
Sistemas de Equações Lineares

Unidade 1

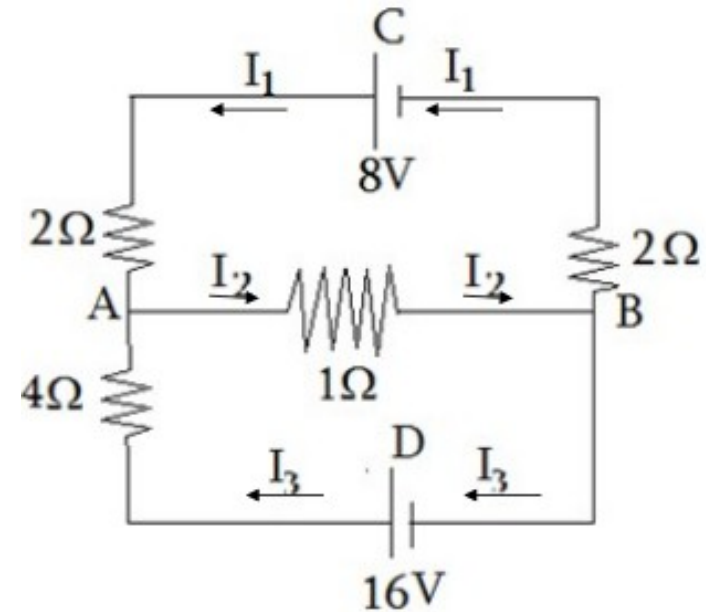
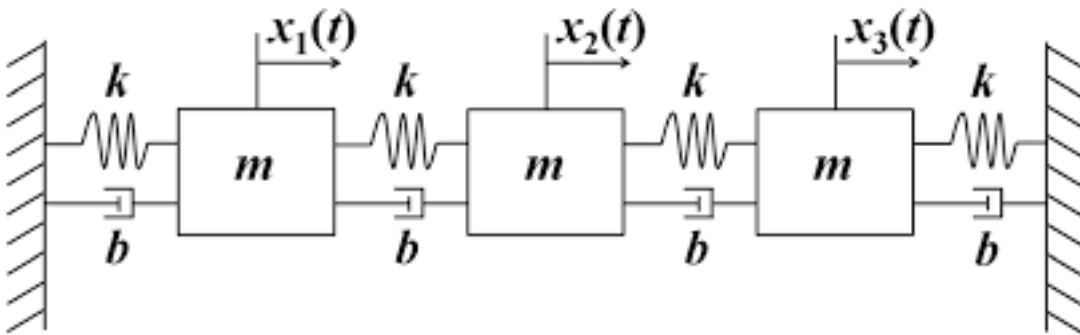
Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Introdução aos sistemas de equações lineares

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Vários problemas nas áreas científica, tecnológica e econômica são modelados por sistemas de equações lineares
 - Exemplos:
 - Sistema massa mola
 - Circuitos elétricos



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

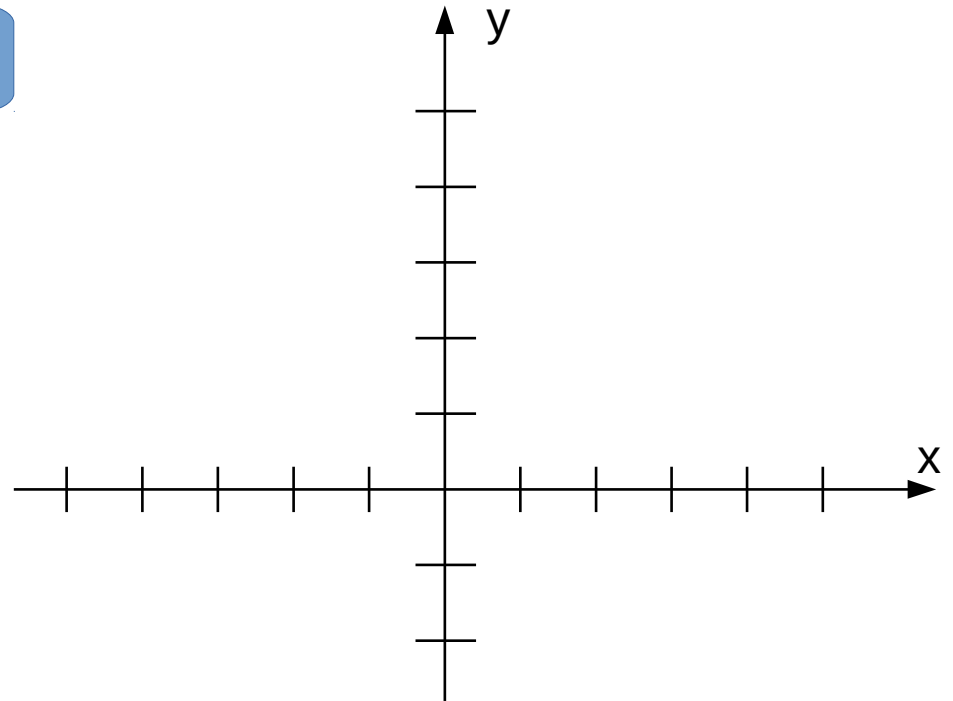
- Exemplo:

