Sistemas de Equações Lineares

Unidade 1

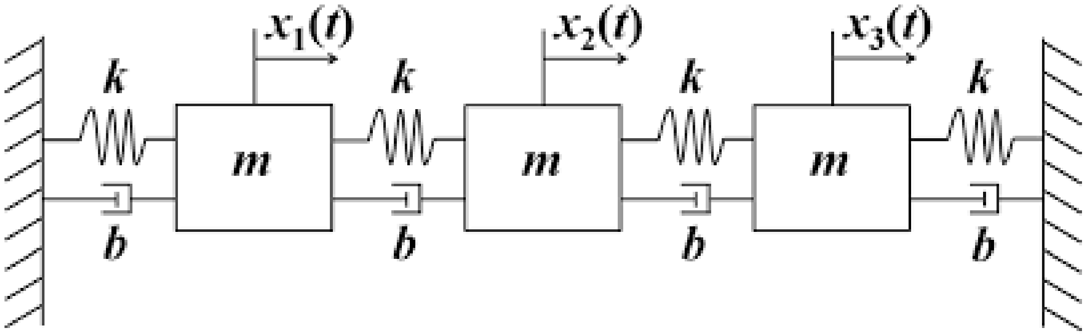
Álgebra Linear para Computação

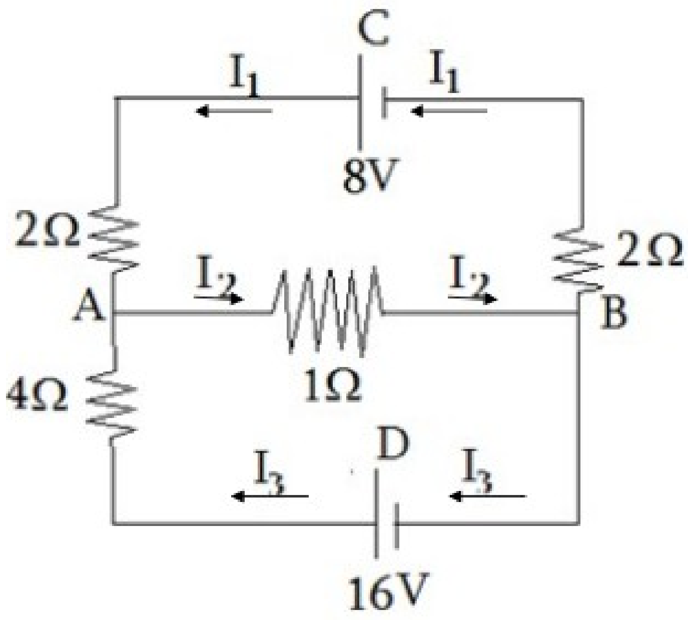
Suzana M. F. de Oliveira

Introdução aos sistemas de equações lineares

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Vários problemas nas áreas científica, tecnológica e econômica são modelados por sistemas de equações lineares
    - Exemplos:
      - Sistema massa mola
      - Circuitos elétricos





Introdução ao sistemas de equações lineares

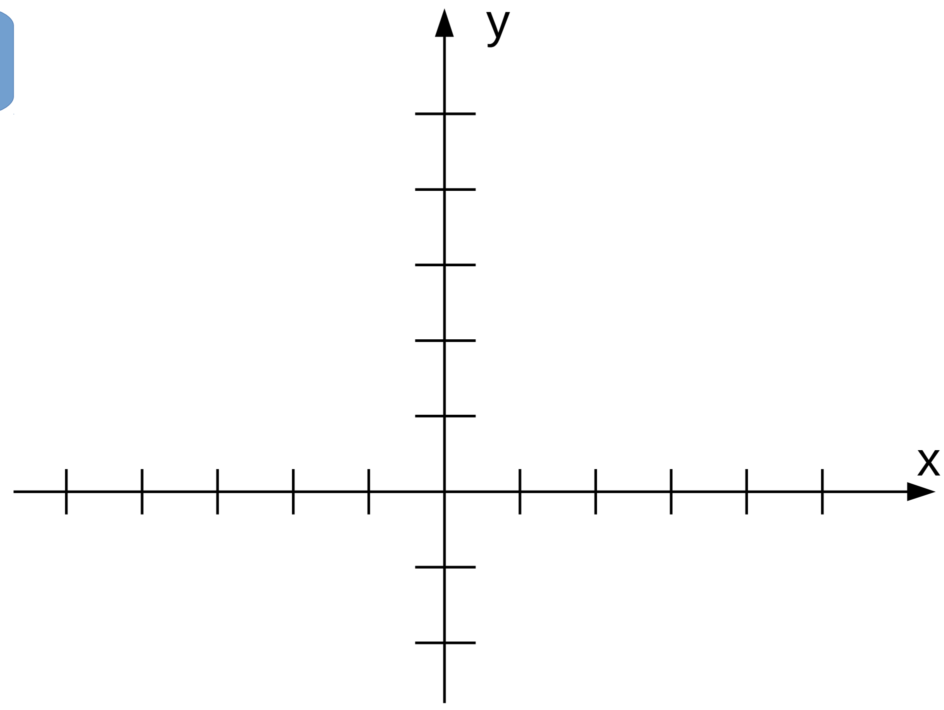
- Sistemas lineares
  - Exemplo:
    - 2 equações
    - 2 incógnitas

