Derivadas direcionais e gradientes

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Derivadas direcionais
- Gradientes
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

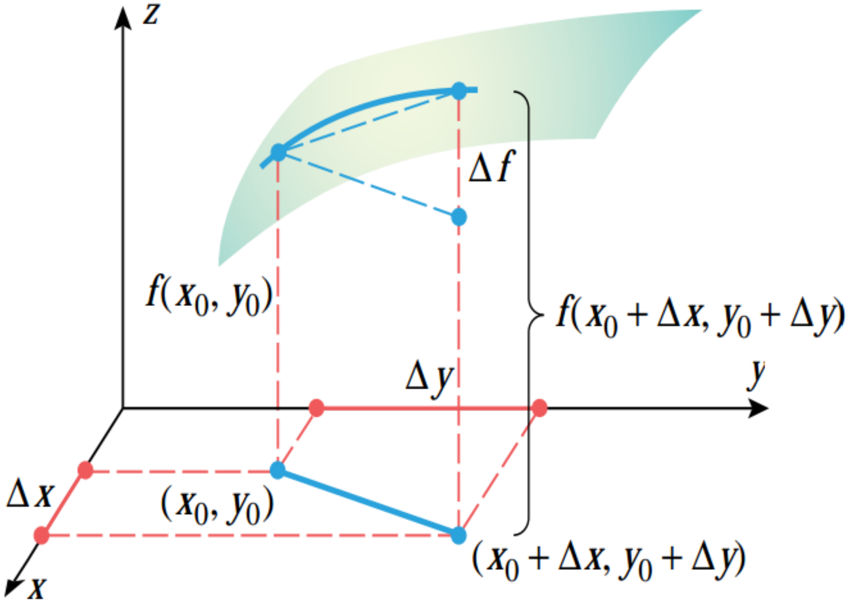
Resumo

Propriedades:
- plano tangente não vertical
- aproximação linear
- continuidade

- Diferenciabilidade

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$



Resumo

Propriedades:
- plano tangente não vertical
- aproximação linear
- continuidade

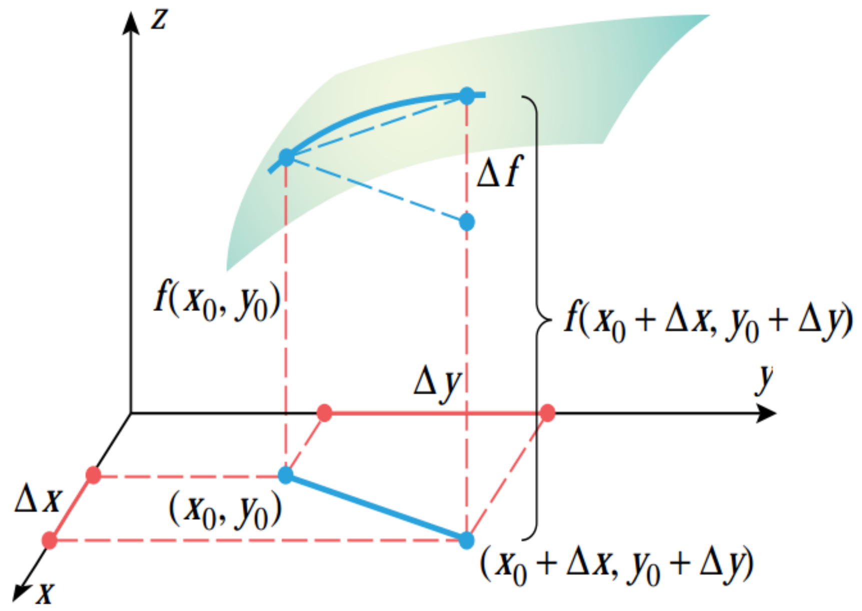
- Diferenciabilidade

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

onde $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

  - Diferencial

$$dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$$



Resumo

Propriedades:
- plano tangente não vertical
- aproximação linear
- continuidade

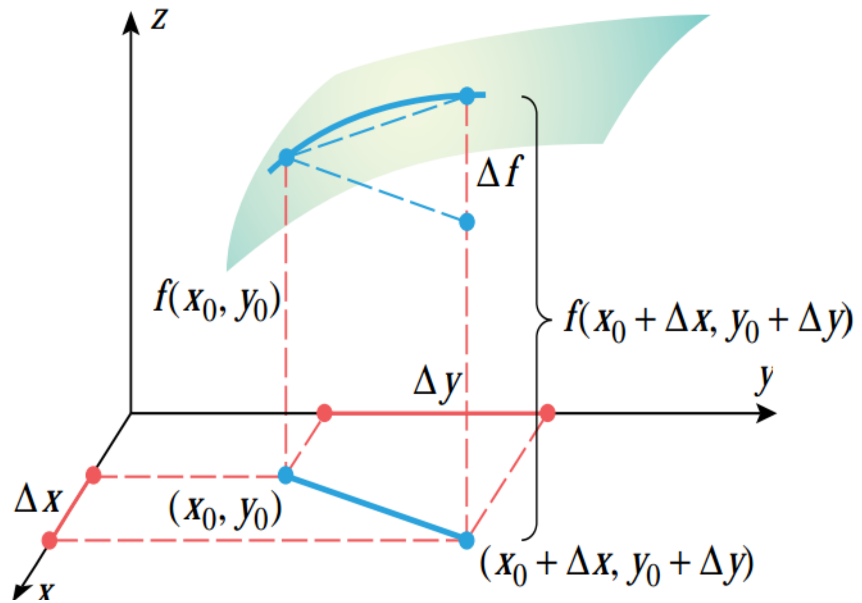
- Diferenciabilidade

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

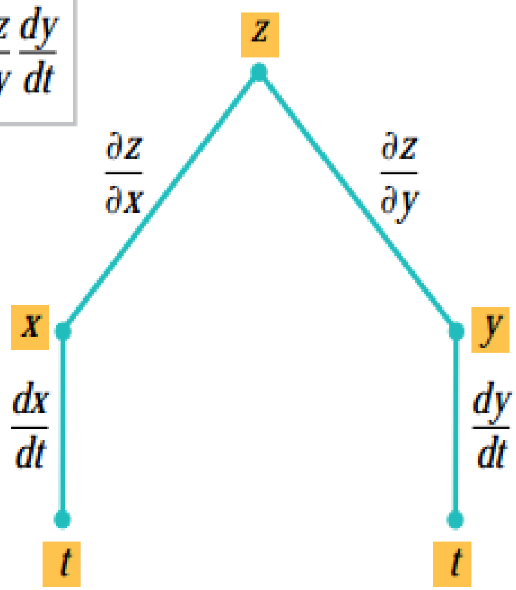
  - Diferencial

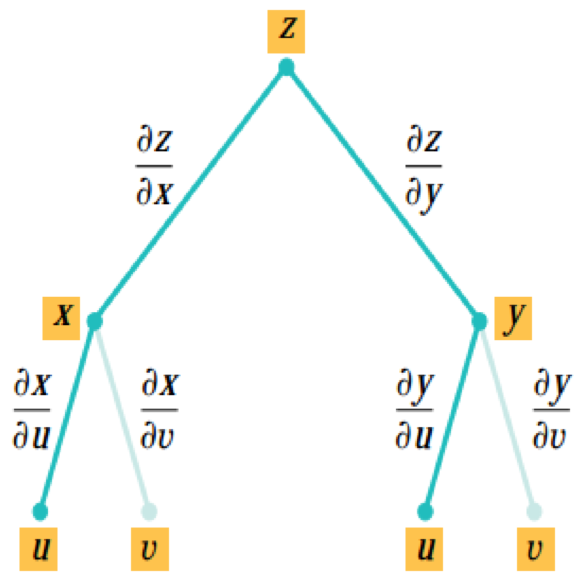
$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$



- Regra da cadeia

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$





$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

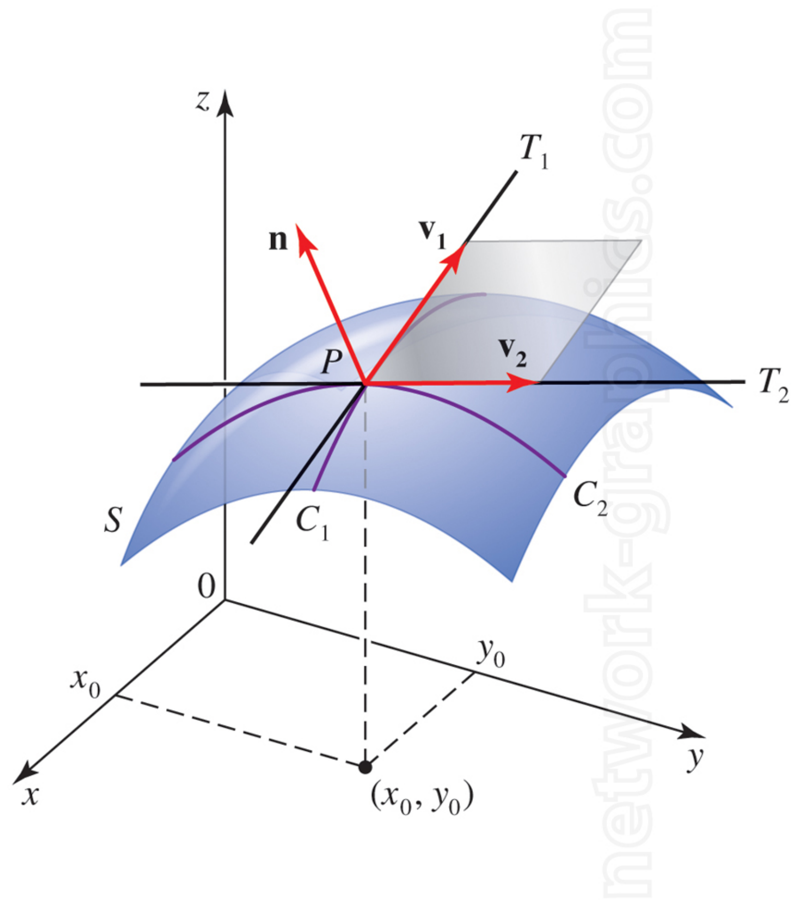
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Derivadas direcionais