- 2 equações
 - 2 incógnitas

Retas

$$\begin{cases} r: x + y = 5 \\ s: -x + 2y = 4 \end{cases}$$

$(r)x$	y	$(s)x$	y



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

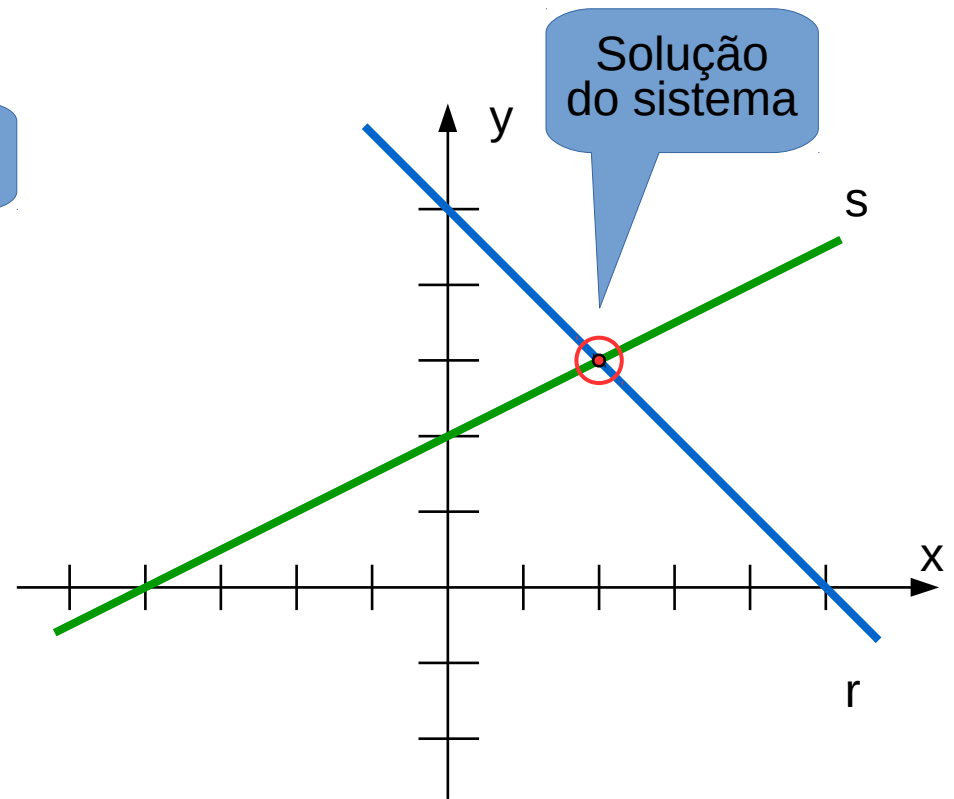
- Exemplo:

- 2 equações
 - 2 incógnitas

Retas

$$\begin{cases} r: x + y = 5 \\ s: -x + 2y = 4 \end{cases}$$

$(r)x$	y	$(s)x$	y
5	0	-4	0
0	5	0	2



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

- Forma geral

- m equações
 - n incógnitas

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

- Onde a_{ij} são os coeficientes, x_j são as incógnitas e b_i são os termos independentes

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

- Forma geral

- m equações
 - n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Onde a_{ij} são os coeficientes, x_j são as incógnitas e b_i são os termos independentes

- Solução

- É uma sequência de n números s_1, s_2, \dots, s_n para os quais a substituição

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \dots, \quad x_n = s_n$$

faz de cada equação uma afirmação verdadeira.

Se fossem 3 incógnitas a solução seria a interseção de planos

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo de equações **não** lineares

$$x + 3y^2 = 4$$

$$\sin x + y = 0$$

$$3x + 2y - xy = 5$$

$$\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo de equações **não** lineares

$$\begin{aligned}x + 3y^2 &= 4 \\ \text{sen } x + y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x + 2y - xy &= 5 \\ \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

Potências diferente de 1
Funções trigonométricas,
logarítmicas

Introdução ao sistemas de equações lineares

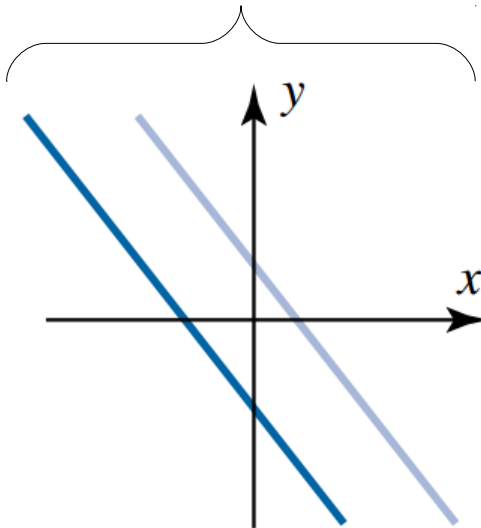
- Sistemas lineares
 - Soluções possíveis

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

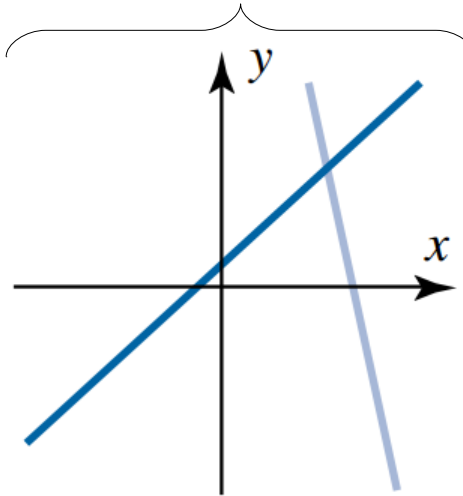
Consistente

Inconsistente



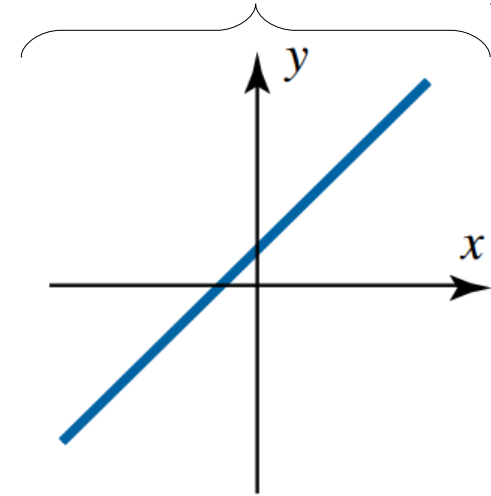
Nenhuma solução

Determinado



Uma solução

Indeterminado

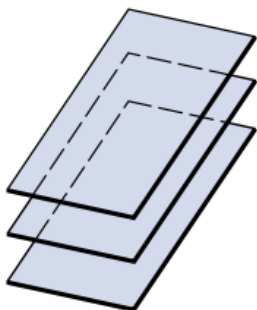


Uma infinidade
de soluções
(retas coincidentes)

