
Sistemas de Equações Lineares

Unidade 1

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Revisão

Revisão

- Sistemas lineares

- A solução é valores de x_i que satisfazem todas as equações ao mesmo tempo
- Classificação quanto a solução

- Consistente

- Determinado
 - Indeterminado

- Inconsistente

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Matrizes e vetores

- Para algumas operações é preciso que as matrizes sejam compatíveis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Combinação linear

Combinação linear

- Definição 1:

Uma combinação linear dos vetores (de mesma dimensão, m) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ é um vetor da forma

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

para escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $A\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

O resultado é um
vetor $(A\mathbf{x})_{m \times 1}$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $A\mathbf{x}$
 - Interpretando cada coluna de A como um vetor

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cdots & \boxed{a_{1n}} & \boxed{x_1} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \cdots & \boxed{a_{2n}} & \boxed{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{m1}} & \boxed{a_{m2}} & \cdots & \boxed{a_{mn}} & \boxed{x_n} \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $A\mathbf{x}$
 - Interpretando cada coluna de A como um vetor

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cdots & \boxed{a_{1n}} & \boxed{x_1} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \cdots & \boxed{a_{2n}} & \boxed{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{m1}} & \boxed{a_{m2}} & \cdots & \boxed{a_{mn}} & \boxed{x_n} \end{bmatrix}$$

- Reescrevendo a matriz como concatenação de vetores

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$a_{:i}$ indica
todas as linhas
da coluna i

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $A\mathbf{x}$
 - Interpretando cada coluna de A como um vetor

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cdots & \boxed{a_{1n}} & \boxed{x_1} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \cdots & \boxed{a_{2n}} & \boxed{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{m1}} & \boxed{a_{m2}} & \cdots & \boxed{a_{mn}} & \boxed{x_n} \end{bmatrix}$$

- Reescrevendo a matriz como concatenação de vetores

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_{:1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_{:2} \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_{:n} \\ | \end{bmatrix}$$

Soma de n vetores
de tamanho m

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $A\mathbf{x}$
 - Interpretando cada coluna de A como um vetor

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cdots & \boxed{a_{1n}} & \boxed{x_1} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \cdots & \boxed{a_{2n}} & \boxed{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{m1}} & \boxed{a_{m2}} & \cdots & \boxed{a_{mn}} & \boxed{x_n} \end{bmatrix}$$

O produto $A\mathbf{x}$ é a combinação linear das colunas de A , cujos coeficientes são as coordenadas de \mathbf{x}

- Reescrevendo a matriz como concatenação de vetores

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_{:1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_{:2} \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_{:n} \\ | \end{bmatrix}$$

Soma de n vetores de tamanho m

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação Ax
 - **Exercício:** Calcule a multiplicação como uma combinação linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação Ax
 - **Exercício:** Calcule a multiplicação como uma combinação linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Generalizando para o produto de matrizes

$$A_{m \times p} B_{p \times n} = A \begin{bmatrix} \begin{array}{c} | \\ b_{:1} \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ b_{:2} \\ | \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} | \\ b_{:n} \\ | \end{array} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} | \\ Ab_{:1} \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ Ab_{:2} \\ | \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} | \\ Ab_{:n} \\ | \end{array} \end{bmatrix}$$

Cada coluna é visto como uma combinação linear

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$

O resultado é um
vetor linha $(\mathbf{y}^T \mathbf{A})_{1 \times n}$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$
 - Interpretando cada linha de \mathbf{A} como um vetor

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{y_1} & \boxed{y_2} & \cdots & \boxed{y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \ a_{22} \ \cdots \ a_{2n}} \\ \vdots \\ \boxed{a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Outra interpretação para a multiplicação $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$
 - Interpretando cada linha de \mathbf{A} como um vetor

O produto $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$ é a combinação linear das linhas de \mathbf{A} , cujos coeficientes são as coordenadas de \mathbf{y}

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Reescrevendo a matriz como concatenação de vetores

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} & a_{1:} & \text{---} \\ \text{---} & a_{2:} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_{m:} & \text{---} \end{bmatrix}$$

Soma de m vetores de tamanho n

$$= y_1 [\text{---} \ a_{1:} \ \text{---}] + y_2 [\text{---} \ a_{2:} \ \text{---}] + \cdots + y_m [\text{---} \ a_{m:} \ \text{---}]$$

Combinação linear

- Generalizando para o produto de matrizes

$$C_{m \times p} A_{p \times n} = \begin{bmatrix} \text{---} & c_{1:} & \text{---} \\ \text{---} & c_{2:} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & c_{m:} & \text{---} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \text{---} & c_{1:} A & \text{---} \\ \text{---} & c_{2:} A & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & c_{m:} A & \text{---} \end{bmatrix}$$

Cada linha é vista como uma combinação linear

Resolução de sistemas

Resolução de sistemas

- Matriz diagonal
 - Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas

- Matriz diagonal
 - Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{-2}{1}, x_2 = \frac{-1}{3}, x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = t, y_2 = \frac{-1}{3}, y_3 = \frac{1}{2}$$



Variável livre

Resolução de sistemas

- Matriz diagonal
 - Forma geral

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Direto!

