
Autovalores e autovetores

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Autovalores e autovetores
 - Calculando autovalores
 - Polinômio característico
 - Calculando autovetores
 - Potências de uma matriz
 - Autovalores e invertibilidade
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Espaço linha $\mathcal{R}(A^T)$
 - Gerado pelas linhas linearmente independentes de A
- Espaço coluna $\mathcal{R}(A)$
 - Gerado pelas colunas linearmente independentes de A
- Espaço nulo $\mathcal{N}(A)$
 - Vetores coluna que ao serem multiplicados por A geram o vetor nulo
- Espaço coluna $\mathcal{N}(A^T)$
 - Vetores linha que ao serem multiplicados por A geram o vetor nulo

Revisão

- Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 - $\text{Posto}(A) = \dim(\mathcal{R}(A)) = r$
 - $\text{Nulidade}(A) = \dim(\mathcal{N}(A)) = n - r$

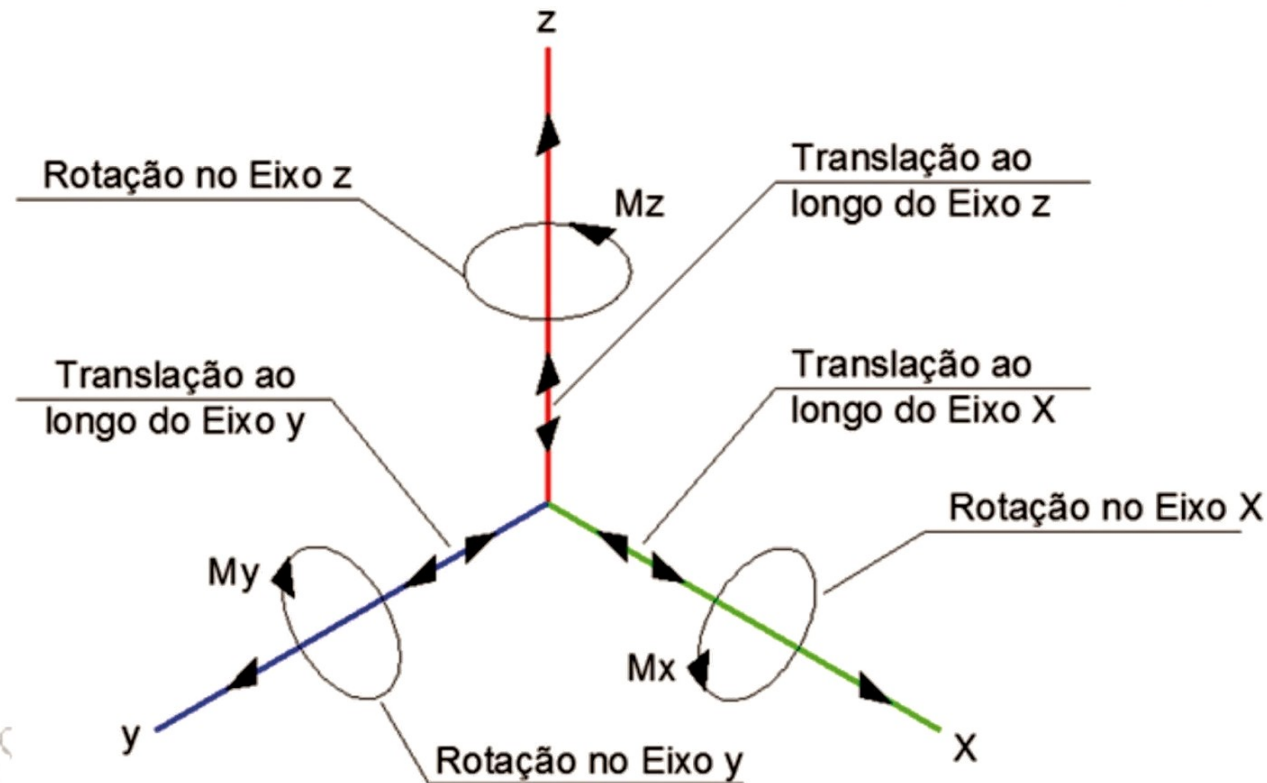
Revisão

- Afirmações equivalentes para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 - (a) *A é invertível.*
 - (b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.*
 - (c) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n .*
 - (d) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*
 - (e) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz \mathbf{b} de tamanho $n \times 1$.*
 - (f) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução com cada matriz \mathbf{b} de tamanho $n \times 1$.*
 - (g) *$\det(A) \neq 0$.*
 - (h) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*
 - (i) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*
 - (j) *Os vetores coluna de A geram \mathbb{R}^n .*
 - (k) *Os vetores linha de A geram \mathbb{R}^n .*
 - (l) *Os vetores coluna de A formam uma base de \mathbb{R}^n .*
 - (m) *Os vetores linha de A formam uma base de \mathbb{R}^n .*
 - (n) *A tem posto n.*
 - (o) *A tem nulidade 0.*

