# Limite e derivadas parciais

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

# Índice

# Revisão

# Revisão

- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x, y)$ $w=f(x, y, z)$ $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

# Revisão

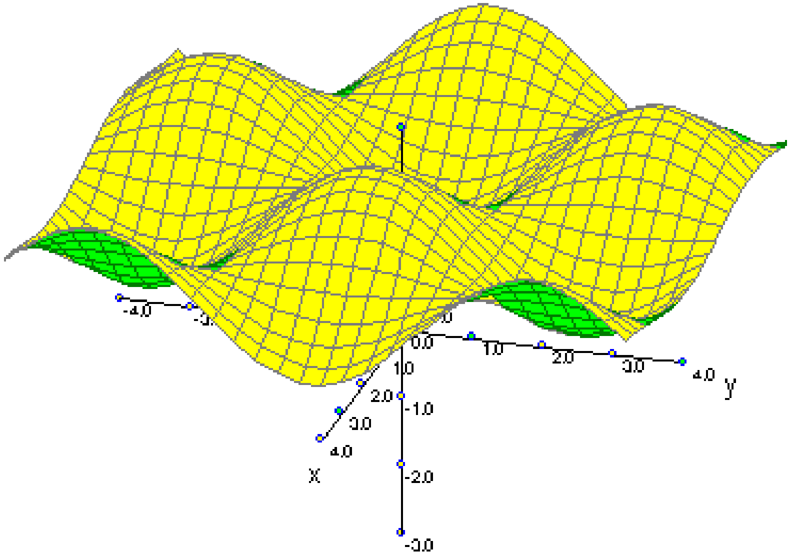
- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $\quad w=f(x,y,z)$ $\quad u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$
  - Domínio

# Revisão

- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z = f(x, y)$ $w = f(x, y, z)$ $u = f(x_1, x_{2,} \ldots, x_n)$
  - Domínio
  - Funções definidas por tabelas

# Revisão

- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $w=f(x,y,z)$ $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
  - Domínio
  - Funções definidas por tabelas
  - Curvas / Superfícies de nível

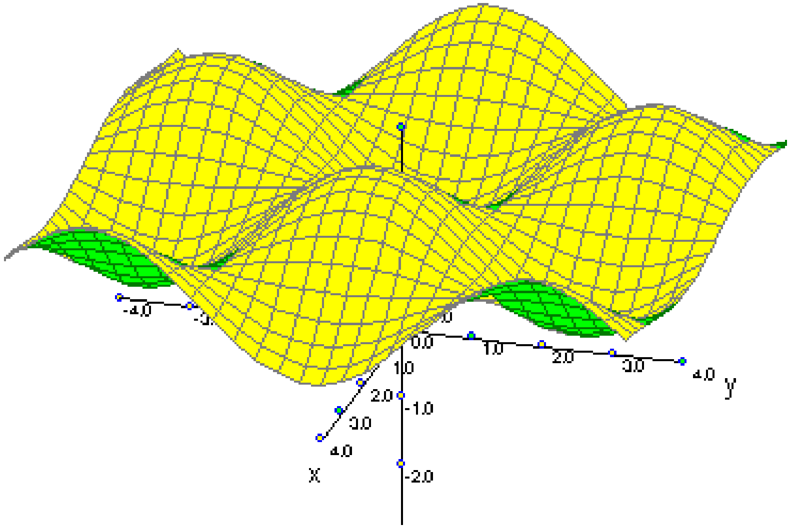


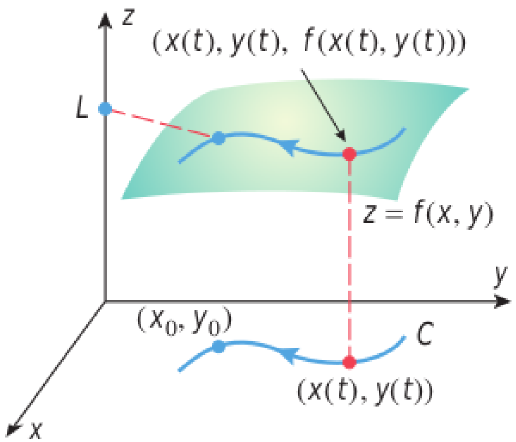



FONTE: http://matesup.cl/cursos/mate2-iie/fvv===/curvasnivel/c1animation-0.gif

# Revisão

- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $w=f(x,y,z)$ $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
  - Domínio
  - Funções definidas por tabelas
  - Curvas / Superfícies de nível
- Limites
  - Limite ao longo de curva

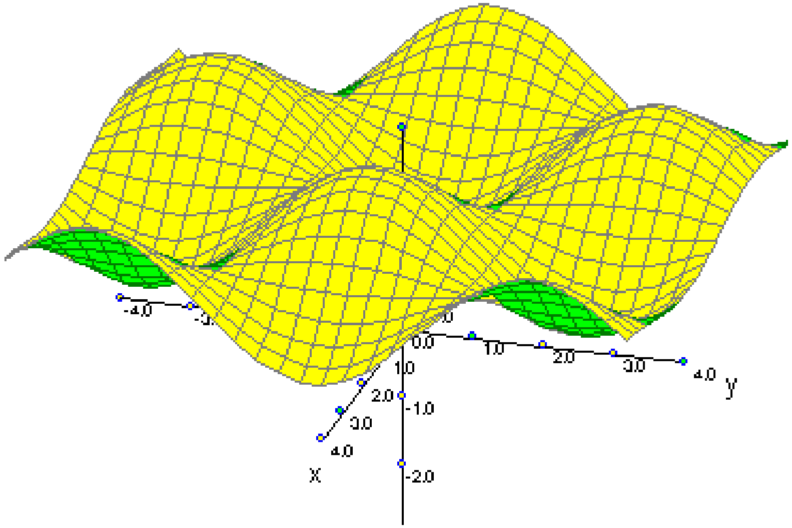


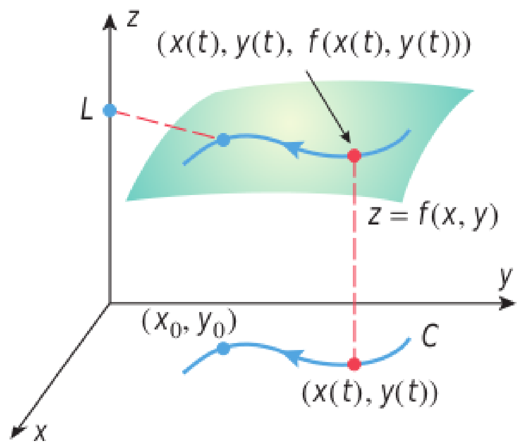


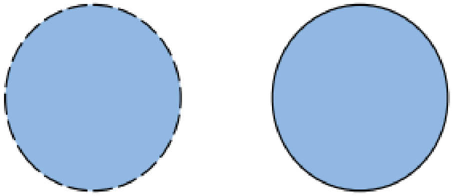

FONTE: http://matesup.cl/cursos/mate2-iie/fvv===/curvasnivel/c1animation-0.gif

# Revisão

- Funções de duas ou mais variáveis
  - Notação $z=f(x,y)$ $w=f(x,y,z)$ $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
  - Domínio
  - Funções definidas por tabelas
  - Curvas / Superfícies de nível
- Limites
  - Limite ao longo de curva
  - Conjuntos abertos e fechados







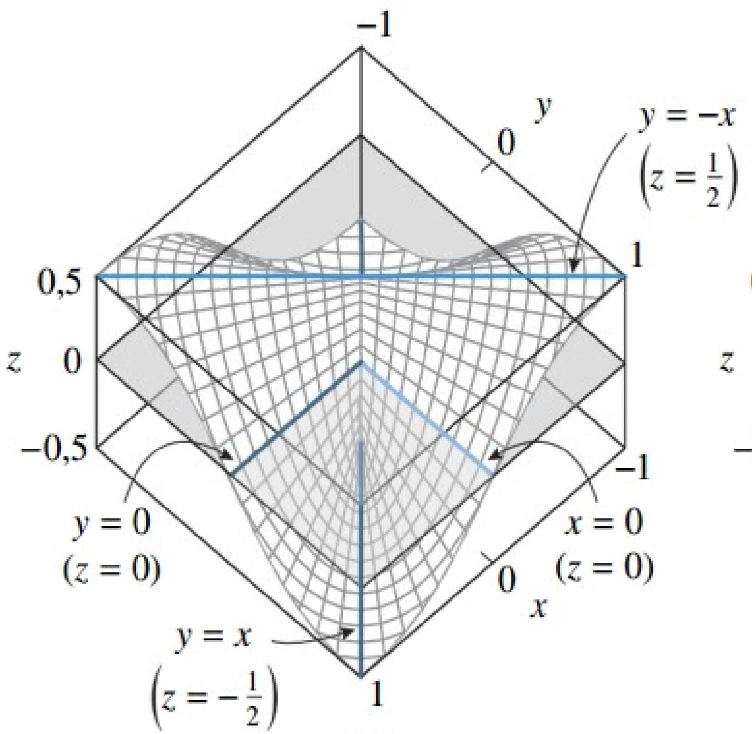
FONTE: http://matesup.cl/cursos/mate2-iie/fvv===/curvasnivel/c1animation-0.gif