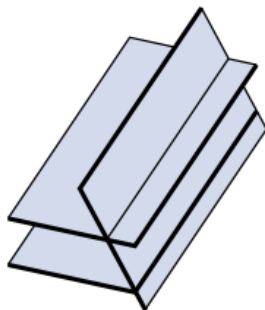
Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Soluções possíveis

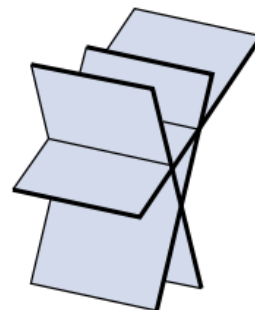
$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3\end{aligned}$$



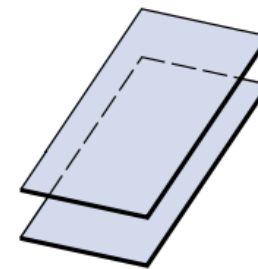
Nenhuma solução
(três planos paralelos,
sem interseção comum)



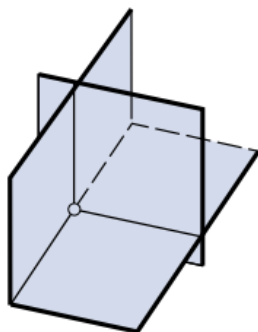
Nenhuma solução
(dois planos paralelos,
sem interseção comum)



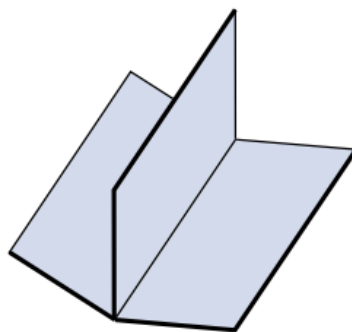
Nenhuma solução
(sem interseção comum)



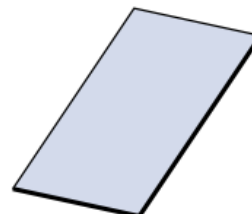
Nenhuma solução
(dois planos coincidentes,
paralelos ao terceiro,
sem interseção comum)



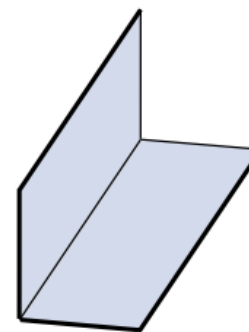
Uma solução
(a interseção é um ponto)



Uma infinidade de soluções
(a interseção é uma reta)



Uma infinidade de soluções
(todos os planos coincidem;
a interseção é um plano)



Uma infinidade de soluções
(dois planos coincidentes;
a interseção é uma reta)

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Soluções possíveis
 - Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções.
 - Não existem outras possibilidades.

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

- Exemplo:

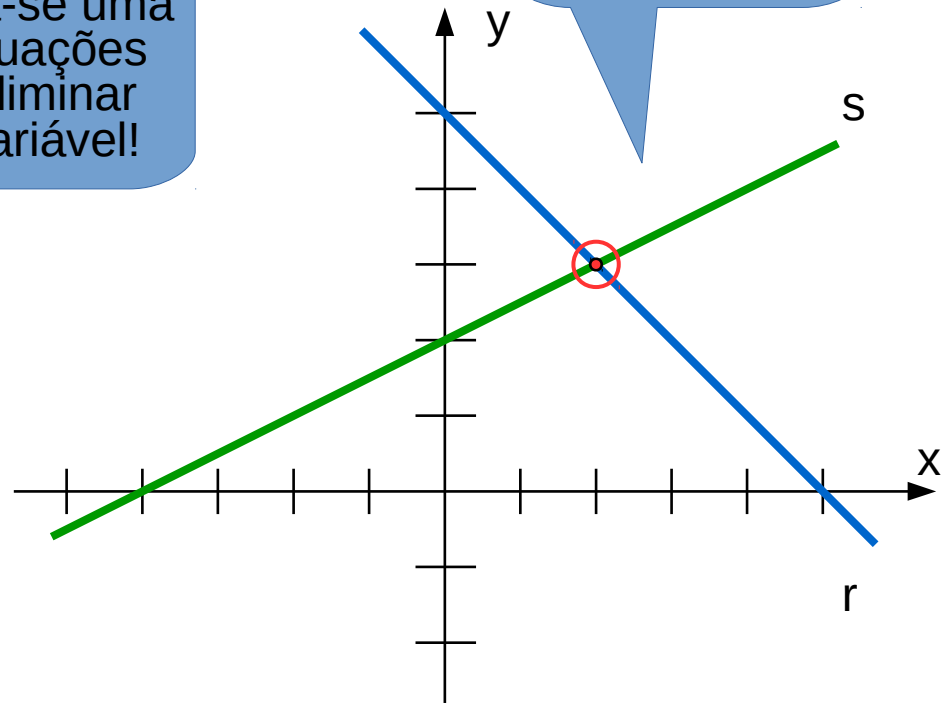
- 2 equações
 - 2 incógnitas

$$r: x + y = 5$$

$$s: -x + 2y = 4$$

Modifica-se uma das equações para eliminar uma variável!

Qual a solução do sistema?