Retas

$$\begin{cases} r: \quad x + y = 5 \\ s: -x + 2y = 4 \end{cases}$$

$(r)\, x$	y

$(s)\, x$	y



Introdução ao sistemas de equações lineares

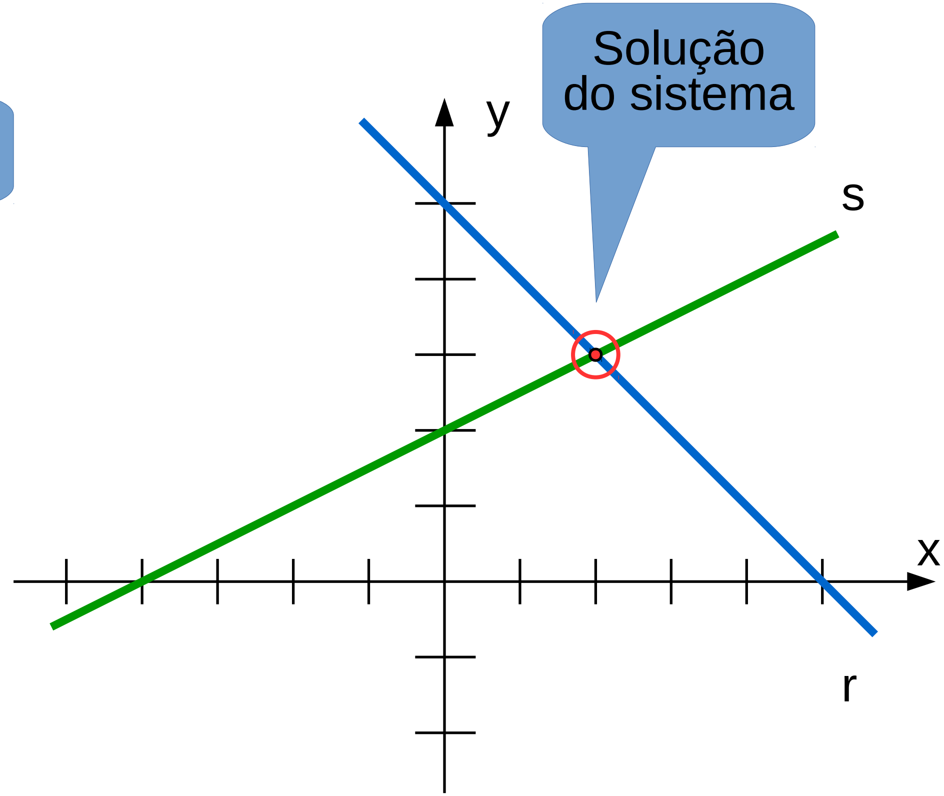
- Sistemas lineares
  - Exemplo:
    - 2 equações
    - 2 incógnitas

Retas

$$\begin{cases} r: \quad x + y = 5 \\ s: -x + 2y = 4 \end{cases}$$

$(r)\ x$	y
5	0
0	5

$(s)\ x$	y
-4	0
0	2



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Forma geral
    - m equações
    - n incógnitas

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_2 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

    - Onde a_{ij} são os coeficientes, x_j são as incógnitas e b_i são os termos independentes

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Forma geral
    - m equações
    - n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

    - Onde a_{ij} são os coeficientes, x_j são as incógnitas e b_i são os termos independentes
  - Solução
    - É uma sequência de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ para os quais a substituição

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, \quad x_n = s_n$$

faz de cada equação uma afirmação verdadeira.

Se fossem 3 incógnitas a solução seria a interseção de planos

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo de equações **não** lineares

$$x + 3y^2 = 4 \qquad\qquad 3x + 2y - xy = 5$$

$$\operatorname{sen} x + y = 0 \qquad\qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo de equações **não** lineares

$$x + 3y^2 = 4$$
$$\operatorname{sen} x + y = 0$$

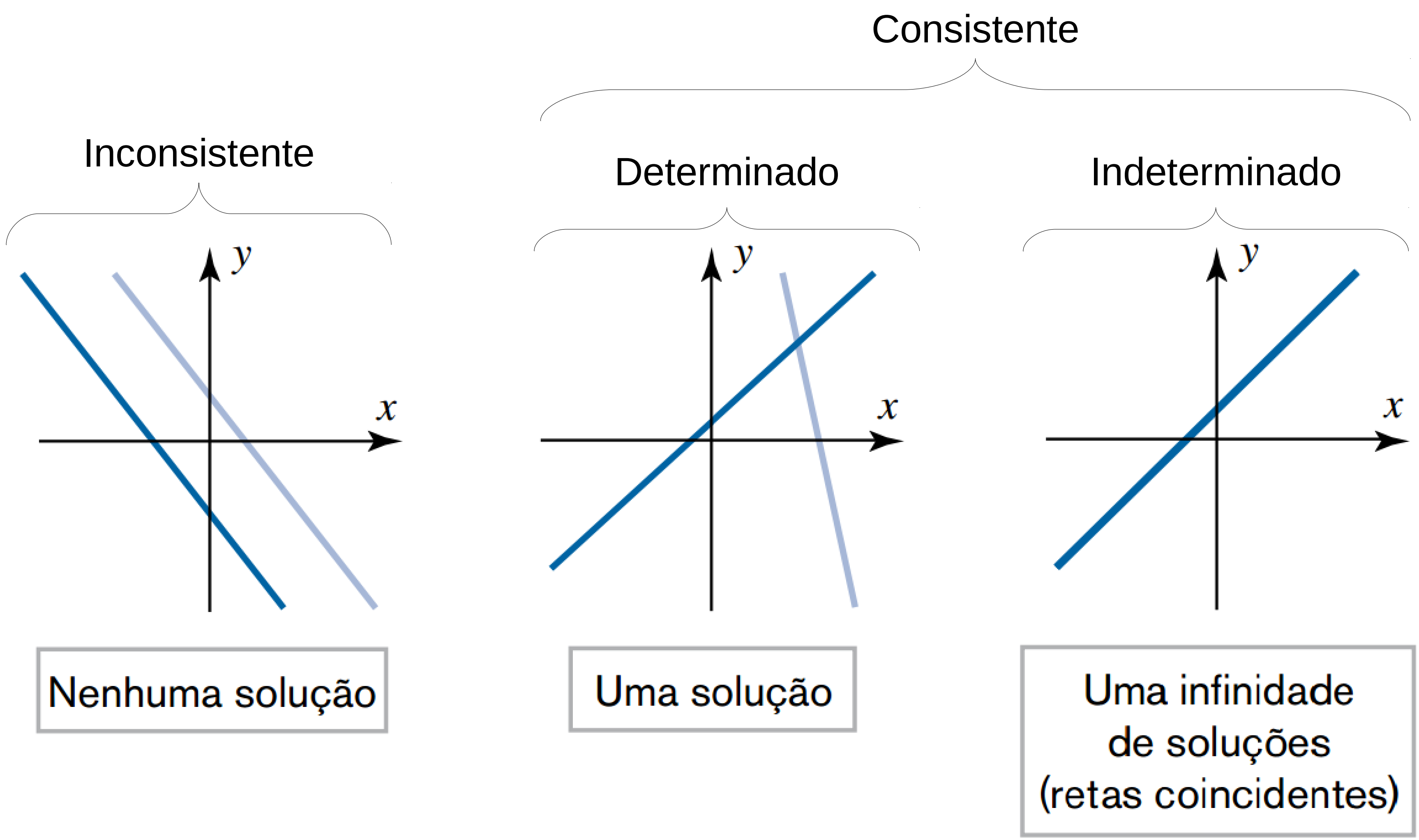
$$3x + 2y - xy = 5$$
$$\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