# Revisão

- Dúvida da aula passada

A função é zero independente de quem é t, porque y=0!

$$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$



(b)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{(ao longo de } y=0)}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} f(t, 0)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(-\frac{0}{t^2}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

# Objetivos da aula

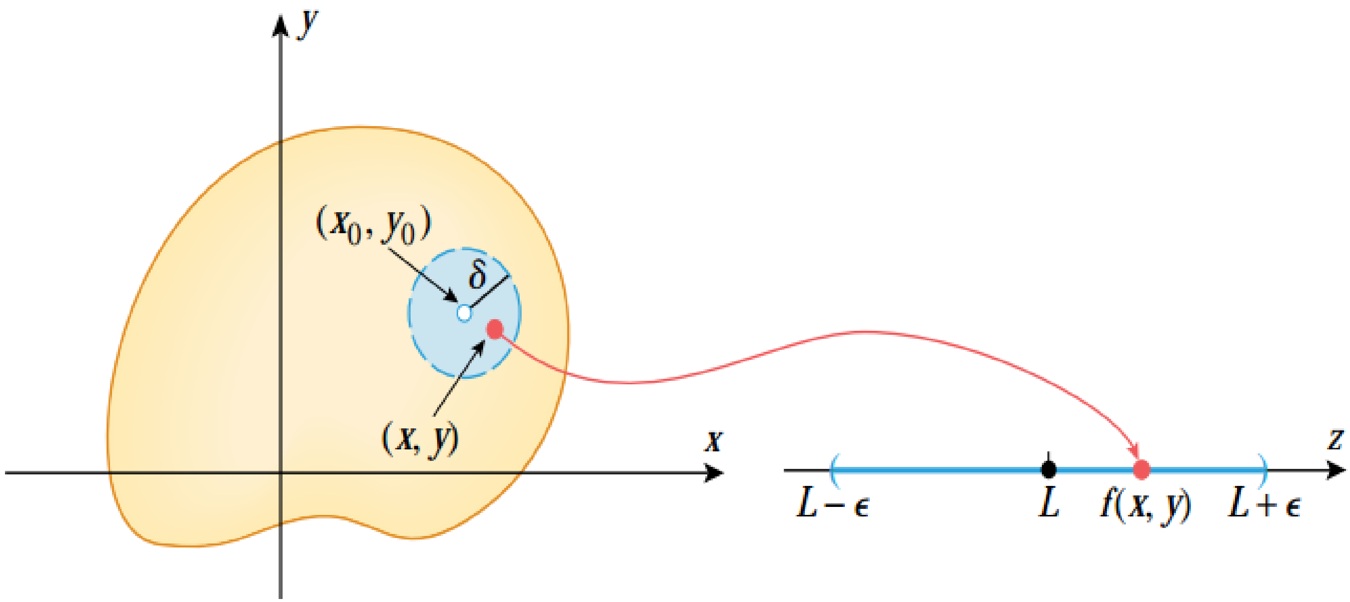
- Compreender os limites gerais para funções de duas ou mais variáveis e a sua continuidade
- Entender o conceito de derivadas parciais

# Limites e continuidade

# Limites e continuidade

- Limites gerais de funções de duas variáveis

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$



# Limites e continuidade

- Limites gerais de funções de duas variáveis
  - Definição:

    Seja *f* uma função de duas variáveis e suponha que *f* esteja definida em todos os pontos de algum disco aberto centrado em $(x_0, y_0)$, exceto, possivelmente, em $(x_0, y_0)$

    Escrevemos $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

    se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que $f(x, y)$ satisfaça

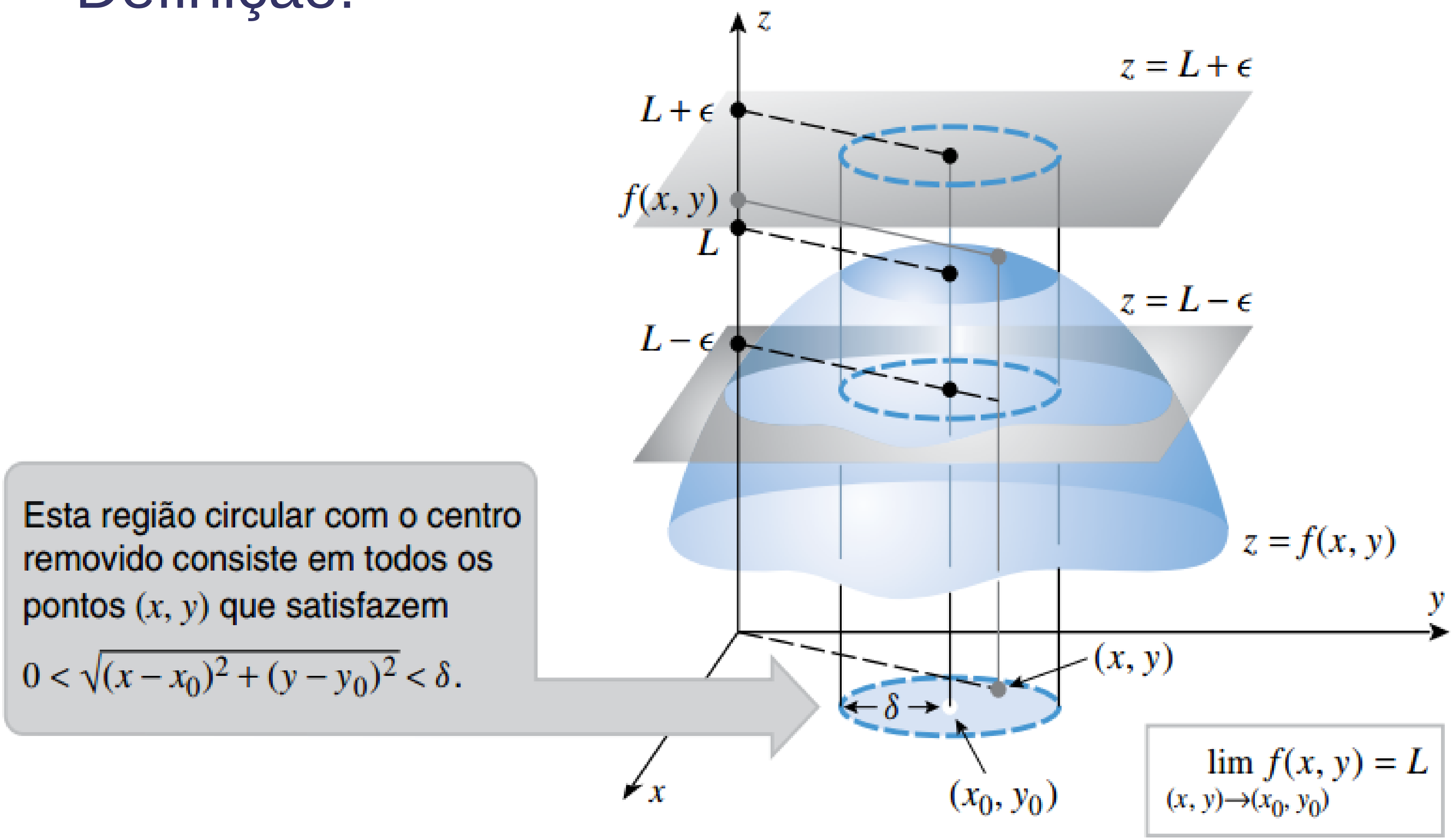
    $$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

    sempre que a distância entre $(x, y)$ e $(x_0, y_0)$ satisfizer

    $$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

# Limites e continuidade

- Limites gerais de funções de duas variáveis
  - Definição:



# Limites e continuidade

- Limites gerais de funções de duas variáveis
  - Exemplo

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2 - 9]$$

# Limites e continuidade

- Limites gerais de funções de duas variáveis
  - Exemplo

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2 - 9]$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2 - 9] &= \lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2] - \lim_{(x,y)\to(1,4)} 9 \\ &= 5\left[\lim_{(x,y)\to(1,4)} x\right]^3 \left[\lim_{(x,y)\to(1,4)} y\right]^2 - 9 \\ &= 5(1)^3(4)^2 - 9 = 71 \blacktriangleleft\end{aligned}$$

# Limites e continuidade

- Limites gerais de funções de duas variáveis
  - Relações entre limites gerais e limites ao longo de curvas lisas
    - Se $f(x, y) \to L$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, então $f(x, y) \to L$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ ao longo de qualquer curva lisa.
    - Se o limite de $f(x, y)$ deixar de existir quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ ao longo de alguma curva lisa, ou se $f(x, y)$ tiver limites diferentes quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ ao longo de duas curvas lisas diferentes, então o limite de $f(x, y)$ não existe quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

A curva lisa serve para dar o contra exemplo!

