

Diferenciabilidade e regra da cadeia

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Diferenciabilidade
- Regra da cadeia
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)

Revisão

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
 - Trata como uma variável dependente

Revisão

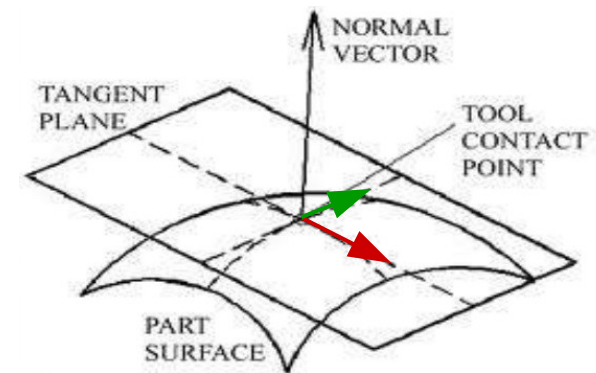
- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
 - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
 - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele

Revisão

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
 - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
 - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele
- Derivada parciais de ordens superiores
 - A derivada parcial é uma função de duas ou mais variáveis, assim também pode ser derivada

Revisão

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
 - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
 - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele
- Derivada parciais de ordens superiores
 - A derivada parcial é uma função de duas ou mais variáveis, assim também pode ser derivada
- O plano tangente pode ser calculado a partir das derivadas parciais e aproxima valores próximos



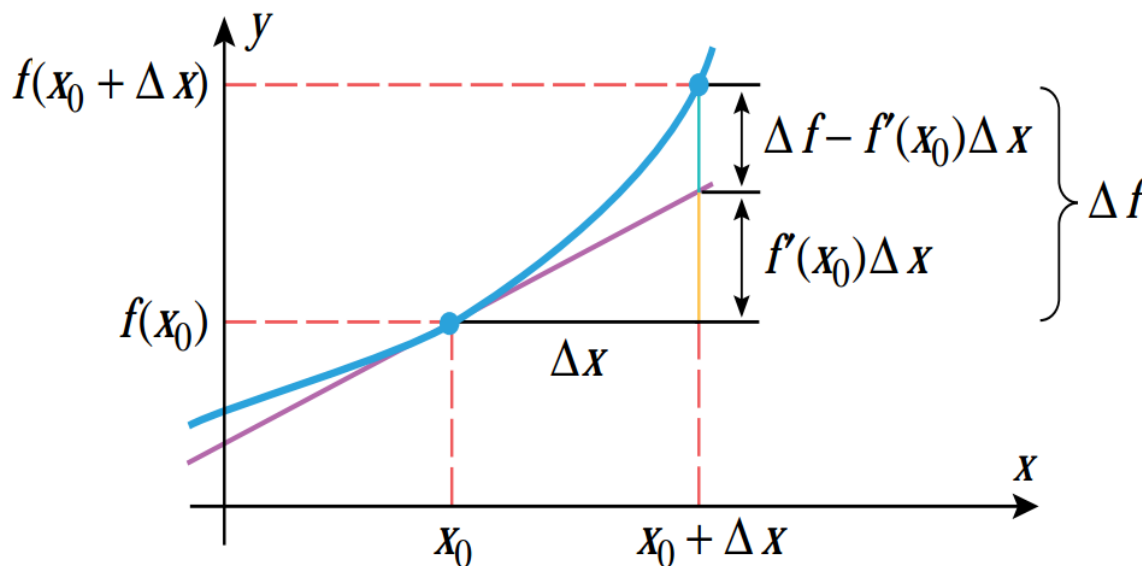
Diferenciabilidad

Diferenciabilidade

Função de uma variável

- Uma função f de uma variável é derivável ou diferenciável em x_0 se tiver uma derivada em x_0 , ou seja, se existir o limite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = L \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x) \Delta x}{\Delta x} = 0$$



Aproximação linear!

Diferenciabilidade

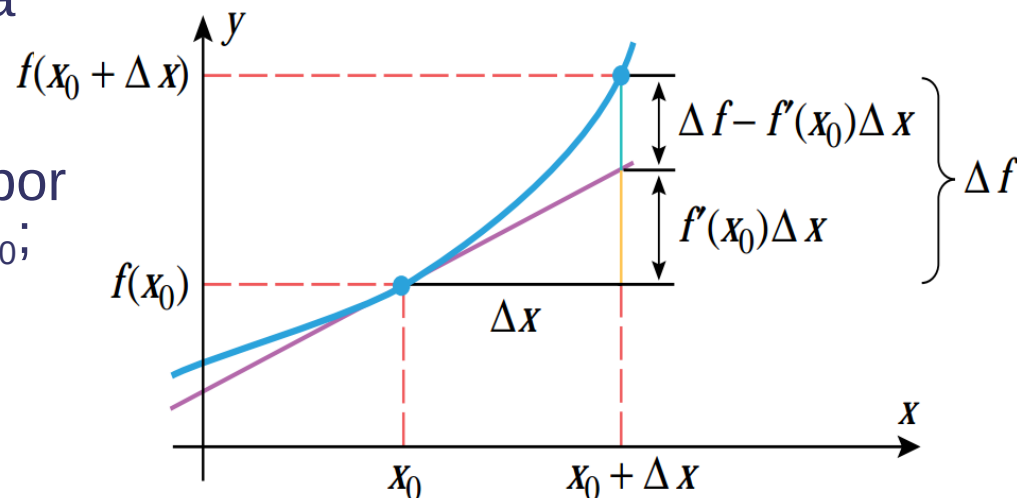
Função de uma variável

- Uma função f de uma variável é derivável ou diferenciável em x_0 se tiver uma derivada em x_0 , ou seja, se existir o limite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = L \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x) \Delta x}{\Delta x} = 0$$

– Propriedades

- O gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente não vertical no ponto $(x_0, f(x_0))$;
- f pode ser bem aproximada por uma função linear perto de x_0 ;
- f é contínua em x_0 .

