Diferenciabilidade e regra da cadeia

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

Revisão

Revisão

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)

Revisão

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
  - Trata como uma variável dependente

Revisão

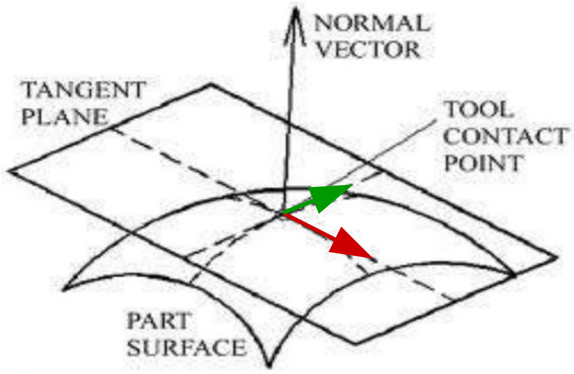
- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
  - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
  - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele

Revisão

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
  - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
  - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele
- Derivada parciais de ordens superiores
  - A derivada parcial é uma função de duas ou mais variáveis, assim também pode ser derivada

Revisão

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
  - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
  - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele
- Derivada parciais de ordens superiores
  - A derivada parcial é uma função de duas ou mais variáveis, assim também pode ser derivada
- O plano tangente pode ser calculado a partir das derivadas parciais e aproxima valores próximos



Diferenciabilidade

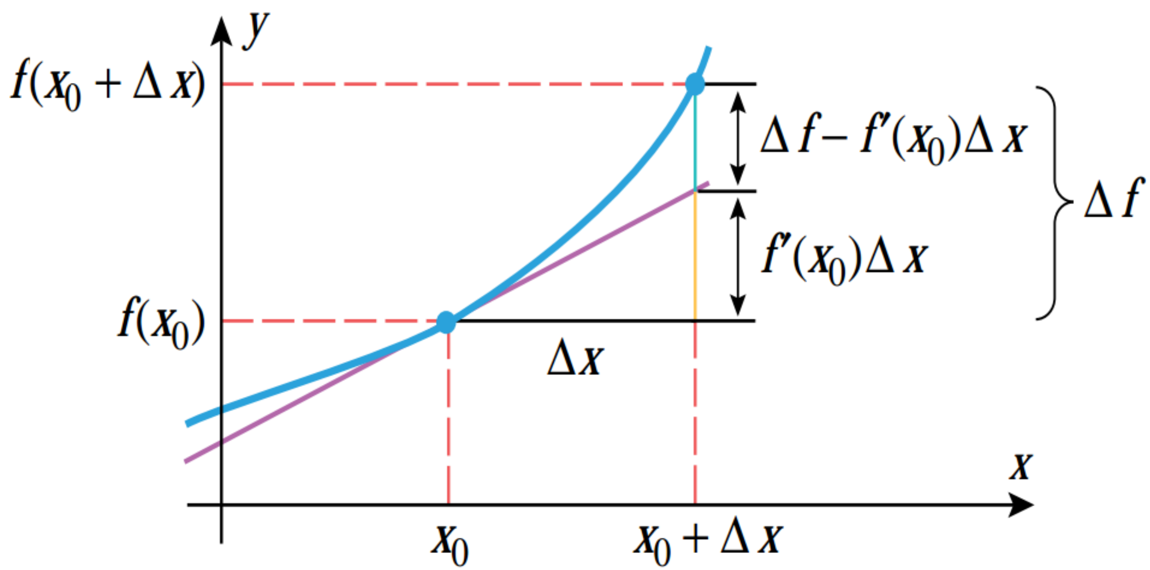
Diferenciabilidade

Função de uma variável

- Uma função f de uma variável é derivável ou diferenciável em x_0 se tiver uma derivada em x_0, ou seja, se existir o limite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = L \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0$$

Aproximação linear!



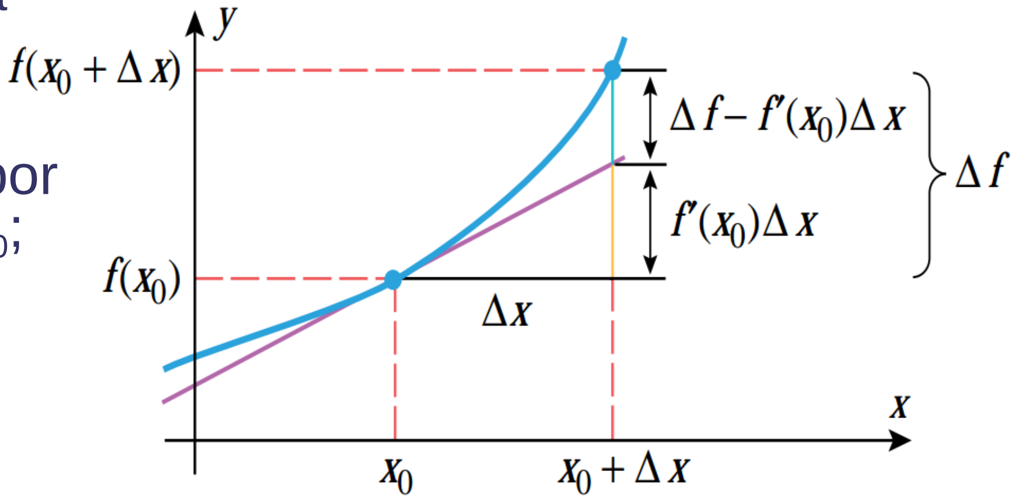
Diferenciabilidade

Função de uma variável

- Uma função f de uma variável é derivável ou diferenciável em x_0 se tiver uma derivada em x_0, ou seja, se existir o limite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = L \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0$$

  - Propriedades
    - O gráfico de *y = f(x)* tem uma reta tangente não vertical no ponto *(x_0, f (x_0))*;
    - f pode ser bem aproximada por uma função linear perto de x_0;
    - f é contínua em x_0.