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Se fosse a matriz
identidade,
 $\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
 - Superior
 - Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
 - Superior
 - Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{-14t+9}{10}, y_2 = \frac{2-3t}{5}, y_3 = t$$

Variáveis líderes

Variável livre

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
 - Superior
 - Forma geral

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j}{a_{kk}}, \text{ para } k = n, n-1, \dots, 1$$

Substituição
retroativa!

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
 - Inferior
 - **Exercício**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
 - Inferior
 - Exercício

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = t$$

Resolução de sistemas

- Matriz triangular
 - Inferior
 - Forma geral

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}}, \text{ para } k=1, 2, \dots, n$$

Substituição
direta!

Resolução de sistemas

- Matriz cheia
 - É preciso modificar o sistema para que fique com a matriz dos coeficientes triangular ou diagonal
 - Sistema equivalente

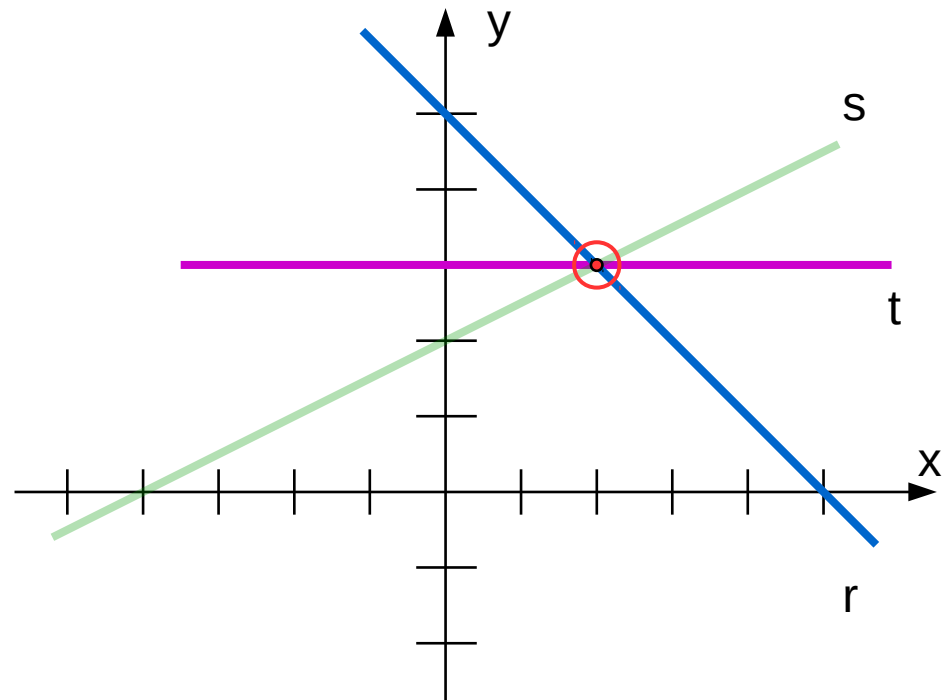
$$r: \boxed{x + y = 5}$$

$$s: -x + 2y = 4(+)$$

$$0 + 3y = 9$$

$$t: \boxed{y = 3}$$

Novo sistema
equivalente



Resolução de sistemas

- Matriz cheia
 - É preciso modificar o sistema para que fique com a matriz dos coeficientes triangular ou diagonal
 - Sistema equivalente
 - Operações elementares