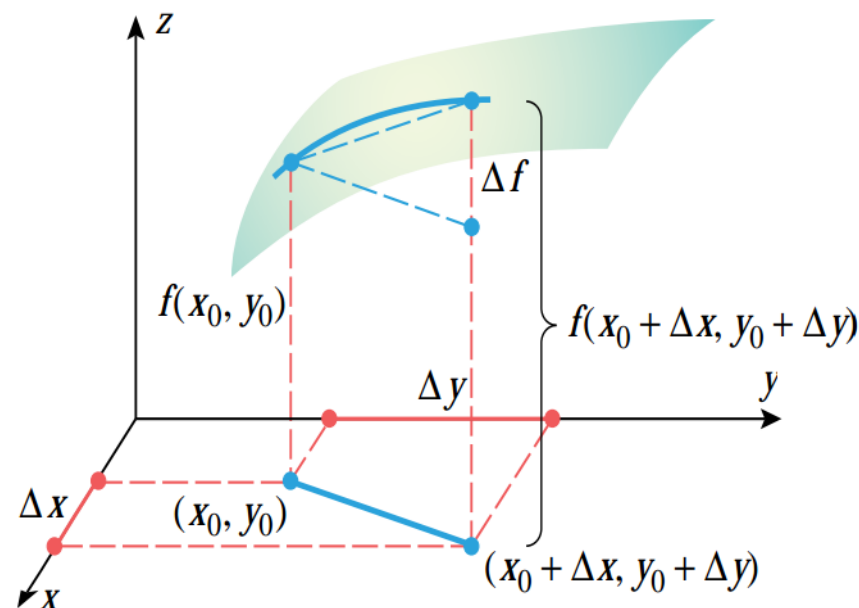


Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$



Diferenciabilidade

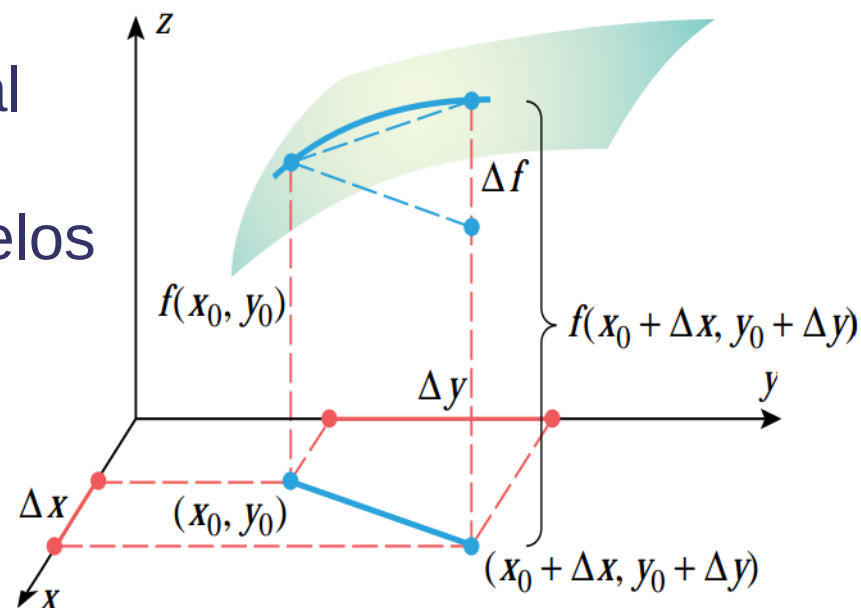
- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

– Propriedades:

- a superfície $z = f(x, y)$ tenha um plano tangente não vertical no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$;
- f pode ser bem aproximada pelos valores de uma função linear na proximidade de (x_0, y_0) ;
- f seja contínua em (x_0, y_0) .



Diferenciabilidade

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

- Exemplo: Prove que é diferenciável em $(0, 0)$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Diferenciabilidade

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

- Exemplo: Prove que é diferenciável em $(0, 0)$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

- Incremento

$$\Delta f = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

- Derivadas

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_y(x, y) = 2y$$



$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

- Aplicando na formula

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0$$

Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

– Consequência:

- Se $(\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$

$$\epsilon = \epsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

– Consequência:

- Se $(\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$

$$\epsilon = \epsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

onde, pela primeira equação, implica que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

– Consequência:

- Com isso, segue que

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Lembrar que os termos de segunda ordem forma ignorados na aproximação linear

Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

– Extensão para três variáveis:

- Uma função f é diferenciável em (x_0, y_0, z_0) se $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_y(x_0, y_0, z_0)$ e $f_z(x_0, y_0, z_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y - f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$

Diferenciabilidade

- Função f é **diferenciável em R**
 - Se uma função f de duas variáveis for diferenciável em cada ponto de uma região R do plano xy
- Função f é **diferenciável em toda parte**
 - Se f for diferenciável em cada ponto do plano xy

É análogo para
funções com
três variáveis

Diferenciabilidade

- Diferenciabilidade e continuidade
 - Teorema:
 - Se uma função for diferenciável em um ponto, então ela será contínua nesse p

Diferenciabilidade

- Diferenciabilidade e continuidade
 - Teorema:
 - Se uma função for diferenciável em um ponto, então ela será contínua nesse p

A recíproca não
é verdadeira!