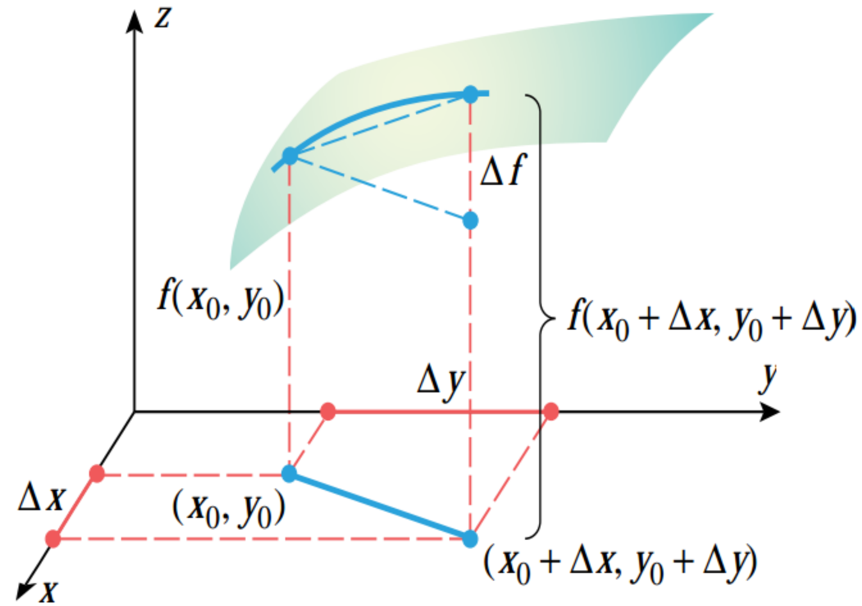


Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$



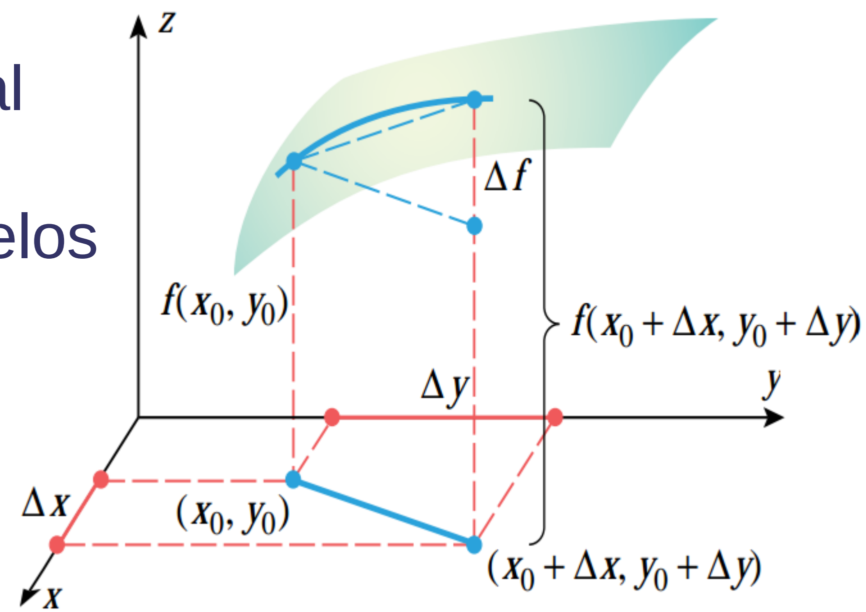
Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

- Propriedades:
  - a superfície z = f(x, y) tenha um plano tangente não vertical no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$;
  - f pode ser bem aproximada pelos valores de uma função linear na proximidade de (x_0, y_0);
  - f seja contínua em (x_0, y_0).



Diferenciabilidade

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_{0,} y_0)\Delta x - f_y(x_{0,} y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_{0,} y_0)$

- Exemplo: Prove que é diferenciável em (0, 0)

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Diferenciabilidade

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

- Exemplo: Prove que é diferenciável em (0, 0)

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

  - Incremento

$$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

  - Derivadas

$$f_x(x, y) = 2x$$
$$f_y(x, y) = 2y$$
$$\Rightarrow \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

  - Aplicando na formula

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0$$

Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

  - Consequência:
    - Se $(\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$

$$\epsilon = \epsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

  - Consequência:
    - Se $(\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$

$$\epsilon = \epsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

onde, pela primeira equação, implica que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

  - Consequência:
    - Com isso, segue que

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Lembrar que os termos de segunda ordem forma ignorados na aproximação linear

Diferenciabilidade

- Uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

 – Extensão para três variáveis:
 - Uma função f é diferenciável em (x_0, y_0, z_0) se $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_y(x_0, y_0, z_0)$ e $f_z(x_0, y_0, z_0)$ existirem e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y - f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$

