Derivadas parciais e diferenciabilidade

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

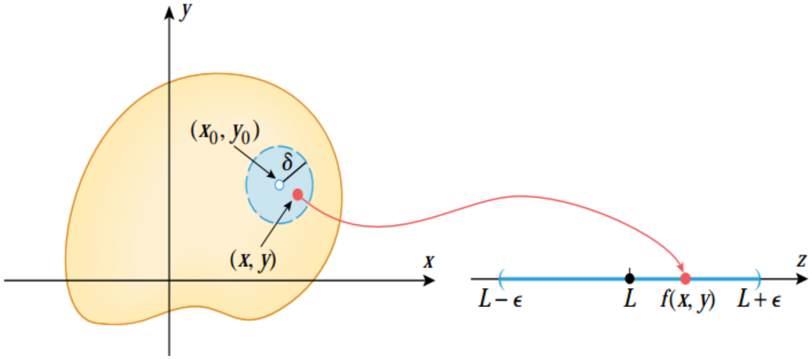
Índice

Revisão

Revisão

- Limite

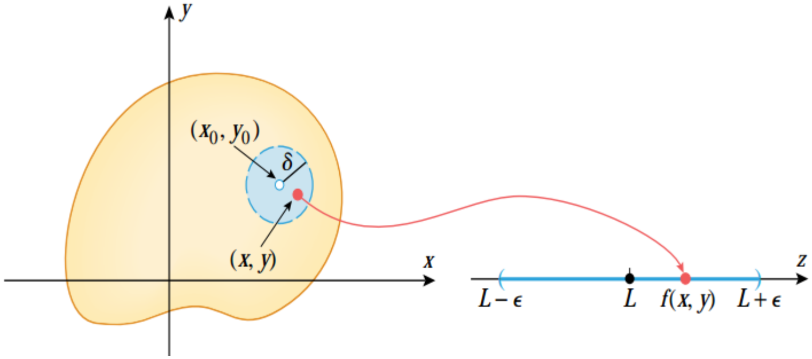
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$



Revisão

- Limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

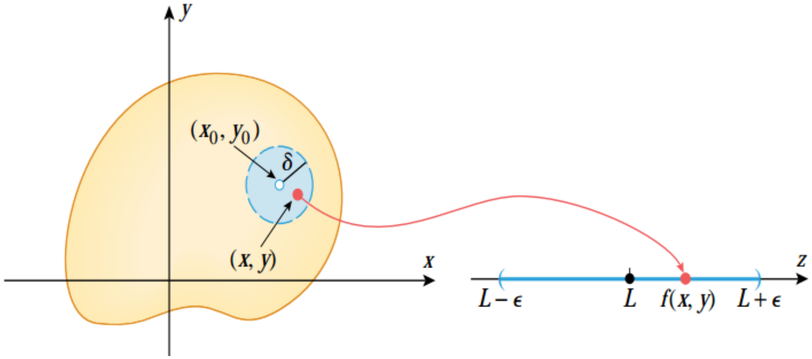


  - Achar duas ou mais curvas lisas, serve para dar o contra exemplo e dizer que o limite não existe

Revisão

- Limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

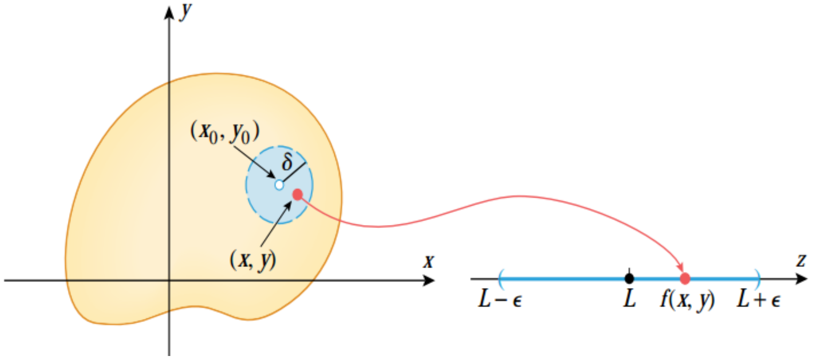


  - Achar duas ou mais curvas lisas, serve para dar o contra exemplo e dizer que o limite não existe
  - Continuidade $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Revisão

- Limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$



  - Achar duas ou mais curvas lisas, serve para dar o contra exemplo e dizer que o limite não existe
  - Continuidade $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

- Derivadas parciais
  - Trata uma variável como constante

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Derivadas parciais

Derivadas parciais

- Obtendo derivadas parciais aproximadas de tabelas
  - É possível estimar as derivadas parciais usando entradas adjacentes da tabela

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h) \ TEMPERATURA T (°F)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
10	9	15	21	27
15	6	13	19	25
20	4	11	17	24

Derivadas parciais

- Obtendo derivadas parciais aproximadas de tabelas
  - Exemplo: Use os valores da função índice de sensação térmica *W(T, v)* para estimar a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*.

