Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

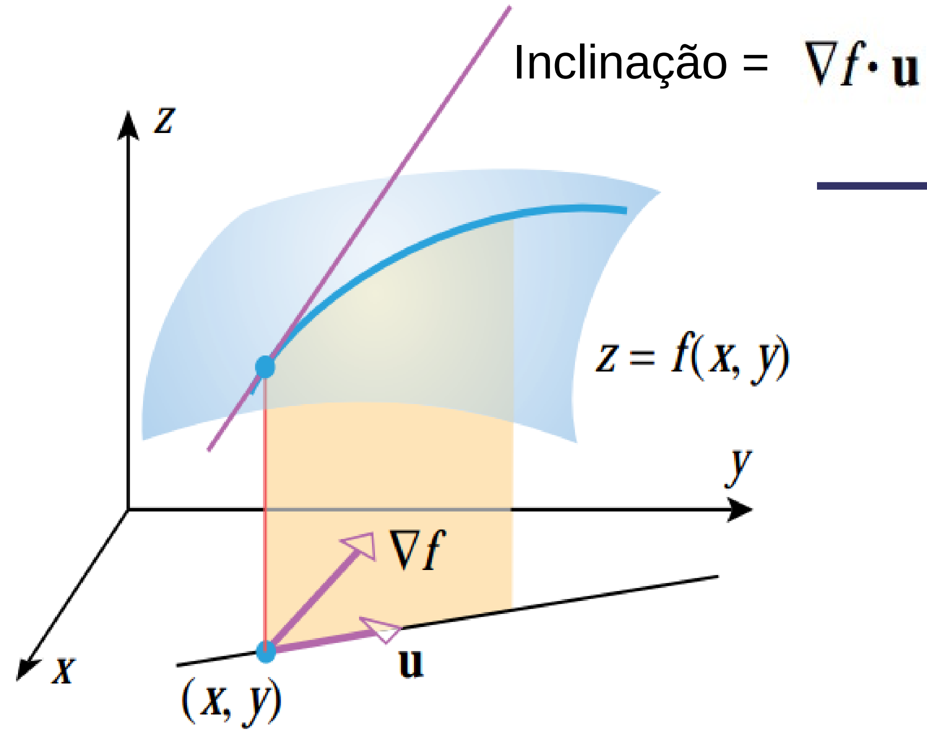
Índice

- Revisão
- Máximos e mínimos
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

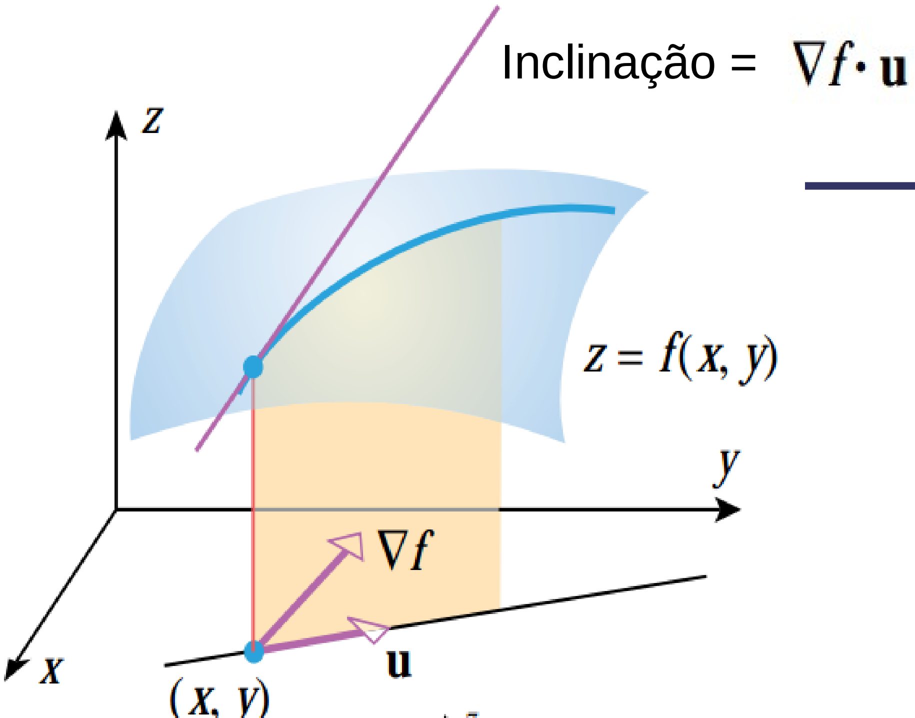
Revisão

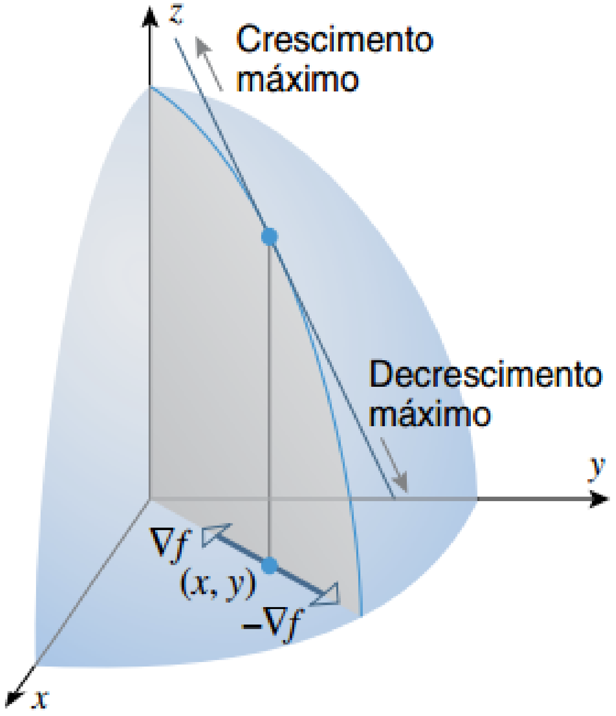
- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção



Revisão

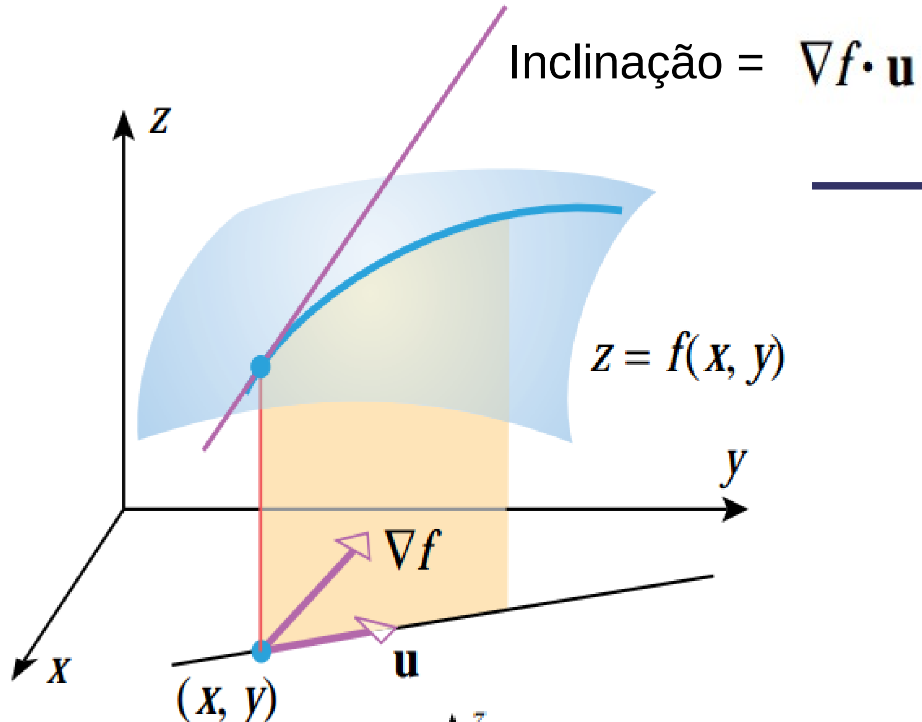
- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção
- Gradiente
  - Inclinação máxima

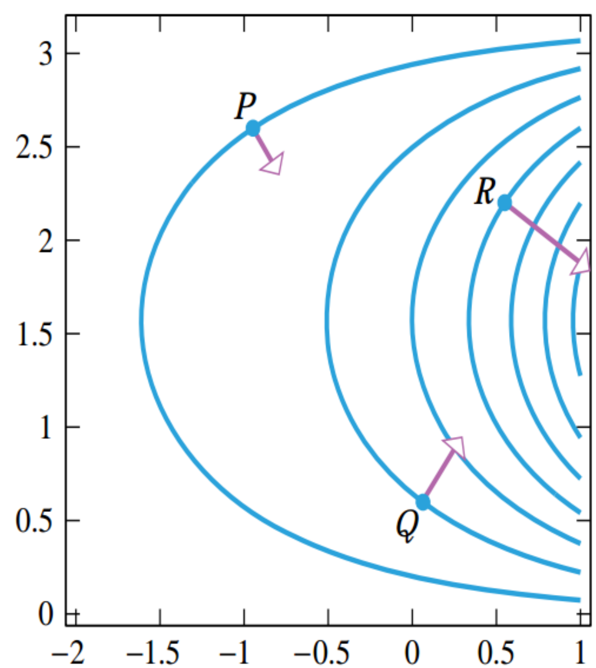


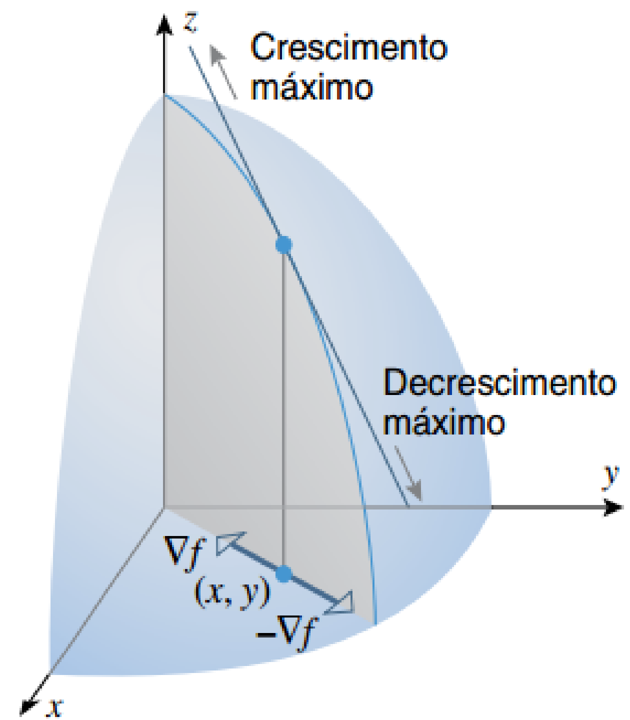


Revisão

- Derivadas direcionais
  - Inclinação em qualquer direção
- Gradiente
  - Inclinação máxima
  - É o vetor normal às curva de nível







