Isomorfismo, composições e transformações inversas

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Isomorfismo
  - Injetora e sobrejetora
  - Dimensão e transformações lineares
  - Isomorfismo
- Composições
- Transformações inversas
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

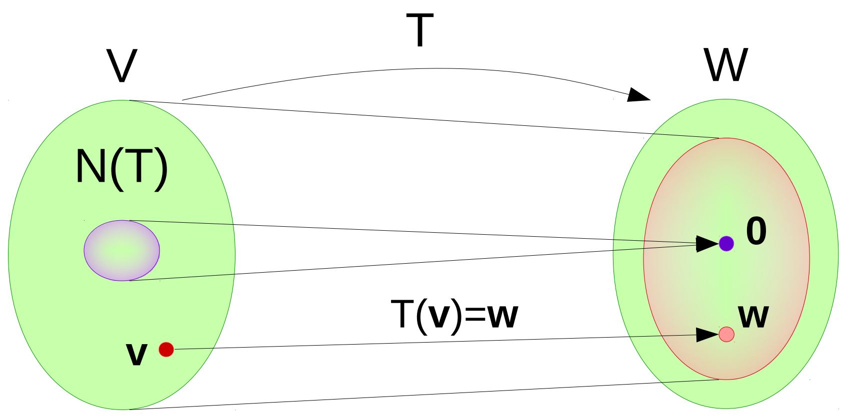
Resumo

- Transformações lineares
  - Propriedades

$$\text{(i)} \quad T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v}) \qquad \textbf{[Homogeneidade]}$$

$$\text{(ii)} \quad T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \qquad \textbf{[Aditividade]}$$

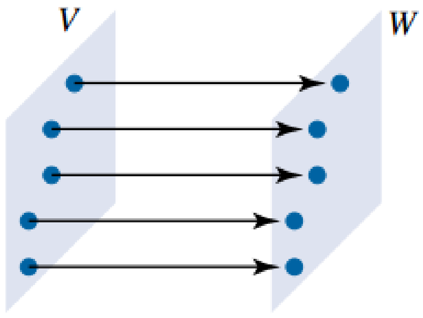
  - Nuc(T) = {**v** ∈ V; T(**v**) = **0**}
  - Im(T): {**w** ∈ W; T(**v**) = **w**, para algum **v** ∈ V}



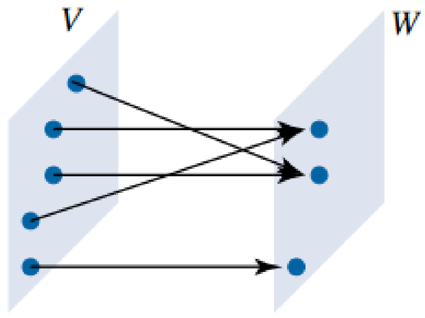
Isomorfismo

Isomorfismo

- Se T : V → W for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W.
  - Definição 1:
    - Dizemos que T é uma transformação **injetora** se T transformar vetores distintos de V em *vetores distintos* de W



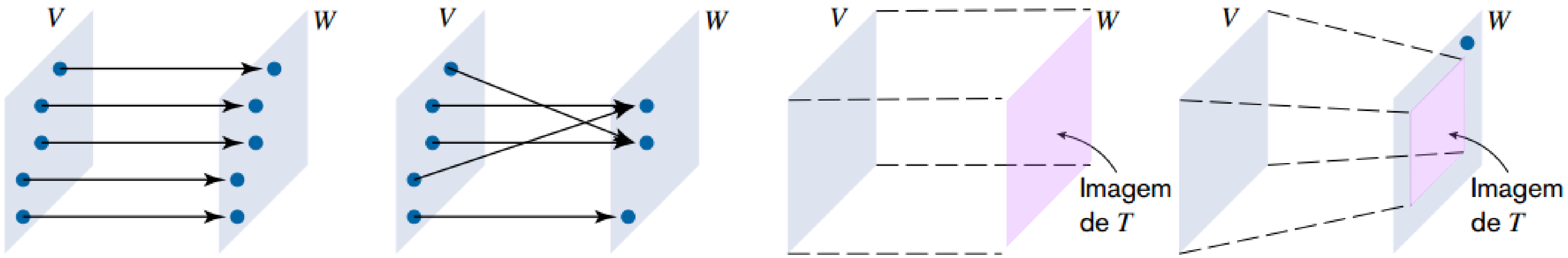
Injetora



Não injetora

Isomorfismo

- Se T : V → W for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W.
  - Definição 1:
    - Dizemos que T é uma transformação **injetora** se T transformar vetores distintos de V em *vetores distintos* de W
  - Definição 2:
    - Dizemos que T é uma transformação **sobrejetora** ou, simplesmente, **sobre** W, se qualquer vetor em W for a imagem de pelo *menos um vetor* em V.



