# Jacobiano

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

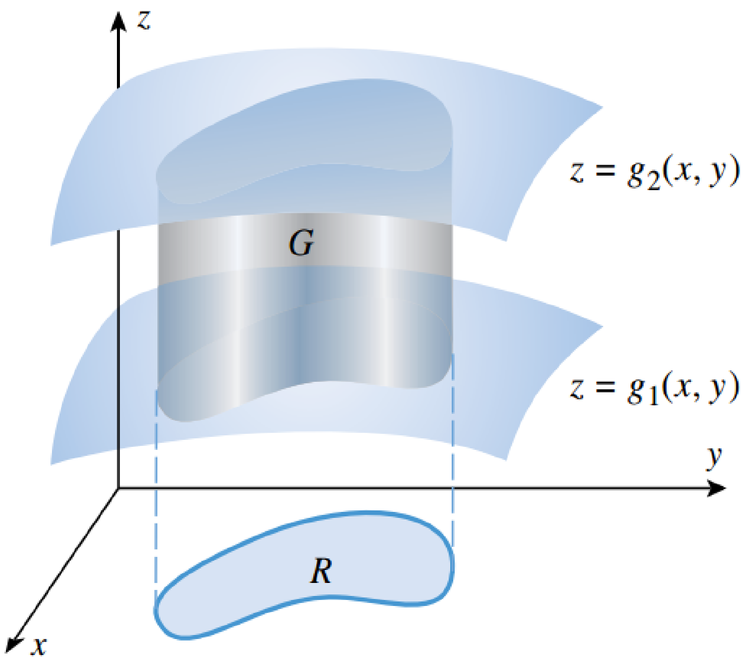
# Índice

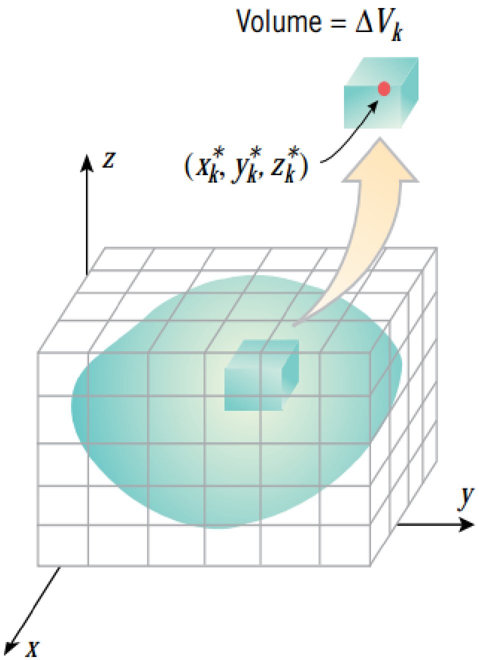
- Revisão
- Mudança de variável em integrais múltiplas
  - Jacobiano
- Resumo
- Bibliografia

# Revisão

# Revisão

- Integrais triplas
  - Caixas retangulares
  - Forma mais geral
  - Cálculo do volume



# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variável em uma integral simples
  - Se g for diferenciável e crescente ou decrescente, então g é injetora e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)\,du$$

- Sendo g decrescente

$g^{-1}(b) < g^{-1}(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(u))g'(u)\,du = \int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(u))|g'(u)|\,du$$

- Generalizando para α < β

Jacobiano

dx = |g'(u)|du
Lembrar que dx indica variação

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(u))|g'(u)|\,du$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Equações paramétricas até agora

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$ $\boxed{\text{Uma curva no plano}}$

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$ $\boxed{\text{Uma curva no espaço tridimensional}}$

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$ $\boxed{\text{Uma superfície no espaço tridimensional}}$

  - Equações paramétricas que associam pontos do plano xy com pontos do plano uv

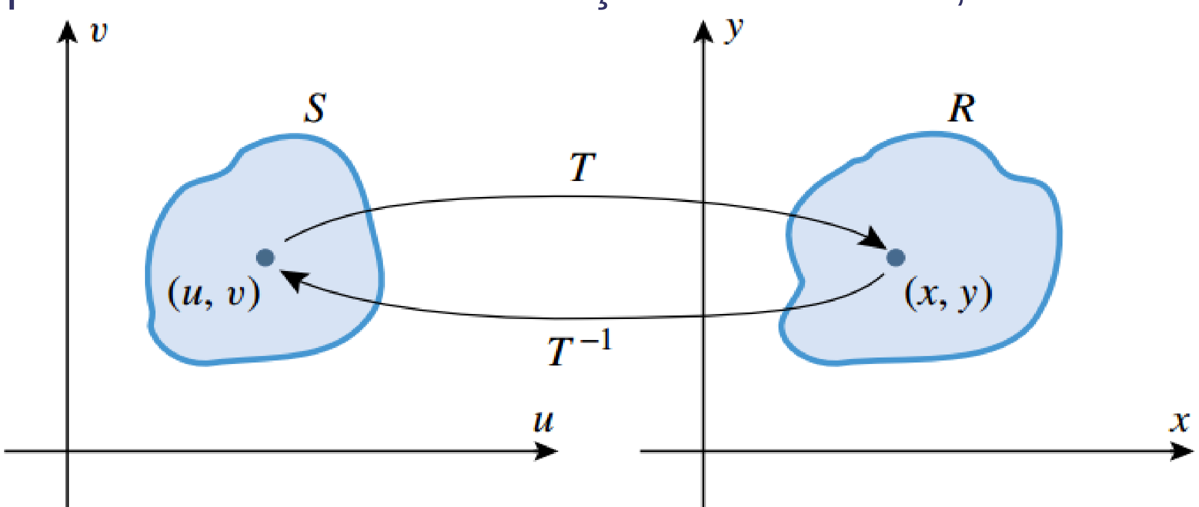
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Função T que associa pontos do plano xy com pontos do plano uv $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$
    - (x, y) é a imagem de (u, v) pela transformação T
    - Se pontos distintos do plano uv têm imagens distintas no plano xy, então se diz que T é injetora
      - Sendo assim, é possível:

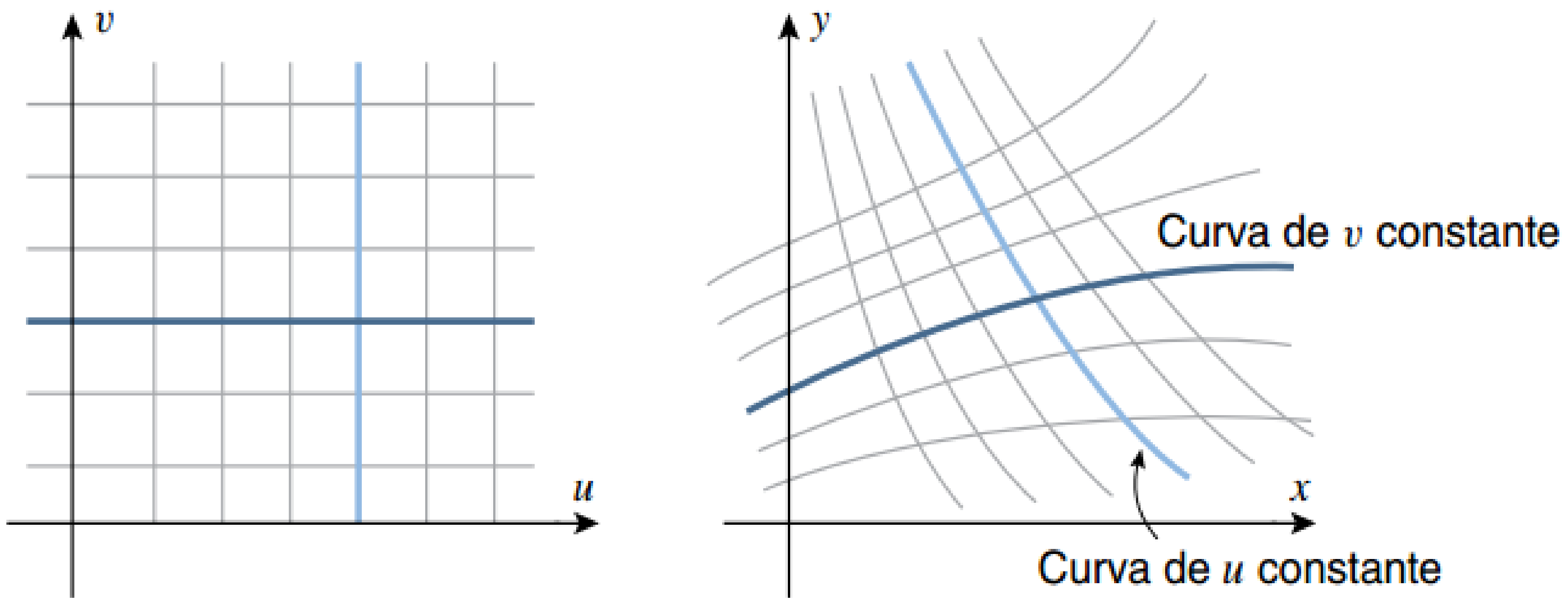
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \Rightarrow u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

que define uma transformação inversa de T, denotada por $T^{-1}$



# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano



# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$
    - Determine T(1,3)

T(u,v)=(x(u,v), y(u,v))

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$
    - Determine T(1,3)
      - u = 1 e v = 3 $\rightarrow$ T(1, 3) = (1, −1)

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$
    - Esboce as curvas de constantes
      - v = −2, −1, 0, 1, 2
      - u = −2, −1, 0, 1, 2

É conveniente usar $T^{-1}$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$
    - Esboce as curvas de constantes
      - v = −2, −1, 0, 1, 2
      - u = −2, −1, 0, 1, 2

É conveniente usar $T^{-1}$

$$4x = u + v, \quad 2y = u - v$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$
    - Esboce as curvas de constantes
      - v = −2, −1, 0, 1, 2
      - u = −2, −1, 0, 1, 2

É conveniente usar $T^{-1}$

$$4x = u + v, \quad 2y = u - v$$

$$4x + 2y = 2u, \quad 4x - 2y = 2v \quad \Rightarrow \quad 2x + y = u, \quad 2x - y = v$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$
    - Esboce as curvas de constantes
      - v = −2, −1, 0, 1, 2
      - u = −2, −1, 0, 1, 2

É conveniente usar $T^{-1}$

$$4x = u + v, \quad 2y = u - v$$

$$4x + 2y = 2u, \quad 4x - 2y = 2v \quad \Rightarrow \quad 2x + y = u, \quad 2x - y = v$$

- curvas de v constante

$$2x - y = -2, \quad 2x - y = -1, \quad 2x - y = 0, \quad 2x - y = 1, \quad 2x - y = 2$$

- curvas de u constante

$$2x + y = -2, \quad 2x + y = -1, \quad 2x + y = 0, \quad 2x + y = 1, \quad 2x + y = 2$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

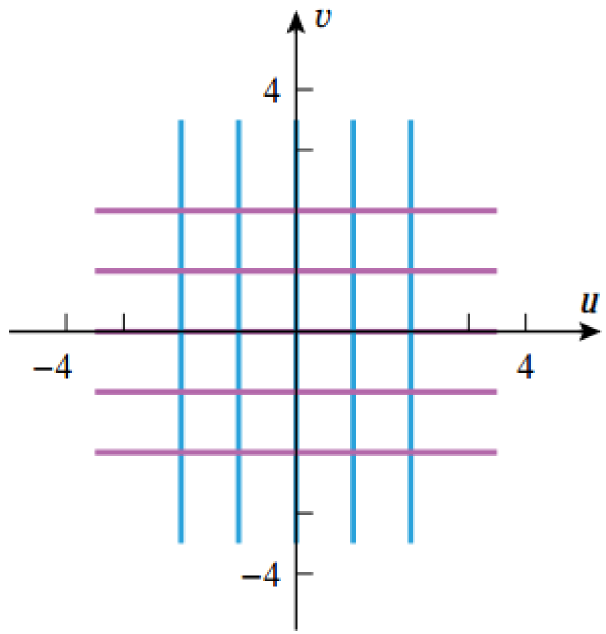
- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$
    - Esboce as curvas de constantes
      - curvas de v constante