Potências diferente de 1
Funções trigonométricas,
logarítimicas

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Soluções possíveis

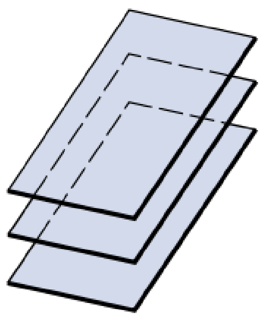
$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y &= c_1 \\
a_2x + b_2y &= c_2
\end{aligned}
$$



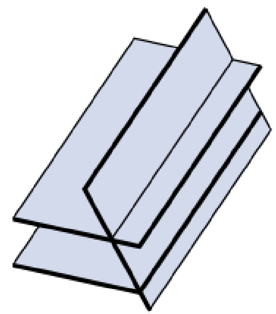
Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Soluções possíveis

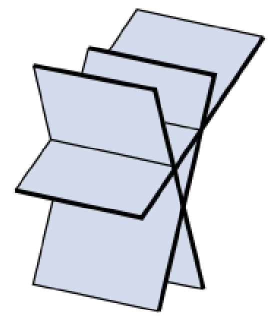
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$



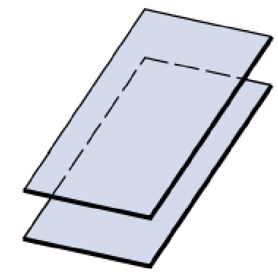
Nenhuma solução (três planos paralelos, sem interseção comum)



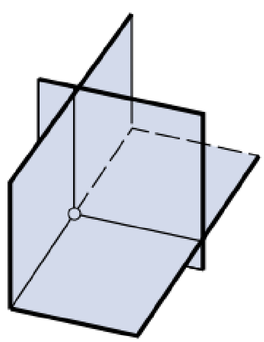
Nenhuma solução (dois planos paralelos, sem interseção comum)



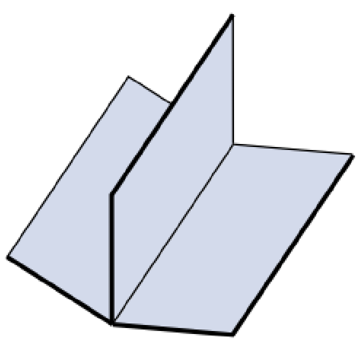
Nenhuma solução (sem interseção comum)



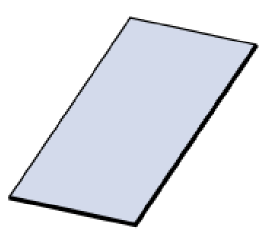
Nenhuma solução (dois planos coincidentes, paralelos ao terceiro, sem interseção comum)



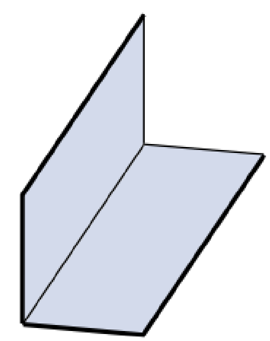
Uma solução (a interseção é um ponto)



Uma infinidade de soluções (a interseção é uma reta)



Uma infinidade de soluções (todos os planos coincidem; a interseção é um plano



Uma infinidade de soluções (dois planos coincidentes; a interseção é uma reta)

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Soluções possíveis
    - Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções.
    - Não existem outras possibilidades.

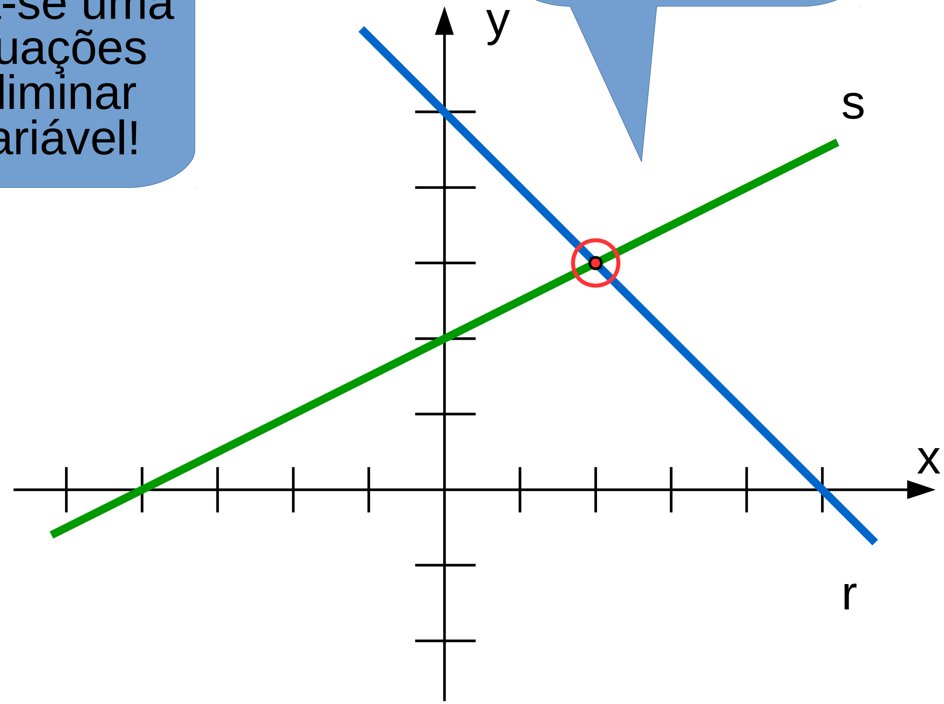
Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:
    - 2 equações
    - 2 incógnitas