Exemplo:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Diferenciabilidade

- Diferenciabilidade e continuidade
 - Teorema:
 - Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de f existirem e forem contínuas em um ponto, então f será diferenciável nesse ponto

Diferenciabilidade

- Diferenciabilidade e continuidade
 - Teorema:
 - Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de f existirem e forem contínuas em um ponto, então f será diferenciável nesse ponto
 - Exemplo: $f(x, y, z) = x + yz$

$$f_x(x, y, z) = 1 \quad f_y(x, y, z) = z \quad f_z(x, y, z) = y$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais
 - Se $z = f(x, y)$ for diferenciável em um ponto (x_0, y_0) , a aproximação:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$$

pode ser denotada por

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Se $z = f(x, y)$ for diferenciável em um ponto (x_0, y_0) , a aproximação:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$$

pode ser denotada por

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

- Essa função, que também é denotada por df , é a diferencial total de f em (x_0, y_0)

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Se $z = f(x, y)$ for diferenciável em um ponto (x_0, y_0) , a aproximação:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$$

pode ser denotada por

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Os sobrescritos
podem ser omitidos

- Essa função, que também é denotada por df , é a diferencial total de f em (x_0, y_0)

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Se $z = f(x, y)$ for diferenciável em um ponto (x_0, y_0) , a aproximação:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$$

pode ser denotada por

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

- Essa função, que também é denotada por df , é a diferencial total de f em (x_0, y_0)
- A aproximação pode ser escrita das formas:

$$\Delta f \approx df \qquad \Delta z \approx dz$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Em outras palavras, podemos estimar a variação Δz de z pelo valor da diferencial dz

- dx é a variação em x
 - dy é a variação em y

$$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Em outras palavras, podemos estimar a variação Δz de z pelo valor da diferencial dz

- dx é a variação em x
- dy é a variação em y

$$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

- Além disso, se Δx e Δy estiverem perto de 0, então a magnitude do erro da aproximação de $\Delta z \approx dz$ será muito menor do que a distância entre (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

Isto é, no limite o numerador vai se aproximar de zero mais rápido que o denominador

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

- Diferencial total (cálculo de dz): $dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$

$$dz = y^2 dx + 2xy dy$$

$$dx = \Delta x = 0,503 - 0,5 = 0,003$$

$$dy = \Delta y = 1,004 - 1,0 = 0,004$$

- Valor aproximado:

$$dz = 1,0^2(0,003) + 2(0,5)(1,0)(0,004) = 0,007$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

- Valor aproximado:

$$dz = 1,0^2(0,003) + 2(0,5)(1,0)(0,004) = 0,007$$

- Valor real:

$$\Delta z = 0,507032048 - 0,5 = 0,007032048$$

- Erro de aproximação:

$$|dz - z| = |0,007 - 0,007032048| = 0,000032048$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

- Erro de aproximação:

$$|dz - z| = |0,007 - 0,007032048| = 0,000032048$$

- Distância entre os pontos:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0,003)^2 + (0,004)^2} = \sqrt{0,000025} = 0,005$$

- Comparação:

A magnitude do erro da aproximação é 1/150 menor do que a distância entre os dois pontos

$$\frac{|dz - \Delta z|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{0,000032048}{0,005} = 0,0064096 < \frac{1}{150}$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais

- Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

- Erro de aproximação:

$$|dz - z| = |0,007 - 0,007032048| = 0,000032048$$

- Distância entre os pontos:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0,003)^2 + (0,004)^2} = \sqrt{0,000025} = 0,005$$

- Comparação

$$\frac{|dz - \Delta z|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{0,000032048}{0,005} = 0,0064096 < \frac{1}{150}$$

Regra da cadeia

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
 - Se y for uma função diferenciável de x e x for uma função diferenciável de t
 - Na composição, y é uma função diferenciável de t

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Funções de
uma variável

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas

- Teorema:

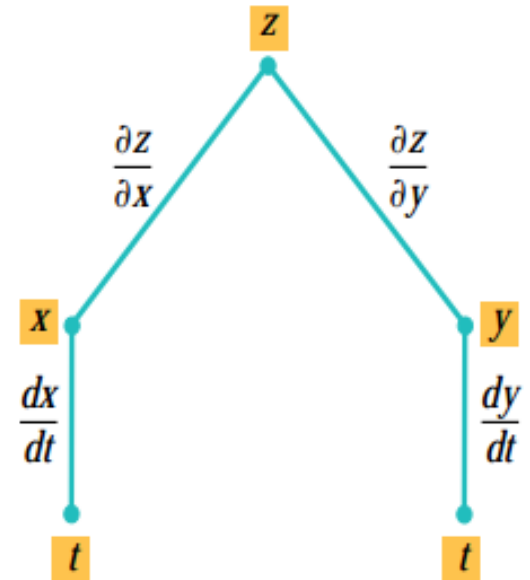
- Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em t , e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x, y) = (x(t), y(t))$, então $z = f(x(t), y(t))$ será diferenciável em t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

onde as derivadas comuns são calculadas em t e as derivadas parciais são calculadas em (x, y)

