Transformações lineares arbitrárias

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Transformações lineares arbitrárias
  - Exemplos
  - Núcleo e imagem
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Diagonalização
  - Matrizes semelhantes
    - $B = P^{-1}AP$
    - Existem propriedades invariantes por semelhança
  - Processo de diagonalização
    - Achar n autovalores e n autovetores
  - Potências de uma matriz
    - A matriz diagonal semelhante D, e a matriz P que diagonaliza A, diminuem o custo do cálculo de potencias altas
  - Multiplicidades geométrica e algébrica
    - Dimensão do autoespaço e multiplicidade no polinômio
    - Para A ser diagonalizável, é preciso que sejam iguais

Transformações lineares arbitrárias

Transformações lineares arbitrárias

- Definição 1
  - Se $T : V \to W$ for uma função de um espaço vetorial V num espaço vetorial W,
  - então T é denominada **transformação linear** de V em W se as duas propriedades seguintes forem válidas com quaisquer vetores **u** e **v** em V e qualquer escalar k

$$\text{(i)}\quad T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) \qquad \textbf{[Homogeneidade]}$$

$$\text{(ii)}\quad T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \qquad \textbf{[Aditividade]}$$

  - No caso especial em que V = W, a transformação linear é denominada **operador linear** do espaço vetorial V

Transformações lineares arbitrárias

- Propriedades
  - Podem ser usadas de forma combinada
    - Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ forem vetores em V e k_1 e k_2 escalares quaisquer, então

$$T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2)$$

    - De forma geral: Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ forem vetores em V e k_1, k_2,…, k_n escalares quaisquer, então

$$T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_rT(\mathbf{v}_r)$$

Transformações lineares arbitrárias

- Teorema 1:
  - Se $T : V \to W$ for uma transformação linear, então

    (a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

    (b) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$, para quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V

Transformações lineares arbitrárias

- Teorema 1:
  - Se T : V → W for uma transformação linear, então

    (a) T(**0**) = **0**.

    (b) T(**u** - **v**) = T(**u**) - T(**v**), para quaisquer **u** e **v** em V
- Demonstração (a)
  - Seja **u** um vetor qualquer em V.
  - A partir da propriedade de homogeneidade, tem-se

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Observar que toda transformação linear tem T(**0**) = **0** e pode ser usado para verificar se uma transformação é linear ou não!

Transformações lineares arbitrárias

- Teorema 1:
  - Se T : V → W for uma transformação linear, então

    (a) T(**0**) = **0**.

    (b) T(**u** - **v**) = T(**u**) - T(**v**), para quaisquer **u** e **v** em V
- Demonstração (b)
  - Reescrevendo

Com isso, tente provar que T(-**v**) = -T(**v**) em casa

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= T\big(\mathbf{u}+(-1)\mathbf{v}\big) \\ &= T(\mathbf{u})+(-1)T(\mathbf{v}) \\ &= T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Transformações lineares arbitrárias

- Exemplo: A transformação nula
  - Sejam V e W dois espaços vetoriais quaisquer.
  - A aplicação T : V → W tal que T(**v**) = **0**, qualquer que seja o vetor **v** em V, é a transformação linear denominada **transformação nula** ou **zero**.
  - Para T ser linear, observe que

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

  - Portanto

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$$

Propriedade de aditividade

Propriedade de homogeneidade

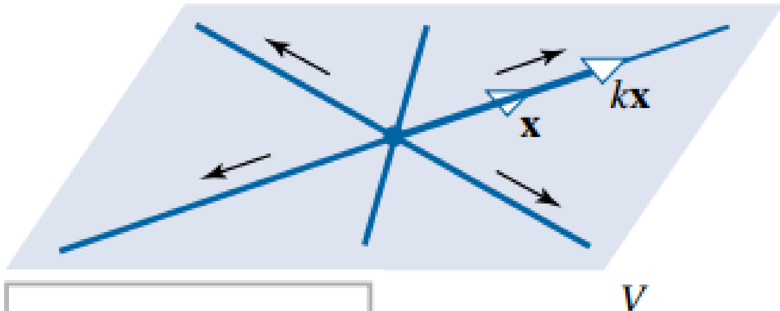
Transformações lineares arbitrárias

- Exemplo: Operadores dilatação e contração
  - Se V for um espaço vetorial e k um escalar qualquer.
  - Aplicação T : V $\rightarrow$ V dada por T(**x**) = k**x** (para k>0) é um operador linear de V, pois, dados um escalar c e vetores **u** e **v** em V quaisquer, então