Diferenciabilidade

- Função f é **diferenciável em R**
  - Se uma função f de duas variáveis for diferenciável em cada ponto de uma região R do plano xy
- Função f é **diferenciável em toda parte**
  - Se f for diferenciável em cada ponto do plano xy

É análogo para funções com três variáveis

Diferenciabilidade

- Diferenciabilidade e continuidade
  - Teorema:
    - Se uma função for diferenciável em um ponto, então ela será contínua nesse p

Diferenciabilidade

- Diferenciabilidade e continuidade
  - Teorema:
    - Se uma função for diferenciável em um ponto, então ela será contínua nesse p

A recíproca não é verdadeira!
Exemplo:
$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Diferenciabilidade

- Diferenciabilidade e continuidade
  - Teorema:
    - Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de f existirem e forem contínuas em um ponto, então f será diferenciável nesse ponto

Diferenciabilidade

- Diferenciabilidade e continuidade
  - Teorema:
    - Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de f existirem e forem contínuas em um ponto, então f será diferenciável nesse ponto
    - Exemplo: $f(x, y, z) = x + yz$

$$f_x(x, y, z) = 1 \qquad f_y(x, y, z) = z \qquad f_z(x, y, z) = y$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Se z = f(x, y) for diferenciável em um ponto (x_0, y_0), a aproximação:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$$

pode ser denotada por

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Se z = f(x, y) for diferenciável em um ponto (x_0, y_0), a aproximação:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$$

    pode ser denotada por

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

  - Essa função, que também é denotada por *df*, é a diferencial total de f em (x_0, y_0)

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Se z = f(x, y) for diferenciável em um ponto (x_0, y_0), a aproximação:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$$

pode ser denotada por

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

Os sobrescritos podem ser omitidos

  - Essa função, que também é denotada por *df*, é a diferencial total de f em (x_0, y_0)

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Se z = f(x, y) for diferenciável em um ponto (x_0, y_0), a aproximação:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$$

    pode ser denotada por

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

  - Essa função, que também é denotada por *df*, é a diferencial total de f em (x_0, y_0)
  - A aproximação pode ser escrita das formas:

$$\Delta f \approx df \qquad \Delta z \approx dz$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Em outras palavas, podemos estimar a variação Δz de z pelo valor da diferencial dz
    - dx é a variação em x
    - dy é a variação em y

$$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dx$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Em outras palavas, podemos estimar a variação Δz de z pelo valor da diferencial dz
    - dx é a variação em x
    - dy é a variação em y

$$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dx$$

  - Além disso, se x e y estiverem perto de 0, então a magnitude do erro da aproximação de Δz≈dz será muito menor do que a distância entre (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

Isto é, no limite o numerador vai se aproximar de zero mais rápido que o denominador

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

- Diferencial total (cálculo de dz):

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dx$$

$$dz = y^2\,dx + 2xy\,dy$$

$$dx = \Delta x = 0{,}503 - 0{,}5 = 0{,}003$$

$$dy = \Delta y = 1{,}004 - 1{,}0 = 0{,}004$$

- Valor aproximado:

$$dz = 1{,}0^2(0{,}003) + 2(0{,}5)(1{,}0)(0{,}004) = 0{,}007$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

- Valor aproximado:

$$dz = 1{,}0^2(0{,}003) + 2(0{,}5)(1{,}0)(0{,}004) = 0{,}007$$

- Valor real:

$$\Delta z = 0{,}507032048 - 0{,}5 = 0{,}007032048$$

- Erro de aproximação:

$$|dz - z| = |0{,}007 - 0{,}007032048| = 0{,}000032048$$

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

- Erro de aproximação:

$$|dz - z| = |0{,}007 - 0{,}007032048| = 0{,}000032048$$

- Distância entre os pontos:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0{,}003)^2 + (0{,}004)^2} = \sqrt{0{,}000025} = 0{,}005$$

- Comparação:

$$\frac{|dz - \Delta z|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{0{,}000032048}{0{,}005} = 0{,}0064096 < \frac{1}{150}$$

A magnitude do erro da aproximação é 1/150 menor do que da distância entre os dois pontos

Diferenciabilidade

- Diferenciais
  - Exemplo: Aproxime a variação no ponto (0.503, 1.004) para o ponto (0.5; 1.0) na função:

$$z = xy^2$$

Compare o erro com a distância entre os pontos.

- Erro de aproximação:

$$|dz - z| = |0{,}007 - 0{,}007032048| = 0{,}000032048$$

- Distância entre os pontos:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0{,}003)^2 + (0{,}004)^2} = \sqrt{0{,}000025} = 0{,}005$$

- Comparação

$$\frac{|dz - \Delta z|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{0{,}000032048}{0{,}005} = 0{,}0064096 < \frac{1}{150}$$

Regra da cadeia

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
  - Se y for uma função diferenciável de x e x for uma função diferenciável de t
    - Na composição, y é uma função diferenciável de t

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Funções de uma variável

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
  - Teorema:
    - Se x = x(t) e y = y(t) forem diferenciáveis em t, e se z = f(x, y) for diferenciável no ponto (x, y) = (x(t), y(t)), então z = f(x(t), y(t)) será diferenciável em t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

onde as derivadas comuns são calculadas em t e as derivadas parciais são calculadas em (x, y)