Semelhante para uma função de mais variáveis

Diagrama de árvore



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
 - Exemplo: Encontre dz/dt

$$z = x^2y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
 - Exemplo: Encontre dz/dt

$$z = x^2y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

- Usando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy)(2t) + (x^2)(3t^2) \\ &= (2t^5)(2t) + (t^4)(3t^2) = 7t^6\end{aligned}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
 - Exemplo: Encontre dz/dt

$$z = x^2y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

- Reescrevendo z em função de t

$$z = x^2y = (t^2)^2(t^3) = t^7$$

$$\frac{dz}{dt} = 7t^6$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
 - Exercício: Encontre $dw/d\theta$, se $\theta=\pi/4$

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad z = \tan \theta$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
 - Exercício: Encontre $dw/d\theta$, se $\theta=\pi/4$

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad z = \tan \theta$$

- Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{d\theta} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x)(-\sin \theta) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2y)(\cos \theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2z)(\sec^2 \theta) \end{aligned}$$

- Substituindo $x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

$$\left. \frac{dw}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\sqrt{2}) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (2)(2) = \sqrt{2}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
 - Teorema:
 - Se $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u, v) , e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$, então $z = f(x(u, v), y(u, v))$ terá derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u, v) dadas por

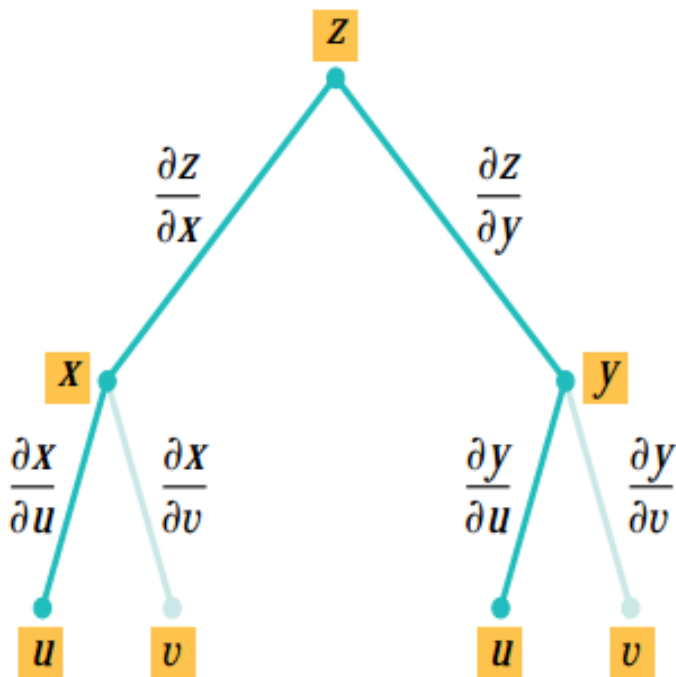
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

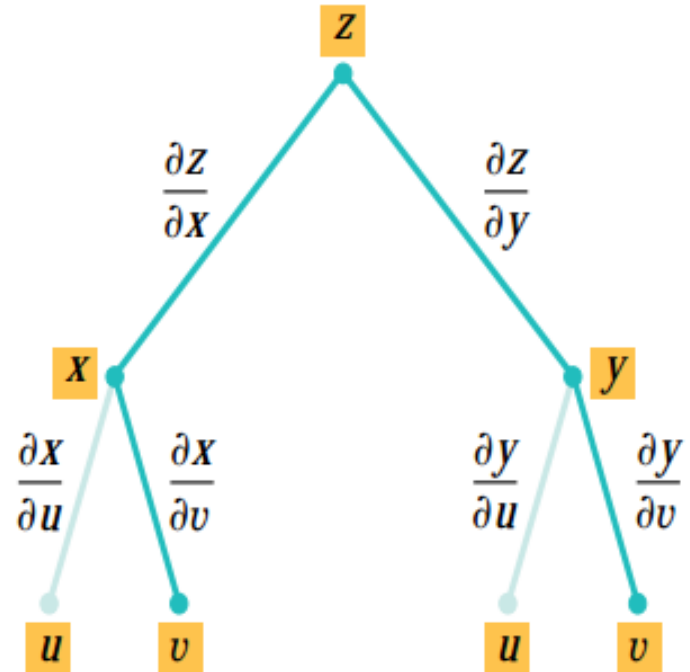
Semelhante para uma função de mais variáveis