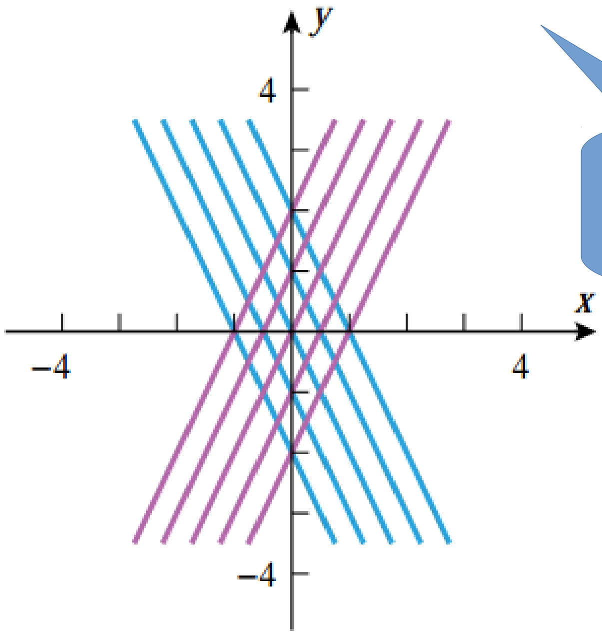
$$2x - y = -2, \quad 2x - y = -1, \quad \boxed{2x - y = 0,} \quad 2x - y = 1, \quad 2x - y = 2$$

Retas que passam pela origem

      - curvas de u constante

$$2x + y = -2, \quad 2x + y = -1, \quad \boxed{2x + y = 0,} \quad 2x + y = 1, \quad 2x + y = 2$$




Escolhe
x=0 → y=?
y=0 → x=?

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$
    - Esboce as curvas de constantes
      - curvas de v constante

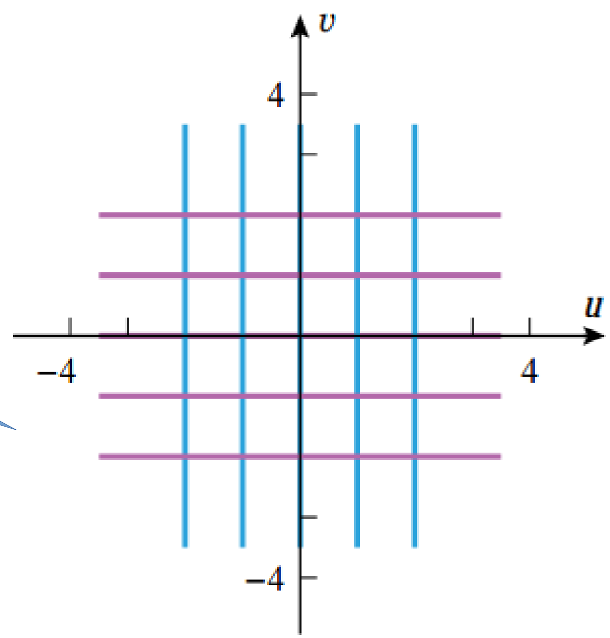
$$2x - y = -2, \quad 2x - y = -1, \quad \boxed{2x - y = 0,} \quad 2x - y = 1, \quad 2x - y = 2$$

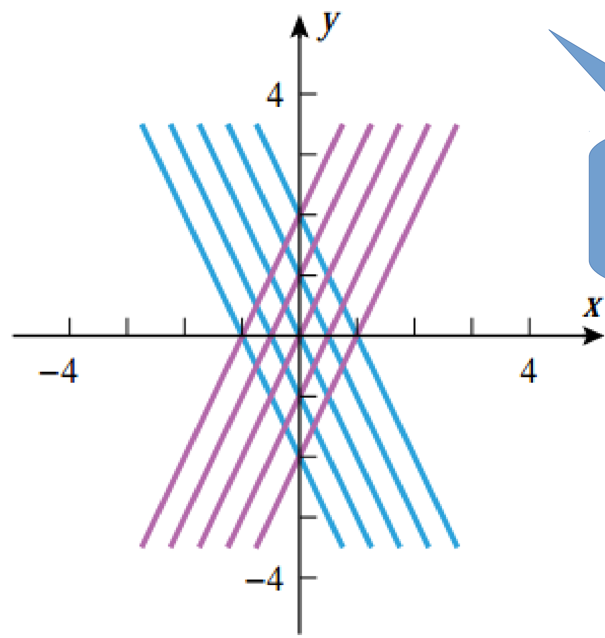
      - curvas de u constante

$$2x + y = -2, \quad 2x + y = -1, \quad \boxed{2x + y = 0,} \quad 2x + y = 1, \quad 2x + y = 2$$

Retas que passam pela origem

Qual a região limitada pelas retas u=v=-2 e u=v=2?




Escolhe
x=0 → y=?
y=0 → x=?

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

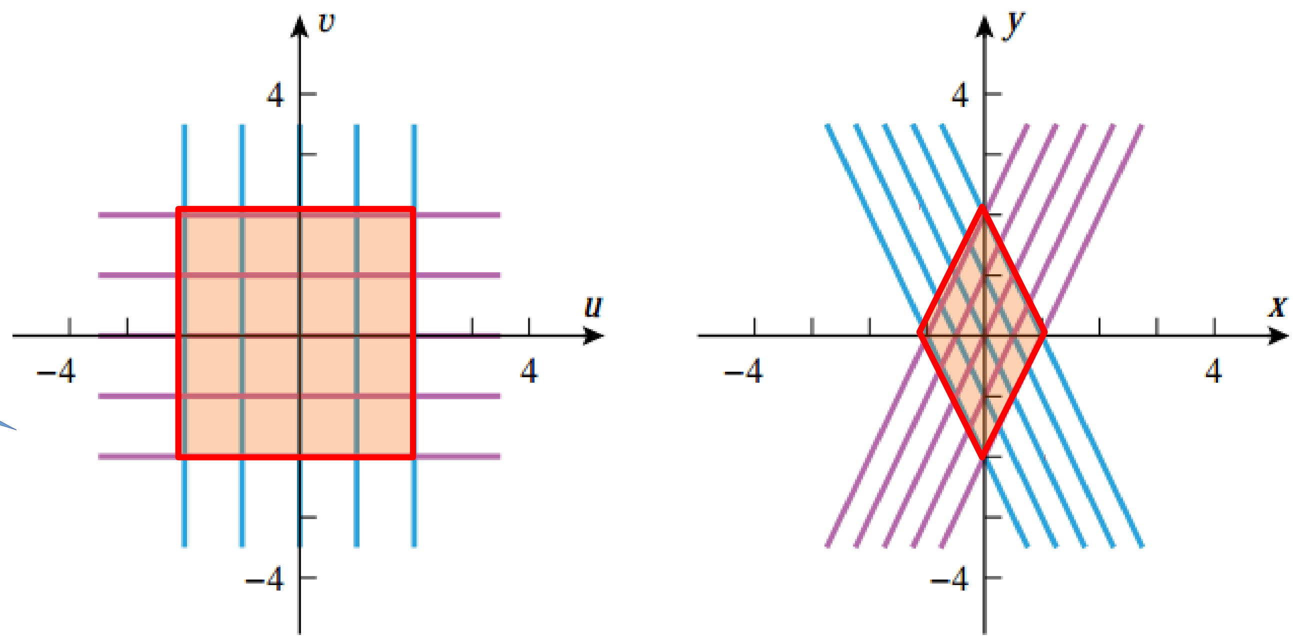
- Transformações do plano
  - Exemplo: $x = \frac{1}{4}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$
    - Esboce as curvas de constantes
      - curvas de v constante

