Comprimento de curva;
Mudança de parâmetro;
Vetores: Tangente, Normal, Binormal

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Objetivos da aula

- Compreender:
  - o cálculo do comprimento de curva
  - a mudança de parâmetro lisa em funções vetoriais
  - os vetores:
    - tangente
    - normal
    - binormal

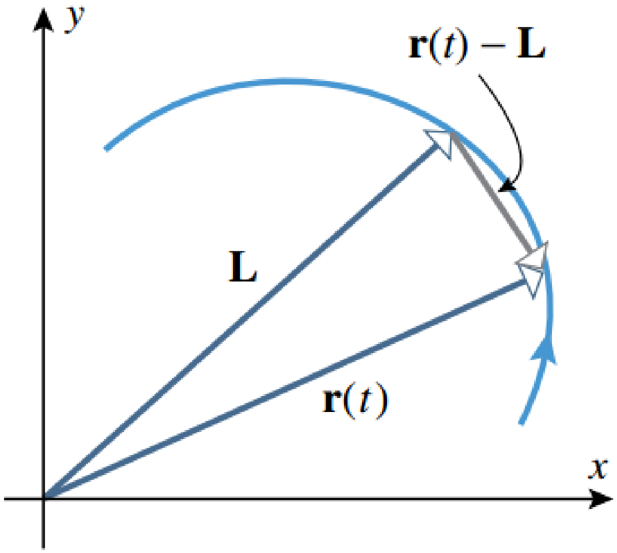
Índice

Revisão

Revisão

- Limite de funções vetoriais

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} x(t), \lim_{t \to a} y(t) \right\rangle = \lim_{t \to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to a} y(t)\mathbf{j}$$



Revisão

- Limite de funções vetoriais
  - Continuidade
    - Uma função vetorial ***r****(t)* é contínua em *t* = *a* se

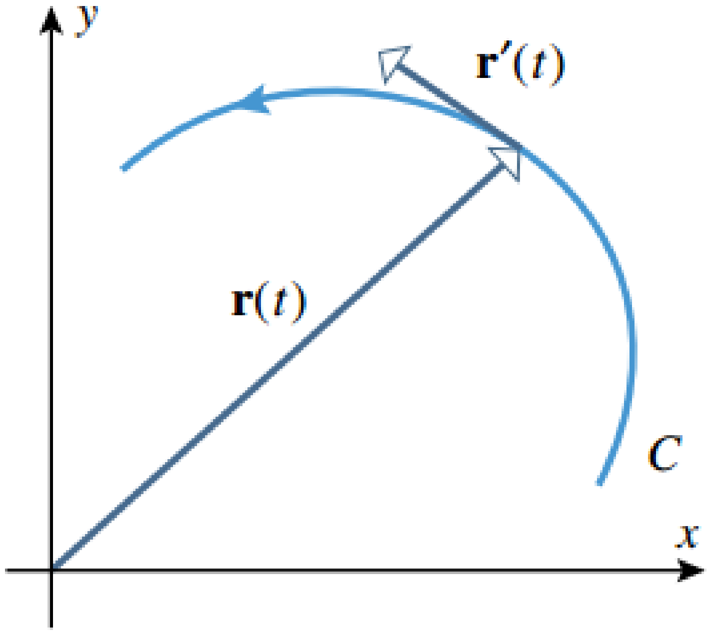
$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

    - Isto é:
      - ***r****(a)* está definido
      - o limite de ***r****(t)* quando $t \to a$ existe
      - ambos coincidem

Revisão

- Derivada de funções vetoriais

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$



Revisão

- Integral de funções vetoriais

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\,\Delta t_k$$

$$= \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j}$$

Revisão

- Integral de funções vetoriais

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k$$

$$= \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j}$$

  - Teorema fundamental do Cálculo na forma vetorial

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(t)\Big]_a^b = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

onde ***R(t)*** é a antiderivada de ***r(t)***, tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$

Revisão

- Dúvida nos exercícios?

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Determine se $\mathbf{r}(t)$ é contínua em $t = 0$

$$\text{(a)}\quad \mathbf{r}(t) = 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} - 2t\,\mathbf{j} \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$\mathbf{r}(a)$ está definido
o limite de $\mathbf{r}(t)$ quando $t \to a$ existe
ambos coincidem

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Determine se ***r***(t) é contínua em $t = 0$

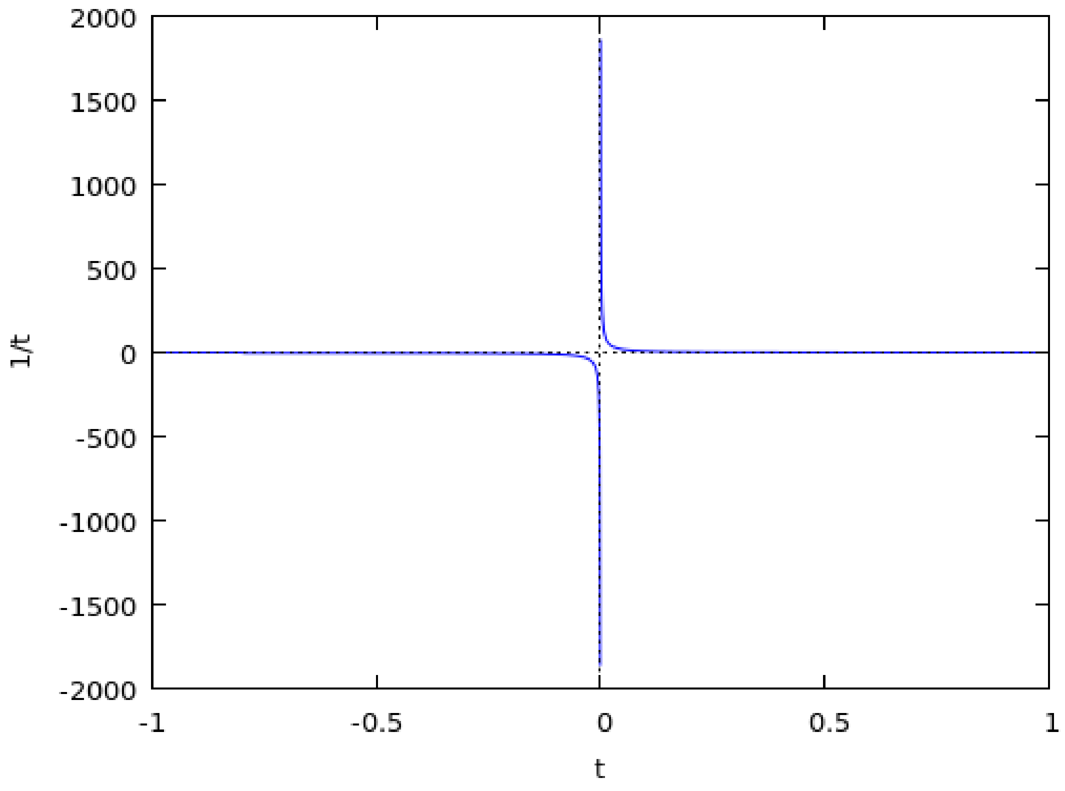
(a) $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - 2t\,\mathbf{j}$

r(a) está definido
o limite de ***r***(t) quando $t \to a$ existe
ambos coincidem

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Determine se $\boldsymbol{r}(t)$ é contínua em $t = 0$

$$\text{(b)}\quad \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$



$\boldsymbol{r}(a)$ está definido
o limite de $\boldsymbol{r}(t)$ quando $t \to a$ existe
ambos coincidem

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Encontre o vetor ***r’***(t_0); então, esboce o gráfico de ***r***(t) no 2D e desenhe o vetor tangente ***r’***(t_0)

13. $\mathbf{r}(t) = \sec t\mathbf{i} + \operatorname{tg} t\mathbf{j}; \quad t_0 = 0$

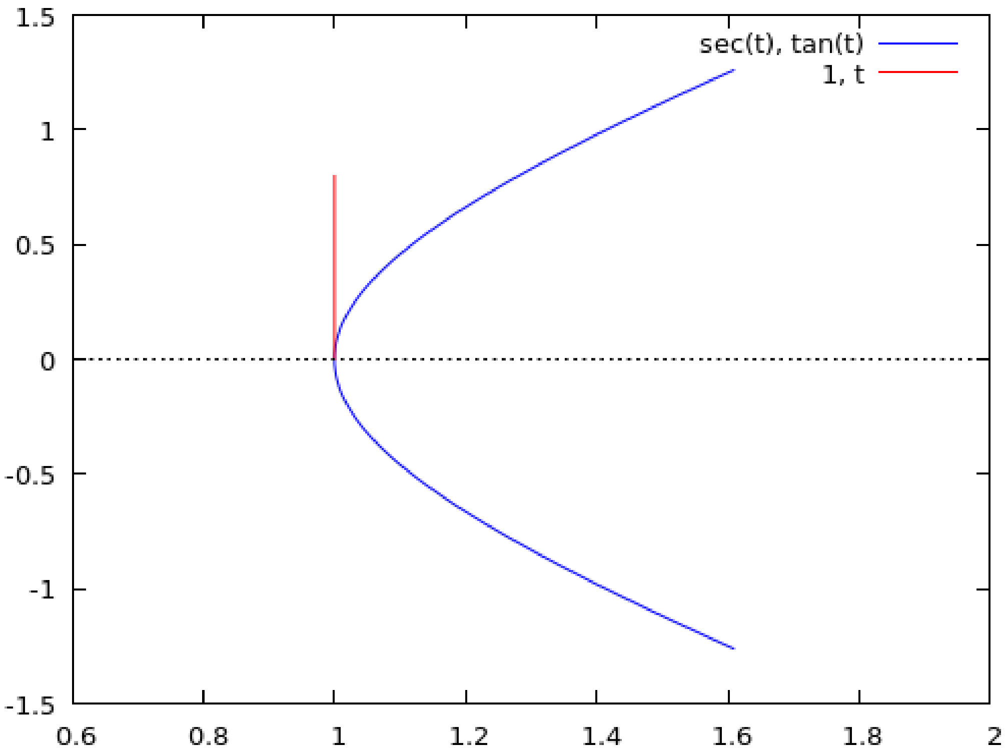
Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Encontre o vetor ***r'(t₀)***; então, esboce o gráfico de ***r(t)*** no 2D e desenhe o vetor tangente ***r'(t₀)***

13. $\mathbf{r}(t) = \sec t\,\mathbf{i} + \operatorname{tg} t\,\mathbf{j}; \quad t_0 = 0$

$$\boldsymbol{r}'(t) = sec(t)\tan(t)\,\boldsymbol{i} + sec^2(t)\,\boldsymbol{j}$$
$$sec(0) = 1$$
$$\tan(0) = 0$$

$$sec(0)\tan(0) = 0$$
$$sec^2(t) = 1$$



Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Calcule a integral indefinida

$$\textbf{32.}\quad \int \left(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right) dt$$