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
 - Diagramas



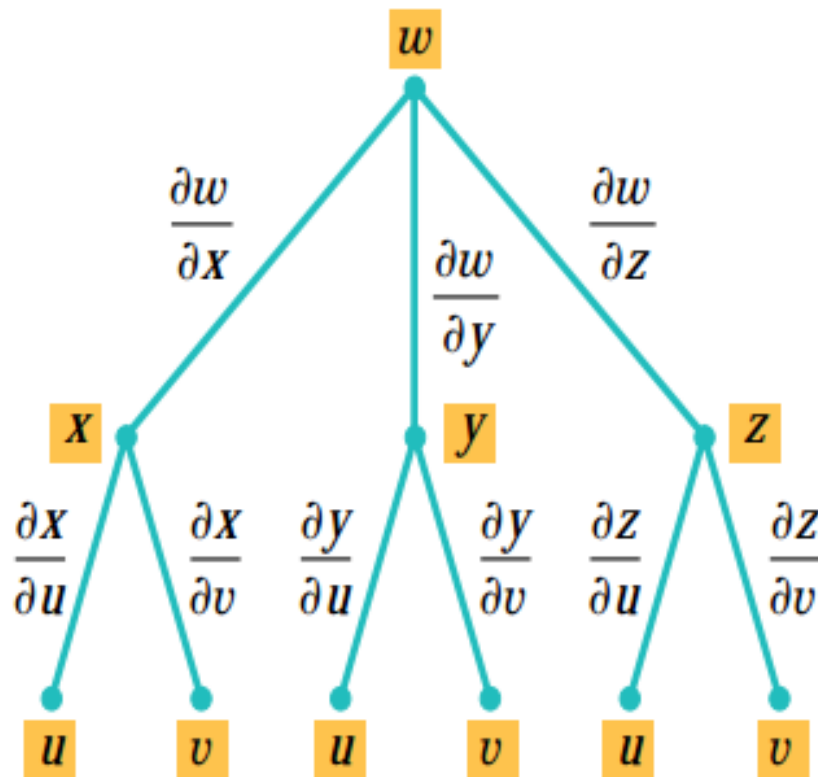
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$



$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
 - Diagramas



$$w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
 - Exemplo: Ache $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$

$$w = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
 - Exemplo: Ache $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$

$$w = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \underbrace{yze^{xyz}(3)}_{\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u}} + \underbrace{xze^{xyz}(3)}_{\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}} + \underbrace{xye^{xyz}(2uv)}_{\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}} = e^{xyz}(3yz + 3xz + 2xyuv)$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
 - Exemplo: Ache $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$

$$w = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \underbrace{yze^{xyz}(3)}_{\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u}} + \underbrace{xze^{xyz}(3)}_{\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}} + \underbrace{xye^{xyz}(2uv)}_{\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}} = e^{xyz}(3yz + 3xz + 2xyuv)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \underbrace{yze^{xyz}(1)}_{\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v}} + \underbrace{xze^{xyz}(-1)}_{\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}} + \underbrace{xye^{xyz}(u^2)}_{\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}} = e^{xyz}(yz - xz + xyu^2)$$

Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
 - A regra da cadeia pode ser estendida a funções $w = f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de n variáveis

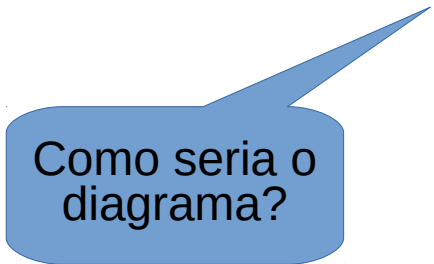
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial t}$$

Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
 - Exemplo: Determine $\partial w / \partial \rho$ e $\partial w / \partial \theta$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$



Como seria o diagrama?

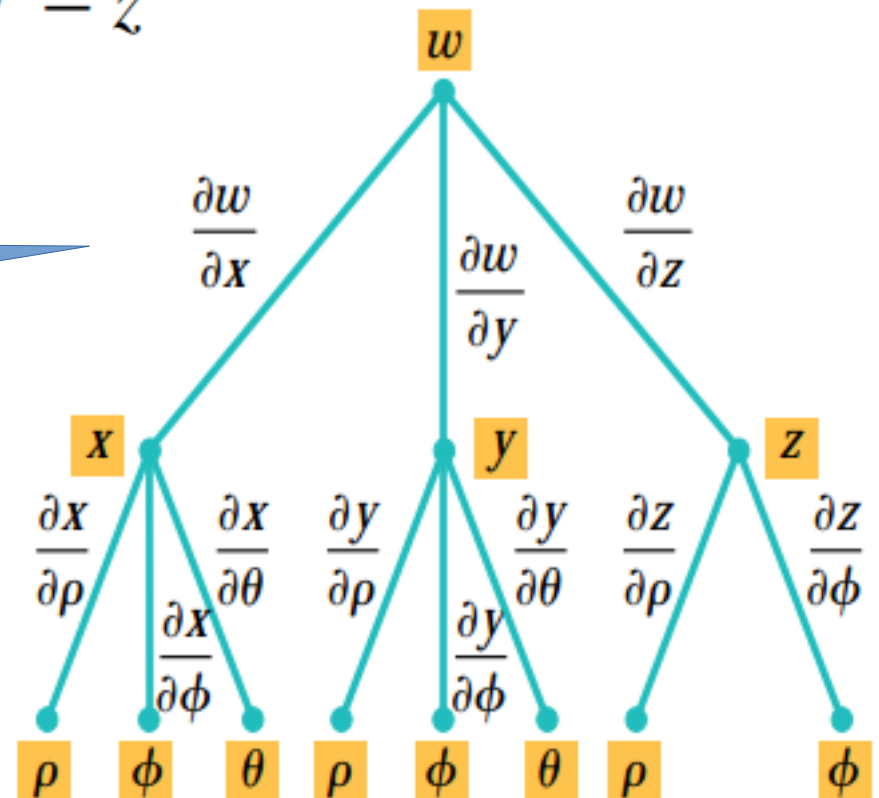
Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
 - Exemplo: Determine $\partial w / \partial \rho$ e $\partial w / \partial \theta$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

Quais as formulas tiradas dele?