Autovalores e autovetores

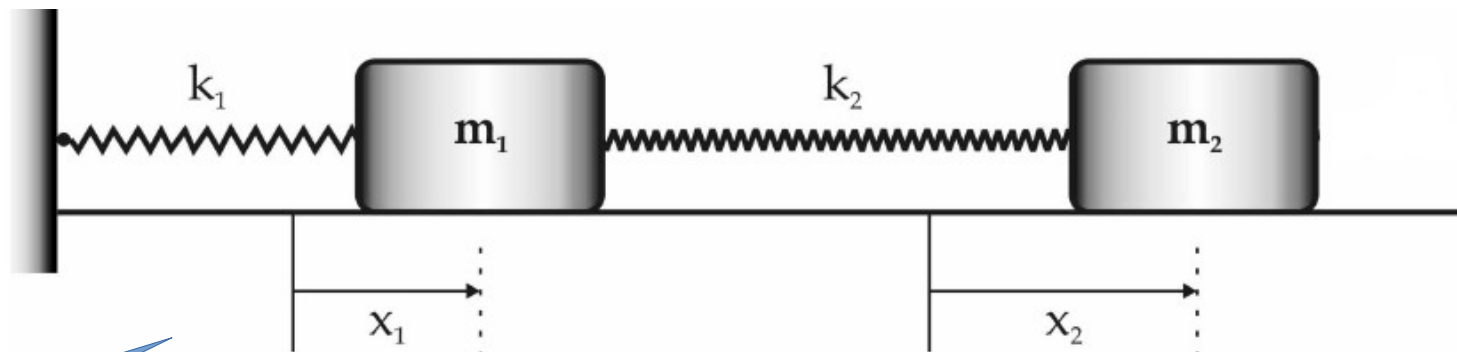
Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração
 - Graus de liberdade de um corpo
 - Número de parâmetros necessários e suficientes para determinar sua posição no espaço



Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração
 - Graus de liberdade de um corpo
 - Número de parâmetros necessários e suficientes para determinar sua posição no espaço
 - Exemplo: Sistemas com dois graus de liberdade
 - Massa mola

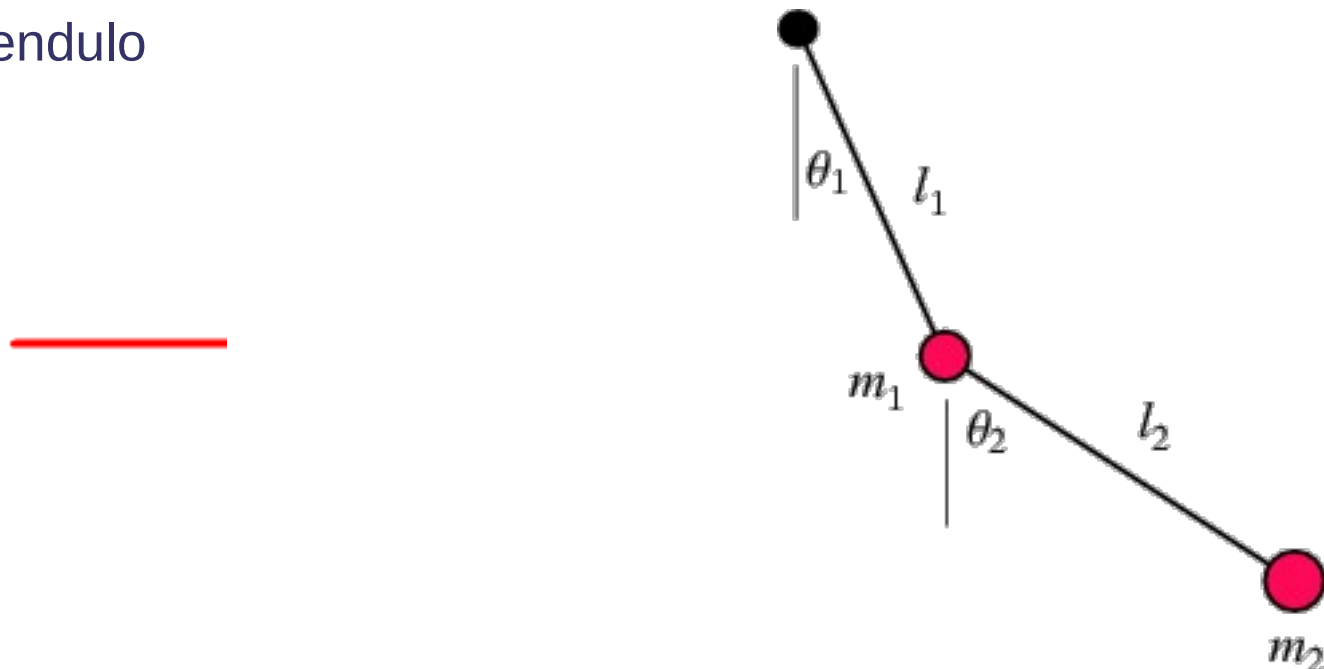


Sistema linear
 $Kx=f$



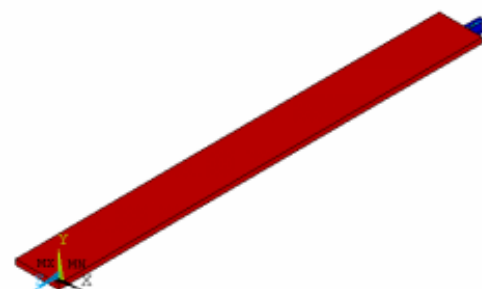
Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração
 - Graus de liberdade de um corpo
 - Número de parâmetros necessários e suficientes para determinar sua posição no espaço
 - Exemplo: Sistemas com dois graus de liberdade
 - Massa mola
 - Pendulo