Semelhante para uma função de mais variáveis

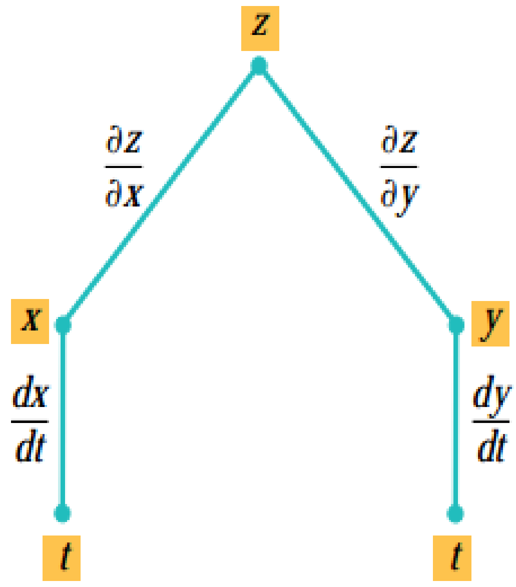


Diagrama de árvore

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
  - Exemplo: Encontre dz/dt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$z = x^2 y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
  - Exemplo: Encontre dz/dt

$$z = x^2 y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

- Usando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (2xy)(2t) + (x^2)(3t^2) \\ &= (2t^5)(2t) + (t^4)(3t^2) = 7t^6\end{aligned}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
  - Exemplo: Encontre dz/dt

$$z = x^2 y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

    - Reescrevendo z em função de t

$$z = x^2 y = (t^2)^2 (t^3) = t^7$$

$$\frac{dz}{dt} = 7t^6$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
  - Exercício: Encontre $dw/d\theta$, se $\theta=\pi/4$

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta, \quad z = \operatorname{tg}\theta$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas
  - Exercício: Encontre dw/dθ, se θ=π/4

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta, \quad z = \operatorname{tg}\theta$$

- Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{d\theta} \\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2x)(-\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2y)(\cos\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2z)(\sec^2\theta)\end{aligned}$$

- Substituindo $x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

$$\left.\frac{dw}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2)(2) = \sqrt{2}$$

Regra da cadeia

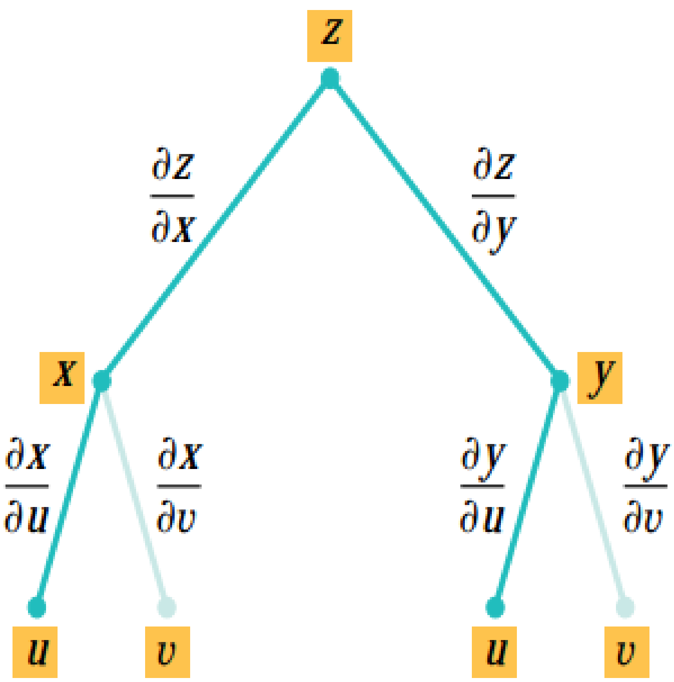
- Regra da cadeia para derivadas parciais
  - Teorema:
    - Se x = x(u, v) e y = y(u, v) tiverem derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u, v), e se z = f (x, y) for diferenciável no ponto (x, y) = (x(u, v), y(u, v)), então z = f(x(u, v), y(u, v)) terá derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u, v) dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

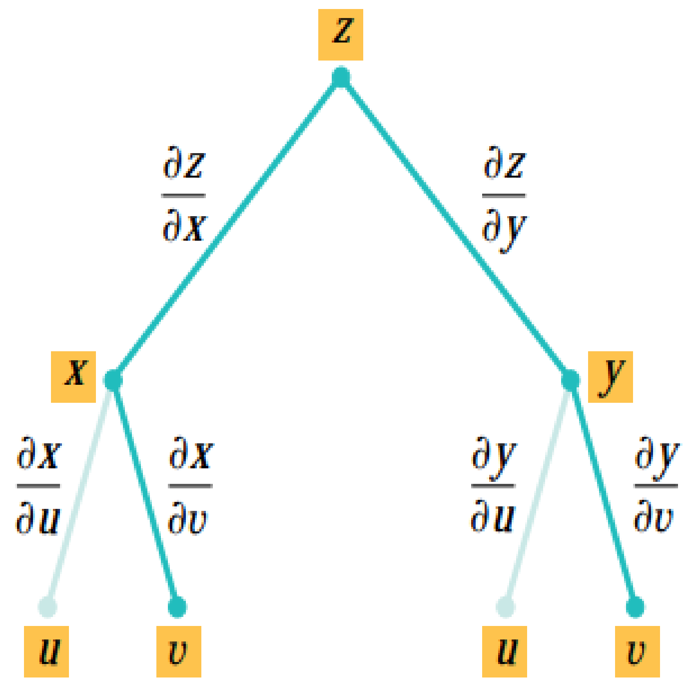
Semelhante para uma função de mais variáveis

