

---

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

# Índice

---

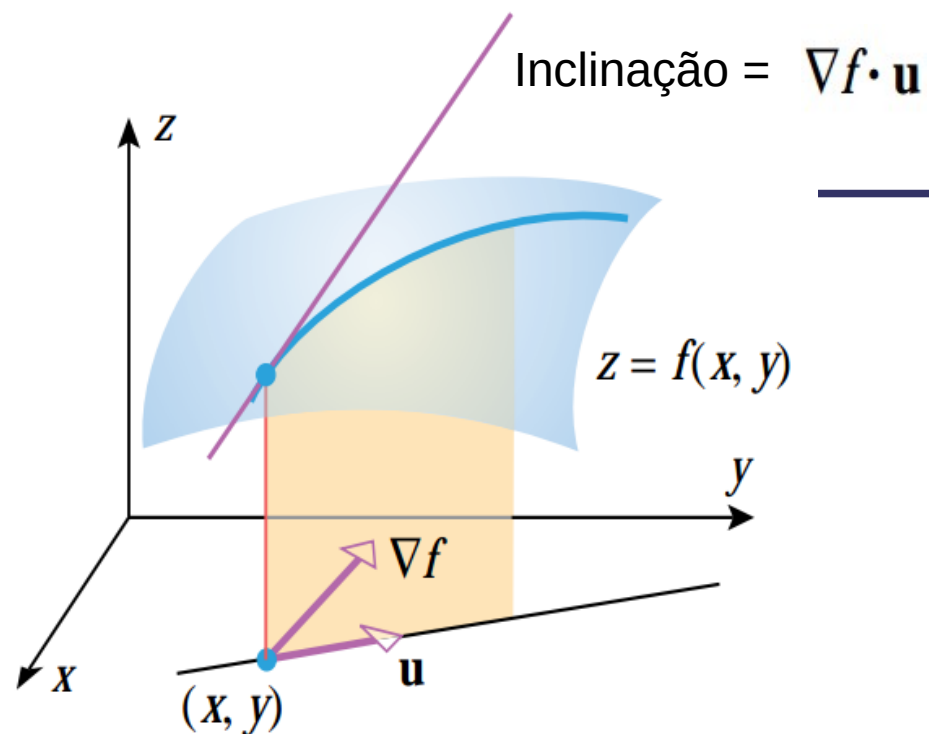
- Revisão
- Máximos e mínimos
- Resumo
- Bibliografia

---

# Revisão

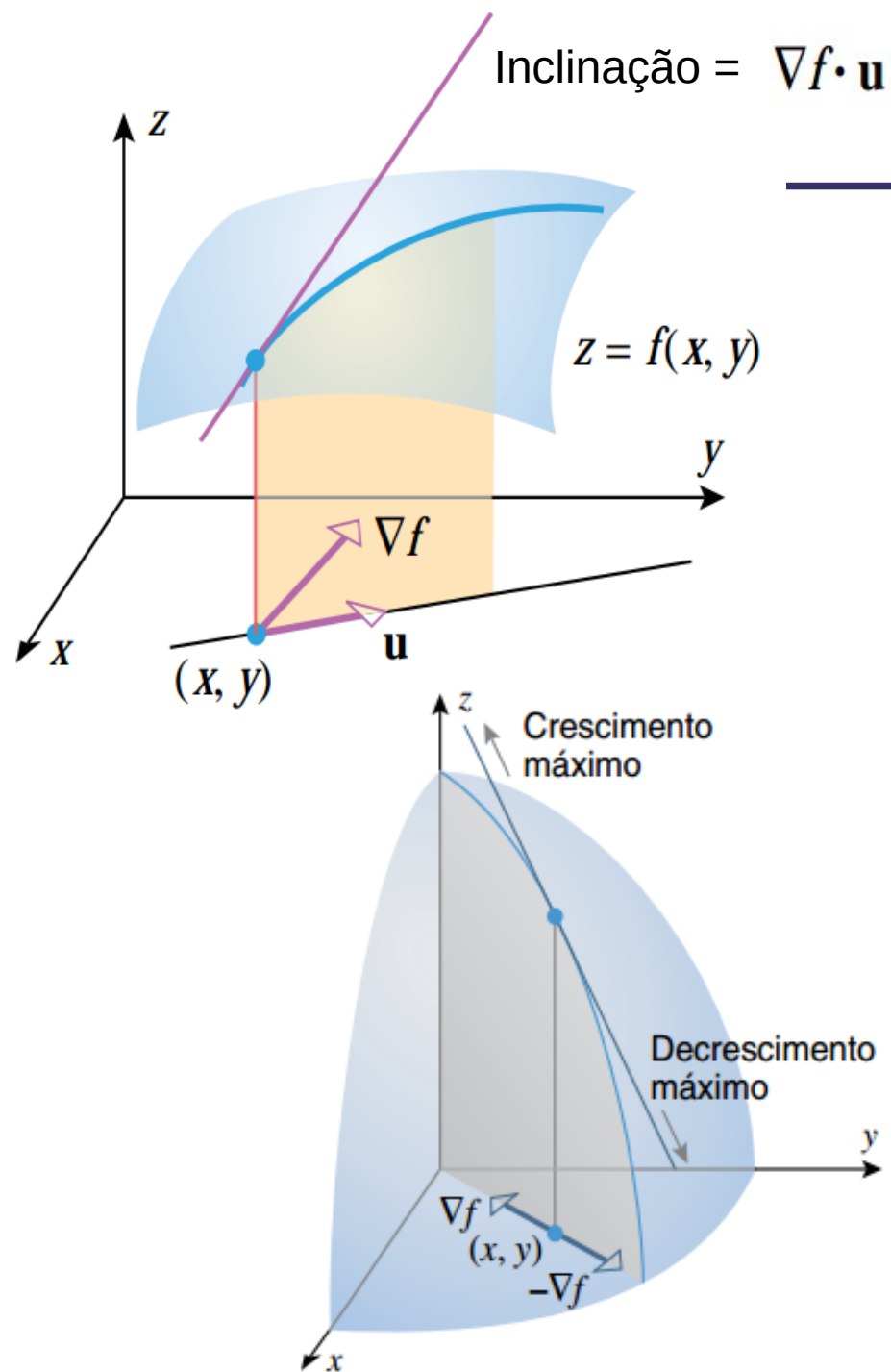
# Revisão

- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção



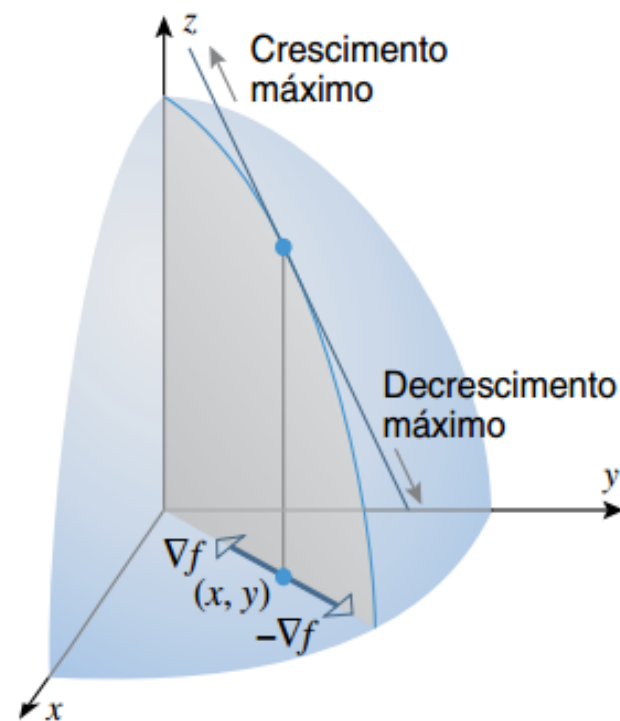
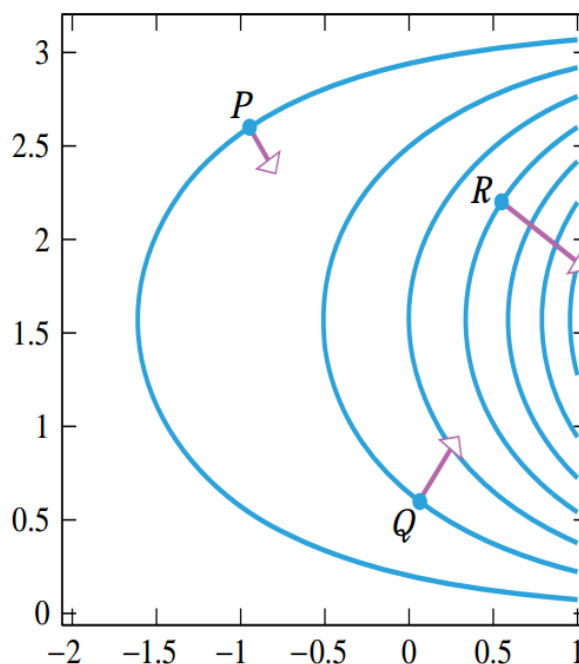
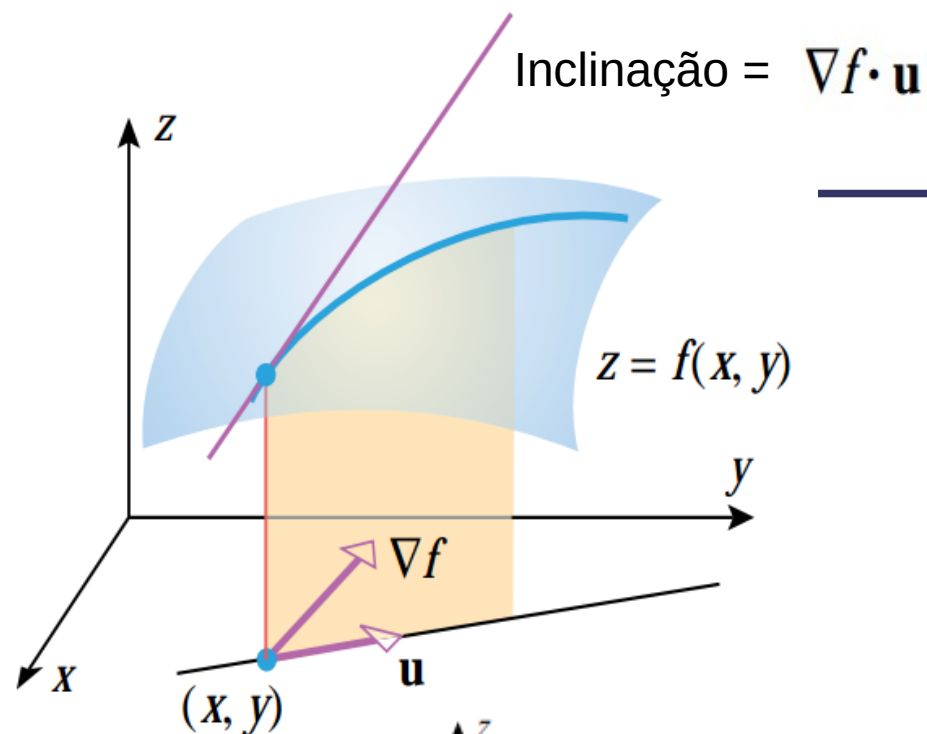
# Revisão

- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção
- Gradiente
  - Inclinação máxima



