Cálculo de funções vetoriais

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Objetivos da aula

- Compreender limite, derivada, integral e suas propriedades para para funções vetoriais

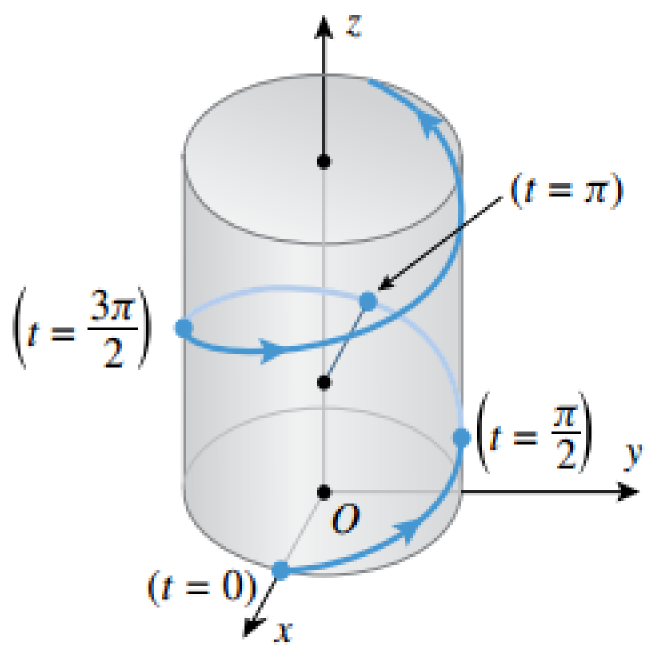
Índice

- Revisão
- Cálculo de funções vetoriais
  - Limite e continuidade
  - Derivadas
  - Integrais
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

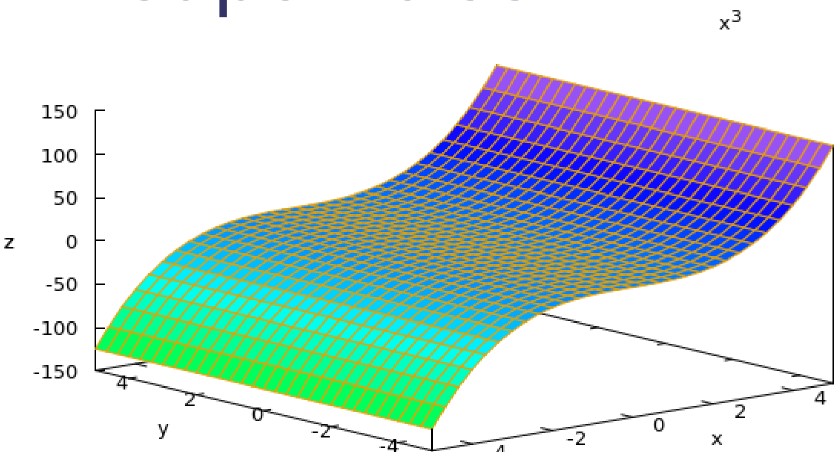
- Curvas paramétricas no espaço tridimensional
  - Precisam de orientação

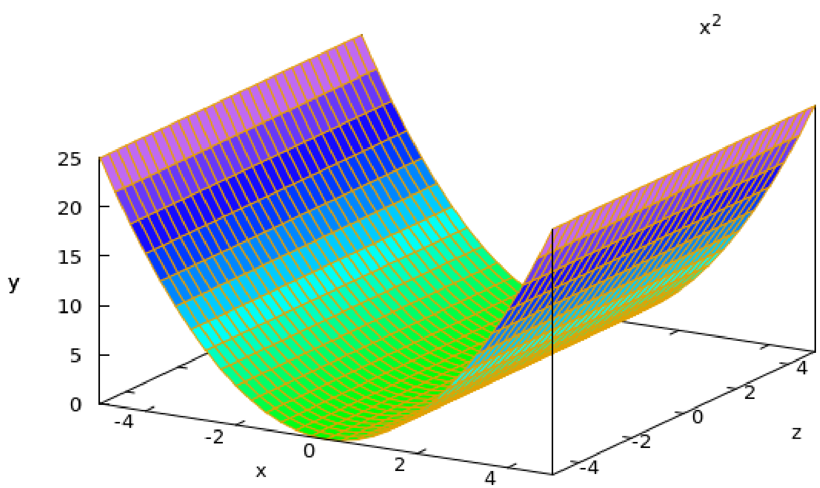


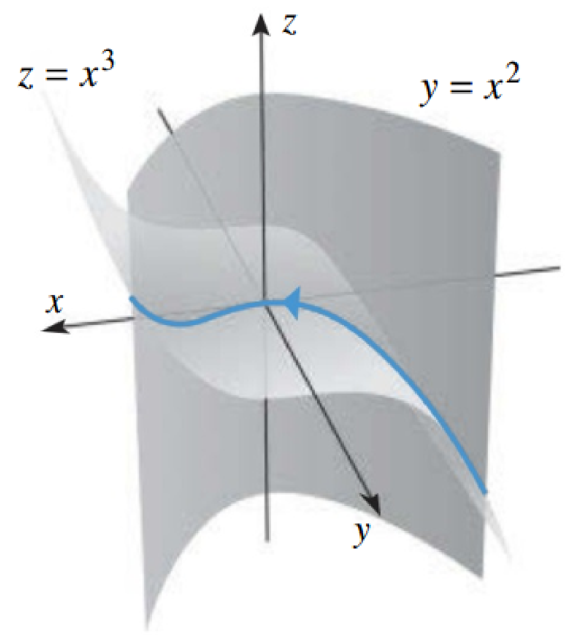
$$x = a\cos t,\quad y = a \operatorname{sen} t,\quad z = ct$$

Revisão

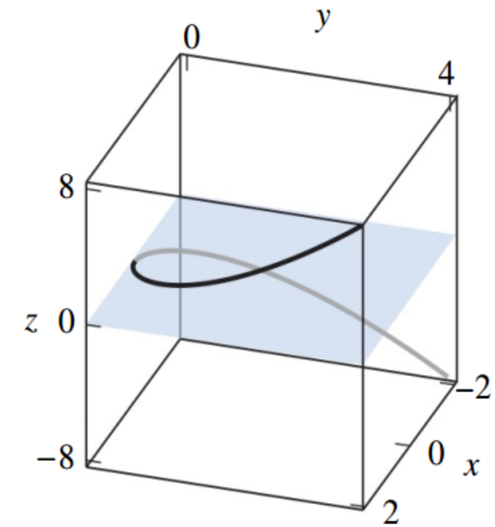
- Equações paramétricas de interseções de superfícies







$x = t, y = t^2, z = t^3$



Revisão

- Funções vetoriais
  - Notação utilizando vetor

$$r = \langle x, y, z \rangle = \langle t, t^2, t^3 \rangle = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

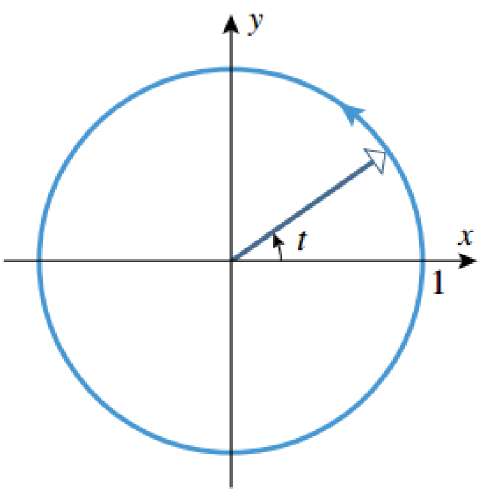
  - Funções componentes

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3$$

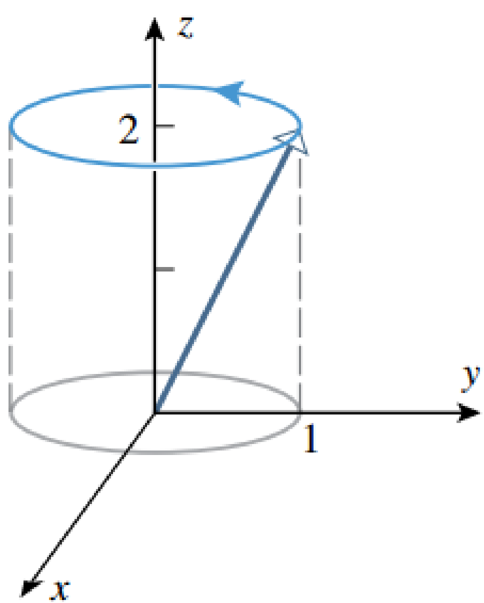
  - Domínio natural
    - Interseção do domínio das funções componentes

Revisão

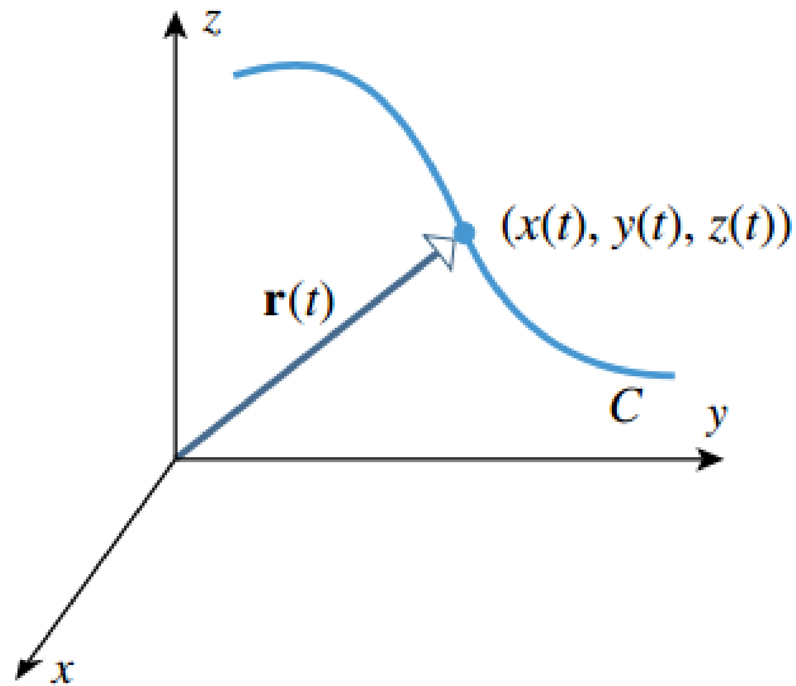
- Gráfico de funções vetoriais
  - Caminho traçado por um vetor saindo da origem
    - Vetor posição



$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$



$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$



Quando t varia, a ponta do vetor posição $\mathbf{r}(t)$ descreve a curva C.

