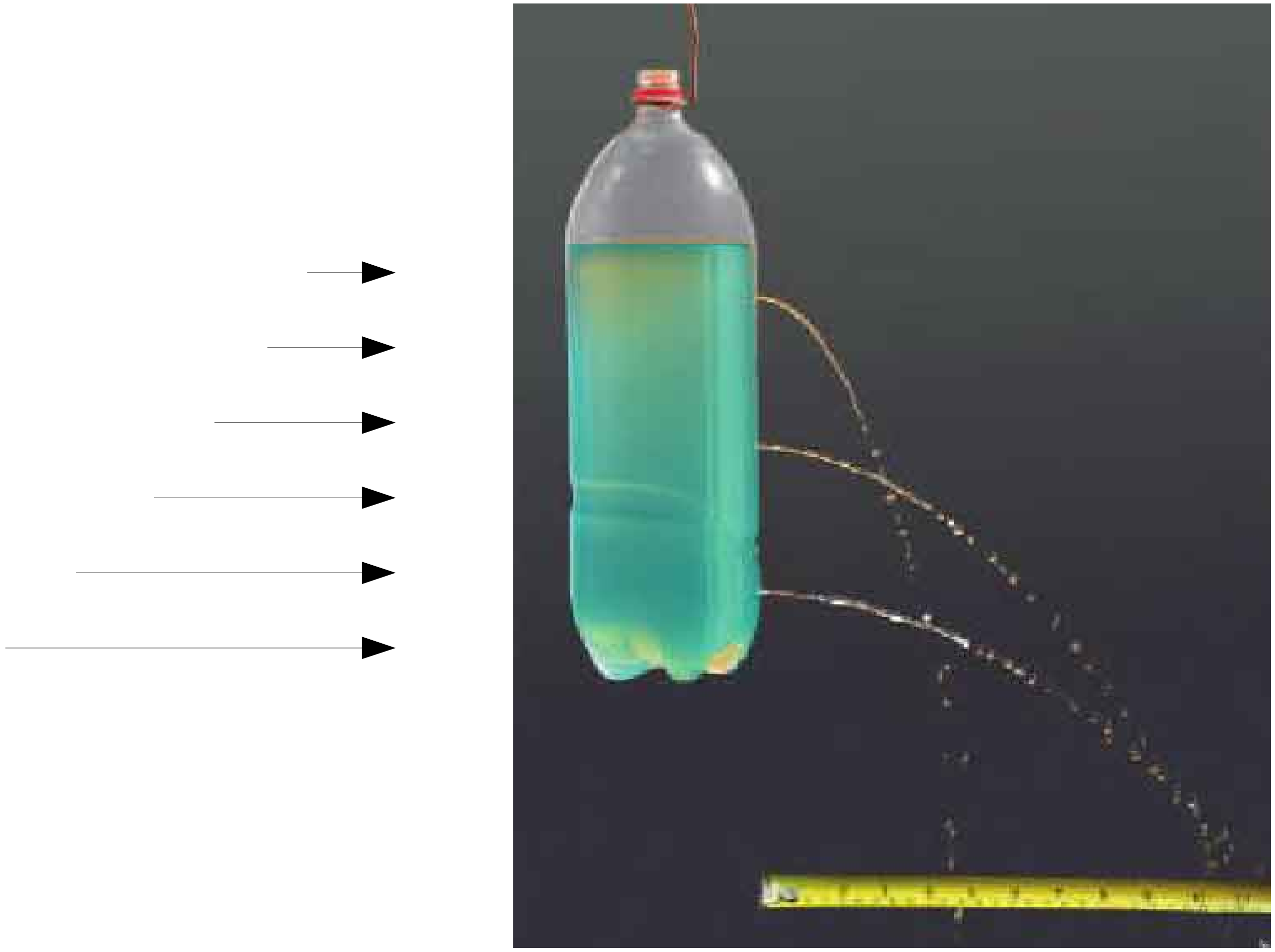
Campos vetoriais

- Motivação
  - Exemplo: Fluxo fluido
    - Imagine uma corrente em que a água flui horizontalmente em qualquer nível e considere a camada de água em uma profundidade específica.
    - Em cada ponto da camada, a água tem uma certa velocidade, que podemos representar por um vetor naquele ponto.



Campos vetoriais

- Motivação
  - Exemplo: Pressão de uma coluna d’água



Campos vetoriais

- Definição:
  - Um **campo vetorial** em um plano é uma função que associa a cada ponto P do plano um único vetor **F**(P) paralelo ao plano.

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

  - Analogamente, um **campo vetorial** no espaço tridimensional é uma função que associa a cada ponto P do espaço tridimensional um único vetor **F**(P) do espaço.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Entrada da função é um ponto e a saída é um vetor.