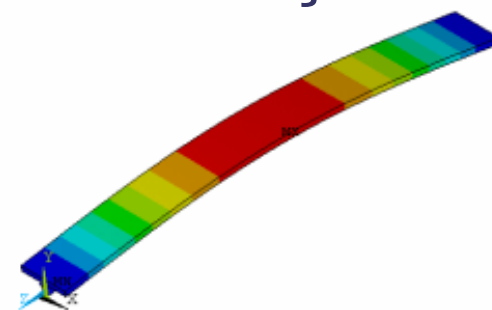


Autovalores e Autovetores

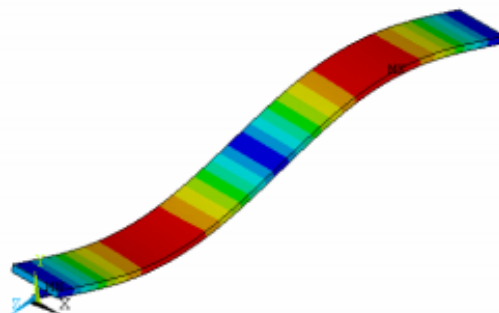
- Exemplo prático: Modos de naturais vibração
 - Viga mista



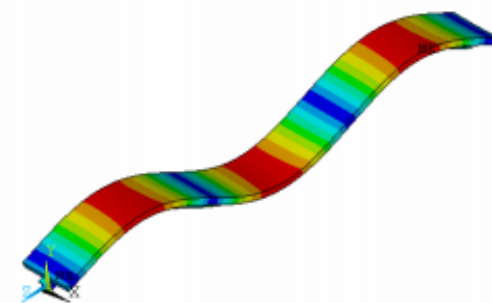
a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01}=2,68\text{Hz}$



b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02}=3,07\text{Hz}$



c) Modo de vibração referente à terceira frequência natural: $f_{03}=12,07\text{Hz}$



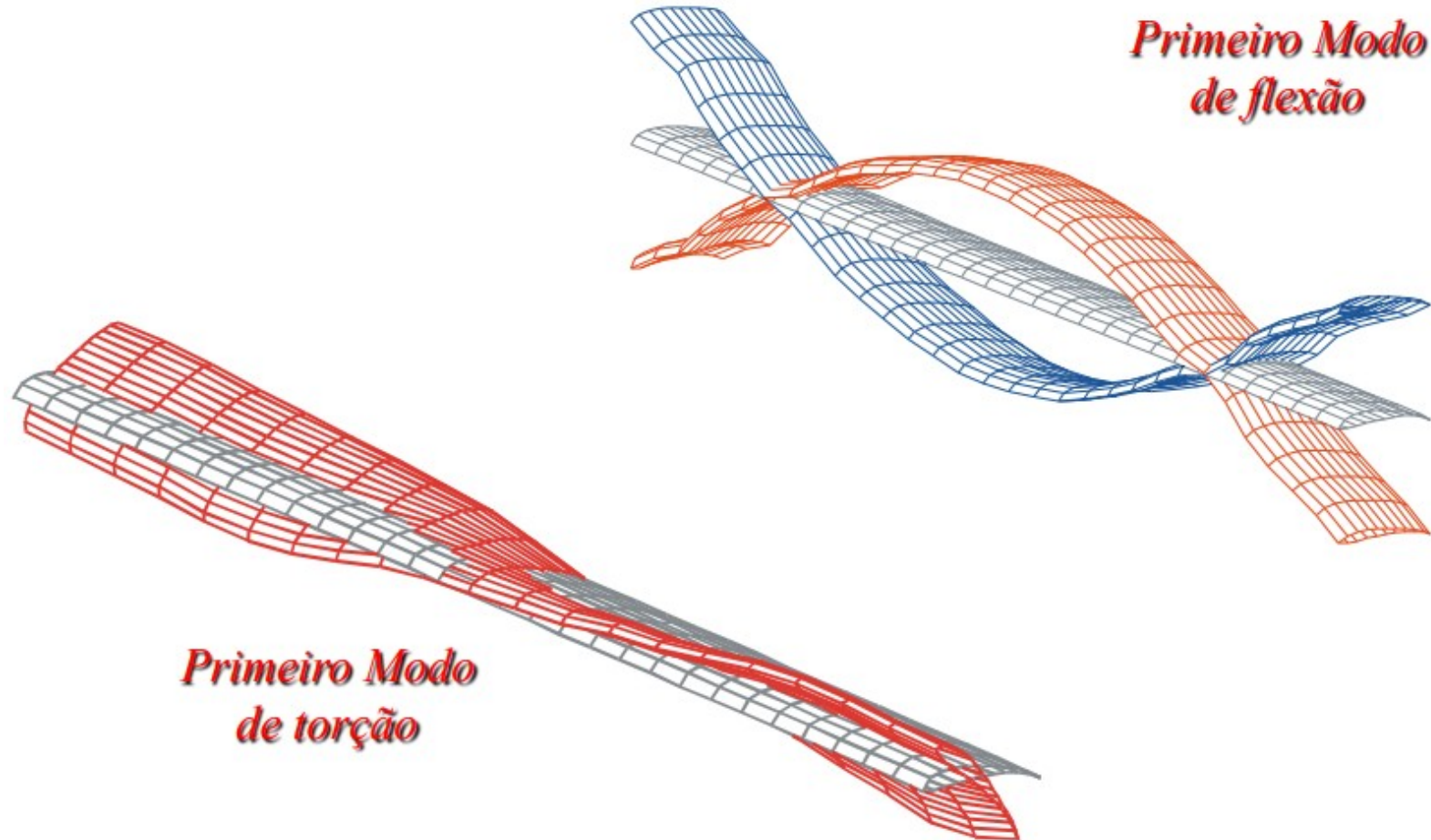
d) Modo de vibração referente à quarta frequência natural: $f_{04}=26,63\text{Hz}$

