Integrais de linha

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Integrais de linha
  - Cálculo de integrais de linha
  - Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Trabalho como integral de linha
  - Integrais de linha por partes
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Campos vetoriais
  - Definição: F: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ → $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$
  - Campos de quadrado inverso
  - Campos gradientes
    - O gradiente de uma função é um campo vetorial
    - Campos conservativos (**F**) e funções potenciais (φ) $\mathbf{F} = \nabla\phi$
  - Divergente e rotacional
  - Operadores ∇ e ∇^2
- Integrais de linha

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \\ \operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$$

$$\left\{\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \\ \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}\right.$$

Integrais de linha

Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Não é factível calcular a integral de linha diretamente do limite
  - É possível expressar uma integral de linha como uma integral definida ordinária

Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Suponha que C seja uma curva no plano xy, dada por uma parametrização lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \leq t \leq b)$$

  - Suponha que a cada ponto P_k de uma partição de C corresponda um valor do parâmetro t_k em [a, b].
  - O comprimento de arco de C entre os pontos P_{k-1} e P_k é, então, dado por

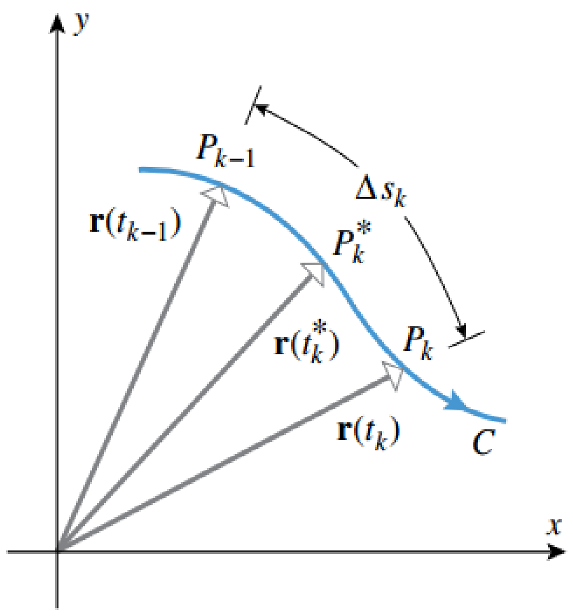
$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

  - Pelo teorema do valor médio. existe t_k^* em $[t_{k-1},t_k]$

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \|\mathbf{r}'(t_k^*)\|\,\Delta t_k$$

Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Denota-se $P_k{}^*(x_k{}^*, y_k{}^*) = P_k{}^*(x_k{}^*(t_k{}^*), y_k{}^*(t_k{}^*))$ o ponto correspondente ao valor $t_k{}^*$ do parâmetro
  - Como a parametrização de C é lisa, pode ser mostrado que $\Delta s_k \rightarrow 0$ se, e somente se, $\Delta t_k \rightarrow 0$
  - A composta f(x(t), y(t)) é uma função real definida no intervalo [a, b]



Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x, y)\, ds &= \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta s_k && \boxed{\text{Definição 15.2.1}} \\
&= \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x(t_k^*), y(t_k^*)) \|\mathbf{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k && \boxed{\text{Substituição}} \\
&= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x(t_k^*), y(t_k^*)) \|\mathbf{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k \\
&= \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt && \boxed{\text{Definição 5.5.1, no Volume 1}}
\end{aligned}$$

Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Resumindo
    - Se C for uma curva dada por uma parametrização lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \leq t \leq b)$$

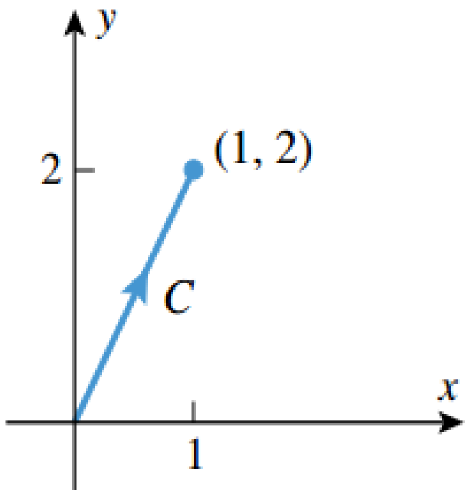
então

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Exemplo: Usando a parametrização dada, calcule a integral de linha $\int_C (1 + xy^2)\, ds$

$$C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1)$$



Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Exemplo: Usando a parametrização dada, calcule a integral de linha

$$C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 1) \qquad \int_C (1 + xy^2)\, ds$$

    - Derivada e norma de **r**

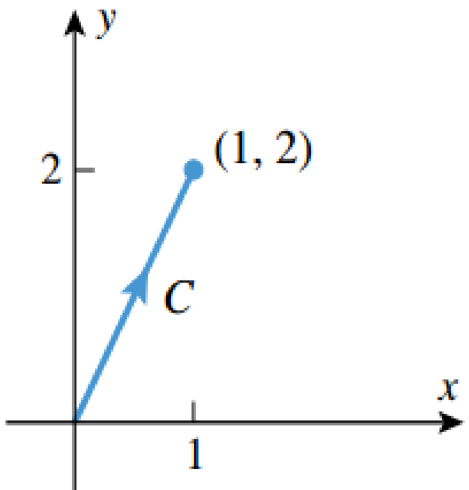
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5}$$

