Multiplicadores de Lagrange

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

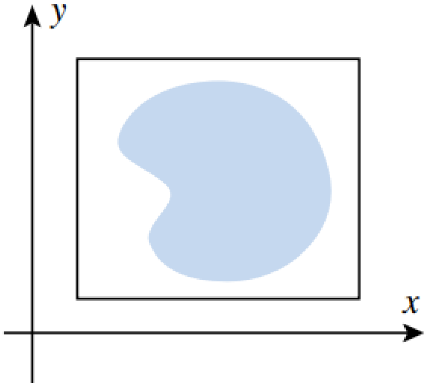
Índice

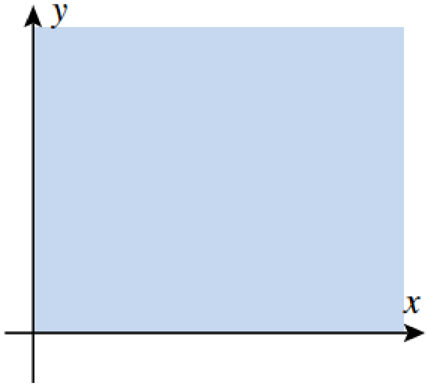
- Revisão
- Multiplicadores de Lagrange
  - Duas variáveis
  - Três variáveis
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Conjuntos limitados e ilimitados

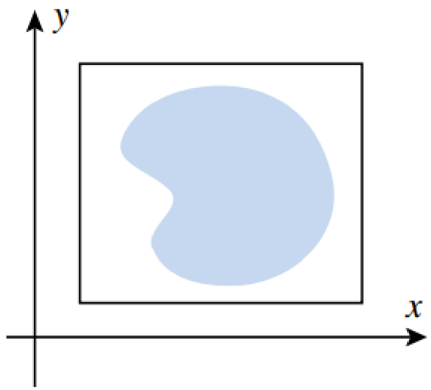


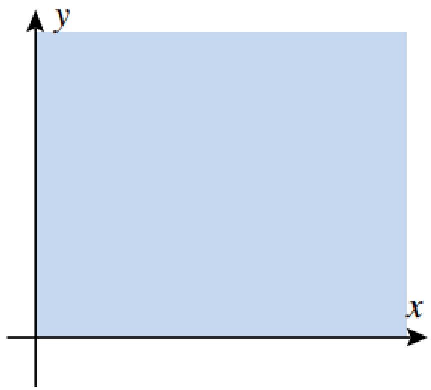


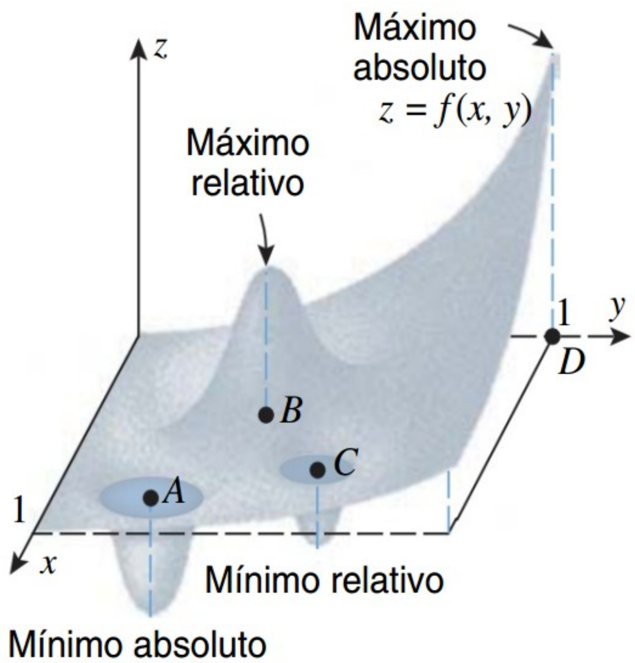
Revisão

- Conjuntos limitados e ilimitados
- Máximos e mínimos relativos e absolutos
  - Relativos
    - Pontos críticos
      - $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$; ou
      - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0)
    - Derivada segunda (relativo)