O modo de vibração vem dos autovetores e a frequência natural vem dos autovalores

Figura 7.4 – Iteração total (76 conectores e rigidez a 50% da curva).

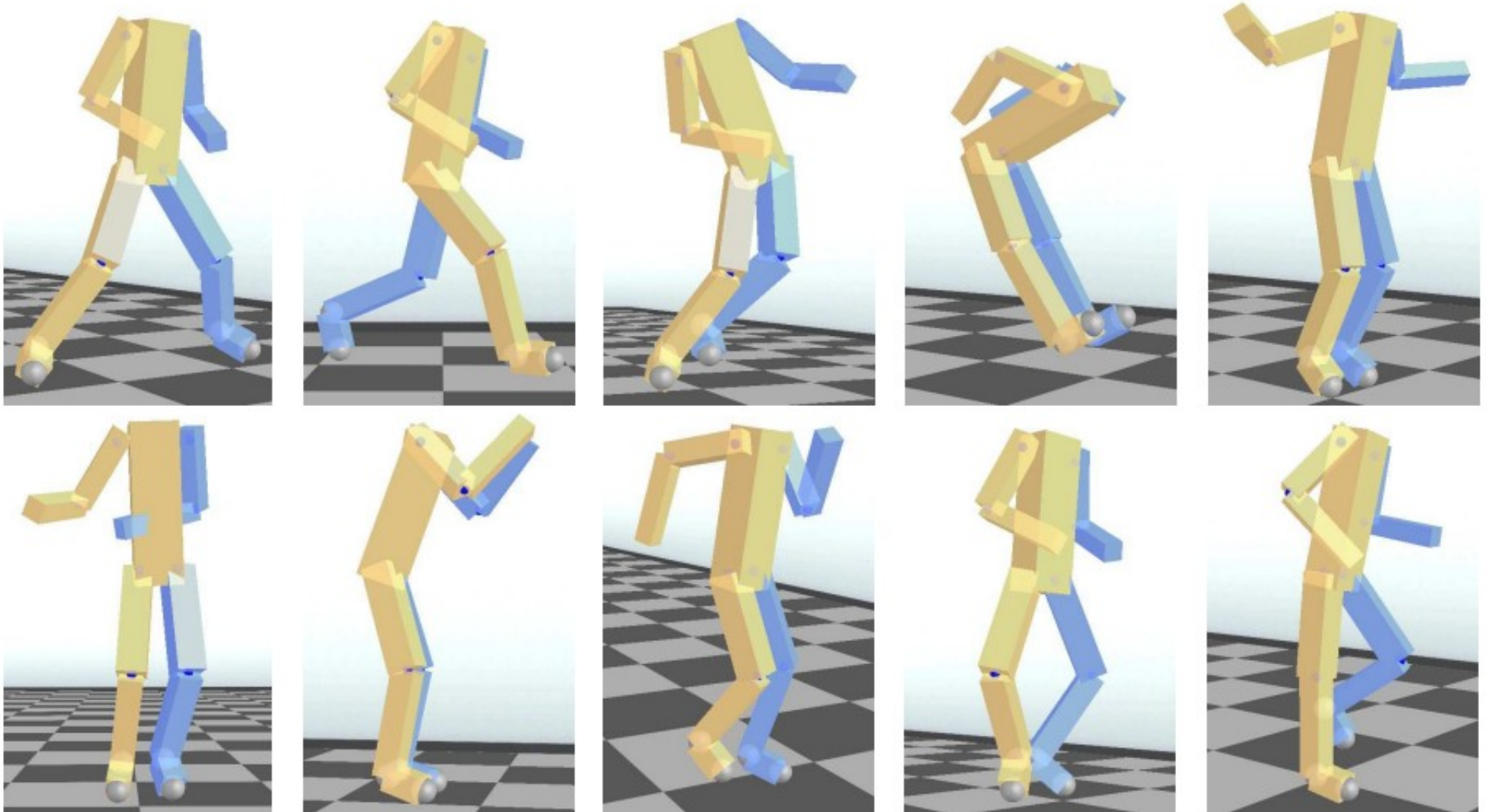
Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração
 - Estrutura aeronáutica