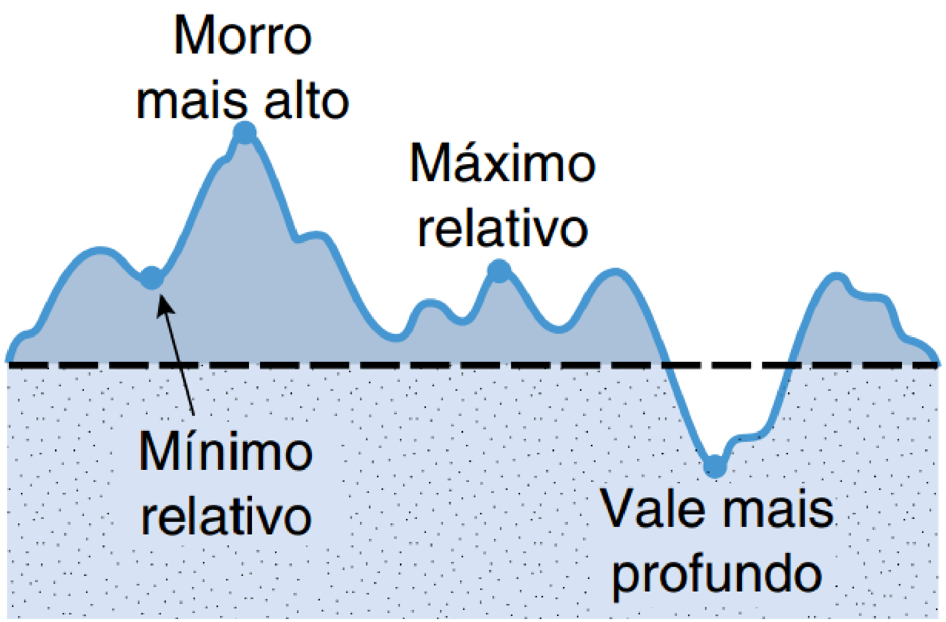
Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

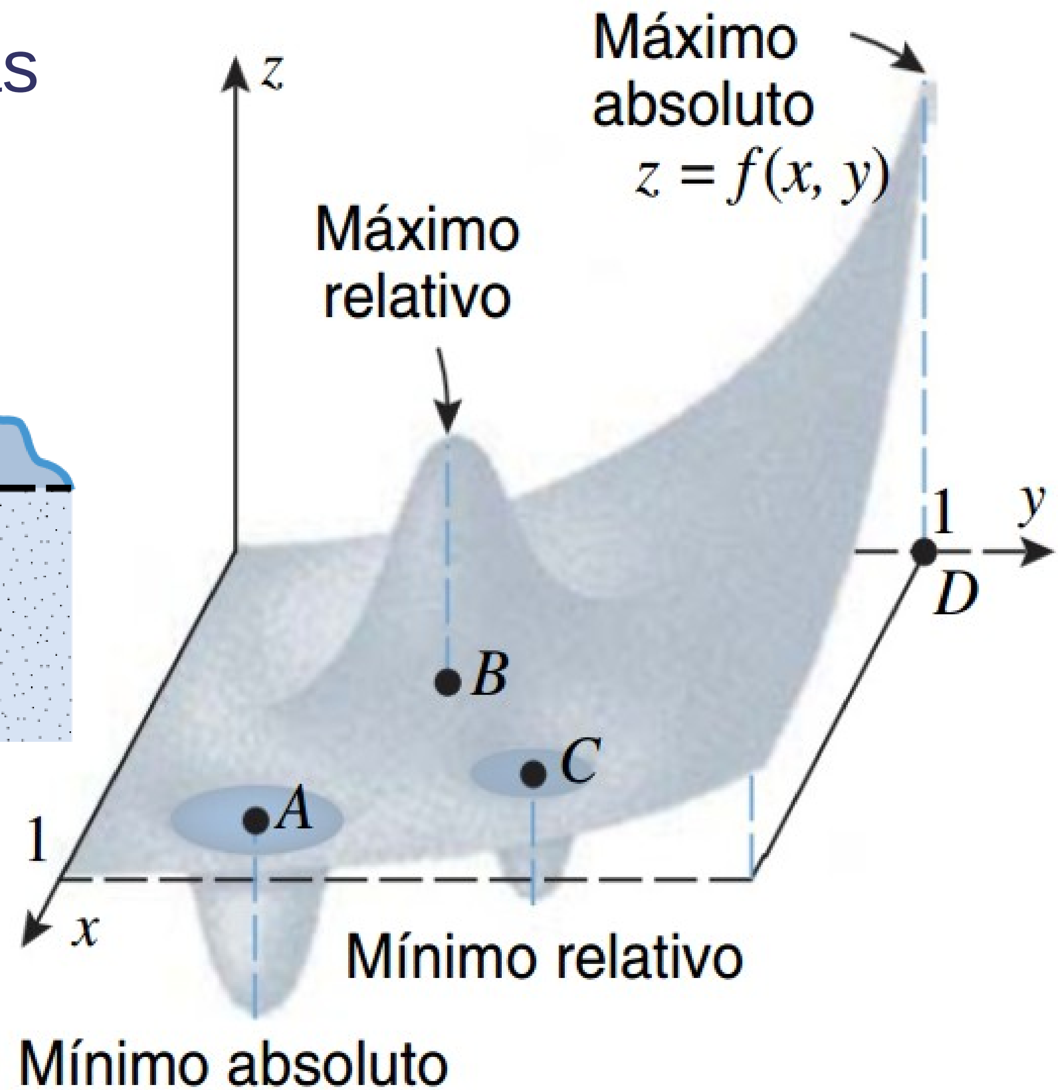
Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Motivação
  - Cadeia de montanhas

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Motivação
  - Cadeia de montanhas

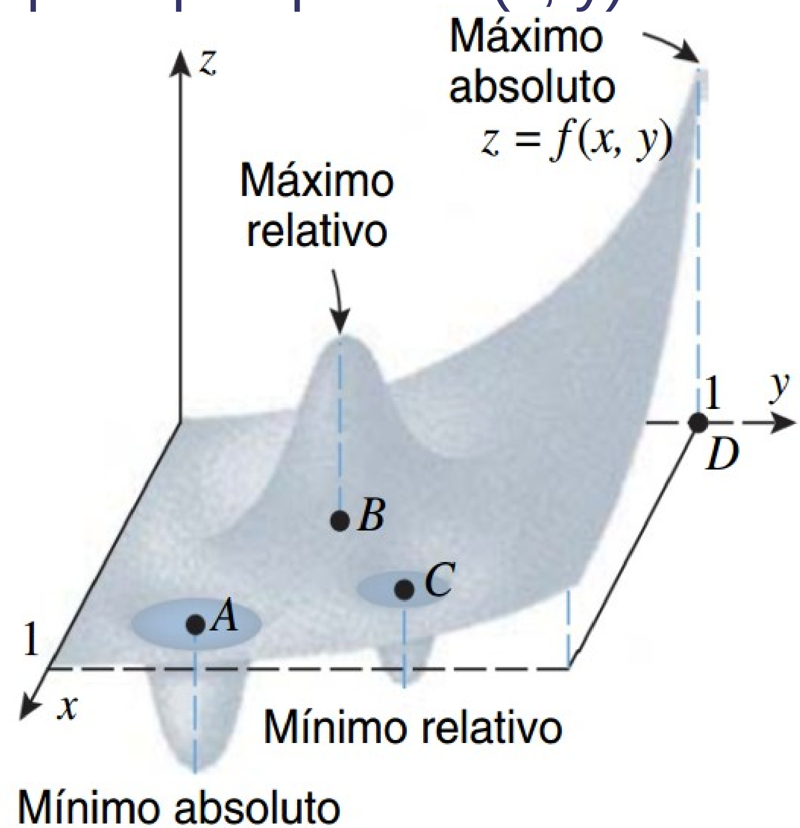




Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Definições: Máximos e mínimos
  - Uma função f de duas variáveis tem em um ponto (x_0, y_0)...
    - um **máximo relativo** se houver um círculo centrado em (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) dentro do círculo
    - um **máximo absoluto** se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) do domínio de f

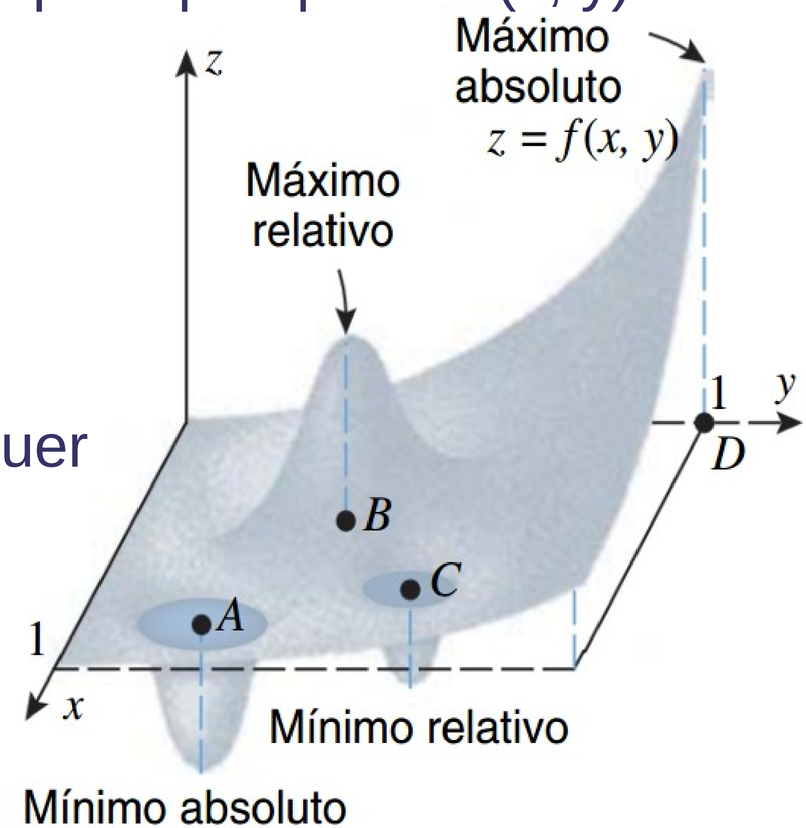
Não se especifica o raio



Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Definições: Máximos e mínimos
  - Uma função f de duas variáveis tem em um ponto (x_0, y_0)...
    - um **máximo relativo** se houver um círculo centrado em (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) dentro do círculo
    - um **máximo absoluto** se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) do domínio de f
    - um **mínimo relativo** se houver um círculo centrado em (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) dentro do círculo
    - um **mínimo absoluto** se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) do domínio de f

Não se especifica o raio



Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Definições: Máximos e mínimos
  - Uma função f de duas variáveis tem em um ponto (x_0, y_0)...