# Revisão

- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção
- Gradiente
  - Inclinação máxima
  - É o vetor normal às curva de nível



---

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

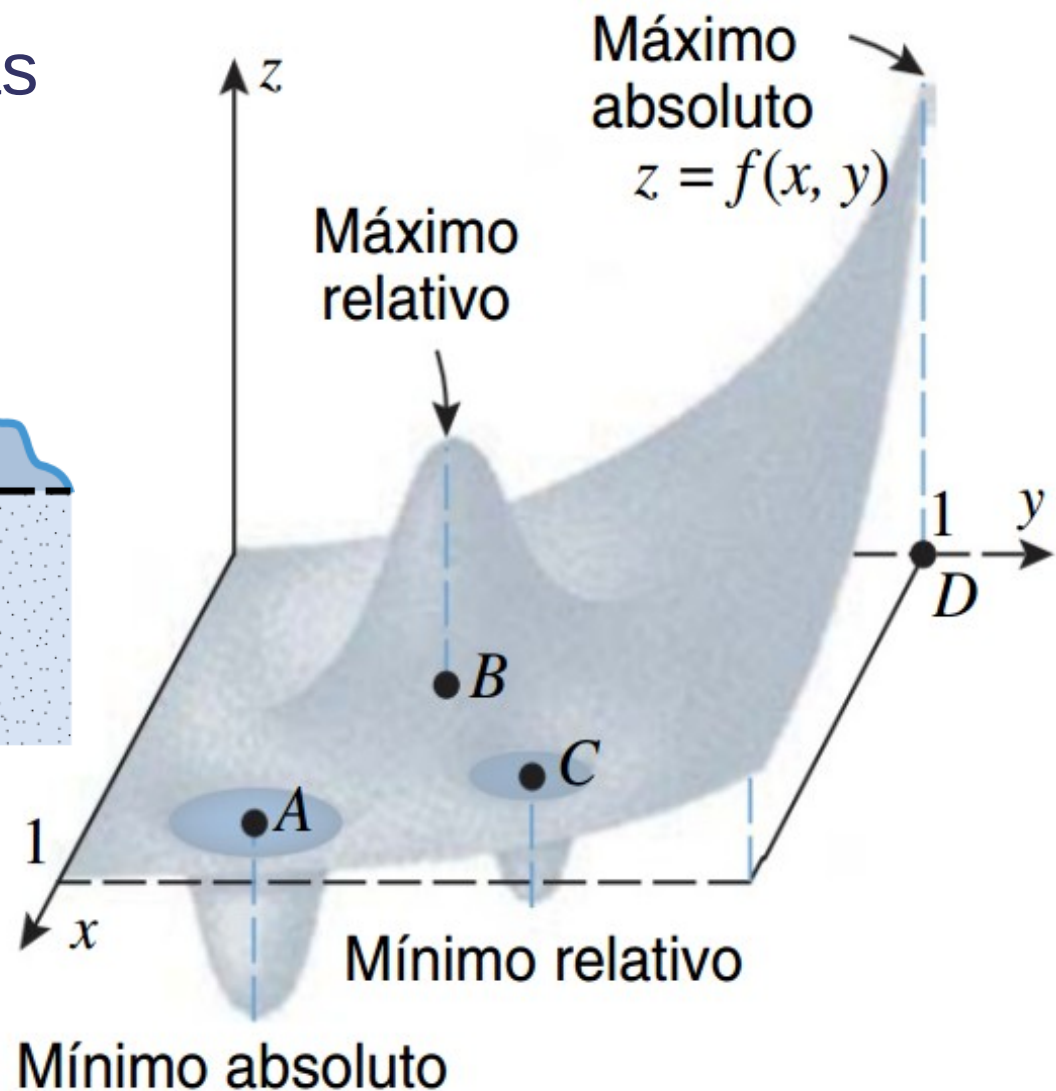
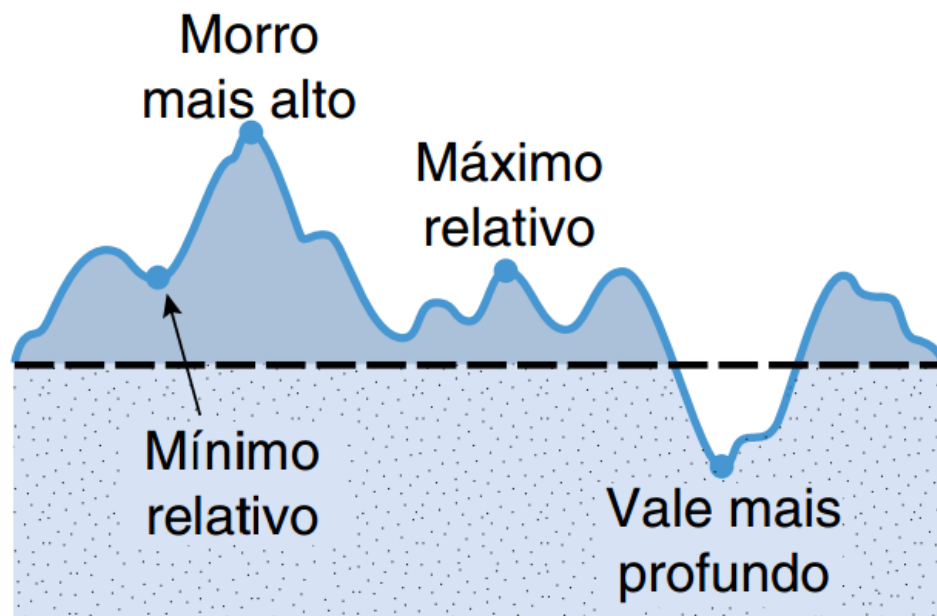
- Motivação
  - Cadeia de montanhas





# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Motivação
  - Cadeia de montanhas



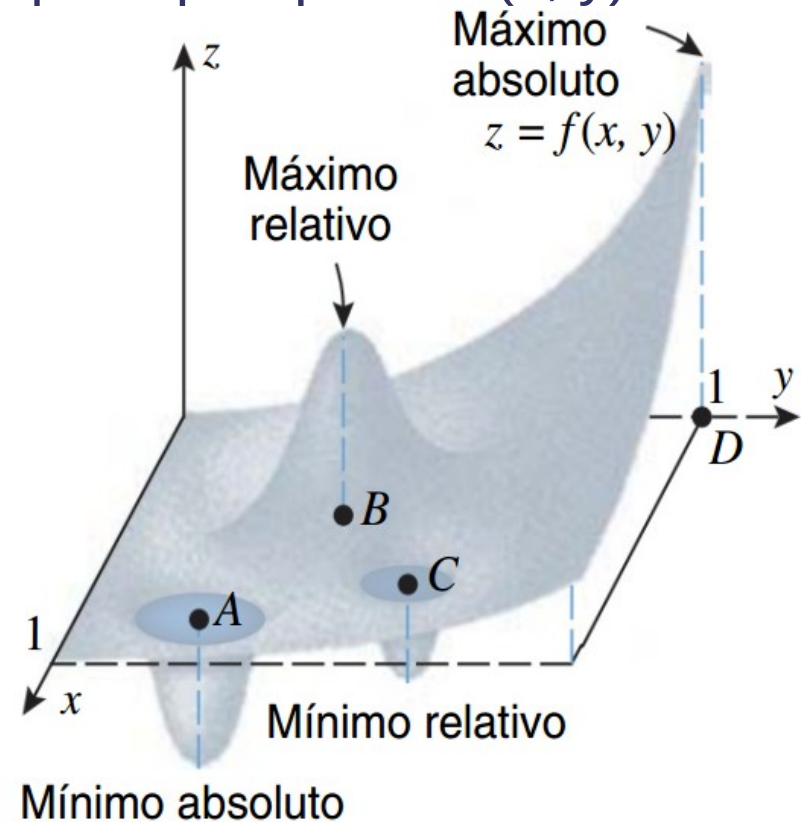
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Definições: Máximos e mínimos

- Uma função  $f$  de duas variáveis tem em um ponto  $(x_0, y_0)$ ...

- um **máximo relativo** se houver um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$  tal que  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  dentro do círculo
    - um **máximo absoluto** se  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$

Não se especifica o raio



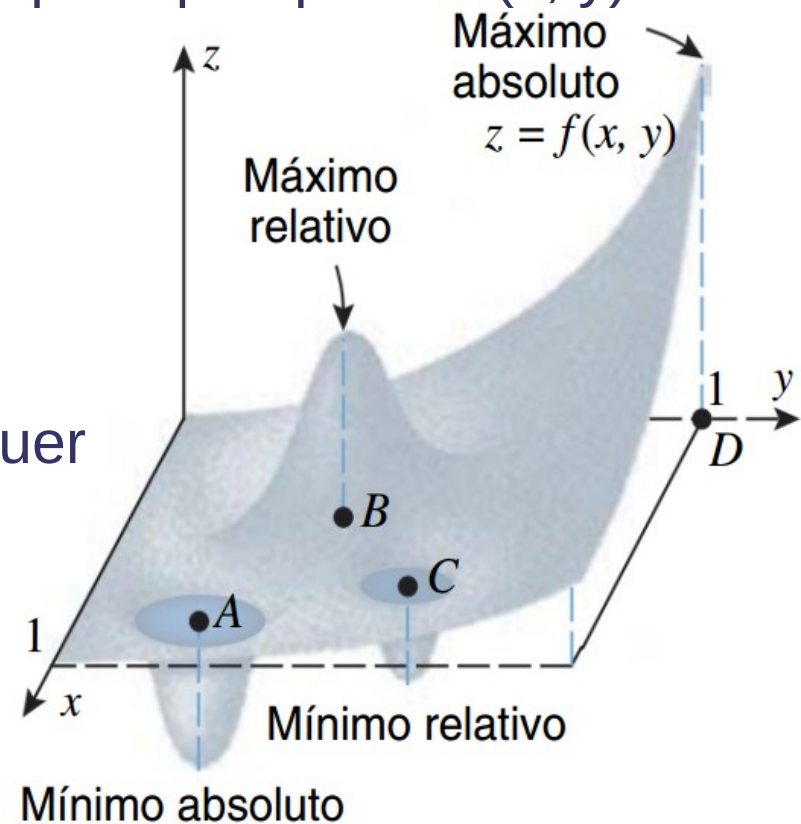
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Definições: Máximos e mínimos

- Uma função  $f$  de duas variáveis tem em um ponto  $(x_0, y_0)$ ...

- um **máximo relativo** se houver um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$  tal que  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  dentro do círculo
    - um **máximo absoluto** se  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$
    - um **mínimo relativo** se houver um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$  tal que  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  dentro do círculo
    - um **mínimo absoluto** se  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$

Não se especifica o raio



# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Definições: Máximos e mínimos

- Uma função  $f$  de duas variáveis tem em um ponto  $(x_0, y_0)$ ...