# Limites e continuidade

- Limites gerais de funções de duas variáveis
  - Exemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{xy}{x^2+y^2}$$

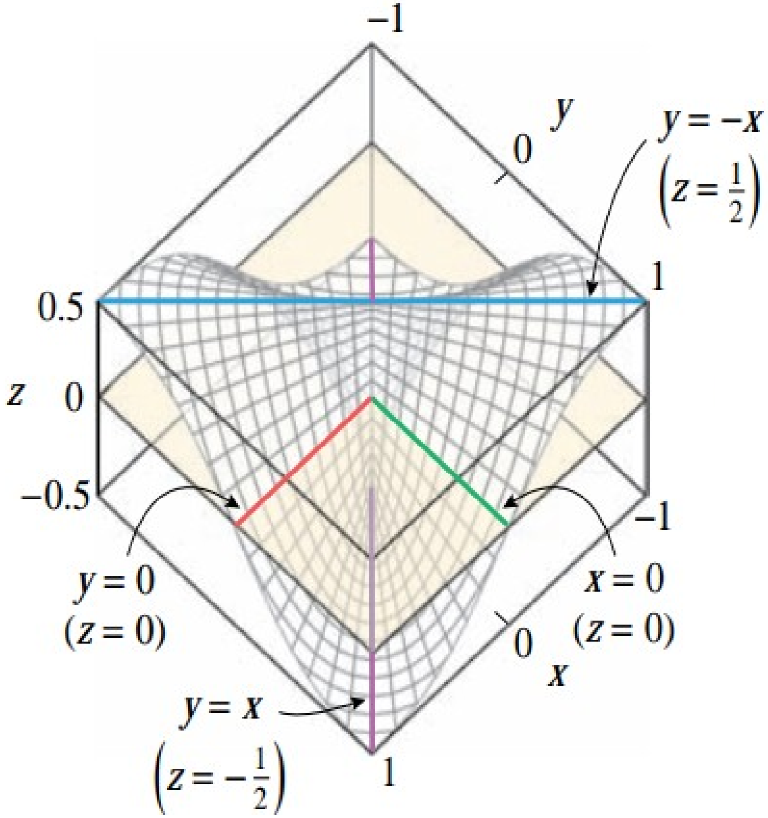
# Limites e continuidade

- Limites gerais de funções de duas variáveis
  - Exemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{xy}{x^2+y^2}$$

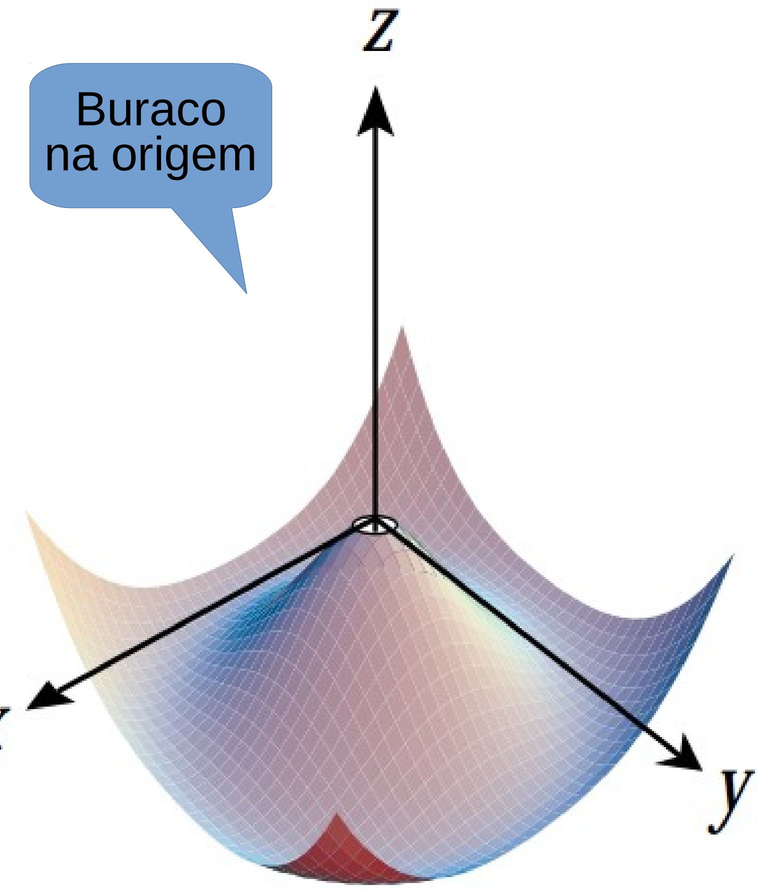
$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\ \text{(ao longo de } x\,=\,0)}} -\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

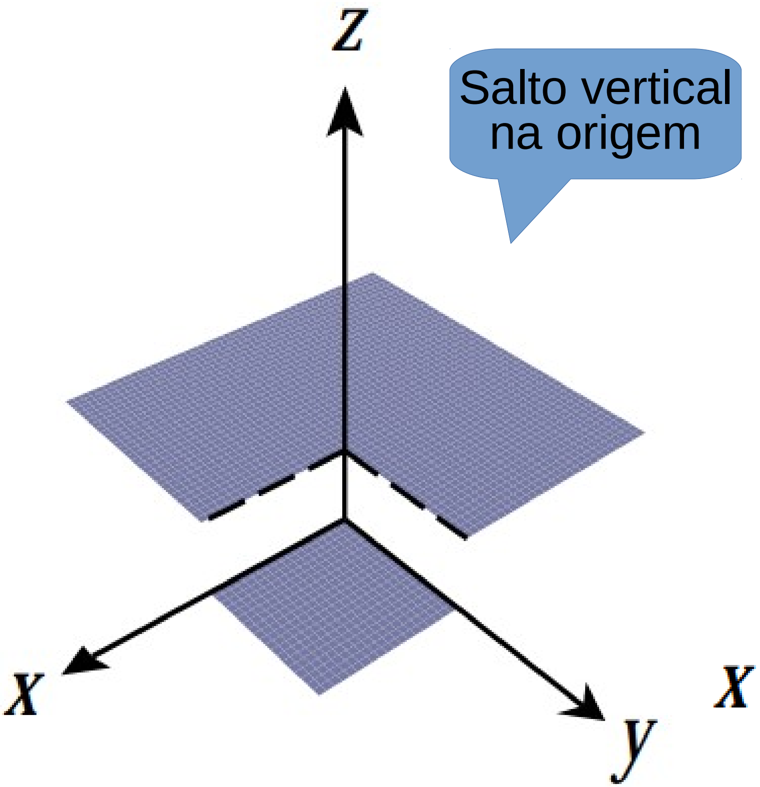
$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\ \text{(ao longo de } y\,=\,x)}} -\frac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$$

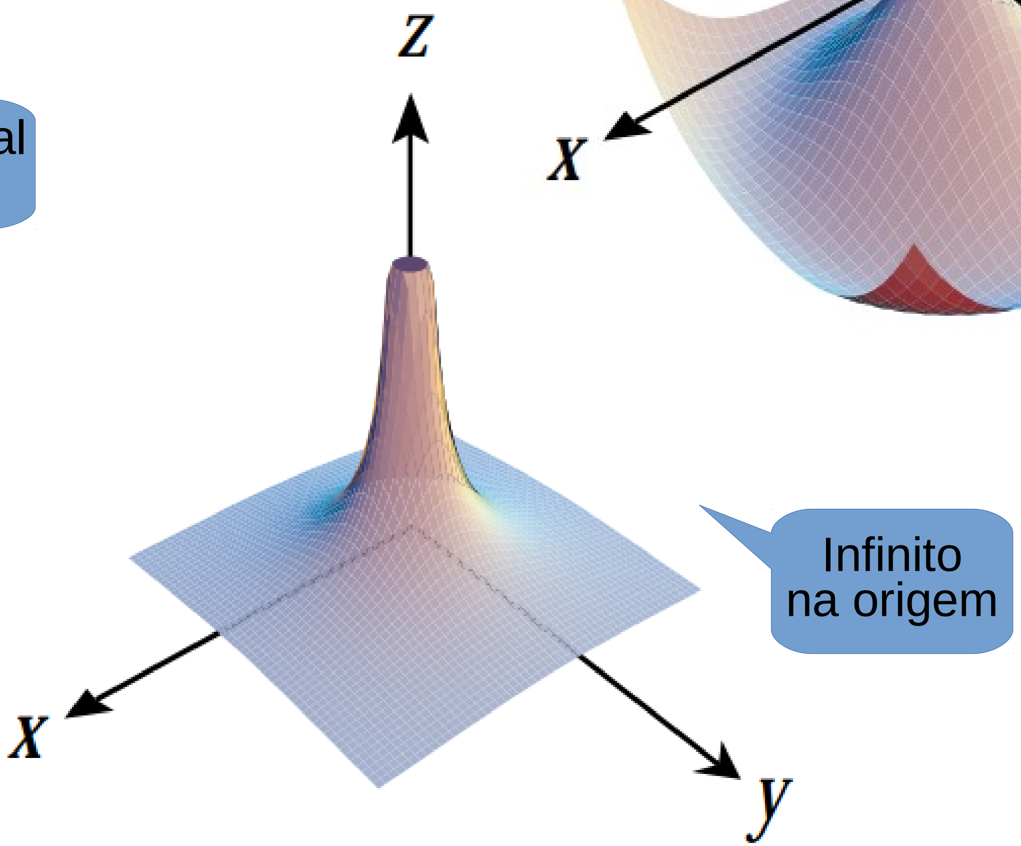


# Limites e continuidade

- Continuidade
  - Exemplo de funções não contínuas



# Limites e continuidade

- Continuidade
  - Definição:
    - Dizemos que uma função *f(x, y)* é **contínua** em $(x_0, y_0)$ se $f(x_0, y_0)$ estiver definido e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

    - Se *f* for contínua em cada ponto de um conjunto aberto D, então dizemos que f é **contínua em D**;
    - Se *f* for contínua em todo ponto do plano *xy*, então dizemos que f é **contínua em toda parte**.

