Semelhança

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Semelhança
  - Matrizes simples de operadores lineares
  - Matrizes de transição
  - Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Invariantes de semelhança
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Matrizes de transformações lineares
  - Tenta achar uma matriz que corresponde a transformação
  - Procedimento indireto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[rr, "\text{Cálculo}", "\text{direto}"'] \arrow[d, "(1)"'] & & T(\mathbf{x}) \\
{[\mathbf{x}]_B} \arrow[rr, "\text{Multiplicação por } A", "(2)"'] & & {[T(\mathbf{x})]_{B'}} \arrow[u, "(3)"']
\end{tikzcd}
$$

- Matrizes de composições e de inversas

$$[T_2 \circ T_1]_{B',\,B} = [T_2]_{B',B''}\,[T_1]_{B'',\,B}$$

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$$

Semelhança

Semelhança

- Matrizes simples de operadores lineares
  - Nem sempre a base canônica é a que faz com que a matriz de T seja a mais simples possível
  - Ideal é ter uma matriz triangular ou diagonal

Semelhança

- Matrizes simples de operadores lineares
  - Exemplo:
    - Considere o operador matricial T : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de matriz na base canônica
      $$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$
      onde [T] é a matriz de T em relação à base canônica B = {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$} de $\mathbb{R}^2$
    - Matriz de T em relação a base B' = {$\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$} de $\mathbb{R}^2$

Muda a escala de u'_1 pelo fator 2 e a de u'_2 pelo fator 3

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{B'} = \left[T(\mathbf{u}'_1)_{B'} \mid T(\mathbf{u}'_2)_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{u}'_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}'_1 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{u}'_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{u}'_2$$

Semelhança

- Matrizes simples de operadores lineares
  - O problema de encontrar uma base que produza a matriz mais simples possível de um operador linear $T : V \to V$ pode ser atacado encontrando primeiro uma matriz de T em relação a uma base qualquer (ex: canônica), e em seguida modificando a base de uma maneira que simplifique a matriz.

Semelhança

- Matrizes de transição (novo ponto de vista)
  - Se B = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$} e B'= {$\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$, …, $\mathbf{u}'_n$} forem bases de um espaço vetorial V, então tem-se

$$P_{B \to B'} = \left[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'} \right]$$

$$P_{B' \to B} = \left[[\mathbf{u}'_1]_{B} \mid [\mathbf{u}'_2]_{B} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}'_n]_{B} \right]$$

    em que as matrizes $P_{B \to B'}$ e $P_{B' \to B}$ são inversas uma da outra.
  - Assim, para um vetor **v** de V, tem-se

$$P_{B \to B'} [\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_{B'}$$

$$P_{B' \to B} [\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{v}]_B$$

Podem ser vistos como operadores identidades

Semelhança

- Matrizes de transição (novo ponto de vista)
  - Teorema 1:
    - Se B e B' forem bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e se I : V → V for o operador identidade de V, então

$$P_{B\to B'} = [I\,]_{B',\,B} \quad \text{e} \quad P_{B'\to B} = [I\,]_{B,\,B'}$$

  - Demonstração
    - Suponha que B = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$} e B' = {$\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$, …, $\mathbf{u}'_n$} sejam bases de V.
    - Sendo I(**v**) = **v** para qualquer **v**, então

A prova de $[I]_{B,\,B'}=P_{B'\to B}$ é análoga

Isso vai servir para usar a ideia de composição

$$\begin{aligned}[I\,]_{B',\,B} &= \big[[I(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [I(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [I(\mathbf{u}_n)]_{B'}\big] \\ &= \big[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'}\big] \\ &= P_{B\to B'}\end{aligned}$$