    - Integral de linha

$$\int_C (1 + xy^2)\, ds = \int_0^1 [1 + t(2t)^2]\sqrt{5}\, dt$$

$$= \int_0^1 (1 + 4t^3)\sqrt{5}\, dt$$

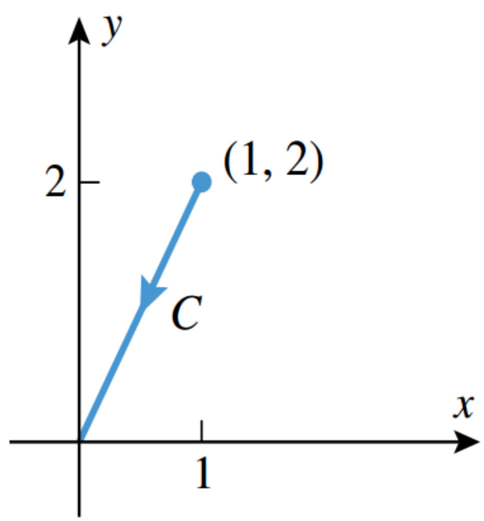
$$= \sqrt{5}\left[t + t^4\right]_0^1 = 2\sqrt{5}$$



Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Exercício: Usando a parametrização dada, calcule a integral de linha

$$C: \mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + (2-2t)\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 1) \qquad \int_C (1 + xy^2)\, ds$$



Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Exercício: Usando a parametrização dada, calcule a integral de linha

$$C : \mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + (2-2t)\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1) \qquad \int_C (1 + xy^2)\, ds$$

- Derivada e norma de **r**

$$\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5}$$

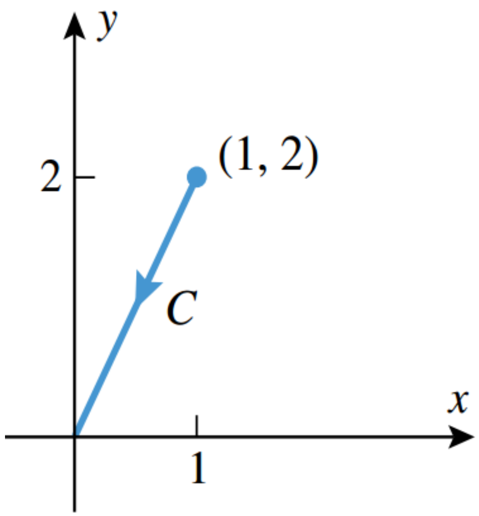
- Integral de linha

$$\int_C (1 + xy^2)\, ds = \int_0^1 [1 + (1-t)(2-2t)^2]\sqrt{5}\, dt$$

$$= \int_0^1 [1 + 4(1-t)^3]\sqrt{5}\, dt$$

$$= \sqrt{5}\left[t - (1-t)^4\right]_0^1 = 2\sqrt{5}$$

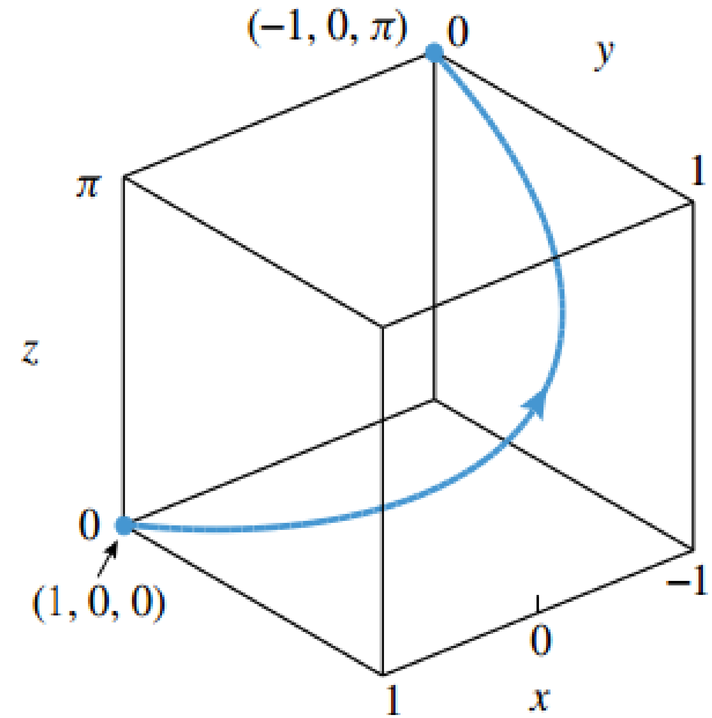
Uma integral de linha de f em relação a *s* ao longo de C não depende da orientação escolhida de C.



Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Exercício: Calcule a integral de linha $\int_C (xy + z^3)\, ds$ de (1, 0, 0) a (−1, 0, π) ao longo da hélice C dada pela equação paramétrica

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

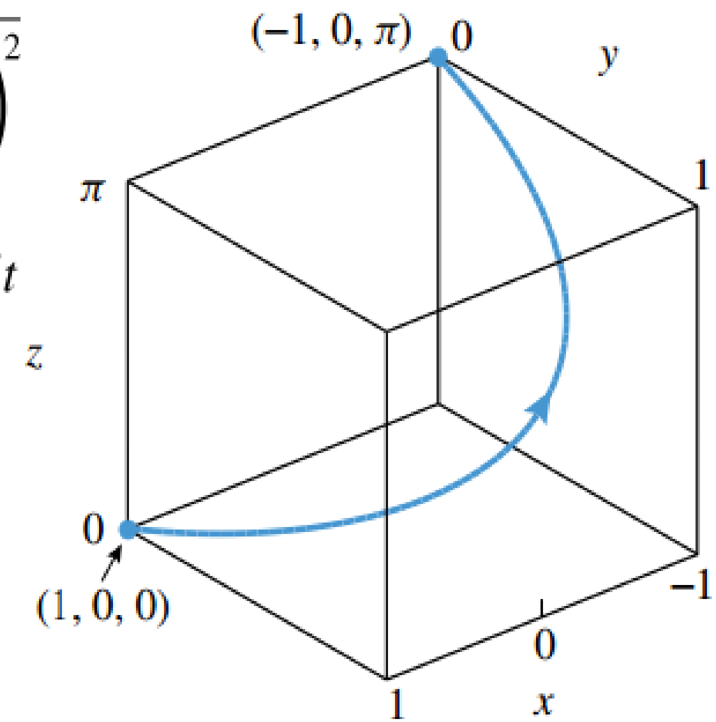


Integrais de linha

- Cálculo de integrais de linha
  - Exercício: Calcule a integral de linha $\int_C (xy + z^3)\, ds$ de (1, 0, 0) a (−1, 0, π) ao longo da hélice C dada pela equação paramétrica