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h) \ TEMPERATURA T (°F)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
10	9	15	21	27
15	6	13	19	25
20	4	11	17	24

Derivadas parciais

- Obtendo derivadas parciais aproximadas de tabelas
  - Exemplo: Use os valores da função índice de sensação térmica *W(T, v)* para estimar a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*.

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - W(25, 10)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h) \ TEMPERATURA T (°F)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
10	9	$\boxed{15}$	21	27
15	6	13	19	25
20	4	11	17	24

Derivadas parciais

- Obtendo derivadas parciais aproximadas de tabelas
  - Exemplo: Use os valores da função índice de sensação térmica *W(T, v)* para estimar a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*.

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - W(25, 10)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h) \ TEMPERATURA T (°F)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
10	9	15	21	27
15	6	13	19	25
20	4	11	17	24

Derivadas parciais

- Obtendo derivadas parciais aproximadas de tabelas
  - Exemplo: Use os valores da função índice de sensação térmica *W(T, v)* para estimar a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*.

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - W(25, 10)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

- Aproximando ($\Delta v = 5$)

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) \approx \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

$$\approx \frac{W(25, 10 + 5) - 15}{5}$$

$$= \frac{W(25, 15) - 15}{5}$$

$$= \frac{13 - 15}{5} = -\frac{2}{5} \ \frac{°F}{\text{mi/h}}$$

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h) \ TEMPERATURA T (°F)	20	25	30	35
5	13	19	25	31
10	9	15	21	27
15	6	13	19	25
20	4	11	17	24

Derivadas parciais

- Obtendo derivadas parciais aproximadas de tabelas
  - Exemplo: Use os valores da função índice de sensação térmica *W(T, v)* para estimar a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*.

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - W(25, 10)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

- Aproximando (Δv = -5)

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) &\approx \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v} \\ &\approx \frac{W(25, 10 - 5) - 15}{-5} \\ &= \frac{W(25, 5) - 15}{-5} \\ &= \frac{19 - 15}{-5} = -\frac{4}{5}\ \frac{°\mathrm{F}}{\mathrm{mi/h}}\end{aligned}$$

TEMPERATURA T (°F)

VELOCIDADE DO VENTO v (milhas/h)

v \ T	20	25	30	35
5	13	19	25	31
10	9	15	21	27
15	6	13	19	25
20	4	11	17	24

Derivadas parciais

- Obtendo derivadas parciais aproximadas de tabelas
  - Exemplo: Use os valores da função índice de sensação térmica *W(T, v)* para estimar a derivada parcial de *W* em relação a *v* no ponto *(T, v) = (25, 10)*.
    - Média das duas aproximações

$$-\frac{3}{5} = -0{,}6\ \frac{°\mathrm{F}}{\mathrm{mi/h}}$$

    - Valor real

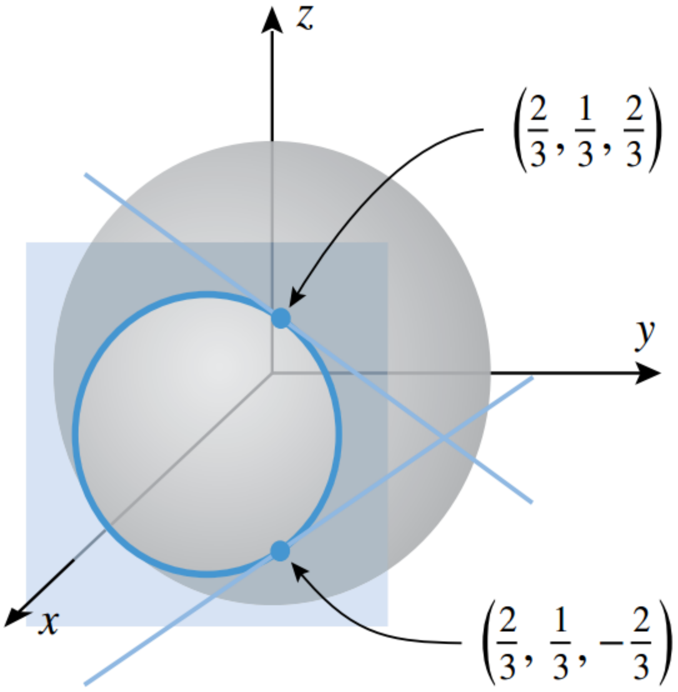
$$-0{,}58\ \frac{°\mathrm{F}}{\mathrm{mi/h}}$$