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

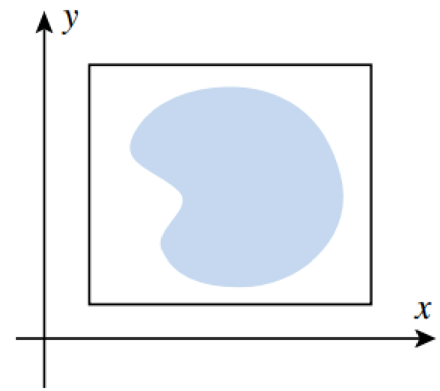


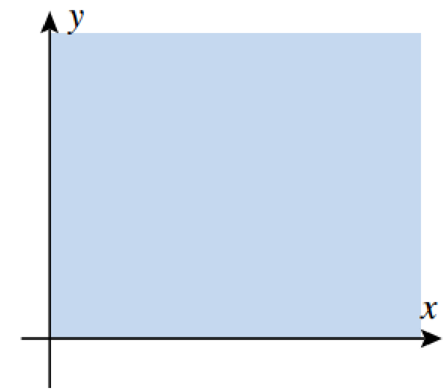




Revisão

- Conjuntos limitados e ilimitados

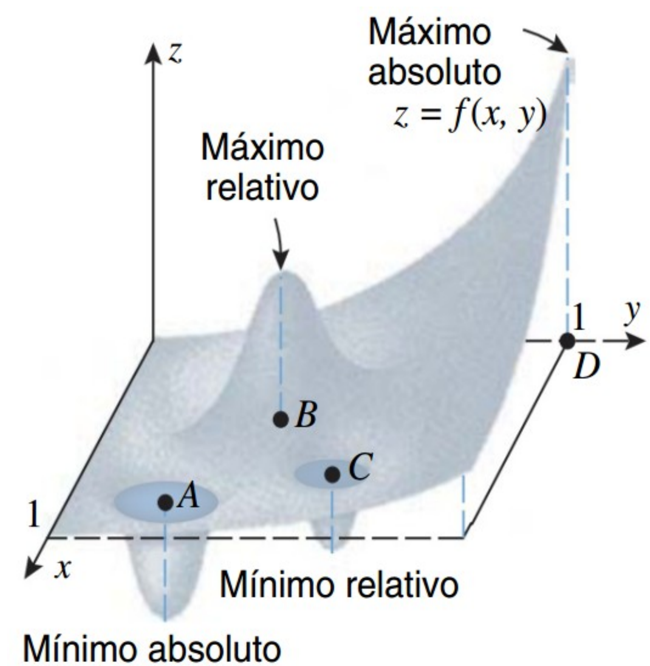




- Máximos e mínimos relativos e absolutos
  - Relativos
    - Pontos críticos
      - $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$; ou
      - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0)
    - Derivada segunda (relativo)

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

  - Absolutos
    - Pontos de extremos



Multiplicadores de Lagrange

Multiplicadores de Lagrange

- Problemas de extremos com restrições
  - Exemplo da aula passada:
    - Minimizar

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

    - Sujeito a restrição

$$xyz - 32 = 0$$

Multiplicadores de Lagrange

- Problemas de extremos com restrições
  - Casos especiais:
    - Problema do extremo a duas variáveis com uma restrição
      - Maximize ou minimize a função $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$
    - Problema do extremo a três variáveis com uma restrição
      - Maximize ou minimize a função $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$

Multiplicadores de Lagrange

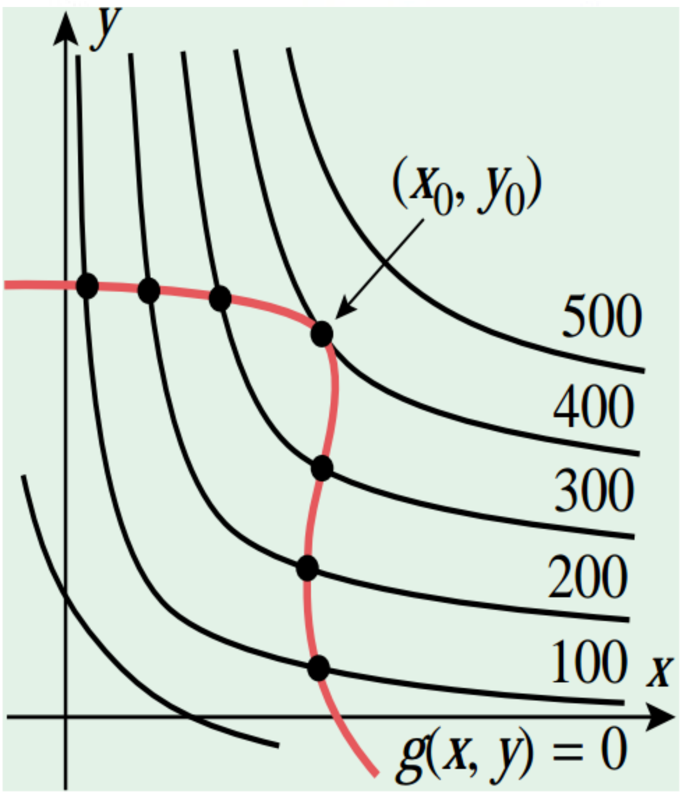
- Como era feito antes
  - Resolver a restrição para uma das variáveis
  - Substituir na função
  - Utilizar métodos tradicionais
- Porém nem sempre é possível resolver a equação restrita para uma das variáveis em termos das outras

Multiplicadores de Lagrange

- Motivação: Duas variáveis
  - Suponha que estejamos tentando maximizar uma função f(x, y) sujeita a uma restrição g(x, y) = 0