Não se especifica o raio

Extremo relativo

- um **máximo relativo** se houver um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$  tal que  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  dentro do círculo

Extremo absoluto

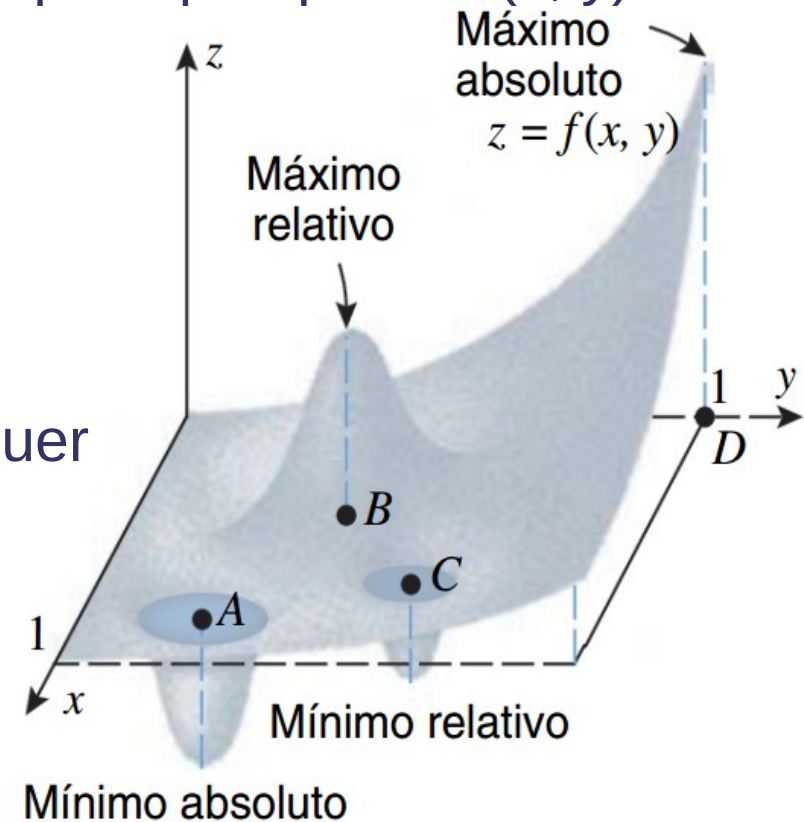
- um **máximo absoluto** se  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$

Extremo relativo

- um **mínimo relativo** se houver um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$  tal que  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  dentro do círculo

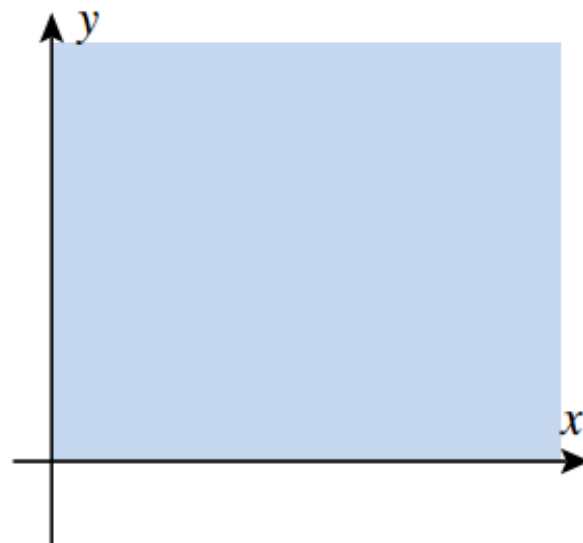
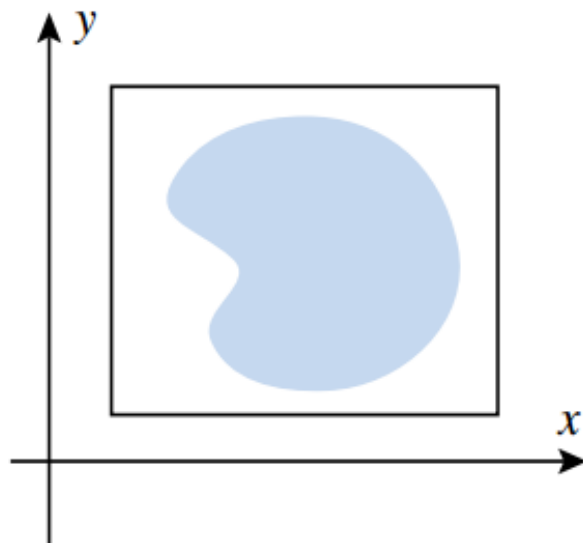
Extremo absoluto

- um **mínimo absoluto** se  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  em quaisquer pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$



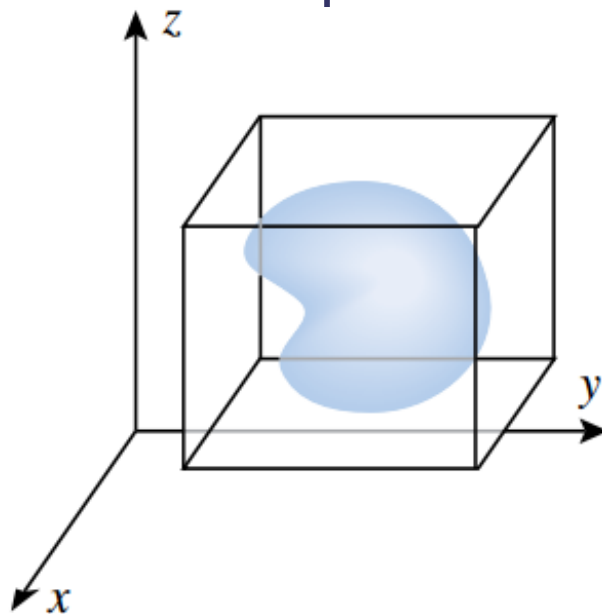
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Conjuntos limitados
  - Para funções de uma variável
    - Distinção entre domínio finito e infinito na reta  $x$
  - Para funções de duas variáveis
    - **Limitado**: o conjunto inteiro couber dentro de algum retângulo
    - **Ilimitado**: não há retângulo que contenha todos os pontos do conjunto



# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Conjuntos limitados
  - Para funções de uma variável
    - Distinção entre domínio finito e infinito na reta  $x$
  - Para funções de três variáveis
    - **Limitado**: o conjunto inteiro couber dentro de alguma caixa
    - **Ilimitado**: não há caixa que contenha todos os pontos do conjunto



# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

---

- Definição: Teorema do valor extremo
  - Se  $f(x, y)$  for **contínua** em um **conjunto fechado e limitado**  $R$ , então  $f$  terá máximo e mínimo absolutos em  $R$

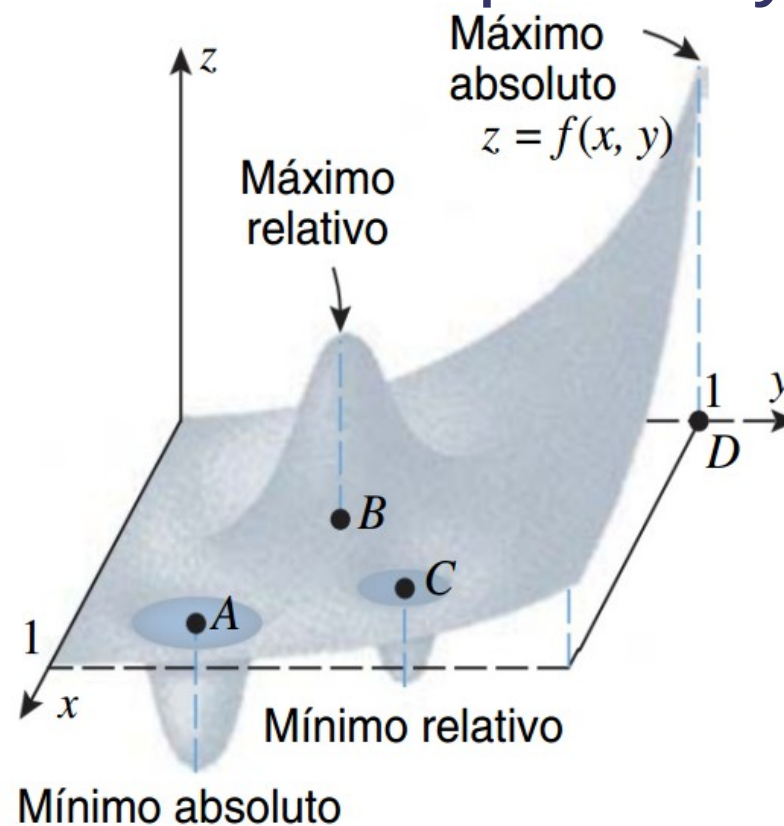


# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: A região quadrada  $R$  cujos pontos satisfazem as desigualdades

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

é um conjunto fechado e limitado no plano  $xy$





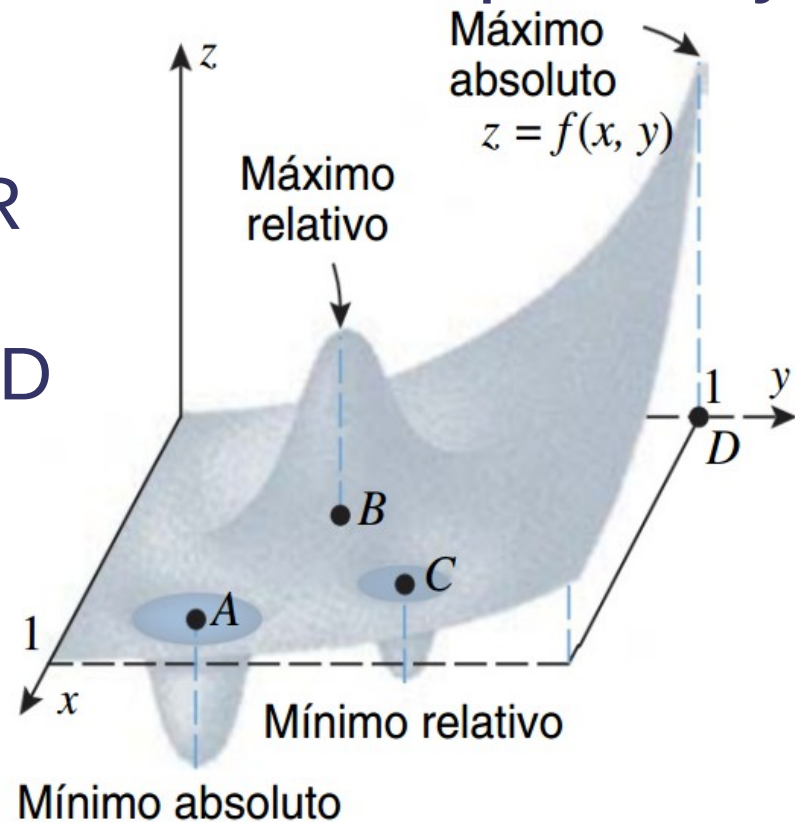
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: A região quadrada  $R$  cujos pontos satisfazem as desigualdades

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

é um conjunto fechado e limitado no plano  $xy$

- O teorema anterior garante a existência de extremos absolutos em  $R$
- Ocorrem nos pontos  $A$  e  $D$