Regra da cadeia

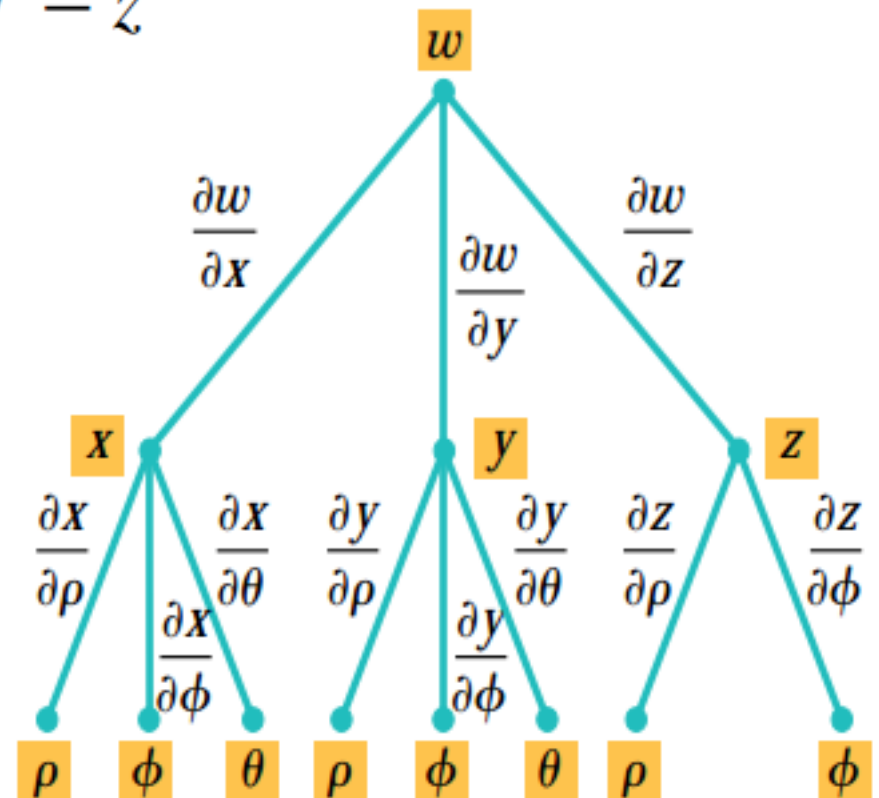
- Outras versões da regra da cadeia
 - Exemplo: Determine $\partial w / \partial \rho$ e $\partial w / \partial \theta$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$



Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
 - Exemplo: Determine $\partial w / \partial \rho$ e $\partial w / \partial \theta$

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \rho} &= 2x \operatorname{sen} \phi \cos \theta + 2y \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta - 2z \cos \phi \\ &= 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta - 2\rho \cos^2 \phi \\ &= 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 2\rho \cos^2 \phi \\ &= 2\rho (\operatorname{sen}^2 \phi - \cos^2 \phi) \\ &= -2\rho \cos 2\phi \end{aligned}$$

Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
 - Exemplo: Determine $\partial w / \partial \rho$ e $\partial w / \partial \theta$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= (2x)(-\rho \sin \phi \sin \theta) + (2y)\rho \sin \phi \cos \theta \\ &= -2\rho^2 \sin^2 \phi \sin \theta \cos \theta + 2\rho^2 \sin^2 \phi \sin \theta \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

w não
depende de θ

Regra da cadeia

y depende de x, não pode ser tratado como uma constante

- Diferenciação implícita
 - Sendo $z = f(x, y)$ uma função de x e y e y é uma função diferenciável de x

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

Regra da cadeia

y depende de x, não pode ser tratado como uma constante

- Diferenciação implícita
 - Sendo $z = f(x, y)$ uma função de x e y e y é uma função diferenciável de x

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

- Se $f(x, y) = c$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Regra da cadeia

- Diferenciação implícita

- Teorema:

- Se a equação $f(x, y) = c$ definir y implicitamente como uma função diferenciável de x , e se $\partial f / \partial y \neq 0$, então