Injetora | Não injetora | Sobrejetora | Não sobrejetora

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Teorema 1:
    - Se $T : V \rightarrow W$ for uma transformação linear, as afirmações seguintes são equivalentes.

      (a) T é injetora.

      (b) $Nuc(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Teorema 1:
    - Se $T : V \rightarrow W$ for uma transformação linear, as afirmações seguintes são equivalentes.

      (a) T é injetora.

      (b) $Nuc(T) = \{\mathbf{0}\}$.
  - Demonstração (a)⇒(b)
    - Como T é linear, sabemos que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ pelo Teorema 1(a)[aula passada].
    - Como T é injetora, não pode haver outros vetores em V que são transformados em $\mathbf{0}$, de modo que $Nuc(T) = \{\mathbf{0}\}$

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Teorema 1:
    - Se T : V $\rightarrow$ W for uma transformação linear, as afirmações seguintes são equivalentes.

      (a) T é injetora.

      (b) Nuc(T) = {**0**}.
  - Demonstração (b)⇒(a)
    - Vamos supor que Nuc(T) = {**0**}. Dados vetores distintos **u** e **v** em V, temos **u** - **v** ≠ **ç**. Isso implica que T(**u** - **v**) ≠ **0** pois, caso contrário, Nuc(T) conteria um vetor não nulo.
    - Como T é linear, segue que

$$T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$$

      de modo que T transforma vetores distintos de V em vetores distintos de W, ou seja, é injetora.

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Teorema 2:
    - Se V for um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ for um operador linear, as afirmações seguintes são equivalentes.

      (a) T é injetora.

      (b) $Nuc(T) = \{\mathbf{0}\}$.

      (c) T é sobrejetor, ou seja, $Im(T) = V$.

Mudou de W para V

Falta provar que (b) e (c) são equivalentes.
DICA: Teorema 4 da aula passada

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Exemplo: Dilatações e contrações
    - Se V for um espaço vetorial de dimensão finita e c algum escalar não nulo, então o operador linear $T : V \to V$ definido por $T(\mathbf{v})=c\mathbf{v}$ é injetor e sobre.
      - O operador T é sobrejetor (e, portanto, injetor), pois um vetor **v** qualquer em V é a imagem do vetor $(1/c)\mathbf{v}$.

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Exemplo: Operadores matriciais
    - Se $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for o operador matricial $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, então T_A é injetora e sobrejetora se, e somente se, A é invertível

Prova no
Teorema 4.10.1
Anton

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Exercício: Operadores de translação
    - Seja V = $\mathbb{R}^\infty$ o espaço de sequências e considere o operador de translação de V definido por

$$T_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$

$$T_2(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots)$$

(a) Mostre que T_1 é injetor, mas não sobre.

(b) Mostre que T_2 é sobre, mas não injetor.

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Exercício: Operadores de translação
    - Seja V = $\mathbb{R}^\infty$ o espaço de sequências e considere o operador de translação de V definido por

$$T_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$

$$T_2(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots)$$

(a) Mostre que T_1 é injetor, mas não sobre.

- O operador T_1 é injetor porque sequências distintas de $\mathbb{R}^\infty$ claramente têm imagens distintas.
- Esse operador não é sobrerejetor porque, por exemplo, nenhum vetor em $\mathbb{R}^\infty$ é aplicado na sequência (1, 0, 0, . . . , 0, . . .).

Isomorfismo

- Injetora e sobrejetora
  - Exercício: Operadores de translação
    - Seja V = $\mathbb{R}^\infty$ o espaço de sequências e considere o operador de translação de V definido por

$$T_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$

$$T_2(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots)$$

(b) Mostre que T_2 é sobre, mas não injetor.

- O operador T_2 não é injetor porque, por exemplo, ambos os vetores (1, 0, 0, … , 0, …) e (2, 0, 0, … , 0, …) são transformados em (0, 0, … , 0, …).
- Esse operador é sobrejetor porque qualquer sequência de números reais pode ser obtida com uma escolha apropriada dos números u_2, u_3, … , u_n, … .