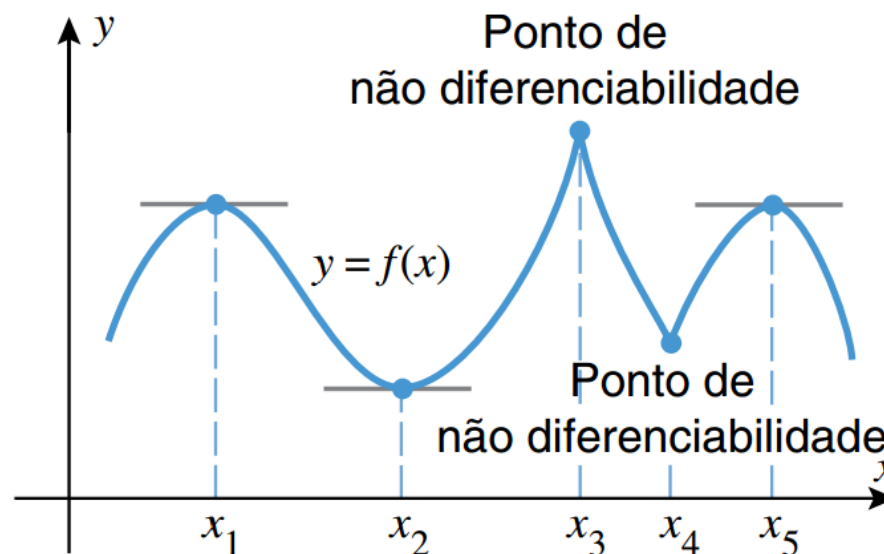
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

---

- Observações:
  - Uma função **descontínua** em um conjunto fechado e limitado **não precisa ter extremos absolutos**
  - Uma função contínua em um conjunto que **não é fechado** ou que **não é limitado** tampouco precisa ter algum extremo absoluto

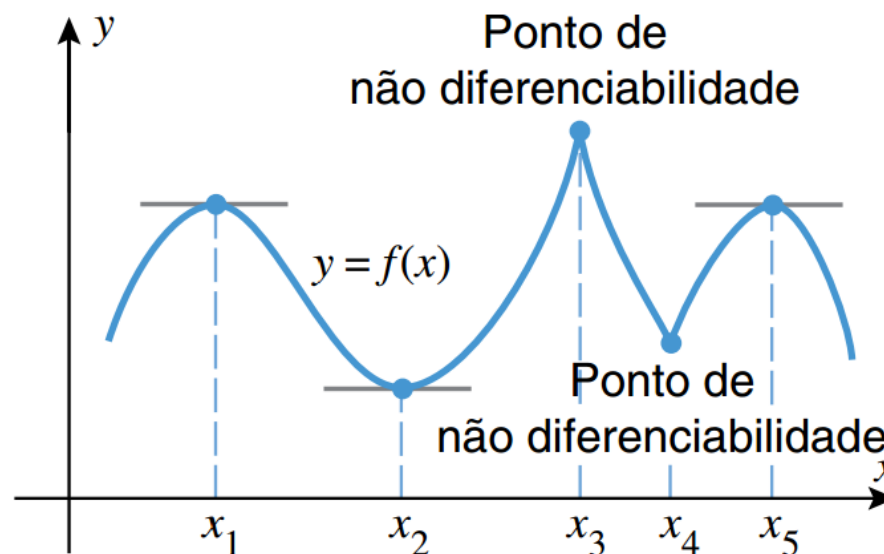
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Função de uma variável
    - Se uma função  $g$  tiver um extremo relativo em um ponto  $x_0$  onde  $g$  é diferenciável, então  $g'(x_0) = 0$



# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Função de uma variável
    - Se uma função  $g$  tiver um extremo relativo em um ponto  $x_0$  onde  $g$  é diferenciável, então  $g'(x_0) = 0$



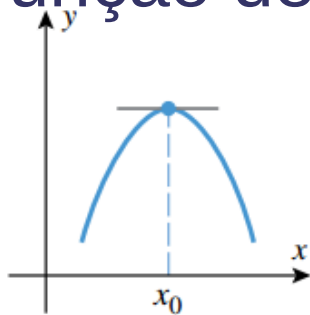
Vai ser  
análogo para  
duas variáveis

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

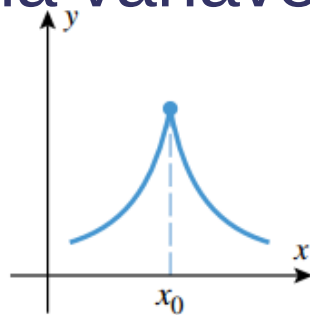
- Encontrando extremos relativos
  - Função de uma variável

Ponto estacionário é o que tem derivada zero

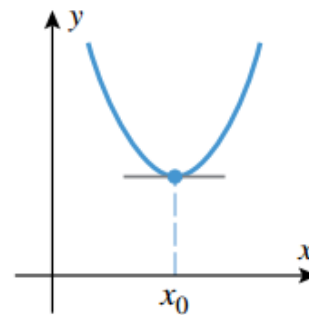
O sinal da derivada segunda indica mínimo ou máximo



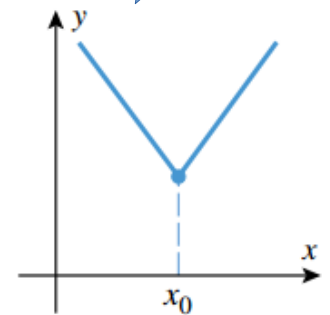
Ponto crítico  
Ponto estacionário  
Máximo relativo



Ponto crítico  
Ponto não estacionário  
Máximo relativo

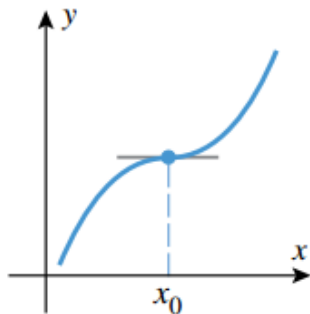


Ponto crítico  
Ponto estacionário  
Mínimo relativo

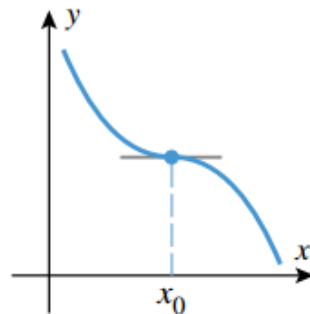


Ponto crítico  
Ponto não estacionário  
Mínimo relativo

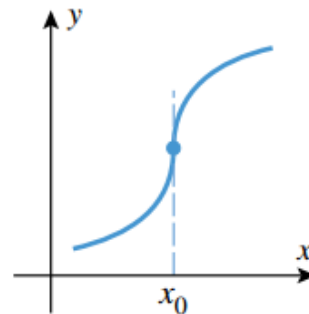
O sinal da derivada não muda em pontos de inflexão



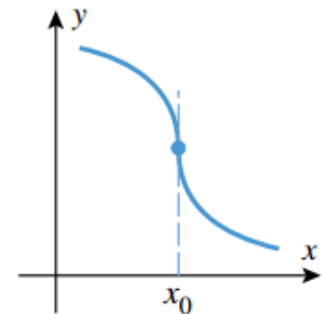
Ponto crítico  
Ponto estacionário  
Ponto de inflexão  
Não um extremo relativo



Ponto crítico  
Ponto estacionário  
Ponto de inflexão  
Não um extremo relativo



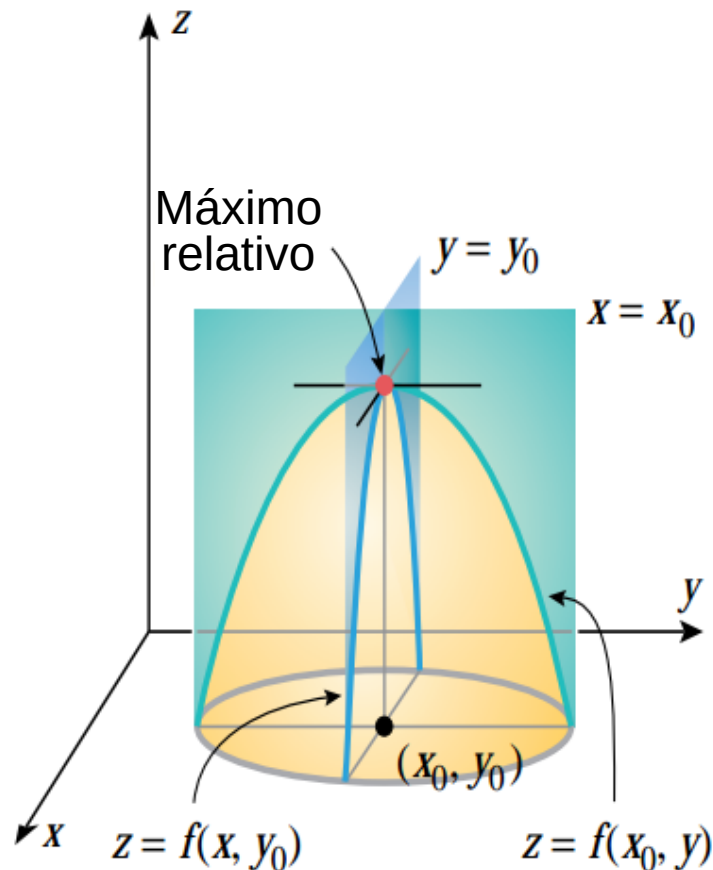
Ponto crítico  
Ponto não estacionário  
Ponto de inflexão  
Não um extremo relativo



Ponto crítico  
Ponto não estacionário  
Ponto de inflexão  
Não um extremo relativo

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Teorema: Se  $f$  tiver um extremo relativo em um ponto  $(x_0, y_0)$  e se as derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  existirem nesse ponto, então



$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

---

- Encontrando extremos relativos
  - Definição: Um ponto  $(x_0, y_0)$  no domínio de uma função  $f(x, y)$  é denominado **ponto crítico** da função se
    - $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ ; ou
    - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em  $(x_0, y_0)$

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Definição: Um ponto  $(x_0, y_0)$  no domínio de uma função  $f(x, y)$  é denominado **ponto crítico** da função se
    - $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ ; ou
    - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em  $(x_0, y_0)$

os extremos relativos  
ocorrem nos pontos críticos

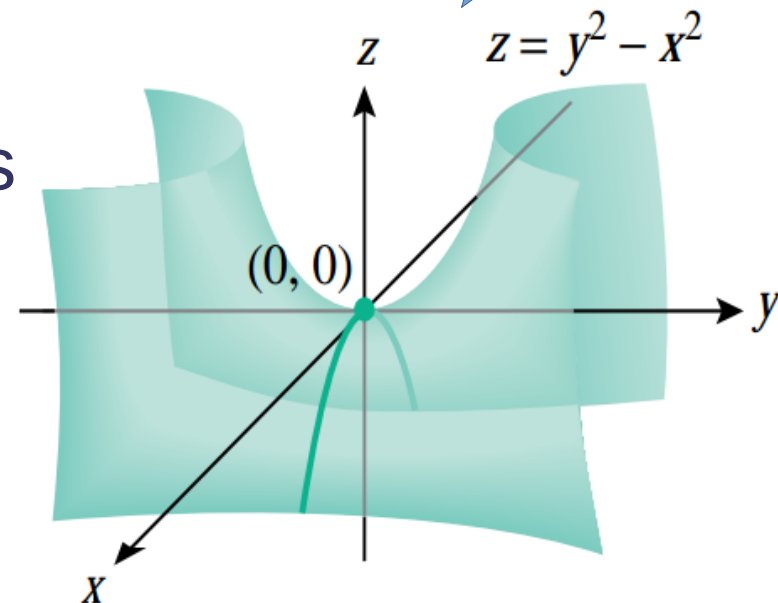


# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Definição: Um ponto  $(x_0, y_0)$  no domínio de uma função  $f(x, y)$  é denominado **ponto crítico** da função se
    - $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ ; ou
    - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em  $(x_0, y_0)$
  - Pontos de mínimo e máximo não precisam ocorrer em todos os pontos críticos
    - Pontos de sela

Mínimo relativo em um plano e máximo em outro

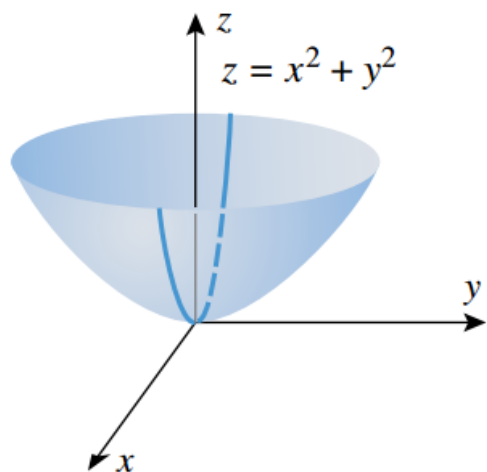
A função  $f(x, y) = y^2 - x^2$  não tem máximo nem mínimo relativo no ponto crítico  $(0, 0)$ .