$$r: \; x + y = 5$$
$$s: -x + 2y = 4$$

Modifica-se uma das equações para eliminar uma variável!

Qual a solução do sistema?



Introdução ao sistemas de equações lineares

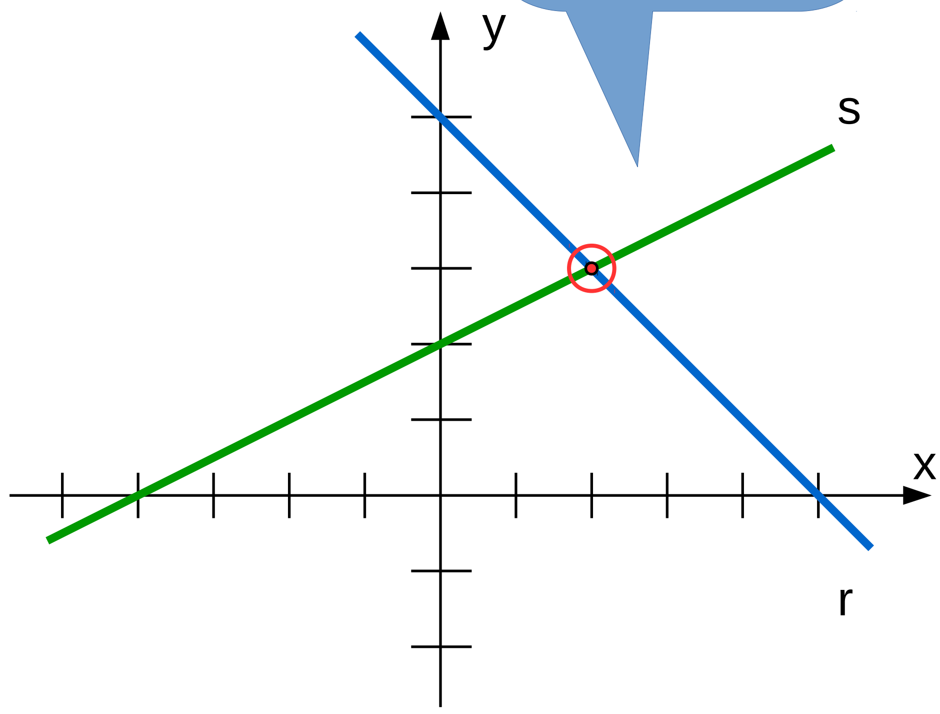
- Sistemas lineares
  - Exemplo:
    - 2 equações
    - 2 incógnitas

$$
\begin{array}{rrrrrl}
r: & x & + & y & = & 5 \\
s: & -x & + & 2y & = & 4\,(+) \\
\hline
& 0 & + & 3y & = & 9
\end{array}
$$

Fácil descobrir y!

Uma vez achado y, é só substituí-lo em uma das equações para achar x.

Qual a solução do sistema?



Introdução ao sistemas de equações lineares

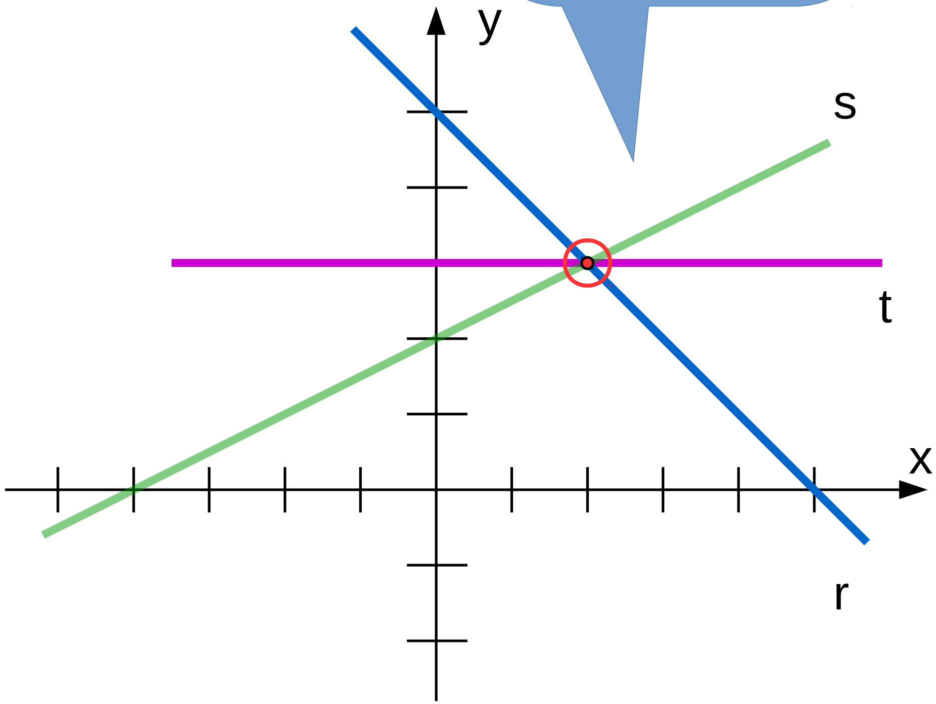
- Sistemas lineares
  - Exemplo:
    - 2 equações
    - 2 incógnitas

$$r: \boxed{x + y = 5}$$
$$s: -x + 2y = 4 \; (+)$$

$$0 + 3y = 9$$
$$t: \boxed{y = 3}$$

Novo sistema equivalente

Qual a solução do sistema?



