Matrizes de transformações lineares arbitrárias

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

- Revisão
- Matrizes de transformações lineares arbitrárias
  - Matrizes de transformações lineares
  - Matrizes de composições e de inversas
- Resumo
- Bibliografia

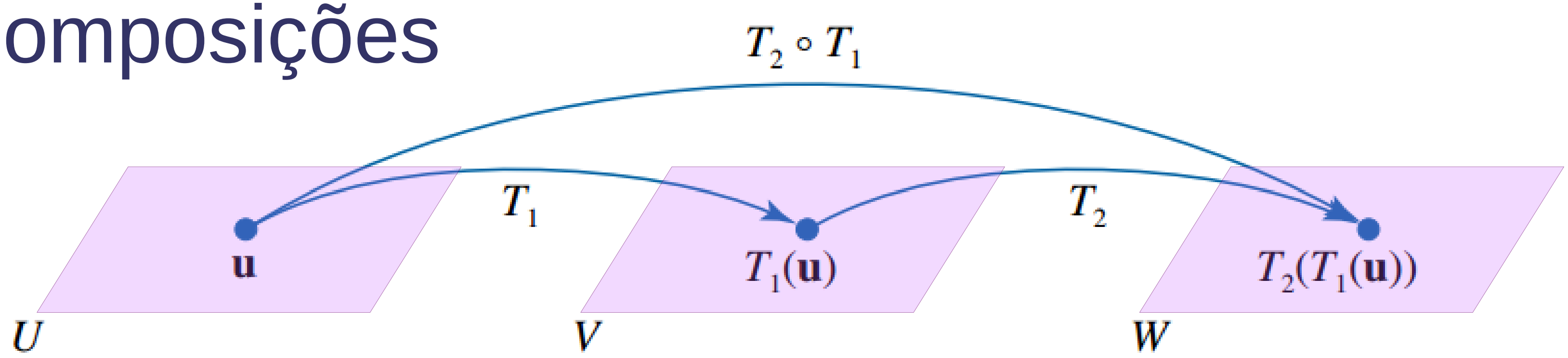
Revisão

Revisão

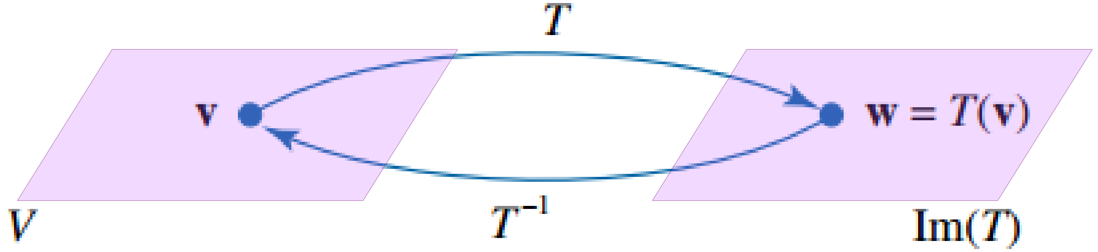
- Injetora e sobrejetora
- Isomorfismo: Aplicação das coordenadas