Campos vetoriais

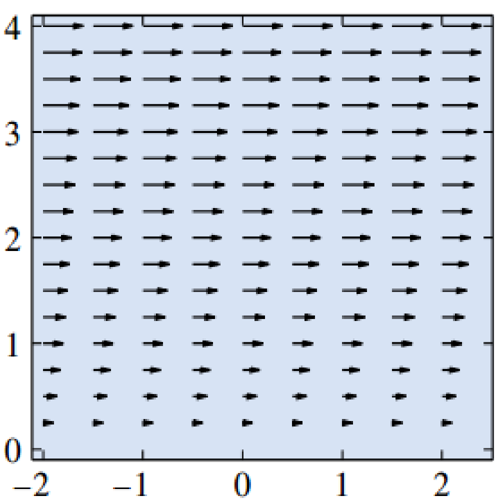
- Representações gráficas
  - 2D: É possível ter uma **ideia do campo vetorial** desenhando vetores representativos de **F**(x, y) em alguns pontos bem selecionados do plano xy

Geralmente criadas com o uso de computadores

Campos vetoriais

- Representações gráficas
  - É possível ter uma **ideia do campo vetorial** desenhando vetores representativos de **F**(x, y) em alguns pontos bem selecionados

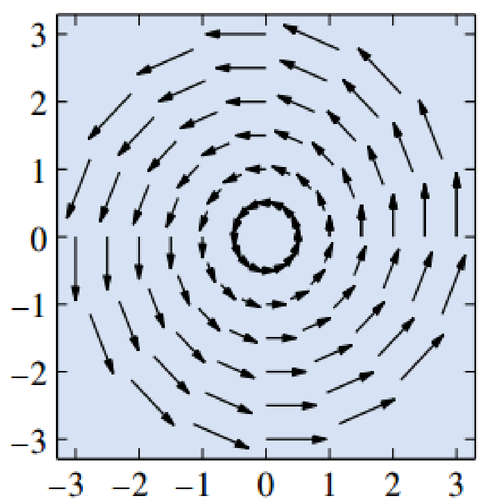
Velocidade no fundo do córrego



$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{5}\sqrt{y}\,\mathbf{i}$

Velocidade em uma roda em movimento

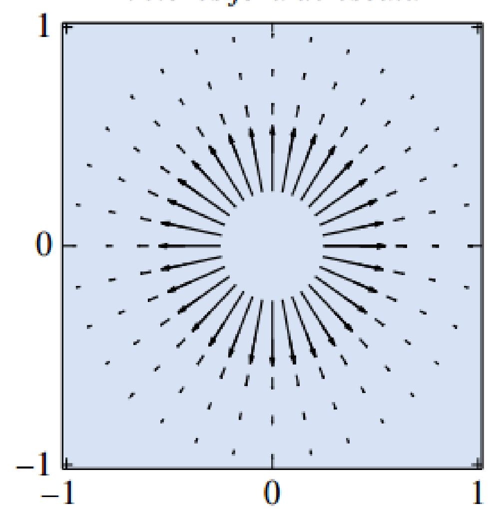
Vetores fora de escala



$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

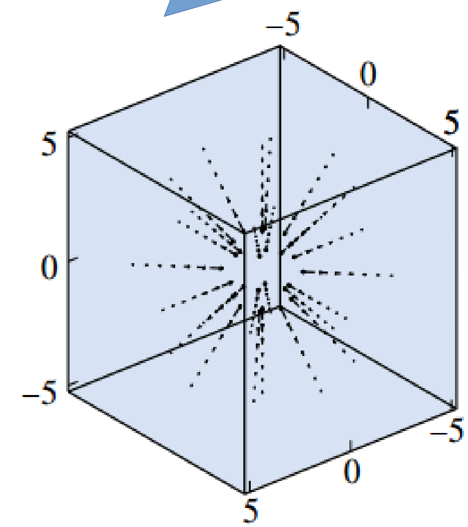
Força de repulsão de uma corrente elétrica

Vetores fora de escala



$\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{10(x^2 + y^2)^{3/2}}$

Campos em 3d são mais confusos e menos usados



$\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{-x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

Campos vetoriais

- Notação compacta
  - Utilizando completamente a notação vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) \Rightarrow \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) \Rightarrow \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{F}$$

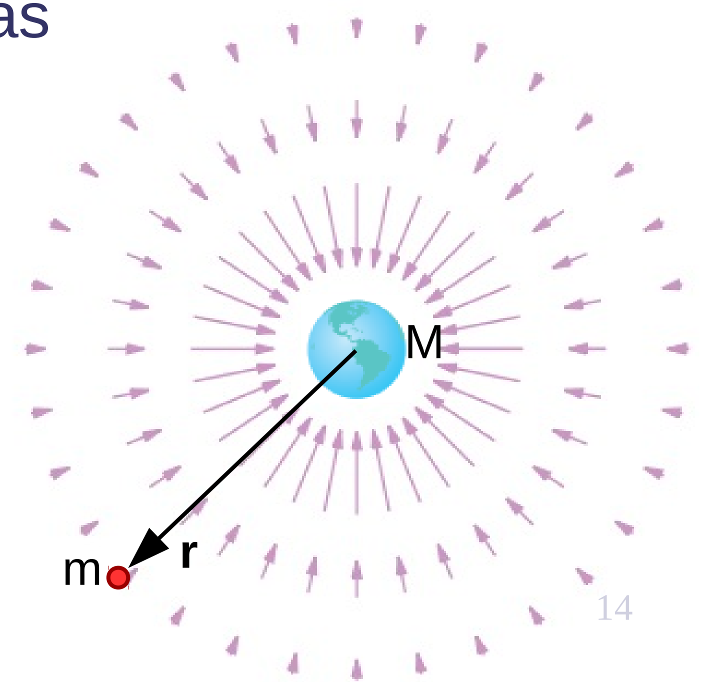
Campos vetoriais

- Campos de quadrado inverso
  - Partículas de massas m e M atraem uma à outra com uma força **F** de grandeza:

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{GmM}{r^2}$$

    - G é uma constante
    - r = ||**r**|| é a distância entre as massas
    - A força **F**(**r**) exercida pela partícula de massa M sobre a partícula de massa m tem a direção e o sentido do vetor unitário −**r**/ ||**r**||

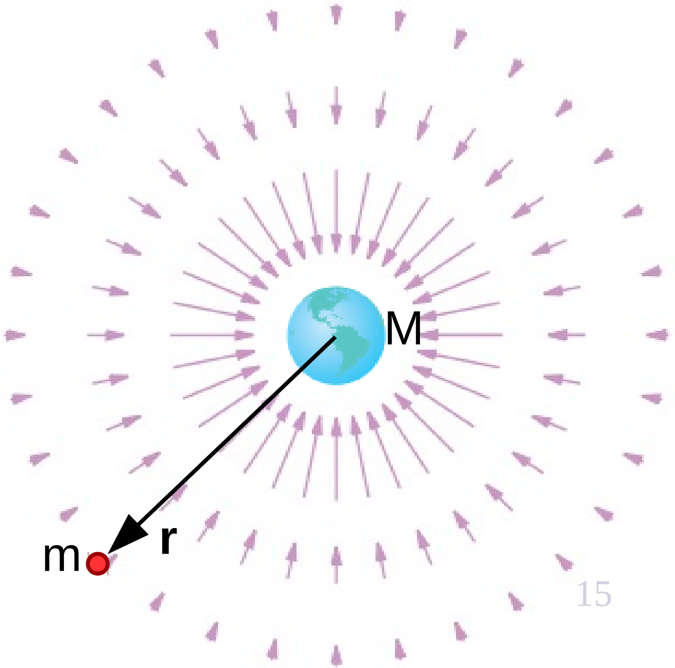
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$



Campos vetoriais

- Campos de quadrado inverso
  - Assumindo M e m como constantes e tomando c = −GmM
    - Forma geral:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$



Campos vetoriais

- Definição:
  - Se **r** for um vetor posição do espaço bi ou tridimensional e c for uma constante, então um campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

    é denominado um **campo de quadrado inverso**.
    - Se c>0, então **F**(**r**) tem a mesma direção de **r**
    - Se c<0, então **F**(**r**) tem sentido oposto de **r**
    - Mas, em ambos os casos, **F**(**r**) é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o ponto final de **r** e a origem

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^3}\|\mathbf{r}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

Campos vetoriais

- Campos gradientes
  - Se φ for uma função de três variáveis, então o gradiente de φ é definido como

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

  - Essa função define um campo vetorial
  - Em cada ponto de um campo gradiente em que o gradiente não for nulo, o vetor aponta na direção em que é máxima a taxa de aumento de φ