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
  - Diagramas



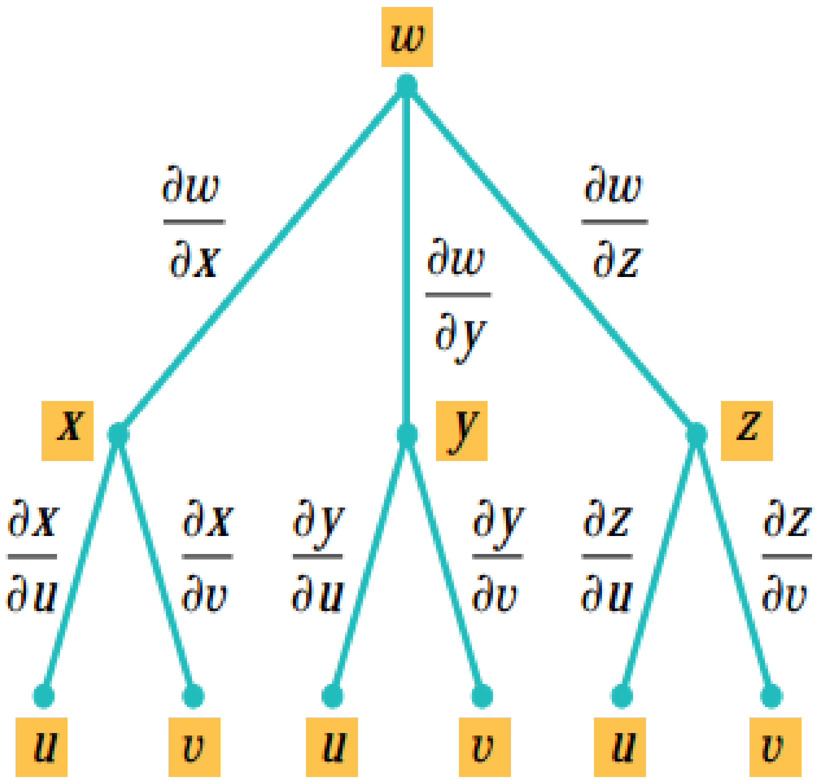
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$



$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
  - Diagramas



$$w = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
  - Exemplo: Ache *∂w/∂u* e *∂w/∂v*

$$w = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2 v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
  - Exemplo: Ache *∂w/∂u* e *∂w/∂v*

$$w = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2 v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \underbrace{yze^{xyz}(3)}_{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}} + \underbrace{xze^{xyz}(3)}_{\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}} + \underbrace{xye^{xyz}(2uv)}_{\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}} = e^{xyz}(3yz + 3xz + 2xyuv)$$

Regra da cadeia

- Regra da cadeia para derivadas parciais
  - Exemplo: Ache *∂w/∂u* e *∂w/∂v*

$$w = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2 v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \underbrace{yze^{xyz}(3)}_{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}} + \underbrace{xze^{xyz}(3)}_{\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}} + \underbrace{xye^{xyz}(2uv)}_{\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}} = e^{xyz}(3yz + 3xz + 2xyuv)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \underbrace{yze^{xyz}(1)}_{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}} + \underbrace{xze^{xyz}(-1)}_{\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}} + \underbrace{xye^{xyz}(u^2)}_{\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}} = e^{xyz}(yz - xz + xyu^2)$$

Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
  - A regra da cadeia pode ser estendida a funções $w = f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de n variáveis

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial t}$$

Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
  - Exemplo: Determine *∂w/∂ρ* e *∂w/∂θ*

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

Como seria o diagrama?

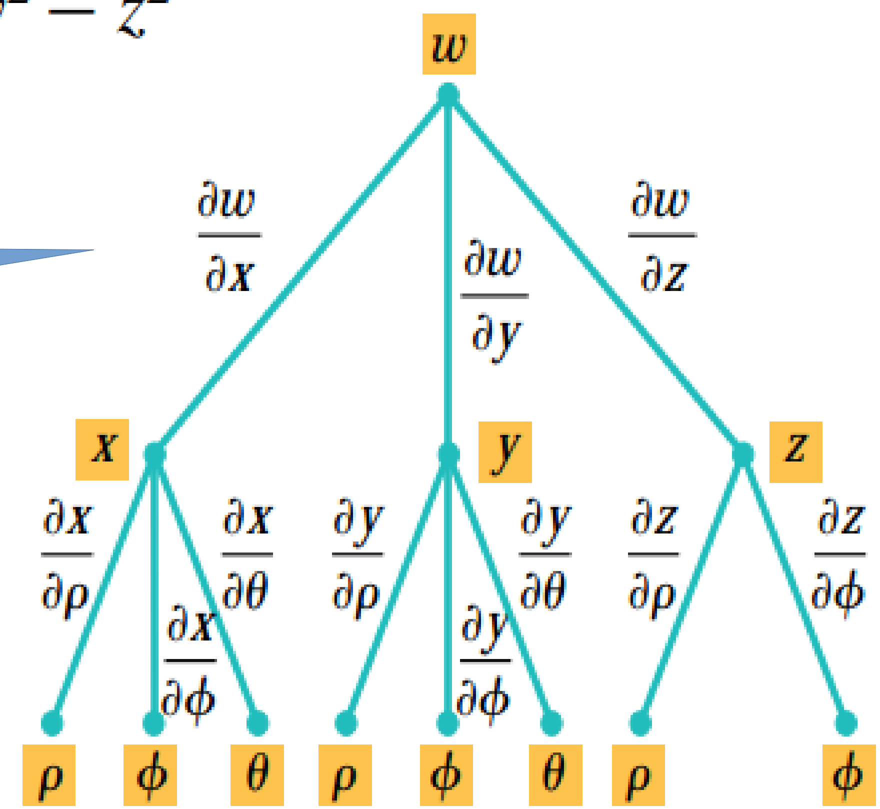
Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
  - Exemplo: Determine *∂w/∂ρ* e *∂w/∂θ*

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

Quais as formulas tiradas dele?