$$\mathbf{u} \xrightarrow{T} (k_1, k_2, \ldots, k_n) = (\mathbf{u})_S$$

- Composições



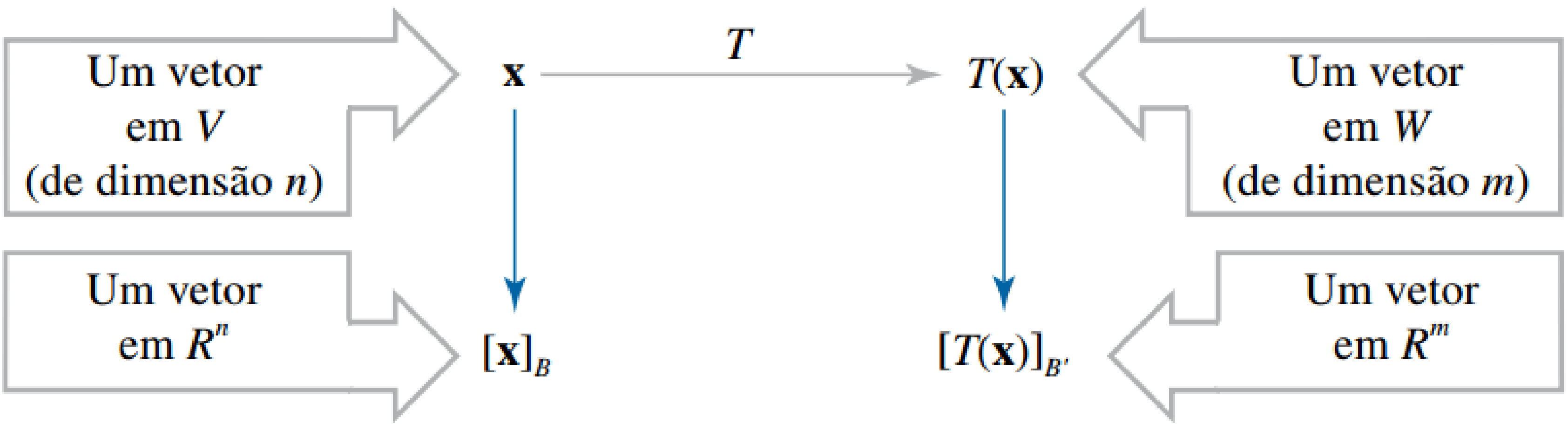
- Transformações inversas



Matrizes de transformações lineares arbitrárias

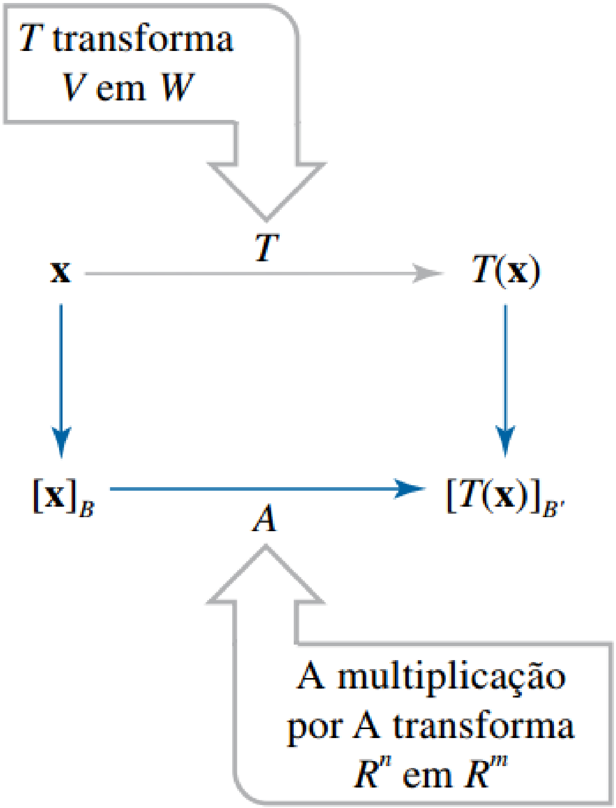
Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Suponha que V seja um espaço vetorial de dimensão n, W um espaço vetorial de dimensão m e T : V → W uma transformação linear.
  - Suponha também que B seja uma base de V, B’ uma base de W e que, dado qualquer **x** em V, o matriz de coordenadas de **x** e T(**x**) sejam $[\mathbf{x}]_B$ e $[T(\mathbf{x})]_{B'}$



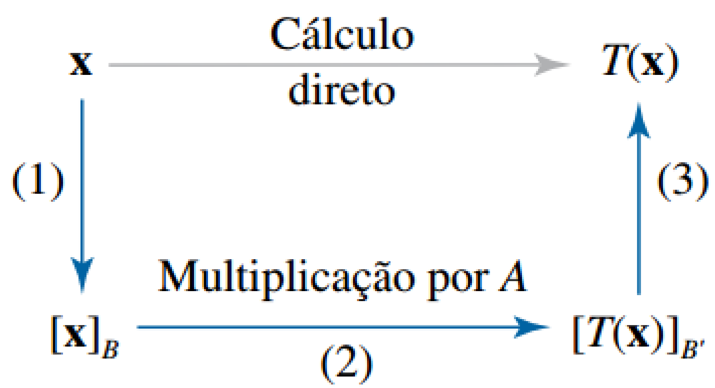
Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Objetivo:
    - Encontrar uma matriz A de tamanho m×n tal que a multiplicação por A transforma o vetor $[\mathbf{x}]_B$ no vetor $[T(\mathbf{x})]_{B'}$, qualquer que seja o vetor **v** em V



Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Objetivo:
    - Encontrar uma matriz A de tamanho m×n tal que a multiplicação por A transforma o vetor $[\mathbf{x}]_B$ no vetor $[T(\mathbf{x})]_{B'}$, qualquer que seja o vetor **v** em V
    - Assim será possível executar a transformação linear T usando a multiplicação matricial.
      - Procedimento indireto



Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Encontrando T(**x**) indiretamente

Passo 1.

Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{x}]_B$

Quem é A?

Passo 2.

Multiplique $[\mathbf{x}]_B$ à esquerda por A para obter $[T(\mathbf{x})]_{B'}$

Passo 3.

Reconstrua T(**x**) a partir de seu vetor de coordenadas $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Descobrindo a matriz A
    - A matriz A de tamanho m×n com a propriedade

$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'} \quad (1)$$

    - Sejam B = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$} uma base do espaço vetorial V de dimensão n e
    - B' = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_m$} uma base do espaço vetorial W de dimensão m

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Descobrindo a matriz A
    - A matriz A de tamanho m×n com a propriedade

$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'} \tag{1}$$

    - Sejam B = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$} uma base do espaço vetorial V de dimensão n e
    - B' = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_m$} uma base do espaço vetorial W de dimensão m
    - A equação (1) deve valer para qualquer vetor em V, em particular, deve funcionar para os vetores da base B

$$A[\mathbf{u}_1]_B = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, \quad A[\mathbf{u}_2]_B = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}, \ldots, \quad A[\mathbf{u}_n]_B = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \tag{2}$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Descobrindo a matriz A
    - Sendo

$$[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad [\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

    - De modo que

$$A[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad A[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$\ldots \qquad A[\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Descobrindo a matriz A
    - Substituindo em (2)

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}$$

o que mostra que as colunas sucessivas de A são os vetores de coordenadas de

$$T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$$

- Assim, a matriz A que completa a gráfico

$$A = \Big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}\Big]$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Descobrindo a matriz A
    - A matriz de T em relação às bases B e B’

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \right]$$

que tem a propriedade

$$[T]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

Observe que a notação tem a direita o domínio e a esquerda o contradomínio

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Exercício:
    - Seja $T : P_1 \rightarrow P_2$ a transformação linear definida por

$$T(p(x)) = xp(x)$$

    - Encontre a matriz de T em relação às bases canônicas

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{e} \quad B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \qquad \mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x\,; \quad \mathbf{v}_1 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Exercício:
    - Seja T : $P_1 \rightarrow P_2$ a transformação linear definida por

$$T(p(x)) = xp(x)$$

    - Encontre a matriz de T em relação às bases canônicas

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{e} \quad B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \qquad \mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x\,; \quad \mathbf{v}_1 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2$$

      - Pela formula de T, acha-se as coordenadas

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1) = (x)(1) = x$$
$$T(\mathbf{u}_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

      - A matriz de T em relação a B e B’

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Exercício:
    - A partir da matriz de T em relação a B e B', use o procedimento de três passos descrito na figura seguinte para calcular

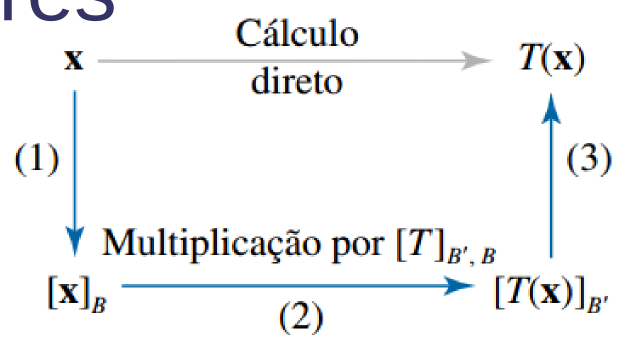
$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[rr, "\text{Cálculo}", "\text{direto}"'] \arrow[d, "(1)"'] & & T(\mathbf{x}) \\
{[\mathbf{x}]_B} \arrow[rr, "\text{Multiplicação por } {[T]_{B',B}}", "(2)"'] & & {[T(\mathbf{x})]_{B'}} \arrow[u, "(3)"']
\end{tikzcd}
$$

$$T(a + bx) = x(a + bx) = ax + bx^2$$

$$[T]_{B',B} = \big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de transformações lineares
  - Exercício:
    - A partir da matriz de T em relação a B e B', use o procedimento de três passos descrito na figura seguinte para calcular



$$T(a + bx) = x(a + bx) = ax + bx^2 \qquad [T]_{B',B} = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) O vetor de coordenadas de **x** = a+bx em relação a B