Análoga a funções de uma variável

# Limites e continuidade

- Continuidade
  - Teorema: Combinação de funções
    - Se $g(x)$ for contínua em $x_0$ e $h(y)$ for contínua em $y_0$, então $f(x, y) = g(x)h(y)$ será contínua em $(x_0, y_0)$.
    - Se $h(x, y)$ for contínua em $(x_0, y_0)$ e $g(u)$ for contínua em $u = h(x_0, y_0)$, então a composição $f(x, y) = g(h(x, y))$ será contínua em $(x_0, y_0)$.
    - Se $f(x, y)$ for contínua em $(x_0, y_0)$ e $x(t)$ e $y(t)$ forem contínuas em $t_0$, com $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$, então a composição $f(x(t), y(t))$ será contínua em $t_0$

# Limites e continuidade

- Continuidade
  - Exemplo: Use o Teorema para mostrar que as funções $f(x, y) = 3x^2y^5$ e $f(x, y) = \text{sen}(3x^2y^5)$

    são contínuas em toda parte

# Limites e continuidade

- Continuidade
  - Exemplo: Use o Teorema para mostrar que as funções $f(x, y) = 3x^2y^5$ e $f(x, y) = \text{sen}(3x^2y^5)$

    são contínuas em toda parte

    - Os polinômios $g(x) = 3x^2$ e $h(y) = y^5$ são contínuos, portanto, pelo primeiro ponto do teorema, a primeira função é contínua.
    - Como a primeira função é contínua e *sin(u)* é contínua em cada ponto u da reta real, segue pelo segundo ponto do teorema, que a composição é contínua em toda parte.

# Limites e continuidade

- Continuidade
  - Reconhecendo funções contínuas
    - A **composição** de funções contínuas é contínua.
    - A **soma**, a **diferença** ou o **produto** de funções contínuas é contínua.
    - O **quociente** de funções contínuas é contínua, **exceto** onde o denominador for zero.

# Limites e continuidade

- Continuidade
  - Exemplos:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{1 - xy}$$

# Limites e continuidade

- Continuidade
  - Exemplos:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

É contínua em $(-1, 2)$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{(-1)(2)}{(-1)^2+(2)^2} = -\frac{2}{5}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3y^2}{1-xy}$$

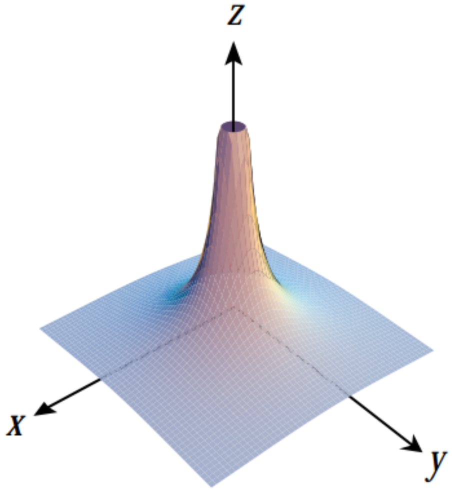
É contínua exceto onde $1 - xy = 0$.

# Limites e continuidade

- Limites em descontinuidades
  - Alguns limites são fáceis de visualizar que não existem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$$

    tende ao infinito ao longo de qualquer curva lisa




$$z = \frac{1}{x^2+y^2}$$

# Limites e continuidade

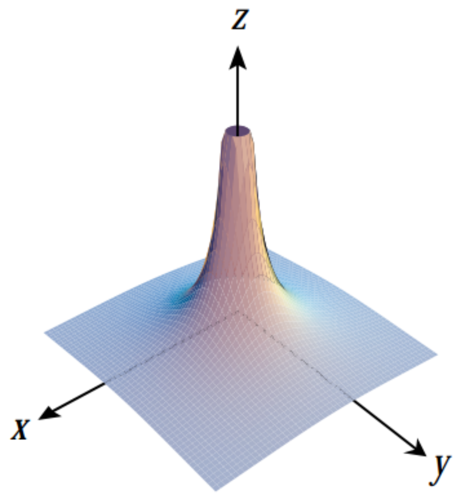
- Limites em descontinuidades
  - Alguns limites são fáceis de visualizar que não existem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$$

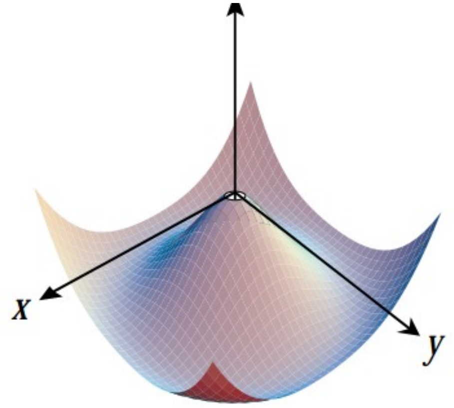
    tende ao infinito ao longo de qualquer curva lisa
  - Contudo tem limites não tão evidentes

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

    - Está na forma indeterminada 0.∞




$z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$




$z = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

# Limites e continuidade

- Limites em descontinuidades
  - Exemplo: Determine usando coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

Tende a ∞

Tende a 0

# Limites e continuidade

- Limites em descontinuidades
  - Exemplo: Determine usando coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) &= \lim_{r\to 0^+} r^2 \ln r^2 \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{2\ln r}{1/r^2} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{2/r}{-2/r^3} \\
&= \lim_{r\to 0^+} (-r^2) = 0
\end{aligned}$$

# Limites e continuidade

- Limites em descontinuidades
  - Exemplo: Determine usando coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2) &= \lim_{r\to 0^+} r^2 \ln r^2 \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{2\ln r}{1/r^2} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{2/r}{-2/r^3} \\ &= \lim_{r\to 0^+} (-r^2) = 0\end{aligned}$$

É uma descontinuidade removível, se for definido f(0,0) = 0

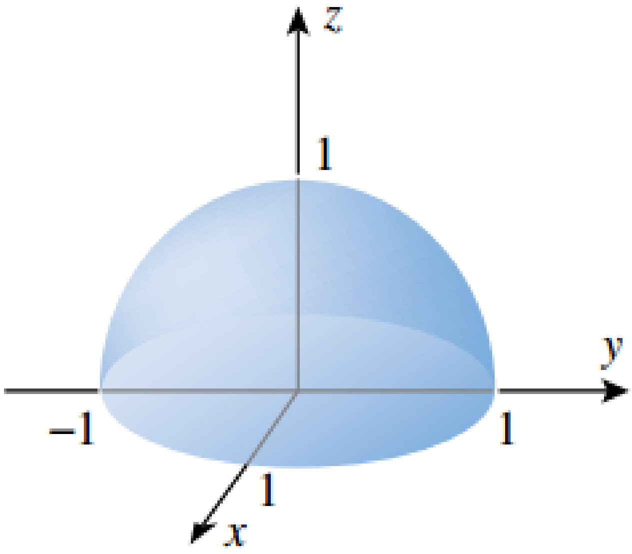
# Limites e continuidade

- Continuidade em pontos de fronteira
  - É preciso modificando apropriadamente a definição de limite, de tal modo que *(x, y)* seja forçado a aproximar $(x_0, y_0)$ somente por pontos que estejam completamente no domínio de *f*.