Regra da cadeia

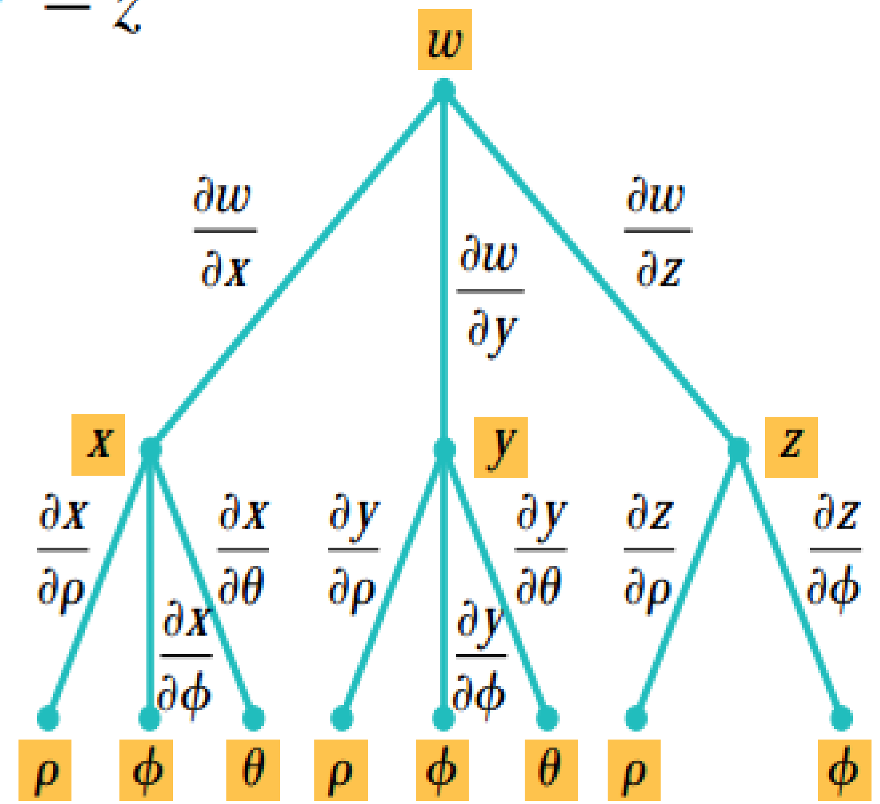
- Outras versões da regra da cadeia
  - Exemplo: Determine *∂w/∂ρ* e *∂w/∂θ*

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$



Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
  - Exemplo: Determine *∂w/∂ρ* e *∂w/∂θ*

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \rho} &= 2x \operatorname{sen} \phi \cos \theta + 2y \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta - 2z \cos \phi \\
&= 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta - 2\rho \cos^2 \phi \\
&= 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 2\rho \cos^2 \phi \\
&= 2\rho (\operatorname{sen}^2 \phi - \cos^2 \phi) \\
&= -2\rho \cos 2\phi
\end{aligned}$$

Regra da cadeia

- Outras versões da regra da cadeia
  - Exemplo: Determine *∂w/∂ρ* e *∂w/∂θ*

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$w = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= (2x)(-\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta) + (2y)\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ &= -2\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= 0\end{aligned}$$

w não
depende de *θ*

Regra da cadeia

y depende de x, não pode ser tratado como uma constante

- Diferenciação implícita
  - Sendo z = f(x, y) uma função de x e y e y é uma função diferenciável de x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Regra da cadeia

y depende de x, não pode ser tratado como uma constante

- Diferenciação implícita
  - Sendo z = f(x, y) uma função de x e y e y é uma função diferenciável de x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

  - Se $f(x, y) = c$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Regra da cadeia

- Diferenciação implícita
  - Teorema:
    - Se a equação f(x, y) = c definir y implicitamente como uma função diferenciável de x, e se $\partial f/\partial y \neq 0$, então