Derivadas direcionais

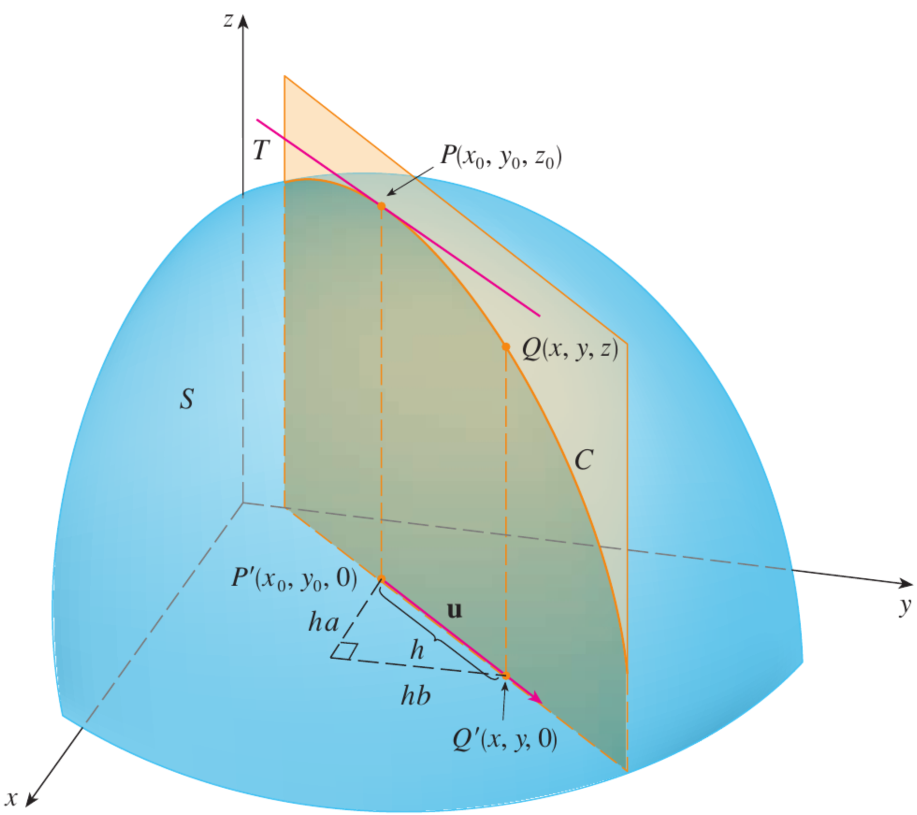
- As derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ representam as taxas de variação de $f(x, y)$ nas direções paralelas aos eixos x e y

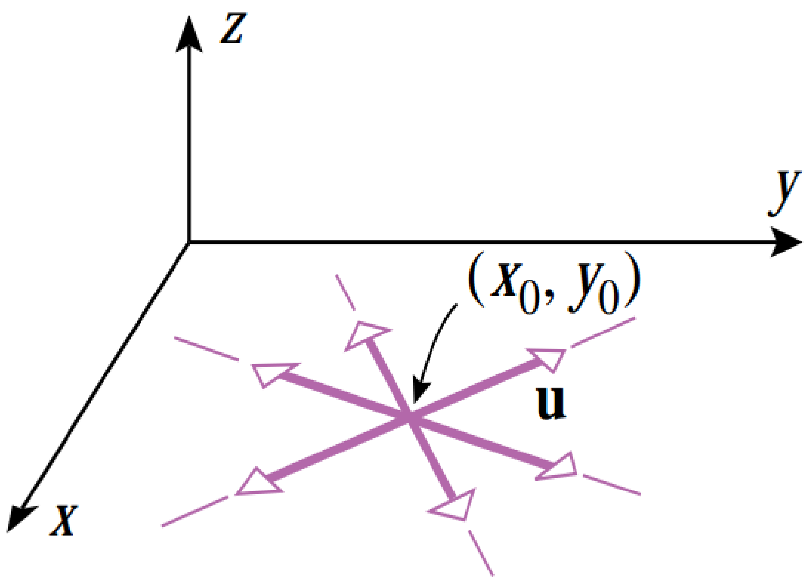
E se quiséssemos em outra direção?



Derivadas direcionais

- Para indicar a direção é preciso usar um **vetor unitário u** e posicioná-lo no ponto (x_0, y_0)





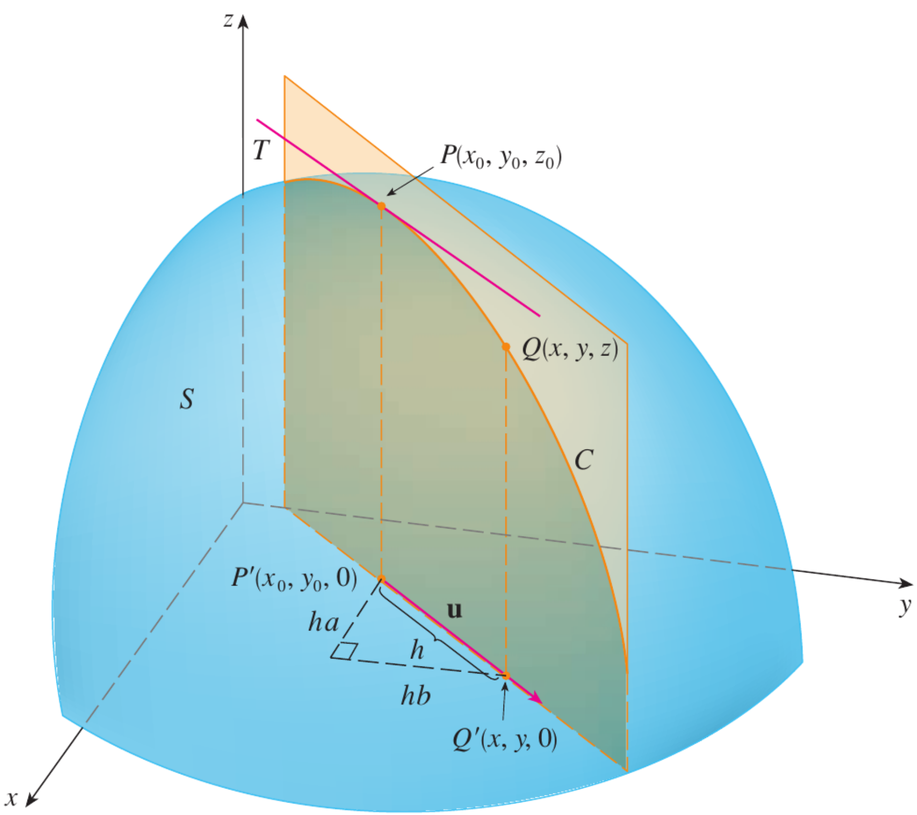
$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

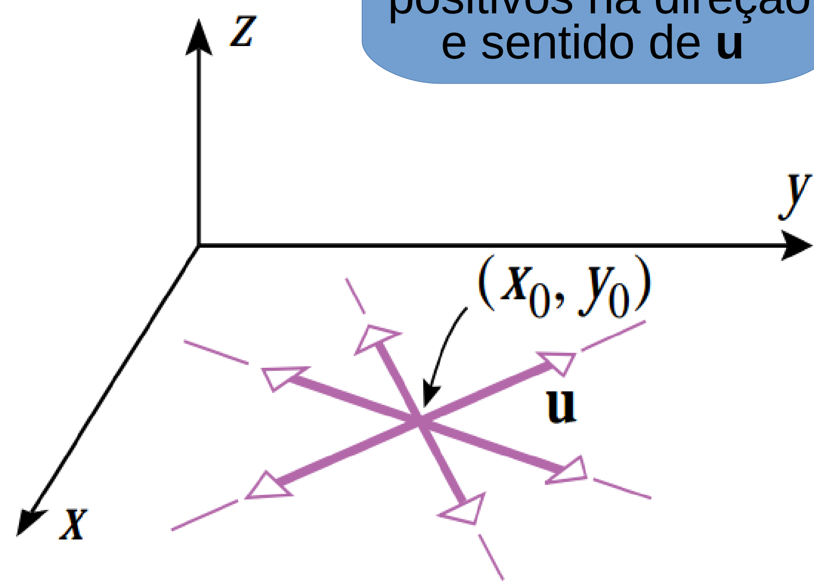
Derivadas direcionais

- Para indicar a direção é preciso usar um **vetor unitário u** e posicioná-lo no ponto (x_0, y_0)
  - Uma reta no plano xy expressa parametricamente:

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

s é o parâmetro comprimento de arco e tem valores positivos na direção e sentido de **u**

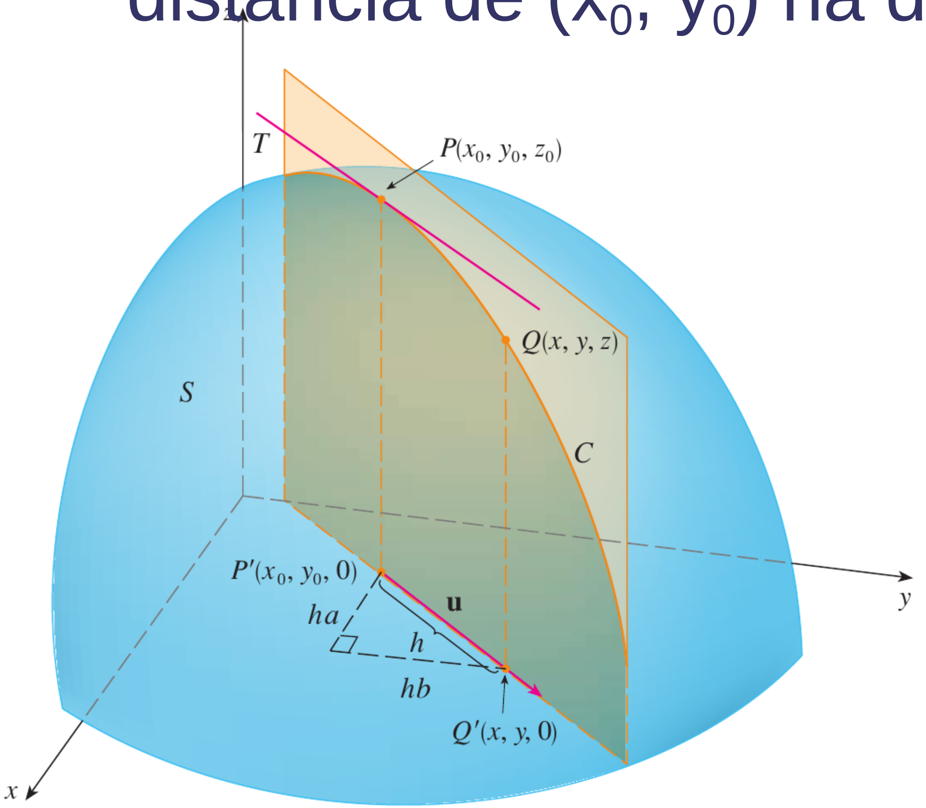


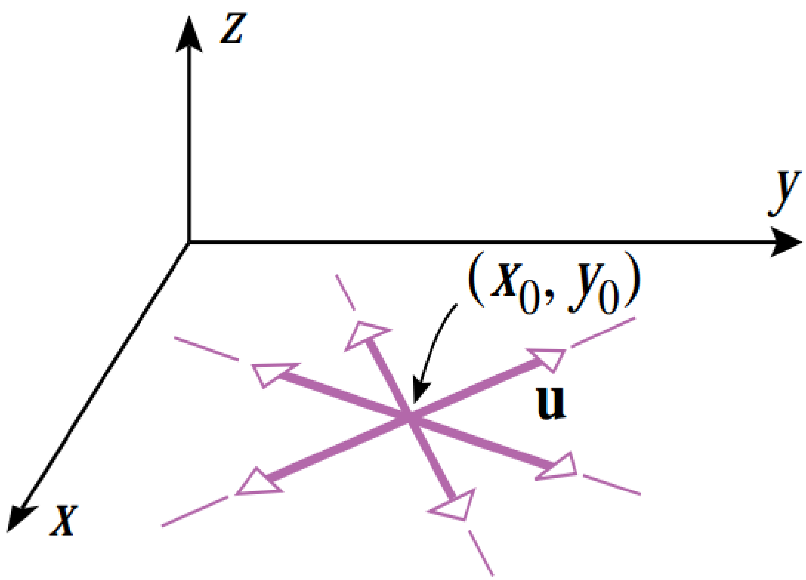


$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

Derivadas direcionais

- A variável $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ é uma função do parâmetro s na reta l
  - O valor da derivada dz/ds em $s = 0$ dá a taxa de variação instantânea de f(x, y) em relação à distância de (x_0, y_0) na direção e sentido de **u**