Derivadas parciais

- Derivação parcial implícita
  - Exemplo: Determine a inclinação da esfera na direção *y* nos pontos $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

x e y são variáveis independentes e z é uma variável dependente



Derivadas parciais

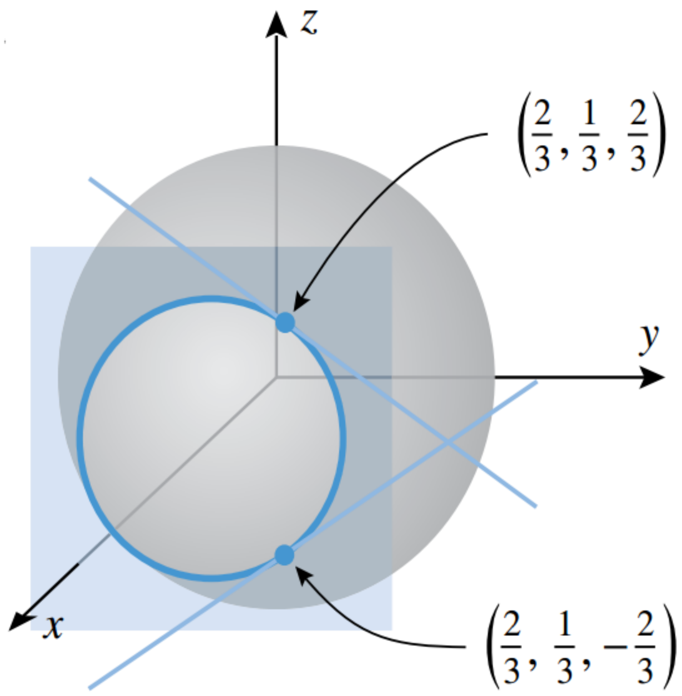
- Derivação parcial implícita
  - Exemplo: Determine a inclinação da esfera na direção *y* nos pontos $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

- Hemisfério superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- Hemisfério inferior $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Seria possível encontrar derivando separadamente

É mais eficiente derivar a implícita, vendo z como uma função de x e y



Derivadas parciais

- Derivação parcial implícita
  - Exemplo: Determine a inclinação da esfera na direção *y* nos pontos $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

- Derivando implicitamente

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^2 + z^2] = \frac{\partial}{\partial y}[1]$$

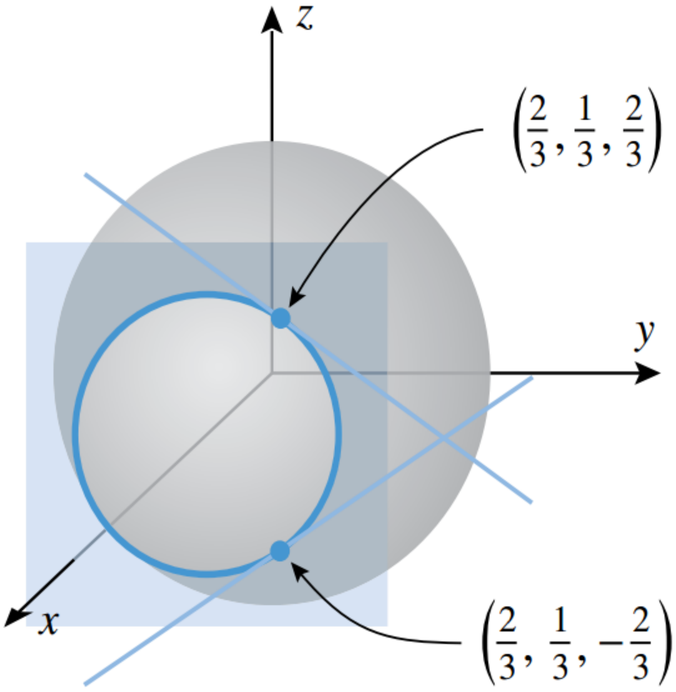
$$0 + 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

- Substituindo

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}$$



Derivadas parciais

- Derivação parcial implícita
  - Exemplo: Suponha que *D* seja o comprimento da diagonal de um retângulo cujos lados têm comprimentos *x* e *y* que podem variar. Determine uma fórmula para a taxa de variação de D em relação a *x* no ponto em que $x = 3$ e $y = 4$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Derivadas parciais

- Derivação parcial implícita
  - Exemplo: Suponha que *D* seja o comprimento da diagonal de um retângulo cujos lados têm comprimentos *x* e *y* que podem variar. Determine uma fórmula para a taxa de variação de D em relação a *x* no ponto em que *x* = *3* e *y* = *4*