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Calcule a integral indefinida

$$\textbf{32.}\quad \int \left(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int t^2\,dt\right)\boldsymbol{i} - \left(\int 2t\,dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int 1/t\,dt\right)\boldsymbol{k} \\
&= \left(\frac{t^3}{3} + c_1\right)\boldsymbol{i} - \left(t^2 + c_2\right)\boldsymbol{j} + \left(\ln(t) + c_3\right)\boldsymbol{k} \\
&= \left(\frac{t^3}{3}\right)\boldsymbol{i} - \left(t^2\right)\boldsymbol{j} + \left(\ln(t)\right)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}
\end{aligned}$$

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Calcule a integral indefinida

Integração por partes

$$\int f(t)g'(t)\,dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)\,dt$$

33. $\int \langle te^t, \ln t \rangle \, dt$

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Calcule a integral indefinida

Integração por partes

$$\int f(t)g'(t)dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)dt$$

33. $\displaystyle\int \langle te^t, \ln t\rangle\, dt$

$$\begin{aligned}
\int \langle t e^t, \ln t \rangle dt &= \left\langle \int t e^t dt, \quad \int \ln(t)(1) dt \right\rangle \\
&= \left\langle t e^t - \int (1) e^t dt, \quad \ln(t) t - \int \frac{1}{t} t\, dt \right\rangle \\
&= \left\langle t e^t - e^t + c_1 dt, \quad \ln(t) t - t + c_2 dt \right\rangle \\
&= \left\langle (t-1) e^t dt, \quad (\ln(t) - 1) t\, dt \right\rangle \quad + C
\end{aligned}$$

Comprimento de curva

Comprimento de curva

Assumindo ***r***(*t*) sempre contínua

- Parametrizações lisas
  - Diz-se que uma parametrização ***r****(t)* de uma curva é uma **parametrização lisa**, ou que ***r****(t)* é uma **função vetorial lisa**, se ***r'****(t)* for contínua e ***r'****(t)* ≠ **0** em cada valor permitido de *t*

Não pode ter variações abruptas de direção

Comprimento de curva

- Parametrizações lisas
  - Exemplo: Determine se as seguintes funções vetoriais são lisas

$$\text{(a)}\quad \mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}\quad (a > 0,\ c > 0)$$

Comprimento de curva

- Parametrizações lisas
  - Exemplo: Determine se as seguintes funções vetoriais são lisas

$$\text{(a)}\quad \mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}\quad (a > 0,\ c > 0)$$

$$\mathbf{r}'(t) = -a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Não há valor de *t* que faça ficar ***r'****(t)* = <0, 0, 0>

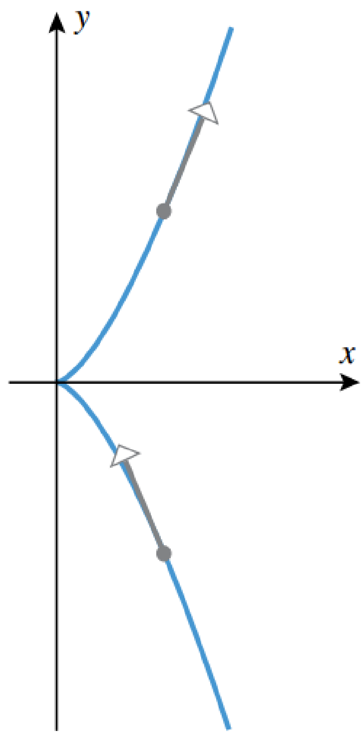
Comprimento de curva

- Parametrizações lisas
  - Exemplo: Determine se as seguintes funções vetoriais são lisas

$$\text{(b)} \quad \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

Comprimento de curva

- Parametrizações lisas
  - Exemplo: Determine se as seguintes funções vetoriais são lisas



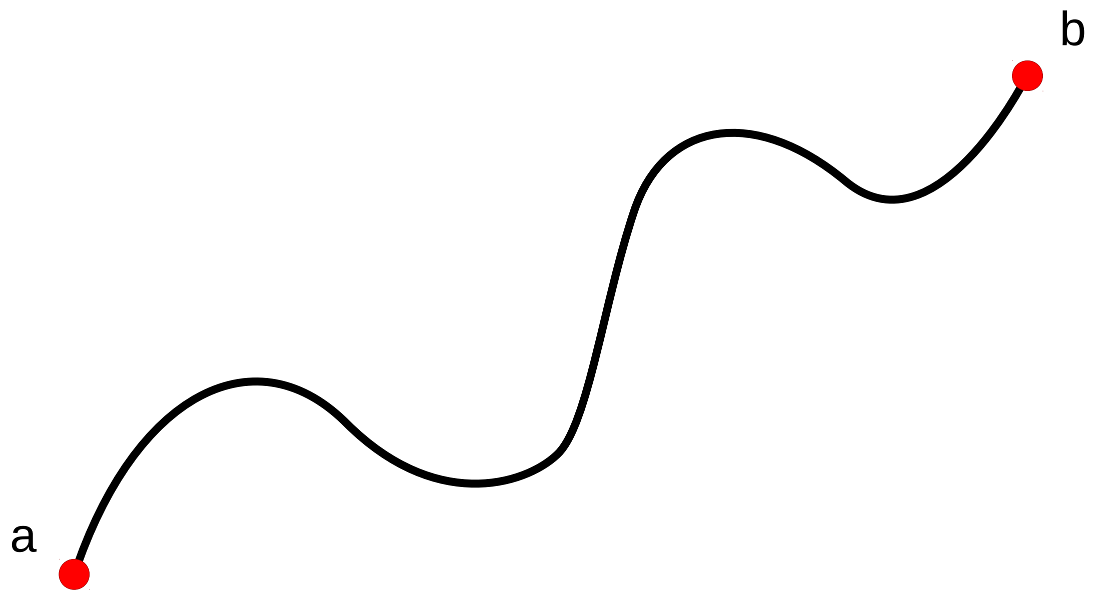
$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

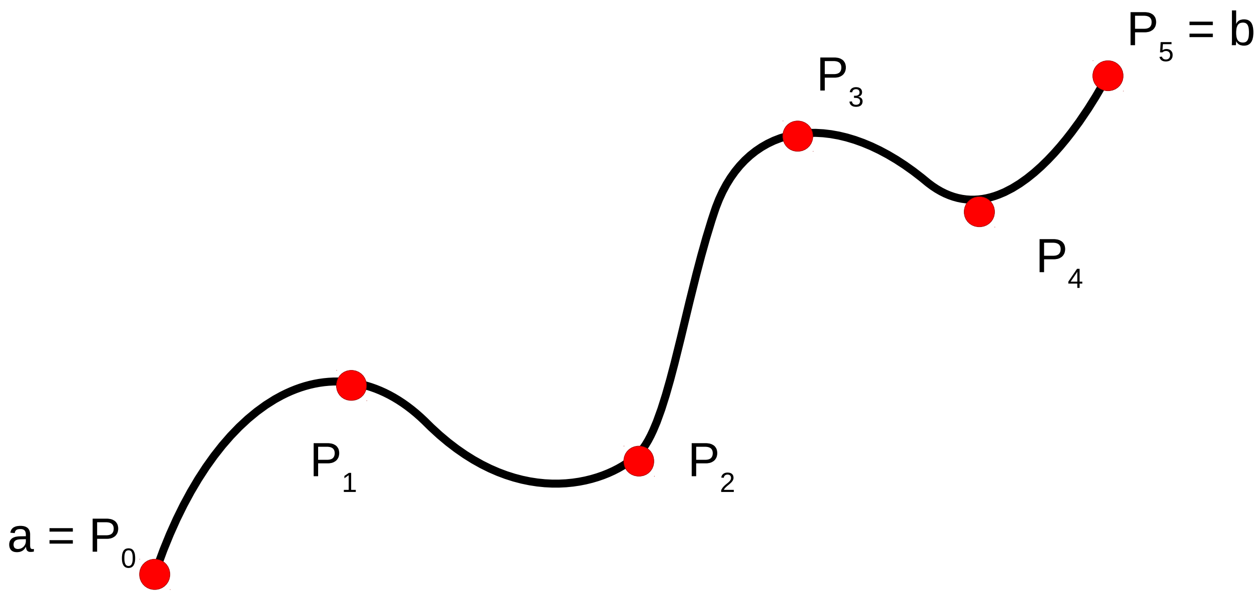
r'(0) = <0, 0> mesmo que as duas funções sejam contínuas

Comprimento de curva



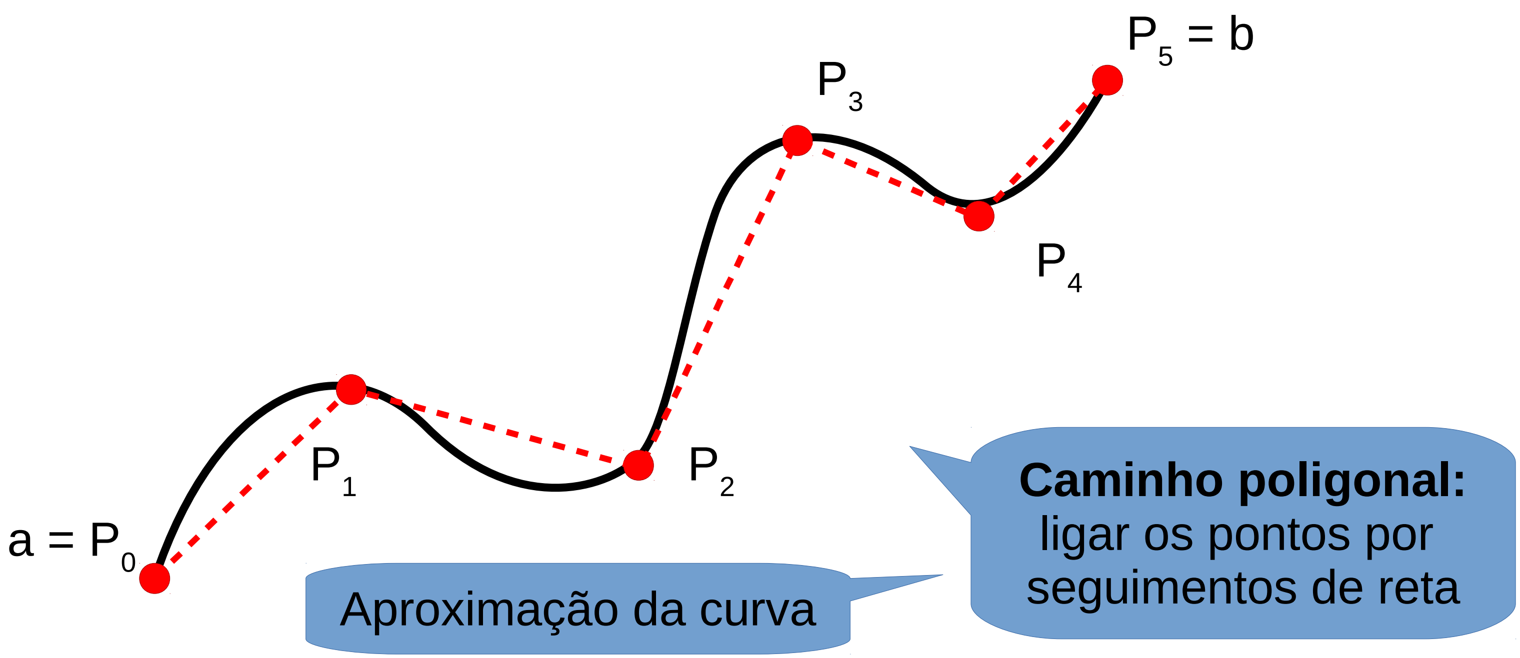
Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Seja *C(t)* uma curva lisa e derivável no intervalo [a,b]
  - Sendo *P*: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, uma partição desse intervalo, onde P_k é o ponto na curva



