Autovalores e autovetores

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Autovalores e autovetores
  - Calculando autovalores
    - Polinômio característico
  - Calculando autovetores
  - Potências de uma matriz
  - Autovalores e invertibilidade
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Espaço linha $\mathcal{R}(A^T)$
  - Gerado pelas linhas linearmente independentes de A
- Espaço coluna $\mathcal{R}(A)$
  - Gerado pelas colunas linearmente independentes de A
- Espaço nulo $\mathcal{N}(A)$
  - Vetores coluna que ao serem multiplicados por A geram o vetor nulo
- Espaço coluna $\mathcal{N}(A^T)$
  - Vetores linha que ao serem multiplicados por A geram o vetor nulo

Revisão

- Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  - Posto(A) = dim($\mathcal{R}$(A)) = r
  - Nulidade(A) = dim ($\mathcal{N}$(A)) = n - r

Revisão

- Afirmações equivalentes para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é* I_n.

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*g*) $\det(A) \neq 0$.

(*h*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*

(*i*) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*

(*j*) *Os vetores coluna de A geram* R^n.

(*k*) *Os vetores linha de A geram* R^n.

(*l*) *Os vetores coluna de A formam uma base de* R^n.

(*m*) *Os vetores linha de A formam uma base de* R^n.

(*n*) *A tem posto n.*

(*o*) *A tem nulidade 0.*

Autovalores e autovetores

Autovalores e Autovetores

Em inglês: “eigenvalues” e “eigenvectors”

- Definição:
  - Se A for uma matriz n×n, então um vetor não nulo **x** $\in \mathbb{R}^n$ é denominado ***autovetor*** de A se A**x** for um múltiplo escalar de **x**, isto é

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

com algum escalar λ. O escalar λ é denominado ***autovalor*** de A, e dizemos que **x** é um ***autovetor associado a*** λ.

Usualmente a imagem de A**x** difere de **x** tanto em magnitude, direção e sentido

Exceto quando **x** é um autovetor de A

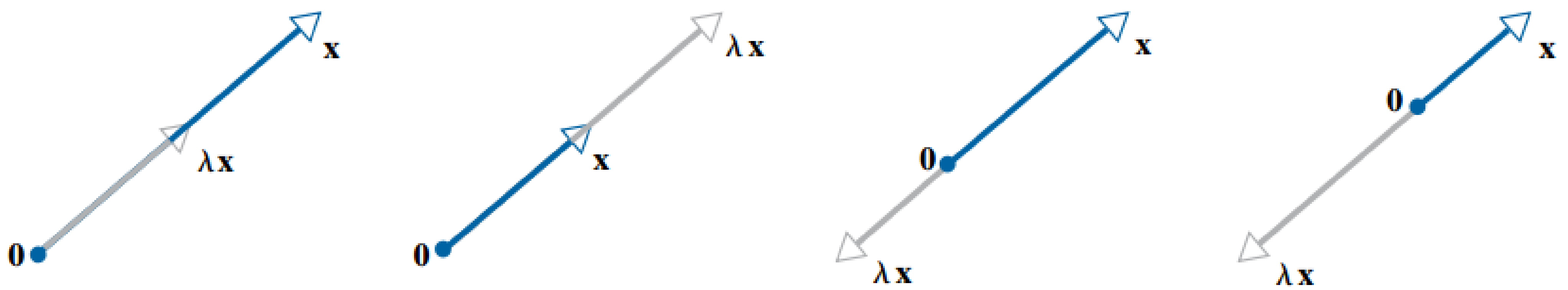
Autovalores e Autovetores

- Definição:
  - Se A for uma matriz n×n, então um vetor não nulo **x** $\in \mathbb{R}^n$ é denominado ***autovetor*** de A se A**x** for um múltiplo escalar de **x**, isto é

Para a solução não trivial

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

com algum escalar λ. O escalar λ é denominado ***autovalor*** de A, e dizemos que **x** é um ***autovetor associado a*** λ.