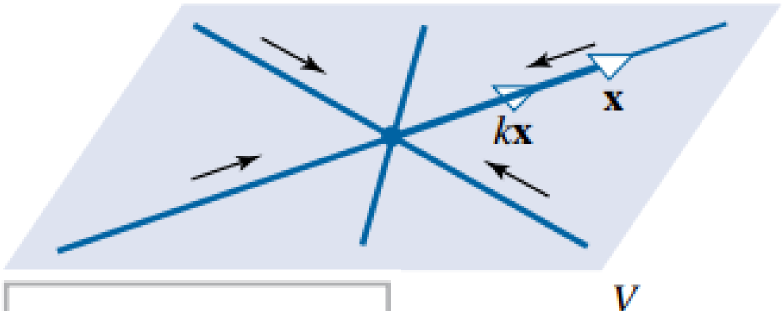
$$T(c\mathbf{v}) = k(c\mathbf{v}) = c(k\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v} = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

  - Dizemos que T é uma contração de V de fator k se 0 < k < 1 e uma dilatação de V de fator k se k > 1



Dilatação de V



Contração de V

Transformações lineares arbitrárias

- Exemplo: Produto interno
  - Dados um espaço com produto interno V e um vetor $\mathbf{v}_0$ qualquer fixado em V, seja $T : V \rightarrow R$ a transformação

$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

    que associa a cada vetor **x** o seu produto interno com $\mathbf{v}_0$.
  - Essa transformação é linear, pois, dados qualquer escalar k e quaisquer vetores **u** e **v** em V, das propriedades de produtos internos decorre que

$$T(k\mathbf{v}) = \langle k\mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = k\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = kT(\mathbf{v})$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

Transformações lineares arbitrárias

- Exercício: Transformações de espaços matriciais
  - Seja M_{nn} o espaço vetorial das matrizes n×n.
  - Determine se a transformações são lineares.

(a) $T_1(A) = A^T$ (b) $T_2(A) = \det(A)$

Transformações lineares arbitrárias

- Exercício: Transformações de espaços matriciais
  - Seja M_{nn} o espaço vetorial das matrizes n×n.
  - Determine se a transformações são lineares.

(a) $T_1(A) = A^T$ (b) $T_2(A) = \det(A)$

- Demonstração (a) – É linear

$$T_1(kA) = (kA)^T = kA^T = kT_1(A)$$
$$T_1(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T_1(A) + T_1(B)$$

- Contraexemplo (b) – Não é linear

$$T_2(kA) = \det(kA) = k^n \det(A) = k^n T_2(A)$$

Transformações lineares arbitrárias

- Teorema 2:
  - Se $V \to W$ for uma transformação linear, V um espaço vetorial de dimensão finita e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V, então a imagem de qualquer vetor $\mathbf{v}$ em V pode ser escrita como

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

    em que $c_1, c_2, \dots, c_n$ são os coeficientes que expressam $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores em S.

Transformações lineares arbitrárias

- Teorema 2:
  - Se V → W for uma transformação linear, V um espaço vetorial de dimensão finita e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V, então a imagem de qualquer vetor **v** em V pode ser escrita como

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_n T(\mathbf{v}_n)$$

    em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são os coeficientes que expressam **v** como uma combinação linear dos vetores em S.
- Demonstração
  - Escreva **v** e use a linearidade de T

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Transformações lineares arbitrárias

- Exercício: Calculando com imagens de vetores de base
  - Considere a base S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

  - Seja T : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

  - Encontre uma fórmula para T(x_1, x_2, x_3) e use essa fórmula para calcular T(2, -3, 5).