Comprimento de curva

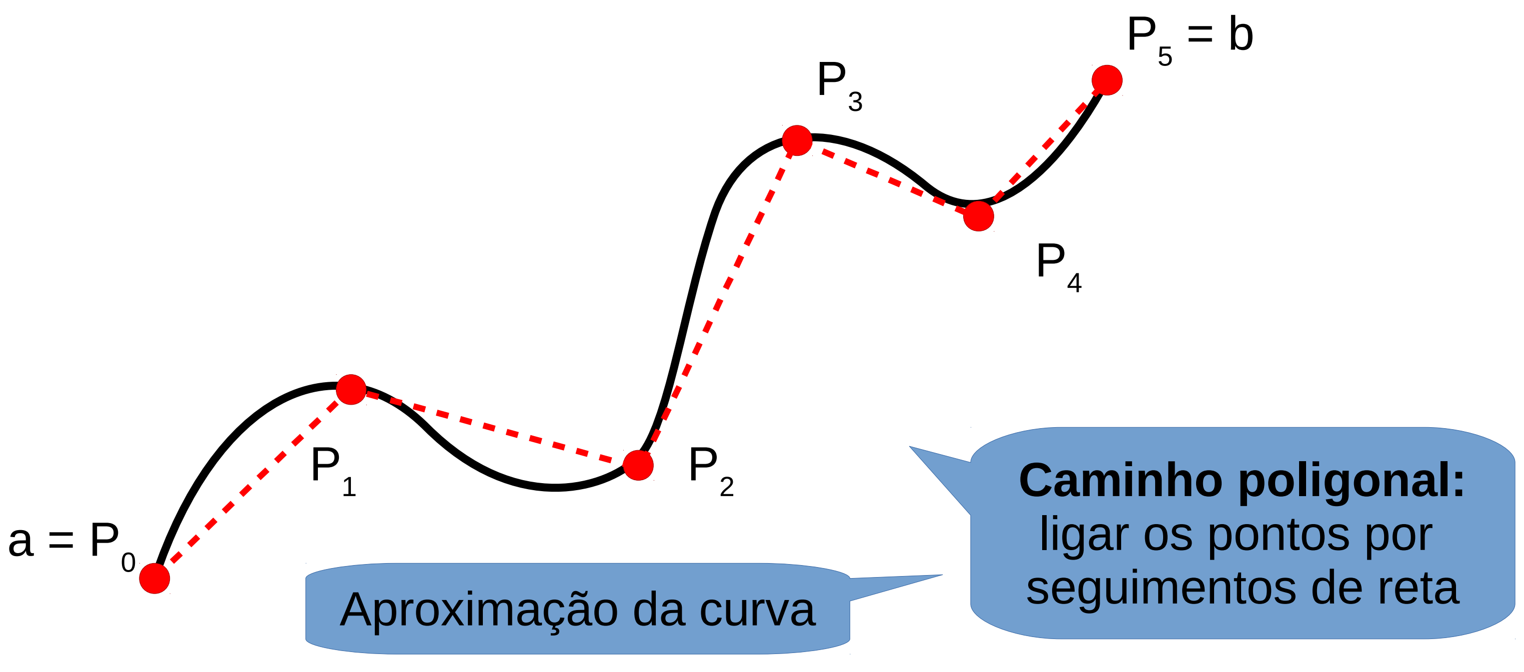
- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Seja *C(t)* uma curva lisa e derivável no intervalo [a,b]
  - Sendo $P\!: a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, uma partição desse intervalo, onde P_k é o ponto na curva



Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - O comprimento de um seguimento é

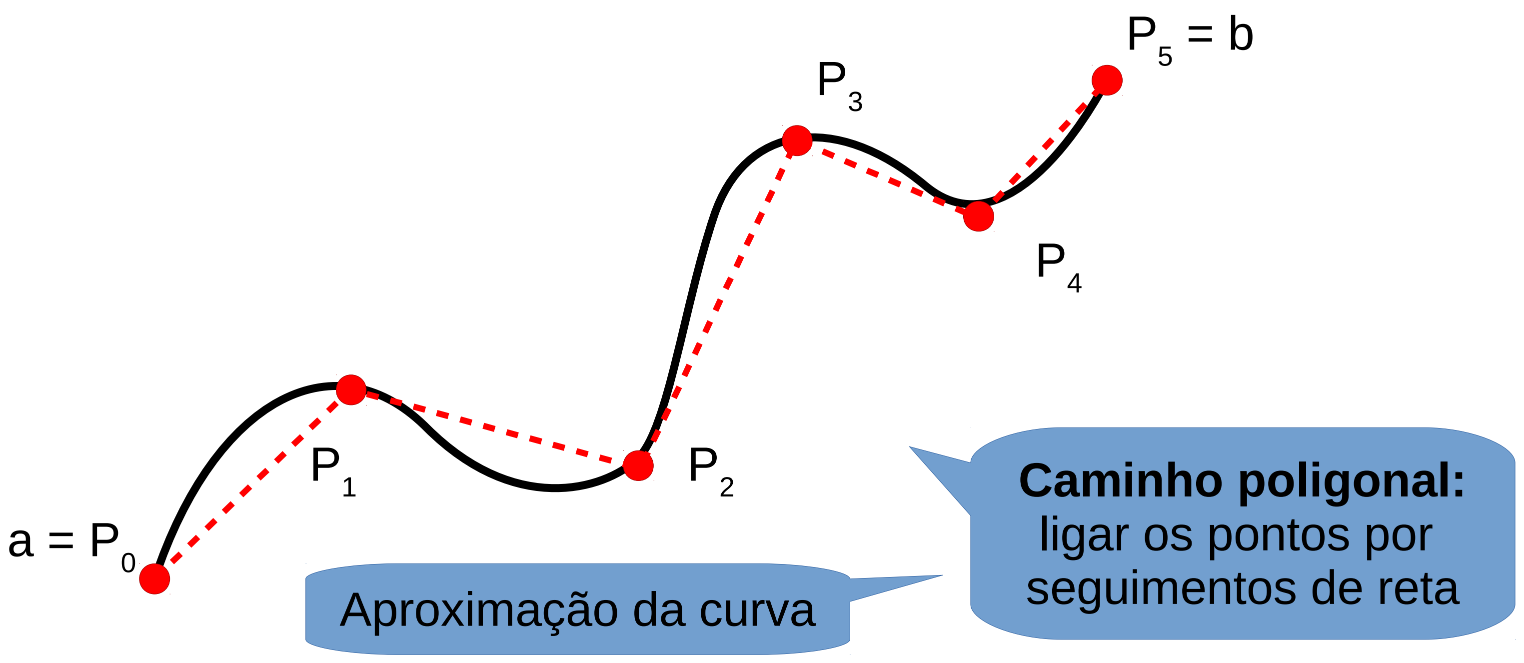
$$L_k = \| C(t_k) - C(t_{k-1}) \|$$



Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - O comprimento de um seguimento é

$$L_k = \|C(t_k) - C(t_{k-1})\| = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$



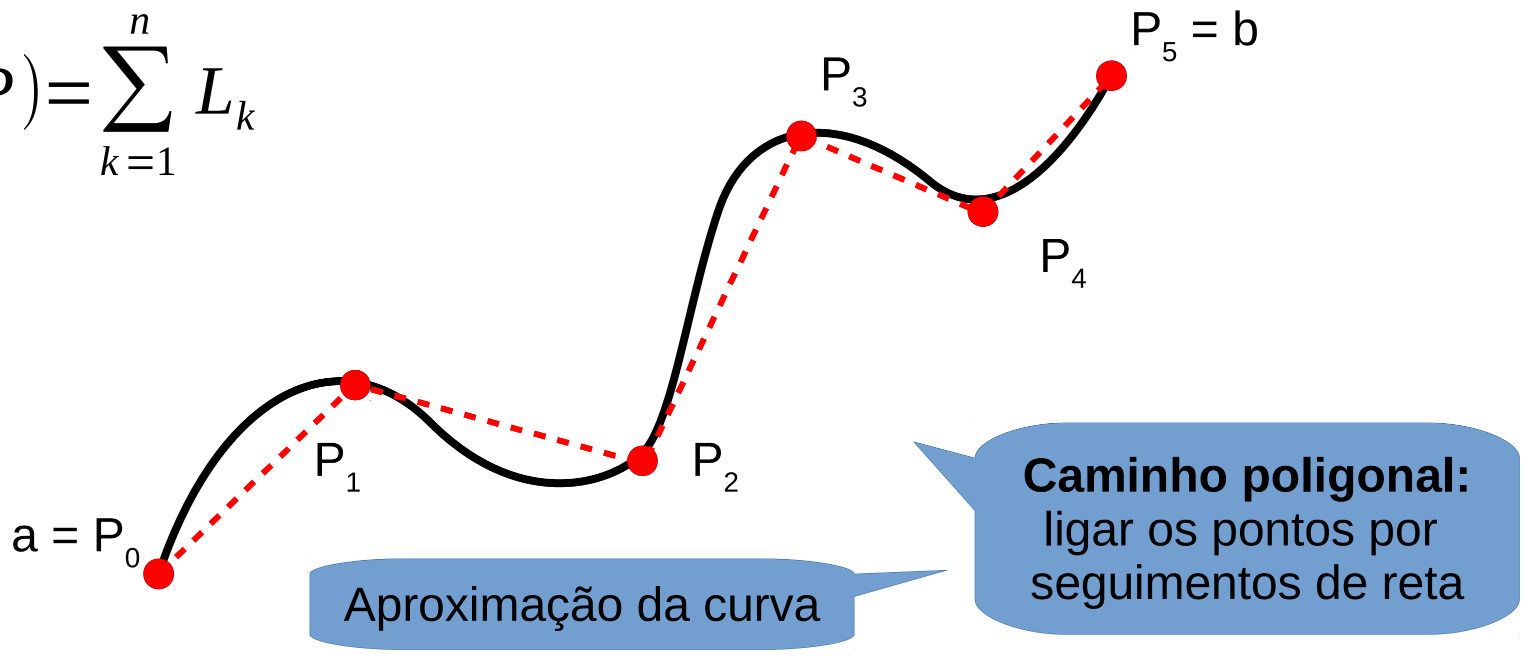
Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - O comprimento de um seguimento é

$$L_k = \| C(t_k) - C(t_{k-1}) \| = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