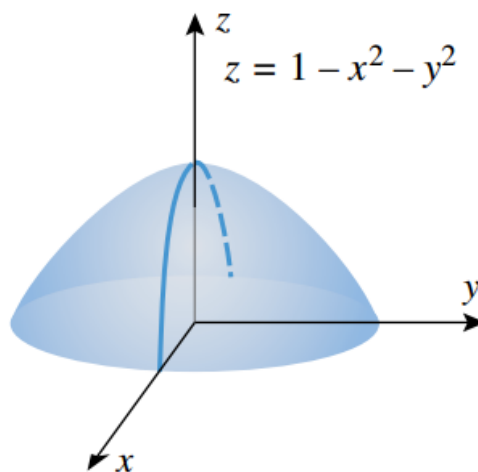
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Exemplo: Pontos críticos no (0,0)

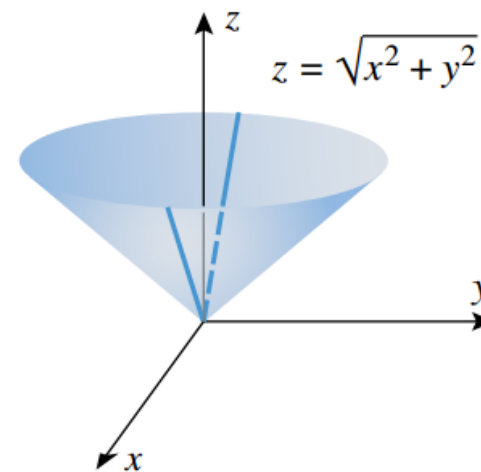
verificado  
algebricamente  
e visto  
geometricamente



$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$   
mín relativo e absoluto em (0, 0)



$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$   
máx relativo e absoluto em (0, 0)

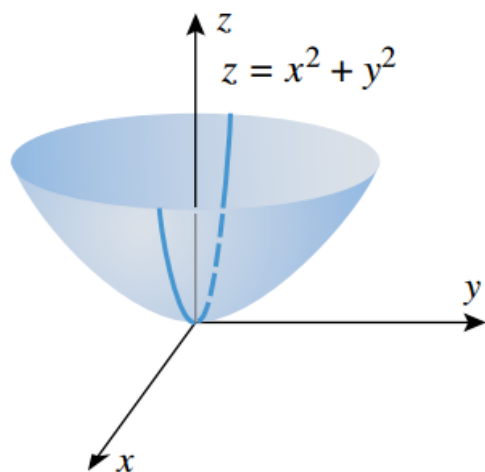


$f_x(0, 0)$  and  $f_y(0, 0)$  não existem  
mín relativo e absoluto em (0, 0)

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

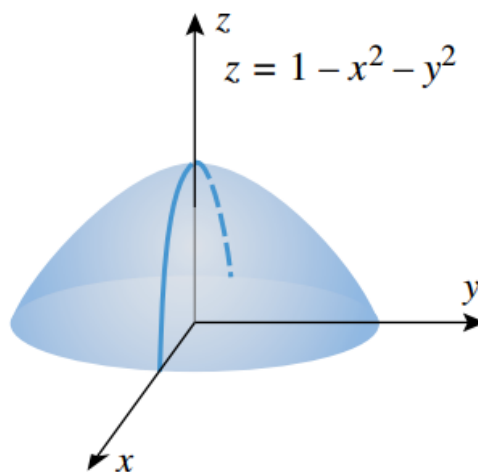
- Encontrando extremos relativos
  - Exemplo: Pontos críticos no  $(0,0)$

Mínimo relativo e absoluto



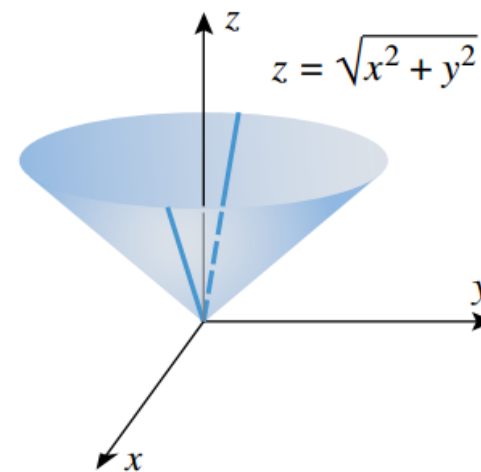
$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$   
mín relativo e absoluto em  $(0, 0)$

Máximo relativo e absoluto



$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$   
máx relativo e absoluto em  $(0, 0)$

Mínimo relativo e absoluto



$f_x(0, 0)$  and  $f_y(0, 0)$  não existem  
mín relativo e absoluto em  $(0, 0)$

A função é contínua, porém não tem derivadas parciais na origem

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Vem da matriz Hessiana

- Teorema: Teste da derivada segunda
  - Seja  $f$  uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em algum círculo centrado em um ponto crítico  $(x_0, y_0)$  e seja

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

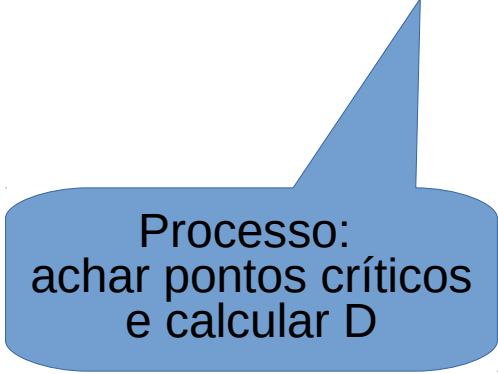
- Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , então  $f$  terá um mínimo relativo em  $(x_0, y_0)$ .
- Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , então  $f$  terá um máximo relativo em  $(x_0, y_0)$ .
- Se  $D < 0$ , então  $f$  terá um ponto de sela em  $(x_0, y_0)$ .
- Se  $D = 0$ , então nenhuma conclusão pode ser tirada.

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

---

- Exemplo: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$



Processo:  
achar pontos críticos  
e calcular D

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

- Pontos críticos

- Derivadas parciais

$$f_x(x, y) = 6x - 2y \quad f_y(x, y) = -2x + 2y - 8$$

- Cálculo do ponto crítico

$$6x - 2y = 0$$

$$-2x + 2y - 8 = 0$$

(2, 6) é o único ponto crítico

- Cálculo de D

- Derivadas parciais de segunda ordem

$$f_{xx}(x, y) = 6, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$

- Análise

$$f_{xx}(2, 6) = 6 > 0$$

Mínimo relativo

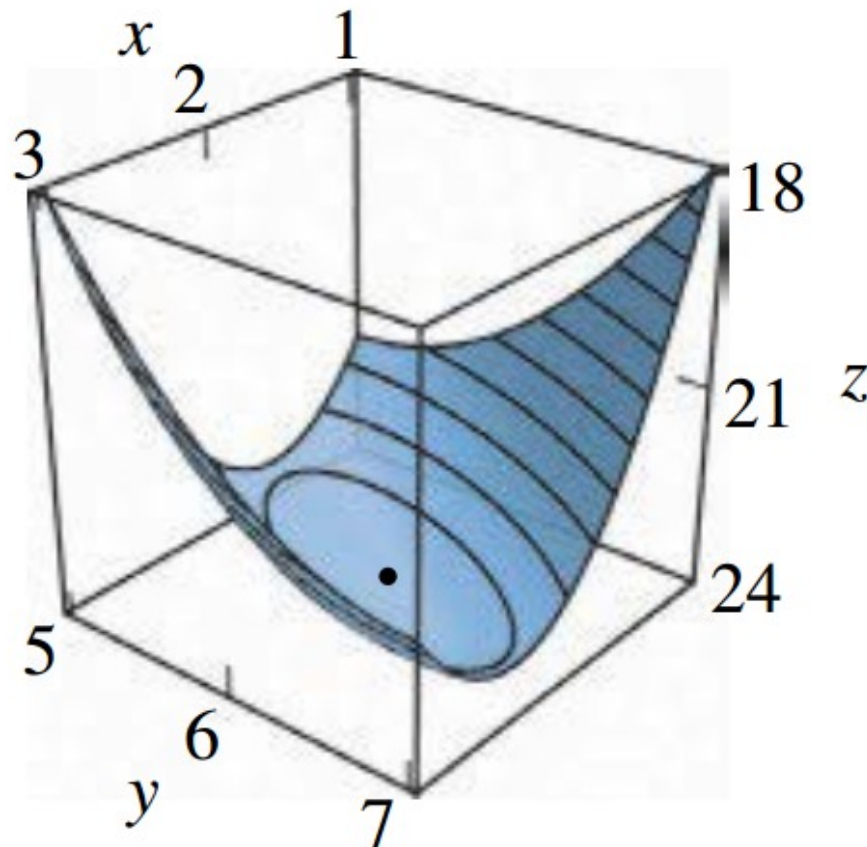
$$D = f_{xx}(2, 6)f_{yy}(2, 6) - f_{xy}^2(2, 6) = (6)(2) - (-2)^2 = 8 > 0$$

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

– Gráfico

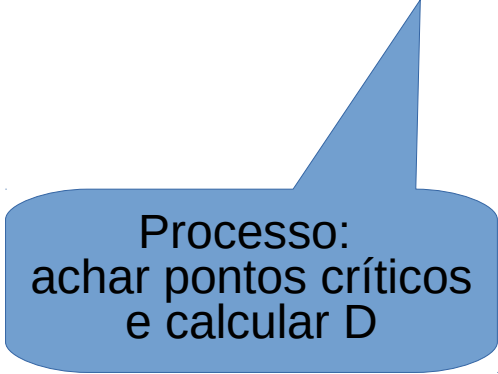


Mínimo relativo  
no ponto (2,6)

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$



Processo:  
achar pontos críticos  
e calcular D



# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

- Pontos críticos

- Derivadas parciais  $\begin{cases} f_x(x, y) = 4y - 4x^3 \\ f_y(x, y) = 4x - 4y^3 \end{cases}$

- Cálculo do ponto crítico

$$\begin{array}{l} 4y - 4x^3 = 0 \\ 4x - 4y^3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y = x^3 \\ x = y^3 \end{array}$$

- Cálculo de D

- Derivadas parciais de segunda ordem

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2, \quad f_{yy}(x, y) = -12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