Como o limite lateral para funções de uma variável

# Limites e continuidade

- Continuidade em pontos de fronteira
  - Exemplo: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

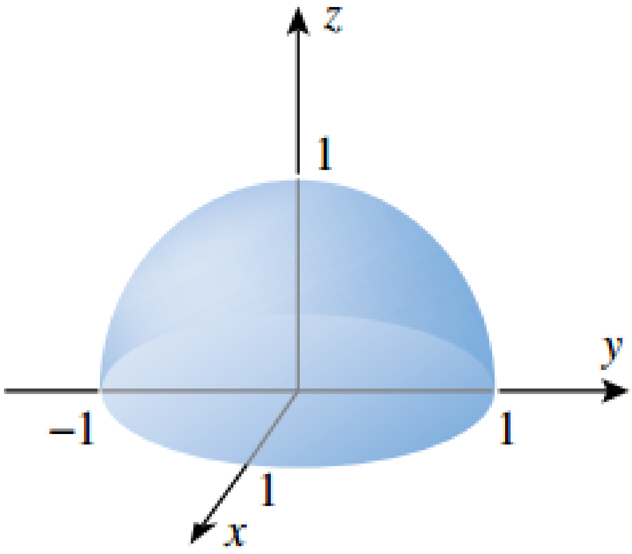



$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Intuitivamente, é contínua, por não apresentar cortes nem buracos

# Limites e continuidade

- Continuidade em pontos de fronteira
  - Exemplo: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
    - Domínio natural

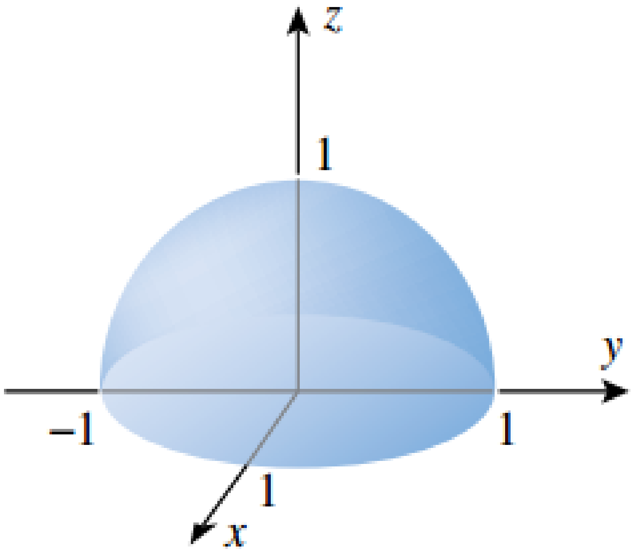



$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Intuitivamente,
é contínua, por
não apresentar
cortes nem buracos

# Limites e continuidade

- Continuidade em pontos de fronteira
  - Exemplo: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
    - Domínio natural $x^2 + y^2 \leq 1$




$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Intuitivamente, é contínua, por não apresentar cortes nem buracos

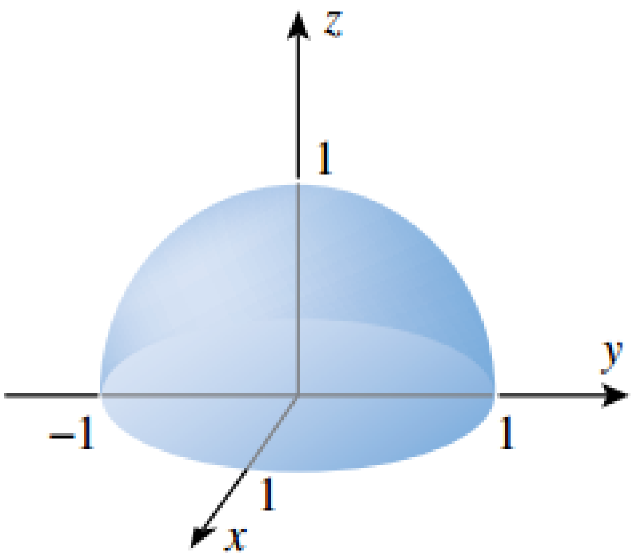
# Limites e continuidade

- Continuidade em pontos de fronteira
  - Exemplo: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
    - Domínio natural $x^2 + y^2 \leq 1$
    - A continuidade em um ponto ($x_0$, $y_0$) da fronteira reflete o fato de que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2} = 0$$

quando *(x, y)* fica restrito a pontos do disco unitário fechado

- F é contínua na fronteira




$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Intuitivamente, é contínua, por não apresentar cortes nem buracos

# Limites e continuidade

- Extensões para três variáveis
  - Definição:
    - Seja *f* uma função de três variáveis e suponha que *f* esteja definida em todos os pontos dentro de uma bola aberta centrada em $(x_0, y_0, z_0)$, exceto, possivelmente, em $(x_0, y_0, z_0)$
    - Escrevemos

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que $f(x, y, z)$ satisfaça

$$|f(x, y, z) - L| < \epsilon$$

sempre que a distância entre $(x, y, z)$ e $(x_0, y_0, z_0)$ satisfizer

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Semelhante a com duas variáveis

# Limites e continuidade

- Extensões para três variáveis
  - Continuidade
    - Definimos uma função *f(x, y, z)* de três variáveis como sendo contínua em um ponto $(x_0, y_0, z_0)$ se o limite da função e o valor da função forem o mesmo neste ponto, isto é,

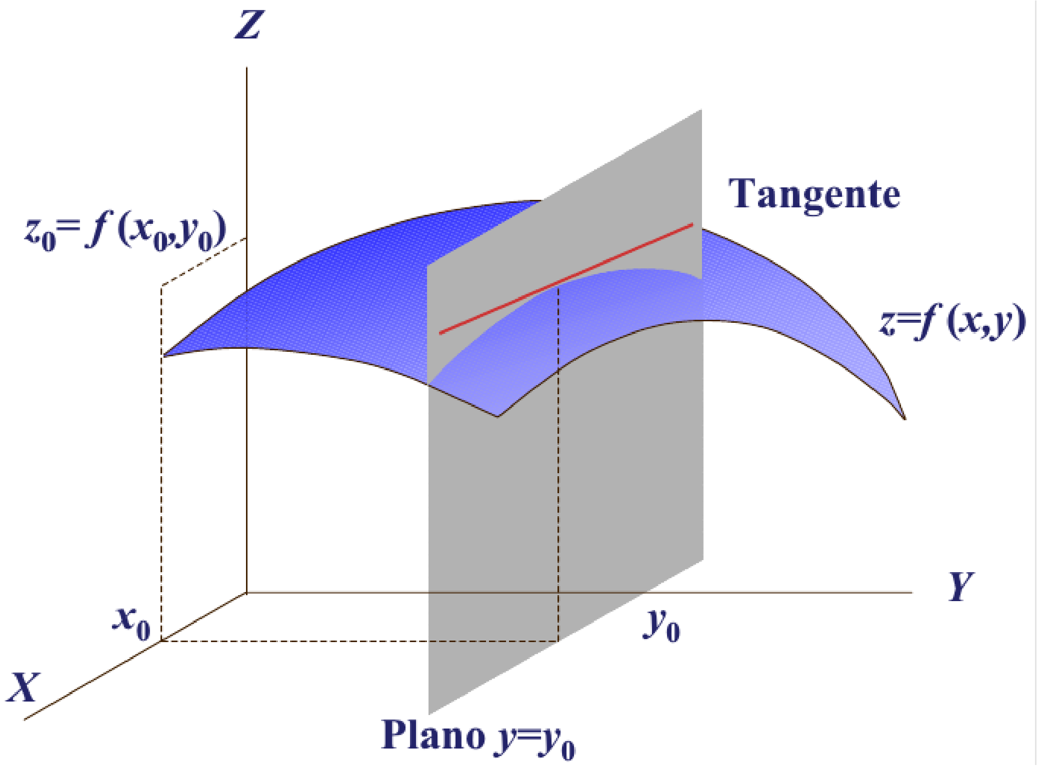
$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

Semelhante a com duas variáveis

# Derivadas parciais

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções de duas variáveis
  - Seja $z = f(x, y)$, como os valores de z variam se x for mantido fixado e a y for permitido variar ou se y for mantido fixado e a x for permitido variar?



# Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções de duas variáveis
  - Seja $z = f(x, y)$, como os valores de z variam se x for mantido fixado e a y for permitido variar ou se y for mantido fixado e a x for permitido variar?
    - Por exemplo, a lei dos gases ideais da Física afirma que, sob condições apropriadas, a pressão exercida por um gás é uma função do volume do gás e sua temperatura.

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções de duas variáveis
  - Suponha que $(x_0, y_0)$ seja um ponto do domínio de uma função $f(x, y)$.
  - Se fixarmos $y = y_0$, então $f(x, y_0)$ é uma função apenas da variável x.
  - O valor da derivada $$\frac{d}{dx}[f(x, y_0)]$$ em $x_0$ dá, portanto, uma medida da taxa de variação instantânea de $f$ em relação a $x$ no ponto $(x_0, y_0)$

Análogo para y

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções de duas variáveis
  - Definição:

    Se $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0)$ é um ponto no domínio de $f$, então a **derivada parcial de *f* em relação a x** em $(x_0, y_0)$ é a derivada em $x_0$ da função que resulta quando $y = y_0$ for mantido fixo e x for permitido variar.