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

$$\begin{aligned}
\int_C (xy + z^3)\, ds &= \int_0^\pi (\cos t \operatorname{sen} t + t^3) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\
&= \int_0^\pi (\cos t \operatorname{sen} t + t^3) \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt \\
&= \sqrt{2} \int_0^\pi (\cos t \operatorname{sen} t + t^3)\, dt \\
&= \sqrt{2} \left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} + \frac{t^4}{4} \right]_0^\pi = \frac{\sqrt{2}\pi^4}{4}
\end{aligned}$$



Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Por exemplo, suponha que f seja uma função definida em uma curva lisa C do plano xy e que tenhamos etiquetado pontos de uma partição de C por $P_k(x_k, y_k)$.
  - Tomando $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ e $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta y_k$$

Os pontos da partição devem estar ordenados no sentido da orientação da curva

Porém os valores Δx e Δy trocam de sinal com a troca da ordem dos pontos

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Se C for uma curva lisa no espaço tridimensional, podemos ter integrais de linha de f em relação a x, y e z ao longo de C
  - Por exemplo, em relação a x

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k$$

  - Observação: As integrais de linha de f em relação a x, y e z existem se f for contínua em C

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Procedimento:
    - Encontrar equações paramétricas de C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

em que a orientação de C seja dada no sentido de percurso de t crescente

- Expressar o integrando em termos de t

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)\, dt$$

$$dz = z'(t)\, dt$$

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Exemplo: Calcule a integral de linha onde C é o segmento de reta ligando (0, 0) e (1, 2).

$$\int_C 3xy\, dy$$

Orientação de (0,0) a (1,2)

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Exemplo: Calcule a integral de linha onde C é o segmento de reta ligando (0, 0) e (1, 2).

$$\int_C 3xy\, dy$$

Orientação de (0,0) a (1,2)

- Usando a parametrização

$$x = t, \quad y = 2t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

- Integrando

$$\int_C 3xy\, dy = \int_0^1 3(t)(2t)(2)\, dt = \int_0^1 12t^2\, dt = 4t^3 \Big]_0^1 = 4$$

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Exercício: Calcule a integral de linha onde C é o segmento de reta ligando (1, 2) e (0, 0).

$$\int_C 3xy\, dy$$

Sentido oposto do anterior

Como seria a parametrização?

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Exercício: Calcule a integral de linha onde C é o segmento de reta ligando (1, 2) e (0, 0).

$$\int_C 3xy\, dy$$

Sentido oposto do anterior

    - Usando a parametrização

$$x = 1 - t, \quad y = 2 - 2t \quad (0 \le t \le 1)$$

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Exercício: Calcule a integral de linha onde C é o segmento de reta ligando (1, 2) e (0, 0).

$$\int_C 3xy\, dy$$

Sentido oposto do anterior

- Usando a parametrização

$$x = 1 - t, \quad y = 2 - 2t \quad (0 \le t \le 1)$$

- Integrando

$$\int_C 3xy\, dy = \int_0^1 3(1-t)(2-2t)(-2)\, dt$$

$$= \int_0^1 -12(1-t)^2\, dt = 4(1-t)^3\Big]_0^1 = -4$$

Resultado oposto

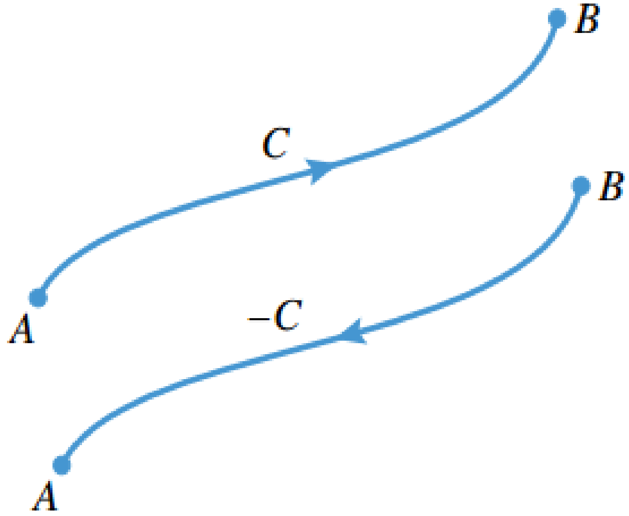
Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Se C for uma curva lisa orientada, denotamos por −C a curva de orientação oposta

$$\int_{-C} f(x, y)\,dx = -\int_C f(x, y)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-C} g(x, y)\,dy = -\int_C g(x, y)\,dy$$

$$\int_{-C} f(x, y)\,ds = \int_C f(x, y)\,ds$$

Similar para 3D



Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Muitas vezes, as integrais de linha em relação a x e y ocorrem combinadas

$$\int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \int_C f(x, y)\,dx + \int_C g(x, y)\,dy$$