Não se especifica o raio

Extremo relativo

- um **máximo relativo** se houver um círculo centrado em (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) dentro do círculo

Extremo absoluto

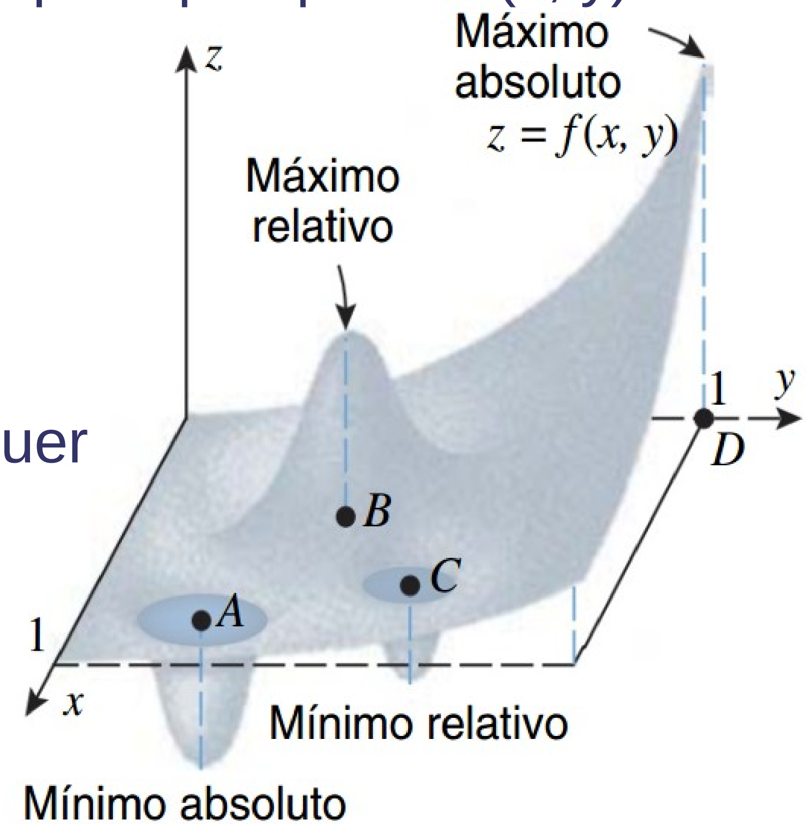
- um **máximo absoluto** se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) do domínio de f

Extremo relativo

- um **mínimo relativo** se houver um círculo centrado em (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) dentro do círculo

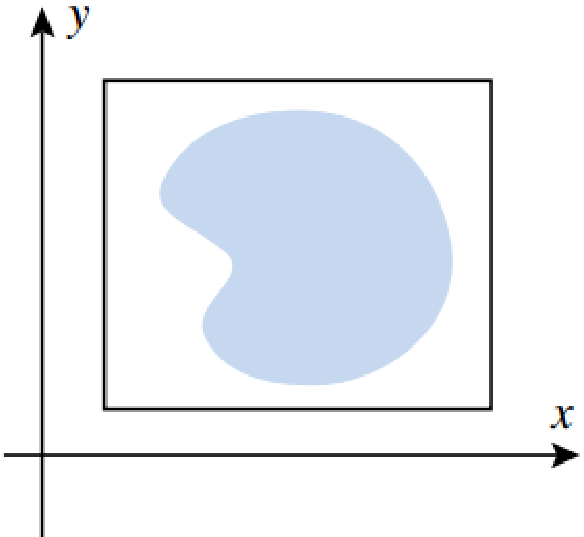
Extremo absoluto

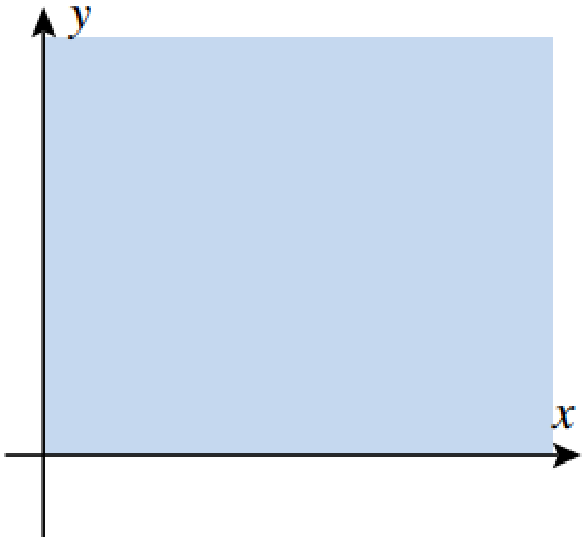
- um **mínimo absoluto** se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ em quaisquer pontos (x, y) do domínio de f



Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

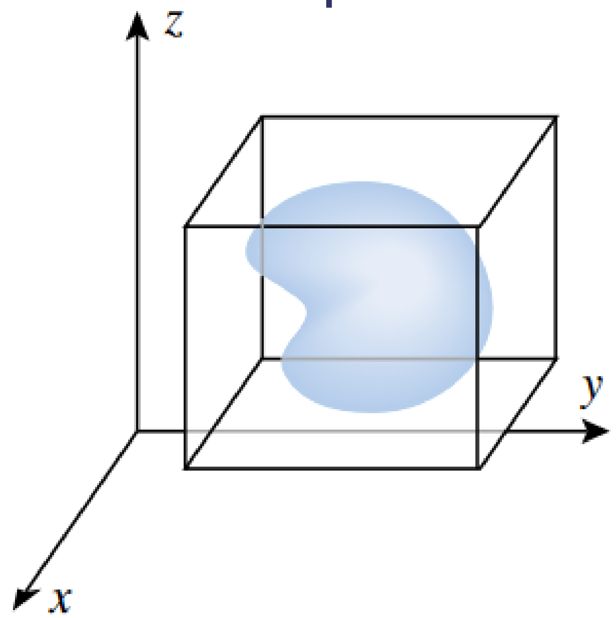
- Conjuntos limitados
  - Para funções de uma variável
    - Distinção entre domínio finito e infinito na reta x
  - Para funções de duas variáveis
    - **Limitado**: o conjunto inteiro couber dentro de algum retângulo
    - **Ilimitado**: não há retângulo que contenha todos os pontos do conjunto





Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Conjuntos limitados
  - Para funções de uma variável
    - Distinção entre domínio finito e infinito na reta x
  - Para funções de três variáveis
    - **Limitado**: o conjunto inteiro couber dentro de alguma caixa
    - **Ilimitado**: não há caixa que contenha todos os pontos do conjunto



Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

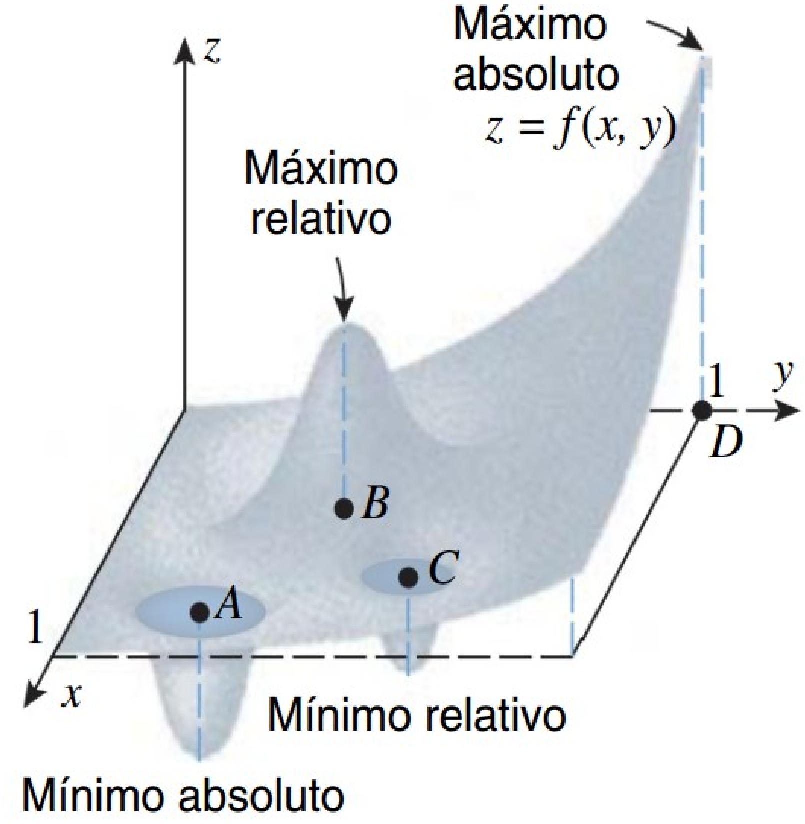
- Definição: Teorema do valor extremo
  - Se f(x, y) for **contínua** em um **conjunto fechado** e **limitado** R, então f terá máximo e mínimo absolutos em R

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: A região quadrada R cujos pontos satisfazem as desigualdades

$$0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le 1$$

é um conjunto fechado e limitado no plano xy



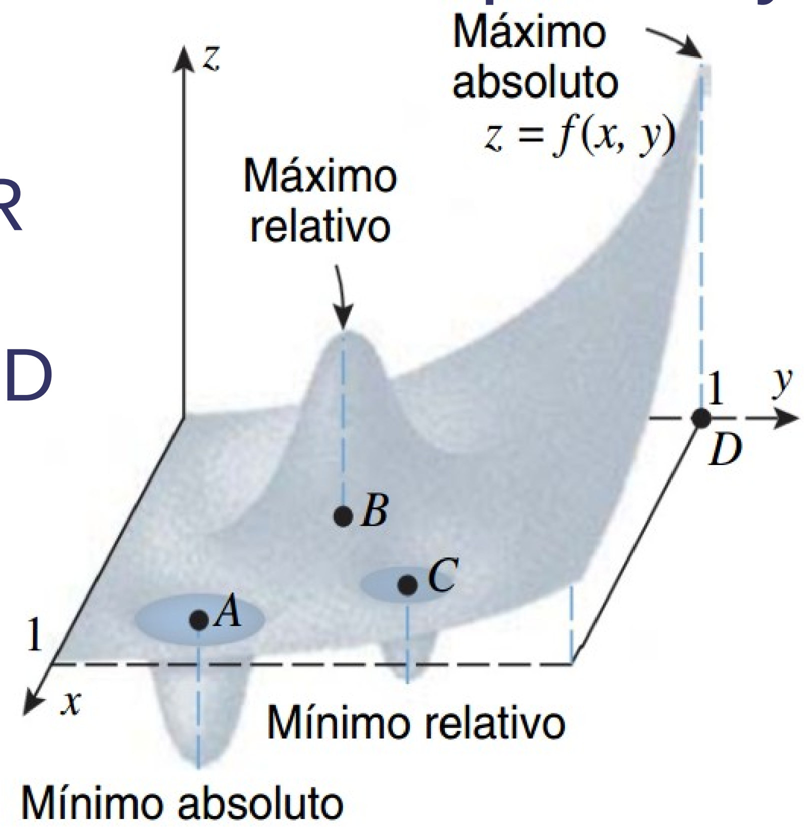
Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: A região quadrada R cujos pontos satisfazem as desigualdades

$$0 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq y \leq 1$$

é um conjunto fechado e limitado no plano xy

  - O teorema anterior garante a existência de extremos absolutos em R
  - Ocorrem nos pontos A e D