Isomorfismo

- Dimensão e transformações lineares
  - Fatos importantes seguintes sobre uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ no caso em que V e W são de dimensão finita
    - Se $\dim(W) < \dim(V)$, então T não pode ser injetora.
    - Se $\dim(V) < \dim(W)$, então T não pode ser sobrejetora.

Informalmente:
Se uma transformação linear transformar um espaço “maior” num espaço “menor”, então alguns pontos do espaço “maior” devem ter a mesma imagem;
O outro é semelhante.

Isomorfismo

iso = "idêntico"
morfo = "forma"

- Definição 3:
  - Se uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ for injetora e sobrejetora, dizemos que T é um isomorfismo e que os espaços vetoriais V e W são isomorfos.

Espaços isomorfos têm a mesma "forma algébrica", mesmo se consistirem em objetos de tipos distintos.

Operação em P_2	**Operação em R^3**
$3(1 - 2x + 3x^2) = 3 - 6x + 9x^2$	$3(1, -2, 3) = (3, -6, 9)$
$(2 + x - x^2) + (1 - x + 5x^2) = 3 + 4x^2$	$(2, 1, -1) + (1, -1, 5) = (3, 0, 4)$
$(4 + 2x + 3x^2) - (2 - 4x + 3x^2) = 2 + 6x$	$(4, 2, 3) - (2, -4, 3) = (2, 6, 0)$

Isomorfismo

Esse é um dos mais importantes resultados da Álgebra Linear

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \to \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \to \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

- Demonstração
  - Seja V um espaço vetorial real de dimensão n.
  - Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ uma base qualquer de V e

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \qquad (1)$$

    a representação de um vetor **u** em V como uma combinação linear dos vetores da base
  - Defina a transformação $T : V \to \mathbb{R}^n$ por

$$T(\mathbf{u}) = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \qquad (2)$$

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$
- Demonstração
  - **Linear**:

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

Propriedades!

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \to \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

- Demonstração
  - **Linear**: Sejam **u** e **v** dois vetores de V e *a* um escalar e sejam

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \qquad (3)$$

as representações de **u** e **v** como combinações lineares dos vetores da base.

  - Segue de (1) que

$$\begin{aligned} T(a\mathbf{u}) &= T(ak_1\mathbf{v}_1 + ak_2\mathbf{v}_2 + \cdots + ak_n\mathbf{v}_n) \\ &= (ak_1, ak_2, \ldots, ak_n) \\ &= a(k_1, k_2, \ldots, k_n) = aT(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

- Demonstração
  - **Linear**: Sejam **u** e **v** dois vetores de V e *a* um escalar e sejam

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \qquad (3)$$

as representações de **u** e **v** como combinações lineares dos vetores da base.

  - E segue de (2) que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\big((k_1+d_1)\mathbf{v}_1 + (k_2+d_2)\mathbf{v}_1 + \cdots + (k_n+d_n)\mathbf{v}_n\big) \\ &= (k_1+d_1, k_2+d_2, \ldots, k_n+d_n) \\ &= (k_1, k_2, \ldots, k_n) + (d_1, d_2, \ldots, d_n) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$
- Demonstração
  - **Injetora**:

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \to \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

Se **u** e **v** forem distintos em V, então suas imagens em $\mathbb{R}^n$ também são

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \to \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

- Demonstração
  - **Injetora**: Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ segue de (3) que $k_i \neq d_i$ para pelo menos um i.
  - Assim,

$$T(\mathbf{u}) = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \neq (d_1, d_2, \ldots, d_n) = T(\mathbf{v})$$

mostrando que **u** e **v** têm imagens distintas por T.

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$
- Demonstração
  - **Sobrejetora**:

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \to \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

Se existe v em V que T(v)=w para todo w em $\mathbb{R}^n$

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Para provar que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, devemos encontrar uma **transformação linear** $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ que seja **injetora** e **sobre**.