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$2D\frac{\partial D}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad D\frac{\partial D}{\partial x} = x$$

$$5\left.\frac{\partial D}{\partial x}\right|_{x=3,\, y=4} = 3 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial D}{\partial x}\right|_{x=3,\, y=4} = \frac{3}{5}$$

Derivadas parciais

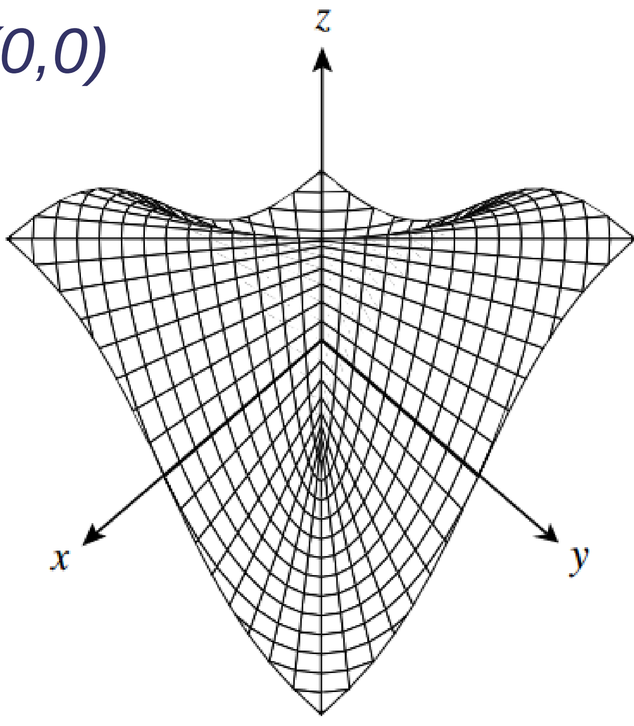
- Derivadas parciais e continuidade
  - A existência de derivadas parciais de funções de várias variáveis não garante a continuidade da função.

Derivadas parciais

- Derivadas parciais e continuidade
  - Exemplo: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    - Mostre que $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existem em todos (x, y)
    - Explique por que f não é contínua em $(0,0)$



Derivadas parciais

- Derivadas parciais e continuidade
  - Exemplo: Seja

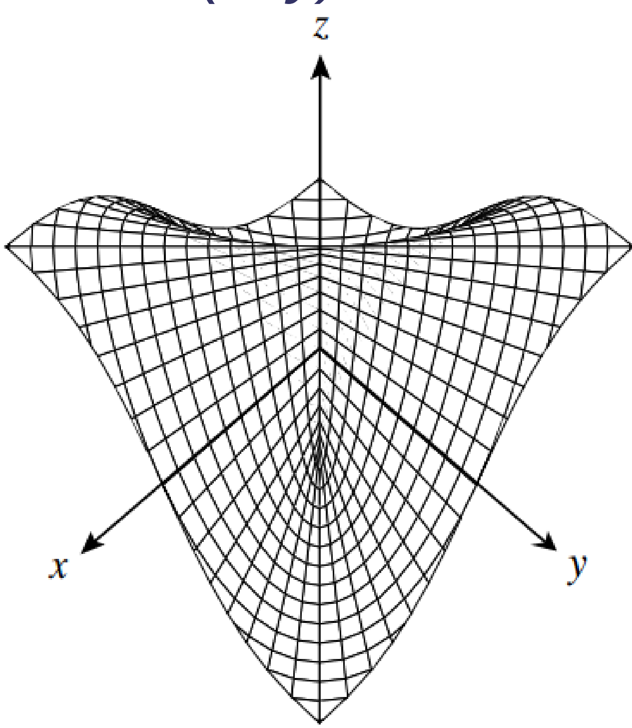
$$f(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

    - Mostre que $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existem em todos (x, y)

Exceto no (0,0)

$$f_x(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)y - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)x - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{xy^2 - x^3}{(x^2 + y^2)^2}$$