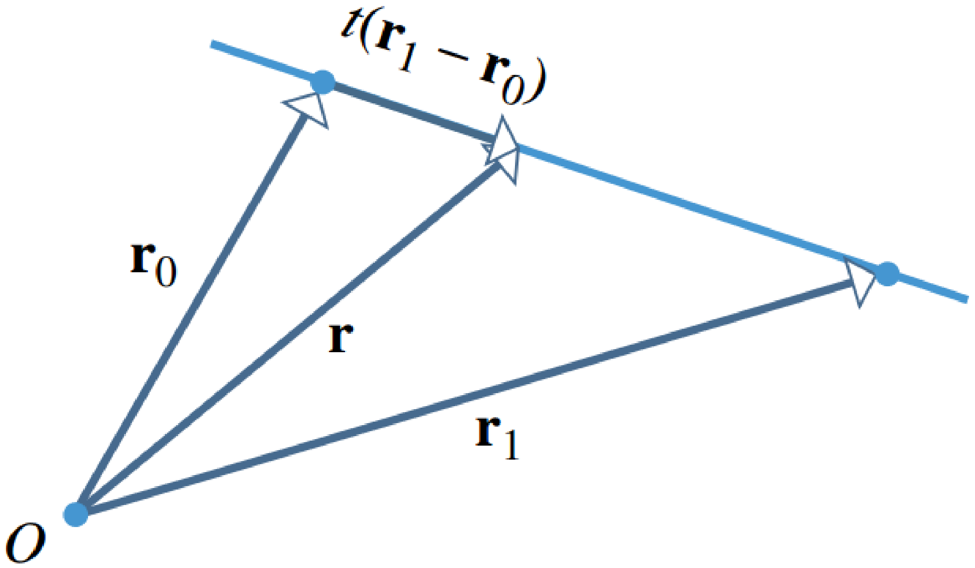
Revisão

- Forma vetorial de um segmento de reta
  - Reta que passa pelos pontos $\boldsymbol{r}_0$ e $\boldsymbol{r}_1$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$$

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$



$$\boxed{\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1}$$

Revisão

- Dúvida nos exercícios?

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Descreva o gráfico:

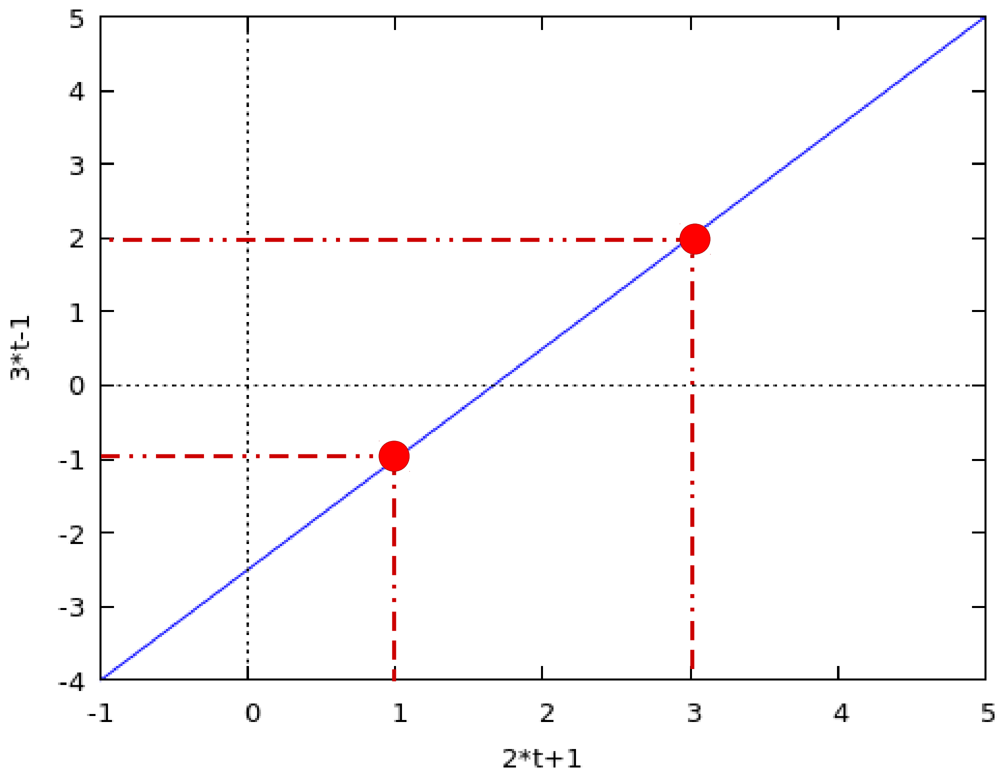
$$\boldsymbol{r}(t)=\langle 1+2t, -1+3t\rangle$$

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Descreva o gráfico:

$$\boldsymbol{r}(t) = \langle 1+2t, -1+3t \rangle$$

- Passa pelo ponto (1,-1)
- Tem o vetor diretor 2**i**+3**j**



Revisão

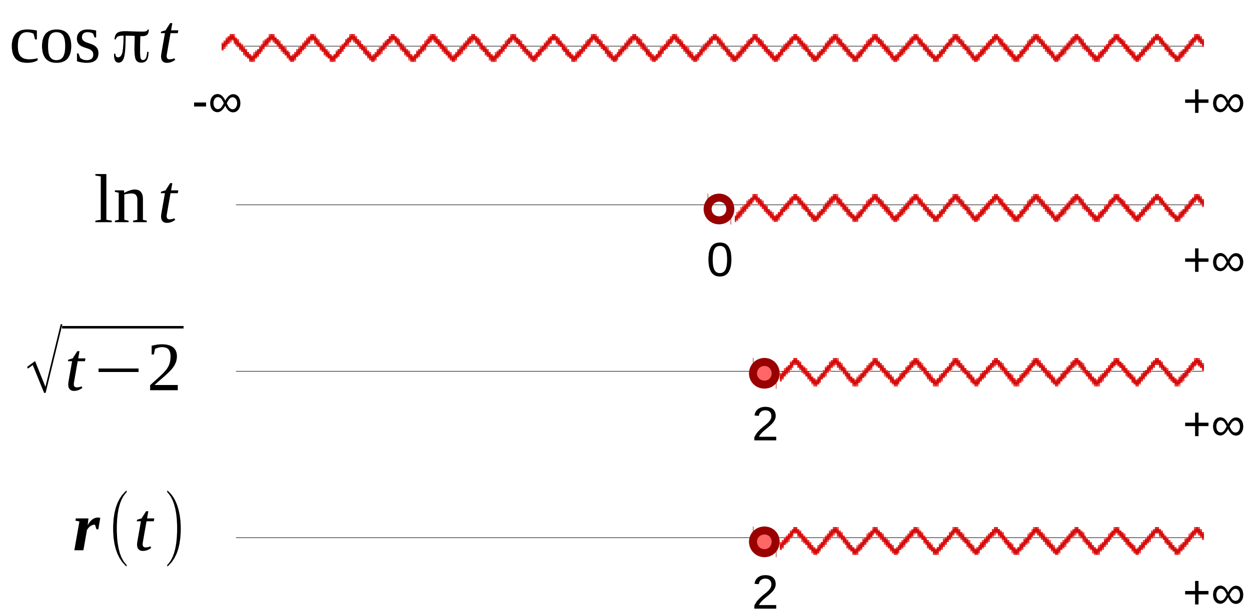
- Dúvida nos exercícios?
  - Determine o domínio de ***r**(t)* e o valor de ***r**(t₀)*:

$$\mathbf{r}(t) = \cos \pi t \, \mathbf{i} - \ln t \, \mathbf{j} + \sqrt{t-2} \, \mathbf{k}, \quad t_0 = 3$$

Revisão

- Dúvida nos exercícios?
  - Determine o domínio de ***r**(t)* e o valor de ***r**(t₀)*:

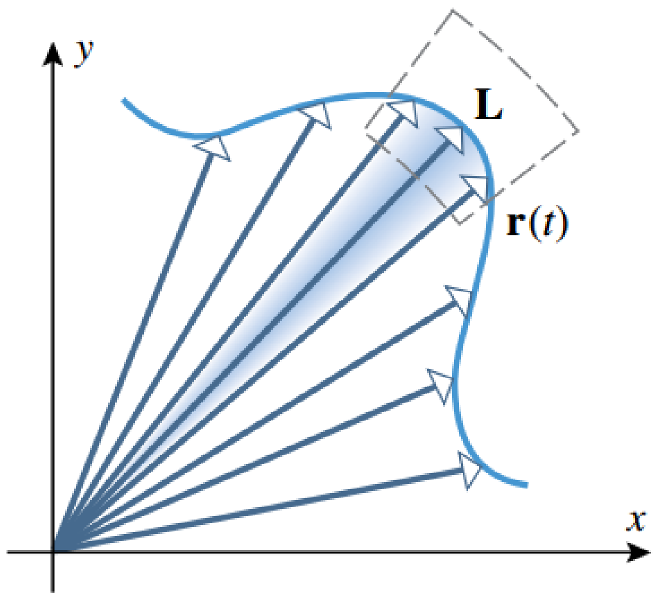
$$\boldsymbol{r}(t)=\cos\pi t\,\boldsymbol{i}-\ln t\,\boldsymbol{j}+\sqrt{t-2}\,\boldsymbol{k},\quad t_0=3$$



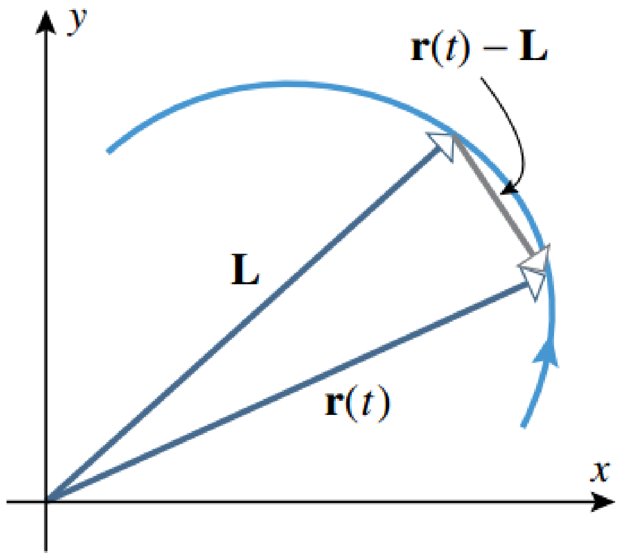
Cálculo de funções vetoriais

Cálculo de funções vetoriais

- Limites



$\mathbf{r}(t)$ tende a $\mathbf{L}$ em magnitude, direção e sentido se $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$.