(a) $0 \leq \lambda \leq 1$ (b) $\lambda \geq 1$ (c) $-1 \leq \lambda \leq 0$ (d) $\lambda \leq -1$

Autovalores e Autovetores

- Exemplo:
  - O vetor **x** é um autovetor de A associado ao autovalor λ = 3

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

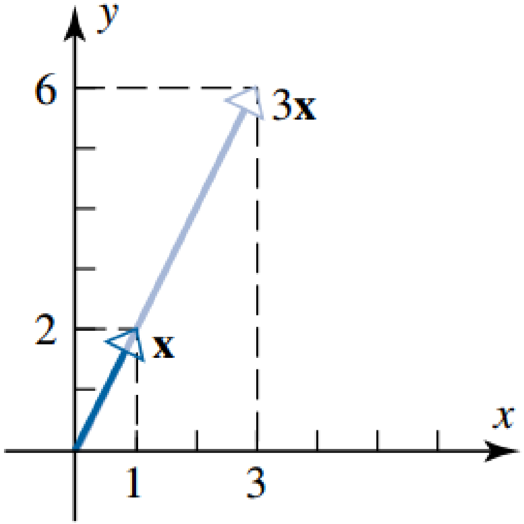
Autovalores e Autovetores

- Exemplo:
  - O vetor **x** é um autovetor de A associado ao autovalor λ = 3

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Conferindo:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$



- Assim, a multiplicação por A expandiu o vetor **x** pelo fator 3

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores
  - A equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ ou até como

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores
  - A equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ ou até como

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

  - Para que λ seja um autovalor de A, essa equação deve possuir alguma solução **x** não nula
    - Pelas equivalências, $\left\{ \begin{array}{l} (b)\ \ A\mathbf{x} = \mathbf{0} \textit{ tem somente a solução trivial.} \\ \\ (g)\ \ \det(A) \neq 0. \end{array} \right.$

      isso ocorre se, e somente se, a matriz dos coeficientes λI-A tiver determinante nulo

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores
  - Teorema:
    - Se A for uma matriz n×n, então λ é um autovalor de A se, e somente se, λ satisfaz a equação

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

  - Essa equação é denominada de **equação característica de A**.

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores
  - Exemplo:
    - Explique porque $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz usando a equação característica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores
  - Exemplo:
    - Explique porque λ = 3 é um autovalor da matriz usando a equação característica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

    - Equação característica (det(λI - A) = 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

obtendo-se $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

    - Autovalores: λ=3 e λ=-1

Autovalores e Autovetores

- Polinômio característico
  - Quando o determinante é expandido, resulta em polinômio p(λ) de grau n denominado **polinômio característico** de A
    - A partir do exemplo anterior onde a matriz A tinha tamanho 2×2, tem-se um polinômio de grau 2

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Autovalores e Autovetores

- Polinômio característico
  - Quando o determinante é expandido, resulta em polinômio p(λ) de grau n denominado **polinômio característico** de A
    - A partir do exemplo anterior onde a matriz A tinha tamanho 2×2, tem-se um polinômio de grau 2

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

    - Para uma matriz n×n, tem-se

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Coeficiente = 1

Autovalores e Autovetores

- Polinômio característico
  - Quando o determinante é expandido, resulta em polinômio p(λ) de grau n denominado **polinômio característico** de A
    - A partir do exemplo anterior onde a matriz A tinha tamanho 2×2, tem-se um polinômio de grau 2

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Teorema fundamental da Álgebra

    - Para uma matriz n×n, tem-se

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

    - Como um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas, segue que a equação

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

em, no máximo, n soluções distintas e

Algumas dessas soluções podem ser números complexos

Uma matriz n×n tem, no máximo, n autovalores distintos

Autovalores e Autovetores

- Exercício: Encontre o polinômio característico da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Exercício: Encontre o polinômio característico da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Mas como descobrir os valores de λ?

  – Polinômio característico

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Autovalores e Autovetores

- Exercício: Encontre o polinômio característico da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Mas como descobrir os valores de λ?

