Sistemas de Equações Lineares

Unidade 1

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Revisão

Revisão

- Sistemas lineares
  - A solução é valores de x_i que satisfazem todas das equações ao mesmo tempo
  - Classificação quanto a solução
    - Consistente
      - Determinado
      - Indeterminado
    - Inconsistente

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Matrizes e vetores
  - Para algumas operações é preciso que as matrizes sejam compatíveis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Combinação linear

Combinação linear

- Definição 1:

  Uma combinação linear dos vetores (de mesma dimensão, m) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,…, $\mathbf{v}_n$ é um vetor da forma

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$$

  para escalares α_1, α_2, …, α_n

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação A**x**

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

O resultado é um vetor $(A\mathbf{x})_{m\times 1}$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação A**x**
  - Interpretando cada coluna de A como um vetor

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ \vdots \\ \boxed{x_n} \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação A**x**
  - Interpretando cada coluna de A como um vetor

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Reescrevendo a matriz como concatenação de vetores

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=$$

$a_{:i}$ indica todas as linhas da coluna i

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação A**x**
  - Interpretando cada coluna de A como um vetor

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ \vdots \\ \boxed{x_n} \end{bmatrix}$$

- Reescrevendo a matriz como concatenação de vetores

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_{:1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_{:2} \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_{:n} \\ | \end{bmatrix}$$

Soma de n vetores
de tamanho m

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação A**x**
  - Interpretando cada coluna de A como um vetor

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ \vdots \\ \boxed{x_n} \end{bmatrix}$$

O produto A**x** é a combinação linear das colunas de A, cujos coeficientes são as coorde-nadas de **x**

- Reescrevendo a matriz como concatenação de vetores

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} | \\ a_{:1} \\ | \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} | \\ a_{:2} \\ | \end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} | \\ a_{:n} \\ | \end{bmatrix}$$

Soma de n vetores de tamanho m

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação A**x**
  - **Exercício**: Calcule a multiplicação como uma combinação linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação A**x**
  - **Exercício**: Calcule a multiplicação como uma combinação linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Generalizando para o produto de matrizes

$$A_{m\times p}B_{p\times n}=A\begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_{:1} & b_{:2} & \cdots & b_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ab_{:1} & Ab_{:2} & \cdots & Ab_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Cada coluna é visto como uma combinação linear

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $\mathbf{y}^T A$

O resultado é um vetor linha $(\mathbf{y}^T A)_{1\times n}$

$$\boldsymbol{y}^T A = [y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $\mathbf{y}^T A$
  - Interpretando cada linha de A como um vetor

$$\boldsymbol{y}^T A = \begin{bmatrix} \boxed{y_1} & \boxed{y_2} & \cdots & \boxed{y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $\mathbf{y}^T A$
  - Interpretando cada linha de A como um vetor

O produto $\mathbf{y}^T A$ é a combinação linear das linhas de A, cujos coeficientes são as coordenadas de **y**

$$\mathbf{y}^T A = \begin{bmatrix} \boxed{y_1} & \boxed{y_2} & \cdots & \boxed{y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Reescrevendo a matriz como concatenação de vetores

$$\mathbf{y}^T A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} & a_{1:} & \text{---} \\ \text{---} & a_{2:} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_{m:} & \text{---} \end{bmatrix}$$

Soma de m vetores de tamanho n

$$= y_1 \begin{bmatrix} \text{---} & a_{1:} & \text{---} \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} \text{---} & a_{2:} & \text{---} \end{bmatrix} + \cdots + y_m \begin{bmatrix} \text{---} & a_{m:} & \text{---} \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Generalizando para o produto de matrizes

$$C_{m\times p}A_{p\times n}=\begin{bmatrix} — & c_{1:} & — \\ — & c_{2:} & — \\ & \vdots & \\ — & c_{m:} & — \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} — & c_{1:}A & — \\ — & c_{2:}A & — \\ & \vdots & \\ — & c_{m:}A & — \end{bmatrix}$$

Cada linha é vista como uma combinação linear

Resolução de sistemas

Resolução de sistemas

- Matriz diagonal
  - Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas

- Matriz diagonal
  - Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{-2}{1}, x_2 = \frac{-1}{3}, x_3 = \frac{1}{2} \qquad y_1 = t, y_2 = \frac{-1}{3}, y_3 = \frac{1}{2}$$

Variável livre

Resolução de sistemas

- Matriz diagonal
  - Forma geral

$$A\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$$

Direto!

$$x_1=\frac{b_1}{a_{11}},\, x_2=\frac{b_2}{a_{22}},\ldots,\, x_n=\frac{b_n}{a_{nn}}$$