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Regra da cadeia

- Diferenciação implícita
  - Exemplo: Determine dy/dx

Derivando implicitamente, não há necessidade de isolar y

$$x^3 + y^2 x - 3 = 0$$

Regra da cadeia

- Diferenciação implícita
  - Exemplo: Determine dy/dx

Derivando implicitamente, não há necessidade de isolar y

$$x^3 + y^2x - 3 = 0$$

- Usando a formula

$$f(x, y) = x^3 + y^2x - 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

Regra da cadeia

- Diferenciação implícita
  - Exemplo: Determine dy/dx

Derivando implicitamente, não há necessidade de isolar y

$$x^3 + y^2x - 3 = 0$$

- Usando a formula

$$f(x, y) = x^3 + y^2x - 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

- Diferenciando implicitamente

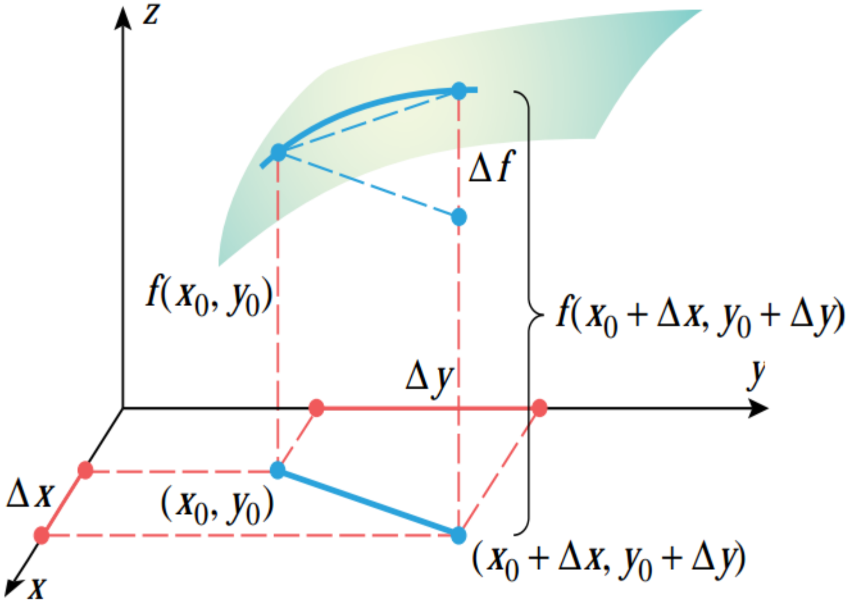
$$3x^2 + y^2 + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