  - Polinômio característico

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

    - Se houverem soluções inteiras, são todas divisores do termo $c_n = 4$
      - ±1, ±2, ±4 → substituindo, temos a solução λ - 4
    - Dividindo o polinômio p(λ) por (λ – 4), reescrevendo p(λ)

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Autovalores e Autovetores

- Exercício: Encontre o polinômio característico da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Mas como descobrir os valores de λ?

  – Polinômio característico

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

    - Resolvendo pela formula de Bhaskara, os autovalores são:

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{e} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

Autovalores e Autovetores

- Exemplo: Autovalores de uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Exemplo: Autovalores de uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

  - Como o determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas na diagonal principal, então

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{12} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})$$

Autovalores e Autovetores

- Exemplo: Autovalores de uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

  - Equação característica

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

  - Autovalores:

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda = a_{22}, \quad \lambda = a_{33}, \quad \lambda = a_{44}$$

    - Valores da diagonal principal

Autovalores e Autovetores

- Teorema: Se A for uma matriz n×n triangular (superior, inferior, ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A

Autovalores e Autovetores

- Teorema: Se A for uma matriz n×n triangular (superior, inferior, ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A
  - Exercício: Autovalores de uma matiz triangular

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Teorema: Se A for uma matriz n×n triangular (superior, inferior, ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A
  - Exercício: Autovalores de uma matiz triangular

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

  - Autovalores:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}, \lambda = \tfrac{2}{3} \text{ e } \lambda = -\tfrac{1}{4}$$

Autovalores e Autovetores

- Se A for uma matriz n×n, então são equivalentes:

(*a*) λ *é um autovalor de* A.

(*b*) *O sistema* $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *de equações tem soluções não triviais.*

(*c*) *Existe algum vetor não nulo* $\mathbf{x}$ *tal que* $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

(*d*) λ *é uma solução da equação característica* $\det(\lambda I - A) = 0$.

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Os autovetores associados a um autovalor λ de uma matriz A são os vetores não nulos que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Os autovetores associados a um autovalor λ de uma matriz A são os vetores não nulos que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

  - Diz-se que esse espaço nulo é o autoespaço de A associado a

É o espaço solução do sistema homogêneo

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Exemplo: Encontre as bases dos autoespaços

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

    - Equação característica

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Dois autoespaços

    - Autovalores: $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$
  - Por definição, $\mathbf{x}=[x_1, x_2]^T$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$ se, e somente se, $\mathbf{x}$ é uma solução não trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Exemplo: Encontre as bases dos autoespaços

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Substituindo no sistema λ = 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notar que a matriz do novo sistema, é necessariamente singular

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Exemplo: Encontre as bases dos autoespaços

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Notar que a matriz do novo sistema, é necessariamente singular

- Substituindo no sistema λ = 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Solução geral

$$x_1 = \tfrac{1}{2}t, \quad x_2 = t \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Base do autoespaço associado a λ = 3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercício: Calcule o autoespaço para λ = -1

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Exemplo: Encontre as bases dos autoespaços

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Notar que a matriz do novo sistema, é necessariamente singular

- Substituindo no sistema λ = 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Solução geral

$$x_1 = \tfrac{1}{2}t, \quad x_2 = t \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Base do autoespaço associado a λ = 3

$$\begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1 \rightarrow [0, 1]^T$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Exemplo/Exercício: Encontre as bases dos autoespaços de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Exemplo/Exercício: Encontre as bases dos autoespaços de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

    - Equação característica

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Dois autoespaços

    - Autovalores: $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$

Ache os autoespaços

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Exemplo/Exercício: Encontre as bases dos autoespaços de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autoespaços relacionados com o autovalor: λ = 2

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
  - Exemplo/Exercício: Encontre as bases dos autoespaços de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

    - Autoespaços relacionados com o autovalor: $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Potências de uma matriz
  - Uma vez conseguindo os autovalores e autovetores de uma matriz, é possível conseguir as potências inteiras positivas de A

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

    - Mostrando que λ^2 é um auto valor de A^2 e que **x** é o autovetor associado

Autovalores e Autovetores

- Potências de uma matriz
  - Teorema: Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e **x** um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e **x** é um autovetor associado