$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\|$ é a distância entre os pontos finais dos vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{L}$ quando esses vetores são posicionados com o mesmo ponto inicial.

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Definição
    - Seja ***r**(t)* uma função vetorial definida em cada *t* de algum intervalo aberto contendo o número *a*, exceto que ***r**(t)* não precisa estar definido em *a*. Escrevemos

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$

se, e somente se

$$\lim_{t \to a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0$$

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Definição
    - Seja ***r****(t)* uma função vetorial definida em cada *t* de algum intervalo aberto contendo o número *a*, exceto que ***r****(t)* não precisa estar definido em *a*. Escrevemos

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$

se, e somente se

$$\lim_{t \to a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0$$

r*(t)* → ***L*** *sse* as funções componentes de ***r****(t)* tendem as componentes correspondentes de ***L***

Notar que *0* (zero) é um valor e não vetor

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Teorema:
    - Se $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} x(t), \lim_{t \to a} y(t) \right\rangle = \lim_{t \to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to a} y(t)\mathbf{j}$$

      sempre que existirem os limites das funções componentes.
    - Reciprocamente, existem os limites das funções componentes sempre que ***r****(t)* tender a um vetor limite quando *t* tender a *a*.

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Teorema:
    - Se $\boldsymbol{r}(t) = <x(t), y(t)> = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} x(t), \lim_{t \to a} y(t) \right\rangle = \lim_{t \to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to a} y(t)\mathbf{j}$$

sempre que existirem os limites das funções componentes.

- Reciprocamente, existem os limites das funções componentes sempre que $\boldsymbol{r}(t)$ tender a um vetor limite quando t tender a a.

O 3D é semelhante

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Teorema:
    - Se $\boldsymbol{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} x(t), \lim_{t \to a} y(t) \right\rangle = \lim_{t \to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to a} y(t)\mathbf{j}$$

      sempre que existirem os limites das funções componentes.
    - Reciprocamente, existem os limites das funções componentes sempre que $\boldsymbol{r}(t)$ tender a um vetor limite quando t tender a a.

Todas as propriedades de limites para funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valem!

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Relembrando as propriedades dos limites
    - Unicidade do limite
      - Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$ então L=M
    - Limite de uma função constante

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$$

    - Soma ou da subtração dos limites

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$$

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Relembrando as propriedades dos limites
    - Multiplicação por escalar

$$\lim_{x \to a}(k \times f(x)) = k \times \lim_{x \to a} f(x) = k \times L$$

    - Multiplicação de limites

$$\lim_{x \to a}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = L \times M$$

    - Divisão de limites (M≠0)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Relembrando as propriedades dos limites
    - Potência de limites

$$\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n = L^n$$

    - Exponencial do limite (b ∈ ℝ)

$$\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to a} f(x)} = b^L$$

    - Logaritmo do limite

$$\lim_{x \to a} (log_b f(x)) = log_b(\lim_{x \to a} f(x)) = log_b L$$

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Relembrando as propriedades dos limites
    - Raiz do limite

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

    - Propriedade do confronto
      - Se $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$ tal que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

        então: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Exemplo:

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$$

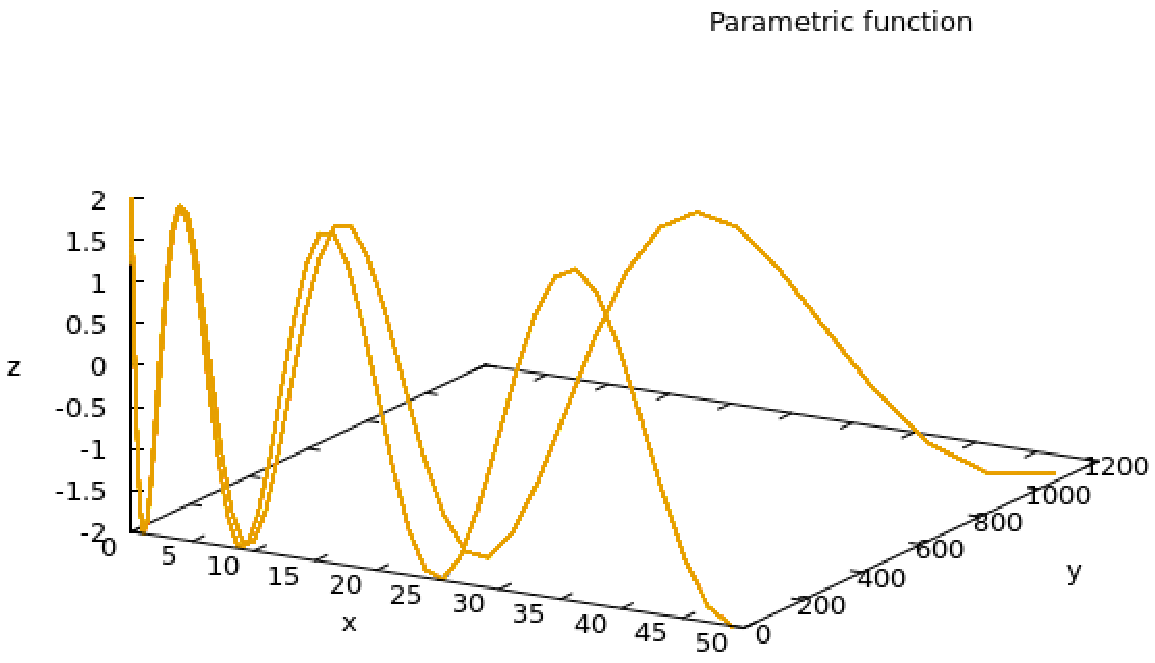
$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to 0} t^2\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t \to 0} e^t\right)\mathbf{j} - \left(\lim_{t \to 0} 2\cos \pi t\right)\mathbf{k} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \to 0} \langle t^2, e^t, -2\cos \pi t\rangle = \left\langle \lim_{t \to 0} t^2, \lim_{t \to 0} e^t, \lim_{t \to 0} (-2\cos \pi t)\right\rangle = \langle 0, 1, -2\rangle$$

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Exemplo:

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$$



Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Continuidade
    - Uma função vetorial ***r**(t)* é contínua em *t* = *a* se

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

    - Isto é:
      - ***r**(a)* está definido
      - o limite de ***r**(t)* quando $t \to a$ existe
      - ambos coincidem

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Continuidade
    - Uma função vetorial contínua em um intervalo *I* se for contínua em cada ponto de *I*
      - Exceto os limites extremos
        - Limite bilateral substituído pelo limite lateral apropriado

Cálculo de funções vetoriais

- Limites
  - Continuidade
    - Uma função vetorial contínua em um intervalo *I* se for contínua em cada ponto de *I*
      - Exceto os limites extremos
        - Limite bilateral substituído pelo limite lateral apropriado
    - Uma função vetorial é contínua em $t = a$ se, e somente se, suas funções componentes são contínuas em $t = a$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Definição
    - Se ***r**(t)* for uma função vetorial, definimos a derivada de ***r*** em relação a *t* como a função vetorial ***r'*** dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Definição
    - Se ***r****(t)* for uma função vetorial, definimos a derivada de ***r*** em relação a *t* como a função vetorial ***r'*** dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

    - O domínio de ***r'*** consiste em todos os valores de t do domínio de ***r****(t)* nos quais o limite existe

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Definição
    - Se ***r**(t)* for uma função vetorial, definimos a derivada de ***r*** em relação a *t* como a função vetorial ***r'*** dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

    - O domínio de ***r'*** consiste em todos os valores de t do domínio de ***r**(t)* nos quais o limite existe

A função ***r**(t)* é dita derivável ou diferenciável em *t* se o limite existir

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Notação

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{r}'(t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}'$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Notação

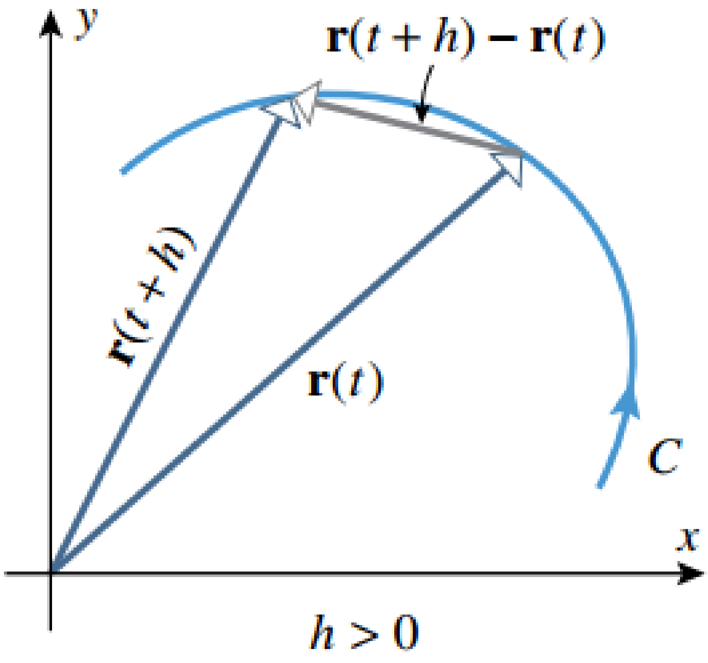
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{r}'(t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}'$$