Derivadas parciais

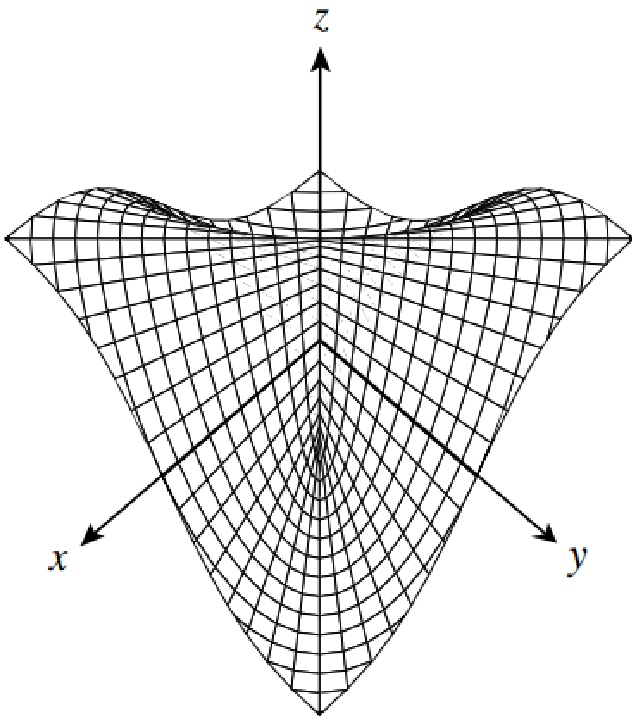
- Derivadas parciais e continuidade
  - Exemplo: Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

    - Mostre que $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existem em todos (x, y)

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$



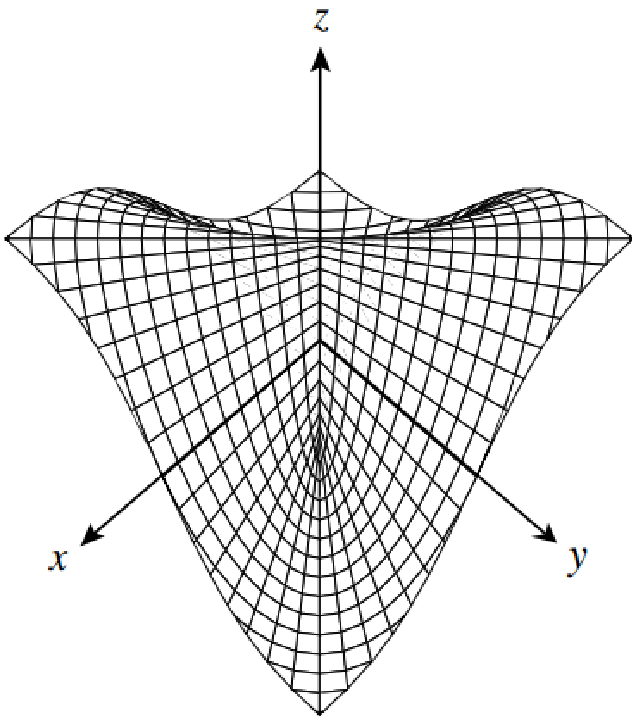
Derivadas parciais

- Derivadas parciais e continuidade
  - Exemplo: Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Explique por que f não é contínua em *(0,0)*
  - O limite a seguir não existe, assim a função *f* não é contínua em (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$



Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções com mais de duas variáveis
  - Uma função f(x, y, z) de três variáveis, tem três derivadas parciais

$$f_x(x, y, z) \qquad f_y(x, y, z) \qquad f_z(x, y, z)$$

Mantém y e z constantes

Mantém x e z constantes

Mantém x e y constantes

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções com mais de duas variáveis
  - Uma função f(x, y, z) de três variáveis, tem três derivadas parciais

$$f_x(x, y, z) \qquad f_y(x, y, z) \qquad f_z(x, y, z)$$

  - Sendo w = f(x,y,z), as derivadas parciais podem ser denotadas como:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \frac{\partial w}{\partial z}$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções com mais de duas variáveis
  - Exemplo: Descubra as derivadas parciais

$$f(x, y, z) = x^3y^2z^4 + 2xy + z \qquad f(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \cos\phi \operatorname{sen}\theta$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções com mais de duas variáveis
  - Exemplo: Descubra as derivadas parciais

$$f(x, y, z) = x^3y^2z^4 + 2xy + z$$

$$f(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \cos\phi \operatorname{sen}\theta$$

$$f_x(x, y, z) = 3x^2y^2z^4 + 2y$$
$$f_y(x, y, z) = 2x^3yz^4 + 2x$$
$$f_z(x, y, z) = 4x^3y^2z^3 + 1$$

$$f_\rho(\rho, \theta, \phi) = 2\rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$f_\theta(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \cos\phi \cos\theta$$
$$f_\phi(\rho, \theta, \phi) = -\rho^2 \sin\phi \operatorname{sen}\theta$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de funções com mais de duas variáveis
  - De forma geral, uma função de *n* variáveis, terá *n* derivadas parciais de *f*
    - Fixando n-1 variáveis
    - Deriva a variável não fixada

$$\frac{\partial w}{\partial v_1}, \frac{\partial w}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial v_n}$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - As derivadas parciais de f(x,y) são, normalmente, funções de x e y
  - Derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

Derivando duas vezes em relação a *x*.