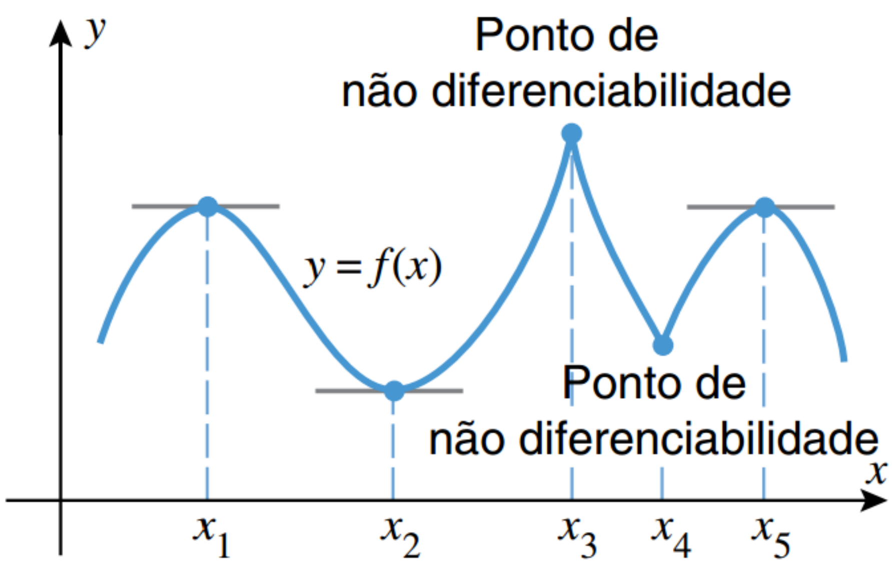


Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Observações:
  - Uma função **descontínua** em um conjunto fechado e limitado **não precisa ter extremos absolutos**
  - Uma função contínua em um conjunto que **não é fechado** ou que **não é limitado** tampouco precisa ter algum extremo absoluto

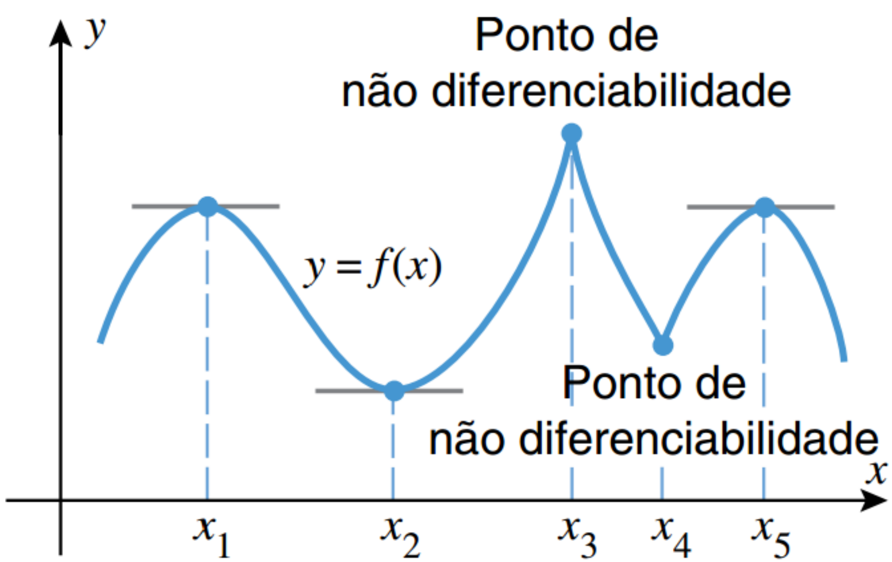
Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Função de uma variável
    - Se uma função g tiver um extremo relativo em um ponto x_0 onde g é diferenciável, então $g'(x_0) = 0$



Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Função de uma variável
    - Se uma função g tiver um extremo relativo em um ponto x_0 onde g é diferenciável, então $g'(x_0) = 0$



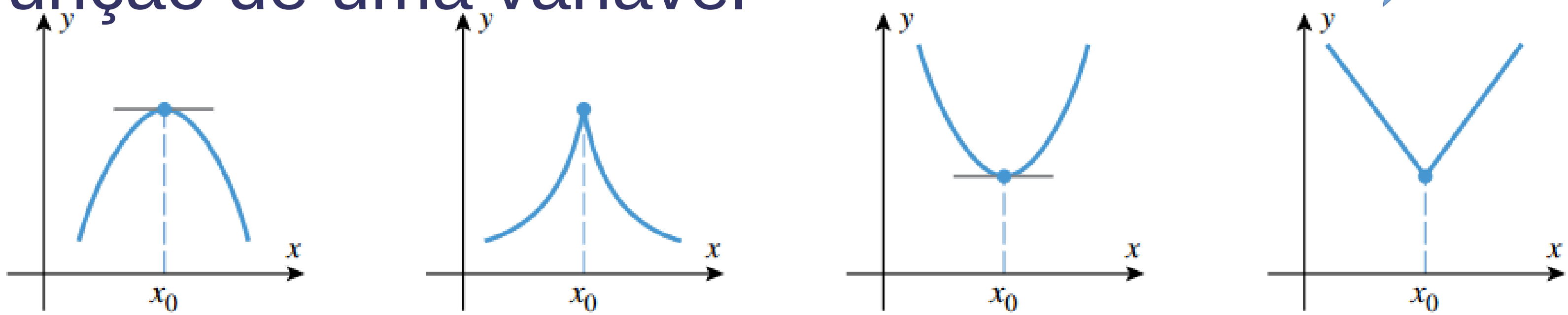
Vai ser análogo para duas variáveis

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Ponto estacionário é o que tem derivada zero

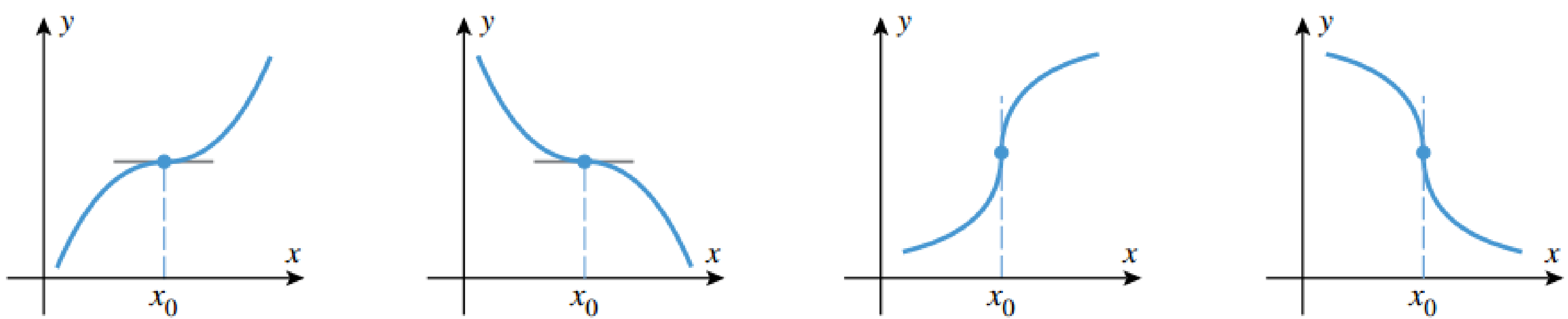
- Encontrando extremos relativos
  - Função de uma variável

O sinal da derivada segunda indica mínimo ou máximo



Ponto crítico Ponto estacionário Máximo relativo	Ponto crítico Ponto não estacionário Máximo relativo	Ponto crítico Ponto estacionário Mínimo relativo	Ponto crítico Ponto não estacionário Mínimo relativo

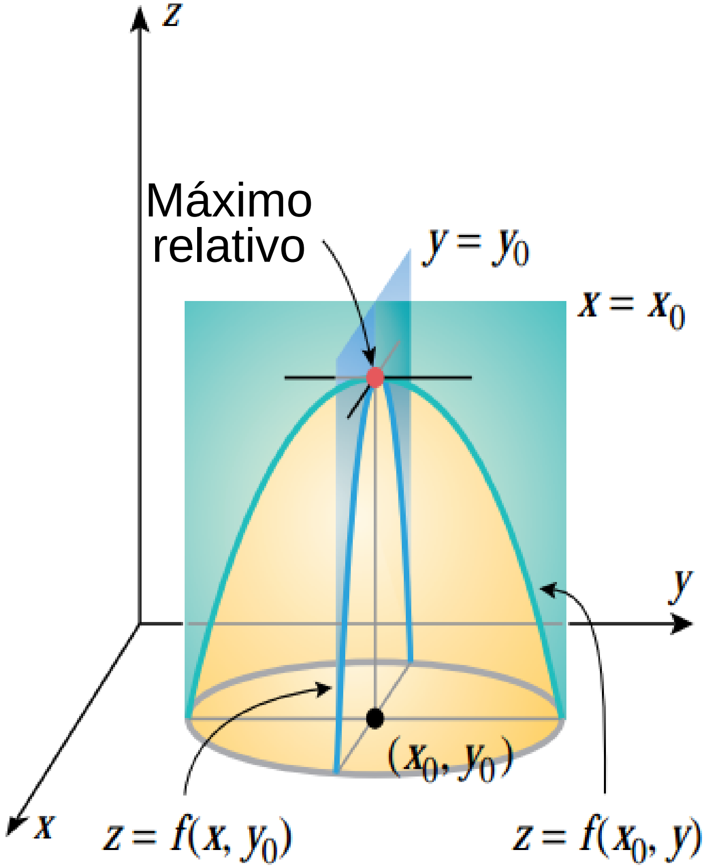
O sinal da derivada não muda em pontos de inflexão



Ponto crítico Ponto estacionário Ponto de inflexão Não um extremo relativo	Ponto crítico Ponto estacionário Ponto de inflexão Não um extremo relativo	Ponto crítico Ponto não estacionário Ponto de inflexão Não um extremo relativo	Ponto crítico Ponto não estacionário Ponto de inflexão Não um extremo relativo

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Teorema: Se f tiver um extremo relativo em um ponto (x_0, y_0) e se as derivadas parciais de primeira ordem de f existirem nesse ponto, então



$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Definição: Um ponto (x_0, y_0) no domínio de uma função $f(x, y)$ é denominado **ponto crítico** da função se
    - $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$; ou
    - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0)

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

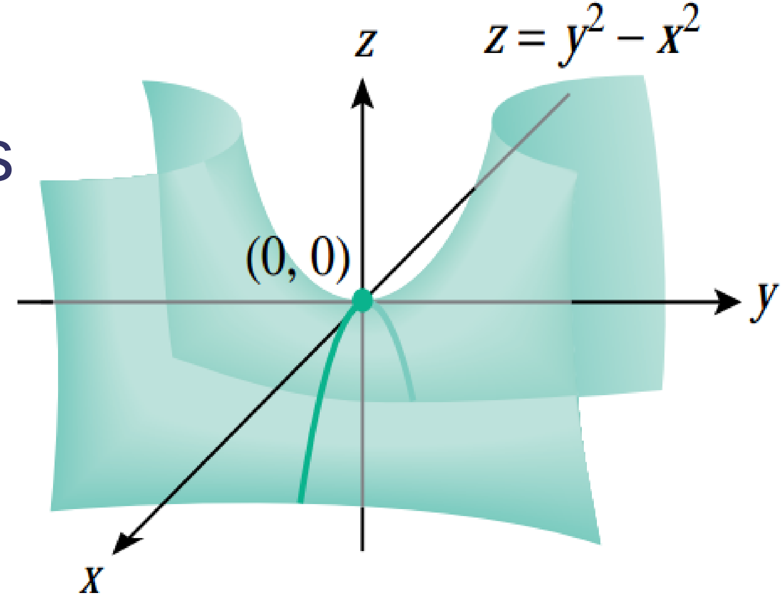
- Encontrando extremos relativos
  - Definição: Um ponto (x_0, y_0) no domínio de uma função $f(x, y)$ é denominado **ponto crítico** da função se
    - $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$; ou
    - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0)

os extremos relativos
ocorrem nos pontos críticos

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Definição: Um ponto (x_0, y_0) no domínio de uma função $f(x, y)$ é denominado **ponto crítico** da função se
    - $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$; ou
    - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0)
  - Pontos de mínimo e máximo não precisam ocorrer em todos os pontos críticos
    - Pontos de sela