Autovalores e Autovetores

- Potências de uma matriz
  - Exercício: Ache os autovalores e vetores de A^7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Potências de uma matriz
  - Exercício: Ache os autovalores e vetores de A^7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 2^7 = 128$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\lambda = 1^7 = 1$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autovalores e Autovetores

- Teorema:
  - Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\lambda=0$ não é um autovalor de A

Autovalores e Autovetores

- Teorema:
  - Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\lambda=0$ não é um autovalor de A
- Demonstração
  - Suponha que A seja uma matriz n×n e observe primeiro que $\lambda=0$ é uma solução da equação característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

    se, e somente se, o termo constante c_n for zero.
  - Assim, é suficiente provar que A é invertível se, e somente se, $c_n \neq 0$.

Autovalores e Autovetores

- Teorema:
  - Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\lambda=0$ não é um autovalor de A
- Demonstração
  - Porém

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

  com isso, tomando $\lambda=0$,

$$\det(-A) = c_n \quad \text{ou} \quad (-1)^n \det(A) = c_n$$

  - Assim det(A)=0 se, e somente se, $c_n=0$ e isso, por sua vez, implica que A é invertível se, e só se, $c_n \neq 0$

Autovalores e Autovetores

- Autovalores e invertibilidade
  - Exemplo: A matriz A, de auto valores $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ é invertível?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Autovalores e invertibilidade
  - Exemplo: A matriz A, de auto valores $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ é invertível?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

    - Sim, A é invertível

Autovalores e Autovetores

- Afirmações equivalentes para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é* I_n.

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*g*) $\det(A) \neq 0$.

(*h*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*

(*i*) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*

(*j*) *Os vetores coluna de A geram* R^n.

(*k*) *Os vetores linha de A geram* R^n.

(*l*) *Os vetores coluna de A formam uma base de* R^n.

(*m*) *Os vetores linha de A formam uma base de* R^n.

(*n*) *A tem posto n.*

(*o*) *A tem nulidade* 0.