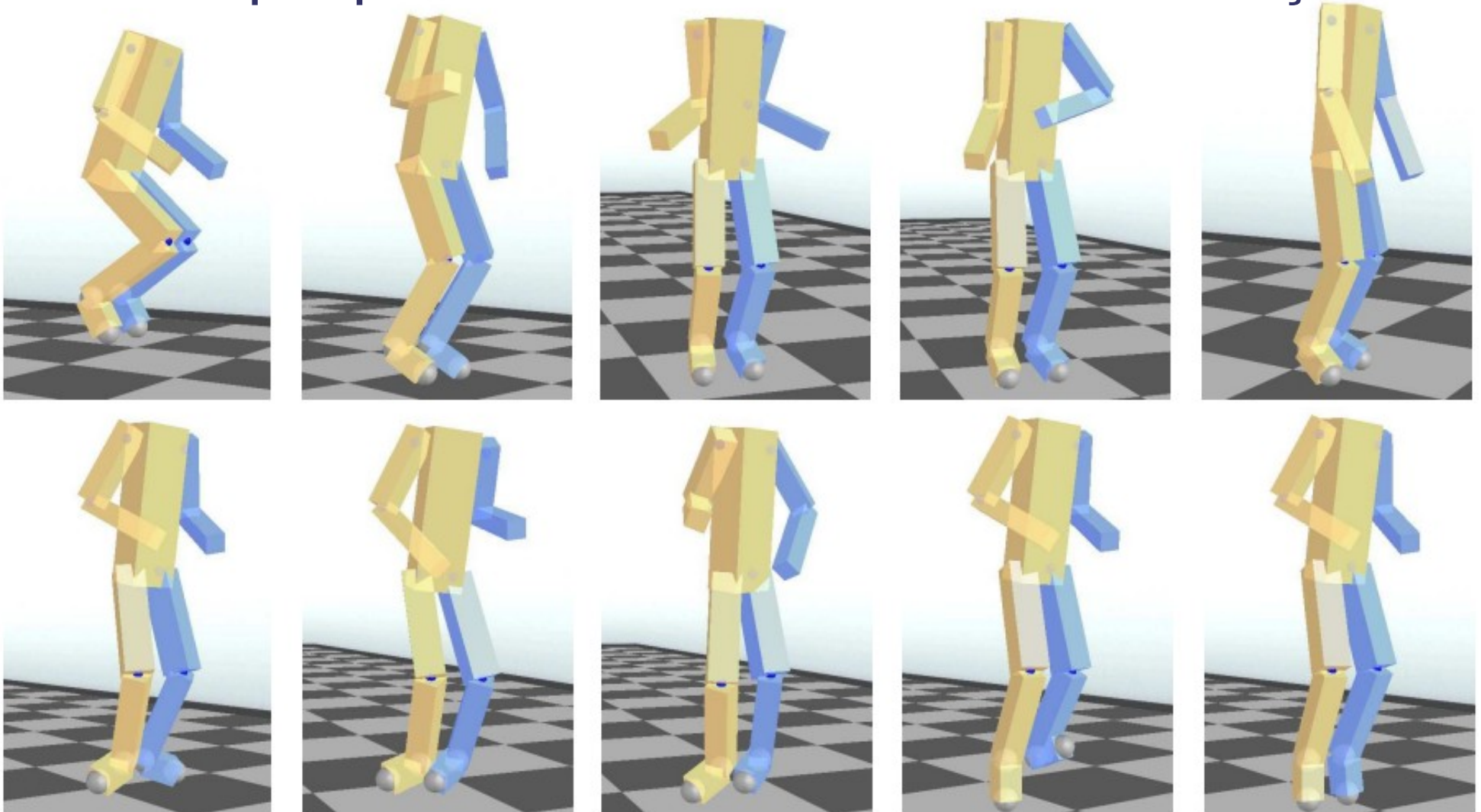
Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração



Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Modos de naturais vibração



FONTE: http://www.mdcc.ufc.br/teses/doc_download/182-11-rubens-fernandes-nunes

FONTE vídeo: <https://www.cs.mcgill.ca/~kr̃y/> . Artigo: Using Natural Vibrations to Guide Control for Locomotion

Autovalores e Autovetores

- Exemplo prático: Google

- A importância de um site é proporcional à importância dos sites que apontam para ele.