Máximo de $f(x, y)$ é 400

Cada ponto é um candidato a solução

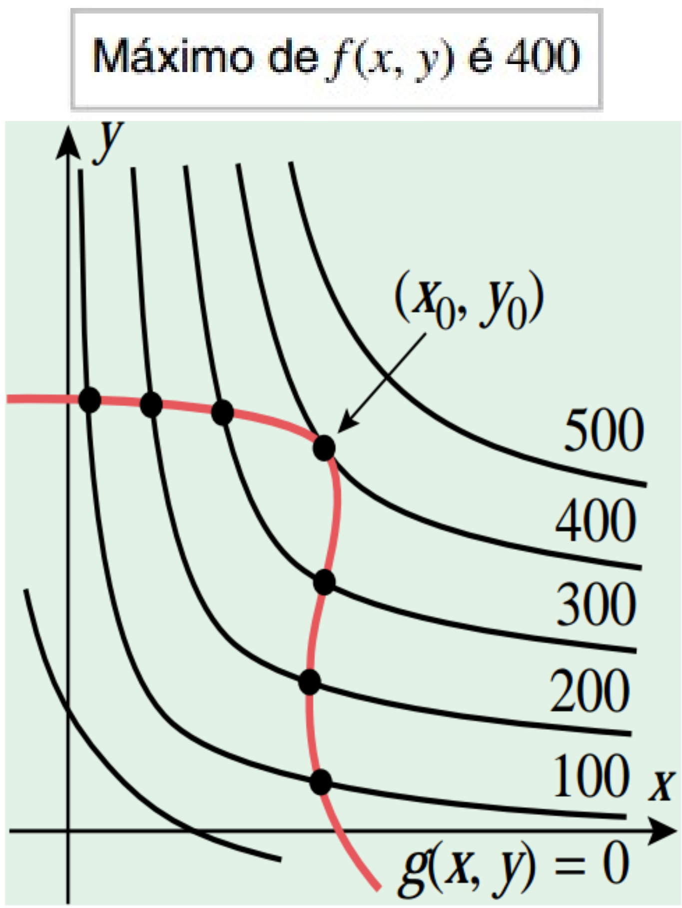


O valor de máximo ocorrerá onde a curva de restrição somente tocar uma curva de nível

Multiplicadores de Lagrange

- Motivação: Duas variáveis
  - Suponha que estejamos tentando maximizar uma função f(x, y) sujeita a uma restrição g(x, y) = 0

Cada ponto é um candidato a solução



Quem são os gradientes de f e g no ponto (x_0,y_0)?

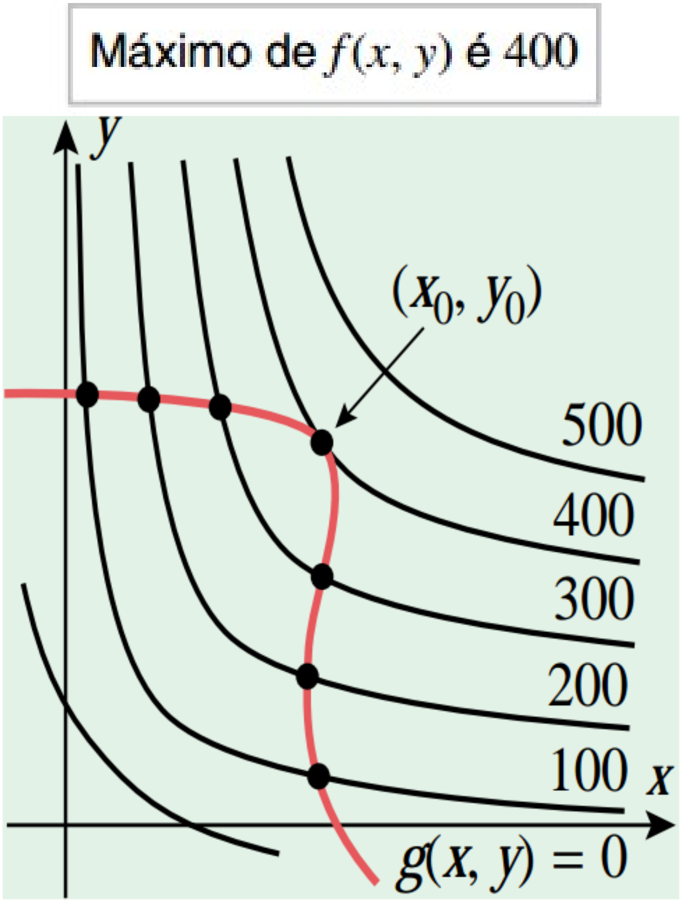
O valor de máximo ocorrerá onde a curva de restrição somente tocar uma curva de nível

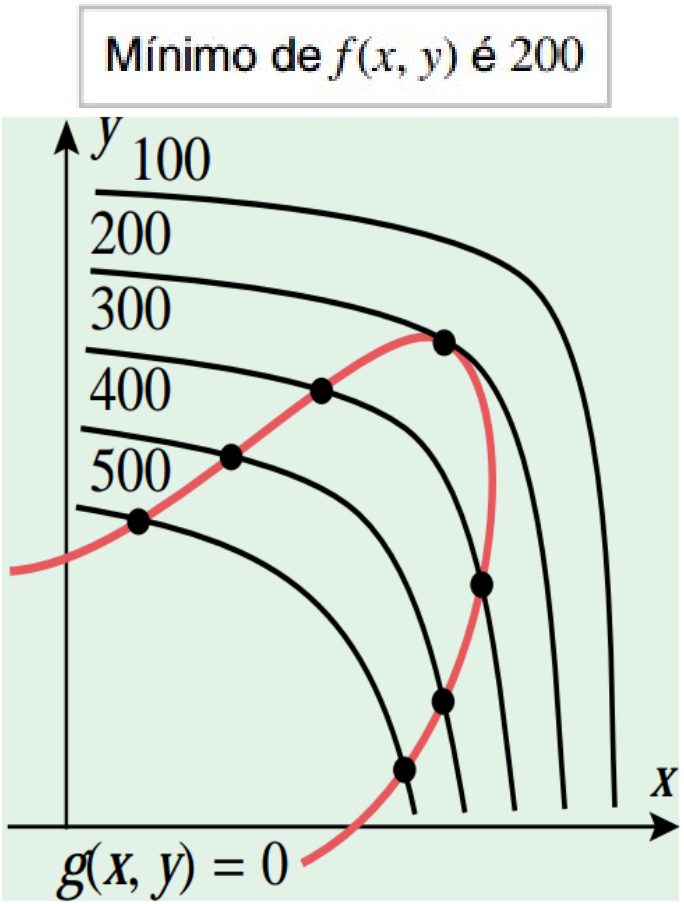
Multiplicadores de Lagrange

O mínimo é análogo

- Motivação: Duas variáveis
  - Suponha que estejamos tentando maximizar uma função f(x, y) sujeita a uma restrição g(x, y) = 0

Cada ponto é um candidato a solução





Quem são os gradientes de f e g no ponto (x_0,y_0)?