Mínimo relativo em um plano e máximo em outro

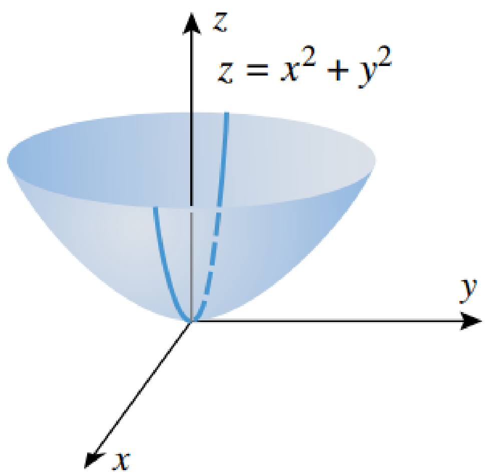


A função $f(x, y) = y^2 - x^2$ não tem máximo nem mínimo relativo no ponto crítico (0, 0).

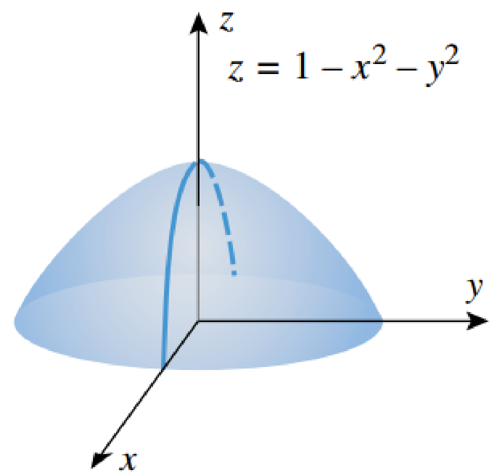
Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Exemplo: Pontos críticos no (0,0)

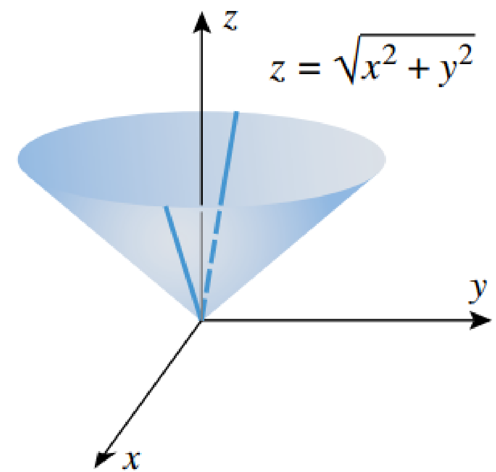
verificado algebricamente e visto geometricamente



$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
mín relativo e absoluto em $(0, 0)$



$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
máx relativo e absoluto em $(0, 0)$



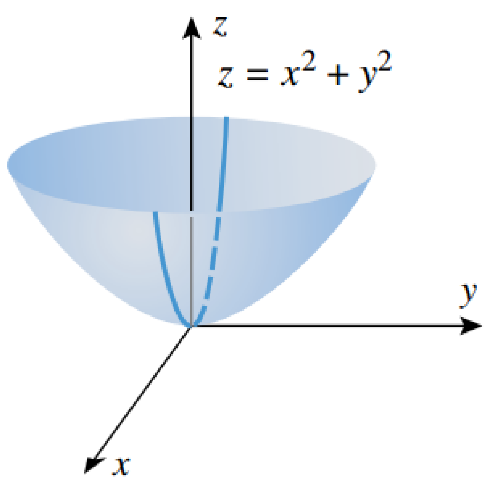
$f_x(0, 0)$ and $f_y(0, 0)$ não existem
mín relativo e absoluto em $(0, 0)$

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos relativos
  - Exemplo: Pontos críticos no (0,0)

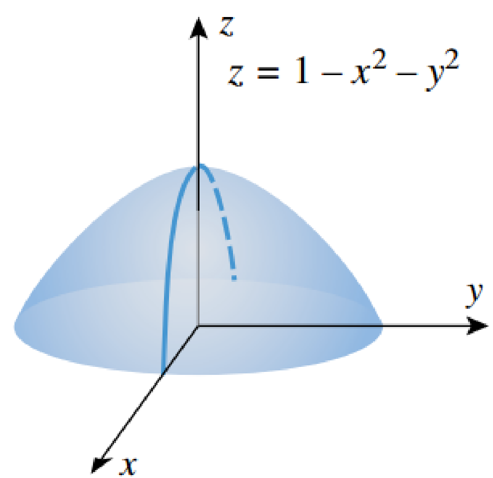
A função é contínua, porém não tem derivadas parciais na origem

Mínimo relativo e absoluto



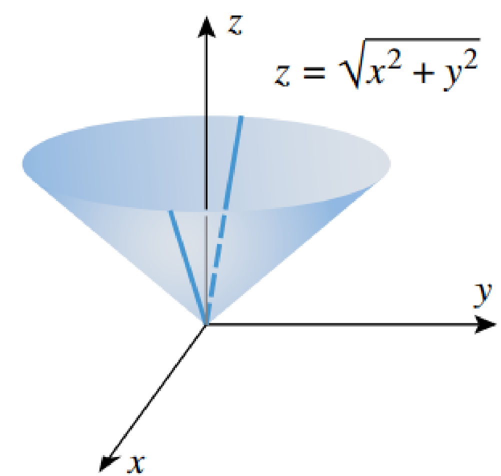
$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
mín relativo e absoluto em $(0, 0)$

Máximo relativo e absoluto



$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
máx relativo e absoluto em $(0, 0)$

Mínimo relativo e absoluto



$f_x(0, 0)$ and $f_y(0, 0)$ não existem
mín relativo e absoluto em $(0, 0)$

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Vem da matriz Hessiana

- Teorema: Teste da derivada segunda
  - Seja f uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em algum círculo centrado em um ponto crítico (x_0, y_0) e seja

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

    - Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então f terá um mínimo relativo em (x_0, y_0).
    - Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então f terá um máximo relativo em (x_0, y_0).
    - Se $D < 0$, então f terá um ponto de sela em (x_0, y_0).
    - Se $D = 0$, então nenhuma conclusão pode ser tirada.

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

Processo:
achar pontos críticos
e calcular D

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

  - Pontos críticos
    - Derivadas parciais

$$f_x(x, y) = 6x - 2y \quad f_y(x, y) = -2x + 2y - 8$$

    - Cálculo do ponto crítico

$$6x - 2y = 0$$

$$-2x + 2y - 8 = 0$$

(2, 6) é o único ponto crítico

  - Cálculo de D
    - Derivadas parciais de segunda ordem

$$f_{xx}(x, y) = 6, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$

    - Análise

$$f_{xx}(2, 6) = 6 > 0$$

Mínimo relativo

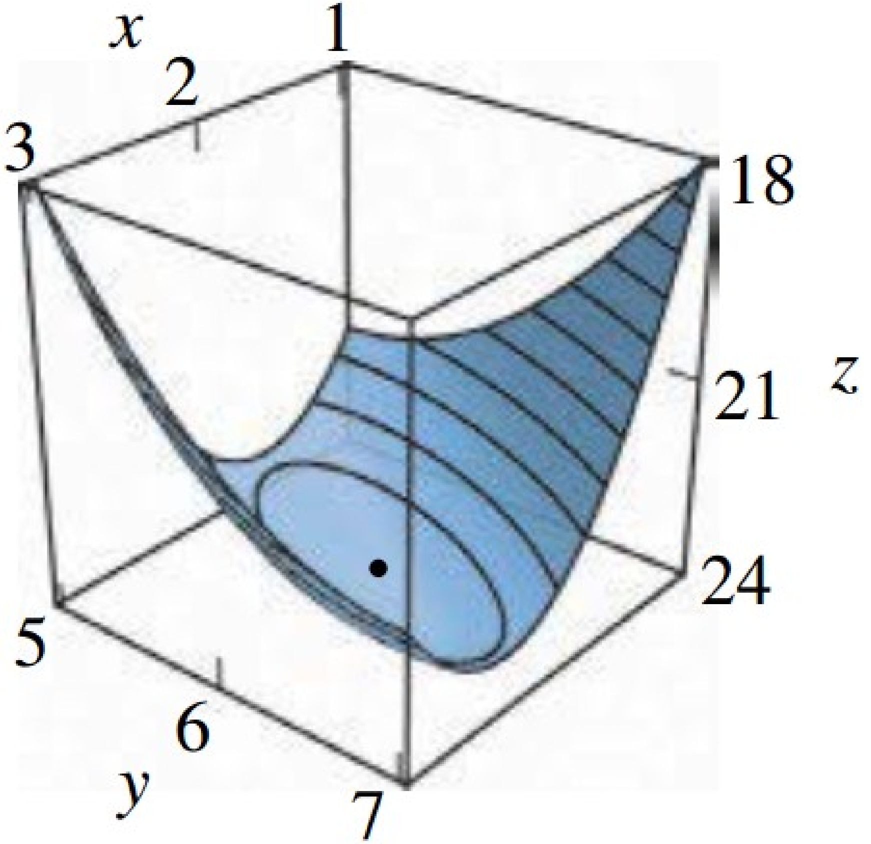
$$D = f_{xx}(2, 6)\,f_{yy}(2, 6) - f_{xy}^2(2, 6) = (6)(2) - (-2)^2 = 8 > 0$$

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exemplo: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

  - Gráfico



Mínimo relativo no ponto (2,6)

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

Processo:
achar pontos críticos
e calcular D

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

  - Pontos críticos
    - Derivadas parciais

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4y - 4x^3 \\ f_y(x, y) = 4x - 4y^3 \end{cases}$$

    - Cálculo do ponto crítico

$$\begin{aligned} 4y - 4x^3 &= 0 \\ 4x - 4y^3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= x^3 \\ x &= y^3 \end{aligned}$$

  - Cálculo de D
    - Derivadas parciais de segunda ordem

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2, \quad f_{yy}(x, y) = -12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