Derivando duas vezes em relação a *y*.

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - As derivadas parciais de f(x,y) são, normalmente, funções de x e y
  - Derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}$$

Derivando duas vezes em relação a x.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

Derivando duas vezes em relação a y.

Derivadas parciais de segunda ordem mistas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$$

Derivando primeiramente em relação a x e, então, em relação a y.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

Derivando primeiramente em relação a y e, então, em relação a x.

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - As derivadas parciais de f(x,y) são, normalmente, funções de x e y
  - Derivadas parciais de segunda ordem
    - OBS: A notações para as parciais de segunda ordem mistas têm convenção oposta quanto à ordem de diferenciação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Da direita para a esquerda. Derivando dentro dos parênteses primeiro.

$$f_{xy} = (f_x)_y$$

Da esquerda para a direita. Derivando dentro dos parênteses primeiro.

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - Exemplo: Determine as derivadas parciais de segunda ordem

$$f(x, y) = x^2y^3 + x^4y$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - Exemplo: Determine as derivadas parciais de segunda ordem

$$f(x, y) = x^2y^3 + x^4y$$

  - Derivadas de primeira ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + x^4$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - Exemplo: Determine as derivadas parciais de segunda ordem

$$f(x, y) = x^2y^3 + x^4y$$

- Derivadas de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 + 4x^3y) = 2y^3 + 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + x^4) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + x^4) = 6xy^2 + 4x^3$$

Iguais!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + 4x^3y) = 6xy^2 + 4x^3$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - Derivadas de ordem maiores que dois

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = f_{xxx} \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right) = f_{yyyy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = f_{xyy} \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right) = f_{xxyy}$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - Derivadas de ordem maiores que dois
    - Exemplo: Determine f_{xyy}

$$f(x, y) = y^2 e^x + y$$

Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - Derivadas de ordem maiores que dois
    - Exemplo: Determine f_{xyy}

$$f(x, y) = y^2 e^x + y$$

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2 e^x) = \frac{\partial}{\partial y}(2ye^x) = 2e^x$$

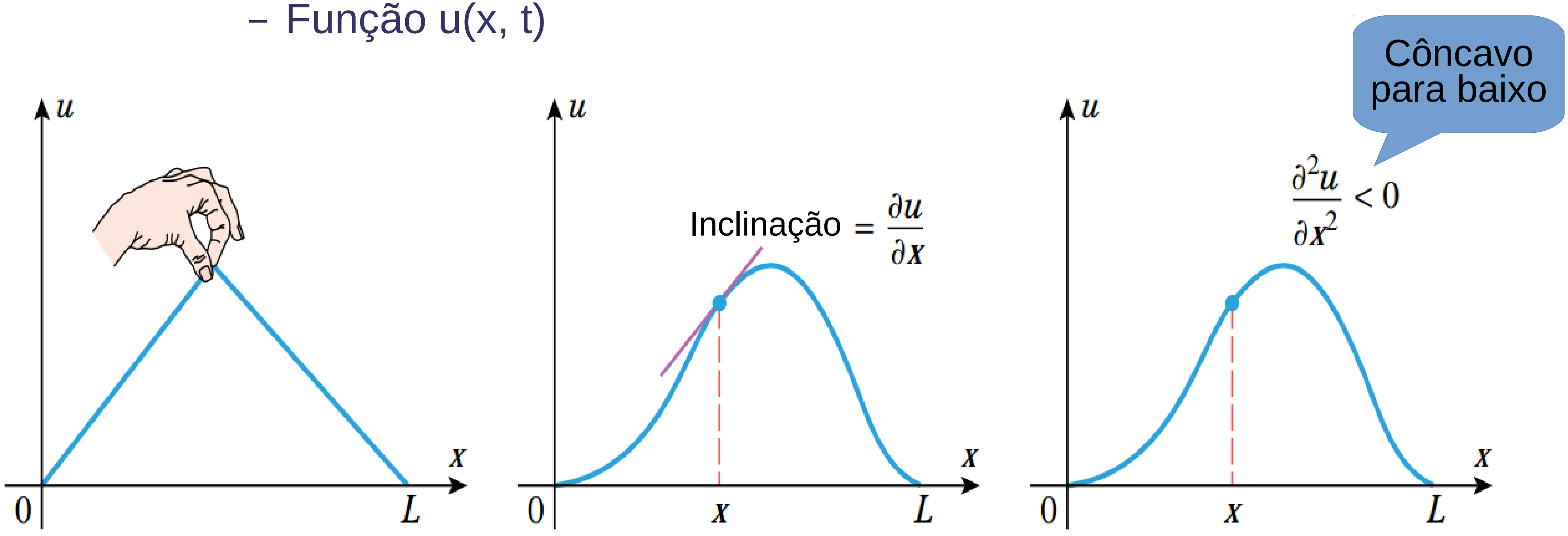
Derivadas parciais

- Derivadas parciais de ordens superiores
  - Igualdade das parciais mistas
    - Teorema: Seja f uma função de duas variáveis. Se f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em algum disco aberto, então $f_{xy} = f_{yx}$ nesse disco.