– Análise

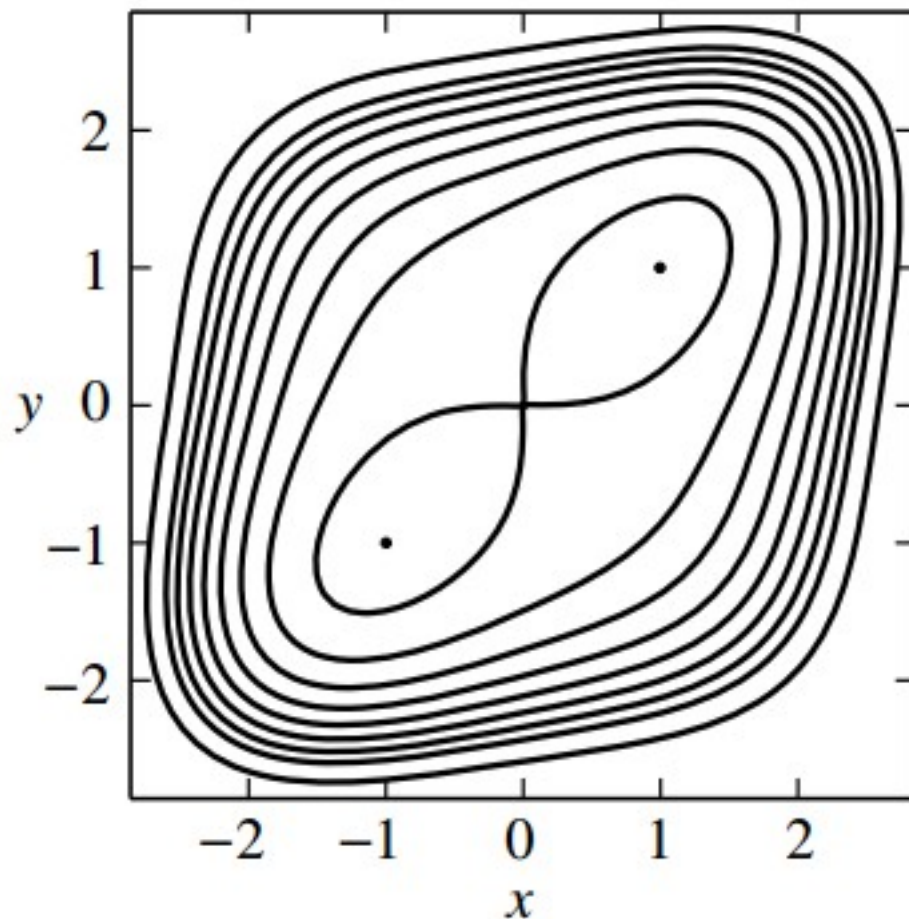
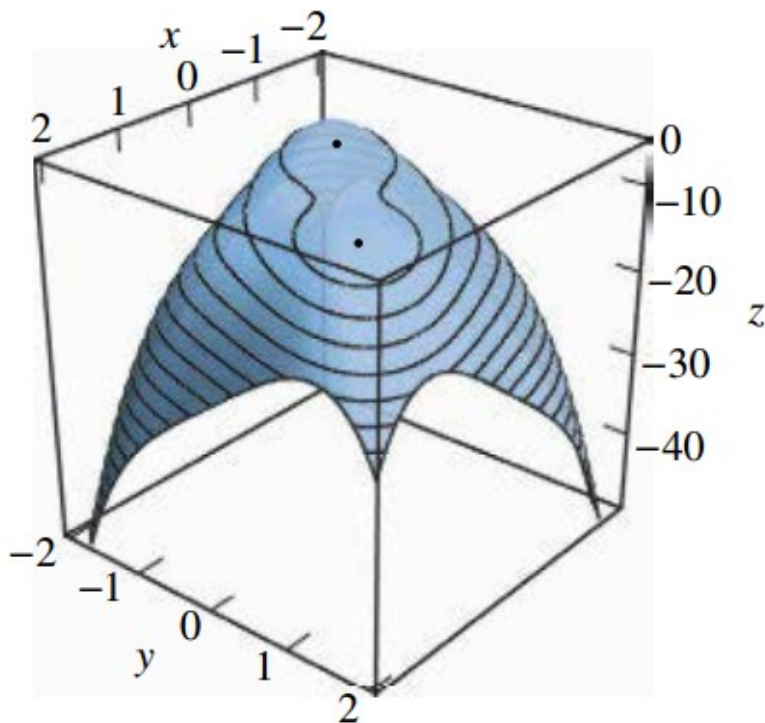
	PONTO CRÍTICO ( $x_0, y_0$ )	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$
Ponto de sela	(0, 0)	0	0	4	-16
Máximos relativos	(1, 1)	-12	-12	4	128
	(-1, -1)	-12	-12	4	128

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

– Análise



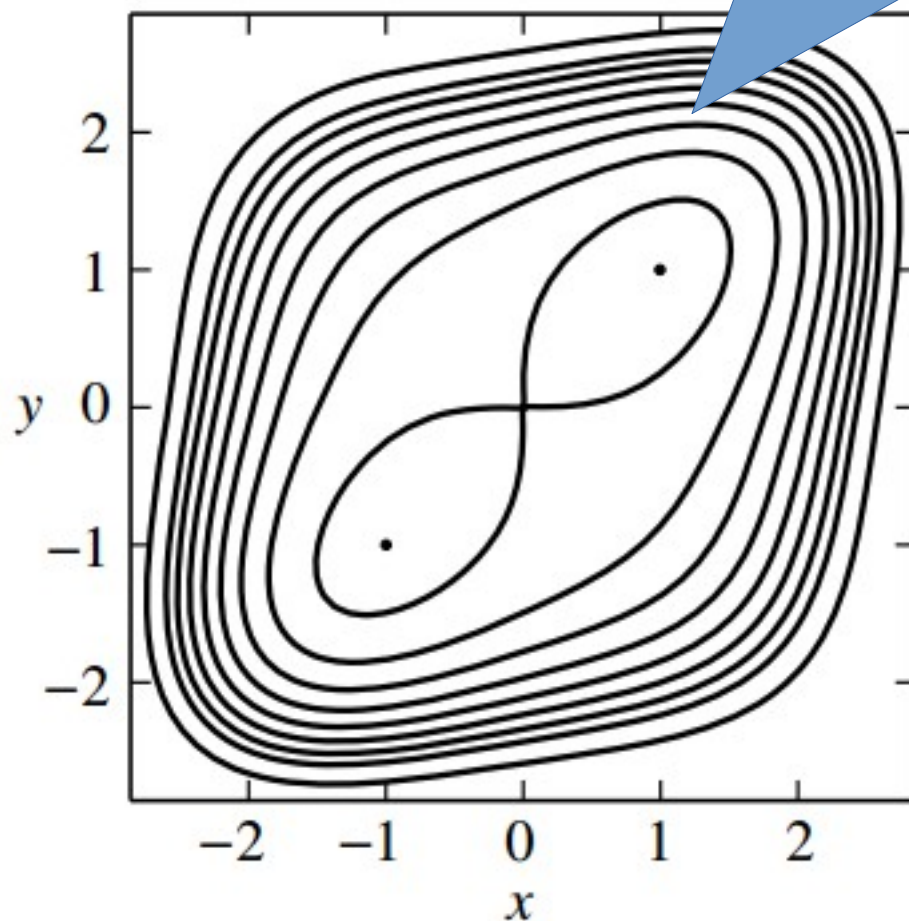
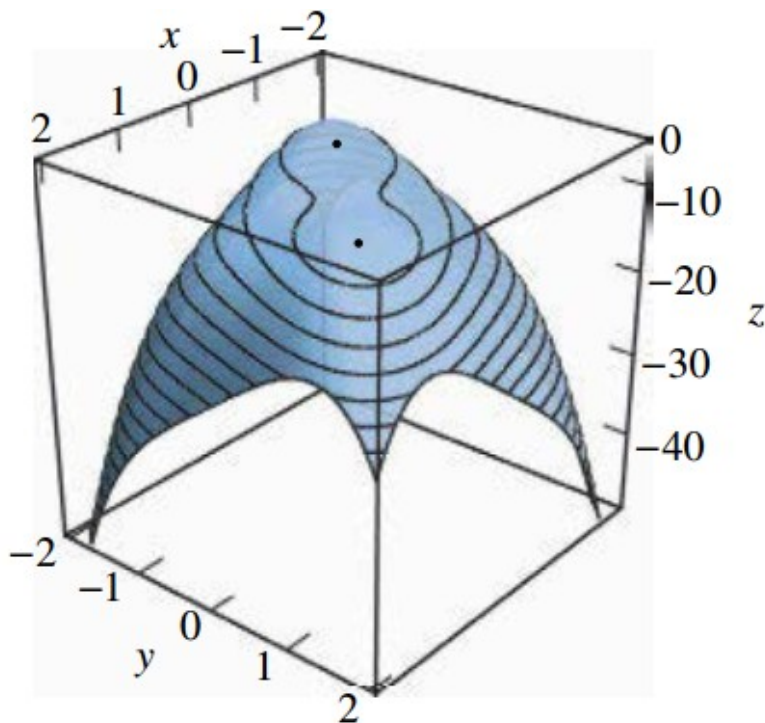
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

O padrão “número oito” é típico de um mapa de contornos em um ponto de sela

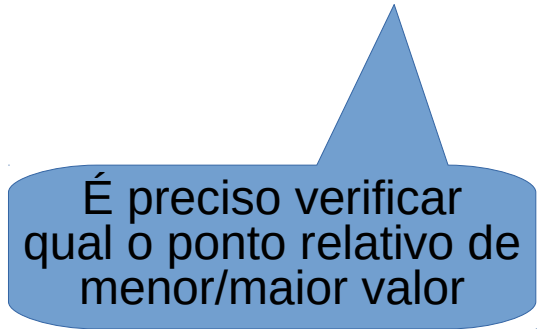
– Análise



# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

---

- Teorema: Se uma função  $f$  de duas variáveis tiver um extremo absoluto em um ponto interior de seu domínio, então esse extremo ocorrerá em um ponto crítico



É preciso verificar qual o ponto relativo de menor/maior valor

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

Podem ocorrer ou na fronteira de  $R$  ou no interior de  $R$

Se for no interior, é em um ponto crítico

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

---

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

## **Passo 1:**

Encontre os **pontos críticos** de  $f$  que estão situados no **interior** de  $R$ .

## **Passo 2:**

Encontre todos os **pontos de fronteira** nos quais os extremos podem ocorrer.