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

- Exemplo:

- 2 equações
 - 2 incógnitas

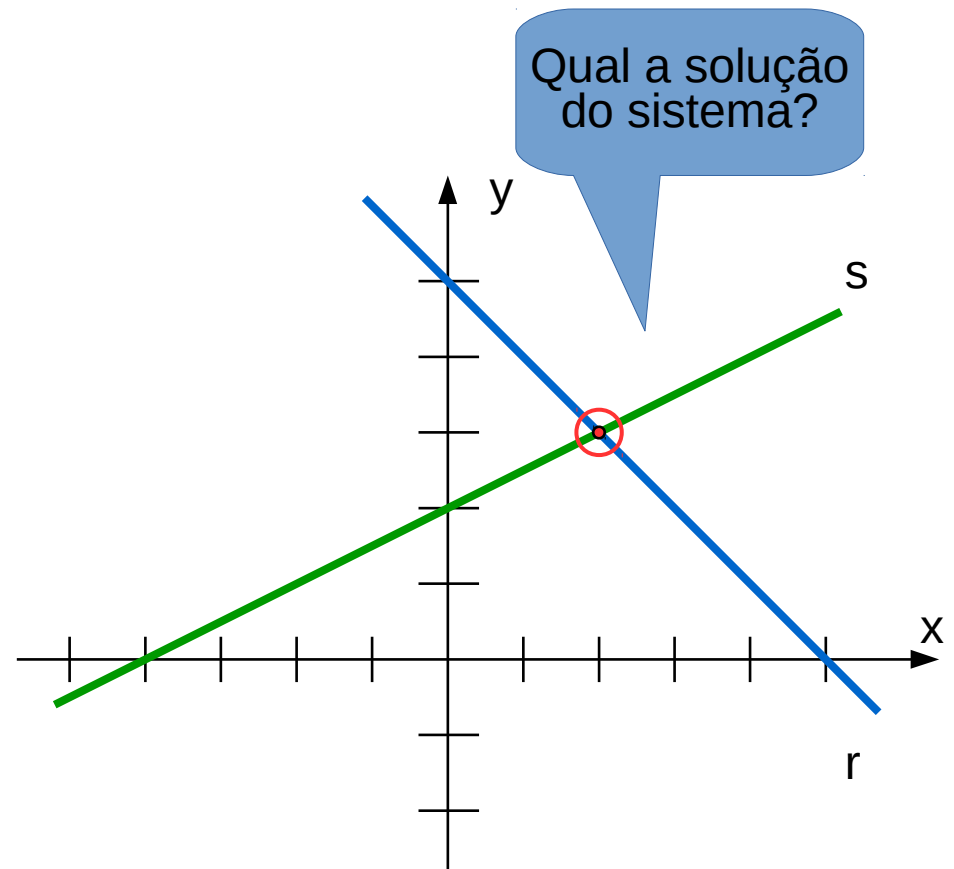
$$r: x + y = 5$$

$$s: -x + 2y = 4(+)$$

$$0 + 3y = 9$$

Fácil descobrir y!

Uma vez achado y,
é só substituí-lo em
uma das equações
para achar x.



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

- Exemplo:

- 2 equações
 - 2 incógnitas

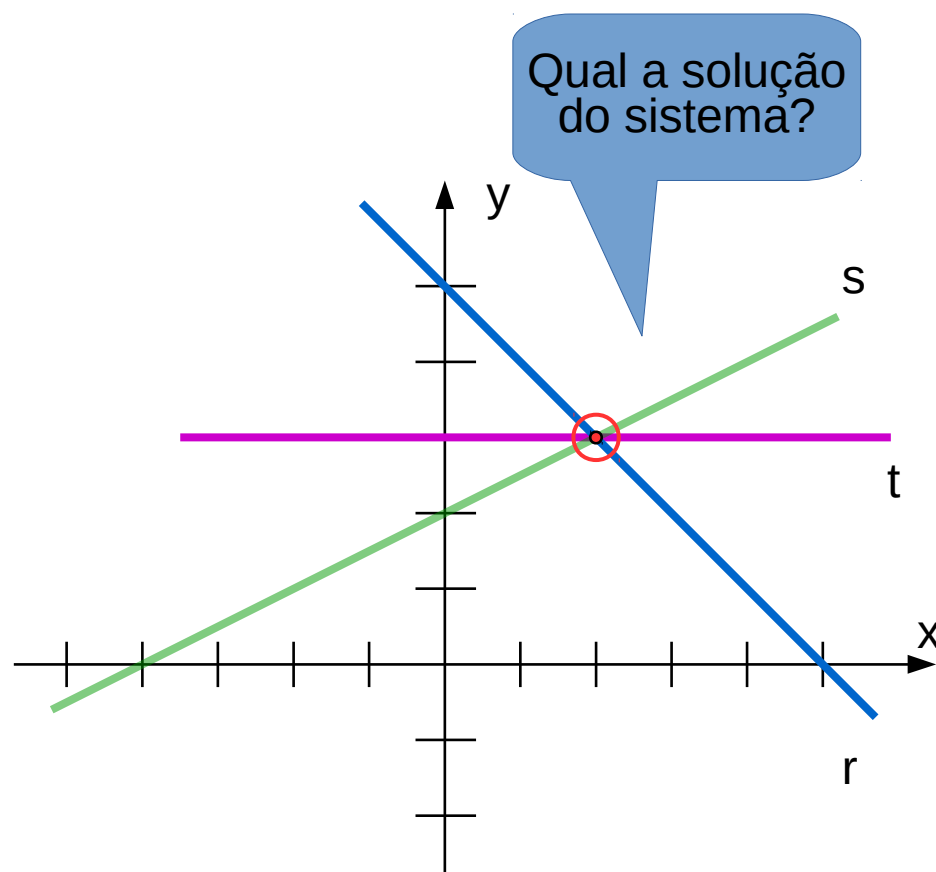
$$r: x + y = 5$$

$$s: -x + 2y = 4(+)$$

$$0 + 3y = 9$$

$$t: y = 3$$

Novo sistema
equivalente



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

- Exemplo:

- 2 equações
 - 2 incógnitas

$$r: x + y = 5$$

$$s: -x + 2y = 4(+)$$

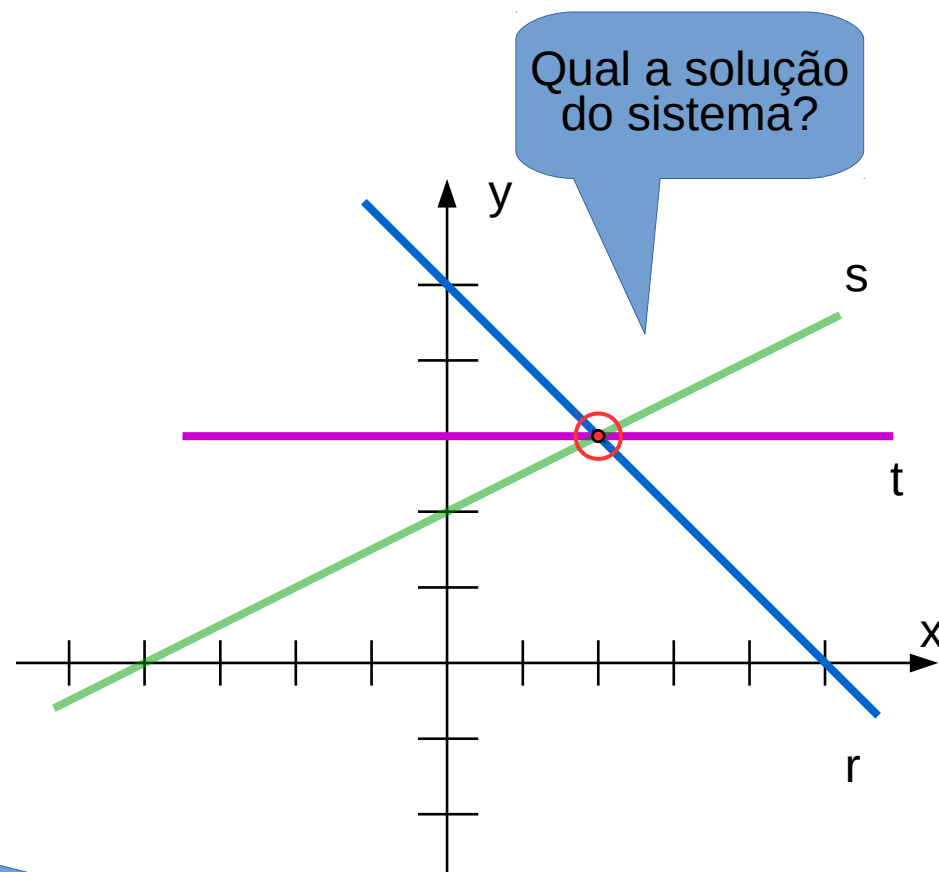
$$0 + 3y = 9$$

$$t: y = 3$$

$$x + 3 = 5$$

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$



Solução
do sistema:
(2,3)

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo:

$$\begin{aligned}x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6\end{aligned}$$

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo:

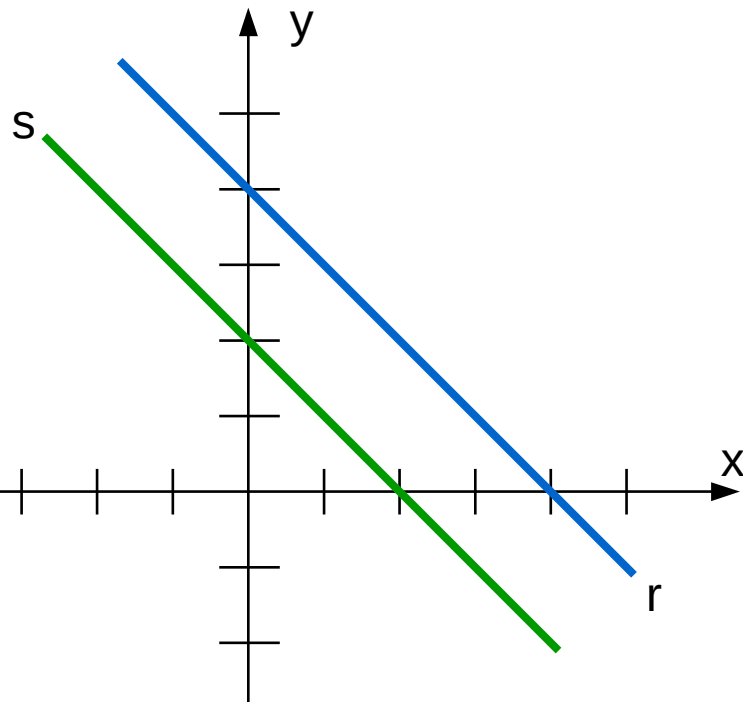
$$\begin{array}{rcl} x + y = 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 & x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 & \rightarrow & 0 = -6 \end{array}$$

Sem solução

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 & x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 & \rightarrow & 0 = -6 \end{array}$$



Sem solução

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo:

$$\begin{aligned}4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4\end{aligned}$$

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo:

$$\begin{array}{l} 4x - 2y = 1 \\ 16x - 8y = 4 \end{array} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \begin{array}{l} 4x - 2y = 1 \\ 0 = 0 \end{array}$$