$$\begin{cases} x_1 = K(x_2 + x_{14} + x_{541}) \\ x_2 = K(x_1 + x_{23} + x_{541} + x_{1023}) \\ \vdots \\ x_n = K(x_{25} + x_{133}) \end{cases}$$

onde x_i , $1 \leq i \leq n$, é a importância i-ésimo site e K é a constante de proporcionalidade

- Reescrevendo
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \frac{1}{K} x_i \iff Ax = \frac{1}{K} x.$$

- A maior coordenada do autovetor vai ser o site mais importante

Autovalores e Autovetores

- Outros exemplos
 - Grafos
 - Redes (no geral: ferrovias, por exemplo)
 - Cadeia de Markov
 - Processamento de imagens
 - Mecânica quântica
 - Mecânica dos sólidos
 - Estatística
 - ...

Autovalores e Autovetores

Em inglês:
"eigenvalues" e
"eigenvectors"

- Definição:

- Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é denominado **autovetor** de A se $A\mathbf{x}$ for um múltiplo escalar de \mathbf{x} , isto é

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

com algum escalar λ . O escalar λ é denominado **autovalor** de A , e dizemos que \mathbf{x} é um **autovetor associado a λ** .

Exceto
quando \mathbf{x} é
um autovetor
de A

Usualmente a imagem
de $A\mathbf{x}$ difere de \mathbf{x} tanto
em magnitude, direção
e sentido

Autovalores e Autovetores

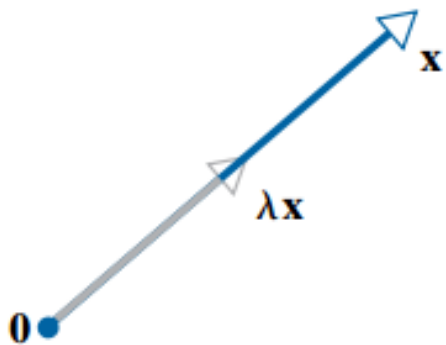
- Definição:

- Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é denominado **autovetor** de A se $A\mathbf{x}$ for um múltiplo escalar de \mathbf{x} , isto é

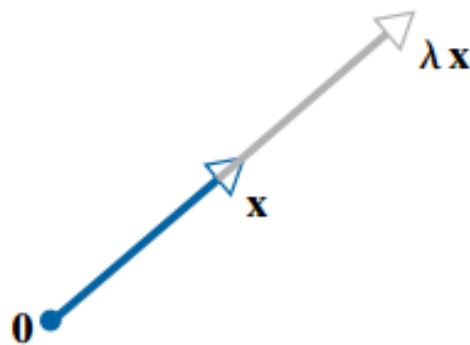
$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Para a solução
não trivial

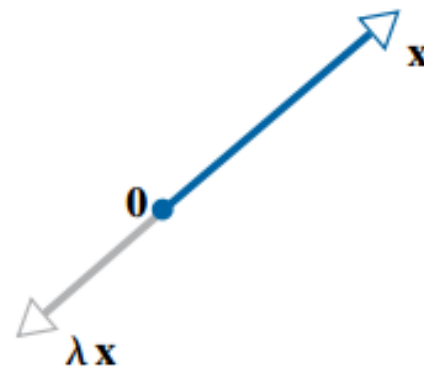
com algum escalar λ . O escalar λ é denominado **autovalor** de A , e dizemos que \mathbf{x} é um **autovetor associado a λ** .



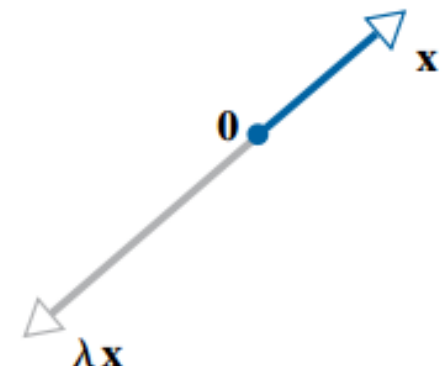
(a) $0 \leq \lambda \leq 1$



(b) $\lambda \geq 1$



(c) $-1 \leq \lambda \leq 0$



(d) $\lambda \leq -1$

Autovalores e Autovetores

- Exemplo:
 - O vetor \mathbf{x} é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

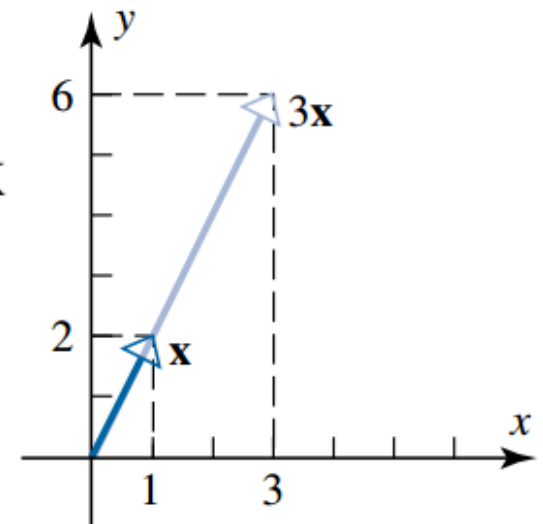
- Exemplo:
 - O vetor \mathbf{x} é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Conferindo:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