- Demonstração
  - **Sobrejetora**: Para um vetor qualquer **w** em $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{w} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

  - Segue de (2) que **w** é a imagem por T do vetor

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

Isomorfismo

- Teorema 3:
  - Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Observação:
Isso é uma aplicação de coordenadas

Isomorfismo

- Exemplo: O isomorfismo natural de P_{n-1} em R^n
  - Isomorfismo natural transforma a base natural $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ de P^{n-1} na base canônica de R^n

$$
\begin{array}{lcl}
1 = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} & \xrightarrow{T} & (1, 0, 0, \ldots, 0) \\
x = 0 + x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} & \xrightarrow{T} & (0, 1, 0, \ldots, 0) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \qquad \vdots \\
x^{n-1} = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + x^{n-1} & \xrightarrow{T} & (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{array}
$$

Composições

Composições

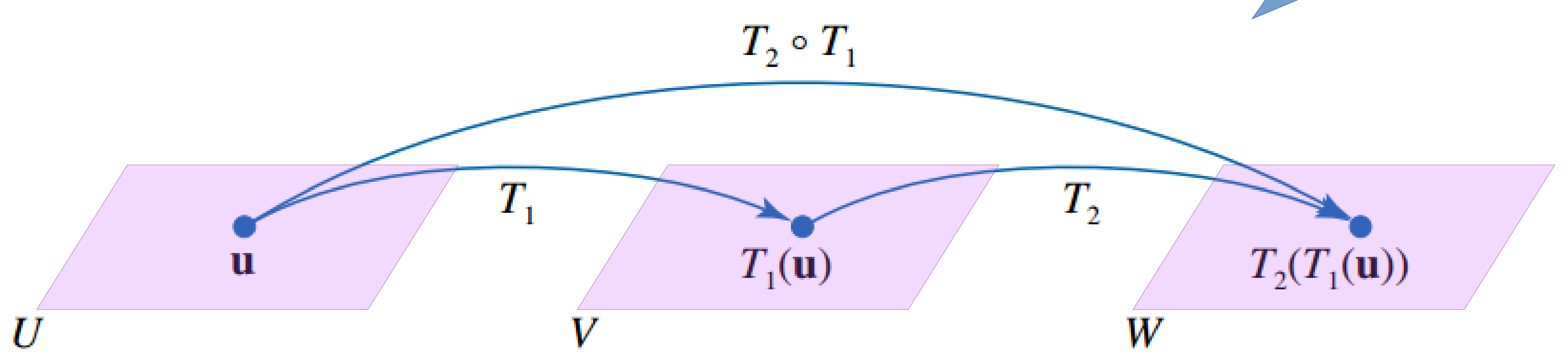
“T_2 bola T_1”

- Definição 4:
  - Se $T_1 : U \rightarrow V$ e $T_2 : V \rightarrow W$ forem transformações lineares, então a composição de T_2 com T_1, denotada por $T_2 \circ T_1$ é a aplicação definida pela fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u}))$$

em que u é um vetor em U

É exigido que o domínio de T_2 (que é V) contenha a imagem de T_1



Composições

- Teorema 4:
  - Se $T_1 : U \rightarrow V$ e $T_2 : V \rightarrow W$ forem transformações lineares,
  - então $(T_2 \circ T_1) : U \rightarrow W$ também é uma transformação linear.

Precisaria provar as propriedades de linearidade: Homogeneidade e aditividade

Composições

- Exemplo: Transformações lineares
  - Sejam $T_1 : P_1 \rightarrow P_2$ e $T_2 : P_2 \rightarrow P_2$ as transformações lineares dadas por

$$T_1(p(x)) = xp(x) \quad \text{e} \quad T_2(p(x)) = p(2x+4)$$

  - Então a composição $(T_2 \circ T_1) : P_1 \rightarrow P_2$ é

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (2x+4)p(2x+4)$$

  - Em particular, se $p(x) = c_0 + c_1x$, então

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(p(x)) &= (T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1 x) = (2x+4)(c_0 + c_1(2x+4)) \\ &= c_0(2x+4) + c_1(2x+4)^2\end{aligned}$$

Composições

- Exemplo: Operador identidade
  - Se T : V → V for um operador linear qualquer e I : V → V o operador identidade, então, dado qualquer vetor **v** em V, temos

$$(T \circ I)(\mathbf{v}) = T(I(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})$$
$$(I \circ T)(\mathbf{v}) = I(T(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})$$