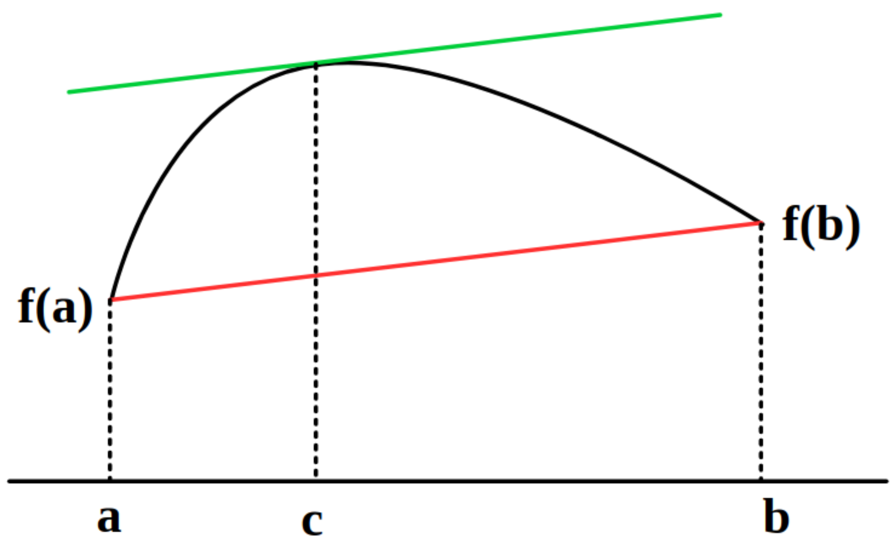
  - O comprimento do caminho poligonal é:

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} L_k$$



Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Pelo teorema do valor médio,



$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_do_valor_m%C3%A9dio

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Pelo teorema do valor médio, existem $\bar{t}_k$ e $\bar{\bar{t}}_k$ em (t_{k-1}, t_k) tais que:

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\bar{t}_k)(t_k - t_{k-1})$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\bar{\bar{t}}_k)(t_k - t_{k-1})$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Pelo teorema do valor médio, existem $\bar{t}_k$ e $\bar{\bar{t}}_k$ em (t_{k-1}, t_k) tais que:

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\bar{t}_k)(t_k - t_{k-1})$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\bar{\bar{t}}_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$\Downarrow$$

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\bar{t}_k)\Delta t_k$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\bar{\bar{t}}_k)\Delta t_k$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Pelo teorema do valor médio,
    existem $\bar{t}_k$ e $\bar{\bar{t}}_k$ em (t_{k-1}, t_k) tais que:

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\bar{t}_k)\,\Delta t_k$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\bar{\bar{t}}_k)\,\Delta t_k$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Pelo teorema do valor médio, existem $\bar{t}_k$ e $\bar{\bar{t}}_k$ em (t_{k-1}, t_k) tais que:

$$x(t_k)-x(t_{k-1})=x'(\bar{t}_k)\Delta t_k$$
$$y(t_k)-y(t_{k-1})=y'(\bar{\bar{t}}_k)\Delta t_k$$

  - Com o comprimento de um seguimento

$$L_k=\|C(t_k)-C(t_{k-1})\| \quad =\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Pelo teorema do valor médio,
    existem $\bar{t}_k$ e $\bar{\bar{t}}_k$ em (t_{k-1}, t_k) tais que:

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\bar{t}_k)\,\Delta t_k$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\bar{\bar{t}}_k)\,\Delta t_k$$

  - Com o comprimento de um seguimento

$$L_k = \|C(t_k) - C(t_{k-1})\| = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$
$$= \sqrt{(x'(\bar{t}_k)\,\Delta t_k)^2 + (y'(\bar{\bar{t}}_k)\,\Delta t_k)^2}$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Pelo teorema do valor médio,
    existem $\bar{t}_k$ e $\bar{\bar{t}}_k$ em (t_{k-1}, t_k) tais que:

$$x(t_k)-x(t_{k-1})=x'(\bar{t}_k)\Delta t_k$$
$$y(t_k)-y(t_{k-1})=y'(\bar{\bar{t}}_k)\Delta t_k$$

  - Com o comprimento de um seguimento

$$\begin{aligned} L_k=\|C(t_k)-C(t_{k-1})\| &= \sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{(x'(\bar{t}_k)\Delta t_k)^2+(y'(\bar{\bar{t}}_k)\Delta t_k)^2} \\ &= \sqrt{(x'(\bar{t}_k)^2+y'(\bar{\bar{t}}_k)^2)\Delta t_k^2} \end{aligned}$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Pelo teorema do valor médio, existem $\bar{t}_k$ e $\bar{\bar{t}}_k$ em *(t_{k-1}, t_k)* tais que:

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\bar{t}_k)\,\Delta t_k$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\bar{\bar{t}}_k)\,\Delta t_k$$

  - Com o comprimento de um seguimento

$$\begin{aligned}
L_k = \|C(t_k) - C(t_{k-1})\| &= \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\
&= \sqrt{(x'(\bar{t}_k)\,\Delta t_k)^2 + (y'(\bar{\bar{t}}_k)\,\Delta t_k)^2} \\
&= \sqrt{(x'(\bar{t}_k)^2 + y'(\bar{\bar{t}}_k)^2)\,\Delta t_k^2} \\
&= \sqrt{x'(\bar{t}_k)^2 + y'(\bar{\bar{t}}_k)^2}\,\Delta t_k
\end{aligned}$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - O comprimento da linha poligonal

$$L(P)=\sum_{k=1}^{n} L_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'(\bar{t}_k)^2+y'(\bar{\bar{t}}_k)^2}\,\Delta t_k$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - O comprimento da linha poligonal

$$L(P)=\sum_{k=1}^{n} L_k=\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'(\bar{t}_k)^2+y'(\bar{\bar{t}}_k)^2}\,\Delta t_k$$

- Supondo *C'(t)* contínua no intervalo [a,b], então:

$$\|C'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$$

será contínua e portanto integrável

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - O comprimento da linha poligonal

$$L(P)=\sum_{k=1}^{n} L_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'(\bar{t}_k)^2+y'(\bar{\bar{t}}_k)^2}\,\Delta t_k$$

t diferente

- Supondo *C'(t)* contínua no intervalo [a,b], então:

$$\|C'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$$

Mesmo t

será contínua e portanto integrável

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - O comprimento da linha poligonal

$$L(P)=\sum_{k=1}^{n} L_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'(\bar{t}_k)^2+y'(\bar{\bar{t}}_k)^2}\,\Delta t_k$$

- Supondo *C'(t)* contínua no intervalo [a,b], então:

$$\|C'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$$

será contínua e portanto integrável

Soma de Riemann

$$\int_a^b \|C'(t)\|\,dt=\lim_{\max \Delta t_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'(t_k^*)^2+y'(t_k^*)^2}\,\Delta t_k$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - O comprimento da linha poligonal

$$L(P)=\sum_{k=1}^{n} L_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'(\bar{t}_k)^2+y'(\bar{\bar{t}}_k)^2}\,\Delta t_k$$

Não é uma soma de Riemann, porém pode-se esperar que para $\Delta t_k \to 0$, L(P) tenda a $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$

- Supondo *C'(t)* contínua no intervalo [a,b], então:

$$\|C'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$$

será contínua e portanto integrável

$$\int_a^b \|C'(t)\|\,dt=\lim_{max\,\Delta t_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'(t_k^*)^2+y'(t_k^*)^2}\,\Delta t_k$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Definição: Seja ***r****(t)* uma função vetorial em 2D ou 3D com derivada contínua no intervalo *[a,b]*.
    - O comprimento *L* da curva é:

$$L(\mathbf{r}) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Uma curva paramétrica pode ser escrita como uma função vetorial!

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Definição: Seja ***r****(t)* uma função vetorial em 2D ou 3D com derivada contínua no intervalo *[a,b]*.
    - O comprimento *L* da curva é:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}) &= \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \end{aligned}$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Definição: Seja ***r****(t)* uma função vetorial em 2D ou 3D com derivada contínua no intervalo *[a,b]*.
    - O comprimento *L* da curva é:

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{r}) &= \int_a^b \left\| \mathbf{r}'(t) \right\| dt \\
&= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt
\end{aligned}
$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Resumo:

$$L(\boldsymbol{r})=\int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt=\int_a^b \left\|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right\|dt$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Resumo:

$$L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\| \, dt = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt$$

- Comprimento de curva paramétrica em 2D

$$L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

- Comprimento de curva paramétrica em 3D

$$L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt$$

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Exemplo: Determine o comprimento de arco da parte da hélice circular

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t$$

de $t = 0$ a $t = \pi$.

Comprimento de curva

- Comprimento de arco do ponto de vista vetorial
  - Exemplo: Determine o comprimento de arco da parte da hélice circular

$$x = \cos t, \quad y = \text{sen } t, \quad z = t$$

de *t = 0* a *t = π*.