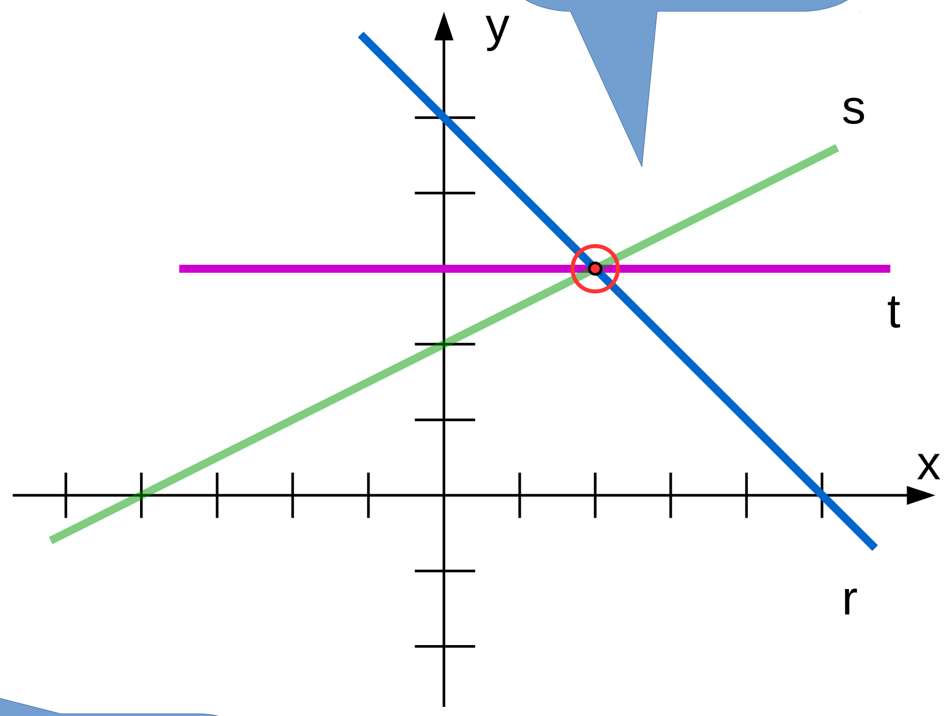
Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:
    - 2 equações
    - 2 incógnitas

$$
\begin{aligned}
r:&\quad x + y = 5\\
s:&\; -x + 2y = 4\,(+)\\
\hline
&\quad 0 + 3y = 9\\
t:&\quad \boxed{y = 3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + 3 &= 5\\
x &= 5 - 3\\
\boxed{x = 2}
\end{aligned}
$$

Qual a solução do sistema?



Solução do sistema: (2,3)

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 4 \\
3x + 3y &= 6
\end{aligned}
$$

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned} \quad \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \quad \begin{aligned} x + y &= \quad 4 \\ 0 &= -6 \end{aligned}$$

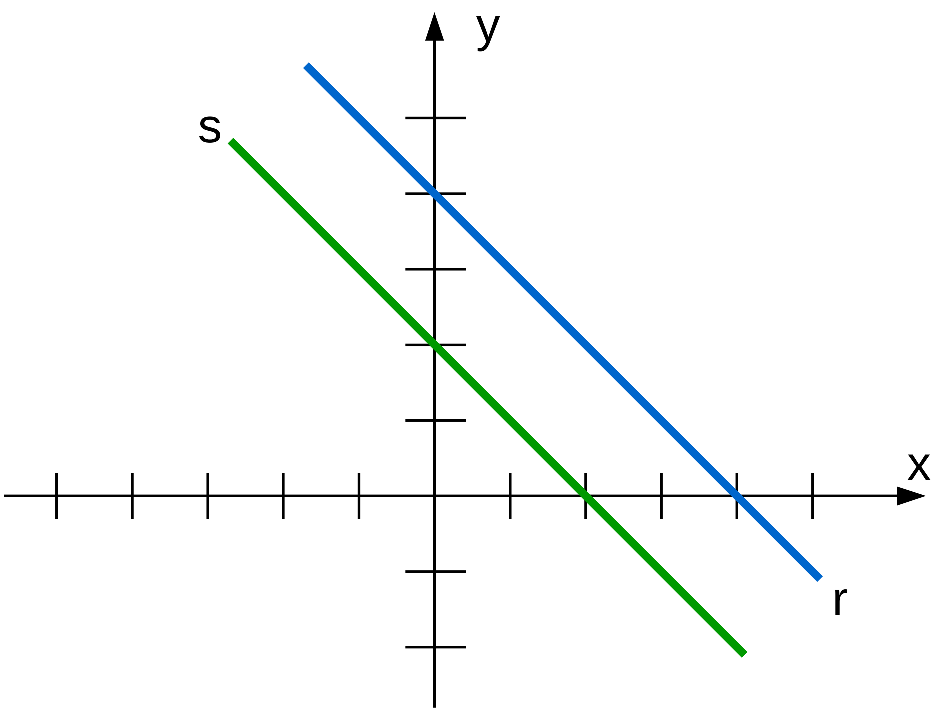
Sem solução

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned} \quad \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \quad \begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0 &= -6 \end{aligned}$$

Sem solução



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned} \quad \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \quad \begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