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

Regra da cadeia

- Diferenciação implícita
 - Exemplo: Determine dy/dx

$$x^3 + y^2x - 3 = 0$$

Derivando implicitamente, não há necessidade de isolar y

Regra da cadeia

- Diferenciação implícita
 - Exemplo: Determine dy/dx

Derivando implicitamente, não há necessidade de isolar y

$$x^3 + y^2x - 3 = 0$$

- Usando a formula

$$f(x, y) = x^3 + y^2x - 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

Regra da cadeia

- Diferenciação implícita
 - Exemplo: Determine dy/dx

Derivando implicitamente, não há necessidade de isolar y

$$x^3 + y^2x - 3 = 0$$

- Usando a formula

$$f(x, y) = x^3 + y^2x - 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

- Diferenciando implicitamente

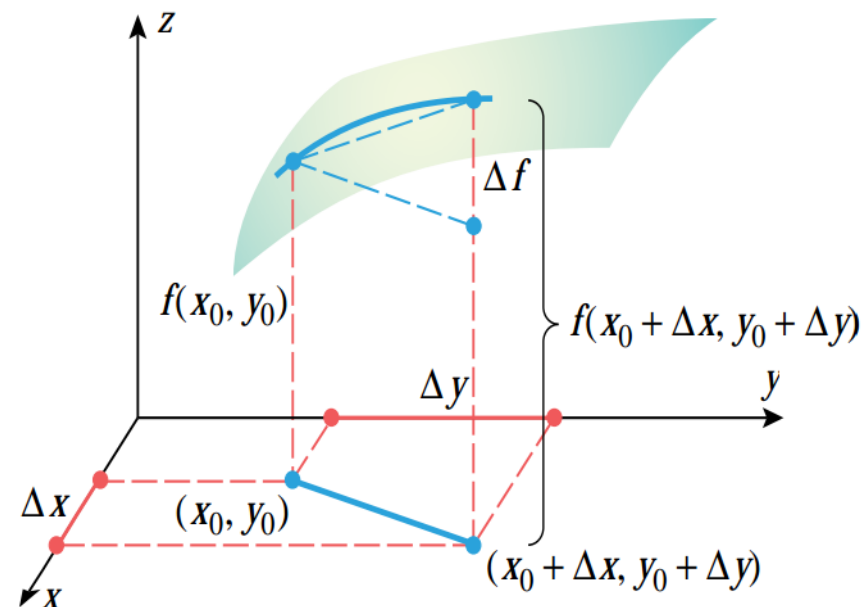
$$3x^2 + y^2 + x \left(2y \frac{dy}{dx} \right) - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

Resumo

Resumo

Propriedades:
- plano tangente não vertical
- aproximação linear
- continuidade

- Diferenciabilidade

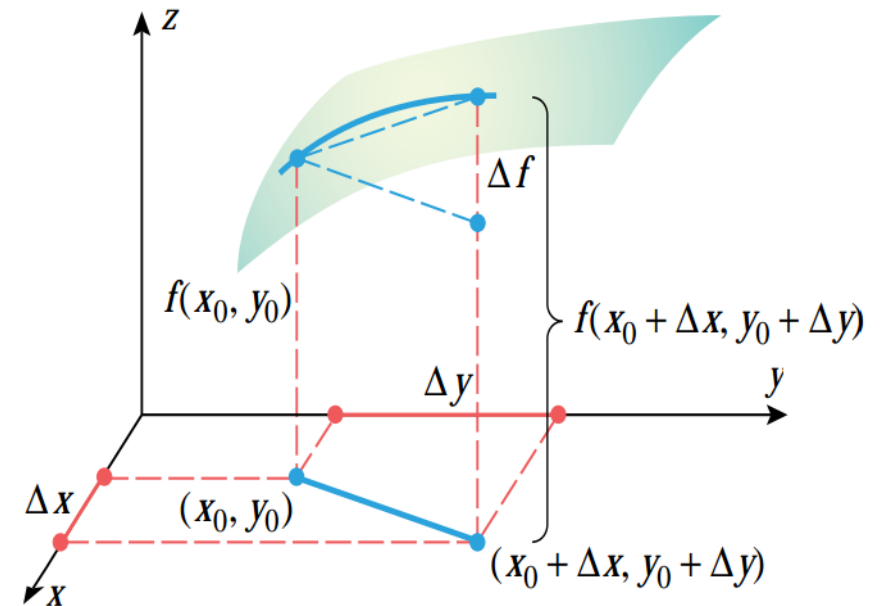


Resumo

Propriedades:
- plano tangente não vertical
- aproximação linear
- continuidade

- Diferenciabilidade
 - Diferencial

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$



Resumo

Propriedades:
 - plano tangente não vertical
 - aproximação linear
 - continuidade