## **Passo 3:**

**Calcule  $f(x, y)$**  nos pontos obtidos nos passos precedentes.

O maior desses valores é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada R de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  e  $(0, 5)$

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

Pontos críticos

análise

Pontos de fronteira



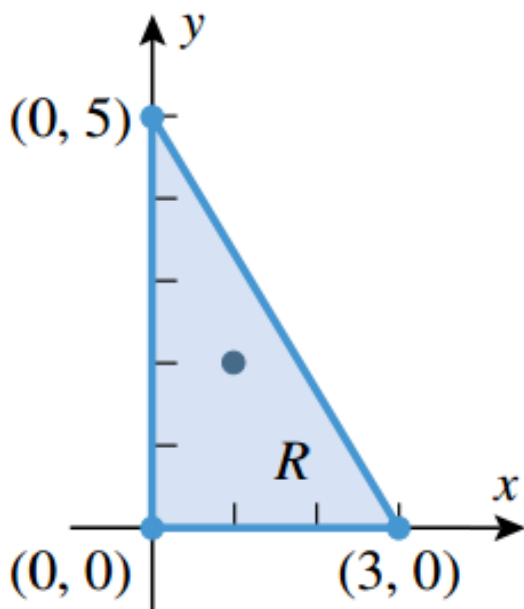
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

- Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada  $R$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  e  $(0, 5)$

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

- Pontos críticos



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 6$$

$$3y - 6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3$$

$$3x - 3 = 0$$

$(1, 2)$  é o único ponto crítico

Está no interior de  $R$

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

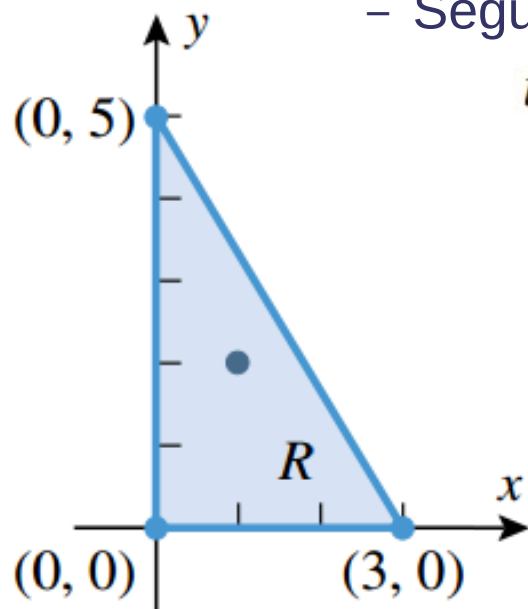
- Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada  $R$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  e  $(0, 5)$

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

- Pontos de fronteira

- Seguimento de reta entre  $(0, 0)$  e  $(3, 0)$

$$u(x) = f(x, 0) = -6x + 7, \quad 0 \leq x \leq 3$$



Não tem ponto crítico, assim os valores extremos ocorrem nos extremos de  $u$ :  $(0, 0)$  e  $(3, 0)$

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

- Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada  $R$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  e  $(0, 5)$

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

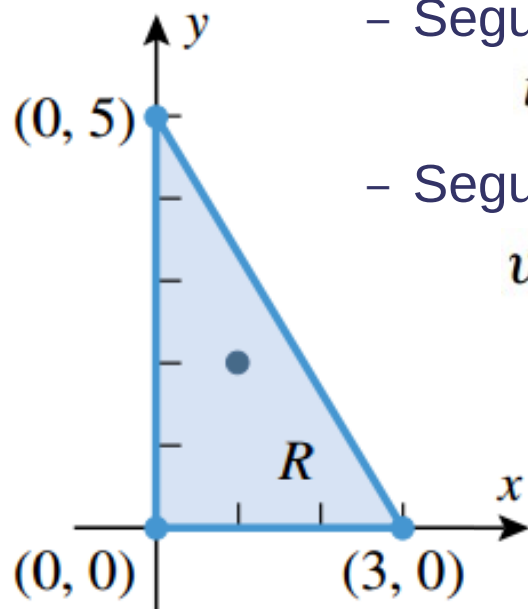
- Pontos de fronteira

- Seguimento de reta entre  $(0, 0)$  e  $(3, 0)$

$$u(x) = f(x, 0) = -6x + 7, \quad 0 \leq x \leq 3$$

- Seguimento de reta entre  $(0, 0)$  e  $(0, 5)$

$$v(y) = f(0, y) = -3y + 7, \quad 0 \leq y \leq 5$$



Não tem ponto crítico, assim os valores extremos ocorrem nos extremos de  $u$ :  $(0, 0)$  e  $(3, 0)$

Pontos de extremo  $(0, 0)$  e  $(0, 5)$

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

- Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada  $R$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  e  $(0, 5)$

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

- Pontos de fronteira

- Seguimento de reta entre  $(0, 5)$  e  $(3, 0)$

$$y = -\frac{5}{3}x + 5, \quad 0 \leq x \leq 3$$

- Substituindo em  $f$

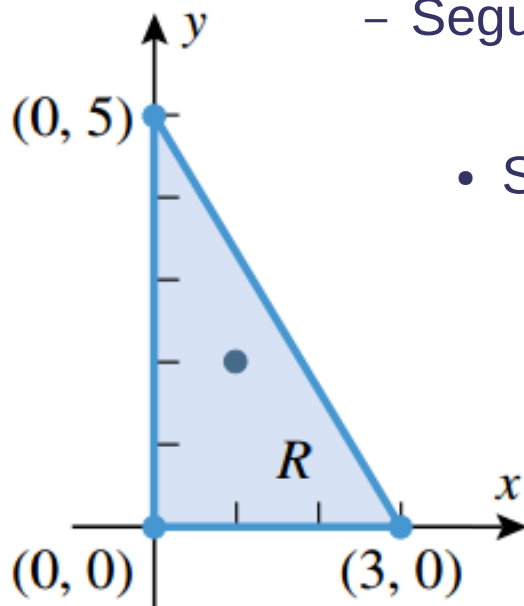
$$w(x) = f\left(x, -\frac{5}{3}x + 5\right)$$

$$= 3x\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) - 6x - 3\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) + 7$$

$$= -5x^2 + 14x - 8, \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$w'(x) = -10x + 14$$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$



Ponto crítico  $(7/5, 8/3)$ ,  
pontos de extremo  $(0, 5)$  e  $(3, 0)$

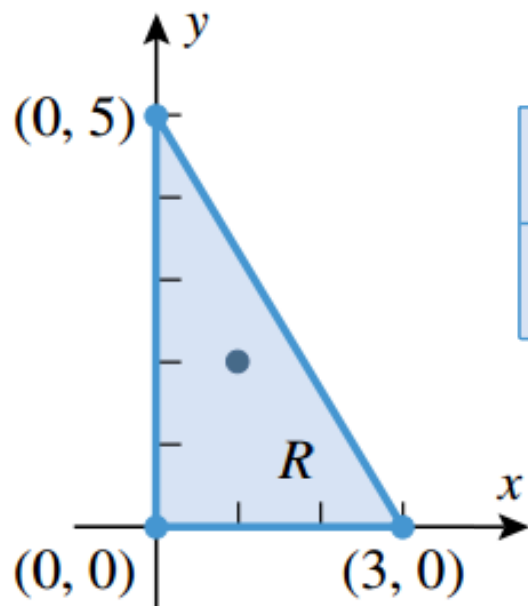
# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

- Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada  $R$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  e  $(0, 5)$

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

- Análise



$(x, y)$	$(0, 0)$	$(3, 0)$	$(0, 5)$	$(\frac{7}{5}, \frac{8}{3})$	$(1, 2)$
$f(x, y)$	7	-11	-8	$\frac{9}{5}$	1

↑  
Máximo

↑  
Mínimo

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

---

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de  $32 \text{ cm}^3$  e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material

Minimizar  
a área da  
superfície  
da caixa

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

---

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de  $32 \text{ cm}^3$  e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - $x$  = comprimento da caixa (em cm)
    - $y$  = largura da caixa (em cm)
    - $z$  = altura da caixa (em cm)
    - $S$  = área da superfície da caixa (em  $\text{cm}^2$ )
  - Restrição de volume

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de  $32 \text{ cm}^3$  e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - $x$  = comprimento da caixa (em cm)
    - $y$  = largura da caixa (em cm)
    - $z$  = altura da caixa (em cm)
    - $S$  = área da superfície da caixa (em  $\text{cm}^2$ )

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

- Restrição de volume

$$xyz = 32$$

S é uma função de duas variáveis



# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de  $32 \text{ cm}^3$  e cuja construção requiera uma quantidade mínima de material
    - Reescrevendo  $S$  (como função de duas variáveis)

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

x e y  
devem ser  
positivos

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de  $32 \text{ cm}^3$  e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - Reescrevendo  $S$  (como função de duas variáveis)

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

$x$  e  $y$   
devem ser  
positivos

O problema  
se resume a  
achar o mínimo  
de  $S$  no primeiro  
quadrante

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de  $32 \text{ cm}^3$  e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - Reescrevendo  $S$  (como função de duas variáveis)

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

$x$  e  $y$   
devem ser  
positivos

Se existir,  
é em um ponto  
crítico de  $S$

A região não é  
limitada nem fechada,  
não dando garantia  
que exista um mínimo  
absoluto

O problema  
se resume a  
achar o mínimo  
de  $S$  no primeiro  
quadrante

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de  $32 \text{ cm}^3$  e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - Reescrevendo  $S$  (como função de duas variáveis)

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

Ponto crítico  
aceito (4, 4)

- Pontos críticos

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}$$

$$y - \frac{64}{x^2} = 0, \quad x - \frac{64}{y^2} = 0$$



$$x - \frac{64}{(64/x^2)^2} = 0$$

$$x \left( 1 - \frac{x^3}{64} \right) = 0$$

# Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de  $32 \text{ cm}^3$  e cuja construção requiera uma quantidade mínima de material
    - Verificando se é um ponto de mínimo

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{128}{x^3} = \frac{128}{4^3} = 2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{128}{y^3} = \frac{128}{4^3} = 2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial xy} = 1$$

$$D = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 S}{\partial xy} \right)^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$$

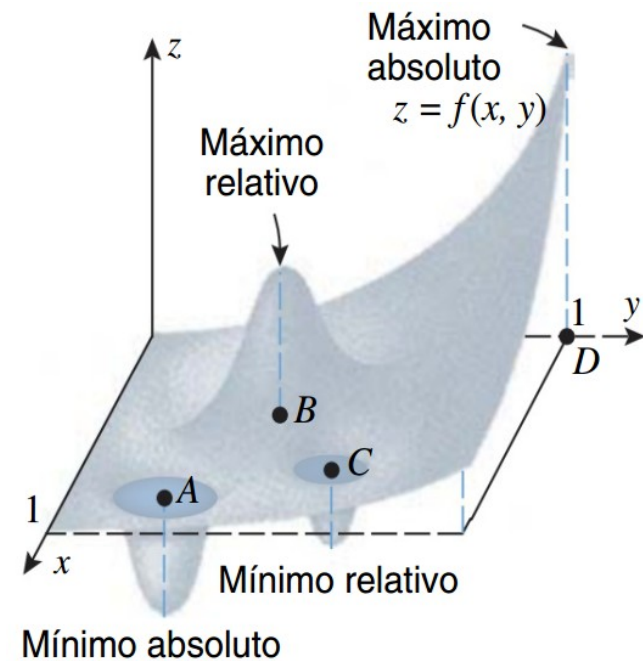
Como  $S_{xx}$  e  $D$  são positivos, o ponto é de mínimo!