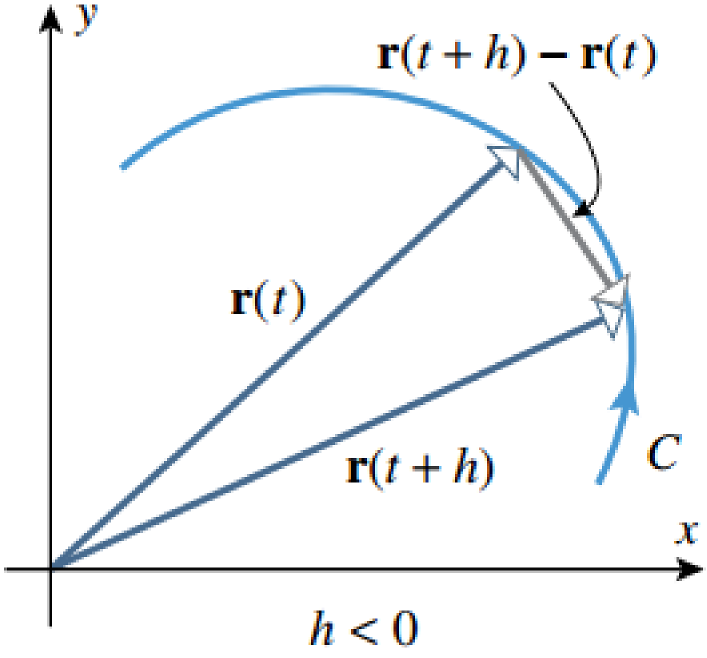
Lembrar que ***r****(t)* e ***r’****(t)* são vetores

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Interpretação geométrica

Passam pela reta secante em sentidos opostos



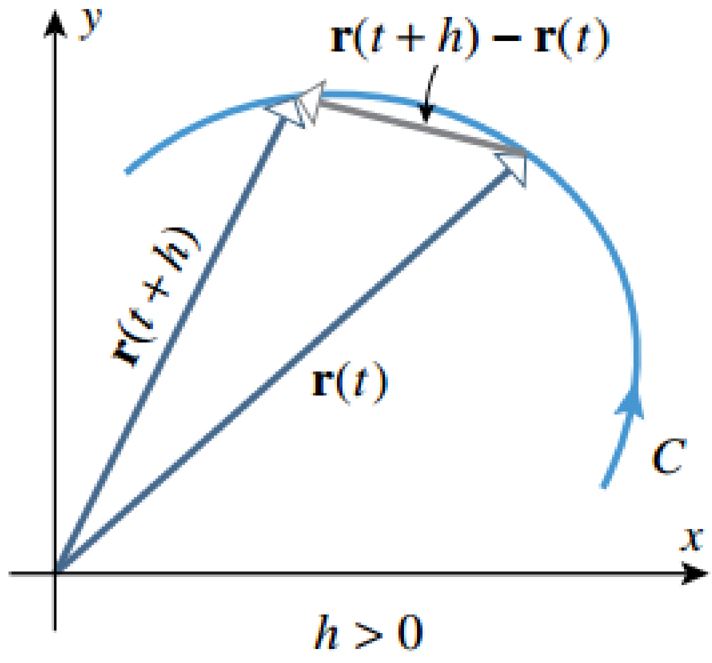


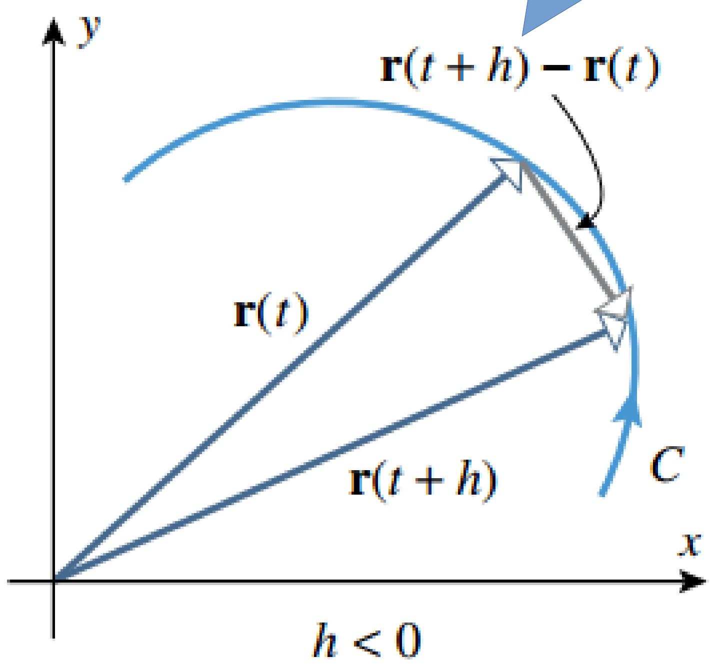
Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Interpretação geométrica

O que acontece se o vetor diferença for dividido por h?

Passam pela reta secante em sentidos opostos

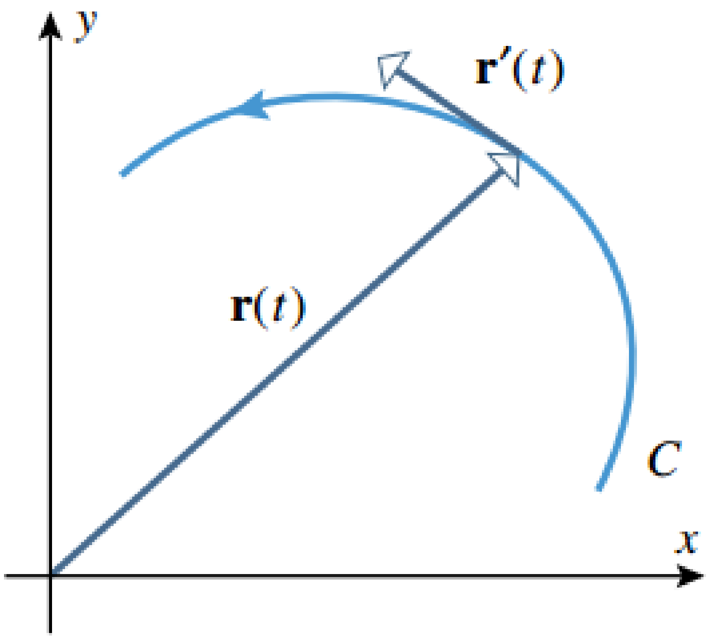




Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Interpretação geométrica
    - Quando h→0
    - Se existir e não for nulo
    - Vetor tangente a curva
      - Posicionado com seu ponto inicial no ponto final do vetor posição ***r**(t)*

Aponta na direção do parâmetro crescente



Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Cálculo
    - Teorema:
      - Se ***r****(t)* for uma função vetorial, então ***r*** é diferenciável em *t* se, e somente se, cada uma das funções componentes for diferenciável em *t*

Componente a componente, como o limite

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Cálculo
    - Teorema:
      - Se ***r**(t)* for uma função vetorial, então ***r*** é diferenciável em *t* se, e somente se, cada uma das funções componentes for diferenciável em *t*
    - Demonstração

Componente a componente, como o limite

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Cálculo
    - Teorema:
      - Se ***r**(t)* for uma função vetorial, então ***r*** é diferenciável em *t* se, e somente se, cada uma das funções componentes for diferenciável em *t*
    - Demonstração

Componente a componente, como o limite

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[x(t+h)\mathbf{i} + y(t+h)\mathbf{j}] - [x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}]}{h}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Cálculo
    - Teorema:
      - Se ***r****(t)* for uma função vetorial, então ***r*** é diferenciável em *t* se, e somente se, cada uma das funções componentes for diferenciável em *t*
    - Demonstração

Componente a componente, como o limite

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[x(t+h)\mathbf{i} + y(t+h)\mathbf{j}] - [x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}]}{h} \\
&= \left(\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Cálculo
    - Teorema:
      - Se ***r****(t)* for uma função vetorial, então ***r*** é diferenciável em *t* se, e somente se, cada uma das funções componentes for diferenciável em *t*
    - Demonstração

Componente a componente, como o limite

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[x(t+h)\mathbf{i} + y(t+h)\mathbf{j}] - [x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}]}{h} \\
&= \left(\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \mathbf{j} \\
&= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Cálculo de funções vetoriais

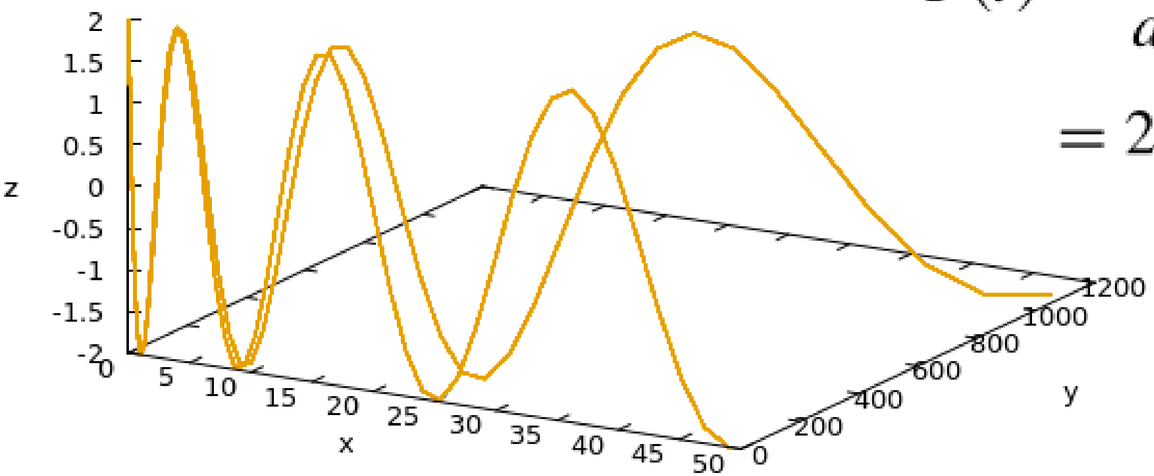
- Derivadas
  - Exemplo

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Exemplo

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$$



$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}(t^2)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(e^t)\mathbf{j} - \frac{d}{dt}(2\cos \pi t)\mathbf{k}$$

$$= 2t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + (2\pi \operatorname{sen} \pi t)\mathbf{k}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Teorema: Regras de derivação
    - Sejam ***r**(t)*, ***r**$_1$(t)* ***e*** ***r**$_2$(t)* funções vetoriais que são todas 2D ou 3D, ***f**(t)* uma função real, *k* um escalar, *c* um vetor constante

$$(a)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Teorema: Regras de derivação
    - Sejam $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}_1(t)$ e $\boldsymbol{r}_2(t)$ funções vetoriais que são todas 2D ou 3D, $\boldsymbol{f}(t)$ uma função real, k um escalar, c um vetor constante

$$(a)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)] = k\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)]$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Teorema: Regras de derivação
    - Sejam ***r**(t)*, ***r**$_1$(t)* **e** ***r**$_2$(t)* funções vetoriais que são todas 2D ou 3D, ***f**(t)* uma função real, *k* um escalar, *c* um vetor constante

$$(a)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

$$(c)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)] = k\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)]$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Teorema: Regras de derivação
    - Sejam ***r****(t)*, ***r****$_1$(t)* **e** ***r****$_2$(t)* funções vetoriais que são todas 2D ou 3D, ***f****(t)* uma função real, *k* um escalar, *c* um vetor constante

$$(a)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)] = k\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)]$$

$$(c)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

$$(d)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] - \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Teorema: Regras de derivação
    - Sejam ***r**(t)*, ***r**$_1$(t)* **e** ***r**$_2$(t)* funções vetoriais que são todas 2D ou 3D, ***f**(t)* uma função real, *k* um escalar, *c* um vetor constante

$$(a)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)] = k\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)]$$