- Reescrevendo como uma função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\text{sen } t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} = \langle \cos t, \text{sen } t, t \rangle$$

- Derivada $\mathbf{r}'(t) = \langle -\text{sen } t, \cos t, 1 \rangle$

- Norma da derivada

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\text{sen } t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

Independente de *t*

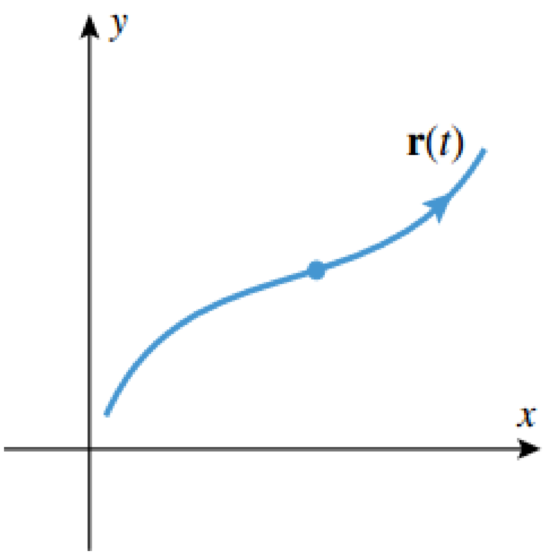
- Comprimento do arco

$$L = \int_0^{\pi} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\pi$$

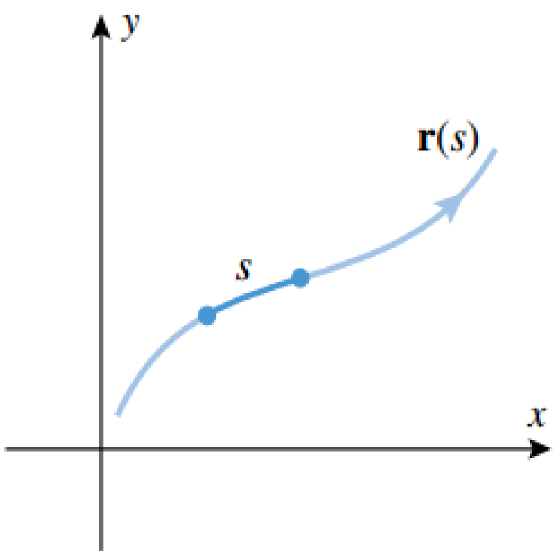
Mudança de parâmetro

Mudança de parâmetro

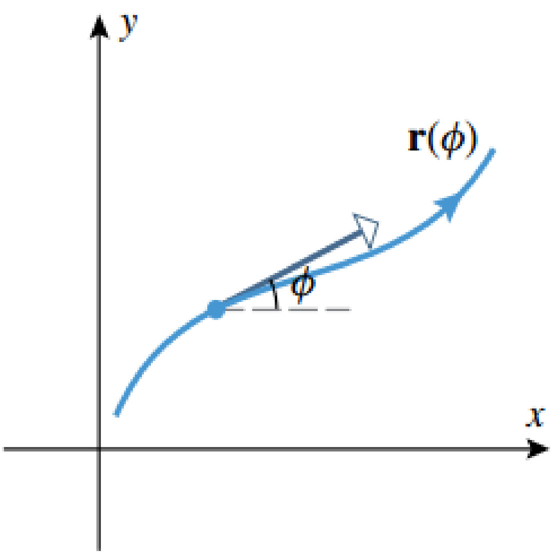
- Simplificar o problema pela escolha certa do parâmetro
  - Mais comuns: Tempo e comprimento de arco



Tempo como parâmetro



Comprimento de arco como parâmetro



ϕ como parâmetro

Mudança de parâmetro

- Substituir $t=g(\tau)$ em uma função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$
- Produzir uma nova função vetorial $\boldsymbol{r}(g(\tau))$ com mesmo gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$
  - Possivelmente traçado de forma diferente quando τ cresce

Mudança de parâmetro

- Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro *t* = *g(τ)* para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

  de modo que:
  - Traçado no sentido anti-horário para $\tau = [0, 1]$
  - Traçado no sentido horário para $\tau = [0, 1]$

Mudança de parâmetro

- Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

de modo que:

  - Traçado no sentido anti-horário para $\tau = [0, 1]$

g deve ser uma função crescente

Mudança de parâmetro

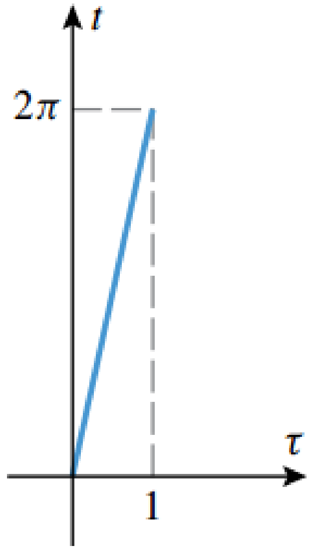
- Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

de modo que:

  - Traçado no sentido anti-horário para $\tau = [0, 1]$
    - Função linear

$$t = g(\tau) = 2\pi\tau$$



$t = 2\pi\tau$

Mudança de parâmetro

- Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

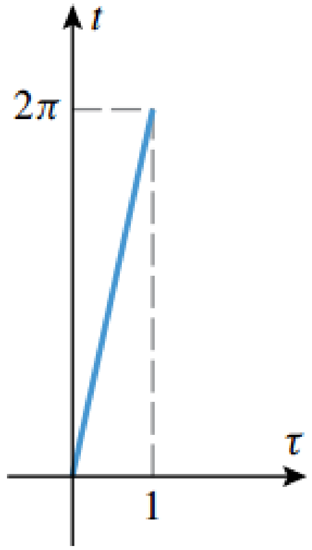
de modo que:

- Traçado no sentido anti-horário para $\tau = [0, 1]$
  - Função linear

    $$t = g(\tau) = 2\pi\tau$$

  - Substituindo

$$\mathbf{r}(g(\tau)) = \cos 2\pi\tau\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2\pi\tau\mathbf{j} \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$



$t = 2\pi\tau$

Mudança de parâmetro

- Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

  de modo que:

  – Traçado no sentido horário para $\tau = [0, 1]$

    - Função linear

g deve ser uma função decrescente

t deve sair de 2π até *0* quando τ crescer de 0 a 1

Mudança de parâmetro

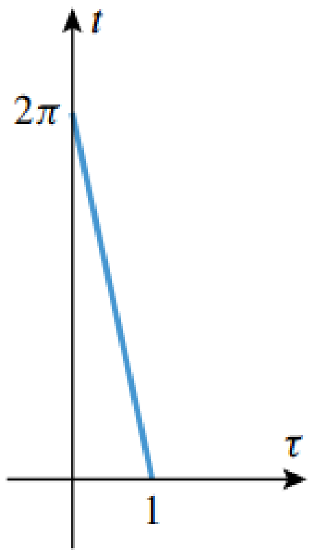
- Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

de modo que:

- Traçado no sentido horário para $\tau = [0, 1]$
    - Função linear

$$t = g(\tau) = 2\pi(1 - \tau)$$



$t = 2\pi(1 - \tau)$

Mudança de parâmetro

- Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

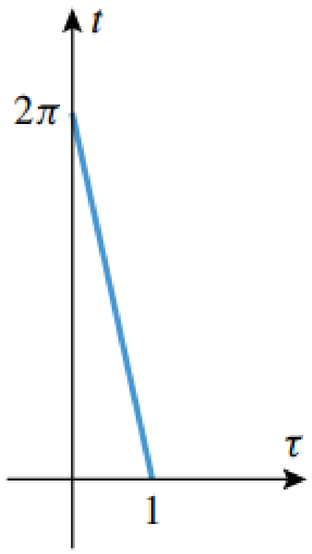
de modo que:

  - Traçado no sentido horário para $\tau = [0, 1]$
    - Função linear

$$t = g(\tau) = 2\pi(1 - \tau)$$

    - Substituindo

$$\mathbf{r}(g(\tau)) = \cos(2\pi(1-\tau))\mathbf{i} + \text{sen}(2\pi(1-\tau))\mathbf{j} \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$
$$= \cos 2\pi\tau\,\mathbf{i} - \text{sen}\, 2\pi\tau\,\mathbf{j}$$



$t = 2\pi(1 - \tau)$

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa
  – Se $\boldsymbol{r}(t)$ for uma função lisa, então é preciso assegurar que $\boldsymbol{r}(g(\tau))$ continuará uma função lisa

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa
  - Teorema: Regra da cadeia
    - Seja $\mathbf{r}(t)$ uma função vetorial 2D ou 3D diferenciável em relação a t.
    - Se $t = g(\tau)$ for uma mudança de parâmetro com g diferenciável em relação a τ, então $\mathbf{r}(g(\tau))$ será diferenciável em relação a τ e:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa
  - Teorema: Regra da cadeia
    - Seja ***r**(t)* uma função vetorial 2D ou 3D diferenciável em relação a *t*.
    - Se $t = g(\tau)$ for uma mudança de parâmetro com *g* diferenciável em relação a τ, então $\mathbf{r}(g(\tau))$ será diferenciável em relação a τ e:

Vetor

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

Vetor

Escalar

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa

O que é preciso para que $\mathbf{r}(g(\tau))$ seja lisa?

$$\frac{d\,\mathbf{r}}{d\,\tau}=\frac{d\,\mathbf{r}}{dt}\,\frac{dt}{d\,\tau}$$

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa

O que é preciso para que ***r***(*g*(*τ*)) seja lisa?

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

  - $dt/d\tau$ deve ser contínua e diferente de zero para todos os valores de τ

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa
  - Categorias
    - Mudanças de parâmetro positiva

$$\frac{dt}{d\tau} > 0$$

    - Mudanças de parâmetro negativa

$$\frac{dt}{d\tau} < 0$$

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa
  - Categorias
    - Mudanças de parâmetro positiva

Preserva orientação

$$\frac{dt}{d\tau} > 0$$

Sinal permanece

    - Mudanças de parâmetro negativa

$$\frac{dt}{d\tau} < 0$$

Sinal muda

Inverte orientação

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa
  - Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

    de modo que:
    - Traçado no sentido anti-horário para τ = [0, 1]

$$t = g(\tau) = 2\pi\tau$$

    - Traçado no sentido horário para τ = [0, 1]

$$t = g(\tau) = 2\pi(1 - \tau)$$

Mudança de parâmetro

- Mudança de parâmetro lisa
  - Exemplo: Determine uma mudança de parâmetro *t = g(τ)* para o círculo

    $$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

    de modo que:
    - Traçado no sentido anti-horário para $\tau = [0, 1]$

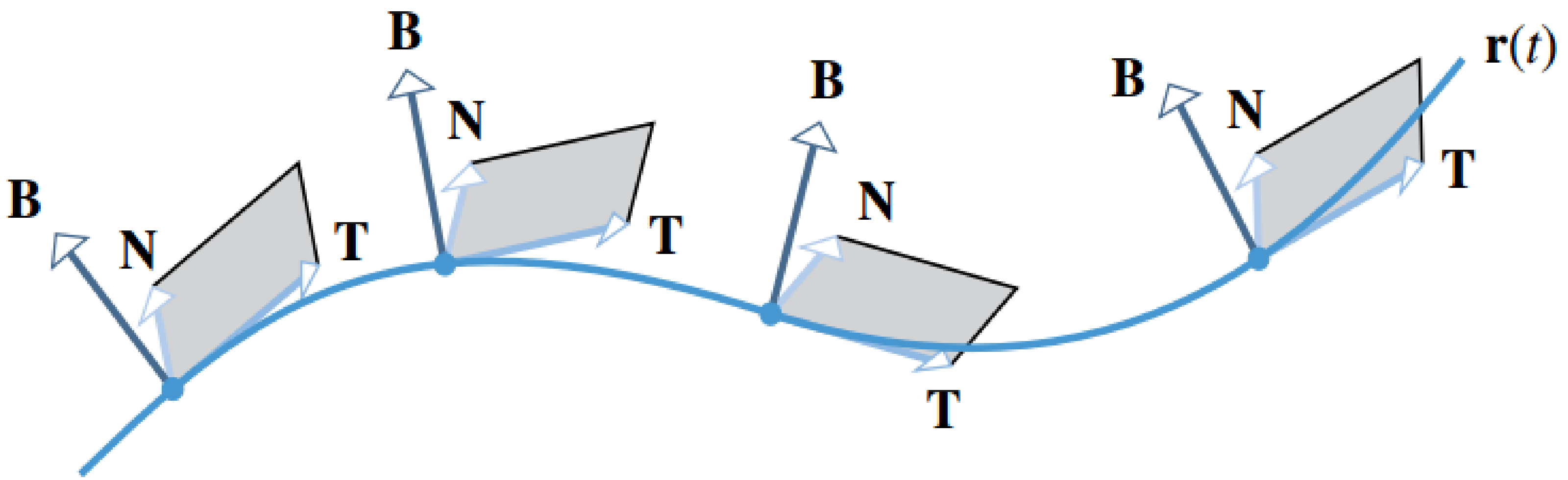
      $t = g(\tau) = 2\pi\tau \quad \Rightarrow \quad dt/d\tau = 2\pi > 0$