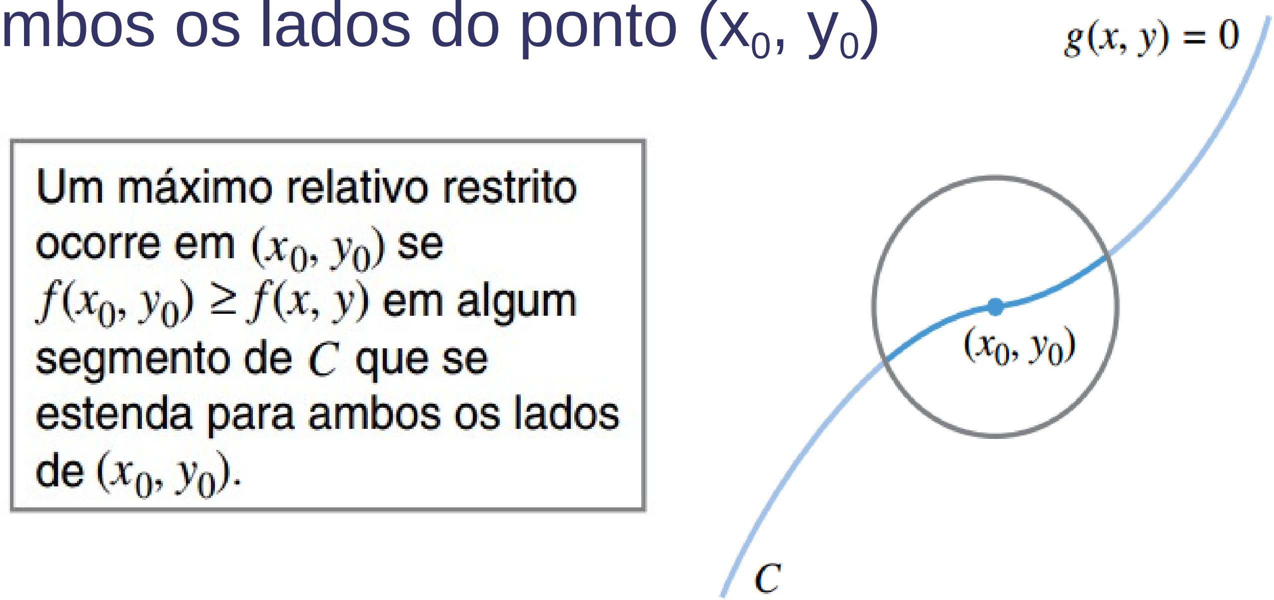
Multiplicadores de Lagrange

- Motivação: Duas variáveis
  - Suponha que estejamos tentando maximizar uma função f(x, y) sujeita a uma restrição g(x, y) = 0
    - Os vetores $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ devem ser paralelos

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

Multiplicadores de Lagrange

- Definições:
  - Máximo (mínimo) **absoluto restrito** em (x_0, y_0)
    - se $f(x_0, y_0)$ é o maior (menor) valor de f na curva de restrição
  - Máximo (mínimo) **relativo restrito** em (x_0, y_0)
    - se $f(x_0, y_0)$ for o maior (menor) valor de f em algum segmento da curva de restrição que se estenda para ambos os lados do ponto (x_0, y_0)



Multiplicadores de Lagrange

- Teorema: Princípio do Extremo Restrito para Duas Variáveis e Uma Restrição
  - Sejam f e g funções de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo a curva de restrição $g(x, y) = 0$.
  - Suponha que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto da curva.
  - Se f tiver um **extremo relativo restrito**, então esse extremo ocorrerá em um ponto (x_0, y_0) da curva de restrição no qual os vetores gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ forem paralelos;
  - isto é, existirá algum número λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Em que ponto ou pontos do círculo de raio 1 a função f tem um máximo absoluto, e qual é esse máximo?

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad\qquad f(x, y) = xy$$

Transformar numa restrição g(x,y)=0

Pelo Teorema do Valor Extremo (aula passada) existe um máximo absoluto e um mínimo absoluto no círculo

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Em que ponto ou pontos do círculo de raio 1 a função f tem um máximo absoluto, e qual é esse máximo?

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad f(x, y) = xy$$

  - Restrição

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

∇g = **0**
se e somente se,
x = 0 e y = 0,
logo ∇g ≠ **0** para
todo ponto no circulo

  - Extremos relativos restritos

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \qquad \nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \Rightarrow y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$$

    - Reescrevendo

$$y = 2x\lambda \quad \text{e} \quad x = 2y\lambda$$

$$\lambda = \frac{y}{2x} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{x}{2y} \Rightarrow \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \Rightarrow y^2 = x^2$$

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Em que ponto ou pontos do círculo de raio 1 a função f tem um máximo absoluto, e qual é esse máximo?