    Essa derivada parcial é denotada por $f_x(x_0, y_0)$ e é dada por

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\bigg|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Análogo para y

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções de duas variáveis
  - Exemplo: Encontre $f_x(1, 3)$ e $f_y(1, 3)$ para

$$f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$$

Aplicando na formula da usando limite e fazendo as simplificações

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções de duas variáveis
  - Exemplo: Encontre $f_x(1, 3)$ e $f_y(1, 3)$ para

Aplicando na formula da usando limite e fazendo as simplificações

$$f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$$

$$f_x(x, 3) = \frac{d}{dx}[f(x, 3)] = \frac{d}{dx}[18x^3 + 4x + 6] = 54x^2 + 4$$

$$f_x(1, 3) = 54 + 4 = 58$$

$$f_y(1, y) = \frac{d}{dy}[f(1, y)] = \frac{d}{dy}[2y^2 + 2y + 4] = 4y + 2$$

$$f_y(1, 3) = 4(3) + 2 = 14$$

# Derivadas parciais

- As funções derivadas parciais
  - Omitindo os subscritos
  - Tratando como funções de *x* e *y*

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

# Derivadas parciais

- As funções derivadas parciais
  - Exemplo: Encontre $f_x(1, 3)$ e $f_y(1, 3)$ para

$$f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$$

    tratando um como constante e outro como variável

# Derivadas parciais

- As funções derivadas parciais
  - Exemplo: Encontre $f_x(1, 3)$ e $f_y(1, 3)$ para

$$f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$$

  tratando um como constante e outro como variável

    - Derivada parcial

$$f_x(x, y) = \frac{d}{dx}[2x^3y^2 + 2y + 4x] = 6x^2y^2 + 4$$

$$f_y(x, y) = \frac{d}{dy}[2x^3y^2 + 2y + 4x] = 4x^3y + 2$$

    - Substituindo

$$f_x(1, 3) = 6(1^2)(3^2) + 4 = 58 \qquad f_y(1, 3) = 4(1^3)3 + 2 = 14$$

# Derivadas parciais

- Notação de derivada parcial
  - Se $z = f(x, y)$, então as derivadas parciais $f_x$ e $f_y$ são também denotadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

  - E as derivadas parciais no ponto $(x_0, y_0)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

# Derivadas parciais

- Notação de derivada parcial
  - Exemplo: Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ para

$$z = x^4 \operatorname{sen}(xy^3)$$

# Derivadas parciais

- Notação de derivada parcial
  - Exemplo: Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ para

$$z = x^4 \operatorname{sen}(xy^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^4 \operatorname{sen}(xy^3)] = x^4 \frac{\partial}{\partial x}[\operatorname{sen}(xy^3)] + \operatorname{sen}(xy^3) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^4)$$

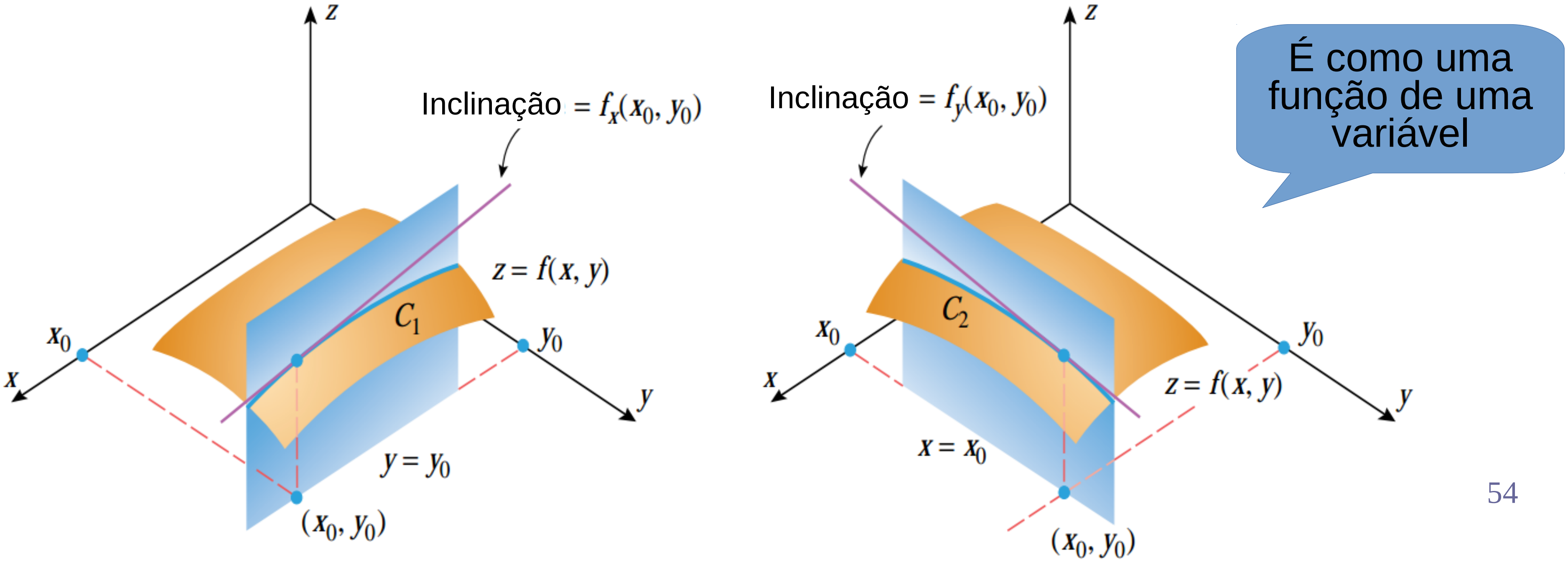
$$= x^4 \cos(xy^3) \cdot y^3 + \operatorname{sen}(xy^3) \cdot 4x^3 = x^4 y^3 \cos(xy^3) + 4x^3 \operatorname{sen}(xy^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^4 \operatorname{sen}(xy^3)] = x^4 \frac{\partial}{\partial y}[\operatorname{sen}(xy^3)] + \operatorname{sen}(xy^3) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^4)$$

$$= x^4 \cos(xy^3) \cdot 3xy^2 + \operatorname{sen}(xy^3) \cdot 0 = 3x^5 y^2 \cos(xy^3) \quad \blacktriangleleft$$

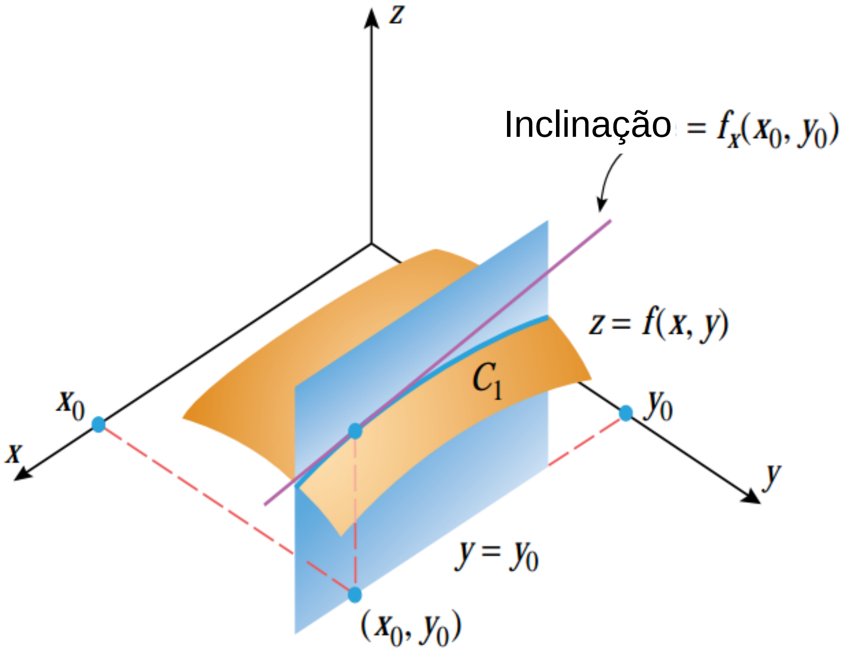
# Derivadas parciais

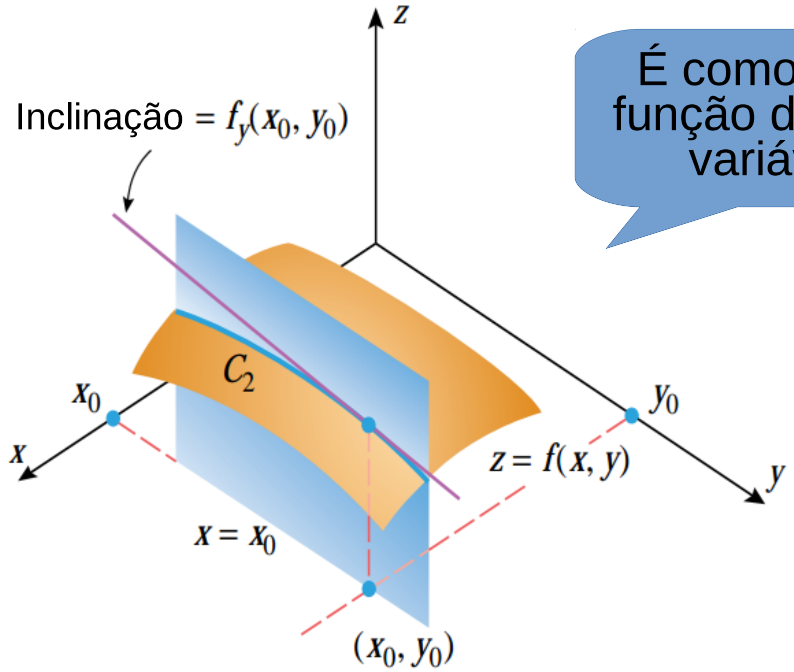
- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - Suponha que $C_1$ seja a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$ e que $C_2$ seja sua interseção com o plano $x = x_0$