    - Traçado no sentido horário para $\tau = [0, 1]$

      $t = g(\tau) = 2\pi(1 - \tau) \quad \Rightarrow \quad dt/d\tau = -2\pi < 0$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal



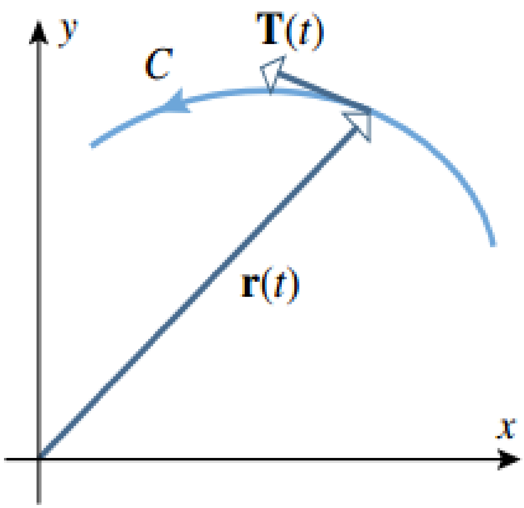
Vetores: Tangente, Normal, Binormal

- Vetor tangente unitário
  - Se *C* é o gráfico de uma função vetorial lisa ***r****(t)* no 2D ou 3D, então o vetor ***r'****(t)* é:
    - não nulo,
    - tangente a C
    - aponta no sentido do parâmetro crescente.

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor tangente unitário
  - Se *C* é o gráfico de uma função vetorial lisa ***r(t)*** no 2D ou 3D, então o vetor ***r'(t)*** é:
    - não nulo,
    - tangente a C
    - aponta no sentido do parâmetro crescente.
  - Assim, normalizando ***r'(t)***:

$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|}$$



Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor normal unitário

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor normal unitário
  - Em particular, ***T****(t)* tem norma constante (igual a 1) logo ***T****(t)* e ***T'****(t)* são vetores ortogonais

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor normal unitário
  - Em particular, ***T***(t) tem norma constante (igual a 1) logo ***T***(t) e ***T'***(t) são vetores ortogonais
  - Isso implica que ***T'***(t) é perpendicular à reta tangente a C em t
    - Diz-se que ***T'***(t) é normal a C em t

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor normal unitário
  - Em particular, ***T****(t)* tem norma constante (igual a 1) logo ***T****(t)* e ***T'****(t)* são vetores ortogonais
  - Isso implica que ***T'****(t)* é perpendicular à reta tangente a *C* em *t*
    - Diz-se que ***T'****(t)* é normal a *C* em *t*
  - Se ***T'****(t)* ≠ ***0*** e se normalizarmos ***T'****(t)*:

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}$$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor normal unitário
  - Em particular, ***T****(t)* tem norma constante (igual a 1) logo ***T****(t)* e ***T'****(t)* são vetores ortogonais
  - Isso implica que ***T'****(t)* é perpendicular à reta tangente a *C* em *t*
    - Diz-se que ***T'****(t)* é normal a *C* em *t*
  - Se ***T'****(t)* ≠ ***0*** e se normalizarmos ***T'****(t)*:

Derivada segunda de ***r***

$$\boldsymbol{N}(t)=\frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}$$

r não pode ser uma reta

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor normal unitário
  - Em particular, ***T***(*t*) tem norma constante (igual a 1) logo ***T***(*t*) e ***T'***(*t*) são vetores ortogonais
  - Isso implica que ***T'***(*t*) é perpendicular à reta tangente a *C* em *t*
    - Diz-se que ***T'***(*t*) é normal a *C* em *t*
  - Se ***T'***(*t*) ≠ ***0*** e se normalizarmos ***T'***(*t*):

Derivada segunda de ***r***

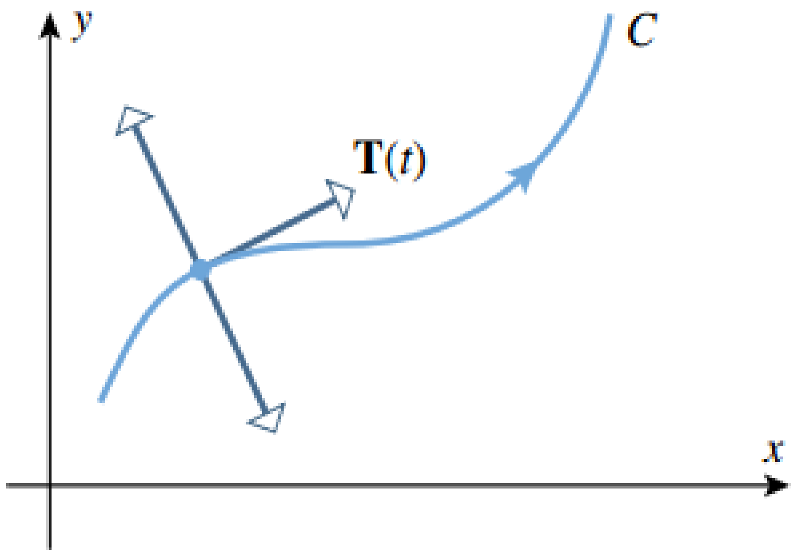
r não pode ser uma reta

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}$$

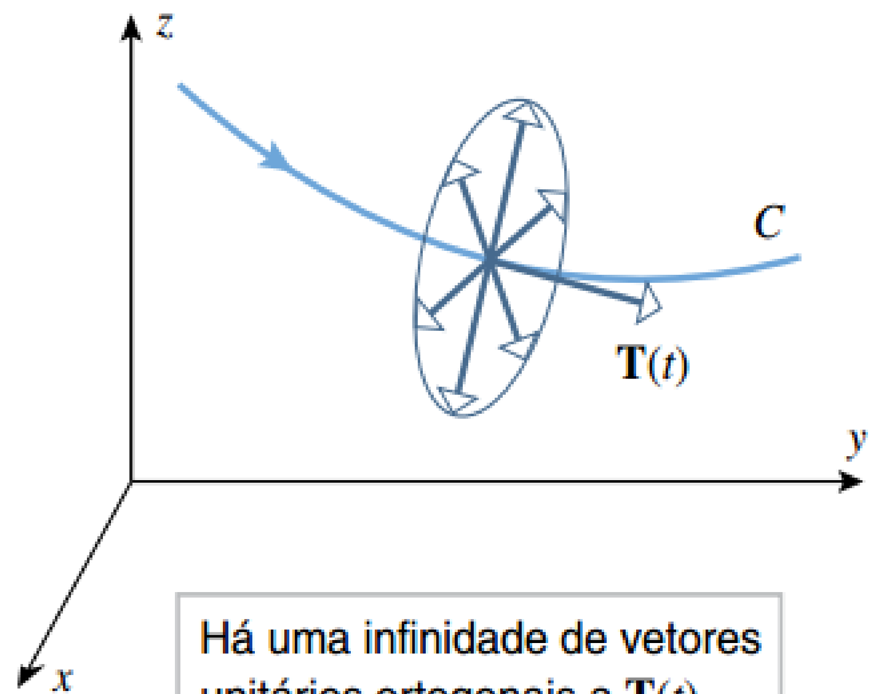
Também chamado de vetor normal unitário principal

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor normal unitário
  - O principal aponta para dentro (lado côncavo)



Há dois vetores unitários ortogonais a $\mathbf{T}(t)$.



Há uma infinidade de vetores unitários ortogonais a $\mathbf{T}(t)$.

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor binormal unitário

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t)$$

  - Orientação é dada pela regra da mão direita

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Vetor binormal unitário

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t)$$

  - Orientação é dada pela regra da mão direita
  - Como ***T*** e ***N*** são unitários, ***B*** também será, pois:

$$\|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\| = \|\mathbf{T}(t)\| \|\mathbf{N}(t)\| \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Resumo
  - É possível construir um sistema de coordenadas centrado em cada ponto de uma função vetorial ***r***

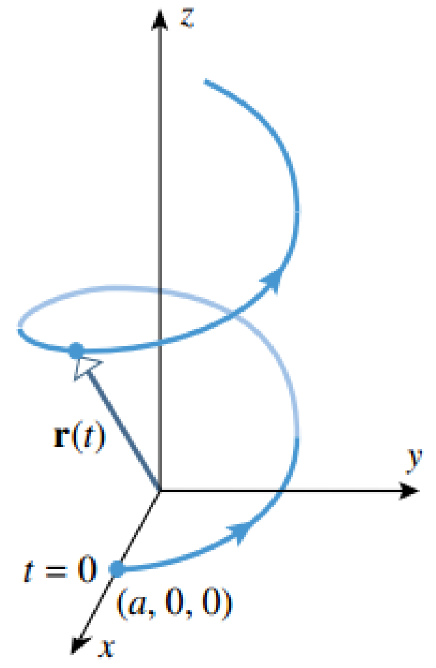
$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|} \qquad \boldsymbol{N}(t)=\frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}=\frac{\boldsymbol{r}''(t)}{\|\boldsymbol{r}''(t)\|}$$

$$\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}$$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T****(t)*, ***N****(t)* e ***B****(t)* para:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$