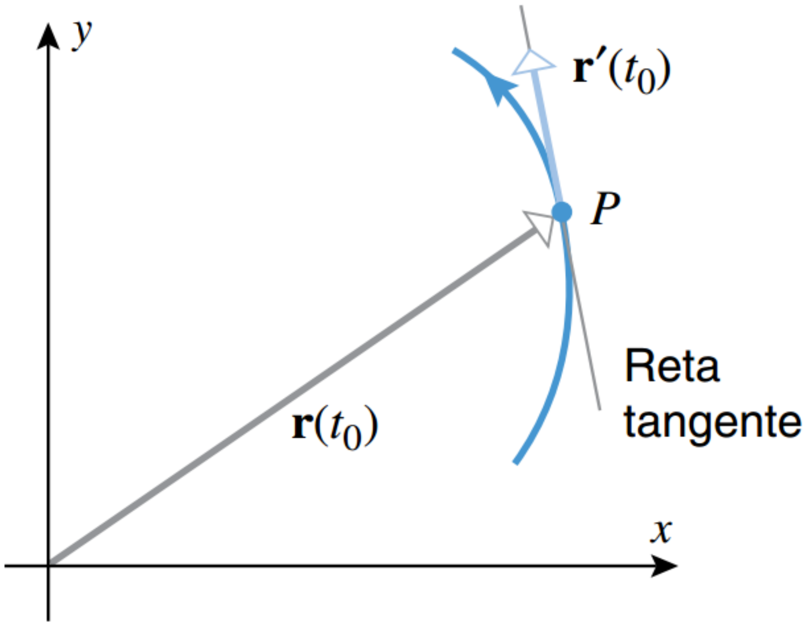
$$(c)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

$$(d)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] - \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

$$(e)\quad \frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\mathbf{r}(t)$$

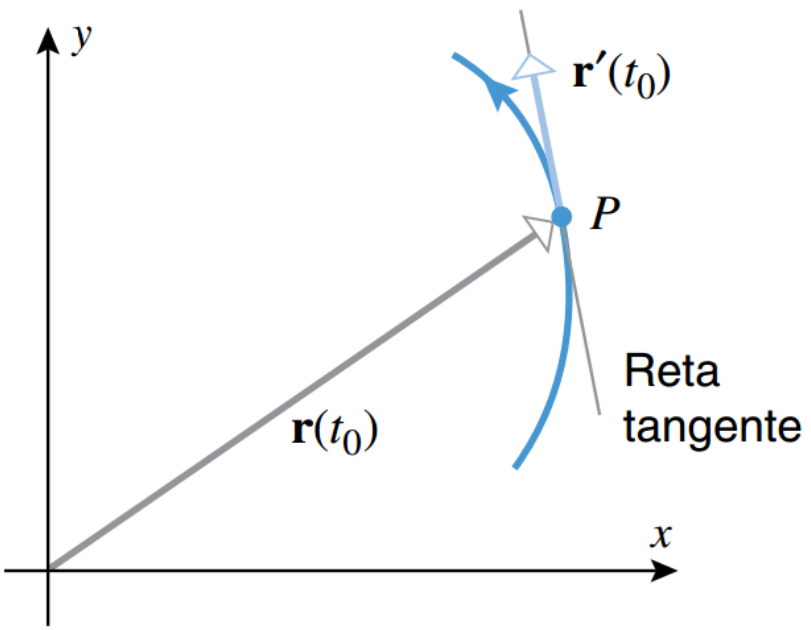
Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais
  - Definição:
    - Seja ***P*** um ponto no gráfico de uma função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$ e seja $\boldsymbol{r}(t_0)$ o vetor posição da origem a P.



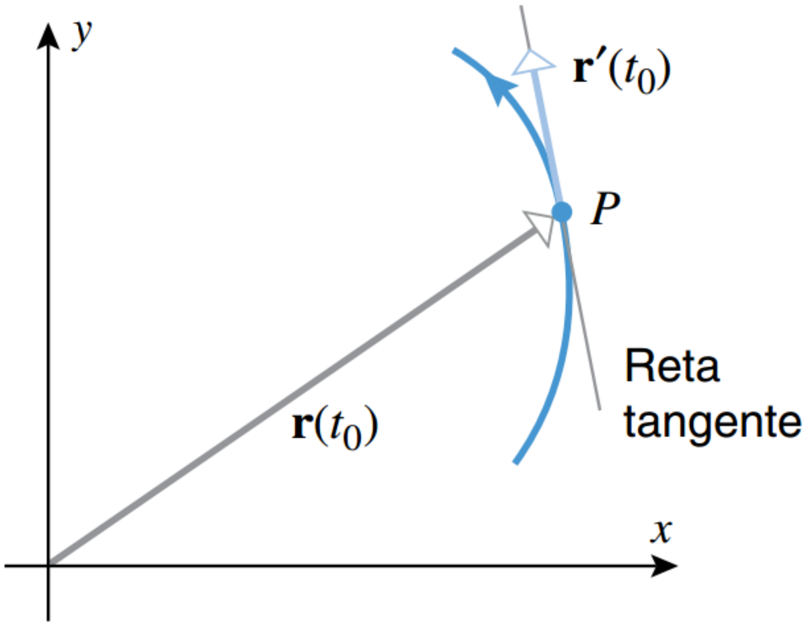
Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais
  - Definição:
    - Seja ***P*** um ponto no gráfico de uma função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$ e seja $\boldsymbol{r}(t_0)$ o vetor posição da origem a P.
    - Se $\boldsymbol{r}'(t_0)$ existir e $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$, então dizemos que $\boldsymbol{r}'(t_0)$ é um vetor tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ em $\boldsymbol{r}(t_0)$,



Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais
  - Definição:
    - Seja ***P*** um ponto no gráfico de uma função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$ e seja $\boldsymbol{r}(t_0)$ o vetor posição da origem a P.
    - Se $\boldsymbol{r}'(t_0)$ existir e $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$, então dizemos que $\boldsymbol{r}'(t_0)$ é um vetor tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ em $\boldsymbol{r}(t_0)$, e a reta que passa por P que é paralela ao vetor tangente é denominada reta tangente ao gráfico de $\boldsymbol{r}(t)$ em $\boldsymbol{r}(t_0)$.

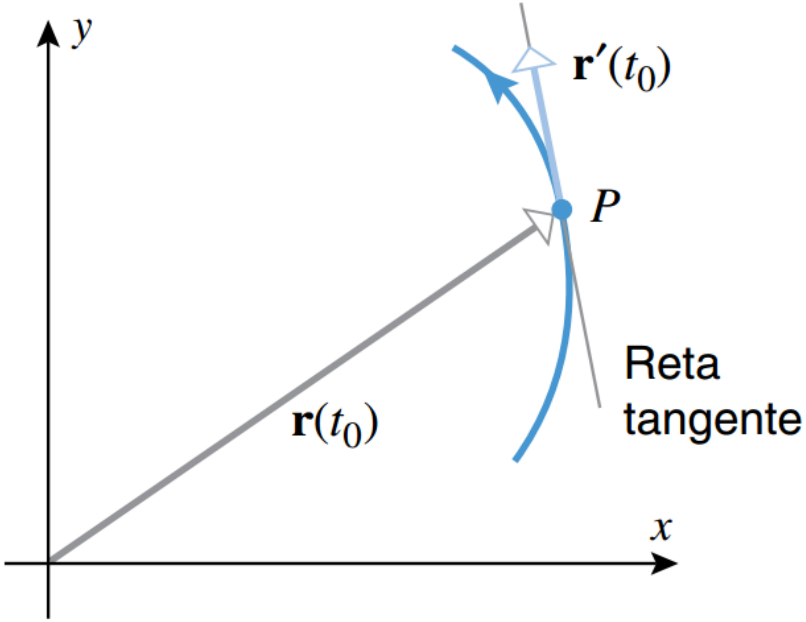


Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\,\boldsymbol{v}_0$$

onde $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$ e $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{r}'(t_0)$



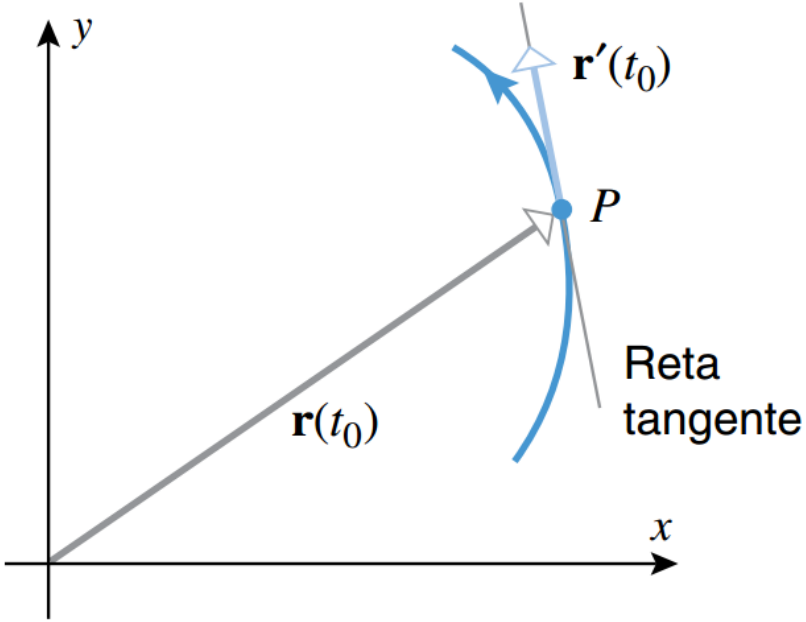
Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais

Notar que esse ***r*** e *t* da reta não estão relacionados com os da curva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\,\boldsymbol{v}_0$$

onde $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ e $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{r}'(t_0)$



Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais
    - Exemplo: Hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

      - Obtenha equações paramétricas da reta tangente onde $t=t_0$ e descubra-a no ponto $t=\pi$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais
    - Exemplo: Hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
      - Descobrindo $\boldsymbol{r_0}$ e $\boldsymbol{v_0}$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = \cos t_0\mathbf{i} + \operatorname{sen} t_0\mathbf{j} + t_0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(t_0) = (-\operatorname{sen} t_0)\mathbf{i} + \cos t_0\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

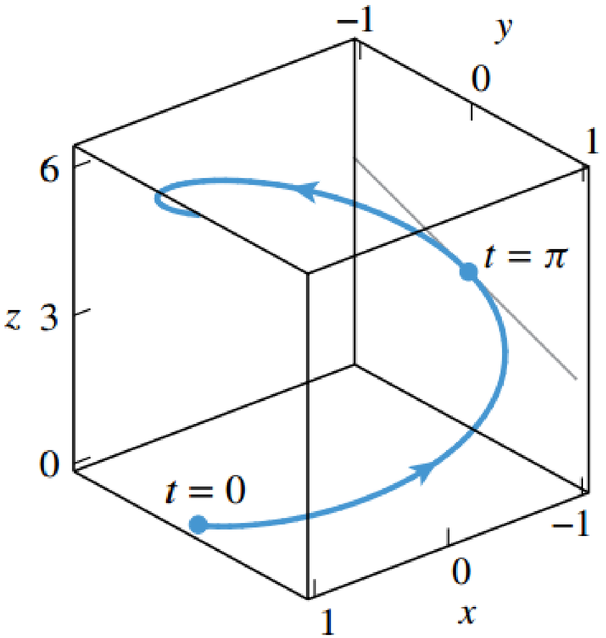
      - Substituindo na equação da reta

$$\mathbf{r} = \cos t_0\mathbf{i} + \operatorname{sen} t_0\mathbf{j} + t_0\mathbf{k} + t[(-\operatorname{sen} t_0)\mathbf{i} + \cos t_0\mathbf{j} + \mathbf{k}]$$

$$= (\cos t_0 - t\operatorname{sen} t_0)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t_0 + t\cos t_0)\mathbf{j} + (t_0 + t)\mathbf{k}$$

      - Reta no ponto $t=\pi$

$$\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i} \; - t\,\boldsymbol{j} \; + \pi + t\,\boldsymbol{k}$$



Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais
    - Exemplo:

$$\mathbf{r}_1(t) = (\text{arc tg } t)\mathbf{i} + (\text{sen } t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (t^2 - t)\mathbf{i} + (2t - 2)\mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k}$$

      - Obtenha o ângulo agudo entre retas tangentes na origem

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Retas tangentes a gráficos de funções vetoriais
    - Exemplo:
      - $\boldsymbol{r_1}$ passa pela origem em $t=0$ e $\boldsymbol{r_2}$ passa pela origem em $t=1$
      - Vetor tangente de $\boldsymbol{r_1}$

$$\mathbf{r}_1'(0) = \left\langle \frac{1}{1+t^2}, \cos t, 2t \right\rangle \bigg|_{t=0} = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

      - Vetor tangente de $\boldsymbol{r_2}$

$$\mathbf{r}_2'(1) = \left\langle 2t - 1, 2, \frac{1}{t} \right\rangle \bigg|_{t=1} = \langle 1, 2, 1 \rangle$$

      - Ângulo

$$\cos\theta = \frac{\langle 1, 1, 0\rangle \cdot \langle 1, 2, 1\rangle}{\|\langle 1, 1, 0\rangle\| \, \|\langle 1, 2, 1\rangle\|} = \frac{1+2+0}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 30^{o}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]=\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\frac{d\,\boldsymbol{r}_2}{dt}+\frac{d\,\boldsymbol{r}_1}{dt}\cdot\boldsymbol{r}_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]=\boldsymbol{r}_1(t)\times\frac{d\,\boldsymbol{r}_2}{dt}+\frac{d\,\boldsymbol{r}_1}{dt}\times\boldsymbol{r}_2(t)$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]=\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\frac{d\,\boldsymbol{r}_2}{dt}+\frac{d\,\boldsymbol{r}_1}{dt}\cdot\boldsymbol{r}_2(t)$$

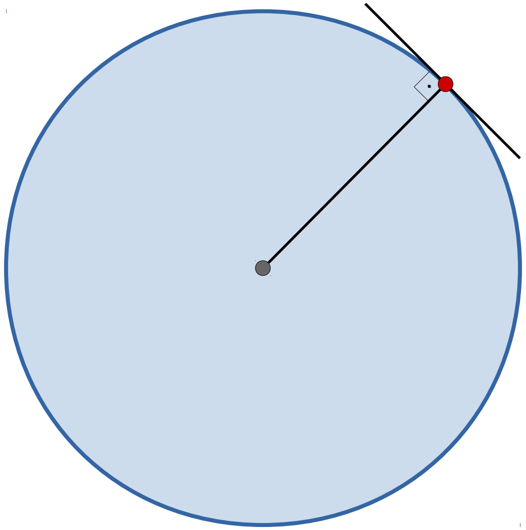
Valor

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]=\boldsymbol{r}_1(t)\times\frac{d\,\boldsymbol{r}_2}{dt}+\frac{d\,\boldsymbol{r}_1}{dt}\times\boldsymbol{r}_2(t)$$

Vetor

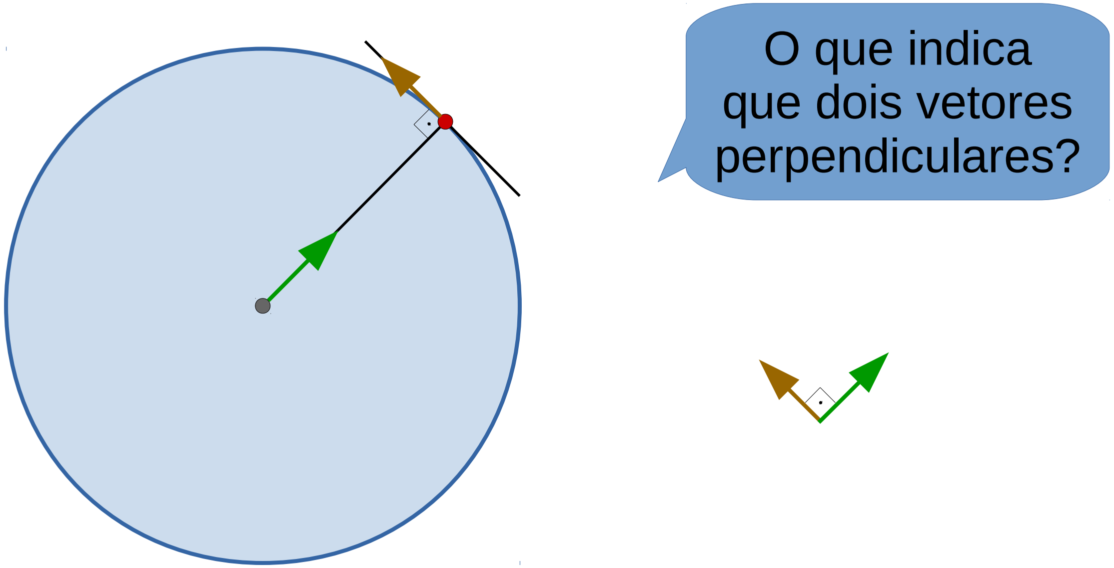
Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais



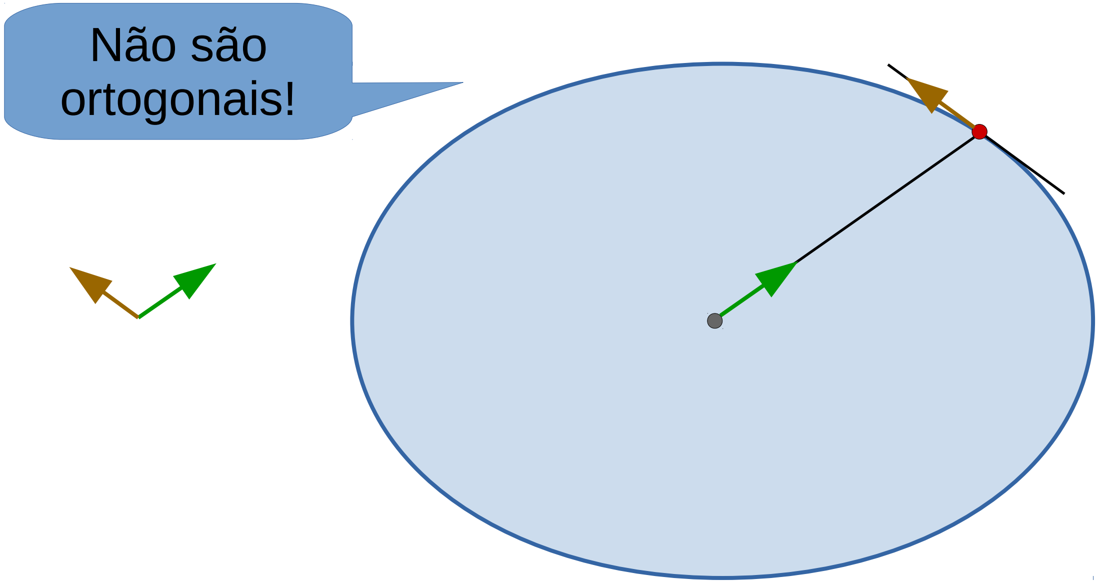
Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais



Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais



Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais
    - Teorema
      - Se ***r****(t)* for uma função vetorial em 2D ou 3D e || ***r****(t)* || for uma função constante de *t*, então

$$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=0$$

isto é, ***r****(t)* e ***r'****(t)* são vetores ortogonais com qualquer *t*.