$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

Derivadas direcionais

- Definição:
  - Se *f(x, y)* for uma função de x e y e se **u** = u_1**i** + u_2**j** um vetor unitário, então a **derivada direcional de f na direção e sentido de u** em (x_0, y_0) será denotada por $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ e definida por

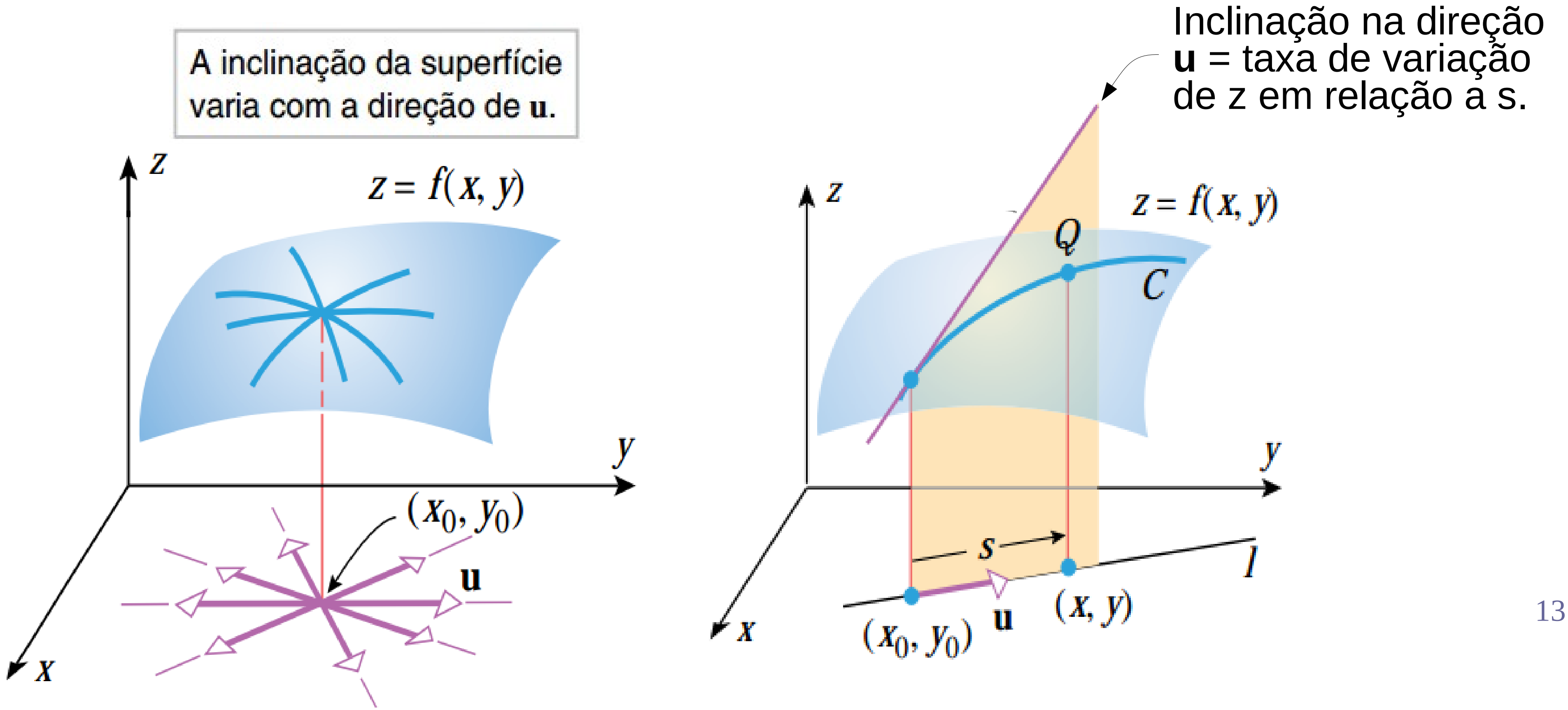
$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{ds}\left[f(x_0 + s u_1, y_0 + s u_2)\right]_{s=0}$$

desde que esse limite exista

Semelhante para uma função de mais variáveis

Derivadas direcionais

- Interpretação geométrica
  - Inclinação da superfície z = f(x, y) na direção de **u** no ponto (x_0, y_0, f(x_0, y_0))



Derivadas direcionais

- Exemplo: Encontre e interprete $D_u\, f(1, 2)$

$$f(x, y) = x\, y$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

É preciso checar
se o vetor u é unitário

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{ds}[f(x_0 + s u_{1,}\, y_0 + s u_2)]_{s=0}$$

Derivadas direcionais

- Exemplo: Encontre e interprete $D_{\mathbf{u}}$ f(1, 2)

$$f(x, y) = x\,y \qquad \mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

  – Substituindo na equação da derivada direcional

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{d}{ds}\left[f\left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2}\right)\right]_{s=0}$$

  – Calculando f na direção de **u**

$$f\left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}\right)\left(2 + \frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)s + 2$$

  – Derivando em relação a s

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)s + 2\right]_{s=0} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right]_{s=0} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

Derivadas direcionais

- Exemplo: Encontre e interprete $D_u\ f(1, 2)$

$$f(x, y) = x\,y \qquad\qquad \mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

  - Substituindo na equação da derivada direcional

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{d}{ds}\left[f\left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2}\right)\right]_{s=0}$$

  - Calculando f na direção de **u**

$$f\left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}\right)\left(2 + \frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)s + 2$$

  - Derivando em relação a s

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)s + 2\right]_{s=0} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right]_{s=0} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

A função f (x, y) = xy cresce cerca de 2,23 vezes a distância percorrida

Derivadas direcionais

- Teorema:
  - Se *f(x, y)* for diferenciável em (x_0, y_0), e se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ for um vetor unitário, então a derivada direcional $D_\mathbf{u}f(x_0, y_0)$ existirá e será dada por

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

Semelhante para funções com mais variáveis

Derivadas direcionais

- Teorema:
  - Se *f(x, y)* for diferenciável em (x_0, y_0), e se **u** = u_1**i** + u_2**j** for um vetor unitário, então a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ existirá e será dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

  - Demonstração: A função $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ é a composição da função $z = f(x, y)$ com as funções

$$x = x(s) = x_0 + su_1 \qquad y = y(s) = y_0 + su_2$$

A regra da cadeia fornece

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{ds}\left[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)\right]_{s=0}$$

$$= \left.\frac{dz}{ds}\right|_{s=0} = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

Derivadas direcionais

- Exemplo: Calcule D_u f(1, 2)
  - Resultado anterior

$$f(x, y) = x\,y$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,u_1 + f_y(x_0, y_0)\,u_2$$

Derivadas direcionais

- Exemplo:
  - Resultado anterior

$$f(x, y) = x\,y$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,u_1 + f_y(x_0, y_0)\,u_2$$

  - Usando a equação

$$f_x(1, 2) = 2 \qquad f_y(1, 2) = 1$$

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

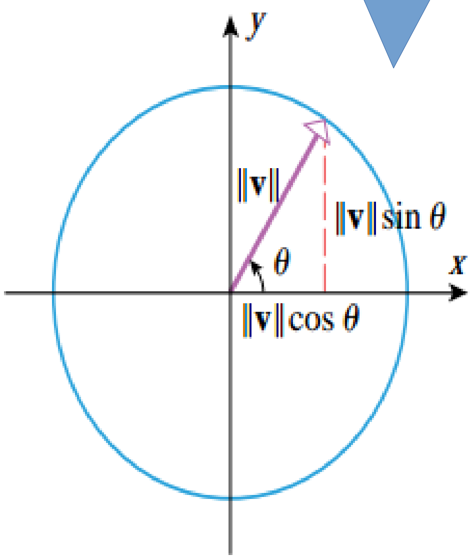
Derivadas direcionais

$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) u_1 + f_y(x_0, y_0) u_2$

- Exemplo:
  - Obtenha a derivada direcional em (−2, 0) na direção e no sentido do vetor unitário que faz um ângulo de π/3 com o eixo x positivo

$$f(x, y) = e^{xy}$$

Outra forma de expressar um vetor unitário: $\boldsymbol{u} = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j}$



Derivadas direcionais

- Exemplo:
  - Obtenha a derivada direcional em (−2, 0) na direção e no sentido do vetor unitário que faz um ângulo de π/3 com o eixo x positivo

$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) u_1 + f_y(x_0, y_0) u_2$

$$f(x, y) = e^{xy}$$

- Derivadas parciais

$$f_x(x, y) = ye^{xy}, \quad f_y(x, y) = xe^{xy}$$
$$f_x(-2, 0) = 0, \quad f_y(-2, 0) = -2$$

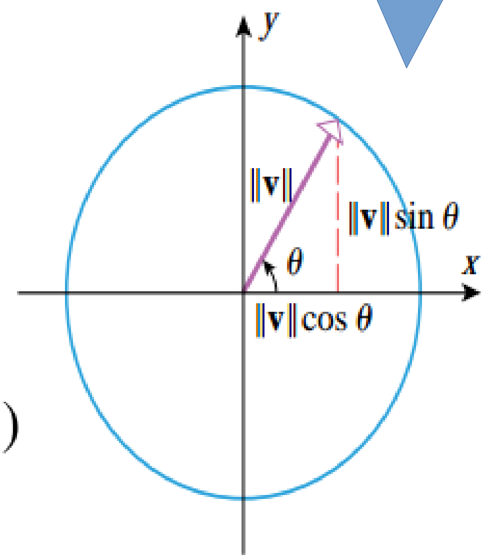
- Calculo de **u**

$$\mathbf{u} = \cos(\pi/3)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\pi/3)\mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