A segunda equação não impõe quaisquer restrições a x e y

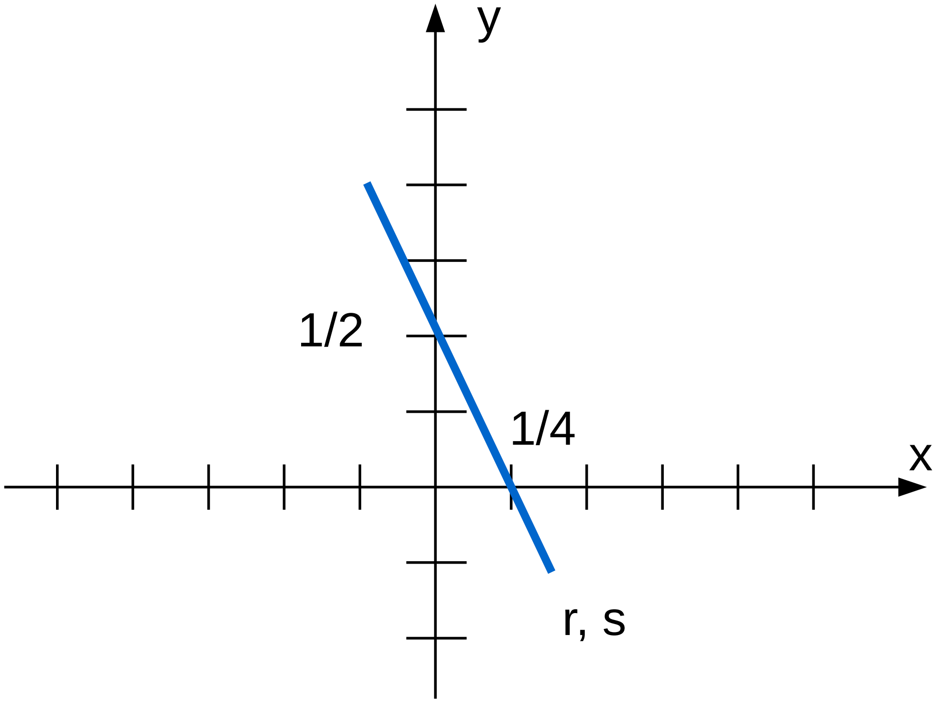
Múltiplas solução

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

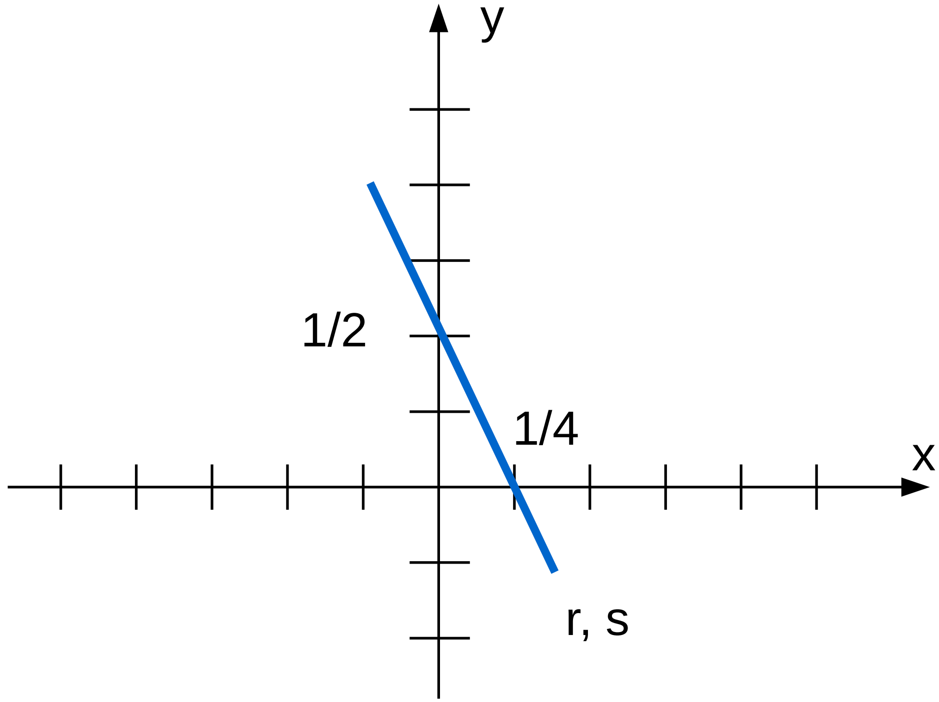
Múltiplas solução



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - Exemplo:

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned} \quad \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \quad \begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$



$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t, \qquad y = t$$

Pode ser visto como uma equação paramétrica

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
  - À medida que cresce o número de equações e de incógnitas num sistema linear, cresce também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução

Como resolver esse sistema?

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Matrizes e vetores

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - São tabelas de números organizados em linhas (horizontais) e colunas (verticais)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Quadradas

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Retangulares

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Dimensão: m×n
    - m linhas
    - n colunas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Dimensão: m×n
    - m linhas
    - n colunas

3×3

2×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

3×2

2×3

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações:
    - Soma
    - Subtração
    - Multiplicação de matrizes
    - Multiplicação por escalar
    - Transposição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \ ? \qquad A - B = \ ?$$

$$A \cdot B = AB = \ ? \qquad 2A = \ ? \qquad A^T = \ ?$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações:
    - Soma
    - Subtração
    - Multiplicação de matrizes
    - Multiplicação por escalar
    - Transposição

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad A-B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=AB=\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} \qquad 2A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações:
    - Soma
    - Subtração
    - Multiplicação de matrizes
    - Multiplicação por escalar
    - Transposição

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A+B= \ ? \qquad A-B= \ ?$$

$$A \cdot B = AB = \ ? \qquad 2A= \ ? \qquad A^T= \ ?$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações:
    - Soma
    - Subtração
    - Multiplicação de matrizes
    - Multiplicação por escalar
    - Transposição

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_{2\times 2}$ e $B_{3\times 3}$

As matrizes não são compatíveis

$$A+B= \text{ERRO} \qquad A-B= \text{ERRO}$$

$$A\cdot B=AB= \text{ERRO} \qquad 2A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações:
    - Soma
    - Subtração
    - Multiplicação de matrizes
    - Multiplicação por escalar
    - Transposição