$$2x - y = -2, \quad 2x - y = -1, \quad 2x - y = 0, \quad 2x - y = 1, \quad 2x - y = 2$$

      - curvas de u constante

$$2x + y = -2, \quad 2x + y = -1, \quad 2x + y = 0, \quad 2x + y = 1, \quad 2x + y = 2$$

Qual a região limitada pelas retas u=v=-2 e u=v=2?



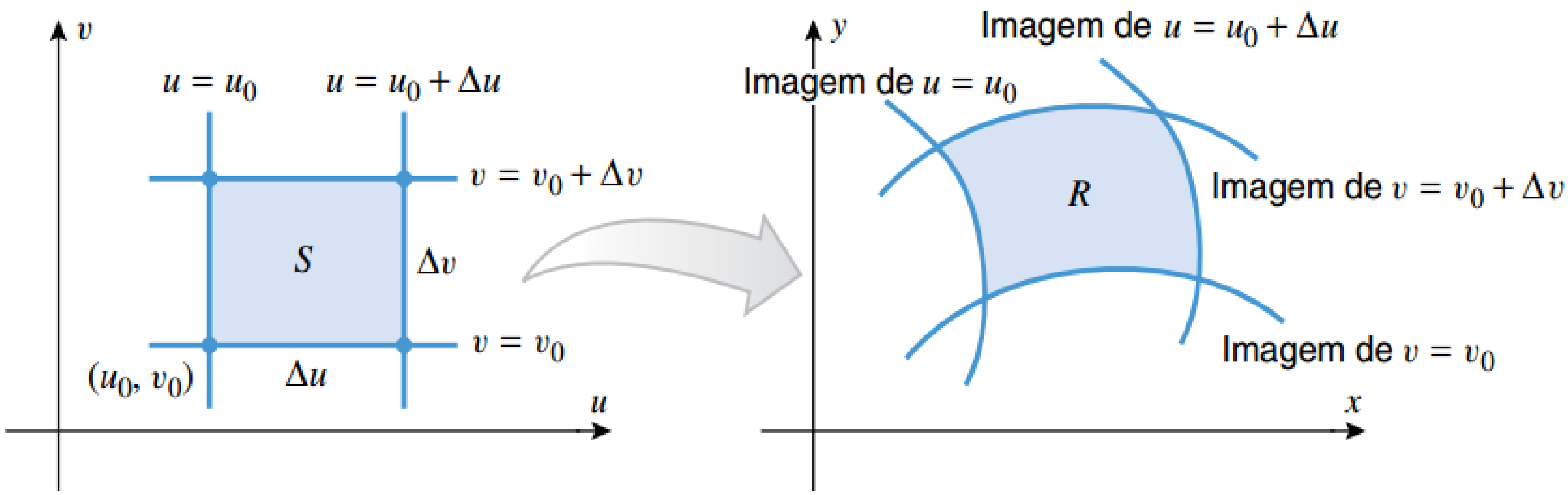
# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos em duas variáveis
  - Para produzir a mudança de variável em integrais duplas, é preciso entender a relação entre as áreas
    - Região retangular pequena em uv
    - Área no plano xy dada pela transformação

Variação!

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos em duas variáveis
  - Suponha que u e v sejam positivos
  - Considere uma região retangular S no plano uv envolvida pelas retas
    - Se as funções x(u, v) e y(u, v) forem contínuas e
    - Se Δu e Δv não forem muito grandes
    - Então a imagem de S no plano xy será uma região R que parece um paralelogramo ligeiramente distorcido

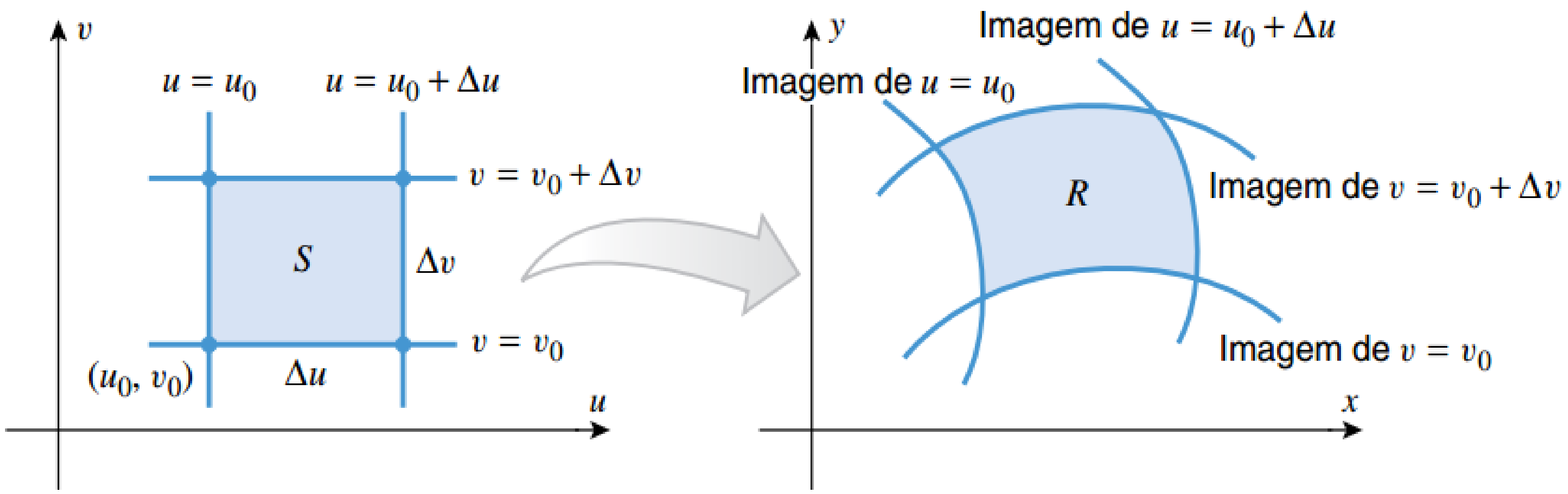


# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos em duas variáveis
  - Considerando $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$ como o vetor posição do ponto no plano