~~(*p*) *O complemento ortogonal do espaço nulo de A é* R^n.~~

~~(*q*) *O complemento ortogonal do espaço linha de A é* $\{\mathbf{0}\}$.~~

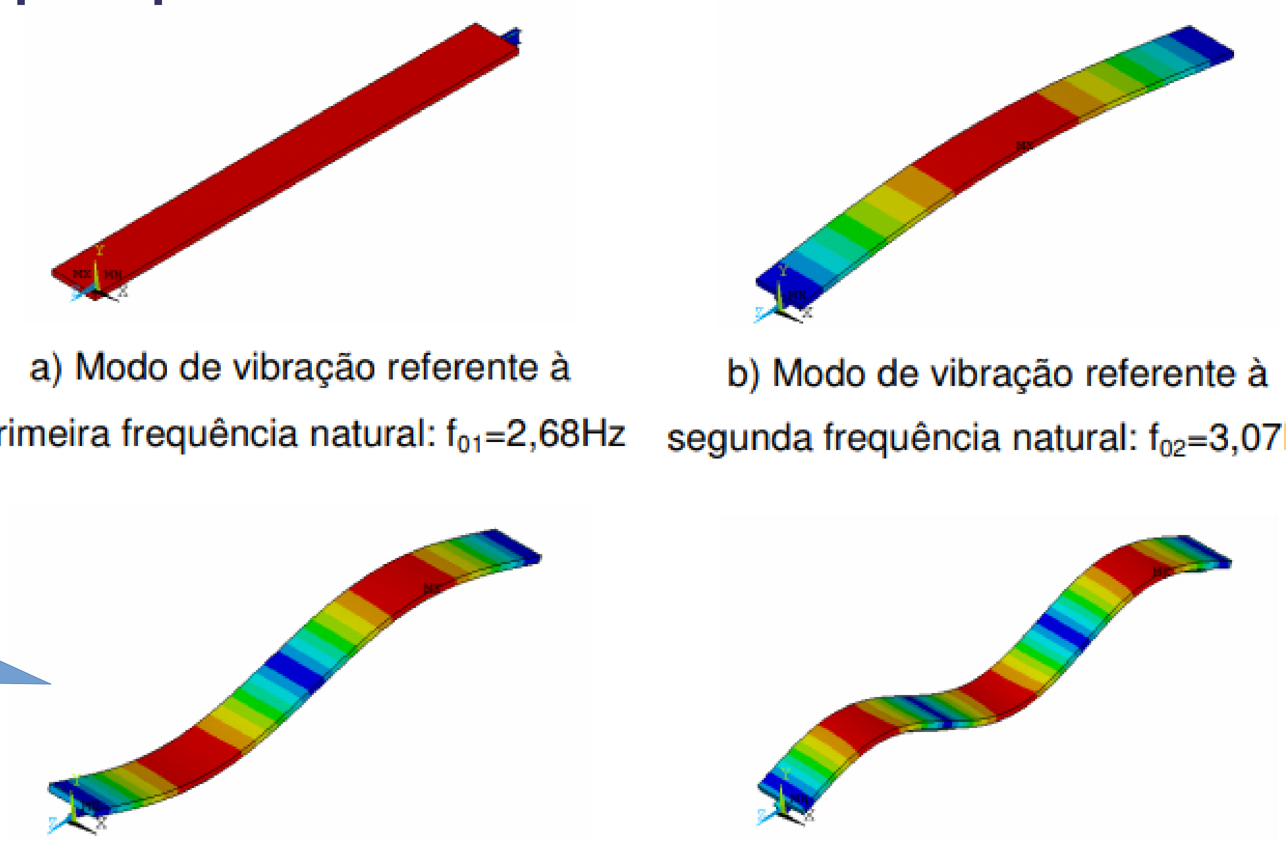
~~(*r*) *A imagem de* T_A *é* R^n.~~

~~(*s*) T_A *é um operador injetor.*~~

(*t*) $\lambda = 0$ *não é um autovalor de A.*

Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração



a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: f_{01}=2,68Hz

b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: f_{02}=3,07Hz

c) Modo de vibração referente à terceira frequência natural: f_{03}=12,07Hz

d) Modo de vibração referente à quarta frequência natural: f_{04}=26,63Hz

Figura 7.4 – Iteração total (76 conectores e rigidez a 50% da curva).