Similar para 3D

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Exercício: Calcule ao longo do arco circular C dado

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy \qquad x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t\ (0 \le t \le \pi/2)$$

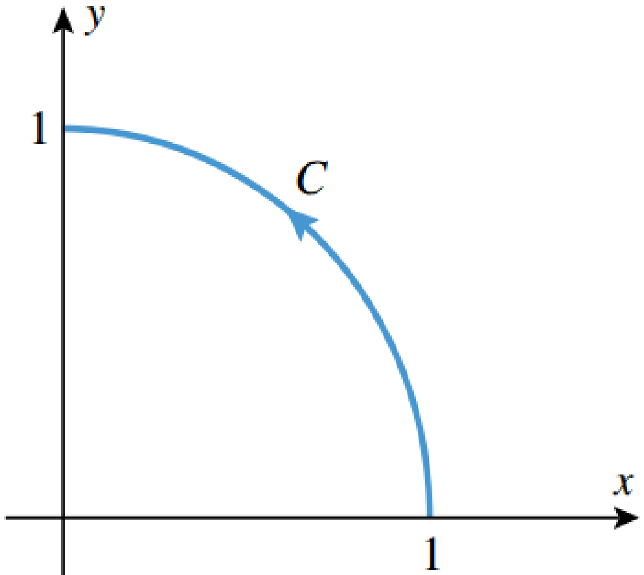
- Integrando cada parte

$$\int_C 2xy\,dx = \int_0^{\pi/2} (2\cos t\,\operatorname{sen} t)\left[\frac{d}{dt}(\cos t)\right] dt$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\,\cos t\,dt = -\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 t\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

$$\int_C (x^2 + y^2)\,dy = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\left[\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t)\right] dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

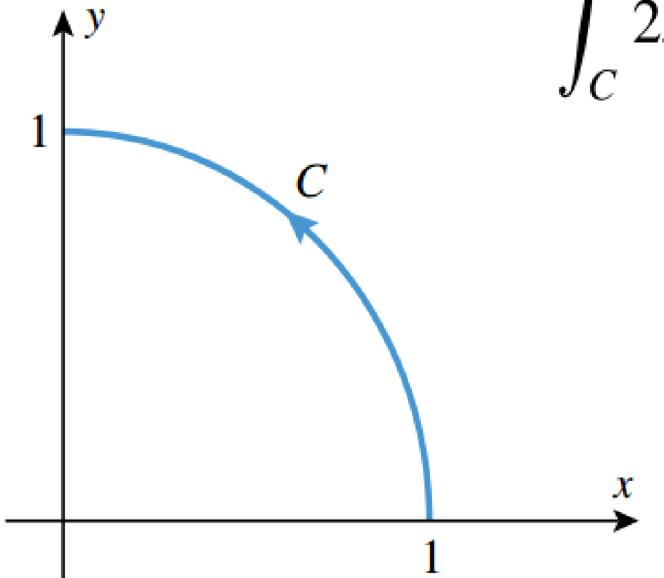


Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Exercício: Calcule ao longo do arco circular C dado

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy \qquad x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t\ (0 \le t \le \pi/2)$$

- Somando cada parte



$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = \int_C 2xy\,dx + \int_C (x^2 + y^2)\,dy$$
$$= -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

Integrais de linha

- Integrais de linha em relação a x, y e z
  - Em relação a orientação, tem-se

$$\int_{-C} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = -\int_{C} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$$

ou

$$\int_{-C} f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz$$

$$= -\int_{C} f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz$$

Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Notação alternativa para integrais de linha em relação a x, y e z apropriada para lidar com problemas que envolvam campos de vetores.
  - Interpreta-se d**r** como

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

  - Para uma curva C orientada no espaço bidimensional e um campo vetorial

Análogo para o 3D

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

escreve-se

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$$

Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Definição:
    - Se **F** for um campo vetorial contínuo e
    - Se C for uma curva lisa orientada,
    - Então a integral de linha de F ao longo de C é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Suponha que C seja uma curva orientada no plano dada em forma vetorial por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \leq t \leq b)$$

  - Se escrevermos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$$

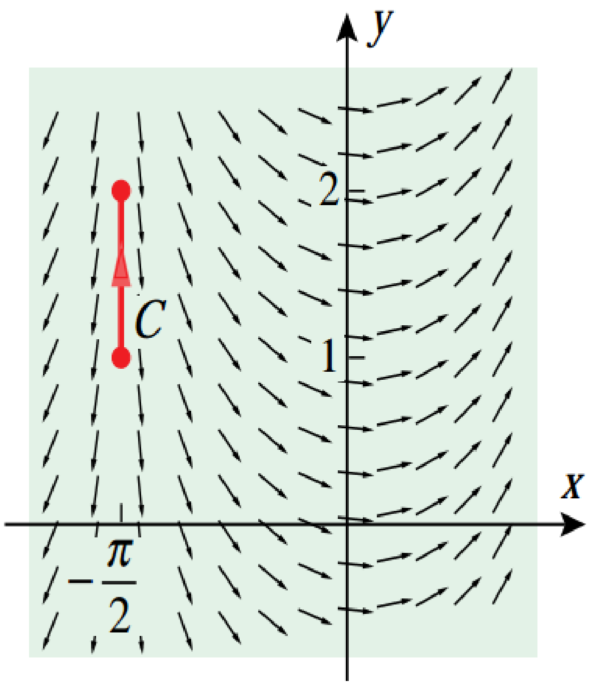
então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Exercício: Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j}$ e $C : \mathbf{r}(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad (1 \leq t \leq 2)$