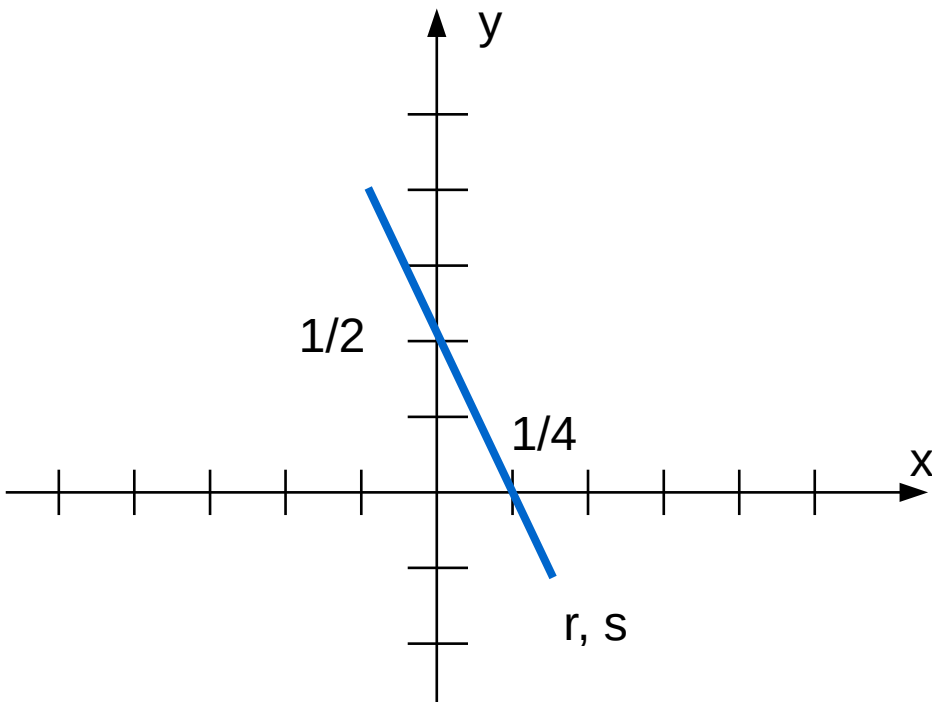
A segunda equação
não impõe quaisquer
restrições a x e y

Múltiplas solução

Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo:

$$\begin{array}{l} 4x - 2y = 1 \\ 16x - 8y = 4 \end{array} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \begin{array}{l} 4x - 2y = 1 \\ 0 = 0 \end{array}$$



Múltiplas solução

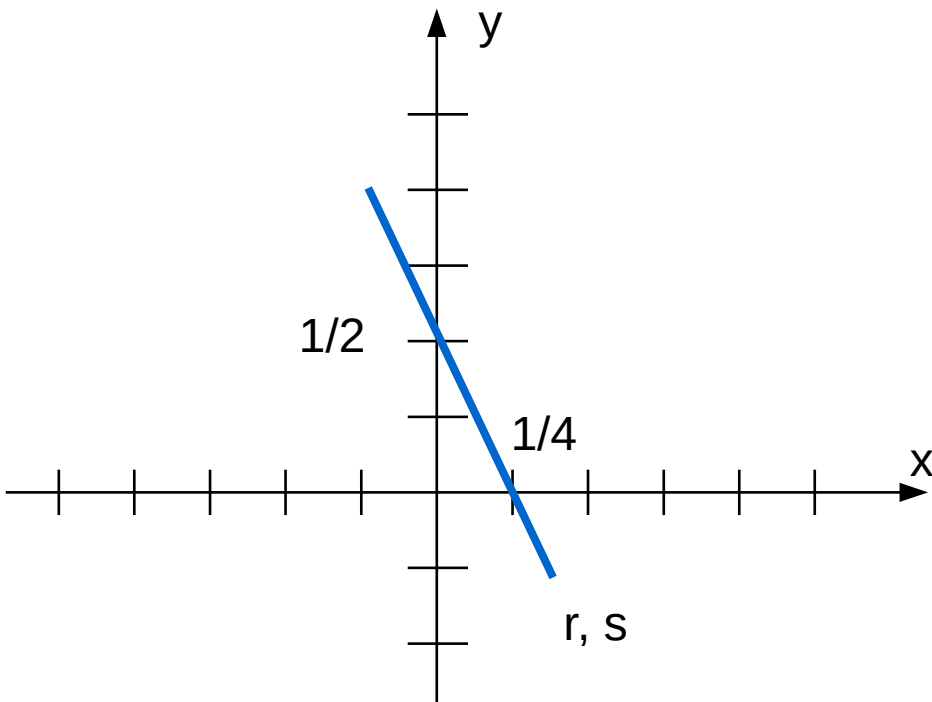
Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares
 - Exemplo:

$$\begin{array}{rcl} 4x - 2y = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 & 4x - 2y = 1 \\ 16x - 8y = 4 & \rightarrow & 0 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t, \quad y = t$$

Pode ser visto como uma equação paramétrica



Introdução ao sistemas de equações lineares

- Sistemas lineares

- À medida que cresce o número de equações e de incógnitas num sistema linear, cresce também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução

Como resolver esse sistema?

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matrizes e vetores

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - São tabelas de números organizados em linhas (horizontais) e colunas (verticais)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Quadradas

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Retangulares

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Dimensão: $m \times n$
 - m linhas
 - n colunas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Dimensão: $m \times n$
 - m linhas
 - n colunas

2×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3×3

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2×3

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

3×2

Matrizes e vetores

- Matrizes

- Operações:

- Soma
 - Subtração
 - Multiplicação de matrizes
 - Multiplicação por escalar
 - Transposição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$A \cdot B = AB = ?$$

$$2A = ?$$

$$A^T = ?$$

Matrizes e vetores

- Matrizes

- Operações:

- Soma
 - Subtração
 - Multiplicação de matrizes
 - Multiplicação por escalar
 - Transposição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = AB = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes

- Operações:

- Soma
 - Subtração
 - Multiplicação de matrizes
 - Multiplicação por escalar
 - Transposição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$A \cdot B = AB = ?$$

$$2A = ?$$

$$A^T = ?$$

Matrizes e vetores

- Matrizes

- Operações:

- Soma
 - Subtração
 - Multiplicação de matrizes
 - Multiplicação por escalar
 - Transposição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_{2 \times 2}$ e $B_{3 \times 3}$

As matrizes
não são
compatíveis

$$A + B = \text{ERRO}$$

$$A - B = \text{ERRO}$$

$$A \cdot B = AB = \text{ERRO} \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes

- Operações:

- Soma
 - Subtração
 - Multiplicação de matrizes
 - Multiplicação por escalar
 - Transposição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$A \cdot B = AB = ?$$

$$2A = ?$$

$$A^T = ?$$

Matrizes e vetores

- Matrizes

- Operações:

- Soma
 - Subtração
 - Multiplicação de matrizes
 - Multiplicação por escalar
 - Transposição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{2 \times 2}$ e $B_{2 \times 3}$

$$A + B = \text{ERRO}$$

$$A - B = \text{ERRO}$$

As matrizes
não são
compatíveis

$$A \cdot B = AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$AB_{2 \times 3}$

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Operações:
 - Soma
 - Subtração
 - Multiplicação de matrizes
 - Multiplicação por escalar
 - Transposição
 - Matrizes quadradas
 - Inversa
 - Determinante



Unidade 1

Unidade 2

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Operações (forma geral):
 - Soma / Subtração

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Operações (forma geral):
 - Multiplicação por escalar

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Operações (forma geral):
 - Multiplicação de matrizes

$$AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n}$ e $C_{n \times l}$
 $(AC)_{m \times l}$

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Operações (forma geral):
 - Multiplicação de matrizes

$$AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n}$ e $C_{n \times l}$
 $(AC)_{m \times l}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots + a_{1n}c_{n1} & \cdots & a_{11}c_{1l} + a_{12}c_{2l} + \cdots + a_{1n}c_{nl} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} + \cdots + a_{2n}c_{n1} & \cdots & a_{21}c_{1l} + a_{22}c_{2l} + \cdots + a_{2n}c_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}c_{11} + a_{m2}c_{21} + \cdots + a_{mn}c_{n1} & \cdots & a_{m1}c_{1l} + a_{m2}c_{2l} + \cdots + a_{mn}c_{nl} \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Operações (forma geral):
 - Transposição: Linha vira coluna e coluna vira linha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$


$$A_{m \times n} \text{ e } A^T_{n \times m}$$

Matrizes e vetores

- Matrizes
 - Propriedades:
 - $(AB)C = A(BC)$;
 - $A(B + C) = AB + AC$;
 - $(B + C)A = BA + CA$;
 - $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
 - $(AB)^T = B^T A^T$
 - $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
 - Observação: A multiplicação matricial não é comutativa, isto é: $AB \neq BA$