- Assim, a multiplicação por A expandiu o vetor \mathbf{x} pelo fator 3



Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores
 - A equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ ou até como

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores

- A equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ ou até como

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Para que λ seja um autovalor de A , essa equação deve possuir alguma solução \mathbf{x} não nula

- Pelas equivalências, $\left\{ \begin{array}{l} (b) \ A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ tem somente a solução trivial.} \\ (g) \ \det(A) \neq 0. \end{array} \right.$

isso ocorre se, e somente se, a matriz dos coeficientes $\lambda I - A$ tiver determinante nulo

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores

- Teorema:

- Se A for uma matriz $n \times n$, então λ é um autovalor de A se, e somente se, λ satisfaz a equação

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- Essa equação é denominada de **equação característica de A** .

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores
 - Exemplo:
 - Explique porque $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz usando a equação característica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovalores

- Exemplo:

- Explique porque $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz usando a equação característica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Equação característica ($\det(\lambda I - A) = 0$)

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

obtendo-se $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

- Autovalores: $\lambda=3$ e $\lambda=-1$

Autovalores e Autovetores

- Polinômio característico
 - Quando o determinante é expandido, resulta em polinômio $p(\lambda)$ de grau n denominado **polinômio característico** de A
 - A partir do exemplo anterior onde a matriz A tinha tamanho 2×2 , tem-se um polinômio de grau 2

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Autovalores e Autovetores

- Polinômio característico
 - Quando o determinante é expandido, resulta em polinômio $p(\lambda)$ de grau n denominado **polinômio característico** de A
 - A partir do exemplo anterior onde a matriz A tinha tamanho 2×2 , tem-se um polinômio de grau 2

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

- Para uma matriz $n \times n$, tem-se

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

Coeficiente = 1

Autovalores e Autovetores

- Polinômio característico

- Quando o determinante é expandido, resulta em polinômio $p(\lambda)$ de grau n denominado **polinômio característico** de A

- A partir do exemplo anterior onde a matriz A tinha tamanho 2×2 , tem-se um polinômio de grau 2

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

- Para uma matriz $n \times n$, tem-se

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

- Como um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas, segue que a equação

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

em, no máximo, n soluções distintas e

Teorema
fundamental
da Álgebra

Algumas
dessas
soluções
podem ser
números
complexos

Uma matriz $n \times n$
tem, no máximo,
 n autovalores
distintos

Autovalores e Autovetores

- Exercício: Encontre o polinômio característico da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Exercício: Encontre o polinômio característico da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Mas como descobrir os valores de λ ?

- Polinômio característico

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Autovalores e Autovetores

- Exercício: Encontre o polinômio característico da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Mas como descobrir os valores de λ ?

- Polinômio característico

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

- Se houverem soluções inteiras, são todas divisores do termo $c_n = -4$
 - $\pm 1, \pm 2, \pm 4 \rightarrow$ substituindo, temos a solução $\lambda - 4$
- Dividindo o polinômio $p(\lambda)$ por $(\lambda - 4)$, reescrevendo $p(\lambda)$
$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Autovalores e Autovetores

- Exercício: Encontre o polinômio característico da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Mas como descobrir os valores de λ ?

- Polinômio característico

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

- Resolvendo pela formula de Bhaskara, os autovalores são:

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{e} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

Autovalores e Autovetores

- Exemplo: Autovalores de uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Exemplo: Autovalores de uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Como o determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas na diagonal principal, então

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) \end{aligned}$$

Autovalores e Autovetores

- Exemplo: Autovalores de uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Equação característica

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

- Autovalores:

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda = a_{22}, \quad \lambda = a_{33}, \quad \lambda = a_{44}$$

- Valores da diagonal principal

Autovalores e Autovetores

- Teorema: Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior, ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A

Autovalores e Autovetores

- Teorema: Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior, ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A
 - Exercício: Autovalores de uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Teorema: Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior, ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A
 - Exercício: Autovalores de uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- Autovalores:

$$\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{2}{3} \text{ e } \lambda = -\frac{1}{4}$$

Autovalores e Autovetores

- Se A for uma matriz $n \times n$, então são equivalentes:
 - (a) λ é um autovalor de A .
 - (b) O sistema $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de equações tem soluções não triviais.
 - (c) Existe algum vetor não nulo \mathbf{x} tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
 - (d) λ é uma solução da equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$.