Processo: Escreva x
em função da base e depois
aplique a transformação

Transformações lineares arbitrárias

- Exercício: Calculando com imagens de vetores de base
  - Considere a base S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

  - Seja T : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

  - Encontre uma fórmula para T(x_1, x_2, x_3) e use essa fórmula para calcular T(2, -3, 5).
    - Escrevendo **x** em função da base

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 &= x_2 \\ c_1 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0) \\ &= x_3\mathbf{v}_1 + (x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Transformações lineares arbitrárias

- Exercício: Calculando com imagens de vetores de base
  - Considere a base S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

  - Seja T : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

  - Encontre uma fórmula para T(x_1, x_2, x_3) e use essa fórmula para calcular T(2, -3, 5).
    - Aplicando a transformação

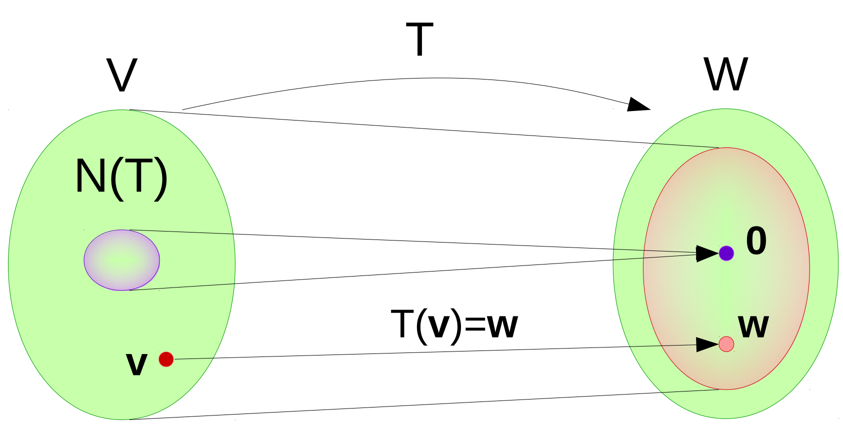
$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= x_3 T(\mathbf{v}_1) + (x_2 - x_3)T(\mathbf{v}_2) + (x_1 - x_2)T(\mathbf{v}_3) \\ &= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_2)(4, 3) \\ &= (4x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

    - Calculando T(2, -3, 5)

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

Transformações lineares arbitrárias

- Definição 2:
  - Seja T : V $\rightarrow$ W uma transformação linear.
  - O conjunto dos *vetores em V* que T transforma em 0 é denominado **núcleo** de T e é denotado por $\mathcal{N}$(T), Nuc(T) ou Ker(T).
  - O conjunto de todos os *vetores em W* que são imagem por T de pelo menos um vetor em V é denominado **imagem** de T e é denotado por $\mathcal{R}$(T) ou Im(T).



Transformações lineares arbitrárias

- Núcleo e imagem
  - Seja A uma matriz m×n.
    - *O espaço nulo* de A consiste em todos os vetores **x** em $\mathbb{R}^n$ tais que A**x**=**0**
    - O *espaço coluna* de A consiste em todos os vetores **b** em $\mathbb{R}^m$ para os quais existe pelo menos um vetor **x** em $\mathbb{R}^n$ tal que A**x**=**b**
  - Como transformações matriciais
    - *O espaço nulo* de A consiste em todos os vetores em $\mathbb{R}^n$ que a multiplicação por A transforma em **0**
    - O *espaço coluna* de A consiste em todos os vetores em $\mathbb{R}^m$ que são imagem de pelo menos um vetor em $\mathbb{R}^n$ na multiplicação por A