$$\mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\mathbf{i} + y(u, v_0)\mathbf{j} \qquad \boxed{\text{Curva de } v \text{ constante}}$$

$$\mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\mathbf{i} + y(u_0, v)\mathbf{j} \qquad \boxed{\text{Curva de } u \text{ constante}}$$



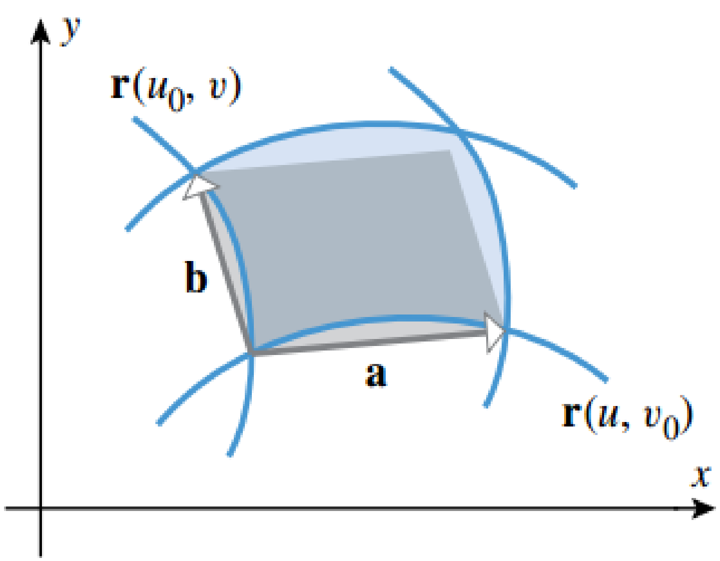
# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

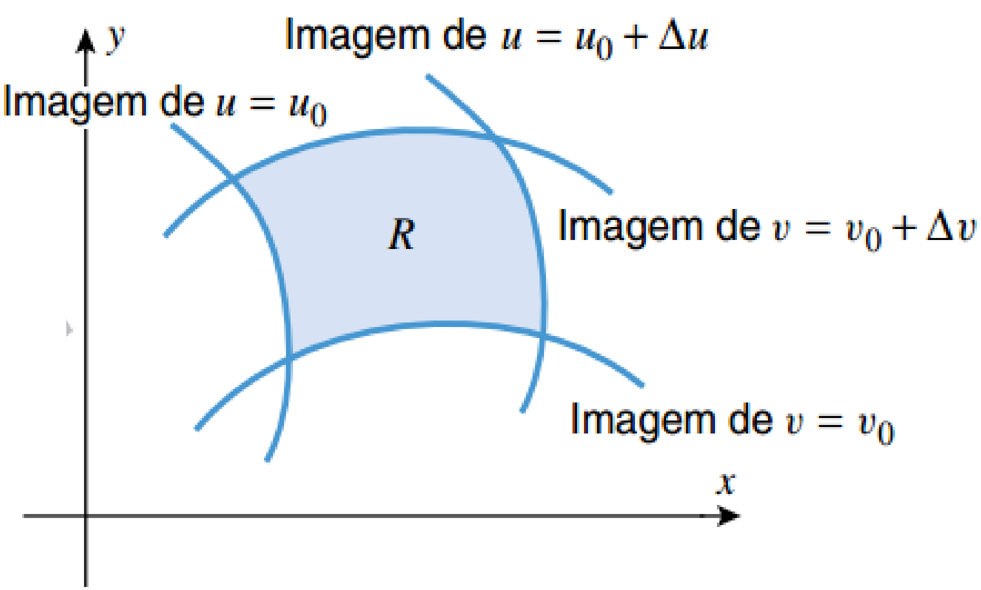
- Jacobianos em duas variáveis
  - A região R pode ser aproximada por um paralelogramo determinado pelos “vetores secante”

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

Δu e Δv são pequenos



# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

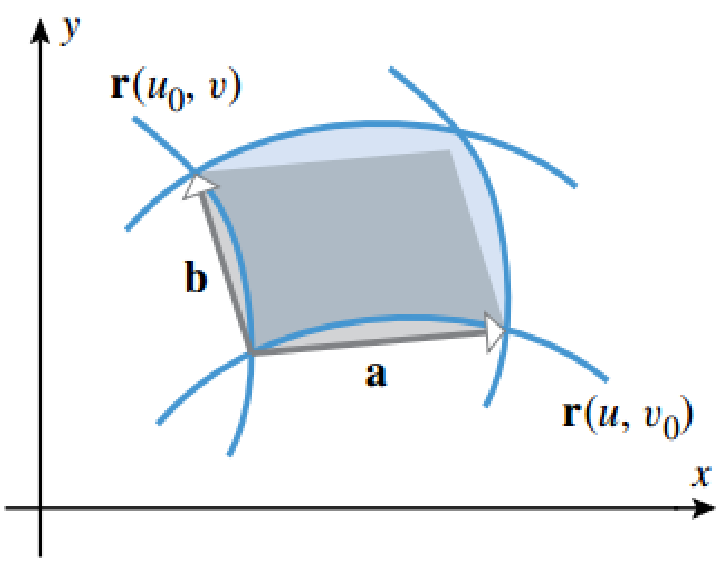
- Jacobianos em duas variáveis
  - Aproximando pelo vetor tangente