Campos vetoriais

- Campos gradientes
  - Exemplo: Esboce o campo gradiente de

$$\phi(x, y) = x + y$$

Campos vetoriais

- Campos gradientes
  - Exemplo: Esboce o campo gradiente de

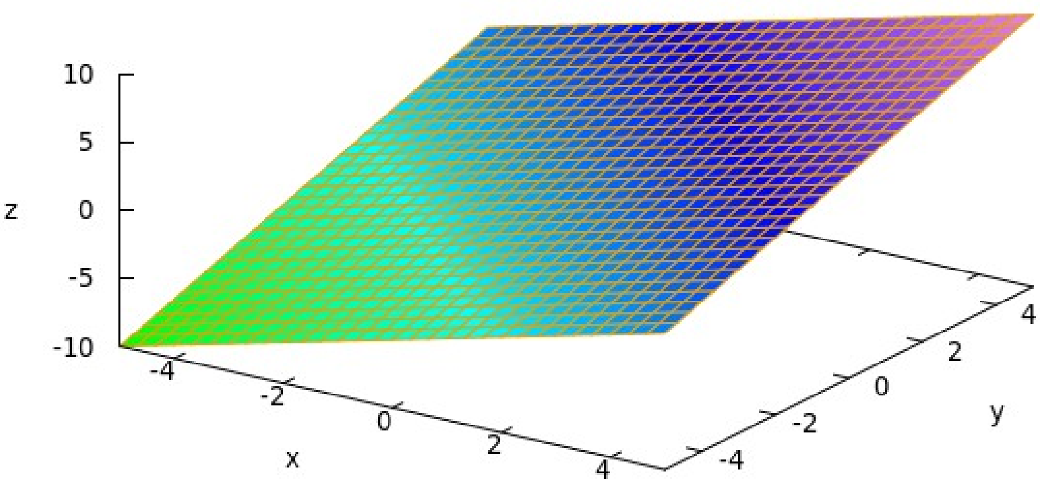
$$\phi(x, y) = x + y$$

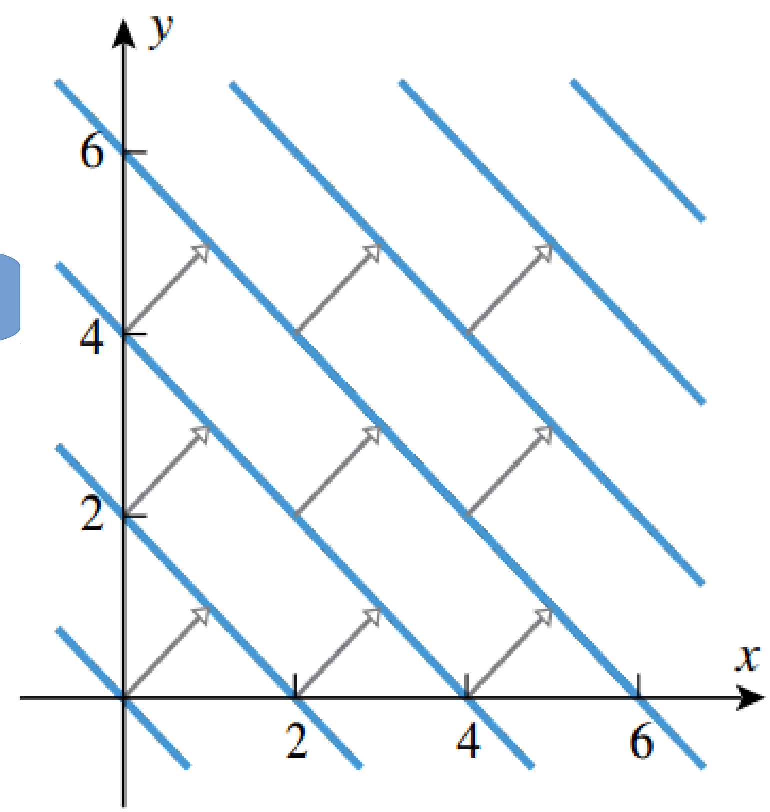
Curvas de nível e campo

- O gradiente de φ é:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Constante





Campos vetoriais

- Definição:
  - Dizemos que um campo vetorial **F** do espaço bi ou tridimensional é **conservativo** em uma região se for o campo gradiente de alguma função φ naquela região ou seja, se

$$\mathbf{F} = \nabla\phi$$

A função φ é denominada uma **função potencial** de **F** na região

Campos vetoriais

- Campos conservativos e funções potenciais
  - Exemplo: Campos de quadrado inverso **F** são *conservativos* em qualquer região que não contenha a origem.

$$\phi(x, y) = -\frac{c}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

  - φ é uma *função potencial* em qualquer região que não contenha a origem

$$\begin{aligned}\nabla\phi(x, y) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}\\ &= \frac{cx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}\\ &= \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\\ &= \mathbf{F}(x, y)\end{aligned}$$

Campos vetoriais

Operações sobre campos vetoriais

- Definição:
  - Se $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$, definiremos a **divergência** de **F**, denotada div **F**, como a função dada por

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Escalar

Campos vetoriais

Operações sobre campos vetoriais

- Definição:
  - Se **F**(x, y, z) = f(x, y, z)**i** + g(x, y, z)**j** + h(x, y, z)**k**, definiremos a **divergência** de **F**, denotada div **F**, como a função dada por

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Escalar

  - Se **F**(x, y, z) = f(x, y, z)**i** + g(x, y, z)**j** + h(x, y, z)**k**, definiremos o **rotacional de F**, denotado rot **F**, como o campo vetorial dado por

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Vetor

Campos vetoriais

- Observação:
  - Note que div **F** e rot **F** dependem do ponto em que estão sendo calculados e, portanto, são escritos mais apropriadamente como div **F**(x, y, z) e rot **F**(x, y, z).
  - Entretanto, mesmo que essas funções sejam expressas em termos de x, y e z, pode ser provado que seus valores em um ponto fixado dependem do ponto, mas não do sistema de coordenadas selecionado.
  - Isso é importante nas aplicações, uma vez que permite a físicos e engenheiros calcular rotacional e divergência em qualquer sistema de coordenadas conveniente.

Campos vetoriais

- Rotacional
  - Artifício mnemônico: A formula pode ser expressa na forma de determinante

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

Campos vetoriais

- Divergente e rotacional
  - Exercício: Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y\mathbf{i} + 2y^3 z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

Campos vetoriais

- Divergente e rotacional
  - Exercício: Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

- Divergente

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3z) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 2xy + 6y^2z + 3$$

- Rotacional

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2y^3z & 3z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3z) - \frac{\partial}{\partial z}(2y^3z)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(3z)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2y^3z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right]\mathbf{k}$$

$$= -2y^3\mathbf{i} - x^2\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

Campos vetoriais

- Operador ∇ (operador del)
  - É conveniente considerar ∇ como um operado

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

que, aplicado a φ(x, y, z), produz o gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

É análogo ao operador de derivada d/dx que, quando aplicado a f(x), produz a derivada f(x)

Campos vetoriais

- Operador ∇ (operador del)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

  – Seja o campo vetorial

$$\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

  – O divergente pode ser dado pelo produto escalar

$$\text{div}\ \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

  – O rotacional pode ser dado pelo produto vetorial

$$\text{rot}\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

Campos vetoriais

- Operador ∇^2 (operador laplaciano)
  - Aplica o operador del a ele mesmo

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Campos vetoriais

- Operador ∇^2 (operador laplaciano)
  - Aplica o operador del a ele mesmo

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

  - Quando aplicado a φ(x, y, z), produz a função:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Também pode ser visto como div(∇φ)

  - A equação $\nabla^2 \varphi = 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