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt$$

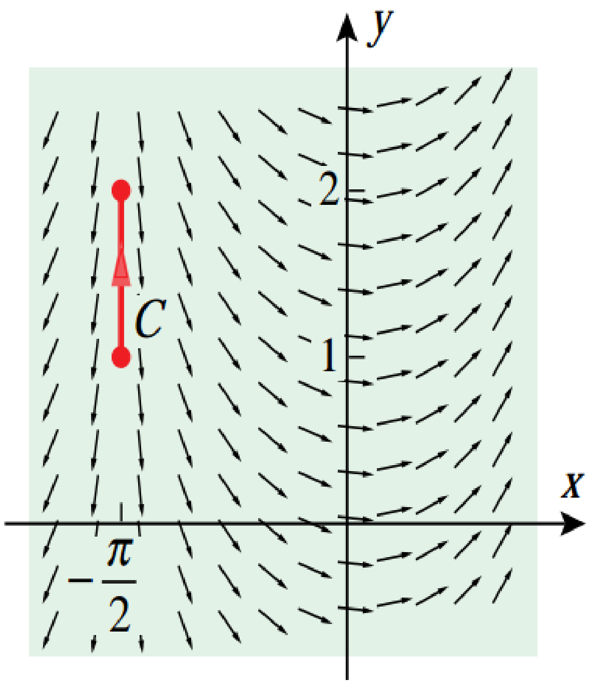


Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Exercício: Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j}$ e $C : \mathbf{r}(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad (1 \leq t \leq 2)$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_1^2 (-\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}\, dt = \int_1^2 (-1)\, dt = -1$$



Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Denotando s o parâmetro de comprimento de arco
  - O vetor tangente unitário ao longo de C é

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s)$$

Usando s ao invés de t

Não precisa normalizar, quando a curva, está parametrizada pelo comprimento de arco

Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

  - Assim

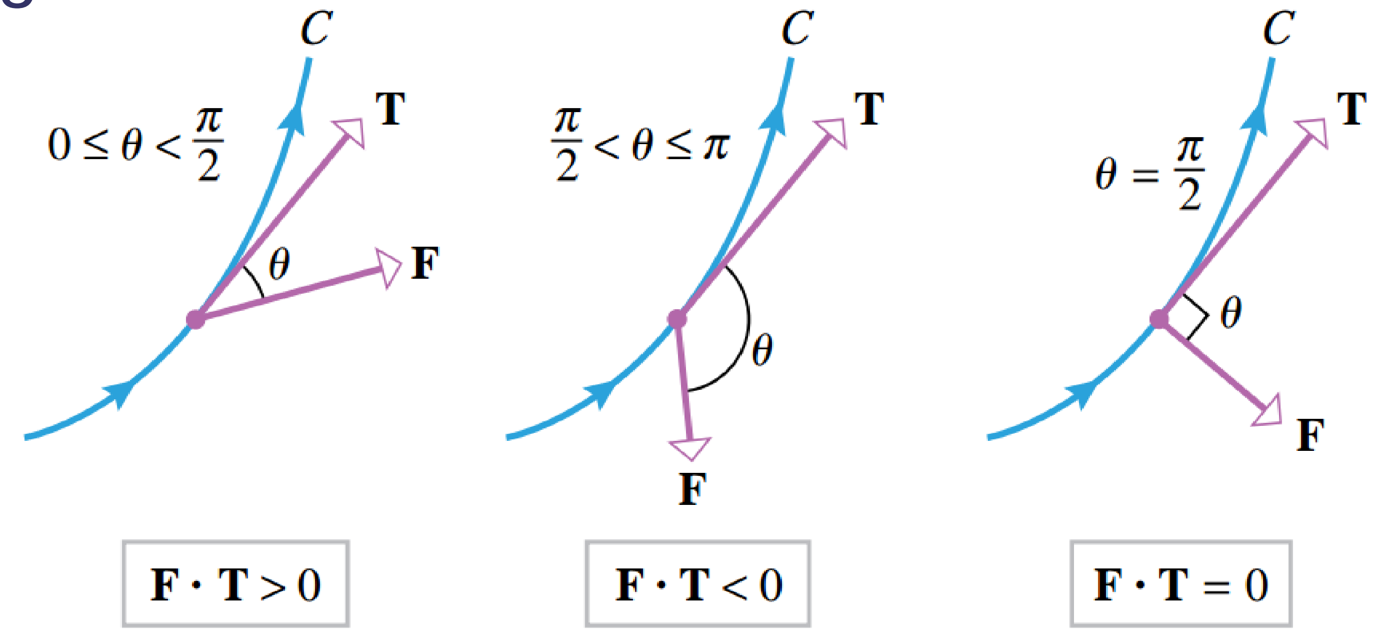
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

  – A integral de um campo vetorial ao longo de uma curva tem o mesmo valor que a integral do componente tangencial do campo vetorial ao longo da curva



Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

  - Interpretação geométrica
    - Seja θ o ângulo entre **F** e **T** em um ponto de C