O modo de vibração vem dos autovetores

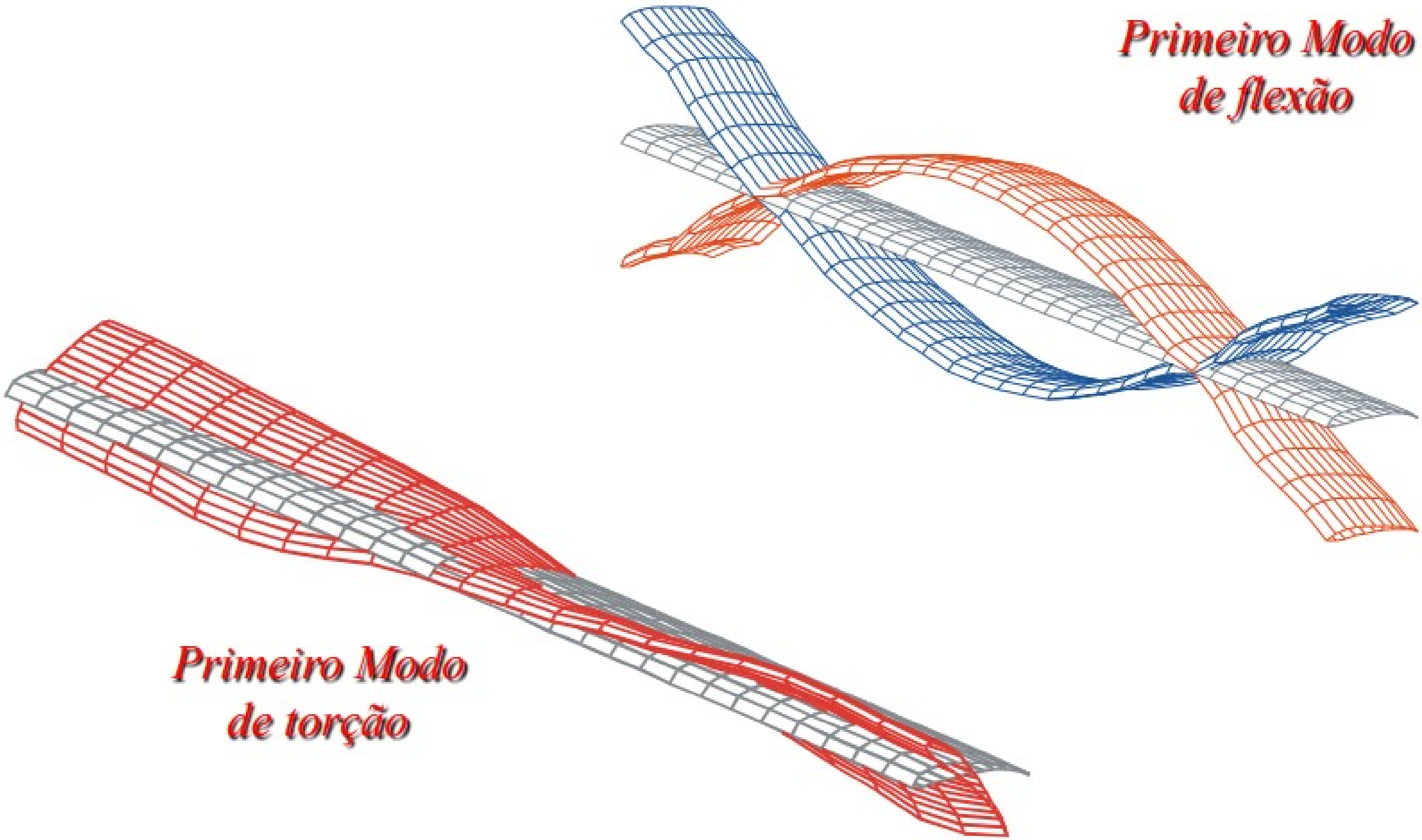
A frequência natural vem dos autovalores