- Substituindo

$$D_{\mathbf{u}} f(-2, 0) = f_x(-2, 0)\cos(\pi/3) + f_y(-2, 0)\operatorname{sen}(\pi/3)$$
$$= 0(1/2) + (-2)(\sqrt{3}/2) = -\sqrt{3}$$

Outra forma de expressar um vetor unitário:
$\boldsymbol{u} = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j}$



Gradiente

Gradiente

- A formula da derivada direcional pode ser expressa com o produto escalar

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j})$$
$$= (f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u}$$

Gradiente

- A formula da derivada direcional pode ser expressa com o produto escalar

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) &= (f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \\ &= \underbrace{(f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j})} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Esse vetor é chamado de gradiente

É o vetor que contém as derivadas parciais em um certo ponto de f

Gradiente

- Definição:
  - Se f for uma função de x e y, então o gradiente de f será definido por

$$\nabla f(x,y)=f_x(x,y)\boldsymbol{i}+f_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

  - Se f for uma função de x, y e z, então o gradiente de f será definido por

$$\nabla f(x,y,z)=f_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+f_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+f_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

Delta invertido é um operador chamado de “del” ou “nabla“

Gradiente

- Reescrevendo a derivada direcional
  - Função de duas variáveis

$$D_{\boldsymbol{u}} f\left(x_0, y_0\right) = \nabla f\left(x_0, y_0\right) \cdot \boldsymbol{u}$$

  - Função de três variáveis

$$D_{\boldsymbol{u}} f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right) \cdot \boldsymbol{u}$$

Gradiente

- Exemplo: Obtenha a derivada direcional usando produto escalar com o vetor gradiente no ponto (1, −2, 0).

$$f(x, y, z) = x^2y - yz^3 + z \qquad \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_{0,} z_0) = \nabla f(x_0, y_{0,} z_0) \cdot \boldsymbol{u}$$

Está normalizado?

Gradiente

- Exemplo: Obtenha a derivada direcional usando produto escalar com o vetor gradiente no ponto (1, −2, 0).

$$f(x, y, z) = x^2y - yz^3 + z \qquad \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

  - Derivadas parciais

$$f_x(x, y, z) = 2xy, \quad f_y(x, y, z) = x^2 - z^3, \quad f_z(x, y, z) = -3yz^2 + 1$$

$$f_x(1, -2, 0) = -4, \quad f_y(1, -2, 0) = 1, \quad f_z(1, -2, 0) = 1$$

  - Normalizando vetor a

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{9}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

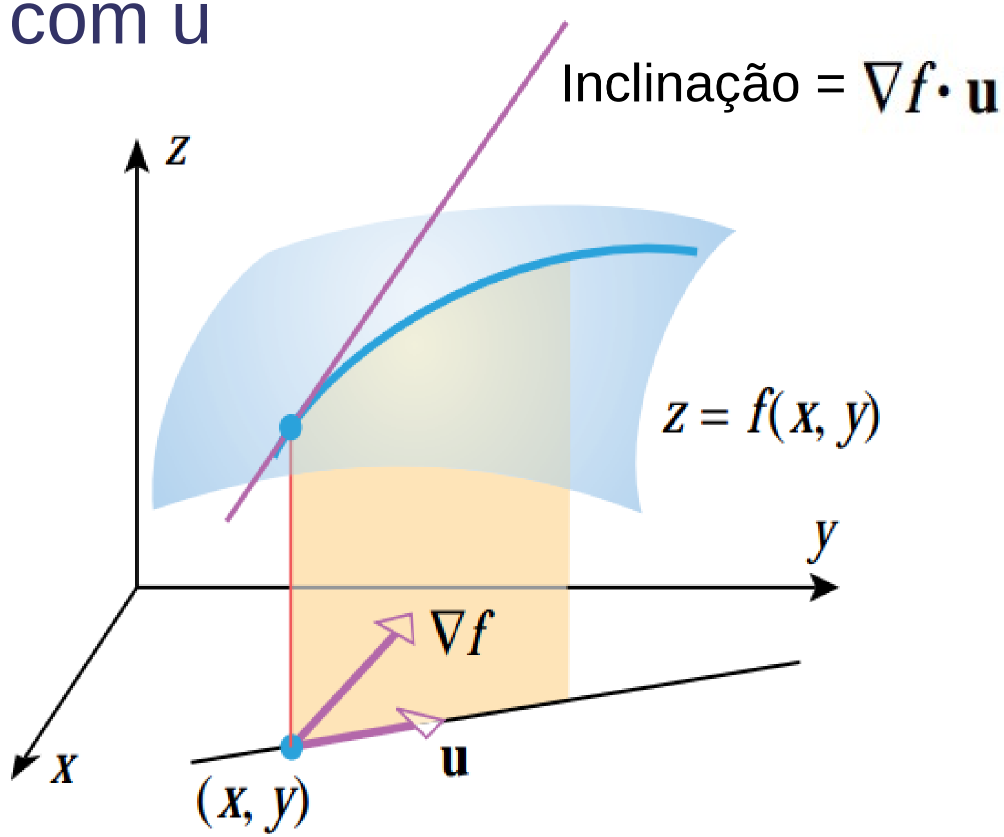
  - Usando a formula

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, -2, 0) &= \nabla f(1, -2, 0) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \left(\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}\right) \\ &= (-4)\left(\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} = -3 \end{aligned}$$

Gradiente

- Interpretação geométrica
  - A inclinação da superfície z = f(x, y) no ponto (x_0, y_0) na direção de u é o produto escalar do gradiente com u

Notar que esse ∇f está no plano xy



Gradiente

- Propriedades do gradiente: Inclinação máxima
  - Supondo $\nabla f \neq \mathbf{0}$

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(x, y)\| \, \|\mathbf{u}\| \cos \theta = \|\nabla f(x, y)\| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre os vetores

Gradiente

- Propriedades do gradiente: Inclinação máxima
  - Supondo $\nabla f \neq \mathbf{0}$

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(x, y)\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(x, y)\| \cos\theta$$

Mesma direção e sentido

onde θ é o ângulo entre os vetores

- O valor máximo de $D_u f(x,y)$ ocorre quando $\theta=0$ ($\cos(0)=1$)

Gradiente

- Propriedades do gradiente: Inclinação máxima
  - Supondo $\nabla f \neq \mathbf{0}$

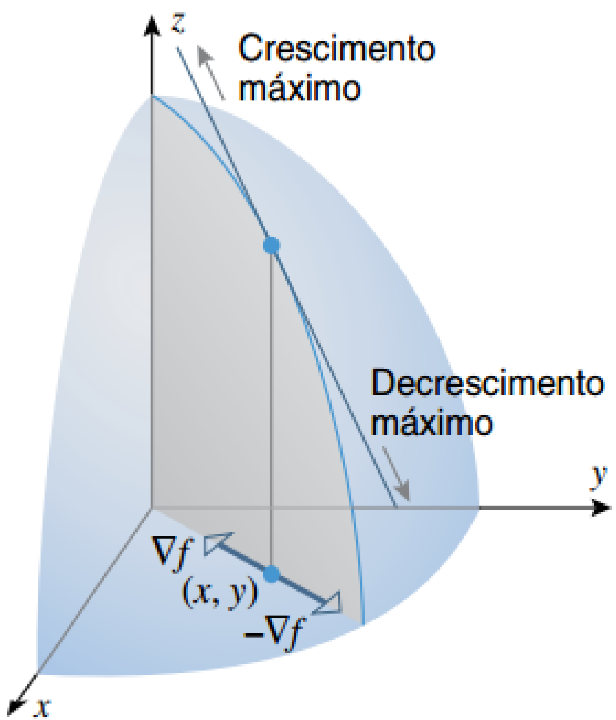
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(x, y)\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(x, y)\| \cos\theta$$

Mesma direção e sentido

onde θ é o ângulo entre os vetores

- O valor máximo de $D_u f(x,y)$ ocorre quando θ=0 (cos(0)=1)

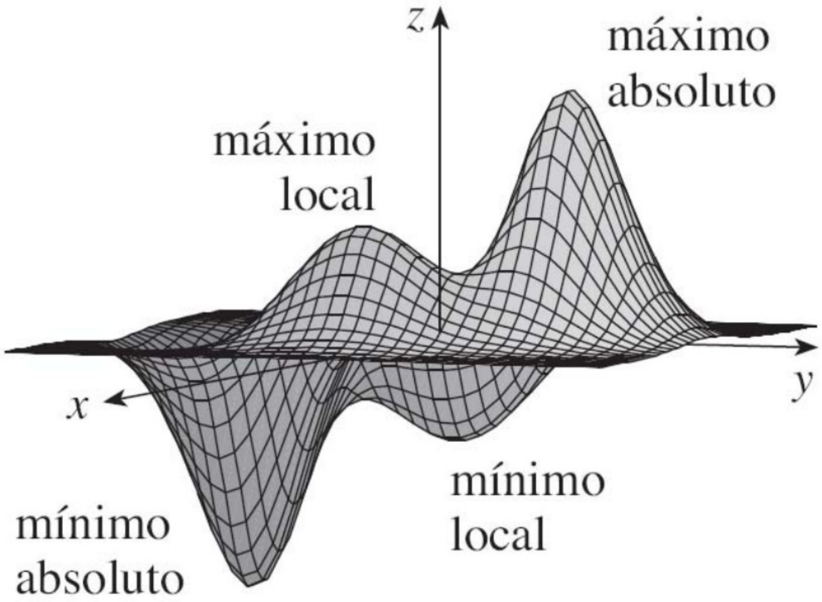
  - Interpretação geométrica:
    Em (x, y), a superfície z = f(x, y) tem sua inclinação máxima na direção do gradiente,
    e a inclinação máxima é $\|\nabla f(x, y)\|$.

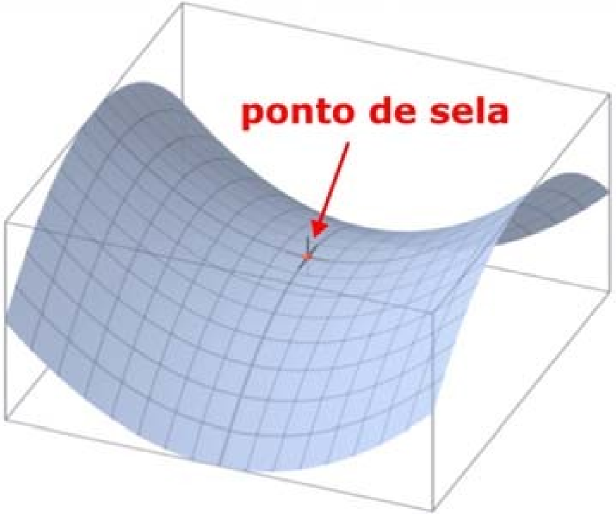


Imagine subir um morro totalmente simétrico (semi-esfera)

Gradiente

- Propriedades do gradiente:
  - Supondo $\nabla f = \mathbf{0}$, $D_u f(x,y) = 0$ para qualquer direção
    - Isso ocorre tipicamente onde a superfície $z = f(x, y)$ tiver um "máximo relativo", um "mínimo relativo" ou um ponto de sela.