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad\qquad f(x, y) = xy$$

  - Restrição

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

  - Extremos relativos restritos
    - Substituindo $y^2 = x^2$ na restrição

$$2x^2 - 1 = 0$$

    - Achando x e y

$$x = \pm 1/\sqrt{2} \qquad\qquad y = \pm 1/\sqrt{2}$$

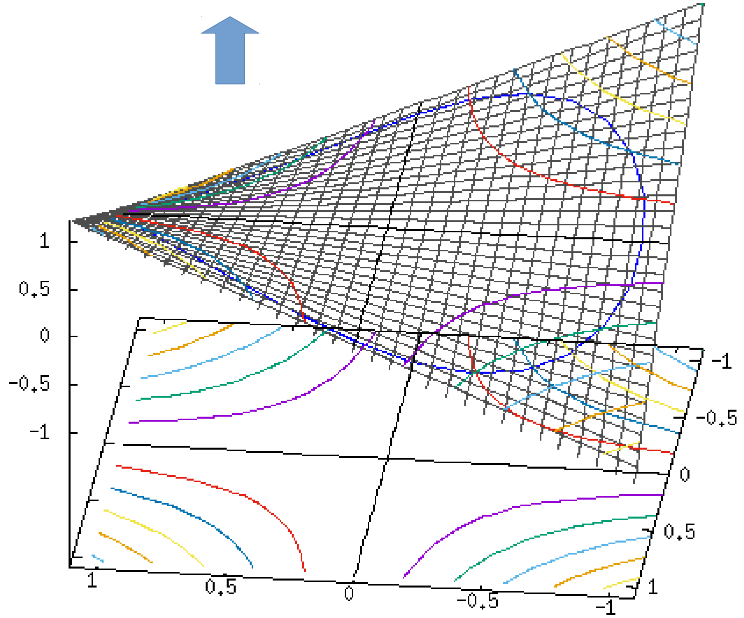
Multiplicadores de Lagrange

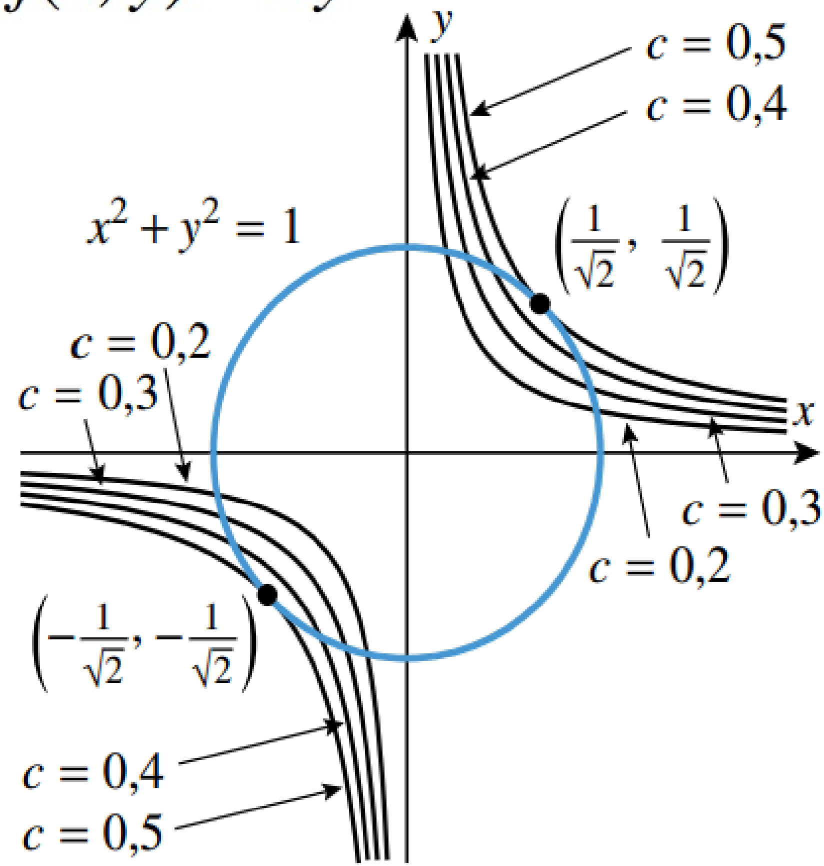
- Exemplo: Em que ponto ou pontos do círculo de raio 1 a função f tem um máximo absoluto, e qual é esse máximo?

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad f(x, y) = xy$$

  - Pontos

(x, y)	$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$
xy	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$





Multiplicadores de Lagrange

- Exercício: Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro p de área máxima

Qual a restrição?

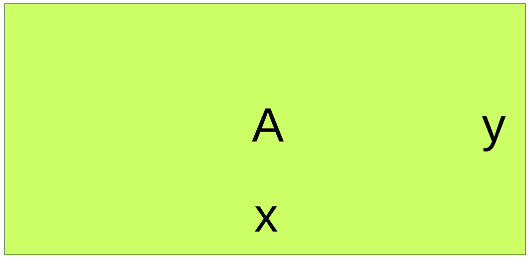
Qual a equação a se maximizar?