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+B= \ ? \qquad A-B= \ ?$$

$$A \cdot B = AB = \ ? \qquad 2A = \ ? \qquad A^T = \ ?$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações:
    - Soma
    - Subtração
    - Multiplicação de matrizes
    - Multiplicação por escalar
    - Transposição

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{2\times 2}$ e $B_{2\times 3}$

$$A+B=\text{ERRO} \qquad A-B=\text{ERRO}$$

As matrizes não são compatíveis

$$A\cdot B=AB=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad 2A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$AB_{2\times 3}$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações:
    - Soma
    - Subtração
    - Multiplicação de matrizes
    - Multiplicação por escalar
    - Transposição
  - Matrizes quadradas
    - Inversa
    - Determinante

Unidade 1

Unidade 2

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações (forma geral):
    - Soma / Subtração

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações (forma geral):
    - Multiplicação por escalar

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações (forma geral):
    - Multiplicação de matrizes

$$AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n}$ e $C_{n \times l}$
$(AC)_{m \times l}$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações (forma geral):
    - Multiplicação de matrizes

$A_{m\times n}$ e $C_{n\times l}$
$(AC)_{m\times l}$

$$AC=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+\cdots+a_{1n}c_{n1} & \cdots & a_{11}c_{1l}+a_{12}c_{2l}+\cdots+a_{1n}c_{nl} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}+\cdots+a_{2n}c_{n1} & \cdots & a_{21}c_{1l}+a_{22}c_{2l}+\cdots+a_{2n}c_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}c_{11}+a_{m2}c_{21}+\cdots+a_{mn}c_{n1} & \cdots & a_{m1}c_{1l}+a_{m2}c_{2l}+\cdots+a_{mn}c_{nl} \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Operações (forma geral):
    - Transposição: Linha vira coluna e coluna vira linha

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n}$ e $A^T_{n \times m}$

Matrizes e vetores

- Matrizes
  - Propriedades:
    - $(AB)C = A(BC)$;
    - $A(B + C) = AB + AC$;
    - $(B + C)A = BA + CA$;
    - $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
    - $(AB)^T = B^T A^T$
    - $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
  - Observação: A multiplicação matricial não é comutativa, isto é: $AB \neq BA$

Matrizes e vetores

- Vetores
  - Matrizes com uma única coluna

1×3

2×1

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Vetores
  - Matrizes com uma única coluna