Gradiente

- Propriedades do gradiente
  - Exemplo: Determine o valor máximo de uma derivada direcional em (-2,0) e o vetor unitário que da direção e sentido em que ocorre.

$$f(x, y) = x^2 e^y.$$

Gradiente

- Propriedades do gradiente
  - Exemplo: Determine o valor máximo de uma derivada direcional em (-2,0) e o vetor unitário que da direção e sentido em que ocorre.

$$f(x, y) = x^2 e^y$$

- O gradiente

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j} = 2xe^y\,\mathbf{i} + x^2 e^y\,\mathbf{j}$$

$$\nabla f(-2, 0) = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

- Valor máximo

$$\|\nabla f(-2, 0)\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

- Vetor unitário

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(-2, 0)}{\|\nabla f(-2, 0)\|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto na curva de nível $f(x, y) = c$ de f e suponha que essa curva possa ser dada por uma parametrização lisa como

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

onde s é um parâmetro de comprimento de arco

Quem é o vetor tangente a essa curva?

Se s=1, anda-se uma unidade, se s=2, anda-se duas unidades...

Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto na curva de nível $f(x, y) = c$ de f e suponha que essa curva possa ser dada por uma parametrização lisa como

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

    onde s é um parâmetro de comprimento de arco
  - Vetor tangente unitário

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(s) = \left(\frac{dx}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{ds}\right)\mathbf{j}$$

Uma propriedade diz que o vetor tangente da curva parametrizada pelo comprimento é sempre unitário!

Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Diferenciando os dois lados da equação a seguir em relação a s

$$f(x, y) = c$$

Pela regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0$$

Pode ser reescrita usando o produto escalar?

Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Diferenciando os dois lados da equação a seguir em relação a s

$$f(x, y) = c$$

    Pela regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0$$

  - Reescrevendo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) = 0$$

Quem são esse vetores?

Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Diferenciando os dois lados da equação a seguir em relação a s

$$f(x, y) = c$$

Pela regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0$$

  - Reescrevendo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) = 0$$

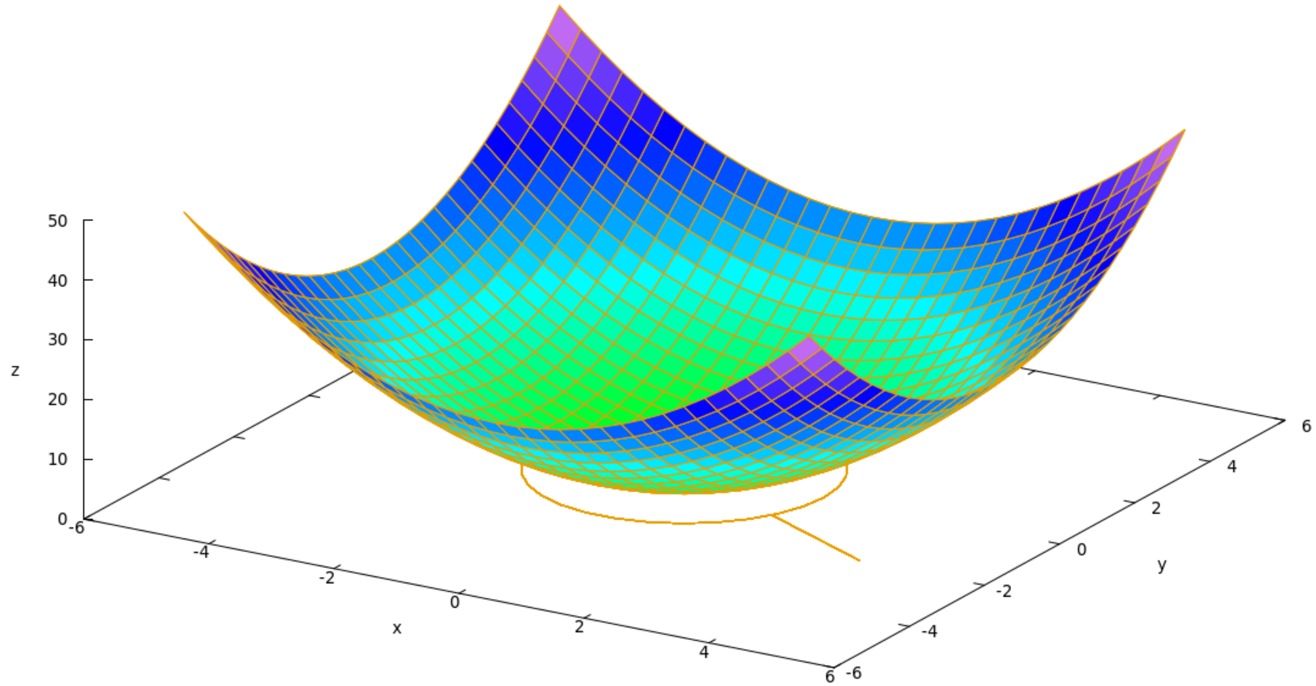
  - Abreviando

$$\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{T} = 0$$

O que isso significa?

Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Teorema:
    - Suponha z = f(x, y) com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um disco aberto centrado em (x_0, y_0) e $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Então $\nabla f(x_0, y_0)$ será normal à curva de nível de f por (x_0, y_0)

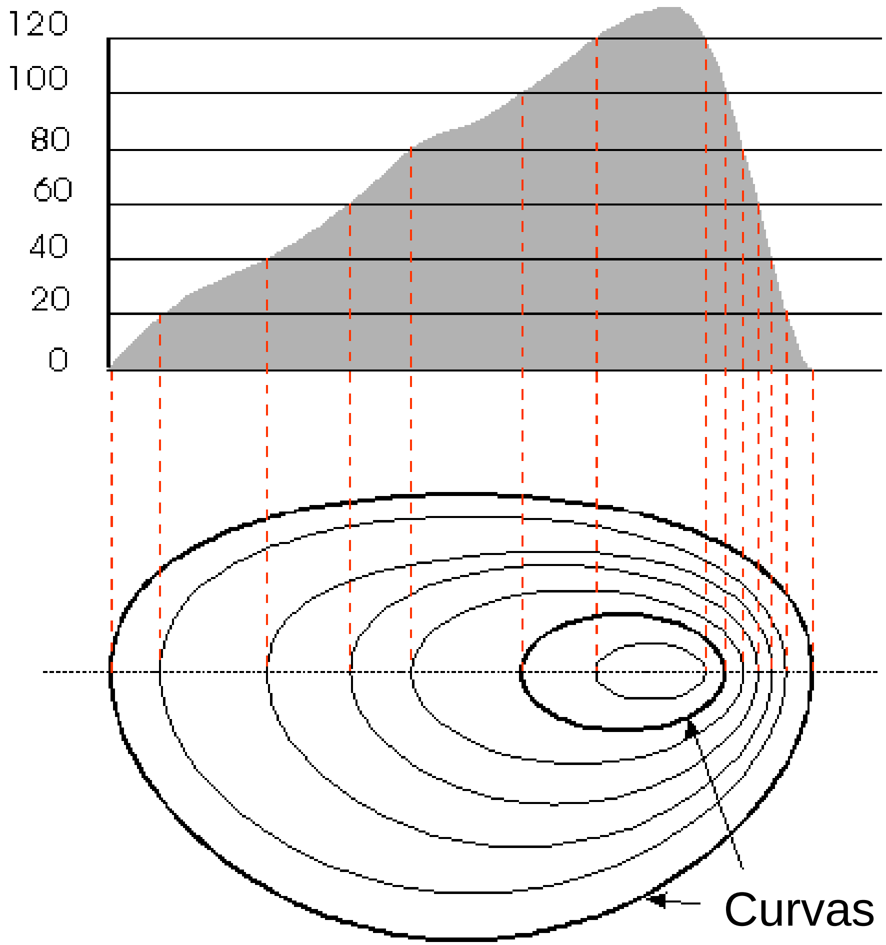


$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Ponto $(2, -1)$
Curva de nível $k = 5$ é um círculo de raio $\sqrt{5}$

Gradiente

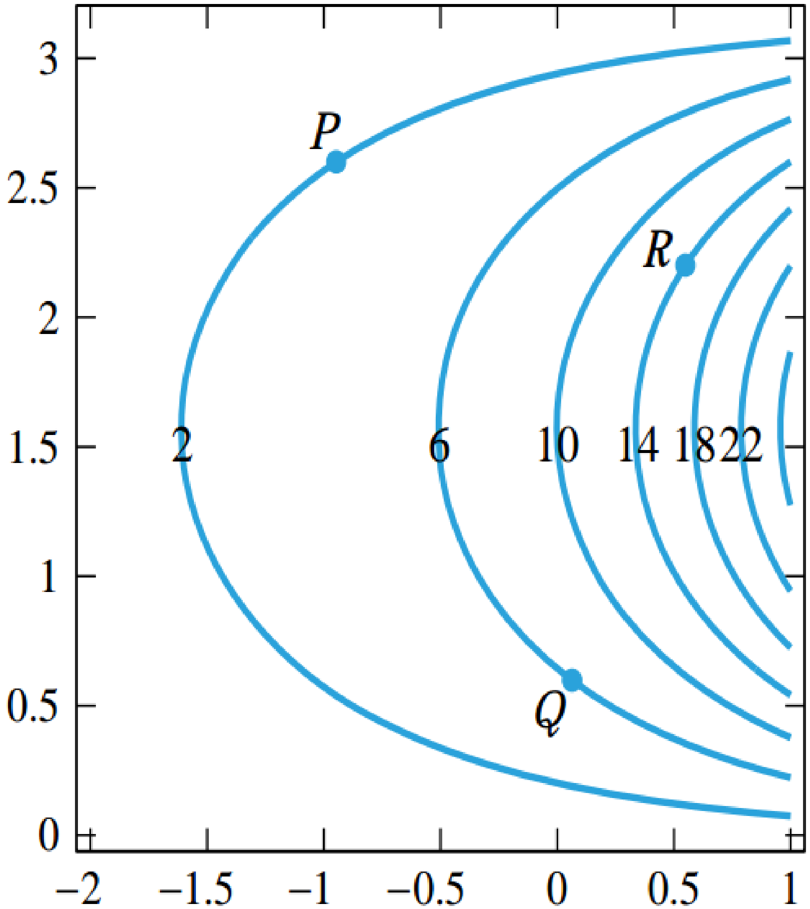
- Gradientes como normais às curvas de nível



Quanto mais próxima as curvas de nível, mais ingrime é a função, isto é, maior a magnitude do gradiente de f