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \|\mathbf{F}\|\,\|\mathbf{T}\| \cos\theta \qquad \boxed{\text{Fórmula (4) na Seção 11.3}}$$

$$= \|\mathbf{F}\| \cos\theta \qquad \boxed{\text{Pois } \|\mathbf{T}\| = 1}$$

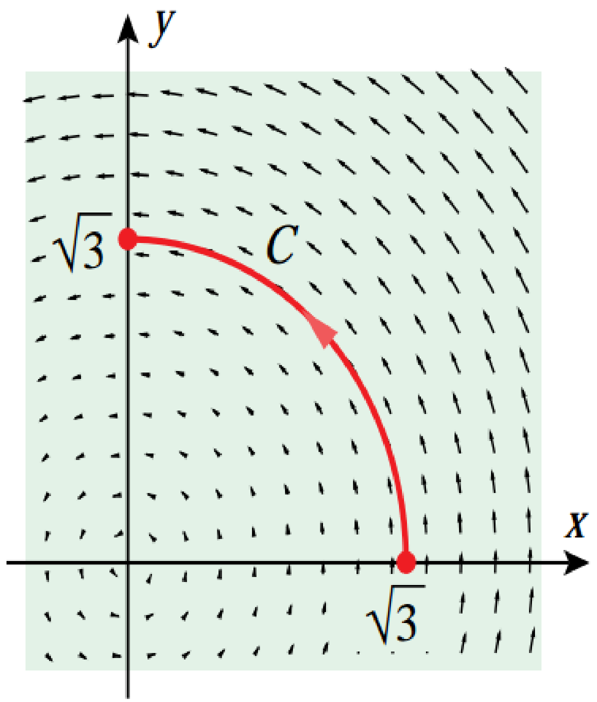
    - Assim

$$-\|\mathbf{F}\| \leq \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \leq \|\mathbf{F}\|$$

      - se **F** ≠ **0**, então o sinal de **F**·**T** dependerá do ângulo entre a direção de **F** e a direção de C
    - Efeito acumulado da magnitude de F ao longo de C

Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Exercício: Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e $C : x^2 + y^2 = 3$ orientada como na figura



Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Exercício: Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e $C : x^2 + y^2 = 3$ orientada como na figura
    - Em cada ponto de C, a direção de F e a direção de C são iguais e

      $$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}$$

Sabe-se que o vetor tangente é ortogonal ao circulo ou definindo C parametricamente

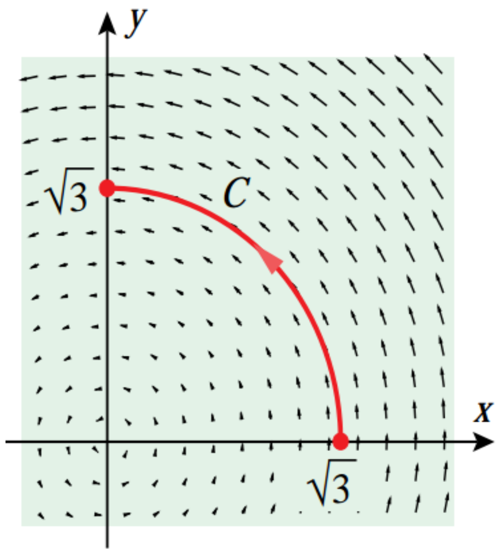
    - Produto escalar

      $$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \|\mathbf{F}\| \cos(0) = \|\mathbf{F}\| = \sqrt{3}$$

    - Integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \sqrt{3}\, ds = \sqrt{3} \int_C ds = \frac{3\pi}{2}$$

Perímetro da circunferência 2πr



Integrais de linha

- Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Invertendo a orientação, tem-se:

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Integrais de linha

- Trabalho como integral de linha
  - Problema de definir o trabalho efetuado por uma força variável movendo uma partícula ao longo de uma caminho curvilíneo
    - Aplicação importante das integrais de linha em relação a x, y e z

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Força constante!

Integrais de linha

- Trabalho como integral de linha
  - Problema de definir o trabalho efetuado por uma força variável movendo uma partícula ao longo de uma caminho curvilíneo
    - Aplicação importante das integrais de linha em relação a x, y e z

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Força constante!

Como seria com a força variável?

Integrais de linha

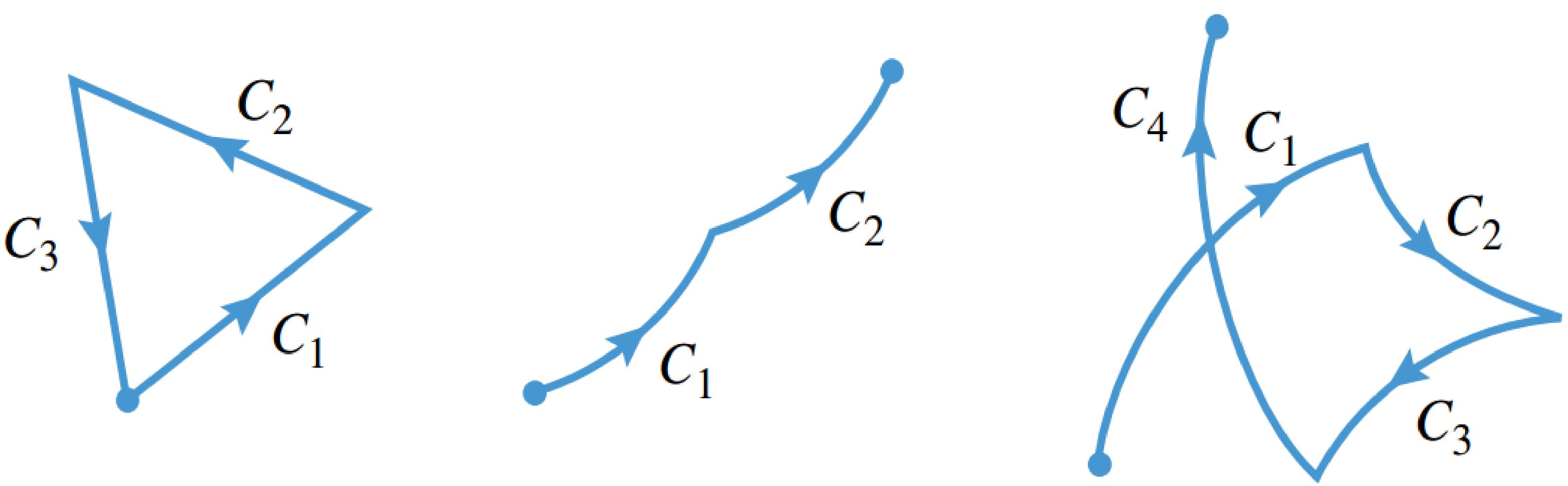
- Trabalho como integral de linha
  - Definição:
    - Suponha que uma partícula se mova ao longo de uma curva lisa C sob o efeito de um campo de forças contínuo F e que C esteja orientado no sentido do movimento da partícula.
    - Então, o **trabalho realizado pelo campo de forças** na partícula é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Integrais de linha