  – Análise

Ponto de sela

Máximos relativos

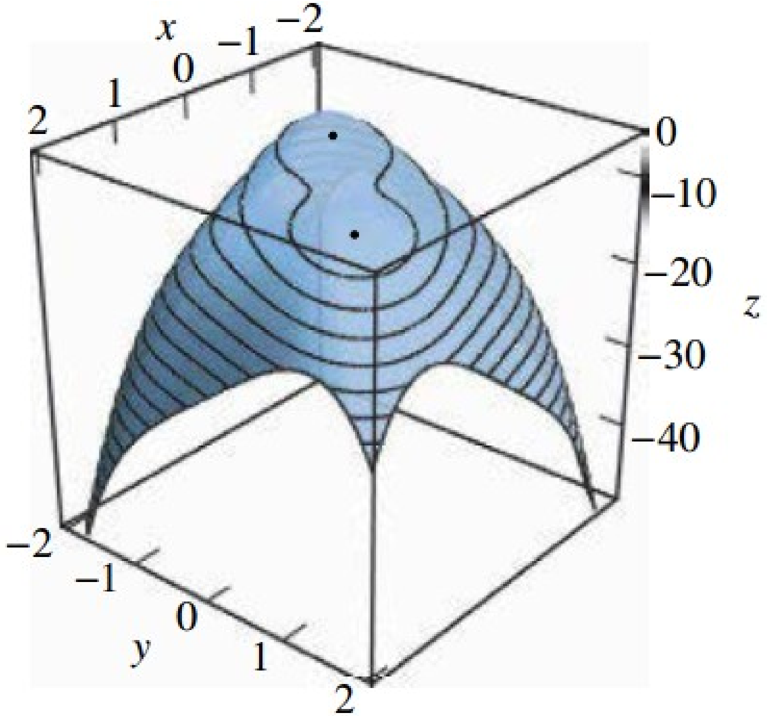
PONTO CRÍTICO (x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$
$(0, 0)$	0	0	4	–16
$(1, 1)$	–12	–12	4	128
$(-1, -1)$	–12	–12	4	128

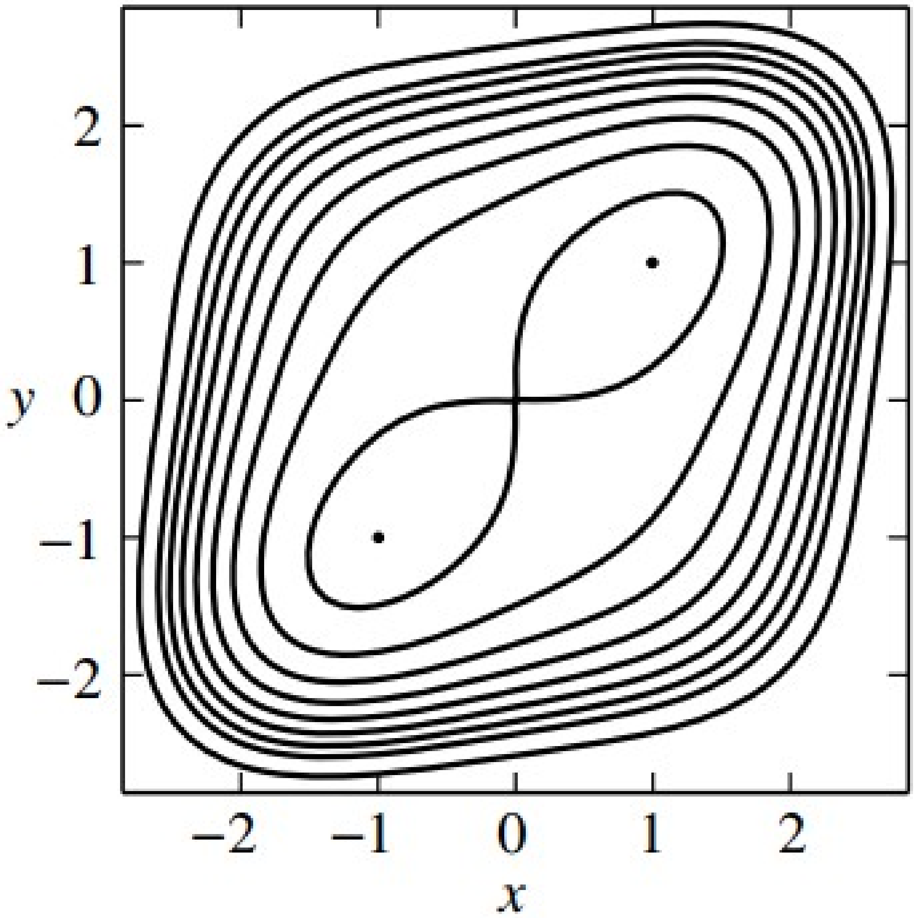
Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

  - Análise



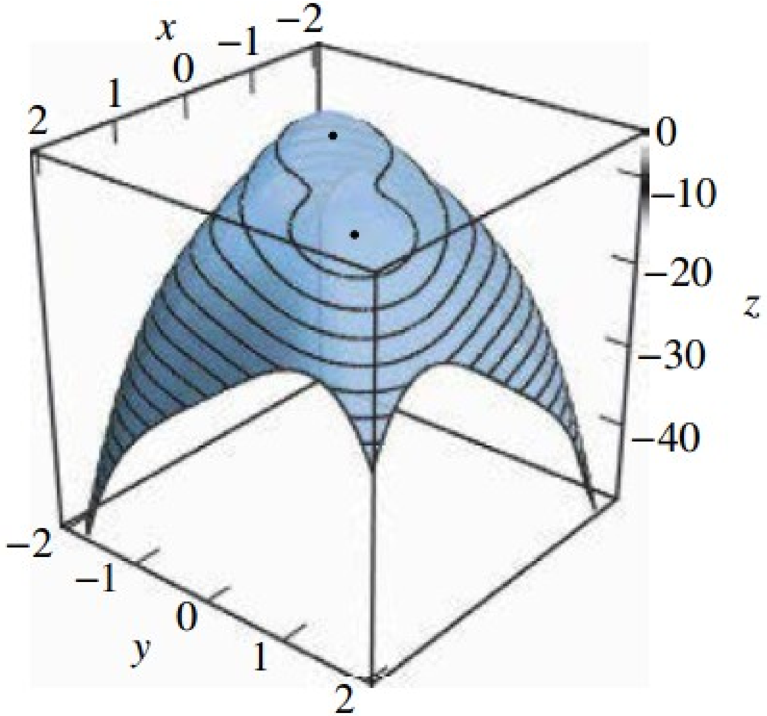


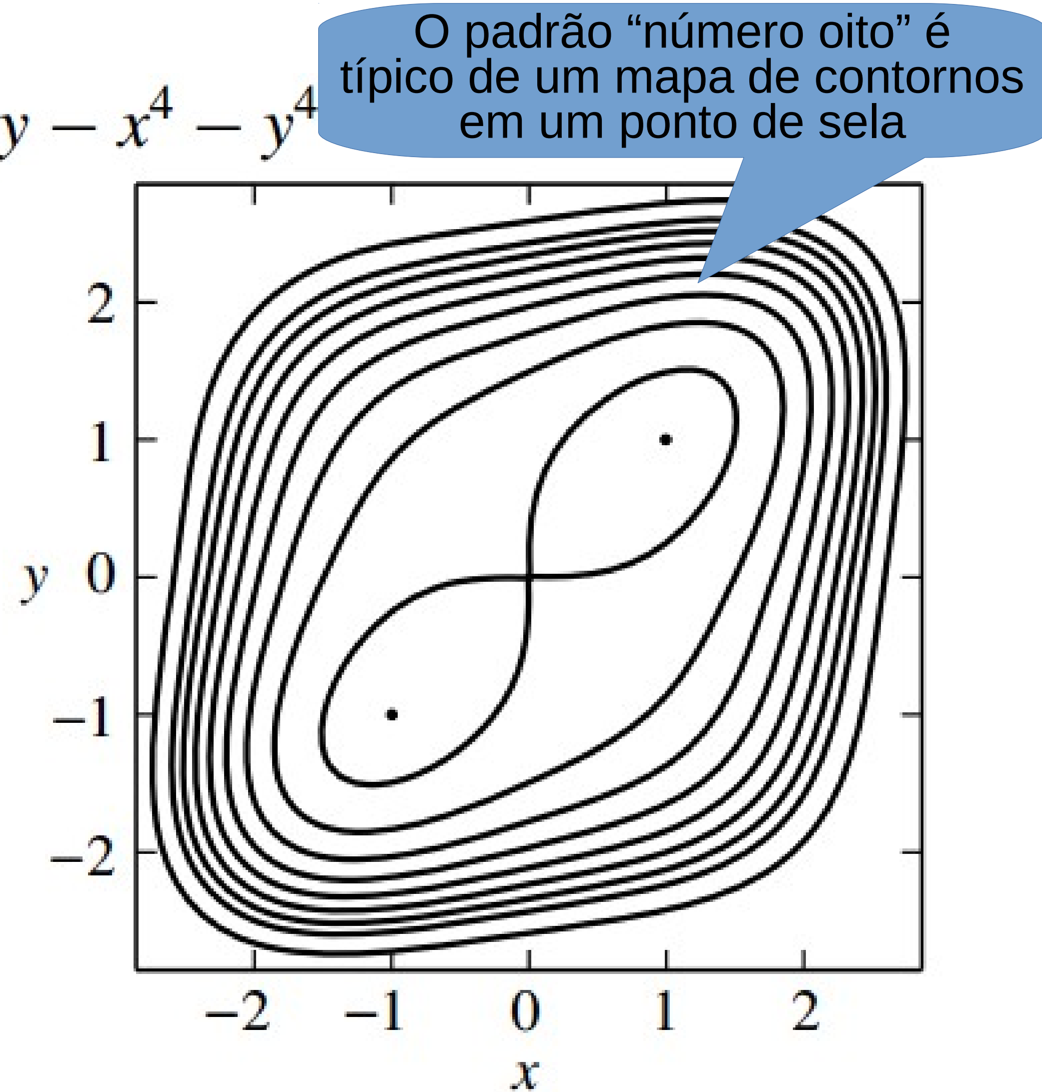
Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Exercício: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela:

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

  - Análise





Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Teorema: Se uma função f de duas variáveis tiver um extremo absoluto em um ponto interior de seu domínio, então esse extremo ocorrerá em um ponto crítico

É preciso verificar qual o ponto relativo de menor/maior valor

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

Podem ocorrer ou na fronteira de R ou no interior de R

Se for no interior, é em um ponto crítico

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados

Passo 1:

Encontre os **pontos críticos** de f que estão situados no **interior** de R.

Passo 2:

Encontre todos os **pontos de fronteira** nos quais os extremos podem ocorrer.

Passo 3:

Calcule f(x, y) nos pontos obtidos nos passos precedentes.