Se fosse a matriz identidade,
x = **b**

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
  - Superior
    - Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
  - Superior
    - Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = 1$$

$$\underbrace{y_1 = -\frac{14t+9}{10}, y_2 = \frac{2-3t}{5}}_{\text{Variáveis líderes}}, y_3 = t$$

Variável livre

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
  - Superior
    - Forma geral

$$A\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Substituição retroativa!

$$x_k=\frac{b_k-\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\,x_j}{a_{kk}},\ \text{para}\ k=n,n-1,\ldots,1$$

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
  - Inferior
    - **Exercício**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
  - Inferior
    - **Exercício**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2 \qquad y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = t$$

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
  - Inferior
    - Forma geral

$$A\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$$

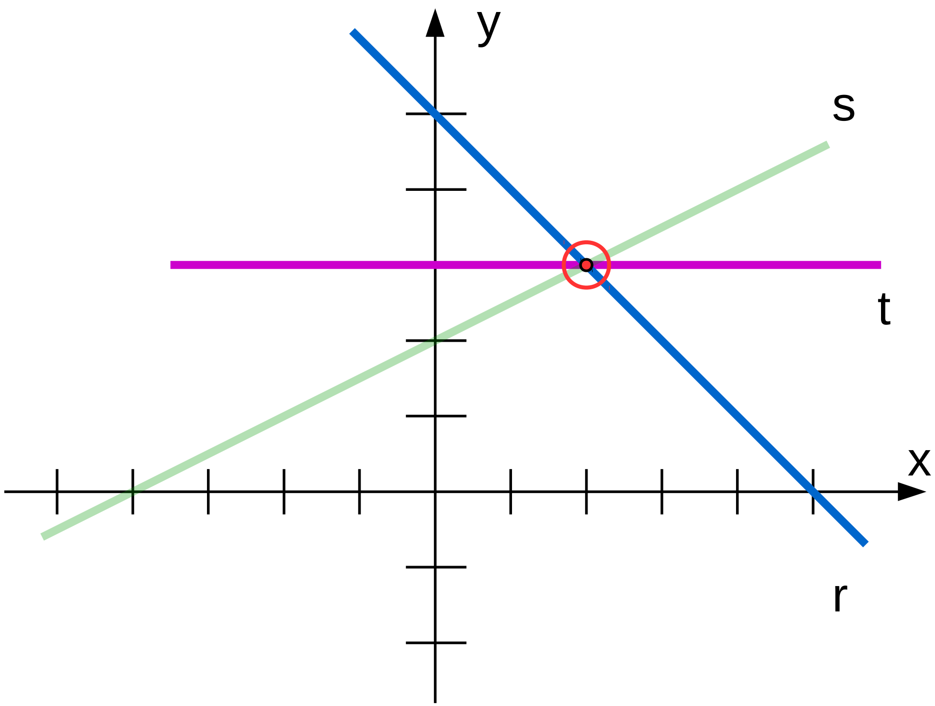
$$x_k=\frac{b_k-\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\,x_j}{a_{kk}}\text{, para } k=1,2,\ldots,n$$

Substituição direta!

Resolução de sistemas

- Matriz cheia
  - É preciso modificar o sistema para que fique com a matriz dos coeficientes triangular ou diagonal
    - Sistema equivalente

$$
\begin{array}{rrcrcr}
r: & \boxed{x} & + & y & = & 5 \\
s: & -x & + & 2y & = & 4\,(+) \\
\hline
 & 0 & + & 3y & = & 9 \\
 & & & t:\ y & = & 3
\end{array}
$$