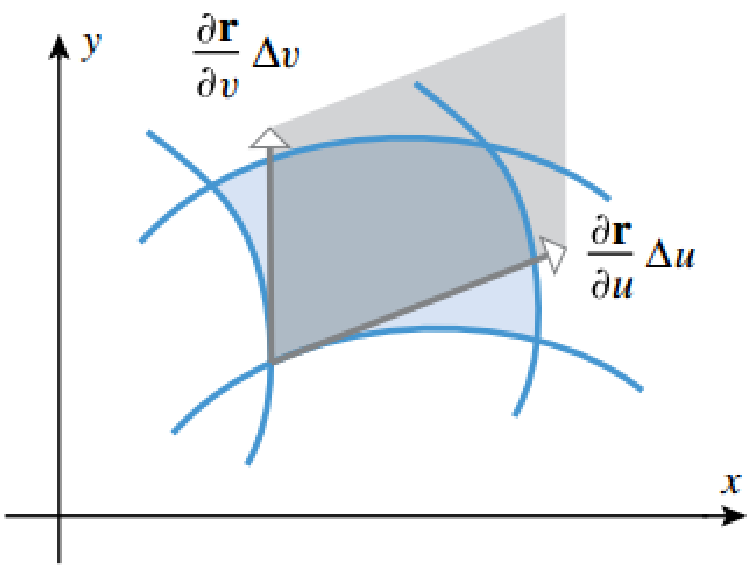
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u} \Delta u$$

$$\approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} \right) \Delta u$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta v} \Delta v$$

$$\approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} \right) \Delta v$$



# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

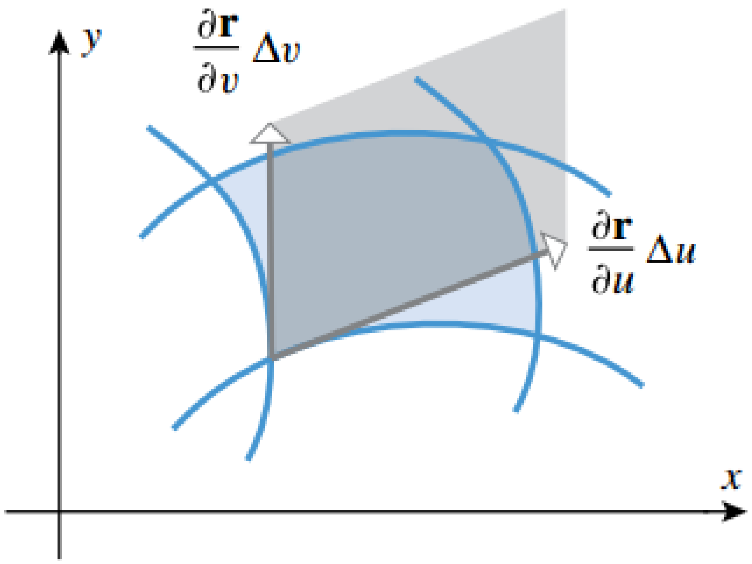
- Jacobianos em duas variáveis
  - A área da região R, ΔA, pode ser aproximada pela área do paralelogramo determinado por esses vetores a e b

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u\, \Delta v$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

det(A)= det($A^T$)



# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos em duas variáveis
  - Definição: Se T for a transformação do plano uv no plano xy definida pelas equações

    $$x = x(u, v),\ y = y(u, v),$$

    então o **jacobiano** de T será denotado por J(u, v) ou ∂(x, y)/∂(u, v) e definido por

    $$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos em duas variáveis
  - Definição: Se T for a transformação do plano uv no plano xy definida pelas equações

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),$$

então o **jacobiano** de T será denotado por J(u, v) ou ∂(x, y)/∂(u, v) e definido por

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

O erro tende a zero quando Δu→0 e Δv→0

  - Assim:

Unitário

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k} \right\| \Delta u\, \Delta v \Rightarrow \Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais duplas
  - Se a transformação x = x(u, v), y = y(u, v) levar a região S do plano uv na região R do plano xy e
  - se o jacobiano ∂(x, y)/∂(u, v) for não nulo e não mudar de sinal em S,
  - então, com restrições apropriadas na transformação e nas regiões, vale

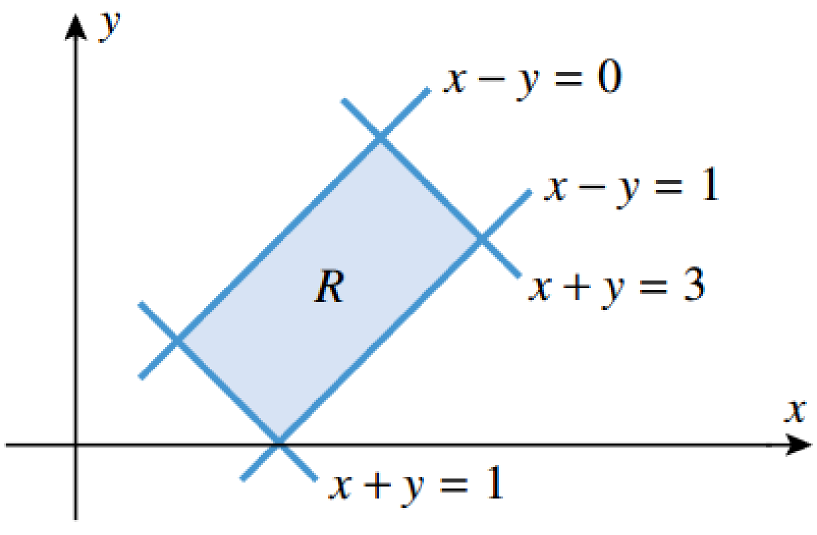
$$\iint_R f(x, y)\, dA_{xy} = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais duplas
  - Exemplo: Calcule a integral dupla, onde R é a região compreendida pelas retas