Multiplicadores de Lagrange

- Exercício: Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro p de área máxima

$$f(x, y) = A = xy \qquad 2x + 2y = p, \quad 0 \le x, y$$

  - x = comprimento do retângulo
  - y = largura do retângulo
  - A = área do retângulo



Multiplicadores de Lagrange

- Exercício: Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro p de área máxima

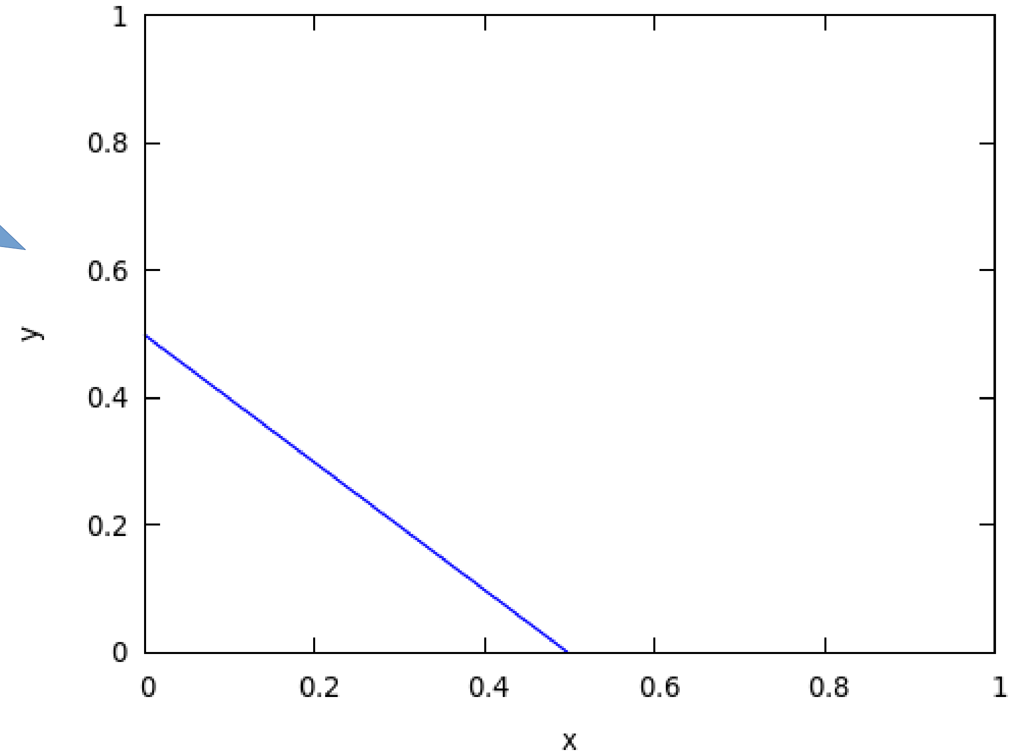
Função contínua

$$f(x, y) = A = xy$$

$$2x + 2y = p, \quad 0 \leq x, y$$

Seguimento de reta limitado e fechado

f é zero nos extremos e positivo no resto



Teorema do Valor Extremo é válido! Esse máximo absoluto também deve ser um máximo relativo restrito.

Multiplicadores de Lagrange

- Exercício: Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro p de área máxima

$$f(x, y) = A = xy \qquad 2x + 2y = p, \quad 0 \leq x, y$$

  – Gradientes

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \qquad \nabla g = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

∇g ≠ **0**

  – Máximo relativo restrito

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$y = 2\lambda \qquad x = 2\lambda$$

$$x = y$$

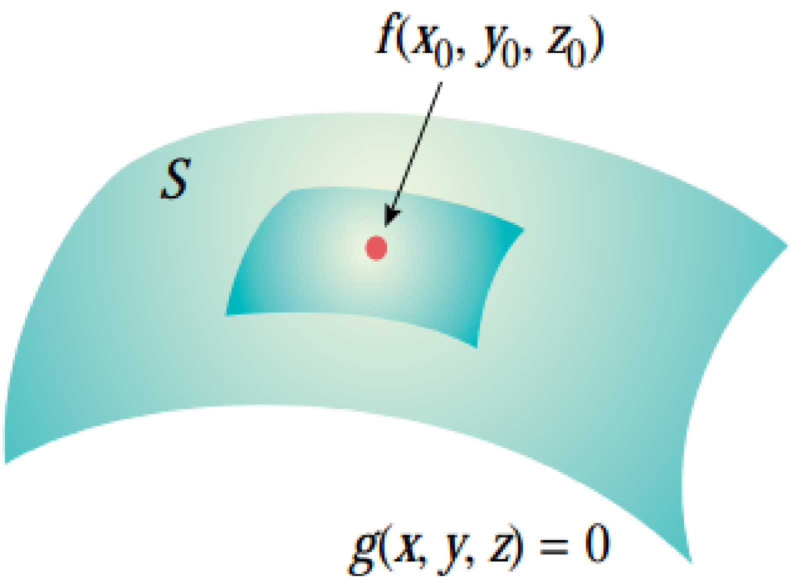
    - Substituindo na restrição

$$x = p/4 \qquad y = p/4$$

Multiplicadores de Lagrange

- Motivação: Três variáveis
  - Suponha que estejamos tentando maximizar uma função f(x, y, z) sujeita a uma restrição g(x, y, z) = 0

Superfície



Um máximo restrito relativo ocorre em (x_0, y_0, z_0) se $f(x_0, y_0, z_0) \geq f(x, y, z)$ em todos os pontos de S próximos de (x_0, y_0, z_0).