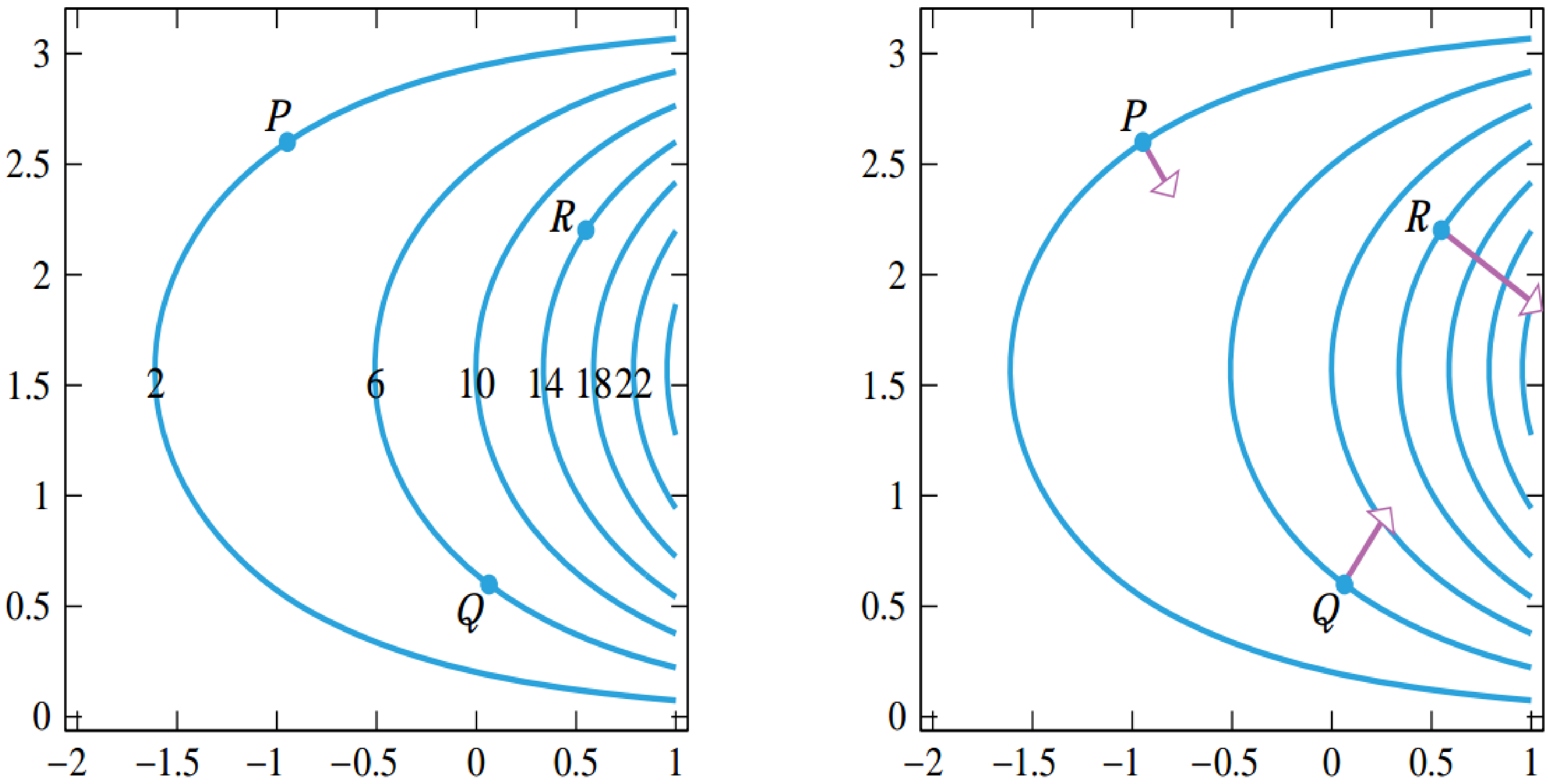
Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Exemplo: Esboce as direções e os sentidos dos vetores gradientes de f nos pontos P, Q e R. Em quais desses três pontos o gradiente tem magnitude máxima? E mínima?



Gradiente

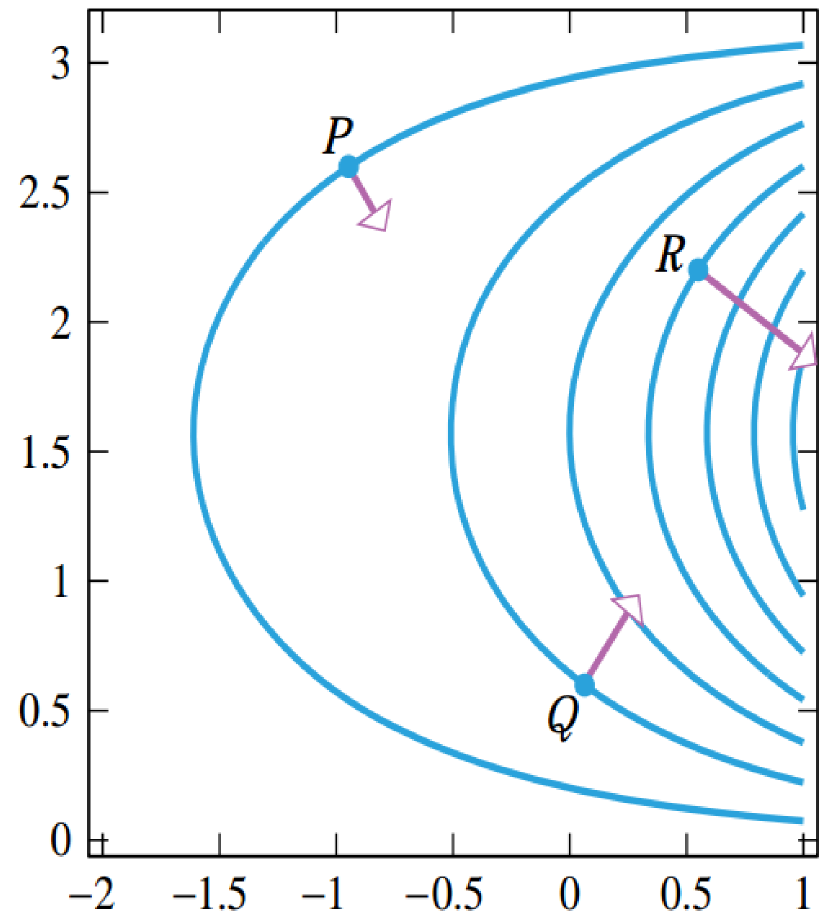
- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Exemplo: Esboce as direções e os sentidos dos vetores gradientes de f nos pontos P, Q e R. Em quais desses três pontos o gradiente tem magnitude máxima? E mínima?



Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Observação: Qual seria a derivada direcional, se escolhêssemos **u**=**T**?

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{u}$$

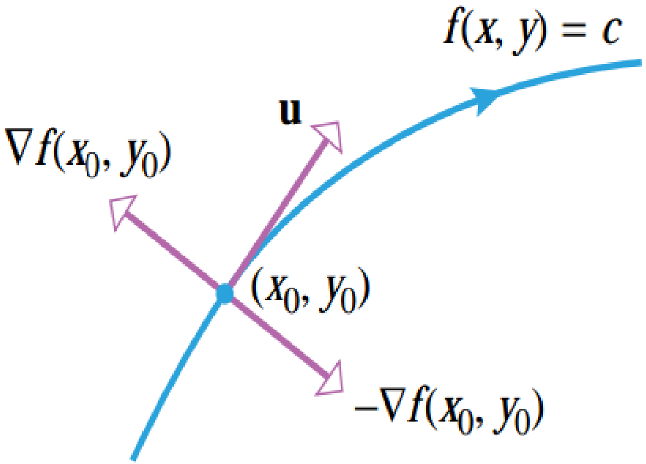


Gradiente

- Gradientes como normais às curvas de nível
  - Observação: Qual seria a derivada direcional, se escolhêssemos **u**=**T**?

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{u}$$

- A função f não está crescendo nem decrescendo



Gradiente

- Aplicação de gradientes
  - Há inúmeras aplicações nas quais o movimento de um objeto deve ser controlado de forma que se mova em direção a um fonte de calor
    - Aplicações médicas: certos equipamentos para diagnósticos são projetados para localizar fontes de calor geradas por tumores ou infecções

Gradiente

- Aplicação de gradientes
  - Exemplo: Uma partícula que procura o calor está localizada no ponto (2, 3) de uma placa lisa de metal, cuja temperatura em um ponto (x, y) é

$$T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2$$

  - Determine uma equação para a trajetória da partícula se ela mover-se continuamente na direção do aumento máximo da temperatura.

Trajetória é dada por uma curva paramétrica.

A partícula está inicialmente no ponto t=0

Gradiente

- Aplicação de gradientes
  - Exemplo: Uma partícula que procura o calor está localizada no ponto (2, 3) de uma placa lisa de metal, cuja temperatura em um ponto (x, y) é

$$T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2$$

  - Determine uma equação para a trajetória da partícula se ela mover-se continuamente na direção do aumento máximo da temperatura.

Trajetória é dada por uma curva paramétrica.

A partícula está inicialmente no ponto t=0

Vetor velocidade v(t) no instante t aponta na direção do gradiente

A partícula se move na direção do aumento máximo da temperatura, isto é, na direção do gradiente de T(x, y)

Gradiente

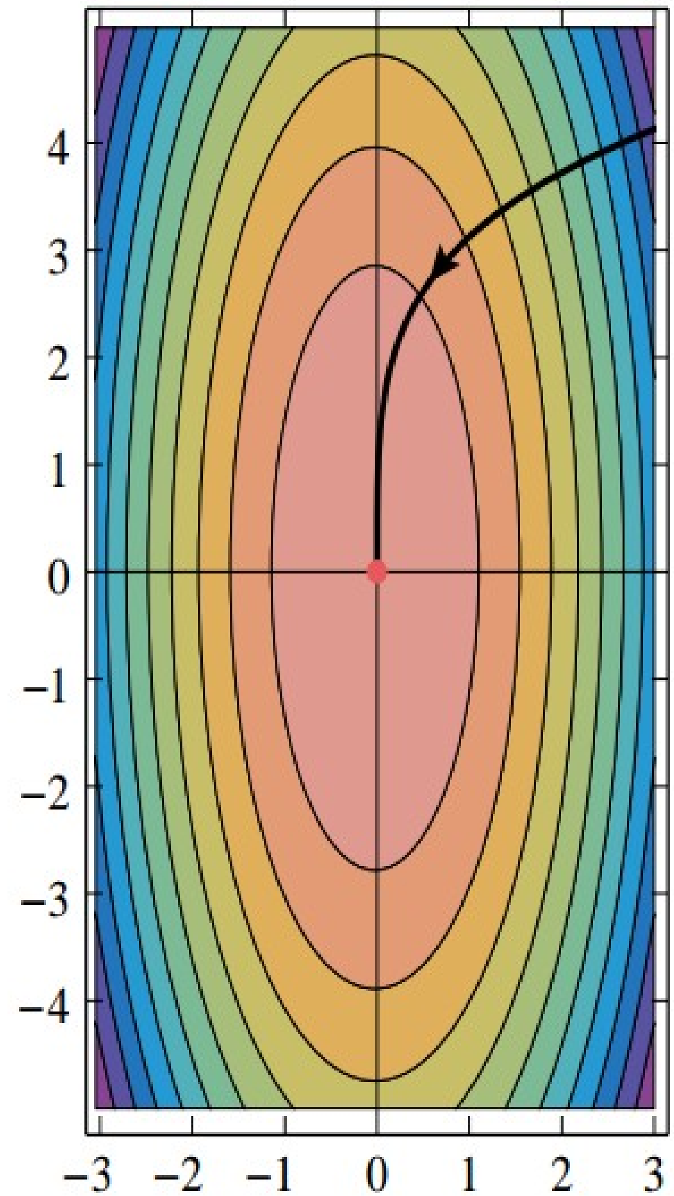
- Aplicação de gradientes
  - Exemplo: Uma partícula que procura o calor está localizada no ponto (2, 3) de uma placa lisa de metal, cuja temperatura em um ponto (x, y) é

$$T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2$$

  - Determine uma equação para a trajetória da partícula se ela mover-se continuamente na direção do aumento máximo da temperatura.