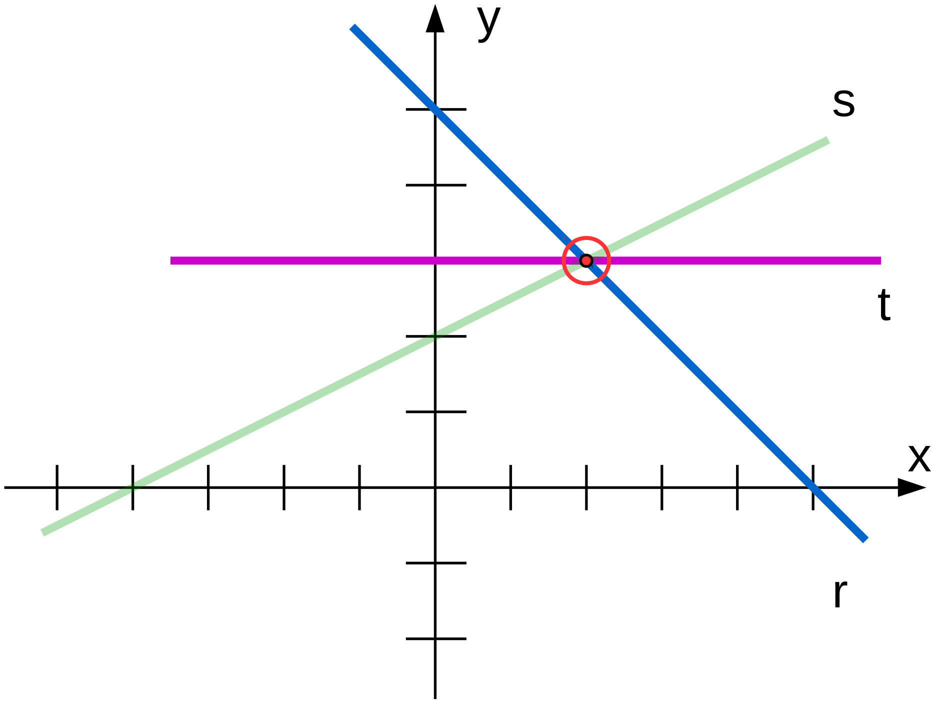


Novo sistema equivalente

Resolução de sistemas

- Matriz cheia
  - É preciso modificar o sistema para que fique com a matriz dos coeficientes triangular ou diagonal
    - Sistema equivalente
      - **Operações elementares**

$$
\begin{array}{rl}
r: & \boxed{x + y = 5} \\
s: & -x + 2y = 4 \quad (+) \\
\hline
 & 0 + 3y = 9 \\
t: & \boxed{y = 3}
\end{array}
$$



Modifica-se os coeficientes e os termos independentes

Operações elementares

Operações elementares

- O método básico de resolver um sistema de equações lineares é:
  - Efetuar **operações algébricas** no sistema que não alterem seu conjunto de soluções
  - Produz-se uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até alcançar um ponto em que se possa decidir se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções

Operações elementares

- Matriz aumentada
  - Para poder modificar o sistema todo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

Para não
ficar escrevendo
as incógnitas

Operações elementares

- Matriz aumentada
  - Modifica-se o sistema todo
    - Forma geral

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Operações elementares

- Definição 2:

  As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são:

  1. Multiplicar uma equação/linha inteira por uma constante não nula. [$L_i \leftarrow \alpha L_i$]
  2. Trocar duas equações/linhas entre si. [$L_i \leftrightarrow L_k$]
  3. Adicionar um múltiplo de uma equação/linha em outra equação/linha. [$L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k$]

Combinação linear de linhas

Para ser considerado operação elementar, se faz uma coisa de cada vez!

Operações elementares

- Exemplo
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

Operações elementares

- Exemplo
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

Operações elementares

- Exemplo
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -7 \end{aligned}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 4x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Operações elementares

- Exemplo
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array}\right]$$

Operações elementares

- Exemplo
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Poderia ter feito uma combinação da linha 3 com a linha 1?

Operações elementares

- Exemplo
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ & & & & -x_3 & = & 1 \end{array}$$

Poderia continuar até transformar em uma matriz diagonal!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow U\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

Operações elementares

- Exemplo
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando substituição retroativa

$$x_3=-1, x_2=1, x_3=2$$

Operações elementares

- **Exercício**
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema
    - Transforme em uma matriz identidade

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ -x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Operações elementares

- **Exercício**
  - Aplicar operações elementares para resolver o sistema
    - Transforme em uma matriz identidade

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ -x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \quad \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{3}} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x + 0 &= 2 \\ 0 + y &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = 2 ;\ y = 3$$

Resumo

Resumo

- Combinação linear $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_{:1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_{:2} \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_{:n} \\ | \end{bmatrix}$$

- Solução de sistemas com matrizes
  - Diagonal
  - Triangular
    - Superior: substituição retroativa
    - Inferior: substituição direta
- Operações elementares
  - $L_i \leftarrow \alpha L_i$
  - $L_i \leftrightarrow L_k$
  - $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k$

Resumo

- Exercícios de fixação
  - Anton
    - 1.1.2
    - [V/F] 1.1(e, h)
  - Araujo
    - 1.1.1-1.1.2
    - 1.1.4-1.1.5

Resumo

- Próxima aula
  - Método de eliminação gaussiana
    - Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Método de eliminação de Gauss-Jordan
    - Forma escalonada reduzida
  - Sistemas homogêneos

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Bibliografia

Bibliografia

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
  - Seção 1.1(continuação)
- DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
  - Seção 1.1(continuação) e 1.2(parcial)