Semelhança

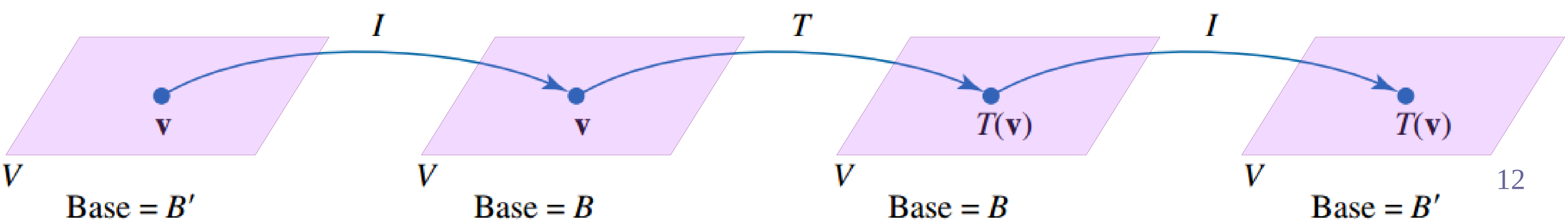
- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Se B e B' forem duas bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e $T : V \to V$ for um operador linear.
  - Qual é a relação, se houver alguma, entre as matrizes $[T]_B$ e $[T]_{B'}$?

Semelhança

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Se B e B' forem duas bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e T : V → V for um operador linear.
  - Qual é a relação, se houver alguma, entre as matrizes $[T]_B$ e $[T]_{B'}$?
    - Considere a composição, onde se tem o operador na base B e se quer na base B'.

Os espaços vetoriais envolvidos na composição são o mesmo (V), mas as bases desses espaços variam

$$[T]_{B',B'} = [I \circ T \circ I]_{B',B'} = [I]_{B',B}[T]_{B,B}[I]_{B,B'}$$



Semelhança

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Se B e B' forem duas bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e T : V → V for um operador linear.
  - Qual é a relação, se houver alguma, entre as matrizes $[T]_B$ e $[T]_{B'}$?
    - Considere a composição, onde se tem o operador na base B e se quer na base B'.

$$[T]_{B',B'} = [I \circ T \circ I]_{B',B'} = [I]_{B',B}[T]_{B,B}[I]_{B,B'}$$

Simplificando

$$[T]_{B'} = [I]_{B',B}[T]_B[I]_{B,B'} \quad \Rightarrow \quad [T]_{B'} = P_{B \to B'}[T]_B P_{B' \to B}$$

Semelhança

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Teorema:
    - Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear do espaço vetorial V de dimensão finita e B e B' bases de V. Então

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

sendo $P = P_{B' \rightarrow B}$ e $P^{-1} = P_{B \rightarrow B'}$

Transformação de semelhança

Semelhança

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Teorema:
    - Sejam T : V → V um operador linear do espaço vetorial V de dimensão finita e B e B' bases de V. Então

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

Transformação de semelhança

sendo $P = P_{B' \to B}$ e $P^{-1} = P_{B \to B'}$

  - Advertência:
    - Os índices externos das matrizes de transição coincidem com o índice da matriz que fica ao meio

$$[T]_{B'} = P_{B \to B'}\,[T]_B\,P_{B' \to B}$$

Índices externos

Semelhança

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Teorema
    - Duas matrizes A e B de tamanho $n \times n$ são semelhantes se, e só se, existem duas bases de $\mathbb{R}^n$ (uma para A e uma para B) relativas às quais as matrizes A e B representam o mesmo operador linear.
    - Além disso, se $B = P^{-1}AP$, então P é a matriz de transição da base que dá a matriz B para a base que dá a matriz A.

Semelhança

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Exercício: As matrizes representam o mesmo operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Do começo da aula

onde a base usada em C é a canônica e em D é

$$\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - Verifique se são semelhantes encontrando P tal que $D = P^{-1}CP$

Semelhança

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Exercício: As matrizes representam o mesmo operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Do começo da aula

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

onde a base usada em C é a canônica e em D é

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - Verifique se são semelhantes encontrando P tal que $D = P^{-1}CP$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}'_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{aligned} \Rightarrow P = P_{B' \rightarrow B} = [[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Semelhança

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares
  - Exercício: As matrizes representam o mesmo operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Do começo da aula

onde a base usada em C é a canônica e em D é

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - Verifique se são semelhantes encontrando P tal que $D = P^{-1}CP$

$$\underset{D}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}} \underset{P}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

Semelhança

- Invariantes de semelhança

Propriedade	Descrição
Determinante	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo determinante.
Invertibilidade	A é invertível se, e só se, $P^{-1}AP$ é invertível.
Posto	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo posto.
Nulidade	A e $P^{-1}AP$ têm a mesma nulidade.
Traço	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo traço.
Polinômio característico	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinômio característico.
Autovalores	A e $P^{-1}AP$ têm os mesmos autovalores.
Dimensão de autoespaço	Se λ for um autovalor de A e, portanto, de $P^{-1}AP$, então o autoespaço de A associado a λ e o autoespaço de $P^{-1}AP$ associado a λ têm a mesma dimensão.