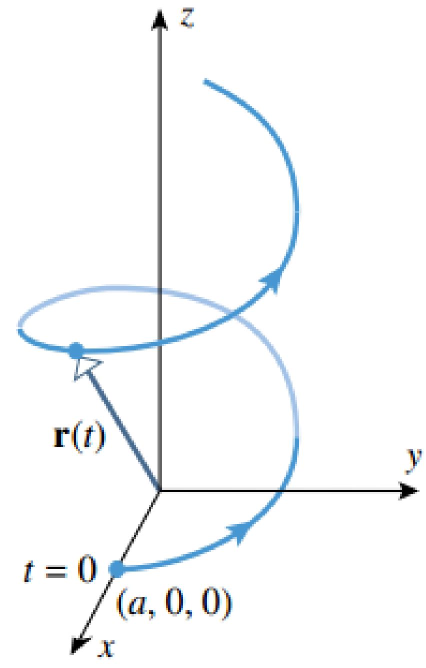
$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T****(t)*, ***N****(t)* e ***B****(t)* para:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***T***

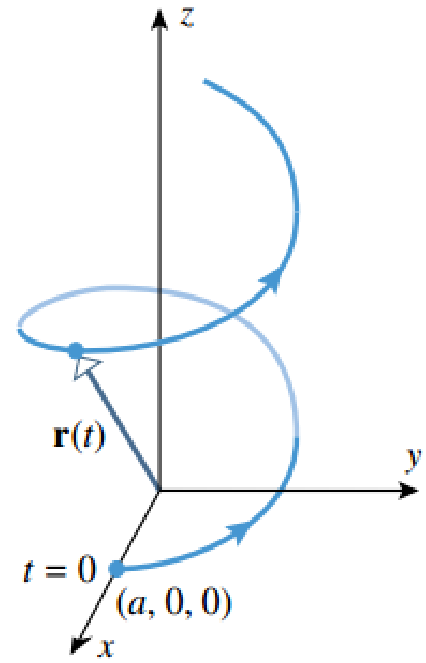


$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T****(t)*, ***N****(t)* e ***B****(t)* para:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$



$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

  - Descobrindo ***T***

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

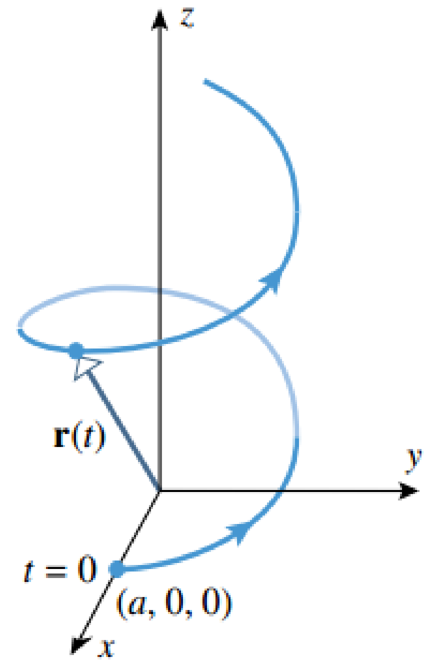
- Exemplo: Obtenha ***T****(t)*, ***N****(t)* e ***B****(t)* para:

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***T***

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a \cos t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a \cos t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$



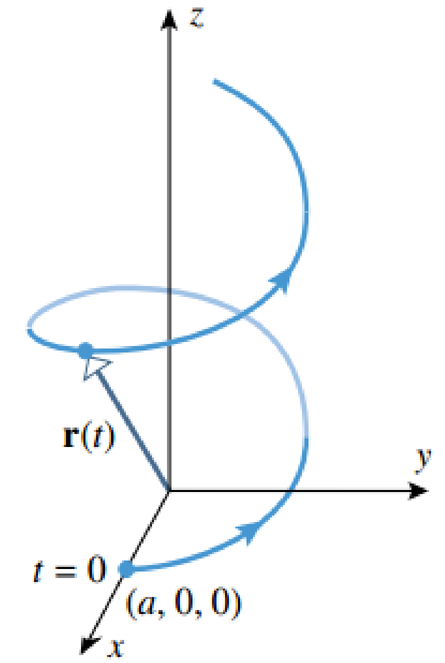
$\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T(t)***, ***N(t)*** e ***B(t)*** para:

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \text{ sen } t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***T***



$\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \text{ sen } t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \text{ sen } t)\mathbf{i} + a \cos t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-a \text{ sen } t)^2 + (a \cos t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

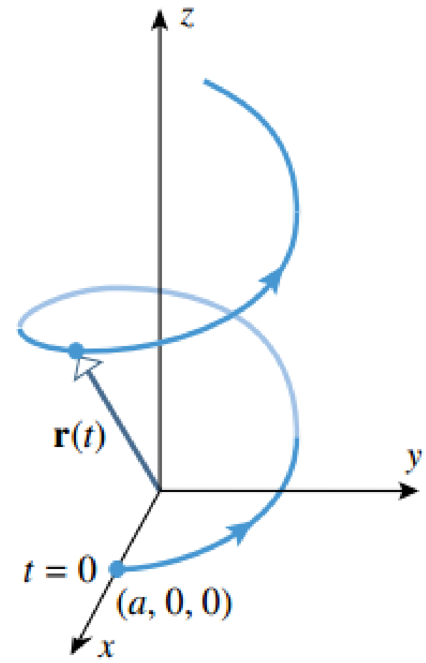
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\frac{a \text{ sen } t}{\sqrt{a^2 + c^2}}\mathbf{i} + \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + c^2}}\mathbf{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\mathbf{k}$$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T****(t)*, ***N****(t)* e ***B****(t)* para:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***N***



$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

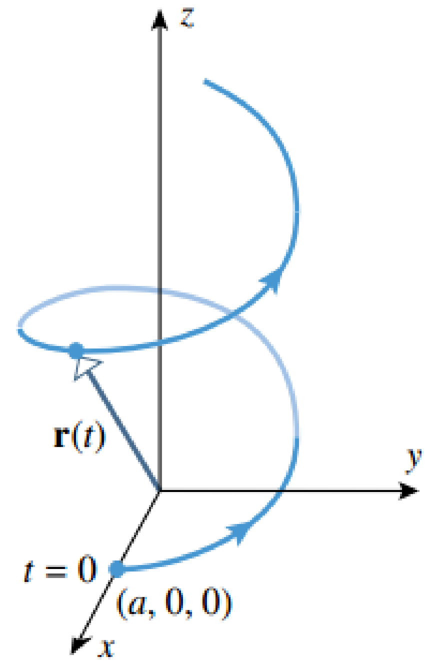
Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T**(t)*, ***N**(t)* e ***B**(t)* para:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***N***

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i} - \frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j}$$



$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

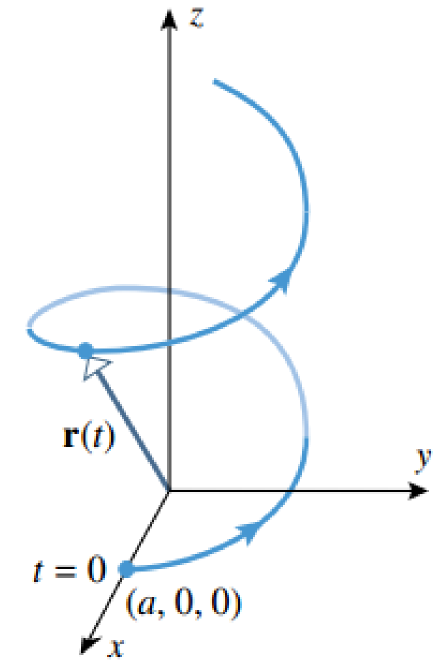
- Exemplo: Obtenha ***T(t)***, ***N(t)*** e ***B(t)*** para:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***N***

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i} - \frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 + \left(-\frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$



$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T****(t)*, ***N****(t)* e ***B****(t)* para:

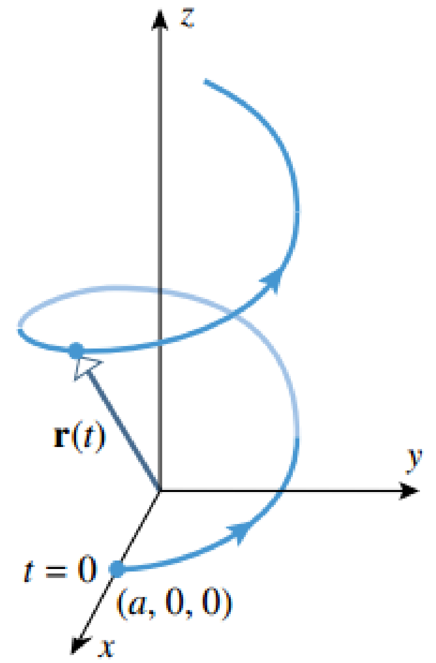
$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***N***

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i} - \frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 + \left(-\frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = (-\cos t)\mathbf{i} - (\mathrm{sen}\,t)\mathbf{j} = -(\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j})$$



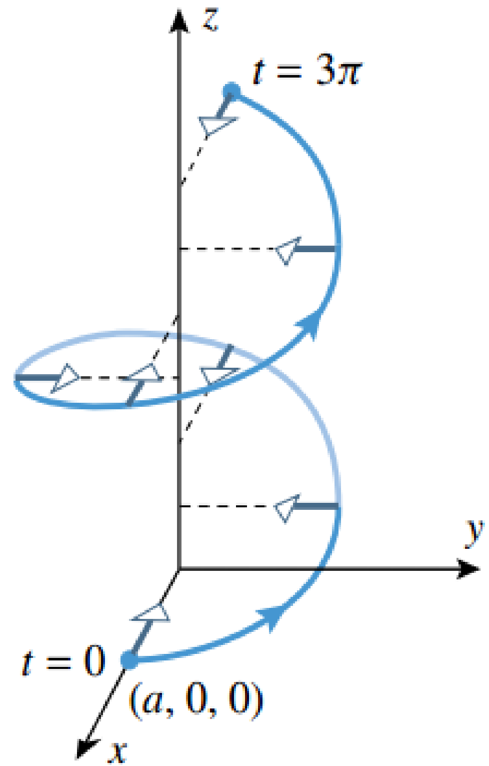
$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T(t)***, ***N(t)*** e ***B(t)*** para:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***N***



$$\mathbf{N}(t) = -(\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j})$$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

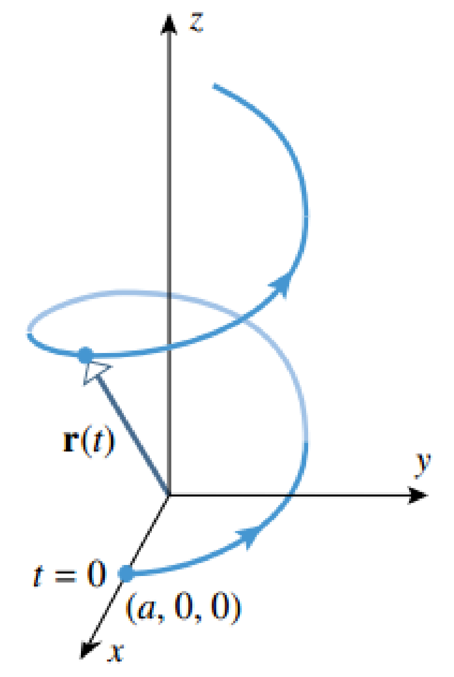
- Exemplo: Obtenha ***T(t)***, ***N(t)*** e ***B(t)*** para:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***B***