O exemplo anterior trata da derivada de polinômios, que são contínuos em toda parte! Com isso $f_{xy} = f_{yx}$ em toda parte!

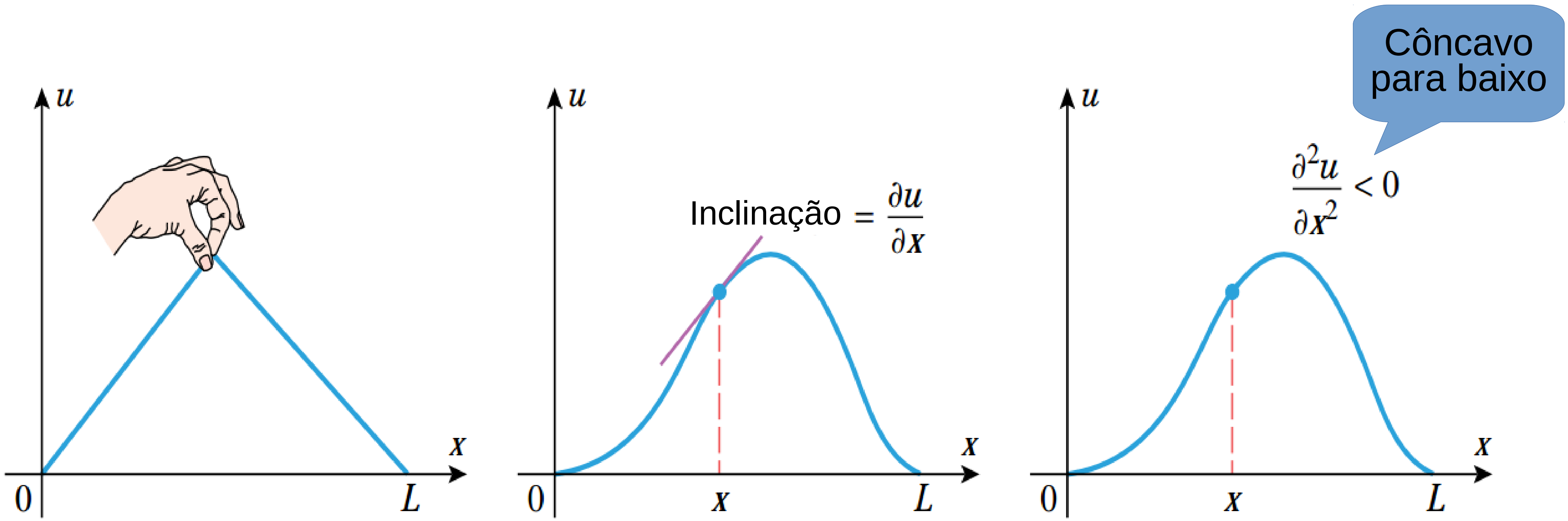
Derivadas parciais

- A equação da onda
  - Considere uma corda de comprimento L fortemente esticada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$ e colocada em movimento vibratório
    - O deslocamento de um ponto sobre a corda depende de sua coordenada x e do tempo decorrido t
      - Função u(x, t)