Resumo

Resumo

Propriedades:
- plano tangente não vertical
- aproximação linear
- continuidade

- Diferenciabilidade

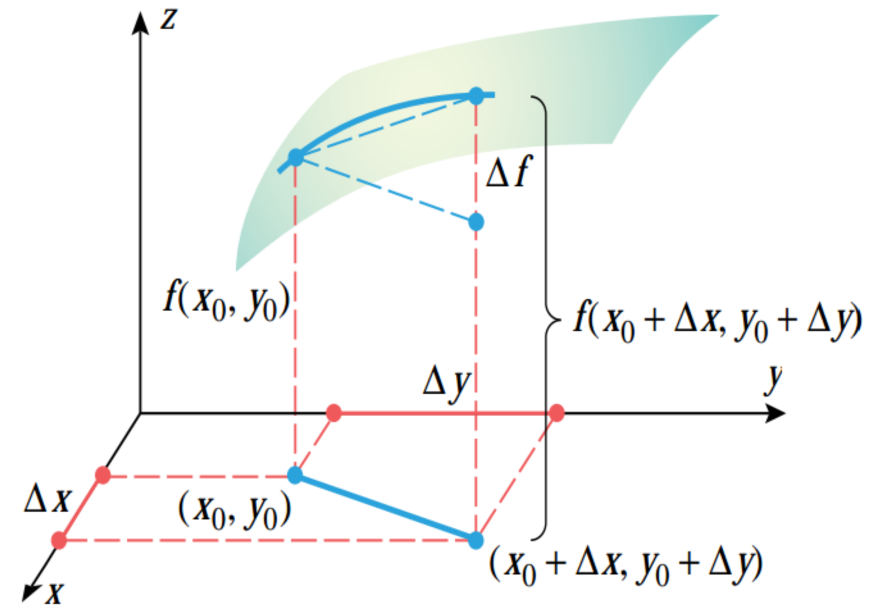


Resumo

Propriedades:
- plano tangente não vertical
- aproximação linear
- continuidade

- Diferenciabilidade
  - Diferencial

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

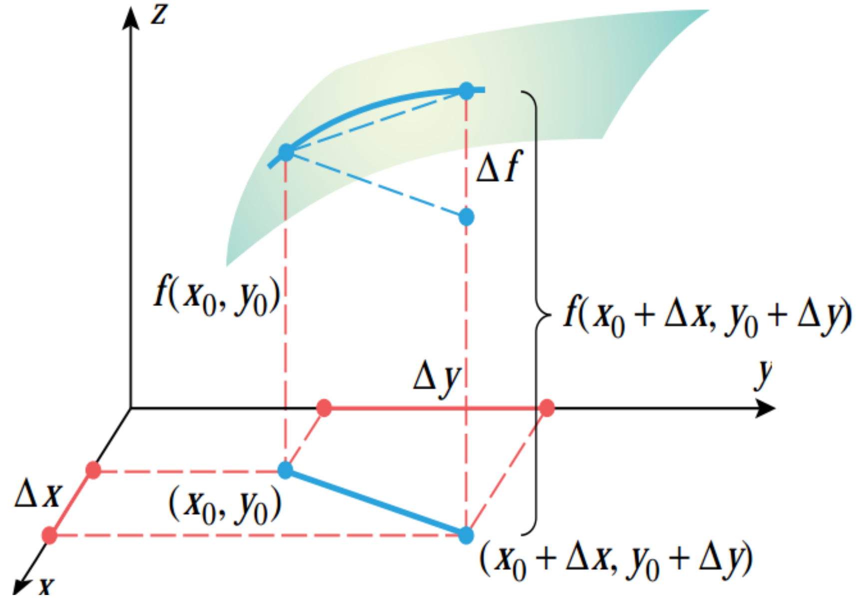


Resumo

Propriedades:
- plano tangente não vertical
- aproximação linear
- continuidade

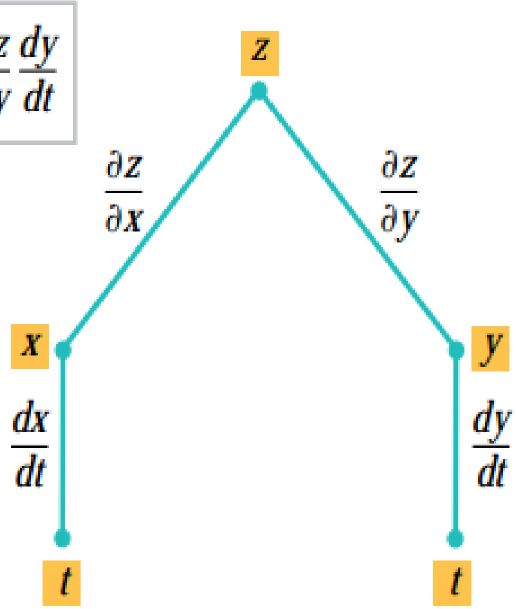
- Diferenciabilidade
  - Diferencial

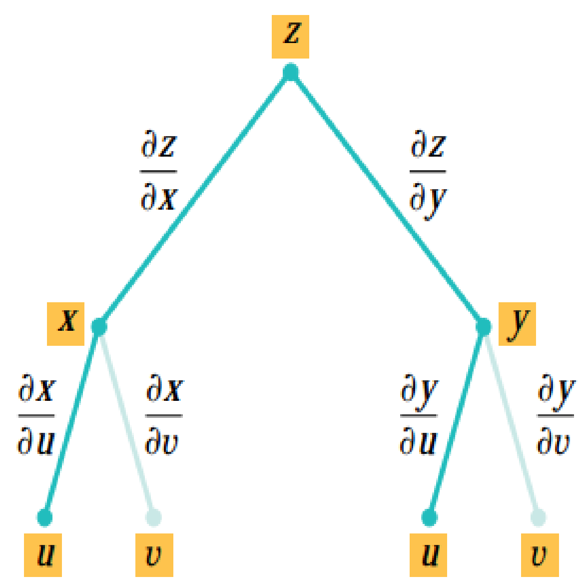
$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$



- Regra da cadeia

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$





$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

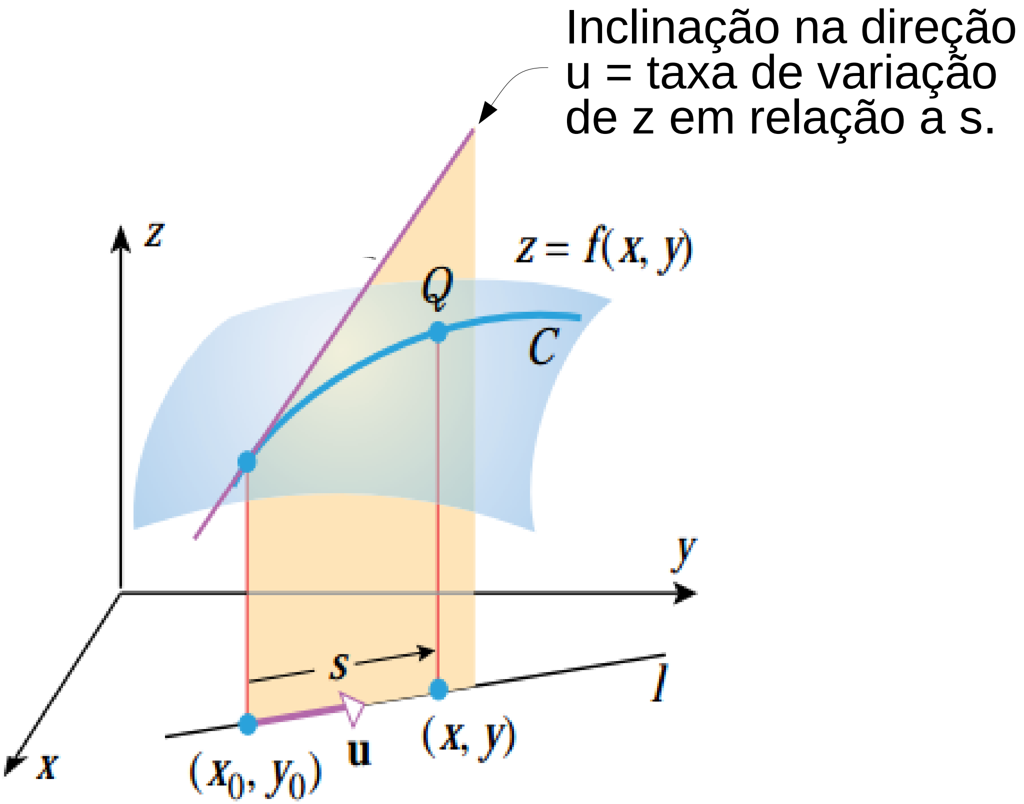
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 13.4
    - Exercícios de compreensão 13.4
    - 9-20
    - 21-26
  - Seção 13.5
    - Exercícios de compreensão 13.5
    - 1-10
    - 17-22

Resumo

- Próxima aula:
  - Derivadas direcionais



  - Gradientes

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seções 13.4 e 13.5