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = (-\cos t)\mathbf{i} - (\mathrm{sen}\,t)\mathbf{j} = -(\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j})$$



$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T(t)***, ***N(t)*** e ***B(t)*** para:

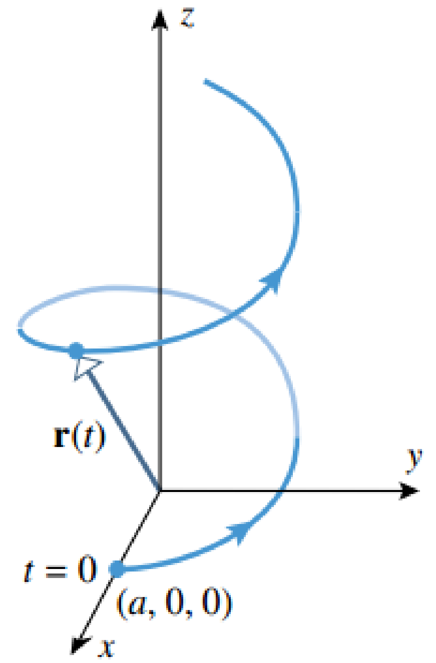
$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***B***

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\frac{a\,\text{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = (-\cos t)\mathbf{i} - (\text{sen}\,t)\mathbf{j} = -(\cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j})$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(t) &= \boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)\\ &= \frac{c\sin(t)}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{i} - \frac{c\cos(t)}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{j} + \frac{a\sin(t)^2}{\sqrt{(a^2+c^2)}} + \frac{a\cos(t)^2}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$



$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Vetores:
Tangente, Normal, Binormal

- Exemplo: Obtenha ***T(t)***, ***N(t)*** e ***B(t)*** para:

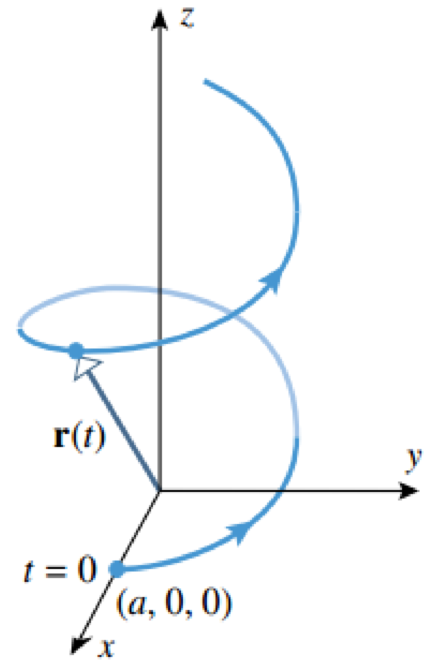
$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

  - Descobrindo ***B***

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = (-\cos t)\mathbf{i} - (\mathrm{sen}\,t)\mathbf{j} = -(\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j})$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(t) &= \boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)\\ &= \frac{c\sin(t)}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{i} - \frac{c\cos(t)}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{j} + \frac{a\sin(t)^2}{\sqrt{(a^2+c^2)}} + \frac{a\cos(t)^2}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{k}\\ &= \frac{c\sin(t)}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{i} - \frac{c\cos(t)}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{j} + \frac{a}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$



$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

Resumo

Resumo

- Comprimento de curva $$L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\| \, dt = \int_a^b \left\| \frac{d\,\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt$$

Resumo

- Comprimento de curva

$$L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\| \, dt = \int_a^b \left\| \frac{d\,\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt$$

  - Parametrização lisa

Resumo

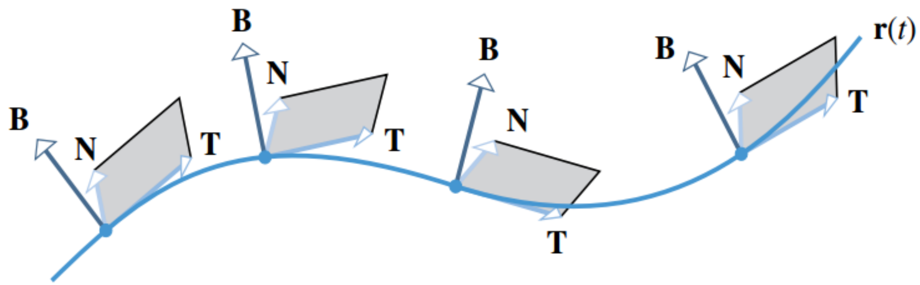
- Comprimento de curva $$L(\mathbf{r}) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt$$
  - Parametrização lisa
- Mudança de parâmetro
  - Produzir uma nova função vetorial ***r**(g(τ))* com mesmo gráfico de ***r**(t)*
  - Regra da cadeia para funções vetoriais $$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

Resumo

- Comprimento de curva $$L(\mathbf{r})=\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt=\int_a^b \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|dt$$
  - Parametrização lisa
- Mudança de parâmetro
  - Produzir uma nova função vetorial ***r(g(τ))*** com mesmo gráfico de ***r(t)***
  - Regra da cadeia para funções vetoriais $$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$
- Vetores tangente, normal e binormal

$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|} \qquad \boldsymbol{N}(t)=\frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}$$

$$\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)$$

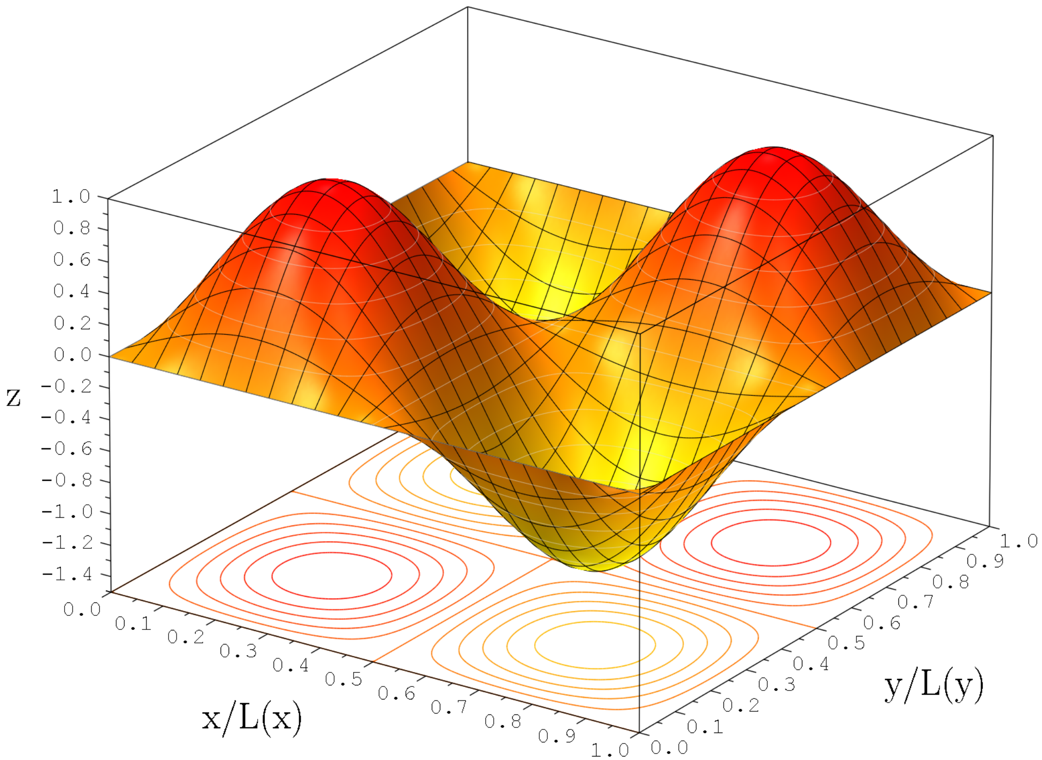


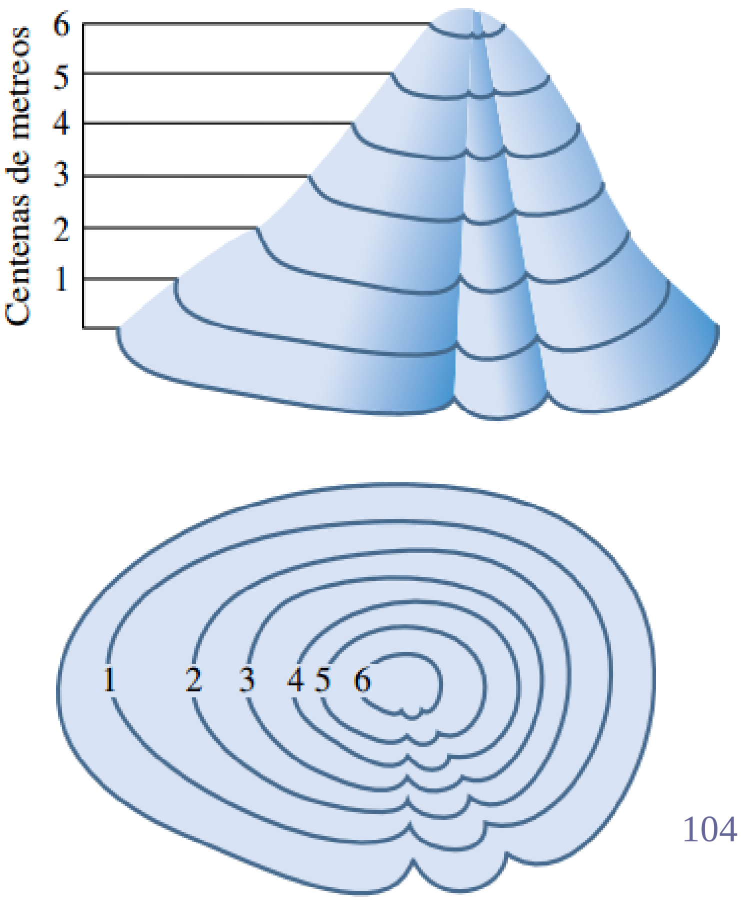
Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 12.3
    - Exercícios de compreensão 12.3 (1 e 4)
    - 1-4
    - 5-8
    - 13-16
  - Seção 12.4
    - Exercícios de compreensão 12.4 (1)
    - 5-12
    - 15-18

Resumo

- Próxima aula:
  - Funções de duas ou mais variáveis





Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seções 12.3 e 12.4
  - GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo, v. 2**. 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
    - Seção 7.7