FONTE: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/16019/16019_8.PDF

Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração

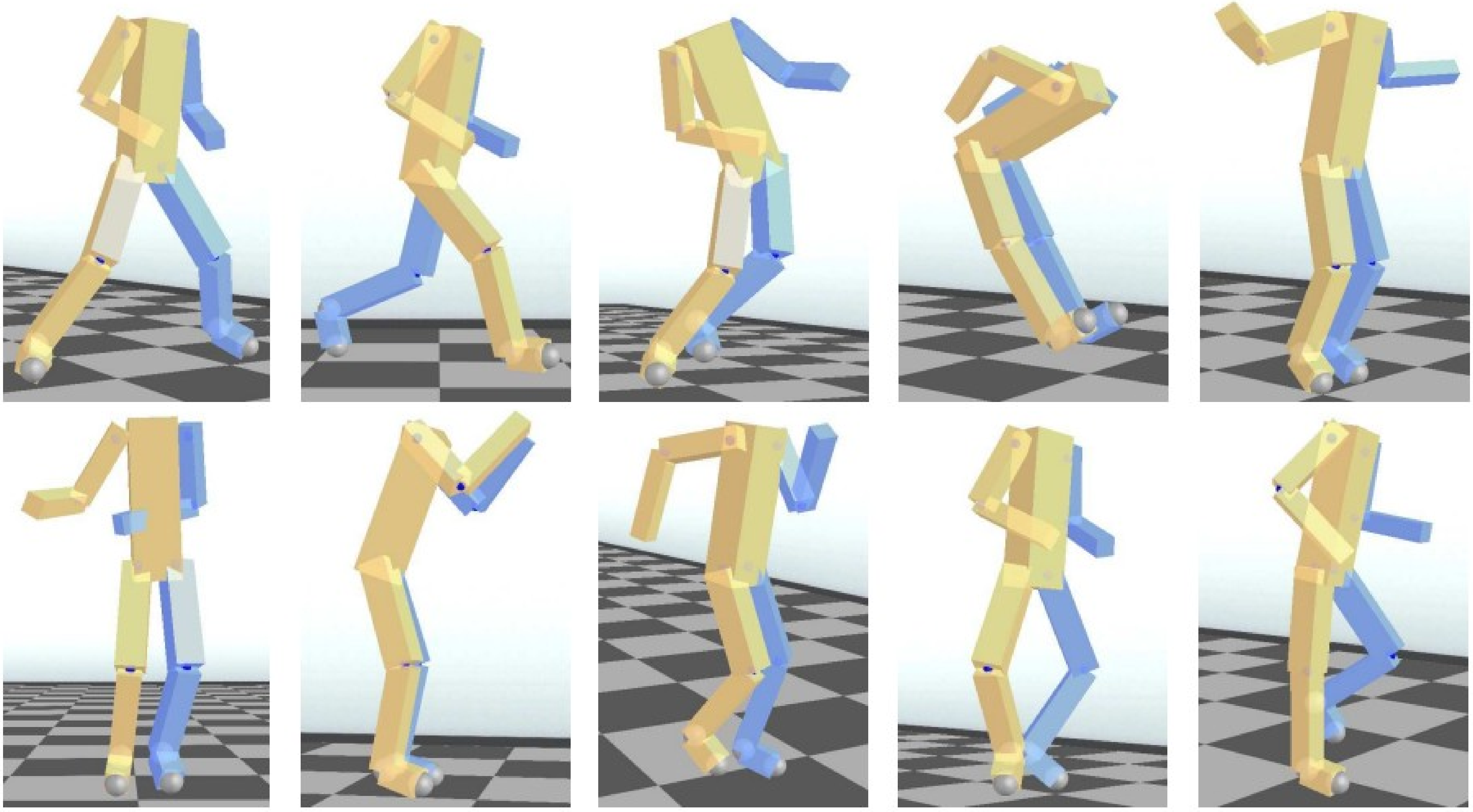
Dois modos de vibrar de uma estrutura aeronáutica