Multiplicadores de Lagrange

- Teorema: Princípio do Extremo Restrito para Duas Variáveis e Uma Restrição
  - Sejam f e g funções de três variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo a superfície de restrição $g(x, y, z) = 0$.
  - Suponha que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto da superfície.
  - Se f tiver um **extremo relativo restrito**, então esse extremo ocorrerá em um ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície de restrição no qual os vetores gradientes $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ forem paralelos;
  - isto é, existirá algum número λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Determine os pontos da esfera de raio 6 que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto (1, 2, 2)

A função a ser maximizada/minimizada é a da distância entre dois pontos

Para evitar radicais, será a distância ao quadrado

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Determine os pontos da esfera de raio 6 que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto (1, 2, 2)

Não precisa da constante

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \qquad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Determine os pontos da esfera de raio 6 que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto (1, 2, 2)

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \Rightarrow g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

  - Gradientes

$$2(x - 1)\mathbf{i} + 2(y - 2)\mathbf{j} + 2(z - 2)\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})$$

$\nabla g = \mathbf{0}$ se e somente se,
$x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, logo
$\nabla g \neq \mathbf{0}$ para todo ponto na esfera

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Determine os pontos da esfera de raio 6 que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto (1, 2, 2)

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

  - Gradientes

$$2(x - 1)\mathbf{i} + 2(y - 2)\mathbf{j} + 2(z - 2)\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})$$

$$\Downarrow$$

$$2(x - 1) = 2x\lambda, \quad 2(y - 2) = 2y\lambda, \quad 2(z - 2) = 2z\lambda$$

Não podem ser zero

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Determine os pontos da esfera de raio 6 que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto (1, 2, 2)

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \Rightarrow g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

  - Gradientes

$$2(x-1)\mathbf{i} + 2(y-2)\mathbf{j} + 2(z-2)\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})$$

$$\Downarrow$$

$$2(x-1) = 2x\lambda, \quad 2(y-2) = 2y\lambda, \quad 2(z-2) = 2z\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x-1}{x} = \lambda, \quad \frac{y-2}{y} = \lambda, \quad \frac{z-2}{z} = \lambda$$

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Determine os pontos da esfera de raio 6 que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto (1, 2, 2)

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

  - Gradientes

$$\frac{x-1}{x} = \lambda, \qquad \frac{y-2}{y} = \lambda, \qquad \frac{z-2}{z} = \lambda$$

    - Igualando 1 e 2 e depois 1 e 3

$$y = 2x \qquad\qquad z = 2x$$

    - Substituindo

$$9x^2 = 36 \qquad x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad (2, 4, 4) \quad \text{e} \quad (-2, -4, -4)$$

Multiplicadores de Lagrange

- Exemplo: Determine os pontos da esfera de raio 6 que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto (1, 2, 2)

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

  - Analise

$(2, 4, 4)$

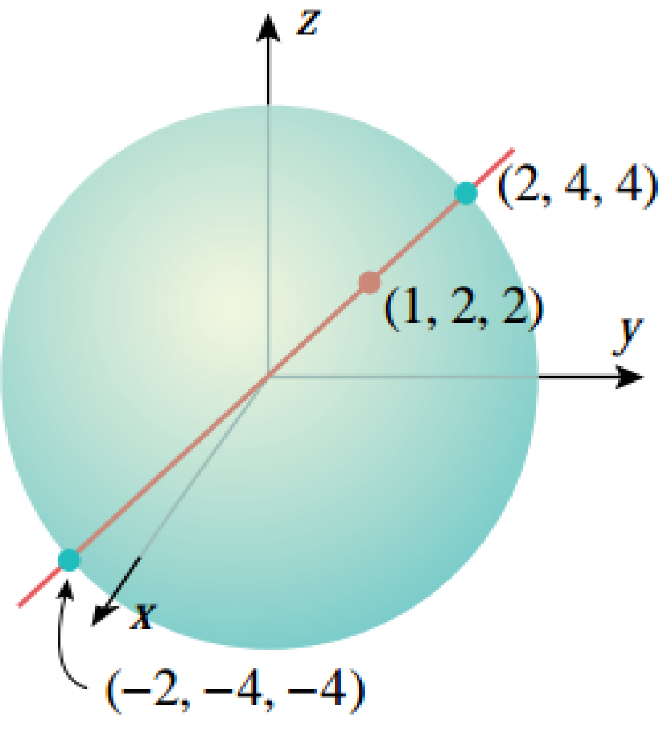
$f(2, 4, 4) = 9$

Mais próximo

$(-2, -4, -4)$

$f(-2, -4, -4) = 81$

Mais afastado



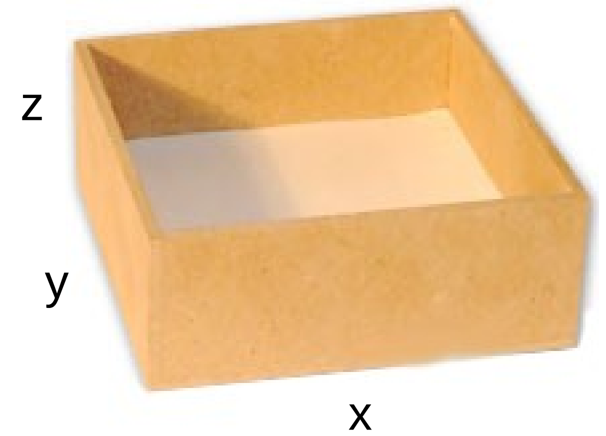
Multiplicadores de Lagrange

- Exercício: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm^3 e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
  - x = comprimento da caixa (em cm)
  - y = largura da caixa (em cm)
  - z = altura da caixa (em cm)
  - S = área da superfície da caixa (em cm^2)