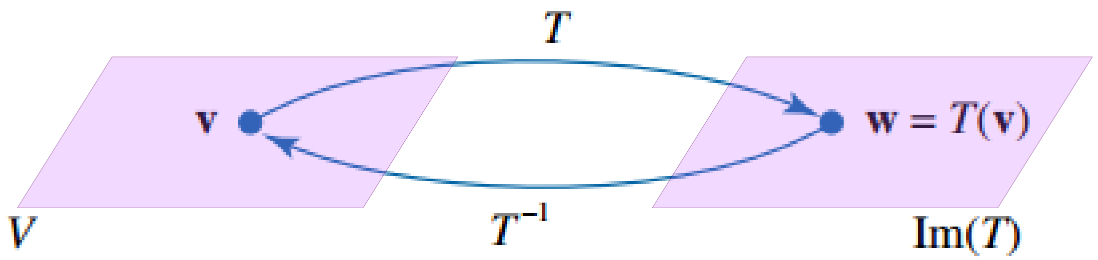
  - Segue que (T○I) e (I○T) são iguais a T

$$T \circ I = T \quad \text{e} \quad I \circ T = T$$

Transformações inversas

Transformações inversas

- Se $T : V \rightarrow W$ for uma transformação linear, então Im(T), é o subespaço de W consistindo em todas as imagens por T de vetores em V
- Se T for injetora, então cada vetor **w** em Im(T) é a imagem de um único vetor **v** em V.
- Com isso, é possível definir uma nova aplicação, denominada transformação inversa de T e denotada por T^{-1}, que transforma **w** de volta em **v**



Transformações inversas

- Pode ser provado que T^{-1} : Im(T) → V é uma transformação linear.
- Além disso, segue da definição de T^{-1} que

$$T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$$

$$T(T^{-1}(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

de modo que T e T^{-1}, aplicadas em sucessão e em qualquer ordem, cancelam uma o efeito da outra

Transformações inversas

- Exercício: Ache a transformação inversa
  - A transformação linear $T : P_n \rightarrow P_{n+1}$ dada por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x)$$

Provar que é injetora, e depois achar T^{-1}

Transformações inversas

- Exercício: Ache a transformação inversa
  - A transformação linear $T : P_n \rightarrow P_{n+1}$ dada por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x)$$

  - Se

$$p = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = q(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n$$

    forem polinômios distintos, então eles diferem em pelo menos um coeficiente
  - Logo

$$T(\mathbf{p}) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1} \quad \text{e} \quad T(\mathbf{q}) = d_0 x + d_1 x^2 + \cdots + d_n x^{n+1}$$

    também diferem em pelo menos um coeficiente

Transformações inversas

- Exercício: Ache a transformação inversa
  - Por ser injetora, T tem inversa.
  - Nesse caso, a imagem de T é apenas um subespaço de P_{n-1} consistindo em todos os polinômios com termo constante zero.
  - Segue que $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \rightarrow P_n$ é dada pela fórmula

$$T^{-1}(c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1}) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

  - Por exemplo, no caso em que $n \geq 3$

$$T^{-1}(2x - x^2 + 5x^3 + 3x^4) = 2 - x + 5x^2 + 3x^3$$

Transformações inversas

- Teorema 5:
  - Se $T_1 : U \rightarrow V$ e $T_2 : V \rightarrow W$ forem transformações lineares injetoras, então

    (a) $T_2 \circ T_1$ é injetora e

    (b) $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

Mostrar que $T_2 \circ T_1$ transforma vetores distintos de U em vetores distintos em W