é conhecida como **equação de Laplace**

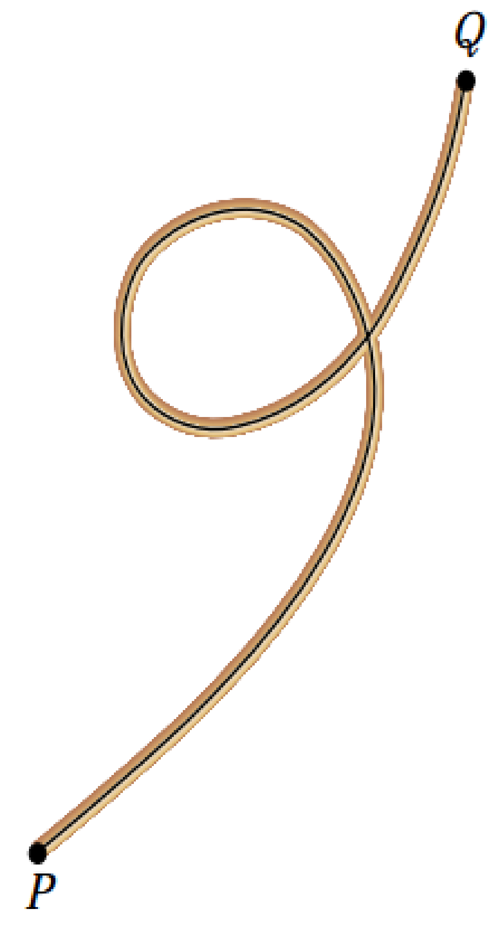
Integrais de linha

Integrais de linha

- Integrar ao longo de uma curva
  - Motivação: Problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja função densidade linear seja conhecida
    - O arame pode ser modelado por uma curva lisa C entre dois pontos P e Q
    - Dado um ponto (x, y, z) em C, denotamos por f(x, y, z) o valor correspondente da função densidade

massa por unidade de comprimento

Resultado da curva lisa para um certo t

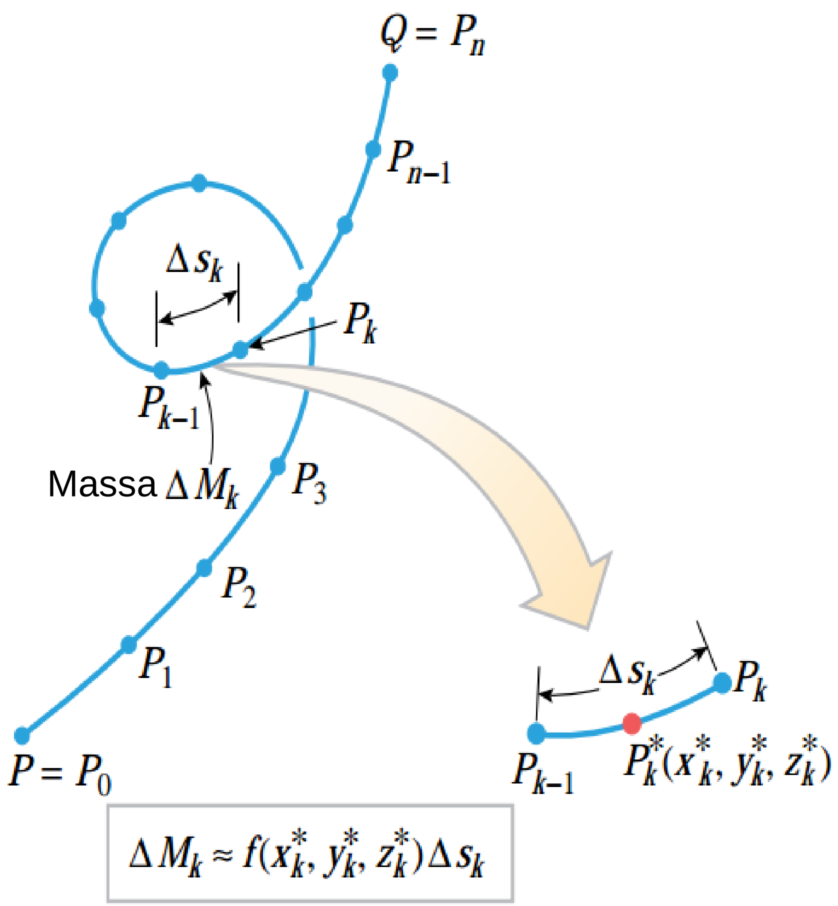


Integrais de linha

- Integrar ao longo de uma curva
  - Motivação: Problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja função densidade linear seja conhecida
    - Divida C em n seções muito pequenas

$$P = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n = Q$$

    - ΔM_k é a massa da k-ésima seção
    - Δs_k o comprimento de arco entre P_{k-1} e P_k