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais
    - Teorema
      - Se ***r**(t)* for uma função vetorial em 2D ou 3D e || ***r**(t)* || for uma função constante de *t*, então

        $$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$$

        isto é, ***r**(t)* e ***r’**(t)* são vetores ortogonais com qualquer *t*.
    - Demonstração
      - Norma $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)]=\mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r}(t)$

        que é equivalente a:

        $$\frac{d}{dt}[\|\mathbf{r}(t)\|^2]=2\mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais
    - Teorema
      - Se ***r**(t)* for uma função vetorial em 2D ou 3D e || ***r**(t)* || for uma função constante de *t*, então

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$$

isto é, ***r**(t)* e ***r'**(t)* são vetores ortogonais com qualquer *t*.

- Demonstração
  - Norma $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r}(t)$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}[\|\mathbf{r}(t)\|^2] = 2\mathbf{r}(t)\cdot\cancelto{0}{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais
    - Teorema
      - Se ***r****(t)* for uma função vetorial em 2D ou 3D e || ***r****(t)* || for uma função constante de *t*, então

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$$

isto é, ***r****(t)* e ***r'****(t)* são vetores ortogonais com qualquer *t*.

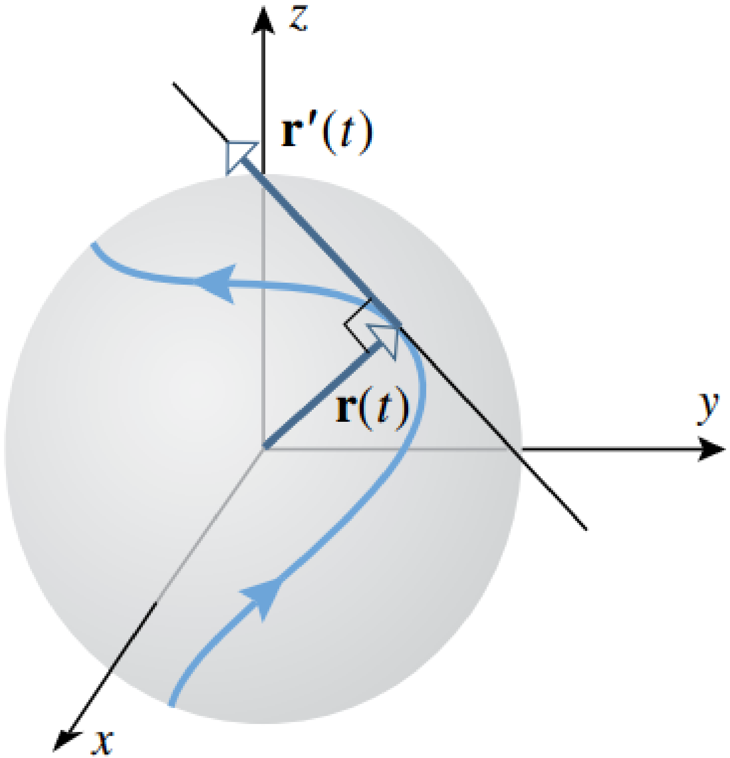
    - Demonstração
      - Norma $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}(t)\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r}(t)$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}[\|\mathbf{r}(t)\|^2] = 2\mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad 2\mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

Cálculo de funções vetoriais

- Derivadas
  - Produtos escalares e vetoriais



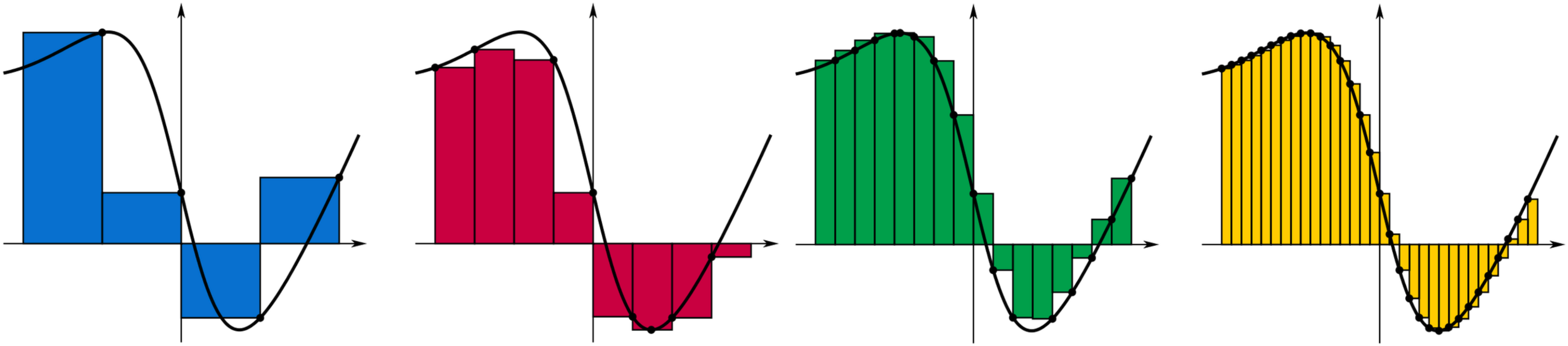
Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Se ***r***(t) for uma função vetorial que é contínua no intervalo $a \leq t \leq b$, então definimos a integral definida de ***r***(t) ao longo desse intervalo como o limite de somas de Riemann

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Se ***r****(t)* for uma função vetorial que é contínua no intervalo $a \leq t \leq b$, então definimos a integral definida de ***r****(t)* ao longo desse intervalo como o limite de somas de Riemann

Para uma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Se ***r***(*t*) for uma função vetorial que é contínua no intervalo $a \leq t \leq b$, então definimos a integral definida de ***r***(*t*) ao longo desse intervalo como o limite de somas de Riemann

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Se ***r**(t)* for uma função vetorial que é contínua no intervalo $a \leq t \leq b$, então definimos a integral definida de ***r**(t)* ao longo desse intervalo como o limite de somas de Riemann

O que se pode fazer com o limite?

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\,\Delta t_k$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k$$

$$= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j} \right]$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k$$

$$= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j} \right]$$

$$= \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt &= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k \\
&= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j} \right] \\
&= \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j} \\
&= \left(\int_a^b x(t)\,dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt \right) \mathbf{j}
\end{aligned}
$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Isto é, a integral definida de ***r****(t)* ao longo do intervalo $a \leq t \leq b$ pode ser expressa como:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt &= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k \\
&= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j} \right] \\
&= \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j} \\
&= \left(\int_a^b x(t)\,dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt \right) \mathbf{j}
\end{aligned}
$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Isto é, a integral definida de ***r**(t)* ao longo do intervalo $a \le t \le b$ pode ser expressa como: um vetor cujos componentes são as integrais definidas das funções componentes de ***r**(t)*.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt &= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k \\
&= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k\right)\mathbf{j}\right] \\
&= \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k\right)\mathbf{j} \\
&= \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Isto é, a integral definida de ***r****(t)* ao longo do intervalo *a* ≤ *t* ≤ *b* pode ser expressa como: um vetor cujos componentes são as integrais definidas das funções componentes de ***r****(t)*.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt &= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k \\
&= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right)\mathbf{i} + \left(\sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right)\mathbf{j} \right] \\
&= \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right)\mathbf{i} + \left(\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right)\mathbf{j} \\
&= \left(\int_a^b x(t)\,dt \right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt \right)\mathbf{j}
\end{aligned}
$$

3D é
semelhante

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - De forma geral:
      - Bidimensional

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j}$$

      - Tridimensional

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b z(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Exemplo: Qual a integral de $0 \leq t \leq 1$?

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Integrais definidas de funções vetoriais
    - Exemplo: Qual a integral de *0 ≤ t ≤ 1*?

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$$

$$\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_0^1 t^2\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^1 e^t\,dt\right)\mathbf{j} - \left(\int_0^1 2\cos \pi t\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{t^3}{3}\bigg]_0^1 \mathbf{i} + e^t\bigg]_0^1 \mathbf{j} - \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} \pi t\bigg]_0^1 \mathbf{k} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + (e-1)\mathbf{j}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Teorema: Regras de integração
    - Sejam ***r****(t)*, ***r****$_1$(t)* **e** ***r****$_2$(t)* funções vetoriais que são todas 2D ou 3D e que sejam contínuas no intervalo $a \leq t \leq b$ e seja k um escalar

$$\text{(a)} \quad \int_a^b k\mathbf{r}(t)\,dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Teorema: Regras de integração
    - Sejam ***r(t), r₁(t) e r₂(t)*** funções vetoriais que são todas 2D ou 3D e que sejam contínuas no intervalo $a \leq t \leq b$ e seja k um escalar

$$\text{(a)} \quad \int_a^b k\mathbf{r}(t)\,dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$$

$$\text{(b)} \quad \int_a^b [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Teorema: Regras de integração
    - Sejam $\boldsymbol{r(t)}$, $\boldsymbol{r_1(t)}$ **e** $\boldsymbol{r_2(t)}$ funções vetoriais que são todas 2D ou 3D e que sejam contínuas no intervalo $a \leq t \leq b$ e seja k um escalar

$$\text{(a)} \quad \int_a^b k\mathbf{r}(t)\,dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$$

$$\text{(b)} \quad \int_a^b [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

$$\text{(c)} \quad \int_a^b [\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt - \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Antiderivada