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA$$

$$x - y = 0,\ x - y = 1,$$
$$x + y = 1 \text{ e } x + y = 3$$



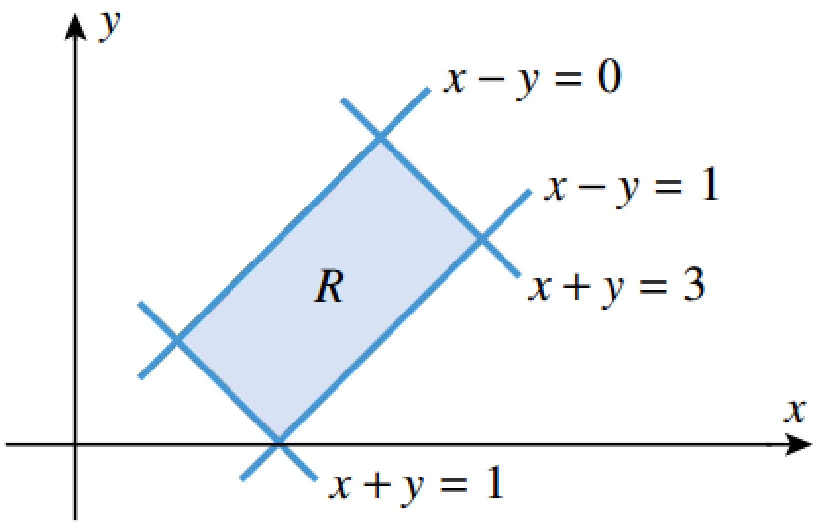

Teria que subdividir R e integrar cada parte separadamente

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais duplas
  - Exemplo: Calcule a integral dupla, onde R é a região compreendida pelas retas

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\,dA$$

$$x-y=0,\ \overbrace{x-y}^{v}=1,$$
$$\underbrace{x+y}_{u}=1 \text{ e } x+y=3$$




Teria que subdividir R e integrar cada parte separadamente

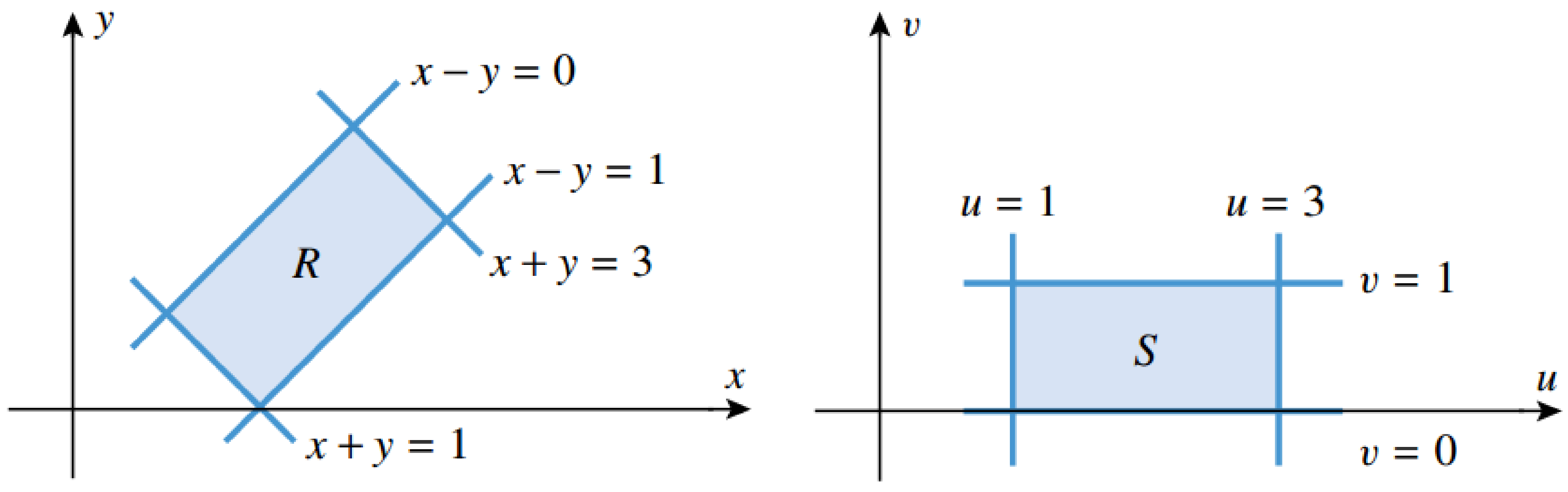
# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais duplas
  - Exemplo: Calcule a integral dupla, onde R é a região compreendida pelas retas

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA$$

$$x - y = 0,\ x - y = 1,$$
$$x + y = 1 \text{ e } x + y = 3$$

$$u = 1, \quad u = 3, \quad v = 0, \quad v = 1$$



# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais duplas
  - Exemplo: Calcule a integral dupla, onde R é a região compreendida pelas retas

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA$$

$$x - y = 0,\ x - y = 1,$$
$$x + y = 1 \text{ e } x + y = 3$$

$$u = 1, \quad u = 3, \quad v = 0, \quad v = 1$$

  - Jacobiano ( ∂(x, y)/∂(u, v) )

$$u = x + y, \quad v = x - y \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}(u + v), \quad y = \tfrac{1}{2}(u - v)$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais duplas
  - Exemplo: Calcule a integral dupla, onde R é a região compreendida pelas retas

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA$$

$$x - y = 0,\ x - y = 1,$$
$$x + y = 1 \text{ e } x + y = 3$$

  - Mudança de variável

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA = \iint_S \frac{v}{u} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais duplas
  - Exemplo: Calcule a integral dupla, onde R é a região compreendida pelas retas

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA \qquad\qquad x-y=0,\ x-y=1,\quad x+y=1 \text{ e } x+y=3$$

  - Mudança de variável

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA = \iint_S \frac{v}{u} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

$$= \iint_S \frac{v}{u} \left| -\frac{1}{2} \right| dA_{uv} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_1^3 \frac{v}{u}\, du\, dv$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais duplas
  - Exemplo: Calcule a integral dupla, onde R é a região compreendida pelas retas

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA \qquad\qquad x-y=0,\ x-y=1,\quad x+y=1 \text{ e } x+y=3$$

  - Mudança de variável

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA = \iint_S \frac{v}{u}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv}$$