Integrais de linha

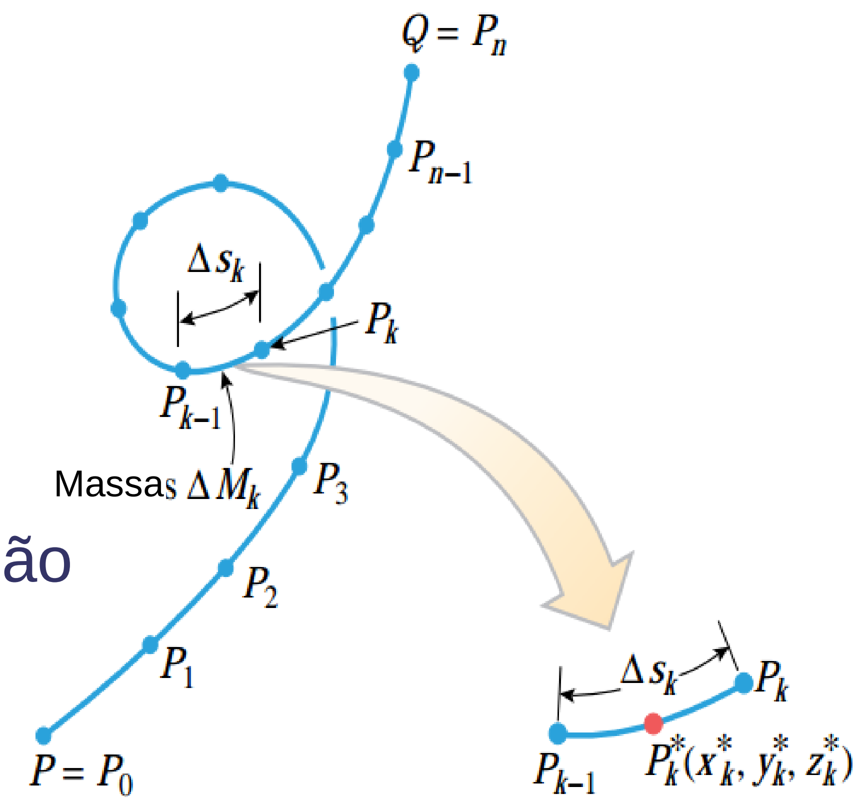
- Integrar ao longo de uma curva
  - Motivação: Problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja função densidade linear seja conhecida
    - Divida C em n seções muito pequenas

$$P = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n = Q$$

    - $P_k^*(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ é um ponto amostral arbitrário na k-ésima seção
    - ΔM_k é a massa da k-ésima seção
    - Δs_k o comprimento de arco entre P_{k-1} e P_k

O que queremos calcular

Se pequeno, o valor de f não varia muito



$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k$$

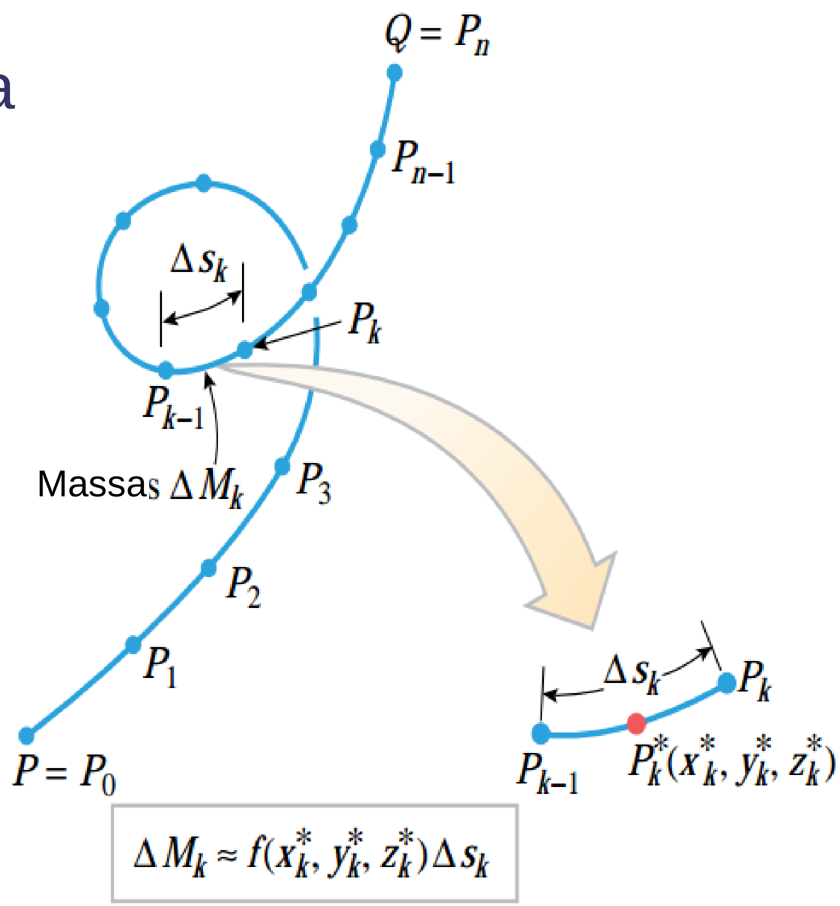
Integrais de linha

- Integrar ao longo de uma curva
  - Motivação: Problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja função densidade linear seja conhecida
    - Aproximando f ao longo de uma seção k pelo valor $f(x_k*, y_k*, z_k*)$
    - Aproximando a massa da k-ésima seção por