Matrizes e vetores

- Vetores
 - Matrizes com uma única coluna

2×1

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = [2 \quad 1 \quad 0]$$

1×3

Matrizes e vetores

- Vetores
 - Matrizes com uma única coluna

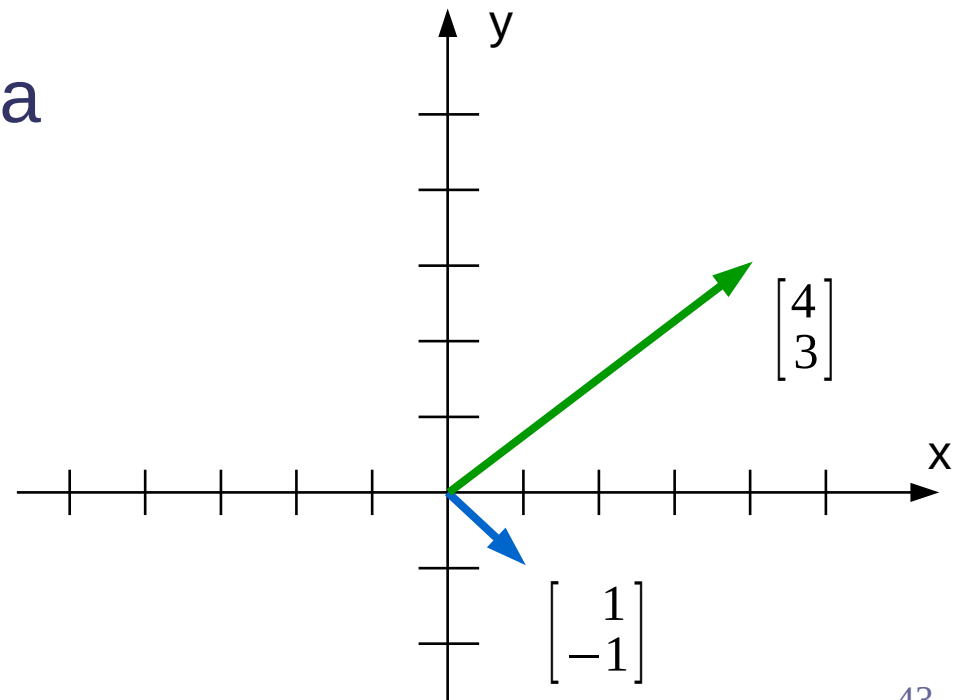
2×1

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = [2 \quad 1 \quad 0]$$

1×3

- Interpretação geométrica
 - Magnitude
 - Direção
 - Sentido



Matrizes e vetores

- Vetores
 - Matrizes com uma única coluna

2×1

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

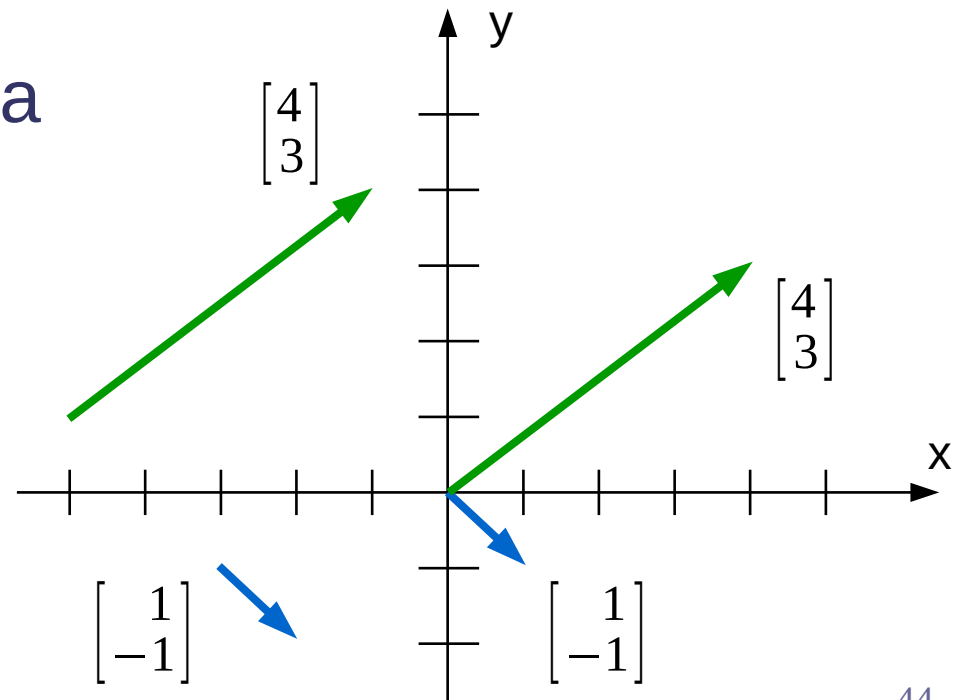
$$\mathbf{v} = [2 \quad 1 \quad 0]$$

1×3

- Interpretação geométrica

- Magnitude
- Direção
- Sentido

Não tem
posição no
espaço



Matrizes e vetores

- Vetores
 - Matrizes com uma única coluna

2×1

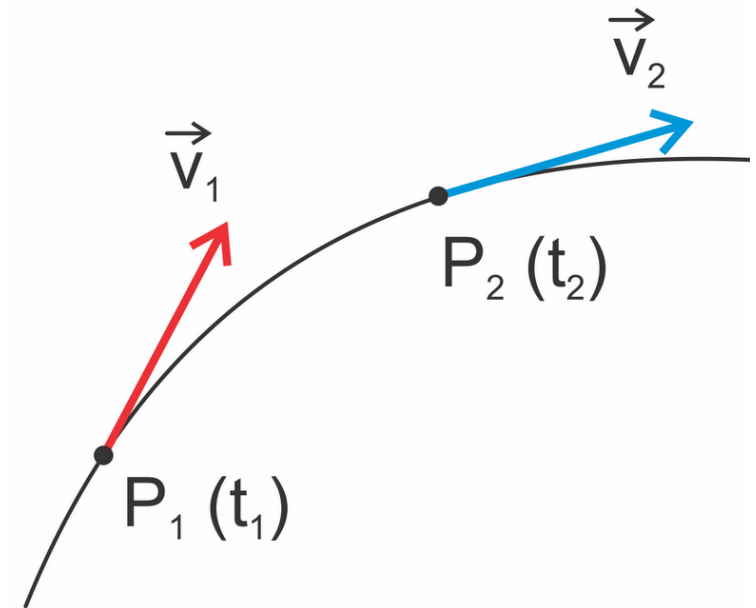
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = [2 \quad 1 \quad 0]$$

1×3

- Interpretação geométrica
 - Magnitude
 - Direção
 - Sentido

Velocidade



Matrizes e vetores

- Vetores

- Operações:

- Herdadas de matrizes

- Soma
 - Subtração
 - Multiplicação por escalar
 - Multiplicação de matrizes
 - Transposição

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

- Produto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

- Produto vetorial para vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

- Normal (magnitude) $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes

- Matrizes diagonais

- $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriz identidade (I)

- $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$

- $a_{ij} = 1$, para $i = j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
 - Matrizes triangulares

- Superior:

- $a_{ij} = 0$, para $i > j$

- Inferior:

- $a_{ij} = 0$, para $i < j$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular superior 4×4 arbitrária.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular inferior 4×4 arbitrária.

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
 - Matrizes transpostas
 - $A = [a_{ij}] \rightarrow A^T = [a_{ji}]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3 \quad 5], \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad D^T = [4]$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
 - Matrizes simétricas
 - $A=A^T$
 - $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
 - Matrizes hermitianas
 - $[a_{ij}^*] = [\bar{a}_{ji}]$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2i \\ 2i & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3+2i & -1-i \\ 3-2i & 6 & 2 \\ -1+i & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz simétrica porém não hermitiana

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1-2i \\ i & 2i & 3 \\ 1-2i & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
 - Matriz inversa
 - $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Matrizes e vetores

- Tipos especiais de matrizes
 - Matriz cheia
 - Muitos valores diferentes de zero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz esparsa
 - Muitos valores iguais a zero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores


- Sistemas lineares na forma matricial

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 5 \\ -x & + & 2y = 4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matrizes e vetores

- Sistemas lineares na forma matricial
 - Forma geral

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$


$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$


$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Porém, achar a inversa nem sempre é fácil!

A é a matriz dos coeficientes,
 \mathbf{x} é o vetor de incógnitas e
 \mathbf{b} é o vetor de termos independentes

Resumo

Resumo

- Sistemas lineares

- A solução é valores de x_i que satisfazem todas as equações ao mesmo tempo
- Classificação quanto a solução

- Consistente

- Determinado
 - Indeterminado

- Inconsistente

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Matrizes e vetores

- Para algumas operações é preciso que as matrizes sejam compatíveis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Bibliografia

Bibliografia

- ANTON, Howard; RORRES, Chris.
Álgebra Linear com Aplicações. 10^a ed.
Porto Alegre: Bookman, 2012.
 - Seção 1.1 (parcial)
- DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
 - Seção 1.1 (parcial)
- Leitura interessante
 - <https://www.ime.usp.br/~colli/cursos/NumericoIAG-2005/LivroNumericoCapitulos1-2-3.pdf>
 - Capítulo 1