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Os autovetores associados a um autovalor λ de uma matriz A são os vetores não nulos que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores

- Os autovetores associados a um autovalor λ de uma matriz A são os vetores não nulos que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Diz-se que esse espaço nulo é o autoespaço de A associado a

É o espaço solução do sistema homogêneo

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Exemplo: Encontre as bases dos autoespaços

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Equação característica

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Dois autoespaços

- Autovalores: $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$
- Por definição, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$ se, e somente se, \mathbf{x} é uma solução não trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Exemplo: Encontre as bases dos autoespaços

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Substituindo no sistema $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notar que a matriz do novo sistema, é necessariamente singular

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Exemplo: Encontre as bases dos autoespaços

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Substituindo no sistema $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notar que a matriz do novo sistema, é necessariamente singular

- Solução geral

$$x_1 = \frac{1}{2}t, \quad x_2 = t \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Base do autoespaço associado a $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercício:
Calcule o autoespaço para $\lambda = -1$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Exemplo: Encontre as bases dos autoespaços

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Substituindo no sistema $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notar que a matriz do novo sistema, é necessariamente singular

- Solução geral

$$x_1 = \frac{1}{2}t, \quad x_2 = t \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Base do autoespaço associado a $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1 \rightarrow [0, 1]^T$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Exemplo/Exercício: Encontre as bases dos autoespaços de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Exemplo/Exercício: Encontre as bases dos autoespaços de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Equação característica

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

- Autovalores: $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$

Dois
autoespaços

Ache os
autoespaços

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Exemplo/Exercício: Encontre as bases dos autoespaços de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autoespaços relacionados com o autovalor: $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Calculando autovetores
 - Exemplo/Exercício: Encontre as bases dos autoespaços de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autoespaços relacionados com o autovalor: $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Potências de uma matriz
 - Uma vez conseguindo os autovalores e autovetores de uma matriz, é possível conseguir as potências inteiras positivas de A

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

- Mostrando que λ^2 é um auto valor de A^2 e que \mathbf{x} é o autovetor associado

Autovalores e Autovetores

- Potências de uma matriz
 - Teorema: Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e \mathbf{x} um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e \mathbf{x} é um autovetor associado

Autovalores e Autovetores

- Potências de uma matriz

- Exercício: Ache os autovalores e vetores de A^7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Potências de uma matriz

- Exercício: Ache os autovalores e vetores de A^7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 2^7 = 128 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\lambda = 1^7 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autovalores e Autovetores

- Teorema:
 - Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\lambda=0$ não é um autovalor de A

Autovalores e Autovetores

- Teorema:
 - Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\lambda=0$ não é um autovalor de A
- Demonstração
 - Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ e observe primeiro que $\lambda=0$ é uma solução da equação característica

$$\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

se, e somente se, o termo constante c_n for zero.

- Assim, é suficiente provar que A é invertível se, e somente se, $c_n \neq 0$.

Autovalores e Autovetores

- Teorema:
 - Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\lambda=0$ não é um autovalor de A

- Demonstração

- Porém

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

com isso, tomando $\lambda=0$,

$$\det(-A) = c_n \quad \text{ou} \quad (-1)^n \det(A) = c_n$$

- Assim $\det(A)=0$ se, e somente se, $c_n=0$ e isso, por sua vez, implica que A é invertível se, e só se, $c_n \neq 0$

Autovalores e Autovetores

- Autovalores e invertibilidade
 - Exemplo: A matriz A , de auto valores $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ é invertível?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Autovalores e invertibilidade
 - Exemplo: A matriz A, de auto valores $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ é invertível?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Sim, A é invertível
 - Polinômio característico tem o $c_n = -4$ sendo diferente de 0

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Autovalores e Autovetores

- Afirmações equivalentes para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- (a) A é invertível.
- (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.
- (c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n .
- (d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.
- (e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz \mathbf{b} de tamanho $n \times 1$.
- (f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução com cada matriz \mathbf{b} de tamanho $n \times 1$.
- (g) $\det(A) \neq 0$.
- (h) Os vetores coluna de A são linearmente independentes.
- (i) Os vetores linha de A são linearmente independentes.
- (j) Os vetores coluna de A geram \mathbb{R}^n .
- (k) Os vetores linha de A geram \mathbb{R}^n .
- (l) Os vetores coluna de A formam uma base de \mathbb{R}^n .
- (m) Os vetores linha de A formam uma base de \mathbb{R}^n .
- (n) A tem posto n .
- (o) A tem nulidade 0.
- (p) O complemento ortogonal do espaço nulo de A é \mathbb{R}^n .
- (q) O complemento ortogonal do espaço linha de A é $\{\mathbf{0}\}$.
- (r) A imagem de T_A é \mathbb{R}^n .
- (s) T_A é um operador injetor.
- (t) $\lambda = 0$ não é um autovalor de A .

Resumo

Resumo

- Autovalores e autovetores

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- Equação característica

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- Polinômio característico

- É possível descobrir os autovalores achando as raízes

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

- Autoespaço

- É possível descobrir o autovetor associado a um autovalor λ descobrindo a base do espaço nulo da matriz dos coeficientes atualizada

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Resumo

- Exercícios de fixação:
 - Anton seção 5.1
 - 1-5
 - 12-13

Resumo

- Próxima aula:
 - Diagonalização

$$P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \quad e \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP,$$

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
 - ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
 - Seção 5.1
 - DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
 - Seção 5.2