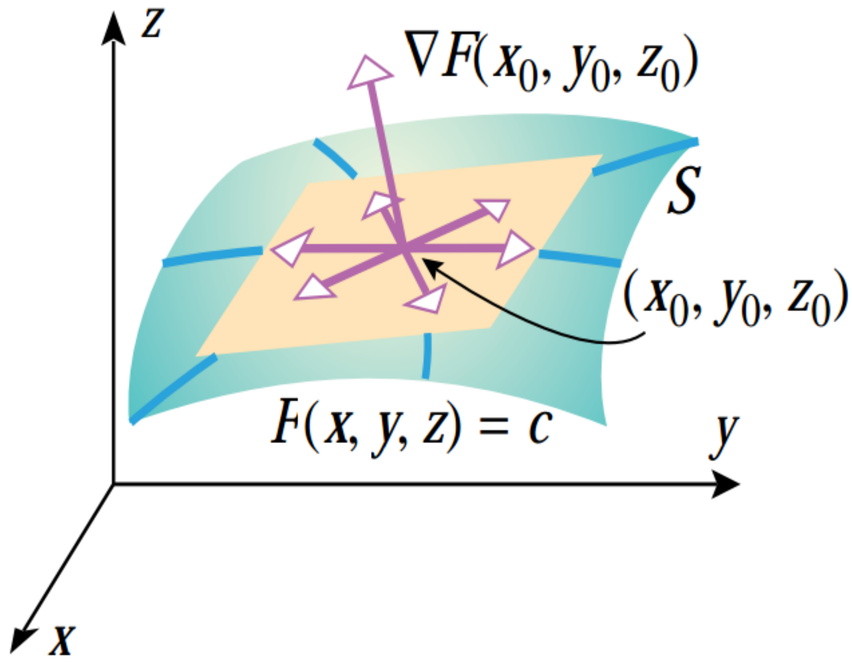
Chega em problema de valor inicial

$$\mathbf{v}(t) = k\nabla T(x, y)$$



Gradiente

- Para funções de três variáveis
  - O gráfico é representado em por curvas de níveis
  - O gradiente é a normal da curva



Gradiente

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

onde A, B e C são as derivadas parciais

- Para funções de três variáveis
  - Exemplo: Considere o elipsoide

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$$

    - Encontre uma equação do plano tangente ao elipsoide no ponto (1, 2, 1) e as equações paramétricas da reta que é normal ao elipsoide no ponto (1, 2, 1)

Gradiente

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
onde A, B e C são as derivadas parciais

- Para funções de três variáveis
  - Exemplo: Considere o elipsoide

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$$

- Encontre uma equação do plano tangente ao elipsoide no ponto (1, 2, 1) e as equações paramétricas da reta que é normal ao elipsoide no ponto (1, 2, 1)
  - Vetor gradiente

$$\nabla F(x, y, z) = \langle F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)\rangle = \langle 2x, 8y, 2z\rangle$$

  - Vetor normal

$$\mathbf{n} = \nabla F(1, 2, 1) = \langle 2, 16, 2\rangle$$

  - Plano tangente

$$2(x-1) + 16(y-2) + 2(z-1) = 0 \quad \text{ou} \quad x + 8y + z = 18$$

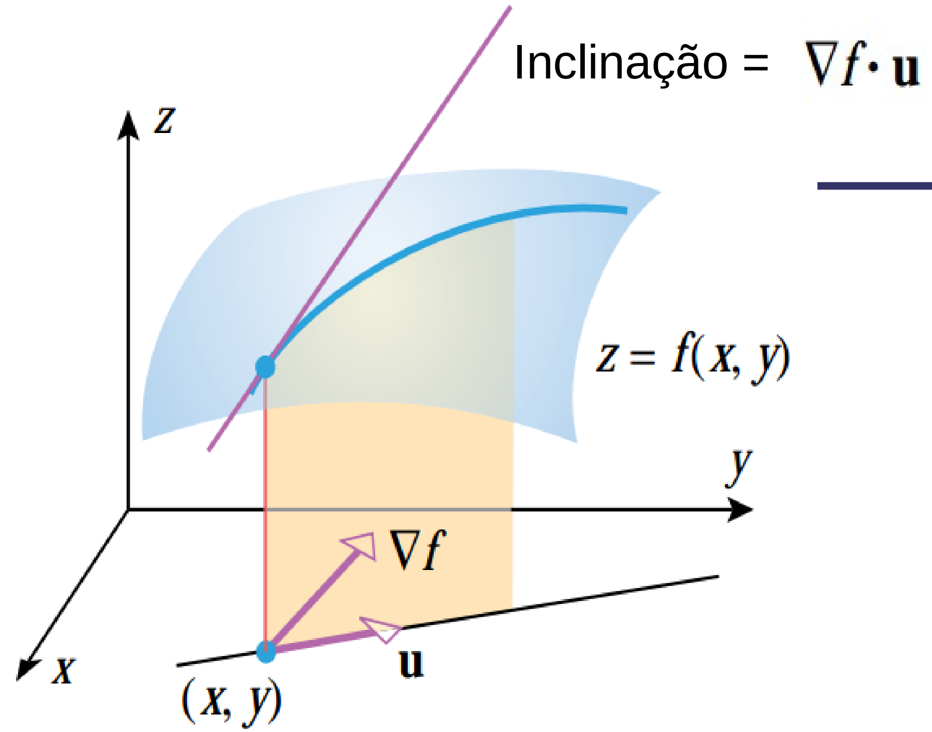
  - Equações parametrcas da reta normal

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 16t, \quad z = 1 + 2t$$

Resumo

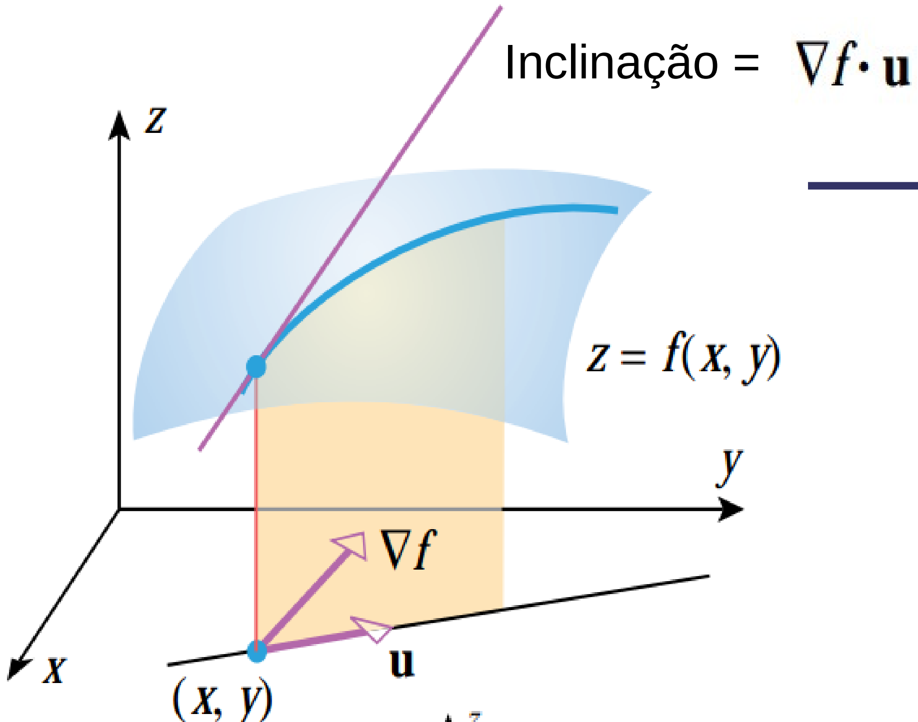
Resumo

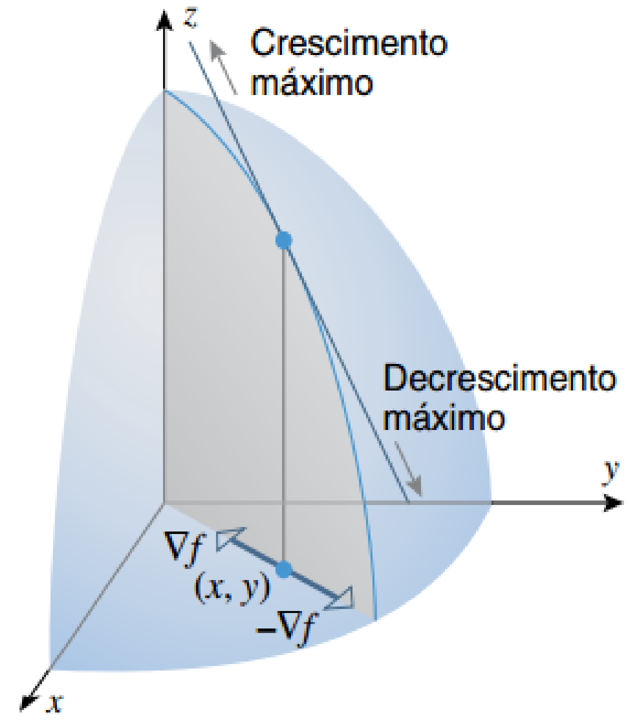
- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção



Resumo

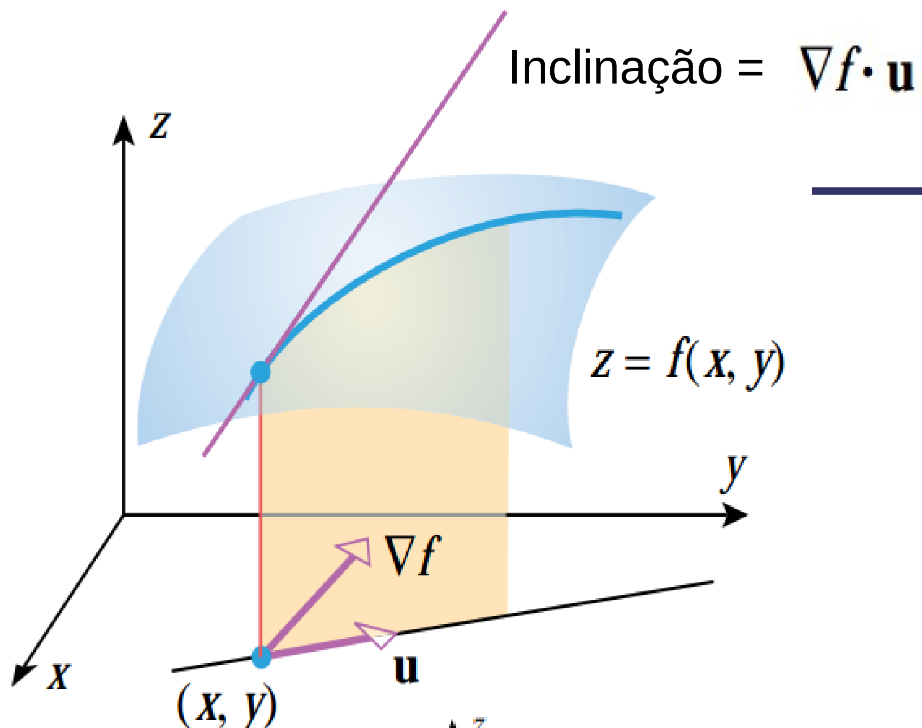
- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção
- Gradiente
  - Inclinação máxima

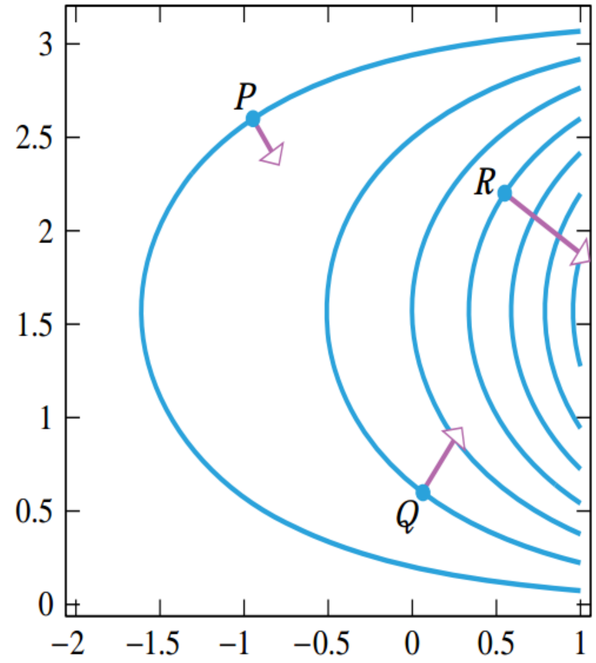


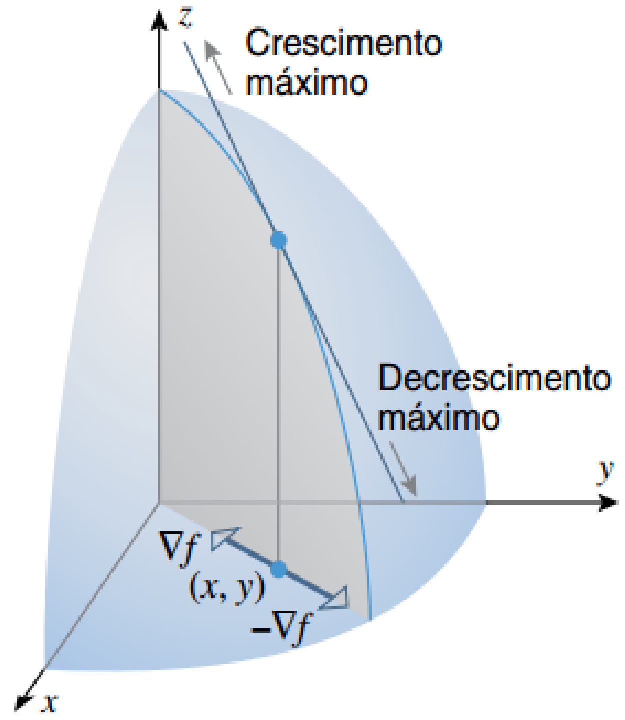


Resumo

- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção
- Gradiente
  - Inclinação máxima
  - É o vetor normal às curva de nível





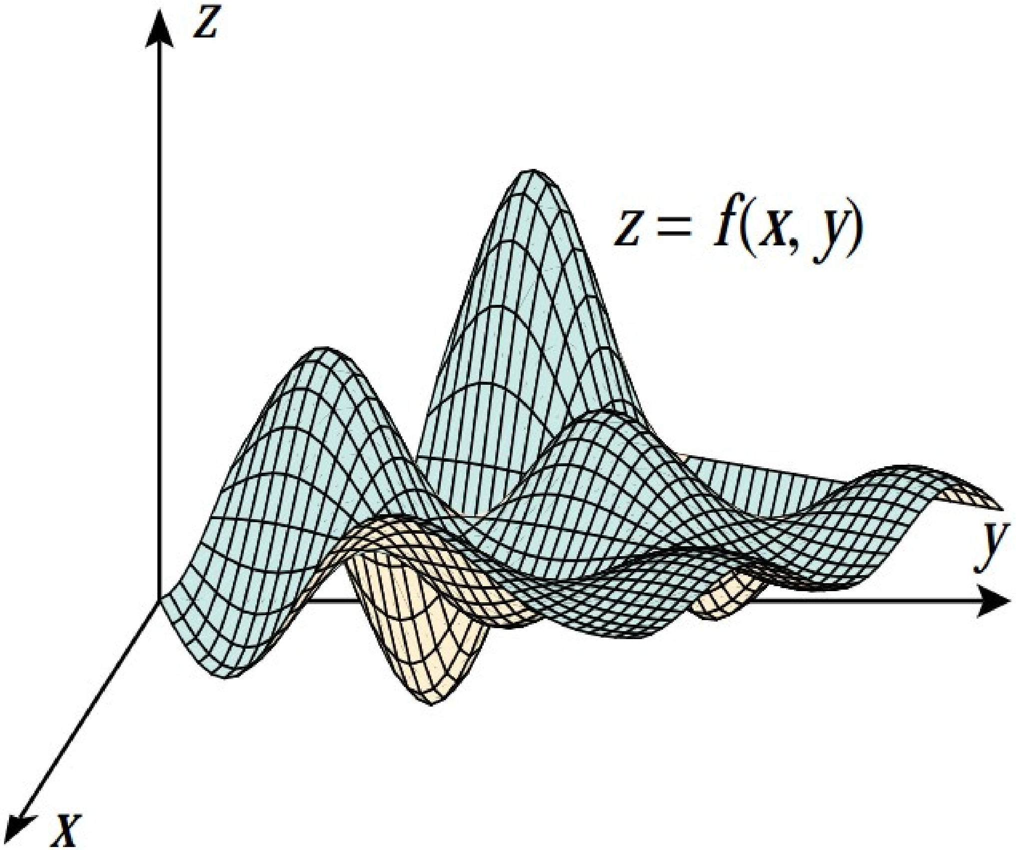


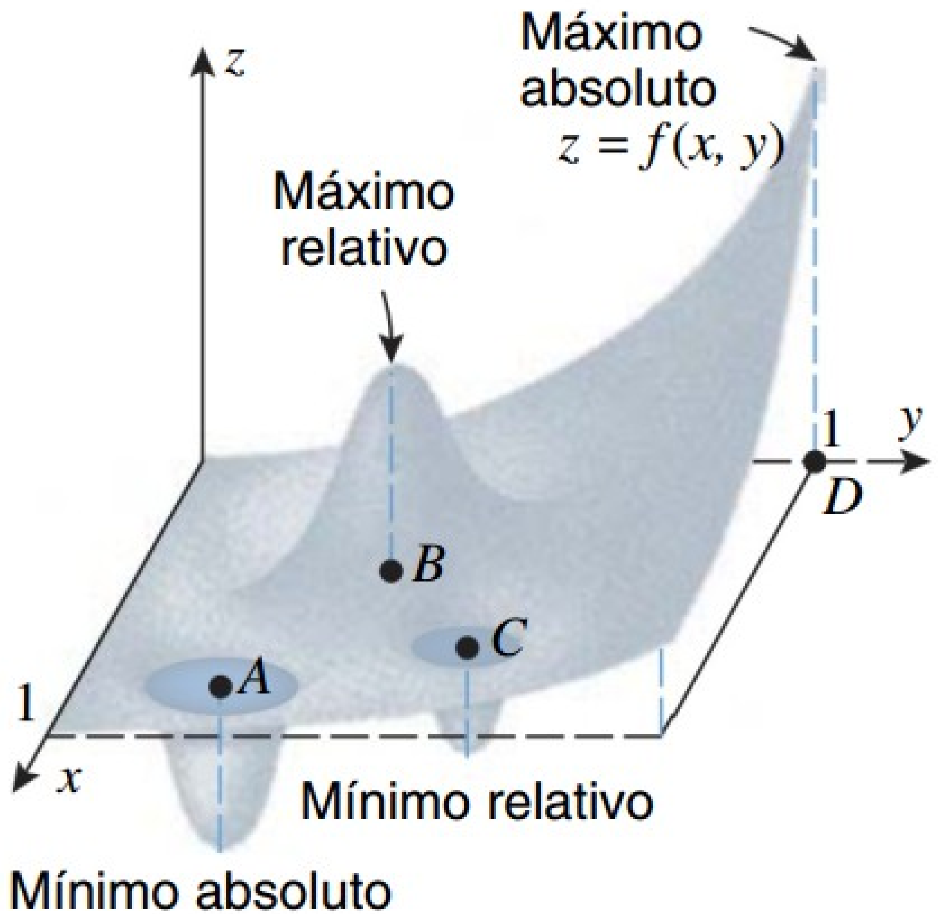
Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 13.6
    - Exercícios de compreensão 13.6
    - 1-18
    - 41-46
    - 47-50
  - Seção 13.7
    - 3-12

Resumo

- Próxima aula:
  - Máximos e mínimos





Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 13.6 e 13.7 (início)