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

  - Restrição de volume

$$xyz = 32$$



Multiplicadores de Lagrange

- Exercício: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm³ e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
  - Funções e Gradientes

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

$$g(x, y, z) = xyz$$

$$\nabla f = (y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y)\mathbf{k}$$

$$\nabla g = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

$\nabla g \neq \mathbf{0}$

Multiplicadores de Lagrange

- Exercício: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm³ e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
  - Funções e Gradientes

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz \qquad \nabla f = (y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y)\mathbf{k}$$

$$g(x, y, z) = xyz \qquad \nabla g = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

  - Multiplicadores de Lagrange

$$(y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y)\mathbf{k} = \lambda(yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$$

$$y + 2z = \lambda yz, \quad x + 2z = \lambda xz, \quad 2x + 2y = \lambda xy$$

Multiplicadores de Lagrange

- Exercício: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm³ e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
  - Reescrevendo

$$\frac{1}{z}+\frac{2}{y}=\lambda, \quad \frac{1}{z}+\frac{2}{x}=\lambda, \quad \frac{2}{y}+\frac{2}{x}=\lambda$$

- A partir de 1 e 2

$$y=x$$

- A partir de 1 e 3

$$z=\tfrac{1}{2}x$$

- Substituindo na restrição

$$\tfrac{1}{2}x^3=32$$

$$x=4, \quad y=4, \quad z=2$$

Mesmo resultado

Resumo

Resumo

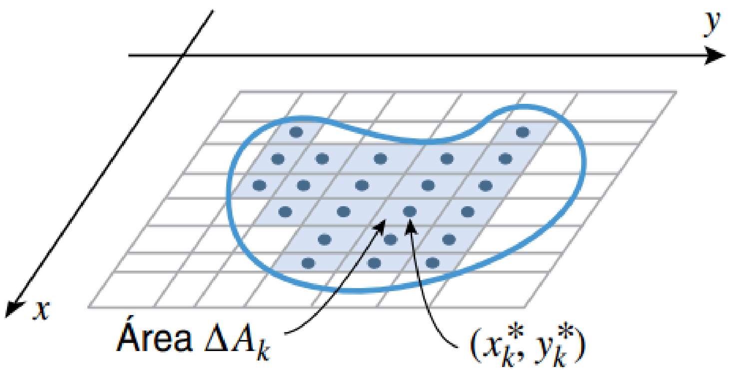
- Multiplicadores de Lagrange
  - Achar a função que se quer maximizar/minimizar
  - Achar a restrição
  - Achar os gradientes
    - O gradiente da restrição tem que ser diferente de zero
  - Aplicar na formula dos multiplicadores de Lagrange
    - Isolar λ
    - Colocar variável em função de uma
  - Substituir na restrição
    - Achar os valores das variáveis

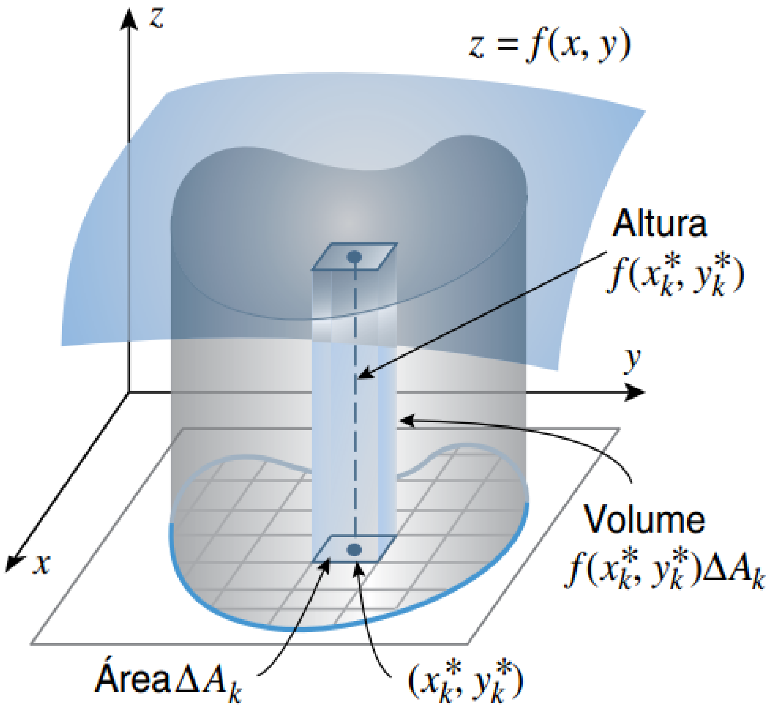
Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 13.9
    - Exercícios de compreensão 13.9
    - 5-12
    - 34

Resumo

- Próxima aula:
  - Nova unidade: Integrais múltiplas
    - Integrais duplas





Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 13.9