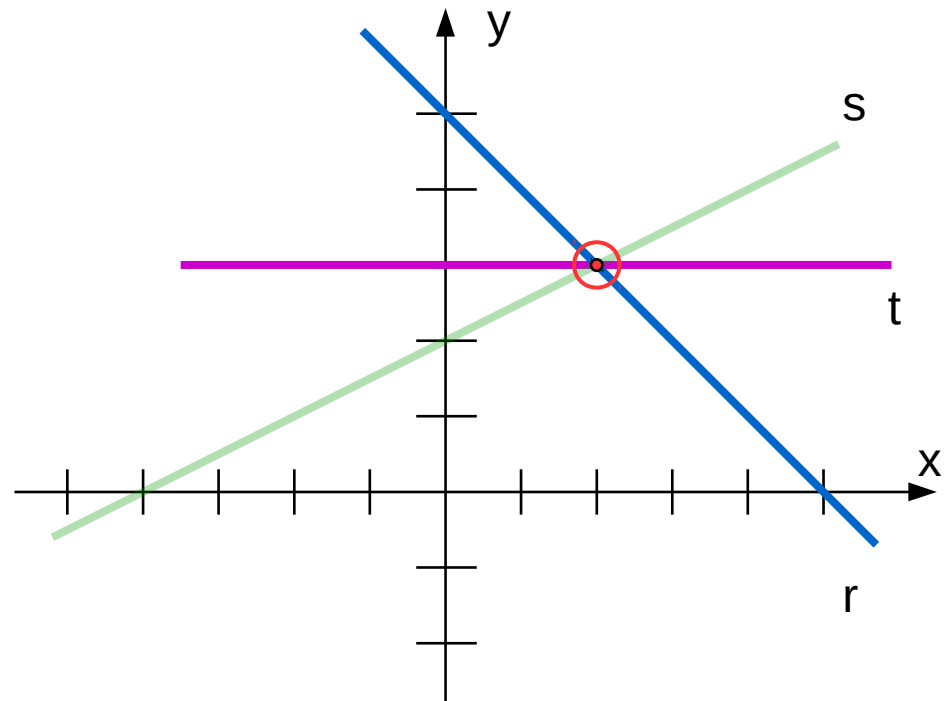
$$r: \boxed{x + y = 5}$$

$$s: -x + 2y = 4(+)$$

$$0 + 3y = 9$$

$$t: \boxed{y = 3}$$

Modifica-se os coeficientes
e os termos independentes



Operações elementares

Operações elementares

- O método básico de resolver um sistema de equações lineares é:
 - Efetuar **operações algébricas** no sistema que não alterem seu conjunto de soluções
 - Produz-se uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até alcançar um ponto em que se possa decidir se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções

Operações elementares

- Matriz aumentada
 - Para poder modificar o sistema todo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

Para não
ficar escrevendo
as incógnitas

Operações elementares

- Matriz aumentada
 - Modifica-se o sistema todo
 - Forma geral

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Operações elementares

- Definição 2:

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são:

1. Multiplicar uma equação/linha inteira por uma constante não nula. $[L_i \leftarrow \alpha L_i]$
2. Trocar duas equações/linhas entre si. $[L_i \leftrightarrow L_k]$
3. Adicionar um múltiplo de uma equação/linha em outra equação/linha. $[L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k]$

Combinação
linear de linhas

Para ser considerado
operação elementar,
se faz uma coisa de
cada vez!

Operações elementares

- Exemplo
 - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

Operações elementares

- Exemplo
 - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

Operações elementares

- Exemplo

- Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -7 \end{aligned}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 4x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Operações elementares

- Exemplo
 - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array} \right]$$

Operações elementares

- Exemplo

- Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array} \right]$$

Poderia ter feito uma combinação da linha 3 com a linha 1?

Operações elementares

- Exemplo

- Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 4x_3 &= -2 \\ -x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Poderia continuar até transformar em uma matriz diagonal!

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow U \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

Operações elementares

- Exemplo
 - Aplicar operações elementares para resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando
substituição
retroativa

$$x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 2$$

Operações elementares

- **Exercício**

- Aplicar operações elementares para resolver o sistema

- Transforme em uma matriz identidade

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & = & 5 \\ -x & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

Operações elementares

- **Exercício**

- Aplicar operações elementares para resolver o sistema

- Transforme em uma matriz identidade

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & = & 5 \\ -x & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{3}} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{array}$$

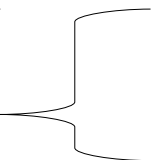
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 0 & = & 2 \\ 0 & + & y & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x=2; y=3$$

Resumo

Resumo

- Combinação linear $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$

$$A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_{:1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_{:2} \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_{:n} \\ | \end{bmatrix}$$

- Solução de sistemas com matrizes
 - Diagonal
 - Triangular 
 - Superior: substituição retroativa
 - Inferior: substituição direta
- Operações elementares
 - $L_i \leftarrow \alpha L_i$
 - $L_i \leftrightarrow L_k$
 - $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k$

Resumo

- Exercícios de fixação
 - Anton
 - 1.1.2
 - [V/F] 1.1(e, h)
 - Araujo
 - 1.1.1-1.1.2
 - 1.1.4-1.1.5

Resumo

- Próxima aula
 - Método de eliminação gaussiana
 - Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Método de eliminação de Gauss-Jordan
 - Forma escalonada reduzida
- Sistemas homogêneos

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

Bibliografia

Bibliografia

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10^a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
 - Seção 1.1(continuação)
- DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
 - Seção 1.1(continuação) e 1.2(parcial)