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Antiderivada

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$$

    - Notação de integral

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$$

      - Onde ***C*** é um vetor contante arbitrário

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Antiderivada

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$$

    - Notação de integral

$$\int \mathbf{r}(t)\, dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$$

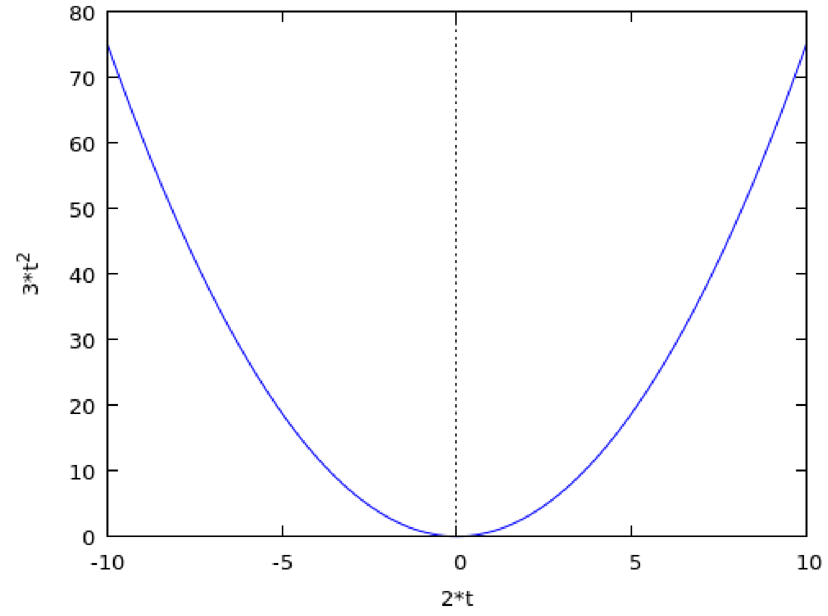
      - Onde ***C*** é um vetor contante arbitrário

Também pode ser efetuada componente a componente

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Exemplo:

$$\int (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\, dt$$



Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Exemplo:

$$\int (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\,dt = \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int 3t^2\,dt\right)\mathbf{j}$$

$$= (t^2 + C_1)\mathbf{i} + (t^3 + C_2)\mathbf{j}$$

$$= (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}) + (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}) = (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}) + \mathbf{C}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - A derivação e a integração de funções vetoriais também são operações inversas

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{r}(t)\,dt=\boldsymbol{r}(t) \qquad \int \boldsymbol{r}'(t)\,dt=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{C}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - A derivação e a integração de funções vetoriais também são operações inversas

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{r}(t)\,dt=\mathbf{r}(t) \qquad \int \mathbf{r}'(t)\,dt=\mathbf{r}(t)+\mathbf{C}$$

    - Se ***R**(t)* for uma antiderivada de ***r**(t)* em um intervalo contendo $t = a$ e $t = b$, então

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt=\mathbf{R}(t)\Big]_a^b=\mathbf{R}(b)-\mathbf{R}(a)$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - A derivação e a integração de funções vetoriais também são operações inversas

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{r}(t)\,dt=\mathbf{r}(t) \qquad \int \mathbf{r}'(t)\,dt=\mathbf{r}(t)+\mathbf{C}$$

    - Se ***R**(t)* for uma antiderivada de ***r**(t)* em um intervalo contendo $t = a$ e $t = b$, então

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt=\mathbf{R}(t)\Big]_a^b=\mathbf{R}(b)-\mathbf{R}(a)$$

Forma vetorial do Teorema Fundamental do Cálculo

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Exemplo: Calcule a integral definida

$$\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\, dt$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Exemplo: Calcule a integral definida

$$\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\, dt$$

$$\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\, dt = t^2\Big]_0^2\, \mathbf{i} + t^3\Big]_0^2\, \mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Exemplo: Obtenha $\mathbf{r}(t)$ sabendo que $\mathbf{r}'(t) = \langle 3, 2t \rangle$ e $\mathbf{r}(1) = \langle 2, 5 \rangle$

Cálculo de funções vetoriais

- Integrais
  - Antiderivadas de funções vetoriais
    - Exemplo: Obtenha ***r****(t)* sabendo que ***r'****(t)* = *<3,2t>* e ***r****(1)* = *<2,5>*
      - Integrando ***r'****(t)*

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{r}'(t)\,dt = \int \langle 3, 2t \rangle\,dt = \langle 3t, t^2 \rangle + \mathbf{C}$$

onde ***C*** é um vetor constante de integração.

      - Encontrando ***C*** (substitui r(1))

$$\mathbf{r}(1) = \langle 3, 1 \rangle + \mathbf{C} = \langle 2, 5 \rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \langle -1, 4 \rangle$$

      - Descobrindo ***r****(t)*

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3t, t^2 \rangle + \langle -1, 4 \rangle = \langle 3t - 1, t^2 + 4 \rangle$$

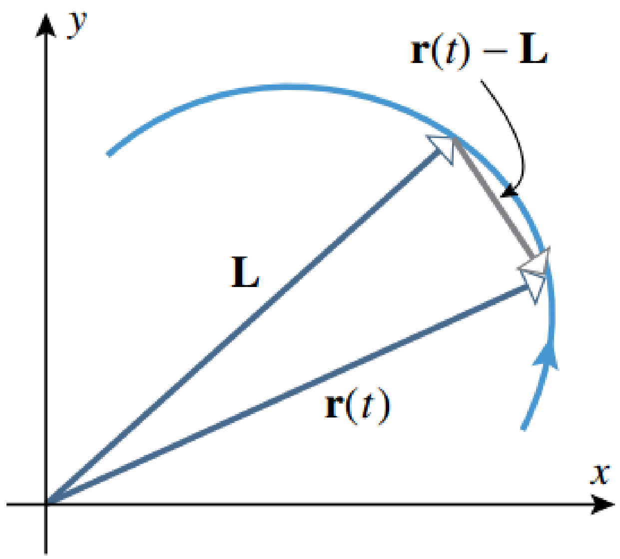
Resumo

Resumo

- Cálculo de funções vetoriais
  - Limite

Todos são semelhantes a funções de uma variável em real

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} x(t), \lim_{t\to a} y(t) \right\rangle = \lim_{t\to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t\to a} y(t)\mathbf{j}$$



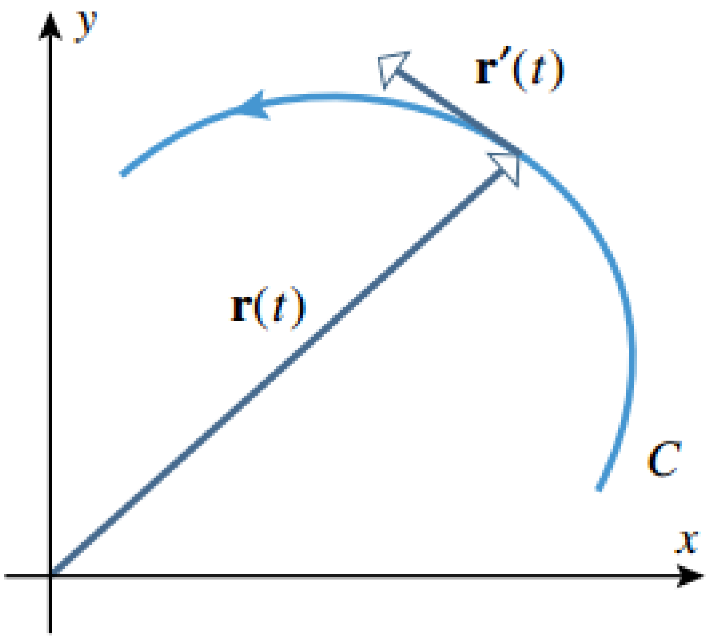
Os cálculos são feitos componente a componente

Resumo

- Cálculo de funções vetoriais
  - Derivada

Todos são semelhantes a funções de uma variável em real

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$



Os cálculos são feitos componente a componente

Resumo

- Cálculo de funções vetoriais
  - Integral

Todos são semelhantes a funções de uma variável em real

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k$$

$$= \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j}$$

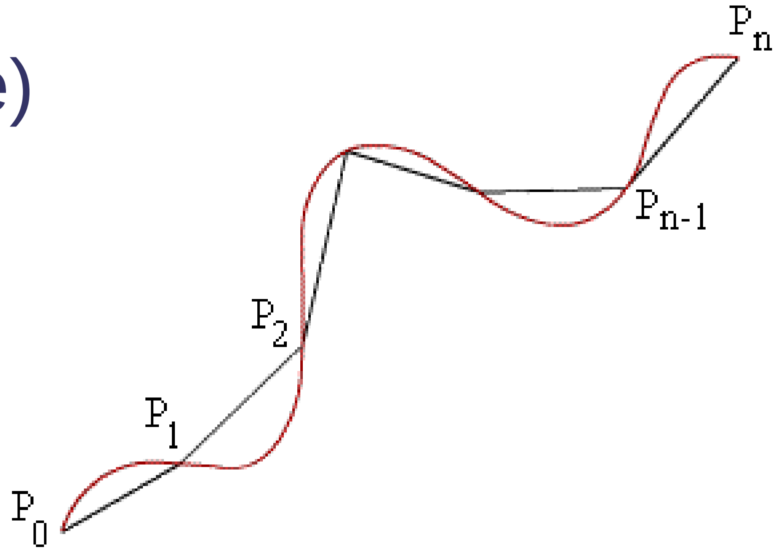
Os cálculos são feitos componente a componente

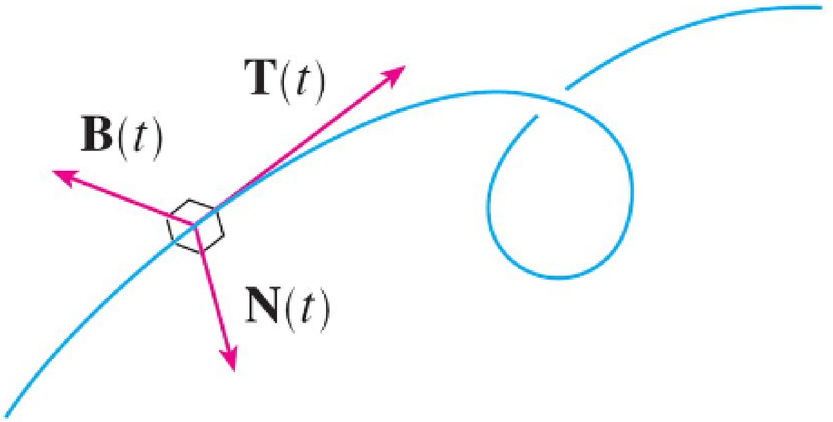
Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Exercícios de compreensão 12.2
  - 1-6
  - 11-14
  - 31-40

Resumo

- Próxima aula:
  - Parametrização lisa (suave)
  - Comprimento de arco
  - Mudança de parâmetro
  - Vetores
    - Tangentes
    - Normal
    - Binormal





Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 12.2