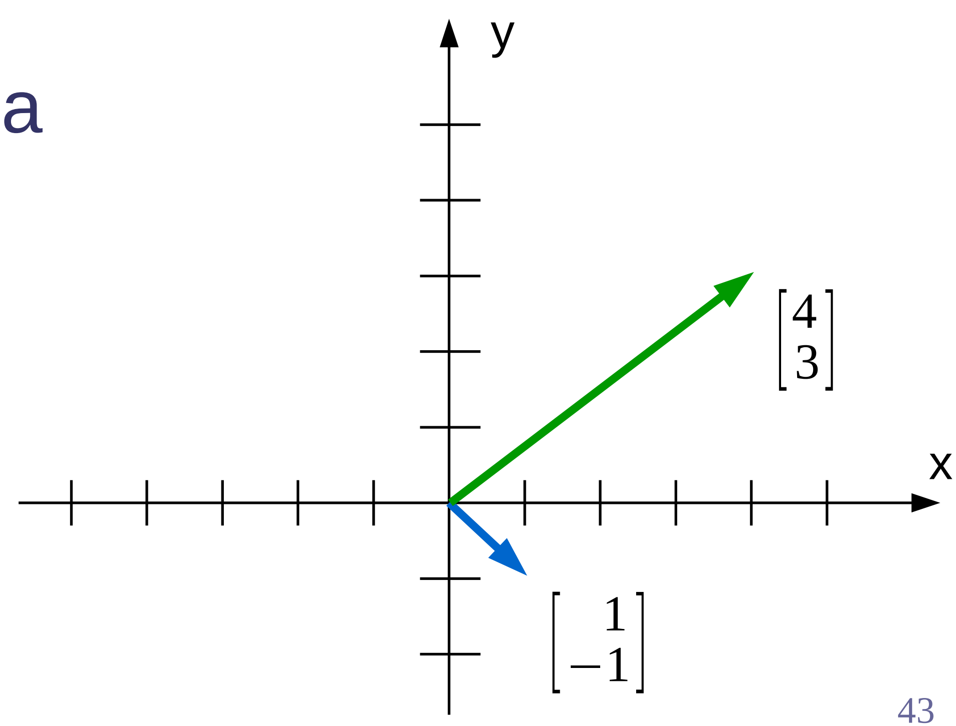
2×1

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

1×3

  - Interpretação geométrica
    - Magnitude
    - Direção
    - Sentido



Matrizes e vetores

- Vetores
  - Matrizes com uma única coluna

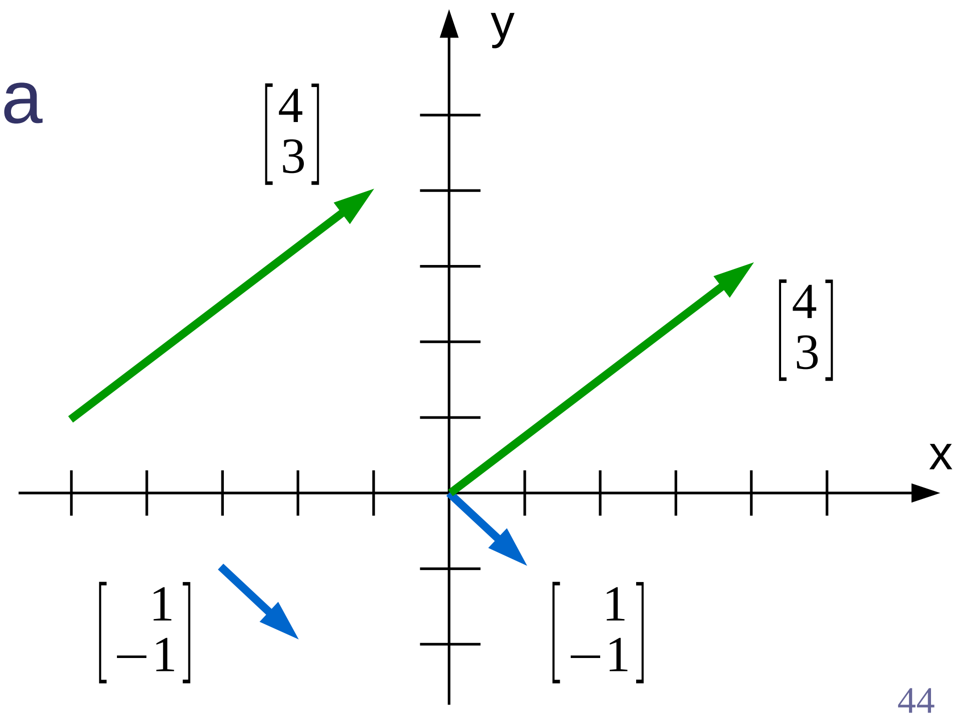
2×1

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1×3

  - Interpretação geométrica
    - Magnitude
    - Direção
    - Sentido

Não tem posição no espaço



Matrizes e vetores

- Vetores
  - Matrizes com uma única coluna

2×1

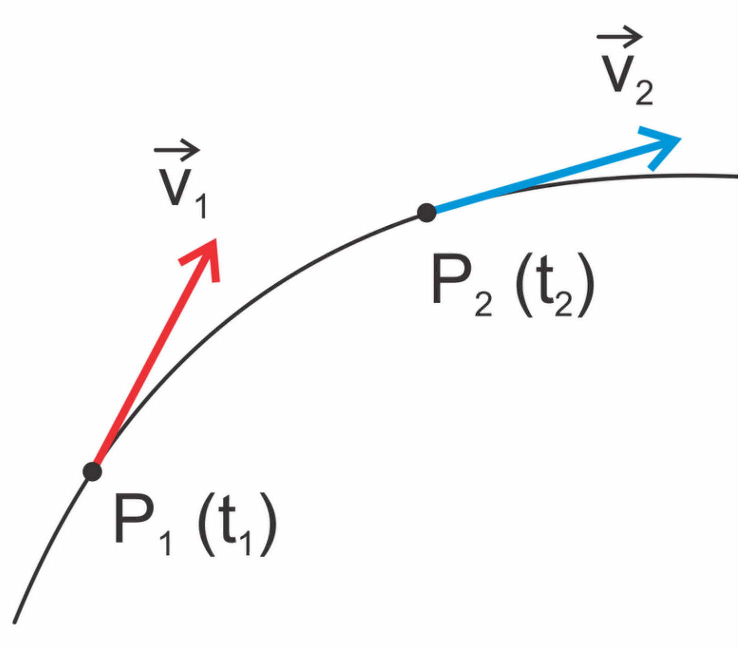
$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1×3

  - Interpretação geométrica
    - Magnitude
    - Direção
    - Sentido

Velocidade



Matrizes e vetores

- Vetores
  - Operações:
    - Herdadas de matrizes
      - Soma
      - Subtração
      - Multiplicação por escalar
      - Multiplicação de matrizes
      - Transposição

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

    - Produto escalar $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$
    - Produto vetorial para vetores u,v ∈ $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

    - Normal (magnitude) $\sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
  - Matrizes diagonais
    - $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

  - Matriz identidade (I)
    - $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$
    - $a_{ij} = 1$, para $i = j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
  - Matrizes triangulares
    - Superior:
      - $a_{ij} = 0$, para $i > j$
    - Inferior:
      - $a_{ij} = 0$, para $i < j$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular superior 4×4 arbitrária.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular inferior 4×4 arbitrária.

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
  - Matrizes transpostas
    - $A = [a_{ij}] \rightarrow A^T = [a_{ji}]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3 \quad 5], \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{31} \\ a_{14} & a_{24} & a_{31} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad D^T = [4]$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
  - Matrizes simétricas
    - $A=A^T$
    - $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
  - Matrizes hermitianas
    - $[a_{ij}^*]=[\overline{a}_{ji}]$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2i \\ 2i & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3+2i & -1-i \\ 3-2i & 6 & 2 \\ -1+i & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

    - Matriz simétrica porém não hermitiana

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1-2i \\ i & 2i & 3 \\ 1-2i & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
  - Matriz inversa
    - $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
  - Matriz cheia
    - Muitos valores diferentes de zero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Matriz esparsa
    - Muitos valores iguais a zero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Sistemas lineares na forma matricial

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ -x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Sistemas lineares na forma matricial
  - Forma geral

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

Porém, achar a inversa nem sempre é fácil!

A é a matriz dos coeficientes,
x é o vetor de incógnitas e
b é o vetor de termos independentes

Resumo

Resumo

- Sistemas lineares
  - A solução é valores de x_i que satisfazem todas das equações ao mesmo tempo
  - Classificação quanto a solução
    - Consistente
      - Determinado
      - Indeterminado
    - Inconsistente

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

- Matrizes e vetores
  - Para algumas operações é preciso que as matrizes sejam compatíveis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Resumo

- Próxima aula
  - Combinação linear

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$$

  - Solução de sistemas com matrizes
    - Diagonal
    - Triangular
  - Operações elementares
    - $L_i \leftarrow \alpha L_i$
    - $L_i \leftrightarrow L_k$
    - $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k$

Bibliografia

Bibliografia

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
  - Seção 1.1 (parcial), 1.3
- DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
  - Seção 1.1 (parcial)

- Leitura interessante
  - https://www.ime.usp.br/~colli/cursos/NumericoIAG-2005/LivroNumericoCapitulos1-2-3.pdf
    - Capítulo 1