# Derivadas parciais

- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - $f_x(x, y_0)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de $z$ em relação a $x$ ao longo da curva $C_1$ e $f_y(x_0, y)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de $z$ em relação a $y$ ao longo da curva $C_2$

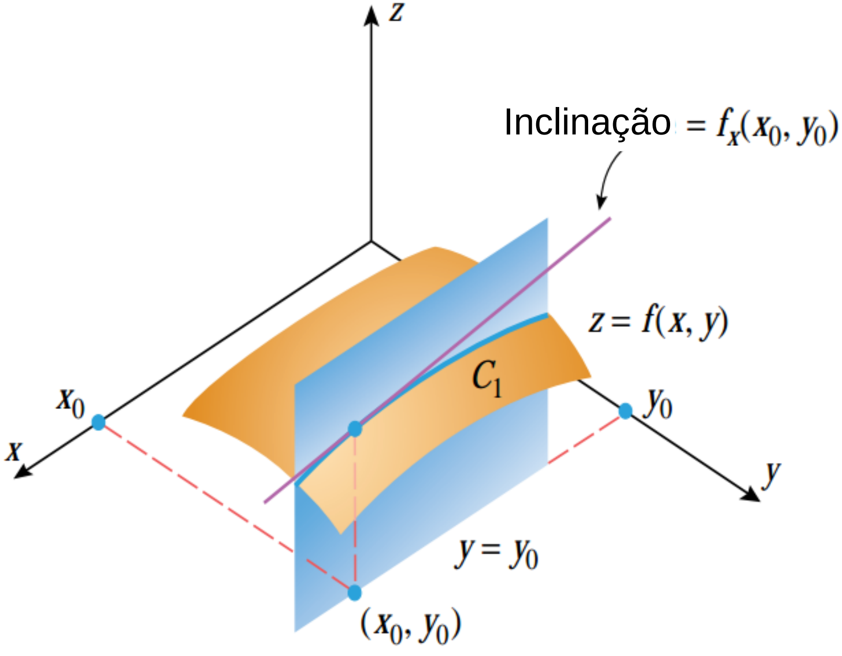


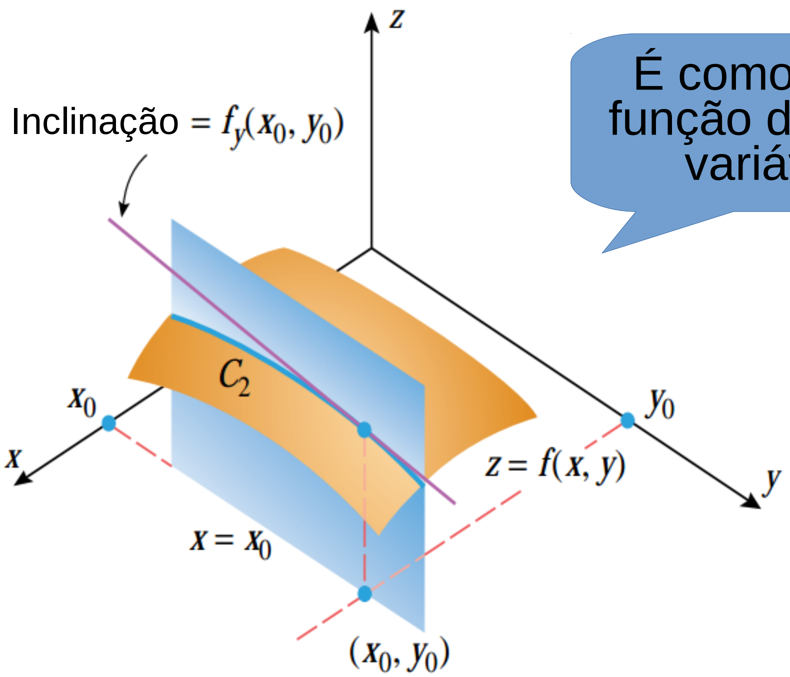




É como uma função de uma variável

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - Em particular, $f_x(x_0, y_0)$ é a taxa de variação de $z$ em relação a $x$ ao longo da curva $C_1$ no ponto $(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ é a taxa de variação de $z$ em relação a $y$ ao longo da curva $C_2$ no ponto $(x_0, y_0)$.

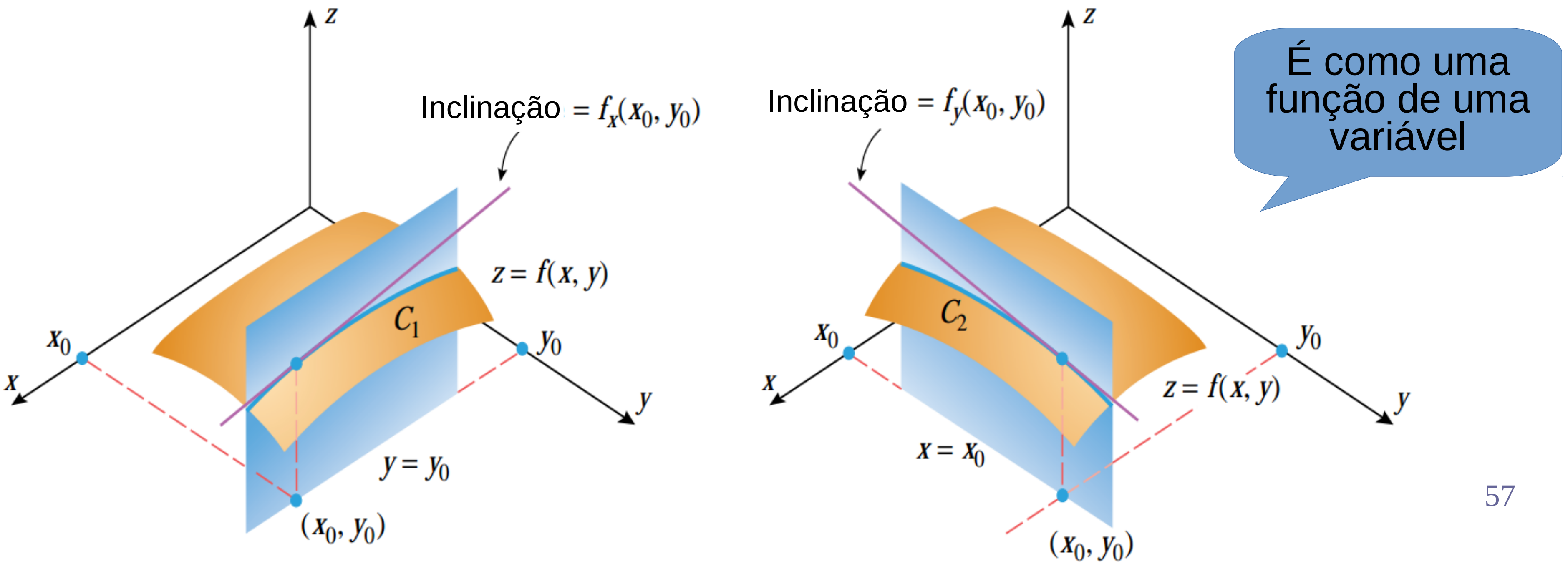



É como uma função de uma variável

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - Diremos que $f_x(x_0, y_0)$ é a **inclinação da superfície na direção *x*** em $(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, a **inclinação da superfície na direção *y*** em $(x_0, y_0)$.