FONTE: http://www2.eesc.usp.br/labdin/varoto/aula2.pdf

Autovalores e Autovetores

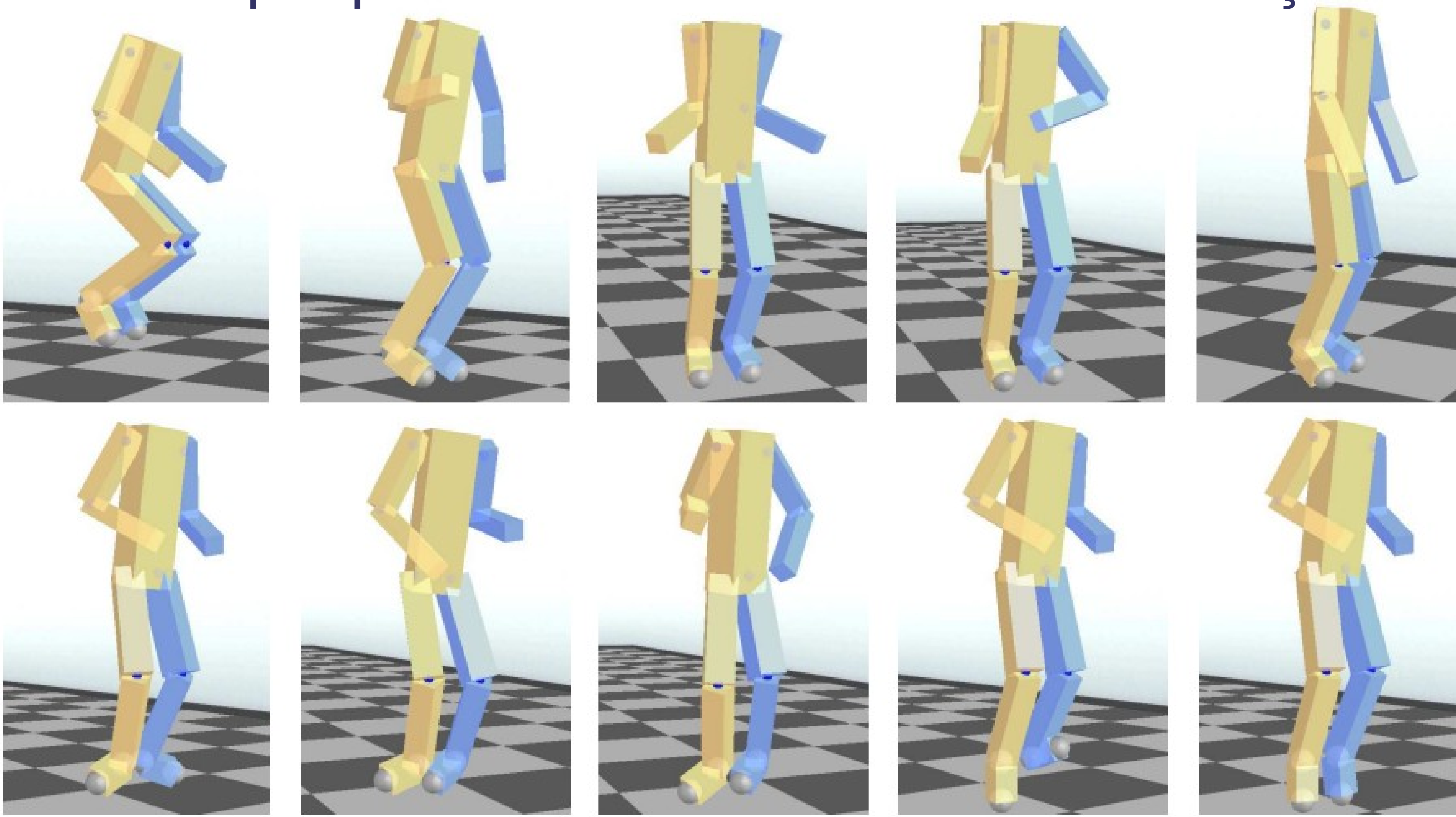
- Exemplo prático: Modos de naturais vibração



FONTE: http://www.mdcc.ufc.br/teses/doc_download/182-11-rubens-fernandes-nunes
FONTE vídeo: https://www.cs.mcgill.ca/~kry/ . Artigo: Using Natural Vibrations to Guide Control for Locomotion

Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração



FONTE: http://www.mdcc.ufc.br/teses/doc_download/182-11-rubens-fernandes-nunes
FONTE vídeo: https://www.cs.mcgill.ca/~kry/ . Artigo: Using Natural Vibrations to Guide Control for Locomotion

Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Google
  - A importância de um site é proporcional à importância dos sites que apontam para ele.

$$\begin{cases} x_1 & = & K(x_2 + x_{14} + x_{541}) \\ x_2 & = & K(x_1 + x_{23} + x_{541} + x_{1023}) \\ & \vdots & \\ x_n & = & K(x_{25} + x_{133}) \end{cases}$$

    onde x_i, $1 \leq i \leq n$, é a importância i-ésimo site e K é a constante de proporcionalidade

  - Reescrevendo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = \frac{1}{K} x_i \iff Ax = \frac{1}{K} x.$$

  - A maior coordenada do autovetor vai ser o site mais importante

FONTE: https://www.ime.usp.br/mat/2458/textos/eigenvalues.pdf

Autovalores e Autovetores

- Outros exemplos
  - Grafos
    - Redes (no geral: ferrovias, por exemplo)
  - Cadeia de Markov
  - Processamento de imagens
  - Mecânica quântica
  - Mecânica dos sólidos
  - Estatística
  - ...

Resumo

Resumo

- Autovalores e autovetores

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

  – Equação característica

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

  – Polinômio característico
    - É possível descobrir os autovalores achando as raízes

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

  – Autoespaço
    - É possível descobrir o autovetor associado a um autovalor λ descobrindo a base do espaço nulo da matriz dos coeficientes atualizada

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Anton seção 5.1
    - 1-5
    - 12-13

Resumo

- Próxima aula:
  - Diagonalização

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_n \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP,$$

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 5.1
  - DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
    - Seção 5.2