O maior desses valores é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada R de vértices (0, 0), (3, 0) e (0, 5)

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

análise

Pontos críticos

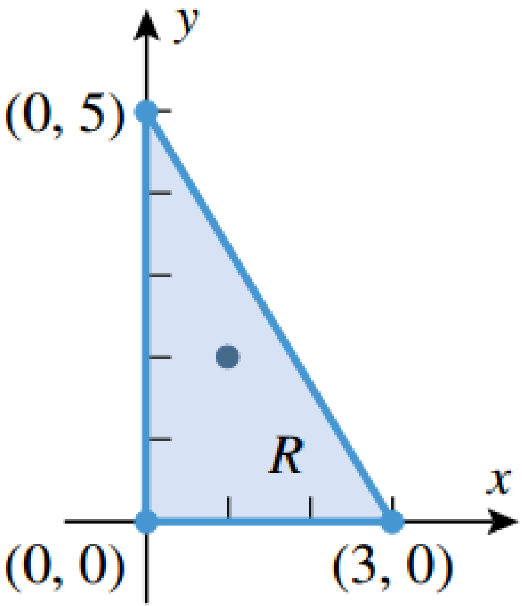
Pontos de fronteira

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada R de vértices (0, 0), (3, 0) e (0, 5)

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

    - Pontos críticos



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 6 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3$$

$$3y - 6 = 0 \qquad 3x - 3 = 0$$

(1, 2) é o único ponto crítico

Está no interior de R

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

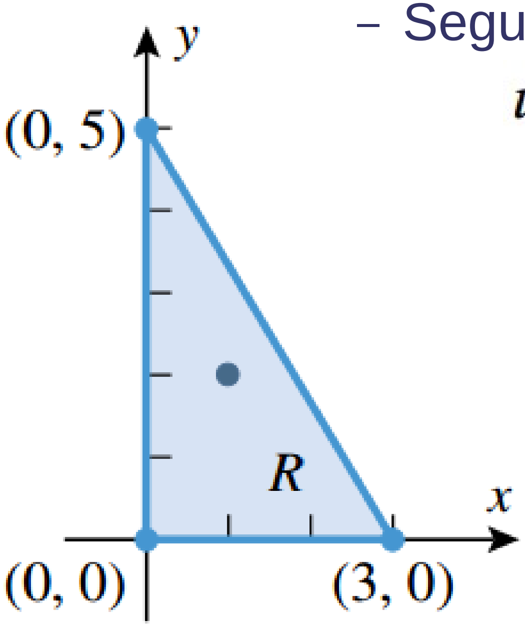
- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada R de vértices (0, 0), (3, 0) e (0, 5)

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

    - Pontos de fronteira
      - Seguimento de reta entre (0, 0) e (3, 0)

$$u(x) = f(x, 0) = -6x + 7, \quad 0 \leq x \leq 3$$

Não tem ponto crítico, assim os valores extremos ocorrem nos extremos de u: (0, 0) e (3, 0)



Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada R de vértices (0, 0), (3, 0) e (0, 5)

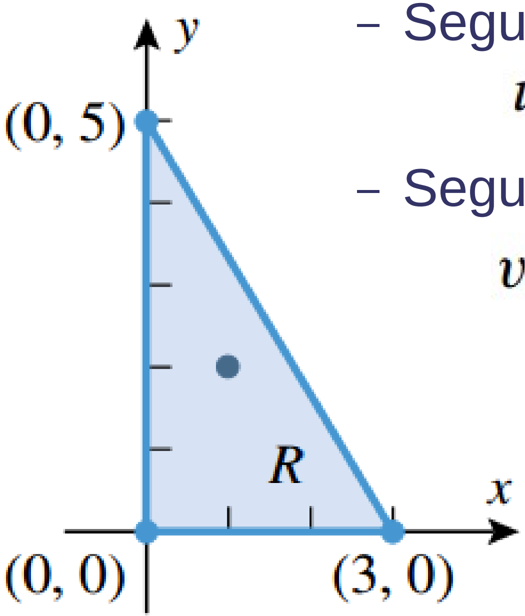
$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

- Pontos de fronteira
  - Seguimento de reta entre (0, 0) e (3, 0)

$$u(x) = f(x, 0) = -6x + 7, \quad 0 \leq x \leq 3$$

  - Seguimento de reta entre (0, 0) e (0, 5)

$$v(y) = f(0, y) = -3y + 7, \quad 0 \leq y \leq 5$$



Não tem ponto crítico, assim os valores extremos ocorrem nos extremos de u: (0, 0) e (3, 0)

Pontos de extremo (0, 0) e (0, 5)

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

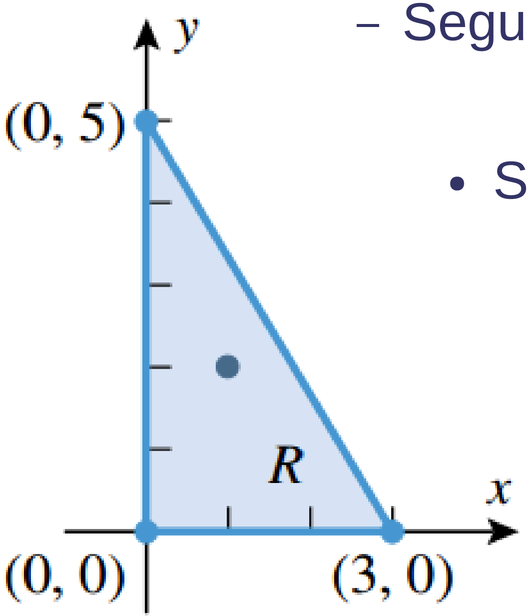
- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada R de vértices (0, 0), (3, 0) e (0, 5)

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

    - Pontos de fronteira
      - Seguimento de reta entre (0, 5) e (3, 0)

$$y = -\tfrac{5}{3}x + 5, \quad 0 \le x \le 3$$



        - Substituindo em f

$$\begin{aligned} w(x) &= f\left(x, -\tfrac{5}{3}x + 5\right) \\ &= 3x\left(-\tfrac{5}{3}x + 5\right) - 6x - 3\left(-\tfrac{5}{3}x + 5\right) + 7 \\ &= -5x^2 + 14x - 8, \qquad 0 \le x \le 3 \end{aligned}$$

$$w'(x) = -10x + 14$$

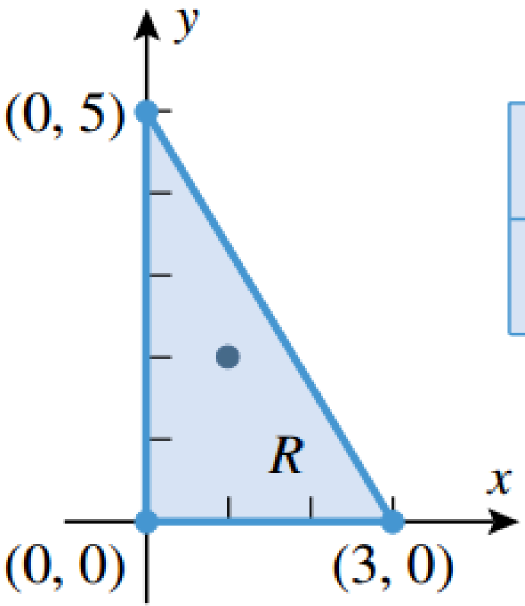
Ponto crítico (7/5, 8/3), pontos de extremo (0, 5) e (3, 0)

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos na região triangular fechada R de vértices (0, 0), (3, 0) e (0, 5)

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

    - Análise



(x, y)	$(0, 0)$	$(3, 0)$	$(0, 5)$	$\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$	$(1, 2)$
$f(x, y)$	7	-11	-8	$\frac{9}{5}$	1

Máximo   Mínimo

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm^3 e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material

Minimizar a área da superfície da caixa

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm^3 e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - x = comprimento da caixa (em cm)
    - y = largura da caixa (em cm)
    - z = altura da caixa (em cm)
    - S = área da superfície da caixa (em cm^2)
    - Restrição de volume

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm^3 e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - x = comprimento da caixa (em cm)
    - y = largura da caixa (em cm)
    - z = altura da caixa (em cm)
    - S = área da superfície da caixa (em cm^2)

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

S é uma função de duas variáveis

    - Restrição de volume

$$xyz = 32$$

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm³ e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - Reescrevendo S (como função de duas variáveis)

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

x e y devem ser positivos

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm^3 e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - Reescrevendo S (como função de duas variáveis)

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

x e y devem ser positivos

O problema se resume a achar o mínimo de S no primeiro quadrante

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm^3 e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - Reescrevendo S (como função de duas variáveis)

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

x e y devem ser positivos

Se existir, é em um ponto crítico de S

O problema se resume a achar o mínimo de S no primeiro quadrante

A região não é limitada nem fechada, não dando garantia que exista um mínimo absoluto

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm³ e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - Reescrevendo S (como função de duas variáveis)

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

Ponto crítico aceito (4, 4)

- Pontos críticos

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}$$

$$y - \frac{64}{x^2} = 0, \qquad x - \frac{64}{y^2} = 0$$

$$x - \frac{64}{(64/x^2)^2} = 0$$

$$x\left(1 - \frac{x^3}{64}\right) = 0$$

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

- Encontrando extremos absolutos em conjuntos fechados e limitados
  - Exemplo: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm³ e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material
    - Verificando se é um ponto de mínimo

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{128}{x^3}=\frac{128}{4^3}=2, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=\frac{128}{y^3}=\frac{128}{4^3}=2, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial xy}=1$$

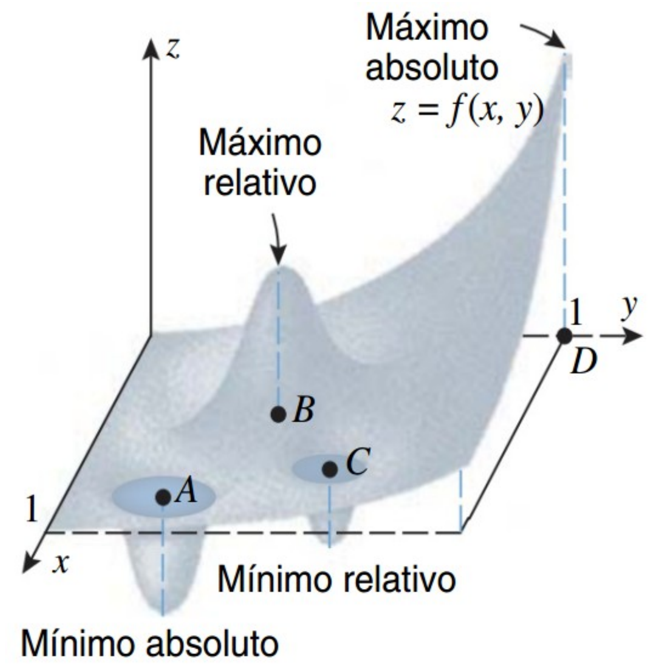
$$D=\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 S}{\partial xy}\right)^2=2.2-1^2=3$$

Como S_{xx} e D são positivos, o ponto é de mínimo!