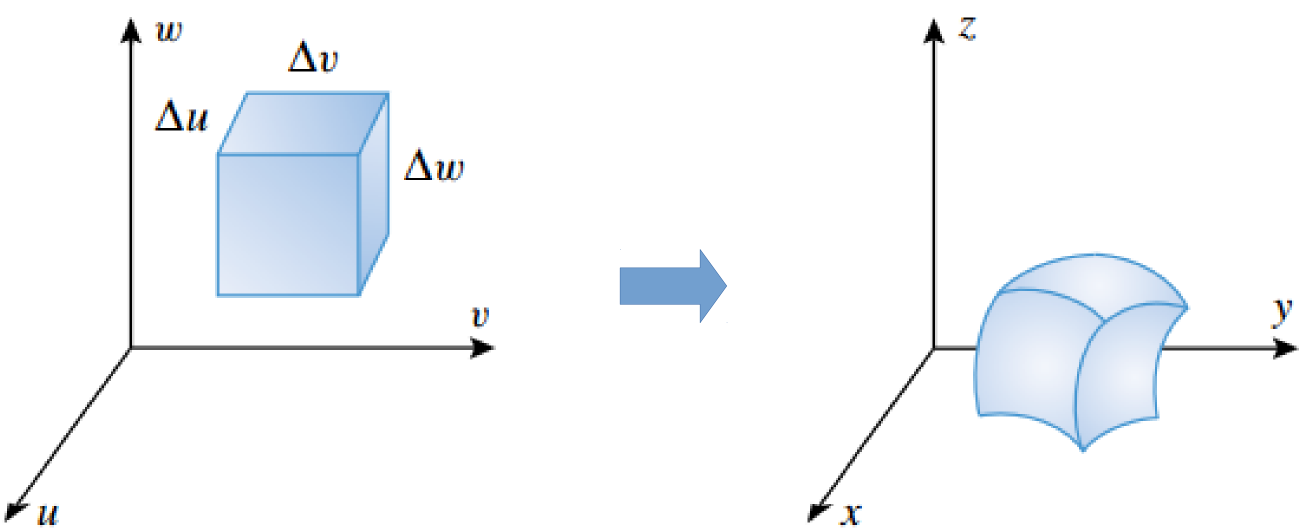
$$= \iint_S \frac{v}{u}\left|-\frac{1}{2}\right| dA_{uv} = \frac{1}{2}\int_0^1\int_1^3 \frac{v}{u}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v \ln|u|\Big]_{u=1}^{3} dv = \frac{1}{2}\ln 3\int_0^1 v\, dv = \frac{1}{4}\ln 3$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Similar ao de integrais duplas

- Mudança de variáveis em integrais triplas
  - Transformação T do espaço uvw no espaço xyz



# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Similar ao de integrais duplas

- Mudança de variáveis em integrais triplas
  - Definição: Se T for a transformação do espaço uvw para o espaço xyz definida pelas equações x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), então o jacobiano de T será denotado por J(u, v, w) ou ∂(x, y, z)/∂(u, v, w) e definido por

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Similar ao de integrais duplas

- Mudança de variáveis em integrais triplas
  - Definição: Se T for a transformação do espaço uvw para o espaço xyz definida pelas equações x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), então o jacobiano de T será denotado por J(u, v, w) ou ∂(x, y, z)/∂(u, v, w) e definido por

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

  - Assim

$$\Delta V \approx \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \Delta u \, \Delta v \, \Delta w$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Similar ao de integrais duplas

- Mudança de variáveis em integrais triplas
  - Se a transformação x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) levar a região S do espaço uvw na região R do espaço xyz, e se o jacobiano ∂(x, y, z)/∂(u, v, w) for não nulo e não mudar de sinal em S, então, com restrições apropriadas na transformação e nas regiões, vale

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV_{xyz} = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV_{uvw}$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais triplas
  - Exercício: Calcule o volume da região G envolvida pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Como vai ser a mudança de variável?

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais triplas
  - Exercício: Calcule o volume da região G envolvida pelo elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
  - Volume
$$V = \iiint_G dV$$
  - Mudança de variável
$$\begin{cases} x = au, \quad y = bv, \quad z = cw \\ u^2 + v^2 + w^2 = 1 \end{cases}$$
  - Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Mudança de variáveis em integrais triplas
  - Exercício: Calcule o volume da região G envolvida pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

  - Volume da região $u^2 + v^2 + w^2 = 1$

$$V = \iiint_G dV = \iiint_S \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV_{uvw} = abc \iiint_S dV_{uvw}$$

$$V = \tfrac{4}{3}\pi abc$$

Volume da esfera de raio 1 é: $4\pi/3$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos também aparecem na conversão de integrais múltiplas em coordenadas retangulares para integrais iteradas em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos também aparecem na conversão de integrais múltiplas em coordenadas retangulares para integrais iteradas em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas
  - Exercício: Coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = ?$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos também aparecem na conversão de integrais múltiplas em coordenadas retangulares para integrais iteradas em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas
  - Exercício: Coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$$

# Mudança de variáveis em integrais múltiplas

- Jacobianos também aparecem na conversão de integrais múltiplas em coordenadas retangulares para integrais iteradas em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas
  - Exemplo:
    - Coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

    - Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y &= \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= \rho\cos(\phi) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2\sin(\phi)$$

# Resumo

# Resumo

- Mudança de variáveis em integrais múltiplas
  - Jacobiano

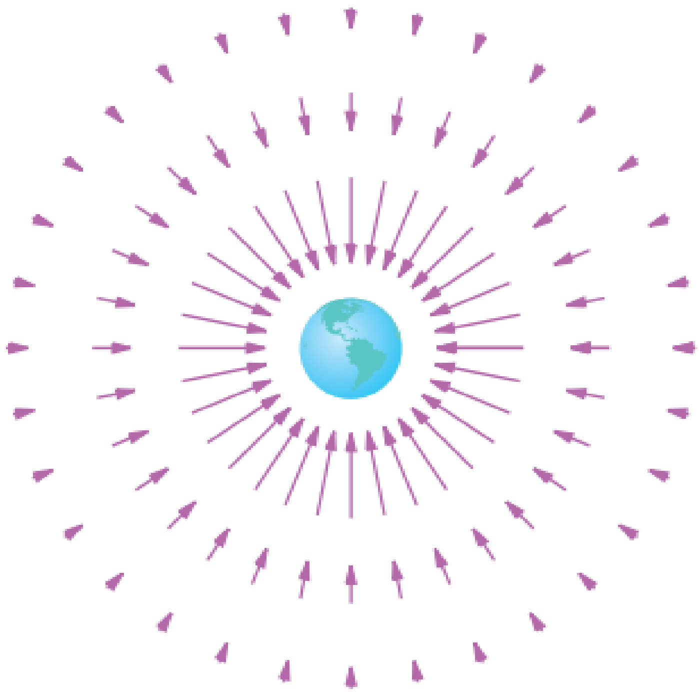
$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

# Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 14.7
    - Exercícios de compreensão 14.7
    - 1-16

# Resumo

- Próxima aula:
  - Campos vetoriais



# Bibliografia

# Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 14.7