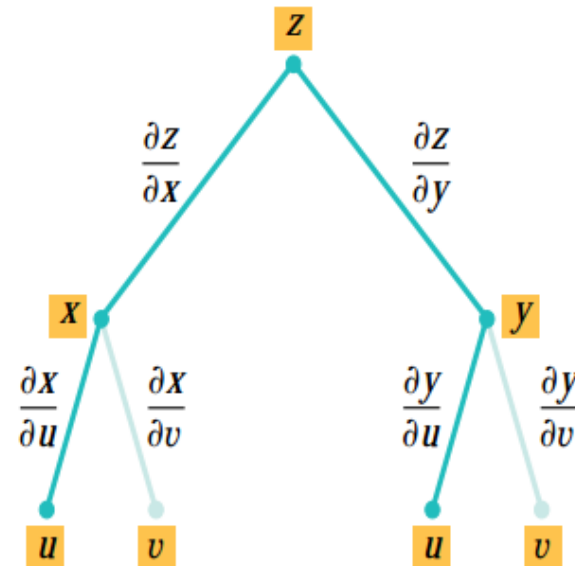
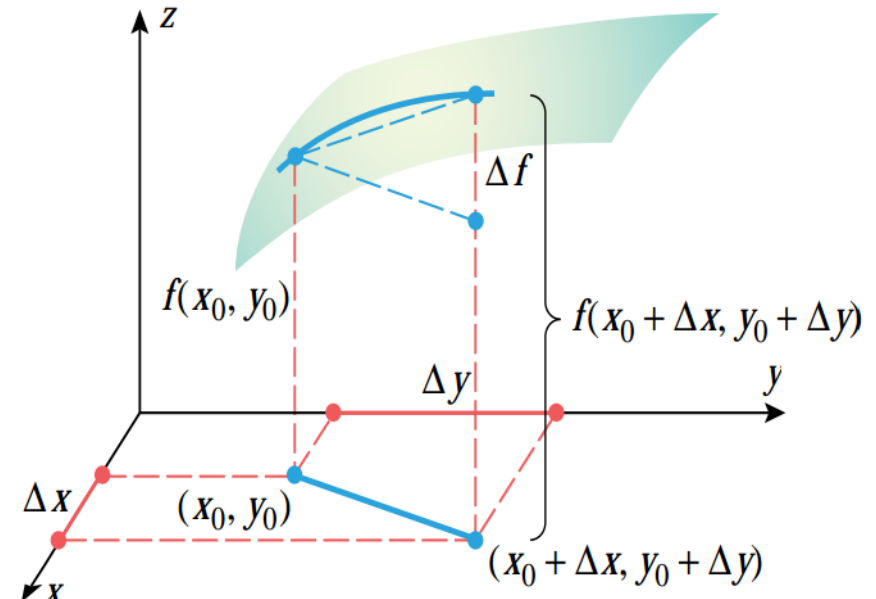
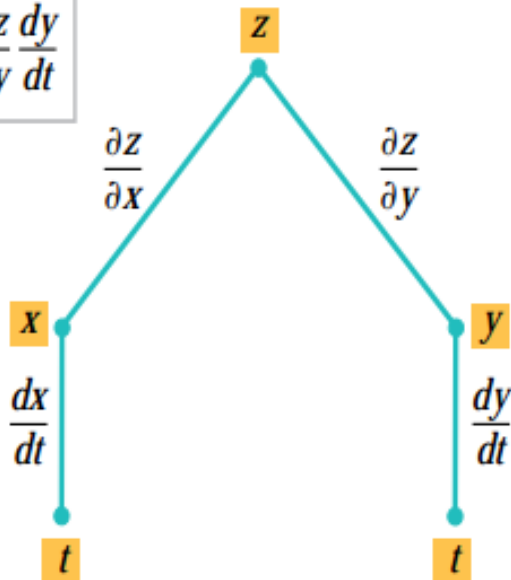
- Diferenciabilidade

- Diferencial

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

- Regra da cadeia

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

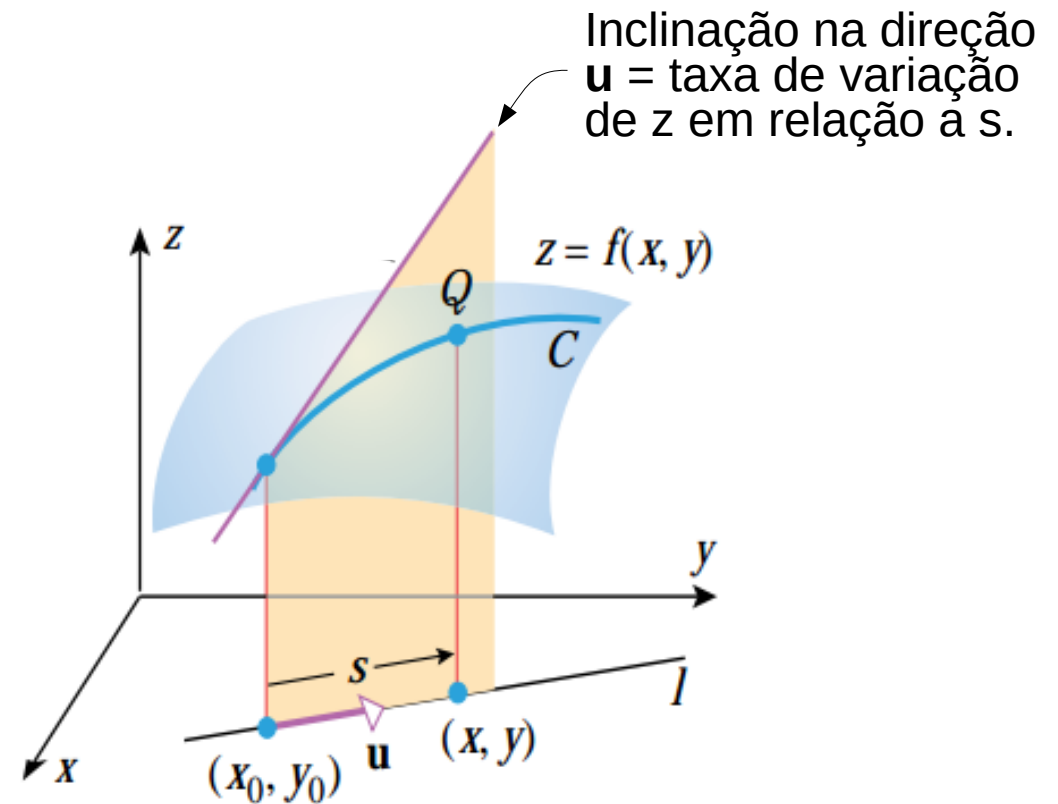
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Resumo

- Exercícios de fixação:
 - Seção 13.4
 - Exercícios de compreensão 13.4
 - 9-20
 - 21-26
 - Seção 13.5
 - Exercícios de compreensão 13.5
 - 1-10
 - 17-22

Resumo

- Próxima aula:
 - Derivadas direcionais



- Gradientes

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
 - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2.** 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
 - Seções 13.4 e 13.5