- Integrais de linha ao longo de curvas lisas por partes
  - Soma das integrais ao longo das seções

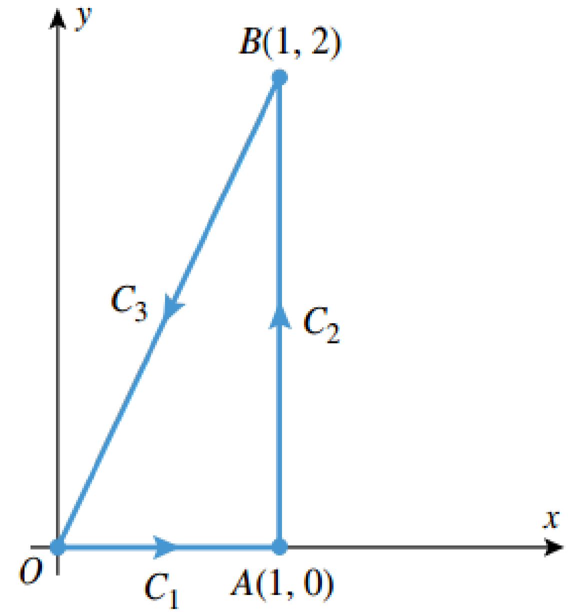
$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$



Integrais de linha

- Integrais de linha ao longo de curvas lisas por partes
  - Exercício: Calcule a integral de linha ao longo do trajeto da figura $\int_C x^2 y\,dx + x\,dy$

Quais as curvas?

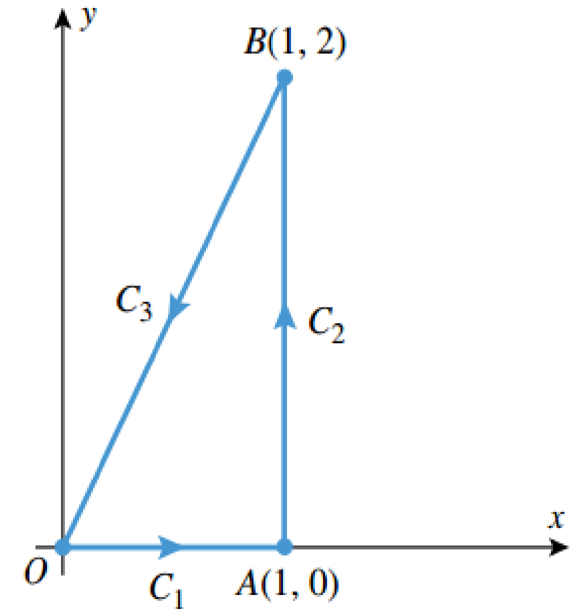


Integrais de linha

- Integrais de linha ao longo de curvas lisas por partes
  - Exercício: Calcule a integral de linha ao longo do trajeto da figura $\int_C x^2 y\,dx + x\,dy$

Quais as curvas?

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+t(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)$$
$$\boldsymbol{r}(t)=(1-t)\boldsymbol{r}_0+t\,\boldsymbol{r}_1$$
$$(0\leq t\leq 1)$$



Integrais de linha

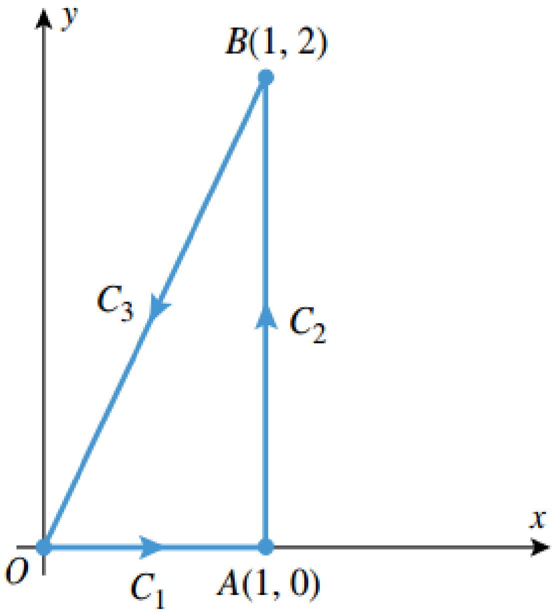
- Integrais de linha ao longo de curvas lisas por partes
  - Exercício: Calcule a integral de linha ao longo do trajeto da figura $\int_C x^2 y\,dx + x\,dy$
    - Curvas

$$C_1: \mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 0, 0\rangle + t\langle 1, 0\rangle = \langle t, 0\rangle$$

$$C_2: \mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 1, 0\rangle + t\langle 1, 2\rangle = \langle 1, 2t\rangle$$

$$C_3: \mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 1, 2\rangle + t\langle 0, 0\rangle = \langle 1-t, 2-2t\rangle$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)$$
$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)\boldsymbol{r}_0 + t\,\boldsymbol{r}_1$$
$$(0 \leq t \leq 1)$$