Transformações lineares arbitrárias

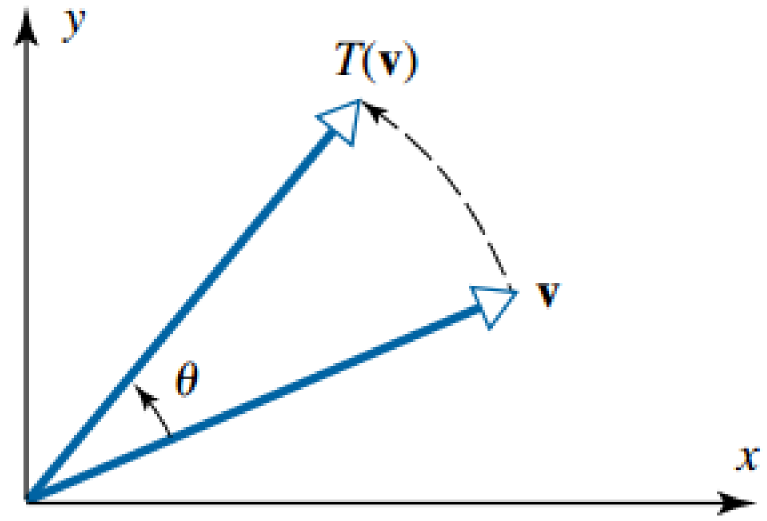
- Núcleo e imagem
  - Exemplo: Transformação matricial
    - Se $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ for a multiplicação pela matriz A de tamanho $m \times n$
    - O núcleo de T_A é o espaço nulo de A
    - A imagem de T_A é o espaço coluna de A

Transformações lineares arbitrárias

- Núcleo e imagem
  - Exemplo: Transformação nula
    - Seja $T : V \rightarrow W$ a transformação nula.
    - Como T transforma cada vetor em V em $\mathbf{0}$, segue que $Nuc(T) = V$.
    - Como $\mathbf{0}$ é a única imagem por T de vetores em V, segue que $Im(T) = \{\mathbf{0}\}$.

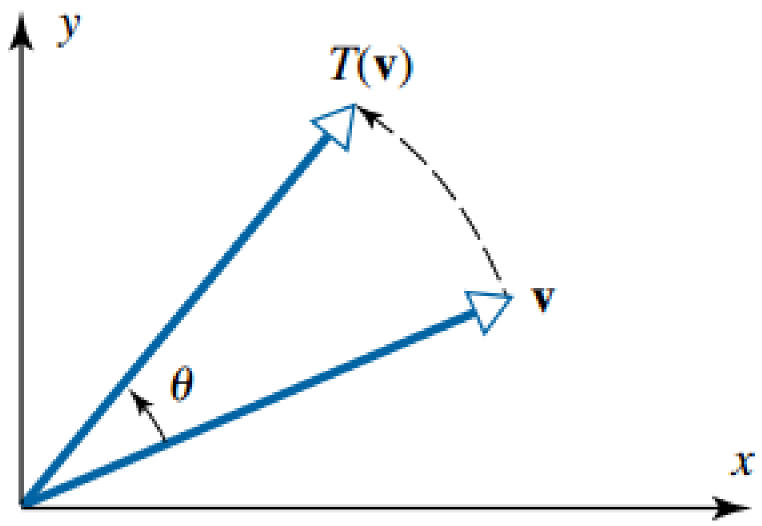
Transformações lineares arbitrárias

- Núcleo e imagem
  - Exercício: Qual o núcleo e a imagem da rotação?
    - Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que gira cada vetor no plano xy pelo ângulo θ.



Transformações lineares arbitrárias

- Núcleo e imagem
  - Exercício: Qual o núcleo e a imagem da rotação?
    - Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que gira cada vetor no plano xy pelo ângulo θ.
    - Como *cada* vetor no plano xy pode ser obtido pela rotação de algum vetor pelo ângulo θ, segue que $Im(T) = \mathbb{R}^2$.
    - Além disso, o único vetor que gira em **0** é **0**, portanto, $Nuc(T) = \{\mathbf{0}\}$.



Transformações lineares arbitrárias

- Propriedades do núcleo e imagem
  - Teorema 3:
    - Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.

      (a) O núcleo de T é um subespaço de V.

      (b) A imagem de T é um subespaço de W.

Para mostrar que são subespaços, precisamos mostrar que contém pelo menos um vetor e que é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

Transformações lineares arbitrárias

- Propriedades do núcleo e imagem
  - Teorema 3:
    - Seja T : V → W uma transformação linear.

      (a) O núcleo de T é um subespaço de V.

      (b) A imagem de T é um subespaço de W.

Para mostrar que são subespaços, precisamos mostrar que contém pelo menos um vetor e que é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

  - Demonstração (a)

T(**0**) = **0**

    - Pelo Teorema 1(a), o vetor **0** está em Nuc(T).
    - Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ vetores em Nuc(T) e k um escalar quaisquer. Então tem-se

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

      de modo que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ está em Nuc(T). Também tem-se

$$T(k\mathbf{v}_1) = kT(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

      de modo que $k\mathbf{v}_1$ está em Nuc(T).