$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k$$

    - Aproximando a massa total do arame por

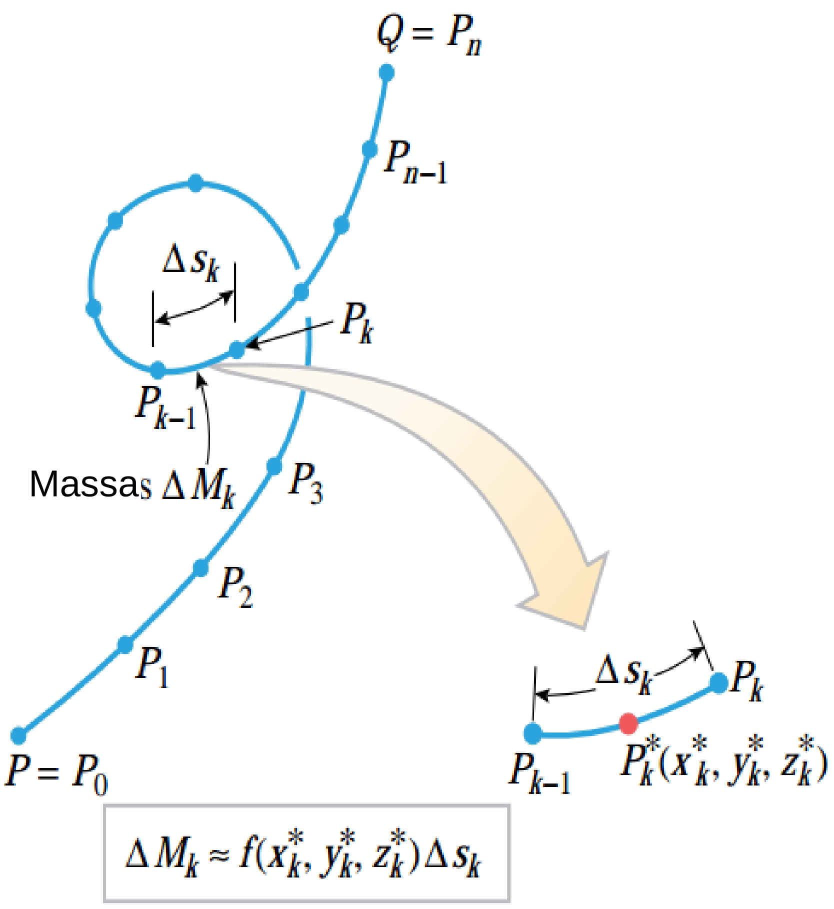
$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k$$



Integrais de linha

- Integrar ao longo de uma curva
  - Motivação: Problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja função densidade linear seja conhecida
    - Erro tendendo a zero

$$M = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k$$



Integrais de linha

- Integrar ao longo de uma curva
  - Definição: Se C for uma curva lisa no espaço bi ou tridimensional, então a **integral de linha de f em relação a s ao longo de C** é

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k \qquad \boxed{\text{bidimensional}}$$

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k \qquad \boxed{\text{tridimensional}}$$

desde que esse limite exista e não dependa da escolha de partição ou da escolha dos pontos amostrais

Integrais de linha

- Integrar ao longo de uma curva
  - Observações:
    - Compartilham as mesmas propriedades de integrais definidas ordinárias

    - A massa M do arame é dada por

      $$M = \int_C f(x, y, z)\, ds$$

      onde f é função densidade linear

    - Se C for uma curva lisa de comprimento de arco L e se f for identicamente 1

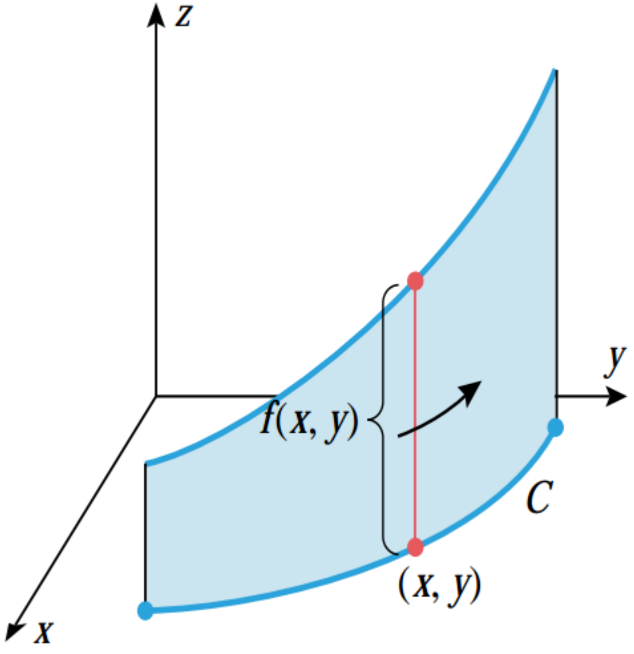
$$\int_C ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} L = L$$

Integrais de linha

- Integrar ao longo de uma curva
  - Observações:
    - Se C for uma curva no plano xy e se f for uma função contínua não negativa definida em C, então

$$\int_C f(x, y)\, ds$$

pode ser interpretada como a área A da “cortina”



Integrais de linha

- Integrar ao longo de uma curva
  - Observações:
    - Se C for uma curva no plano xy e se f for uma função contínua não negativa definida em C, então

$$\int_C f(x, y)\, ds$$

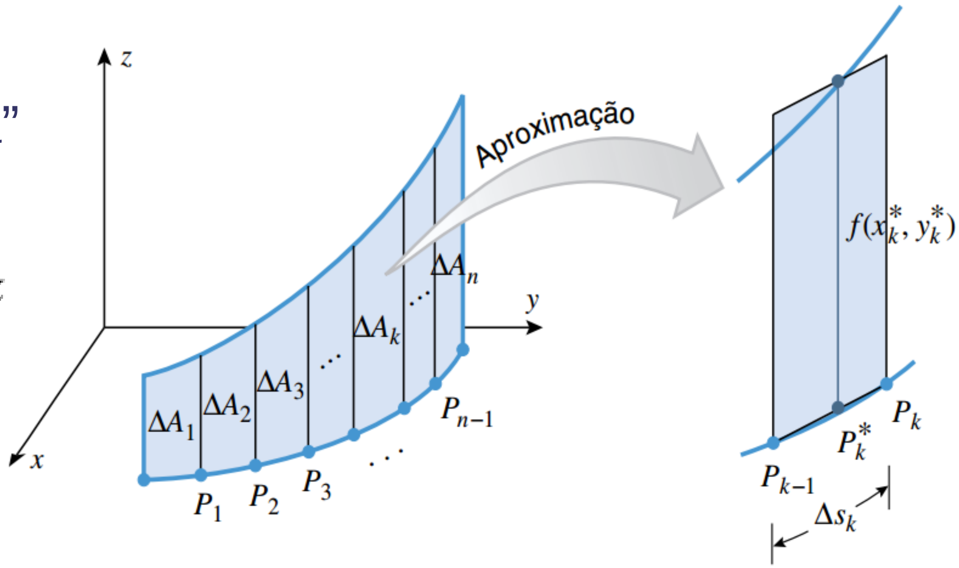
pode ser interpretada como a área A da “cortina”