Integrais de linha

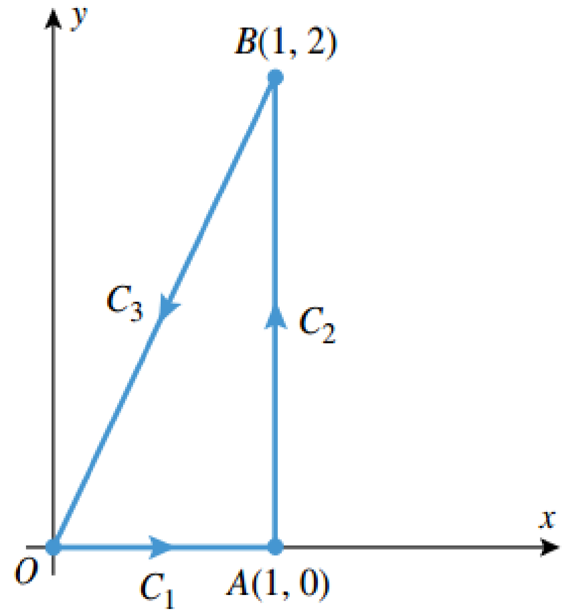
- Integrais de linha ao longo de curvas lisas por partes
  - Exercício: Calcule a integral de linha ao longo do trajeto da figura $\displaystyle\int_C x^2y\,dx + x\,dy$
    - Integrando cada cuva

$$\int_{C_1} x^2y\,dx + x\,dy = \int_{C_1} x^2y\,dx = \int_0^1 (t^2)(0)\frac{d}{dt}[t]\,dt = 0$$

$$\int_{C_2} x^2y\,dx + x\,dy = \int_{C_2} x\,dy = \int_0^1 (1)\frac{d}{dt}[2t]\,dt = 2$$

$$\int_{C_3} x^2y\,dx + x\,dy = \int_0^1 (1-t)^2(2-2t)\frac{d}{dt}[1-t]\,dt + \int_0^1 (1-t)\frac{d}{dt}[2-2t]\,dt$$

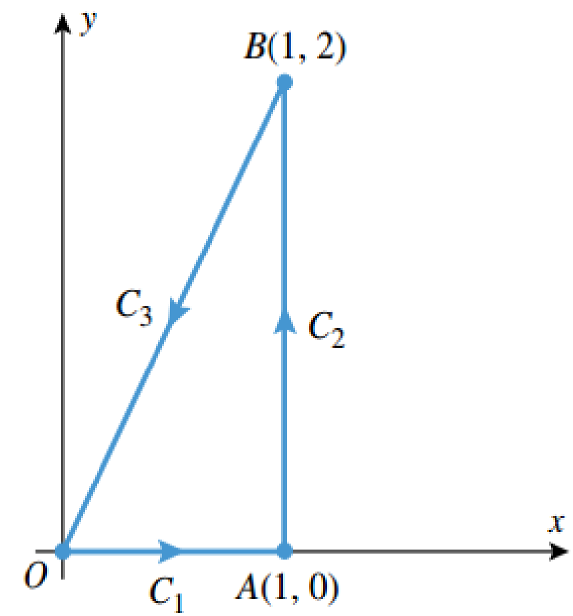
$$= 2\int_0^1 (t-1)^3\,dt + 2\int_0^1 (t-1)\,dt = -\tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{3}{2}$$



Integrais de linha

- Integrais de linha ao longo de curvas lisas por partes
  - Exercício: Calcule a integral de linha ao longo do trajeto da figura $\int_C x^2 y\,dx + x\,dy$
    - Somando

$$\int_C x^2 y\,dx + x\,dy = 0 + 2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$



Resumo

Resumo

- Integrais de linha
  - Cálculo de integrais de linha

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \le t \le b) \qquad \int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

  - Integrais de linha em relação a x, y e z

$$\int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = \int_C f(x, y)\, dx + \int_C g(x, y)\, dy$$

  - Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva
  - Trabalho como integral de linha
    - Aplicação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \le t \le b)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

  - Integrais de linha por partes

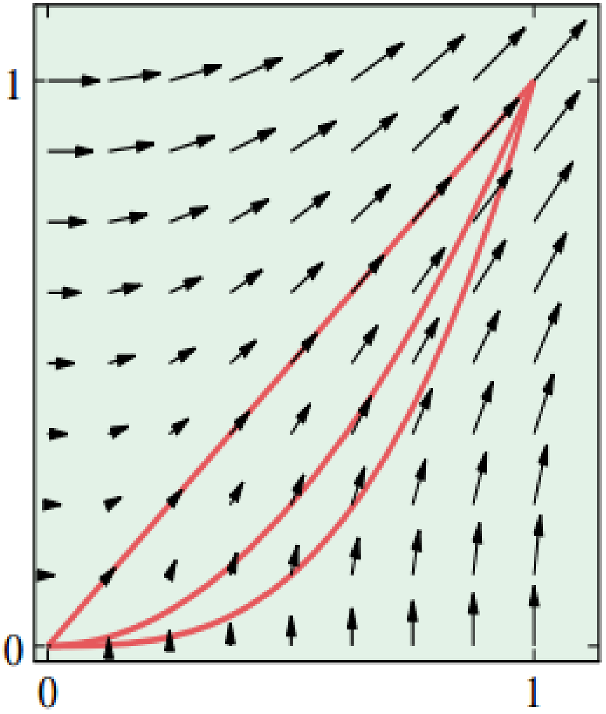
$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$

Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 15.2
    - Exercícios de compreensão 15.2
    - 7-10
    - 12
    - 33-34

Resumo

- Próxima aula:
  - Independência do caminho;
  - Campos vetoriais conservativos



Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 15.2