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

(2) Multiplicando

$$[T]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

(3) Reconstruindo

$$T(a + bx) = 0 + ax + bx^2 = ax + bx^2$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de operadores identidade
  - Se B = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$} for uma base de um espaço vetorial V de dimensão finita e se I : V → V for o operador identidade de V, então

$$I(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, \quad I(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2, \ldots, I(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$$

    - Segue que

$$[I]_B = \begin{array}{cccc} \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}\right] \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [I(\mathbf{u}_1)]_B & [I(\mathbf{u}_2)]_B & & [I(\mathbf{u}_n)]_B \end{array} = I$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de composições e de inversas
  - Teorema 1:
    - Se $T_1 : U \rightarrow V$ e $T_2 : V \rightarrow W$ forem transformações lineares e B, B'' e B' bases de U, V e W, respectivamente, então

$$[T_2 \circ T_1]_{B',\,B} = [T_2]_{B',B''}\,[T_1]_{B'',\,B}$$

Parece que os índices se cancelam

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de composições e de inversas
  - Teorema 2:
    - Se $T : V \to V$ for um operador linear e B uma base de V, as afirmações seguintes são equivalentes

      (a) T é injetor.

      (b) $[T]_B$ é invertível.

    - Além disso, se valerem essas condições equivalentes, então

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$$

Como W=V, usa-se a mesma base B

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de composições e de inversas
  - Exemplo: Composição
    - Sejam $T_1 : P_1 \rightarrow P_2$ uma transformação linear e $T_2 : P_2 \rightarrow P_2$ definidos por

$$T_1(p(x)) = xp(x) \qquad T_2(p(x)) = p(3x-5)$$

    - Então a composição $(T_2 \circ T_1) : P_1 \rightarrow P_2$

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (3x-5)p(3x-5)$$

    - Se $p(x) = c_0 + c_1x$, então

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1 x) &= (3x-5)(c_0 + c_1(3x-5)) \\ &= c_0(3x-5) + c_1(3x-5)^2\end{aligned} \qquad (1)$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de composições e de inversas
  - Exemplo: Composição
    - A partir do Teorema 1: U = P_1 e V = W = P_2, assim podemos tomar B' = B'', o que simplifica a fórmula para

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B'} [T_1]_{B',B}$$

    - Para base de P_1 escolhemos B = {1, x} e para base de P_2 escolhemos B = {1, x, x2}.
    - Sabendo que

$$[T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5 do Anton

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

- Matrizes de composições e de inversas
  - Exemplo: Composição
    - Segue que

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

    - Conferindo calculando direto da formula da construção, sendo B = {1, x} com com $\mathbf{u}_1 = 1$ e $\mathbf{u}_2 = x$

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \left[[(T_2 \circ T_1)(1)]_{B'} \;\middle|\; [(T_2 \circ T_1)(x)]_{B'} \right]$$

    - Usando (1)

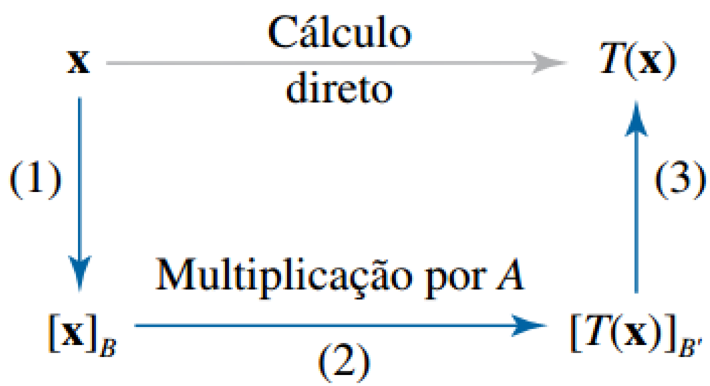
$$(T_2 \circ T_1)(1) = 3x - 5 \quad \text{e} \quad (T_2 \circ T_1)(x) = (3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Resumo

Resumo

- Matrizes de transformações lineares
  - Tenta achar uma matriz que corresponde a transformação
  - Procedimento indireto



- Matrizes de composições e de inversas

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B''}\,[T_1]_{B'',B}$$

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$$

Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Anton seção 8.4
    - 3-4
    - 7
    - 10

Resumo

- Próxima aula:
  - Semelhança
    - Escolher uma base de V que torne a matriz de T tão simples quanto possível.

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 8.4
  - DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
    - Capítulo 6