Resumo

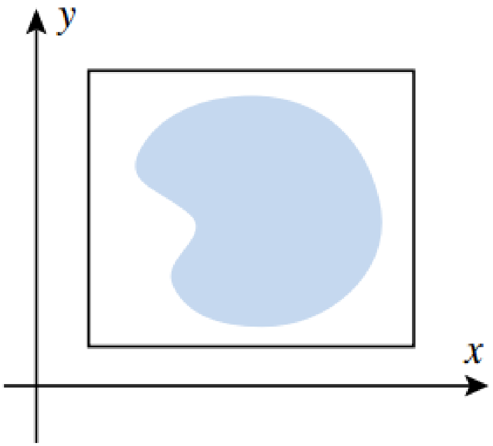
Resumo

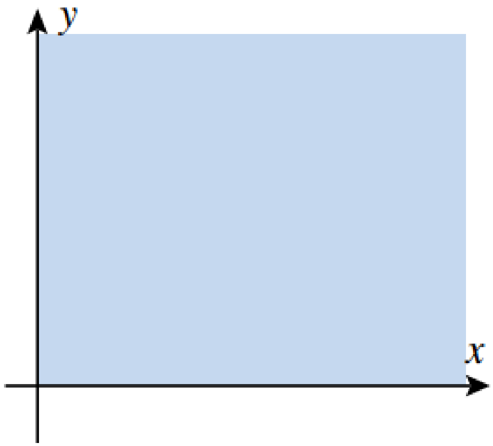
- Máximos e mínimos relativos e absolutos

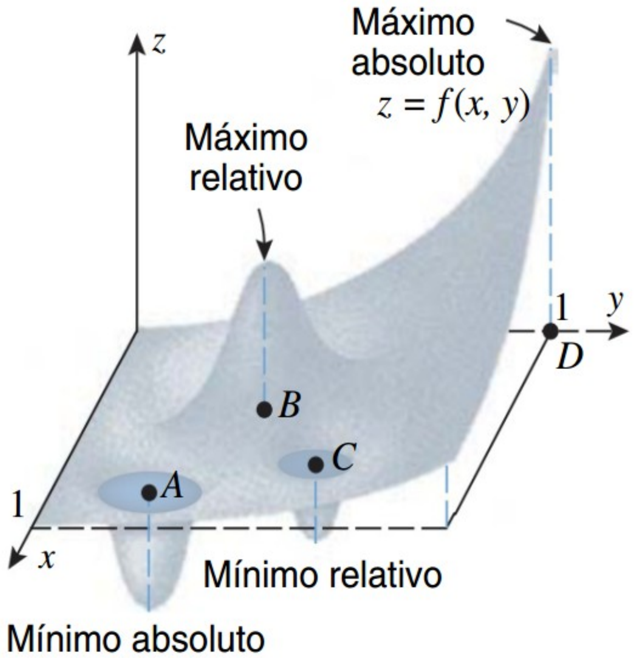


Resumo

- Máximos e mínimos relativos e absolutos
- Conjuntos limitados e ilimitados
  - Pontos de extremo

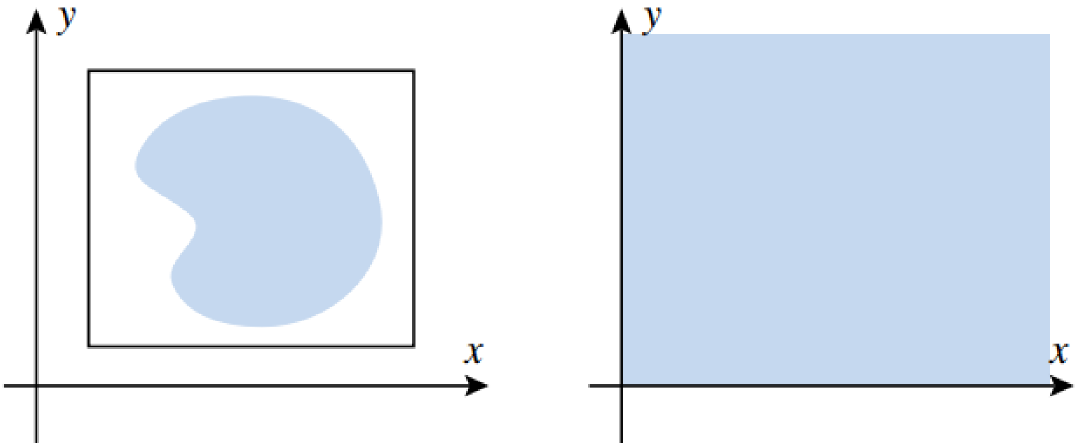




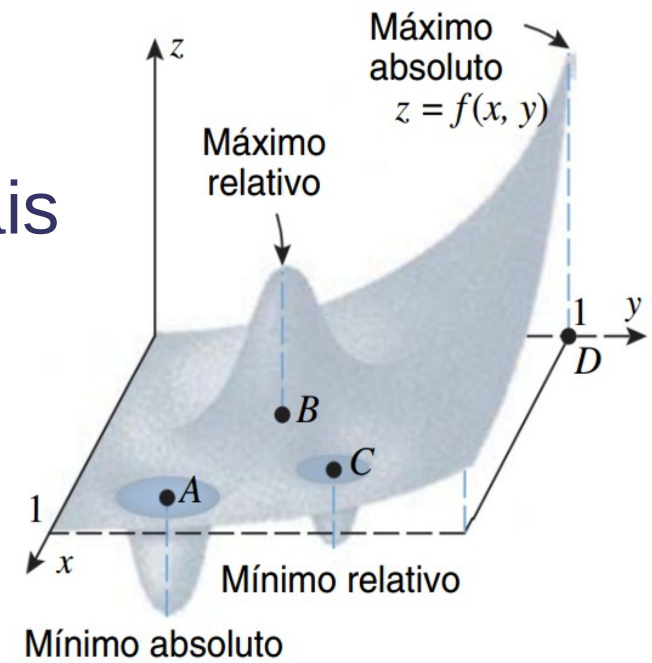


Resumo

- Máximos e mínimos relativos e absolutos
- Conjuntos limitados e ilimitados
  - Pontos de extremo

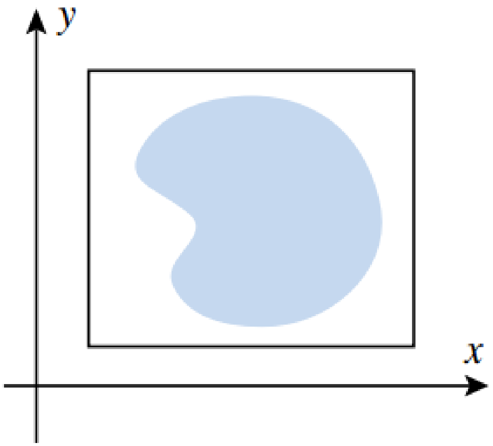


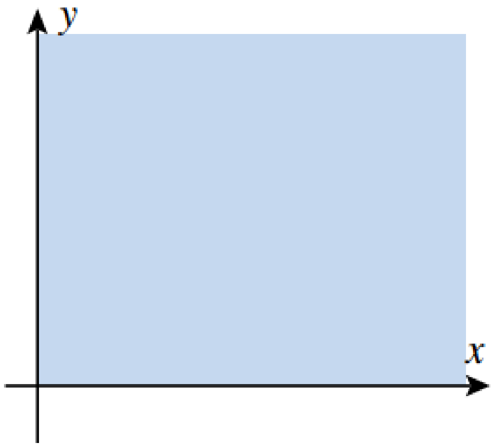
- Pontos críticos
  - $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$; ou
  - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0)



Resumo

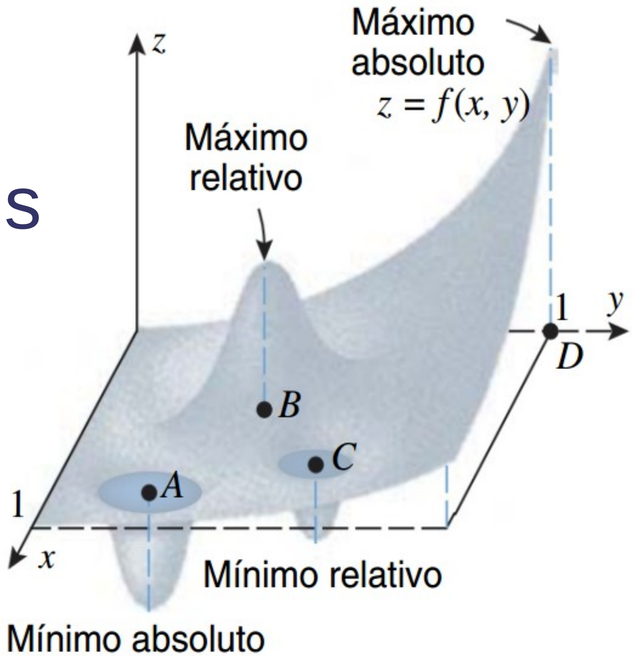
- Máximos e mínimos relativos e absolutos





- Conjuntos limitados e ilimitados
  - Pontos de extremo
- Pontos críticos
  - $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$; ou
  - uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0)
- Derivada segunda

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

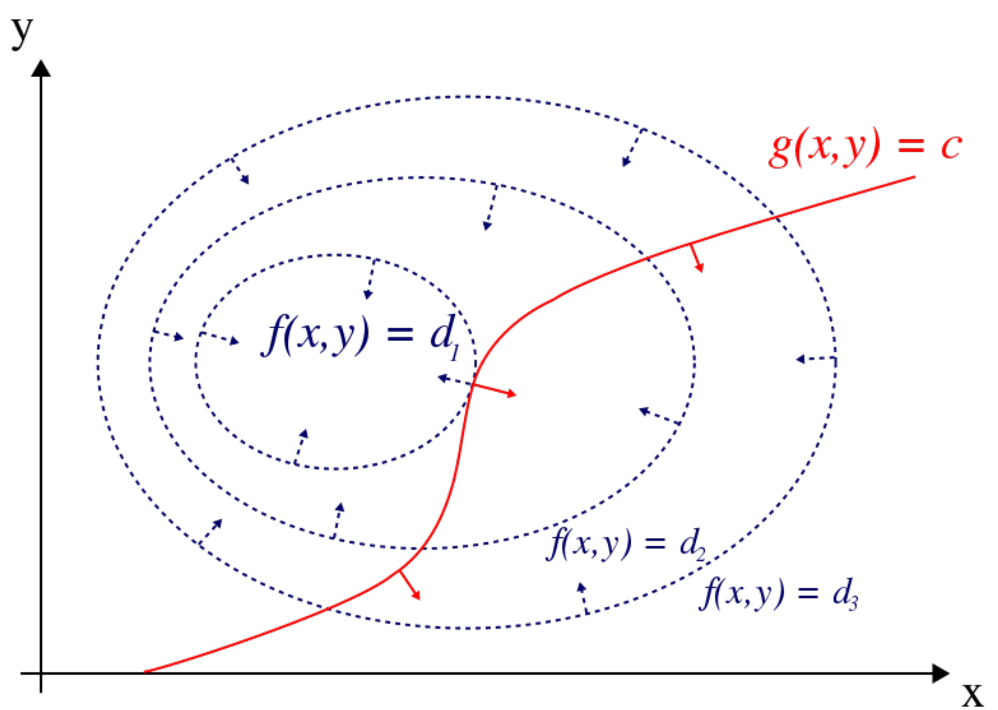


Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 13.8
    - Exercícios de compreensão 13.8
    - 9-20

Resumo

- Próxima aula:
  - Multiplicadores de Lagrange
    - Encontrar extremos de uma função de uma ou mais variáveis suscetíveis a uma ou mais restrições.
    - Graficamente
      - A linha a vermelho indica a restrição g(x,y)=c
      - As linhas azuis são os contornos de f(x,y).
      - A solução ocorre no ponto em que as linhas vermelha e azul se tocam tangencialmente



Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 13.8