Semelhança

- Invariantes de semelhança
  - Segue que se B e B’ forem bases de V, então cada propriedade invariante por semelhança de $[T]_B$ também é um invariante de semelhança de $[T]_{B'}$
    - Isso é, o determinante depende da transformação T e não da base utilizada
    - Se V for um espaço vetorial de dimensão finita, então o **determinante do operador linear T** é

$$\det(T) = \det([T]_B)$$

em que B é uma base qualquer de V

Semelhança

- Invariantes de semelhança
  - Exercício: Qual o determinante do operador T, sabendo que $[T]_{B'}$ é o mesmo operador definido para uma base B'?

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Semelhança

- Invariantes de semelhança
  - Exercício: Qual o determinante do operador T, sabendo que $[T]_{B'}$ é o mesmo operador definido para uma base B'?

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

    - Como o determinante é uma uma propriedade invariante por semelhança, então:

$$\det[T] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{e} \quad \det[T]_{B'} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Semelhança

- Exercício: Encontre os autovalores e bases dos autoespaços do operador linear T : $P_2 \rightarrow P_2$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$$

Como isso é possível?

Semelhança

- Exercício: Encontre os autovalores e bases dos autoespaços do operador linear $T : P_2 \to P_2$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$$

Como isso é possível?

Descubra uma matriz relativa ao operador na base canônica

Descubra os autovalores e autovetores.

Semelhança

- Exercício: Encontre os autovalores e bases dos autoespaços do operador linear T : $P_2 \rightarrow P_2$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$$

  - A matriz do operador relativo a base canônica B={1, x, x^2} é

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

    - Auto valores: λ=2 (multiplicidade 2), λ=1
    - Bases do autoespaços

Vetores de coordenadas

Quais esses vetores em relação a base?

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Semelhança

- Exercício: Encontre os autovalores e bases dos autoespaços do operador linear T : $P_2 \rightarrow P_2$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$$

  - Rescrevendo $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, a partir da base B

$$\mathbf{p}_1 = -1 + x^2, \quad \mathbf{p}_2 = x, \quad \mathbf{p}_3 = -2 + x + x^2$$

  - O autoespaço de T associado a $\lambda = 2$ tem a base

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} = \{-1 + x^2, x\}$$

    e o associado a $\lambda = 1$ tem a base

$$\{\mathbf{p}_3\} = \{-2 + x + x^2\}$$

Semelhança

- Exercício: Encontre os autovalores e bases dos autoespaços do operador linear T : $P_2 \rightarrow P_2$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$$

  - Rescrevendo $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, a partir da base B

$$\mathbf{p}_1 = -1 + x^2, \quad \mathbf{p}_2 = x, \quad \mathbf{p}_3 = -2 + x + x^2$$

  - O autoespaço de T associado a $\lambda = 2$ tem a base

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} = \{-1 + x^2, x\}$$

    e o associado a $\lambda = 1$ tem a base

$$\{\mathbf{p}_3\} = \{-2 + x + x^2\}$$

  - Verificando

$$T(\mathbf{p}_1) = 2\mathbf{p}_1, \quad T(\mathbf{p}_2) = 2\mathbf{p}_2 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_3$$

Resumo

Resumo

- Matrizes de transição

$$P_{B \to B'} = \left[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'} \right]$$

$$P_{B' \to B} = \left[[\mathbf{u}'_1]_{B} \mid [\mathbf{u}'_2]_{B} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}'_n]_{B} \right]$$

$$\begin{aligned} [I]_{B',B} &= \left[[I(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [I(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [I(\mathbf{u}_n)]_{B'} \right] \\ &= \left[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'} \right] \\ &= P_{B \to B'} \qquad \textbf{[Fórmula (3) acima]} \end{aligned}$$

- Efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

$$[T]_{B'} = P_{B \to B'} [T]_B P_{B' \to B}$$

Índices externos

- Invariantes de semelhança
  - Os invariantes podem ser calculados de forma mais simples

Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Anton seção 8.5
    - 1-2
    - 4
    - 8
    - 14

Resumo

- Próxima aula:
  - Revisão

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 8.5
  - DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
    - Capítulo 6