Prova no Teorema 8.3.2 do Anton

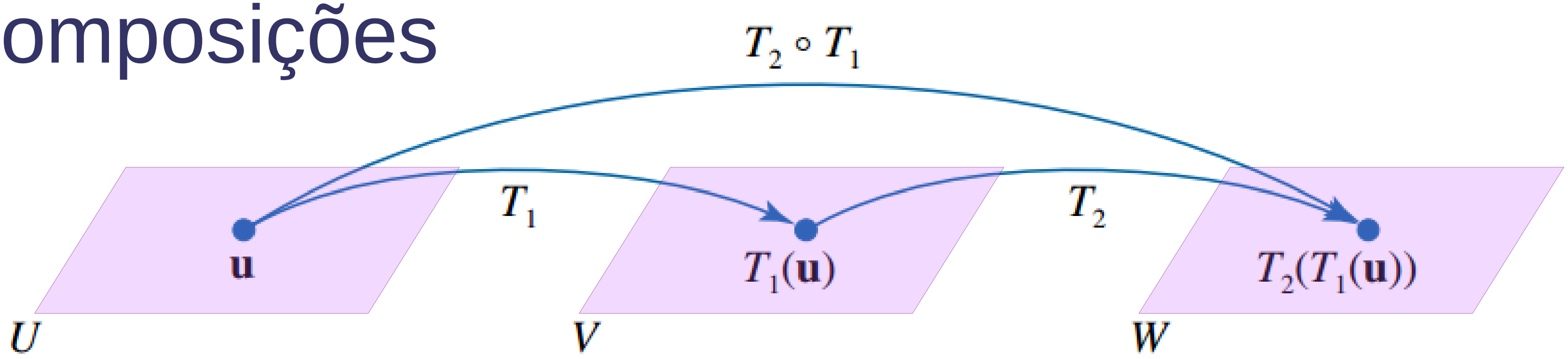
Resumo

Resumo

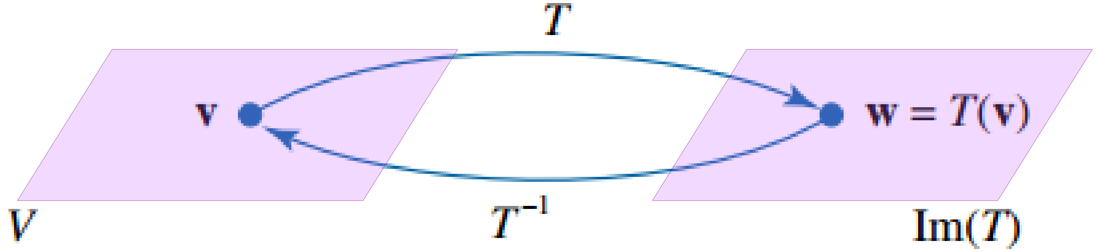
- Injetora e sobrejetora
- Isomorfismo: Aplicação das coordenadas

$$\mathbf{u} \xrightarrow{T} (k_1, k_2, \ldots, k_n) = (\mathbf{u})_S$$

- Composições



- Transformações inversas

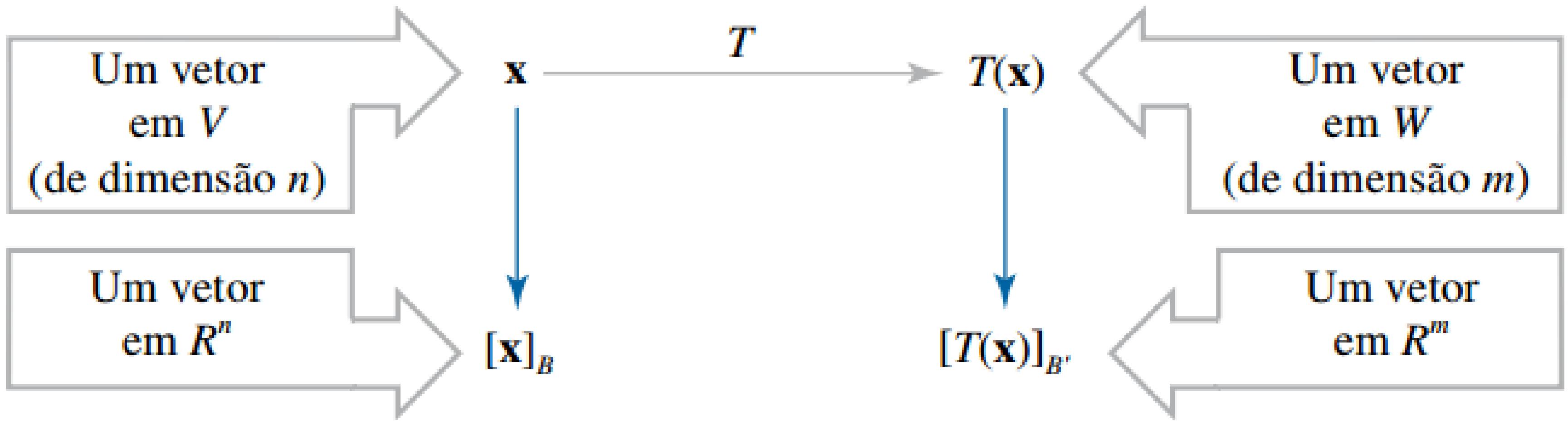


Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Anton seção 8.2
    - 1-2
    - 11
  - Anton seção 8.3
    - 1
    - 3
    - 12
    - 14

Resumo

- Próxima aula:
  - Matrizes de transformações lineares arbitrárias



Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 8.2 e 8.3
  - DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
    - Capítulo 6