---

# Resumo

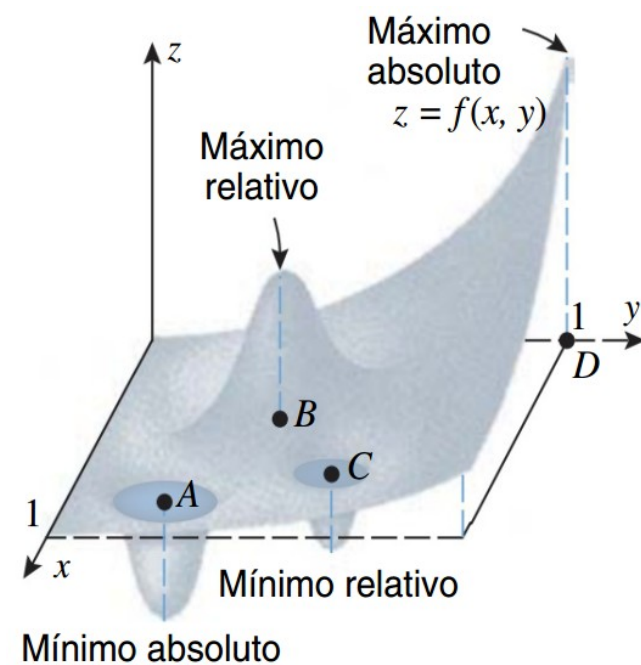
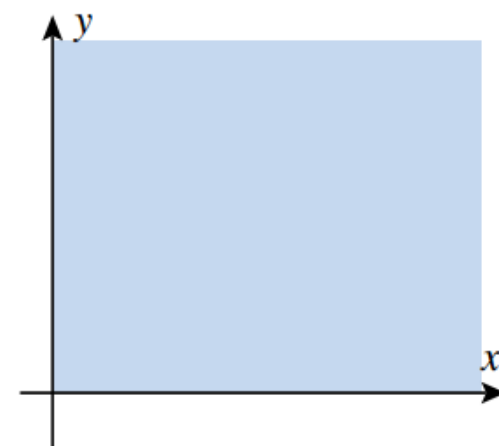
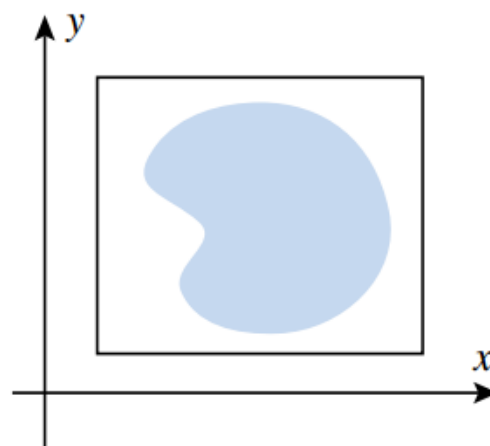
# Resumo

- Máximos e mínimos relativos e absolutos



# Resumo

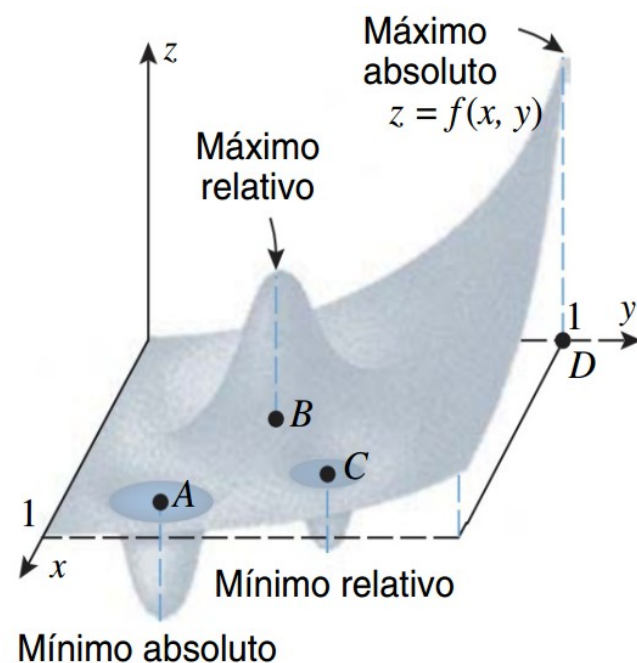
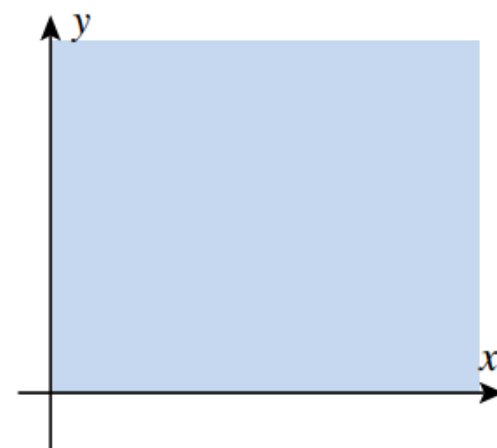
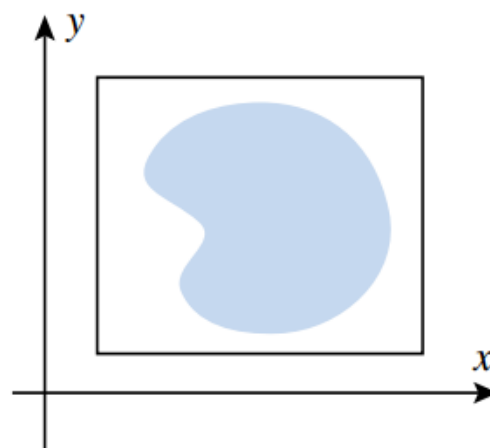
- Máximos e mínimos relativos e absolutos
- Conjuntos limitados e ilimitados
  - Pontos de extremo





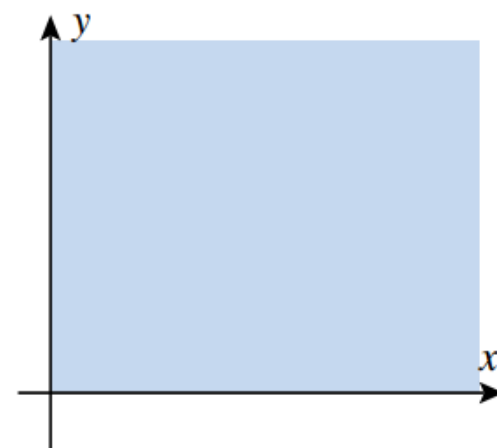
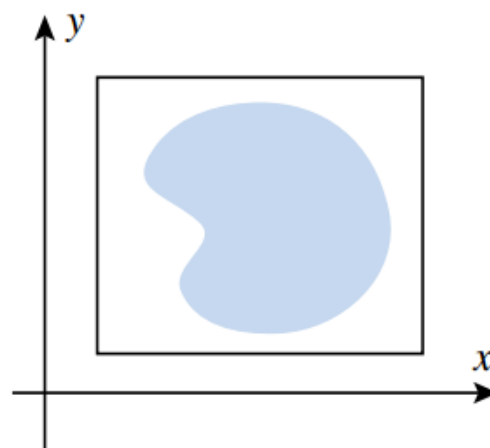
# Resumo

- Máximos e mínimos relativos e absolutos
- Conjuntos limitados e ilimitados
  - Pontos de extremo
- Pontos críticos
  - $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ ; ou
  - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em  $(x_0, y_0)$



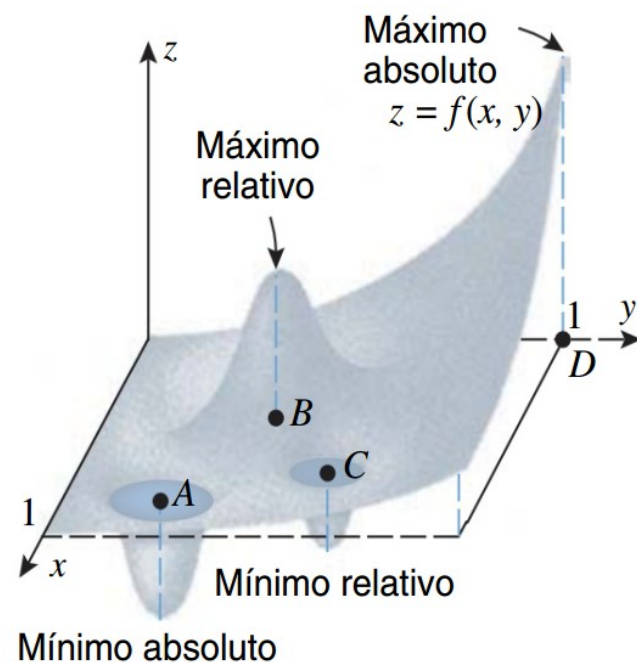
# Resumo

- Máximos e mínimos relativos e absolutos
- Conjuntos limitados e ilimitados
  - Pontos de extremo
- Pontos críticos
  - $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ ; ou
  - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em  $(x_0, y_0)$



- Derivada segunda

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$



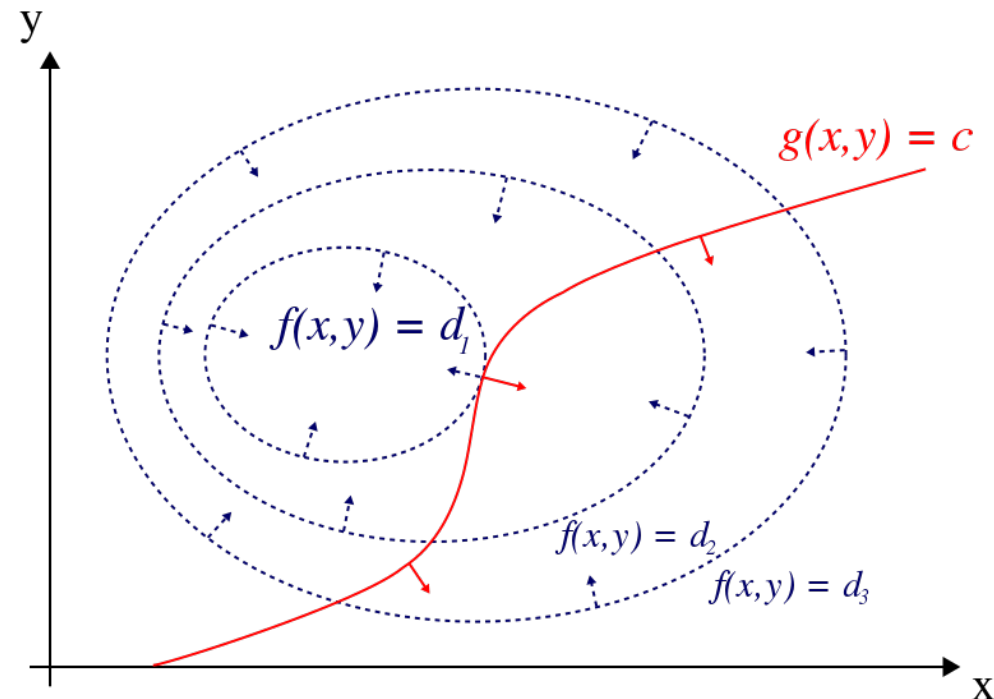
# Resumo

---

- Exercícios de fixação:
  - Seção 13.8
    - Exercícios de compreensão 13.8
    - 9-20

# Resumo

- Próxima aula:
  - Multiplicadores de Lagrange
    - Encontrar extremos de uma função de uma ou mais variáveis suscetíveis a uma ou mais restrições.
    - Graficamente
      - A linha a vermelho indica a restrição  $g(x,y)=c$
      - As linhas azuis são os contornos de  $f(x,y)$ .
      - A solução ocorre no ponto em que as linhas vermelha e azul se tocam tangencialmente



---

# Bibliografia

# Bibliografia

---

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2.** 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 13.8