Transformações lineares arbitrárias

- Propriedades do núcleo e imagem
  - Teorema 3:
    - Seja T : V → W uma transformação linear.

      (a) O núcleo de T é um subespaço de V.

      (b) A imagem de T é um subespaço de W.

Para mostrar que são subespaços, precisamos mostrar que contém pelo menos um vetor e que é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

  - Demonstração (b)
    - Pelo Teorema 1(a), o vetor **0** está em Im(T).
    - Se $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ forem vetores em Im(T) e k for um escalar, então existem vetores **a** e **b** em V com os quais

$$T(\mathbf{a}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{b}) = k\mathbf{w}_1$$

    - Porém, como $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ estão em Im(T), existem vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ em V tais que

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$$

Transformações lineares arbitrárias

- Propriedades do núcleo e imagem
  - Teorema 3:
    - Seja T : V → W uma transformação linear.

      (a) O núcleo de T é um subespaço de V.

      (b) A imagem de T é um subespaço de W.

Para mostrar que são subespaços, precisamos mostrar que contém pelo menos um vetor e que é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

  - Demonstração (b)
    - Para os vetores **a** = $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e **b** = $k\mathbf{v}_1$ que satisfazem as primeiras equações, tem-se que

$$T(\mathbf{a}) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

$$T(\mathbf{b}) = T(k\mathbf{v}_1) = kT(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{w}_1 \quad \blacktriangleleft$$

Transformações lineares arbitrárias

- Posto e nulidade
  - Definição 3:
    - Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.
    - Se a imagem de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é o posto de T, denotado por posto(T) ou pos(T).
    - Se o núcleo de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é a nulidade de T, denotado por nulidade(T) ou nul(T).

Transformações lineares arbitrárias

- Posto e nulidade
  - Teorema 4: Teorema da dimensão para transformações lineares
    - Se $T : V \rightarrow W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão n num espaço vetorial W, então

$$\text{pos}(T) + \text{nul}(T) = n$$

Transformações lineares arbitrárias

- Posto e nulidade
  - Teorema 4: Teorema da dimensão para transformações lineares
    - Se T : V → W for uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão n num espaço vetorial W, então

$$\mathrm{pos}(T) + \mathrm{nul}(T) = n$$

    - No caso especial em que A, for uma matriz m×n e $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a multiplicação por A, o núcleo de T_A é o espaço nulo de A, e a imagem de T_A é o espaço coluna de A, então

$$\mathrm{pos}(T_A) + \mathrm{nul}(T_A) = n$$

Resumo

Resumo

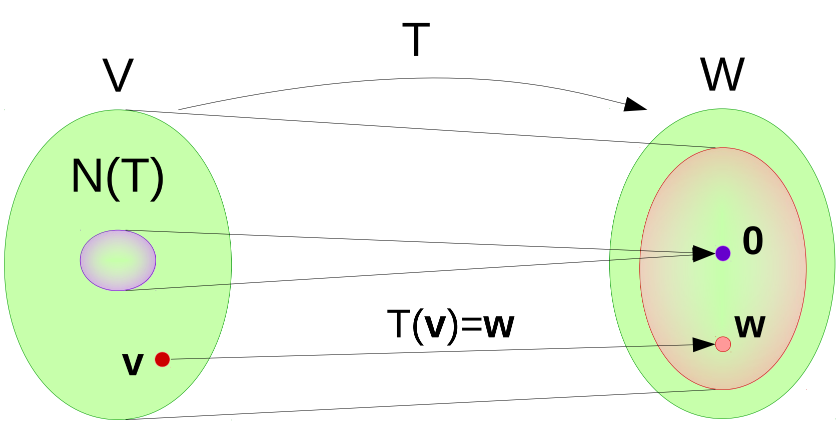
- Transformações lineares
  - Propriedades