- Área aproximada da partição

$$\Delta A_k \approx f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$$

- Área aproximada da “cortina”

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$$



Integrais de linha

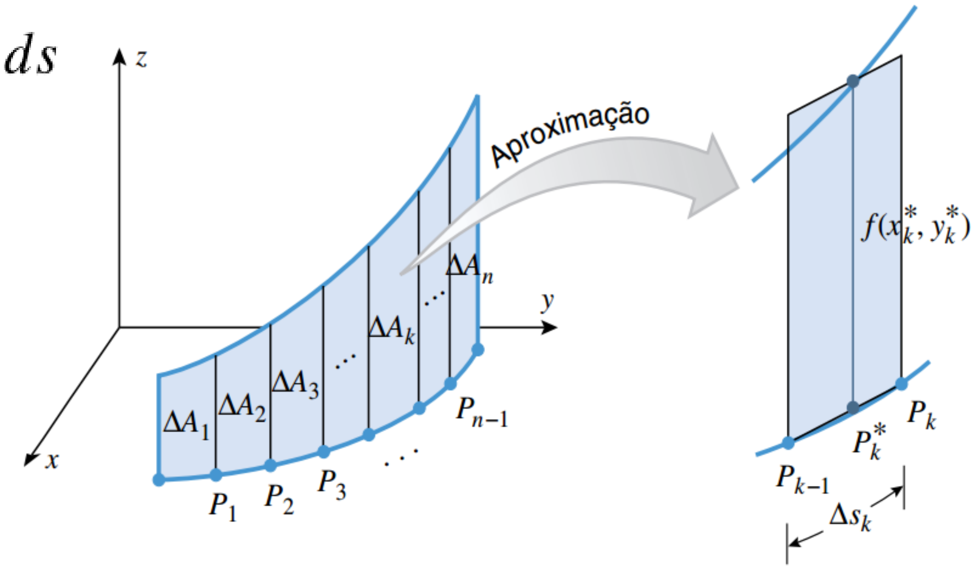
- Integrar ao longo de uma curva
  - Observações:
    - Se C for uma curva no plano xy e se f for uma função contínua não negativa definida em C, então

$$\int_C f(x, y)\, ds$$

pode ser interpretada como a área A da "cortina"

  - Erro tendendo a zero

$$A = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k = \int_C f(x, y)\, ds$$



Resumo

Resumo

- Campos vetoriais
  - Definição: F: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$
  - Campos de quadrado inverso
  - Campos gradientes
    - O gradiente de uma função é um campo vetorial $\mathbf{F} = \nabla\phi$
    - Campos conservativos (**F**) e funções potenciais (φ)
  - Divergente e rotacional
  - Operadores ∇ e ∇^2
- Integrais de linha

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

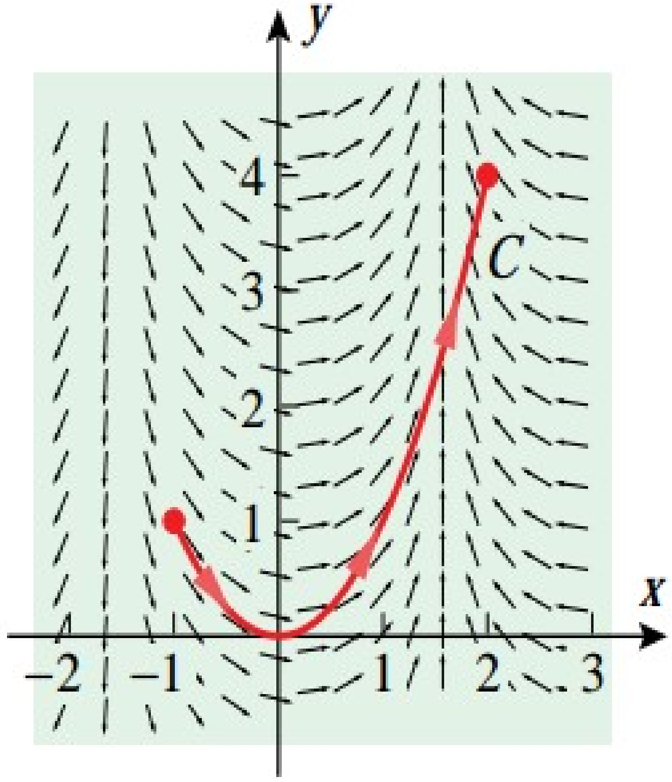
$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 15.1
    - Exercícios de compreensão 15.1
    - 1-2
    - 5-10
    - 17-22

Resumo

- Próxima aula:
  - Calculo de integrais de linha
  - Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Trabalho como integral de linha



Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 15.1 e 15.2