# Derivadas parciais

- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - Exemplo: Calcule a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16}$$

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - Exemplo: Calcule a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16}$$

W é dado em graus Fahrenheit e v, em milhas por hora

- Derivada parcial

$$\frac{\partial W}{\partial v}(T, v) = 0 + 0 + (0{,}4275T - 35{,}75)(0{,}16)v^{0{,}16-1}$$
$$= (0{,}4275T - 35{,}75)(0{,}16)v^{-0{,}84}$$

A taxa de variação de W em relação a v é °F/(milhas/hora)

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - Exemplo: Calcule a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16}$$

    - Derivada parcial

$$\frac{\partial W}{\partial v}(T, v) = 0 + 0 + (0{,}4275T - 35{,}75)(0{,}16)v^{0{,}16-1}$$
$$= (0{,}4275T - 35{,}75)(0{,}16)v^{-0{,}84}$$

    - Substituindo

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = (-4{,}01)10^{-0{,}84} \approx -0{,}58\ \frac{°\mathrm{F}}{\mathrm{milhas/h}}$$

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - Exemplo: Determine a inclinação da superfície z = f(x, y) na direção x e na direção y no ponto (1, −2)

$$f(x, y) = x^2y + 5y^3$$

# Derivadas parciais

- Derivadas parciais vistas como taxas de variação e inclinações
  - Exemplo: Determine a inclinação da superfície z = f(x, y) na direção x e na direção y no ponto (1, −2)

$$f(x, y) = x^2y + 5y^3$$

z está decrescendo a uma taxa de 4 unidades a cada unidade de crescimento de x

$$f_x(x, y) = 2xy \Rightarrow f_x(1, -2) = -4$$

$$f_y(x, y) = x^2 + 15y^2 \Rightarrow f_y(1, -2) = 61$$

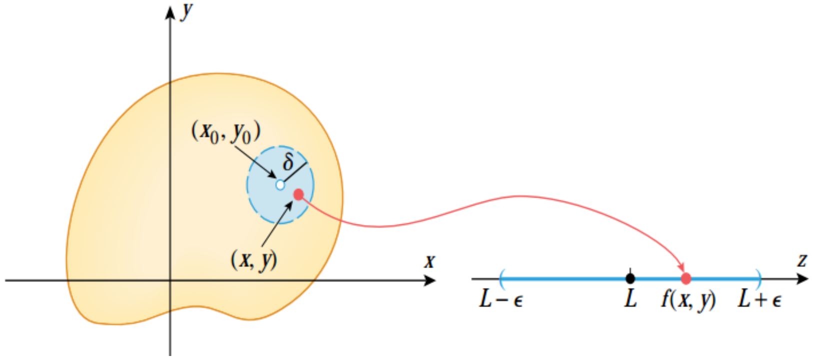
z está crescendo a uma taxa de 61 unidades a cada unidade de crescimento de y

# Resumo

# Resumo

- Limite

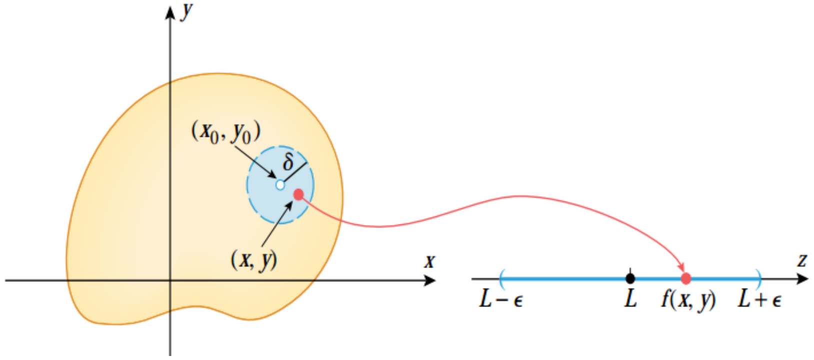
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$



# Resumo

- Limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

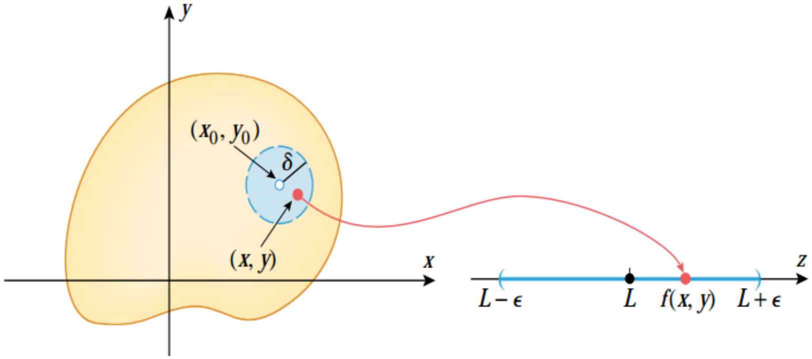



  – Achar duas ou mais curvas lisas, serve para dar o contra exemplo e dizer que o limite não existe

# Resumo

- Limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

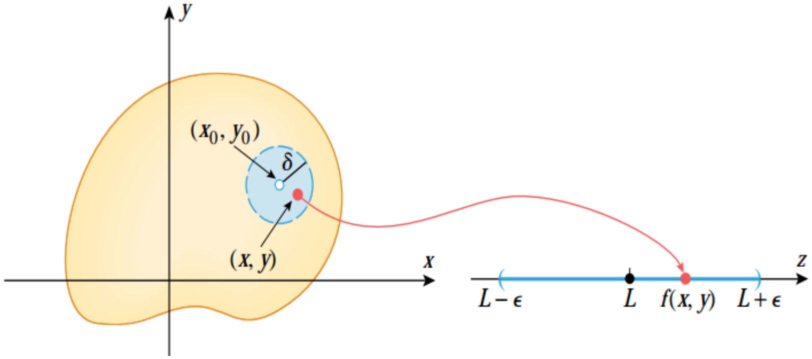



  - Achar duas ou mais curvas lisas, serve para dar o contra exemplo e dizer que o limite não existe
  - Continuidade $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

# Resumo

- Limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$




  - Achar duas ou mais curvas lisas, serve para dar o contra exemplo e dizer que o limite não existe
  - Continuidade $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

- Derivadas parciais
  - Trata uma variável como constante

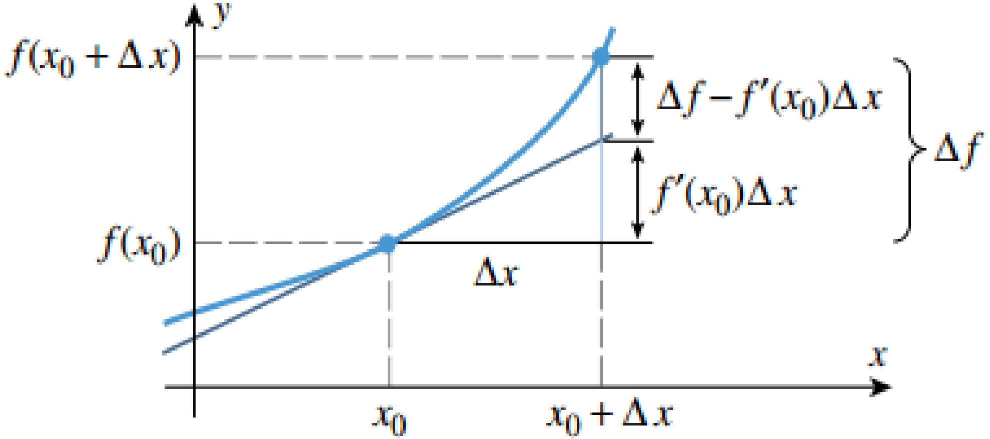
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

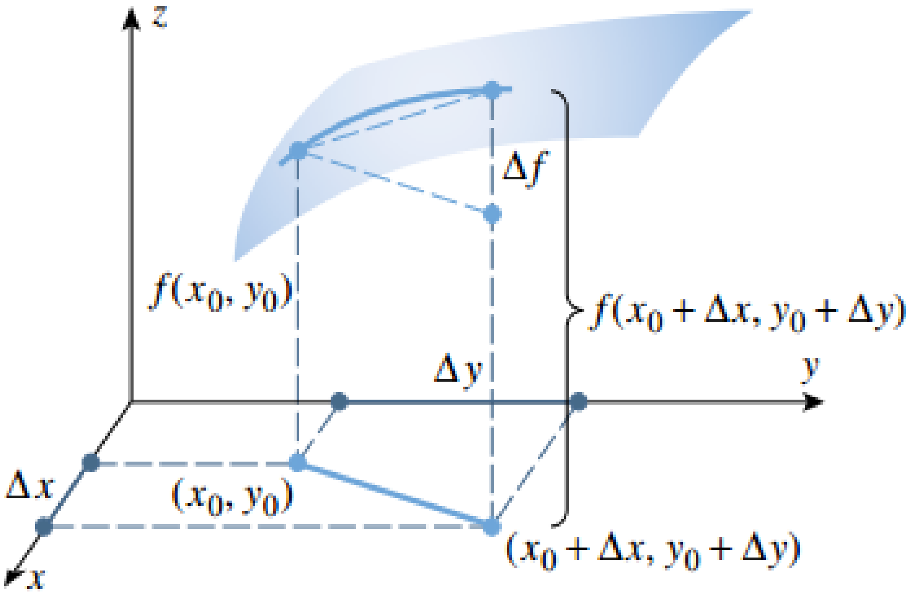
# Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 13.2
    - Exercícios de compreensão 13.2 (3 e 4)
    - 1-6
    - 9-12
    - 23-26
  - Seção 13.3
    - Exercícios de compreensão 13.3 (1 e 2)
    - 1-10

# Resumo

- Próxima aula:
  - Derivadas parciais
  - Diferenciabilidade



# Bibliografia

# Bibliografia


- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seções 13.2 e 13.3