(i) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ **[Homogeneidade]**

(ii) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ **[Aditividade]**

  - Nuc(T) = {**v** ∈ V; T(**v**) = **0**}
  - Im(T): {**w** ∈ W; T(**v**) = **w**, para algum **v** ∈ V}
  - Posto e nulidade

$$\mathrm{pos}(T) + \mathrm{nul}(T) = n$$

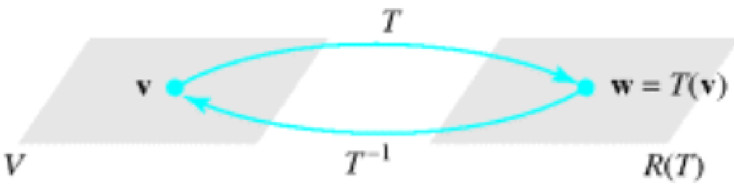


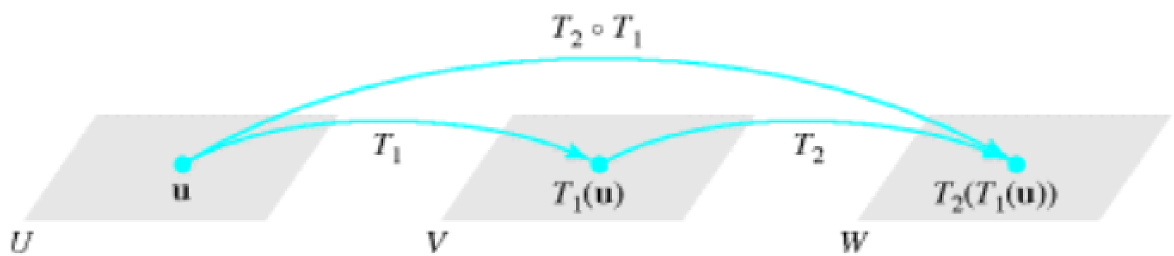
Resumo

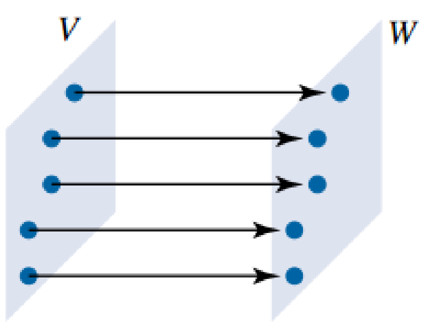
- Exercícios de fixação:
  - Anton seção 8.1
    - 1-6
    - 9-11
    - 16
    - 20(b) e 21(b)
    - 23 e 24

Resumo

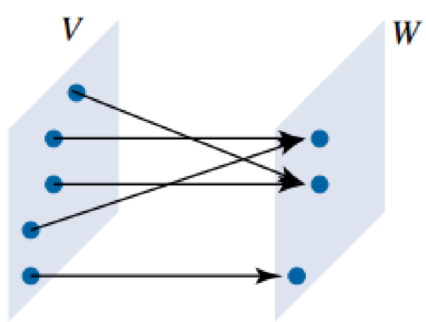
- Próxima aula:
  - Isomorfismo
  - Composições
  - Transformações inversas



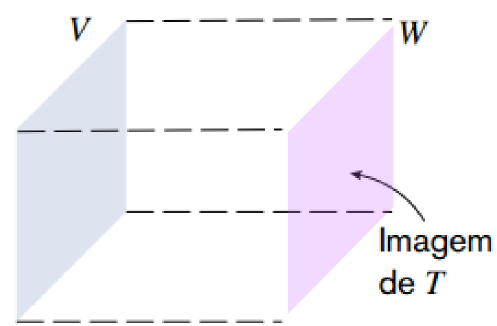




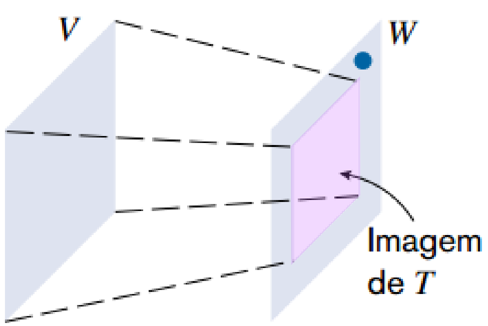
Injetora



Não injetora



Sobrejetora



Não sobrejetora

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 8.1
  - DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
    - Capítulo 6