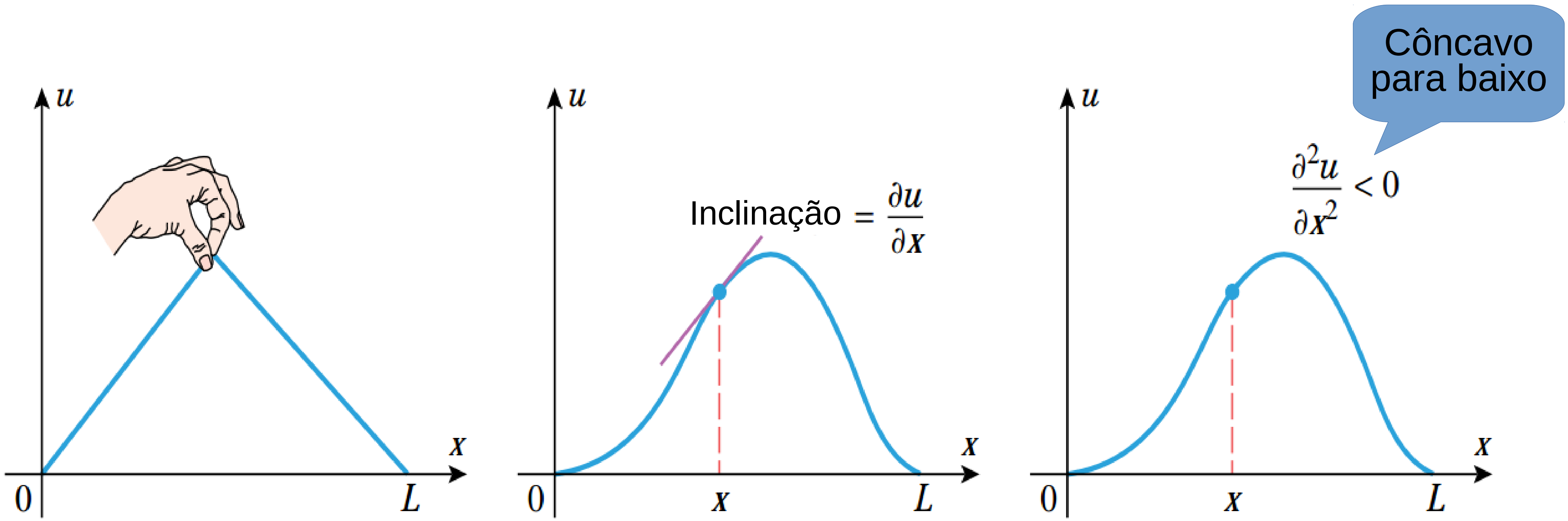
Derivadas parciais

- A equação da onda
  - Com um valor fixado t, a função u(x, t) depende somente de x
    - O gráfico de u versus x descreve a forma da corda



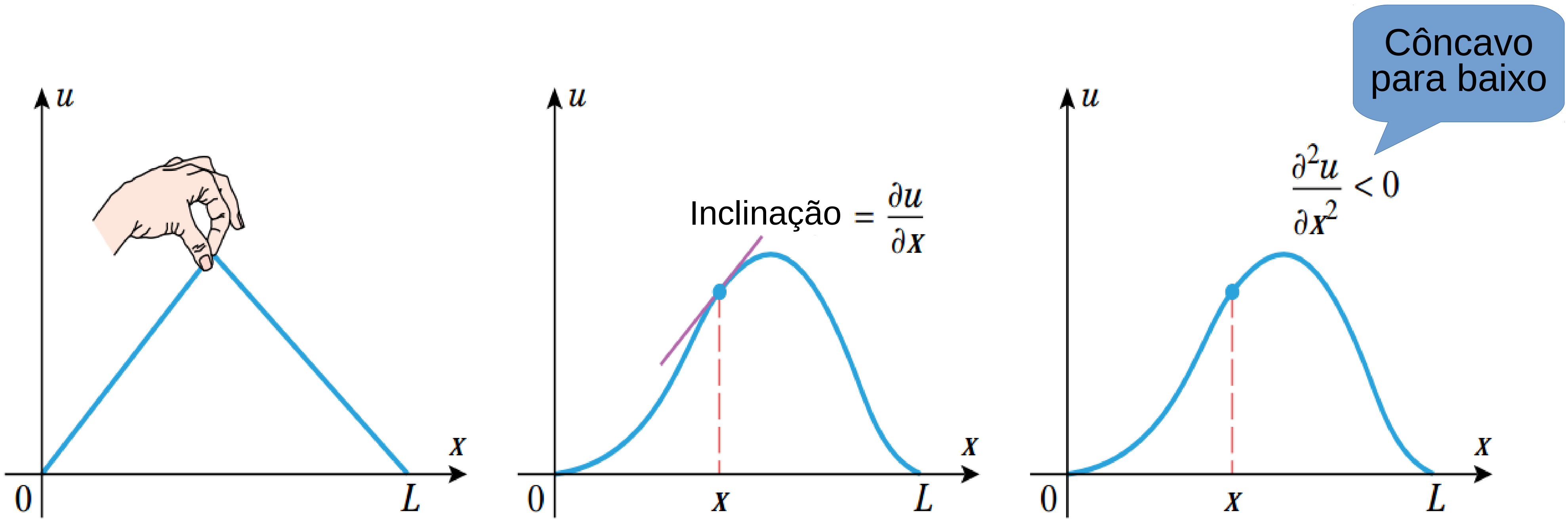
Derivadas parciais

- A equação da onda
  - Com um valor fixado t, a função u(x, t) depende somente de x
    - O gráfico de u versus x descreve a forma da corda
    - *∂u/∂x*: inclinação



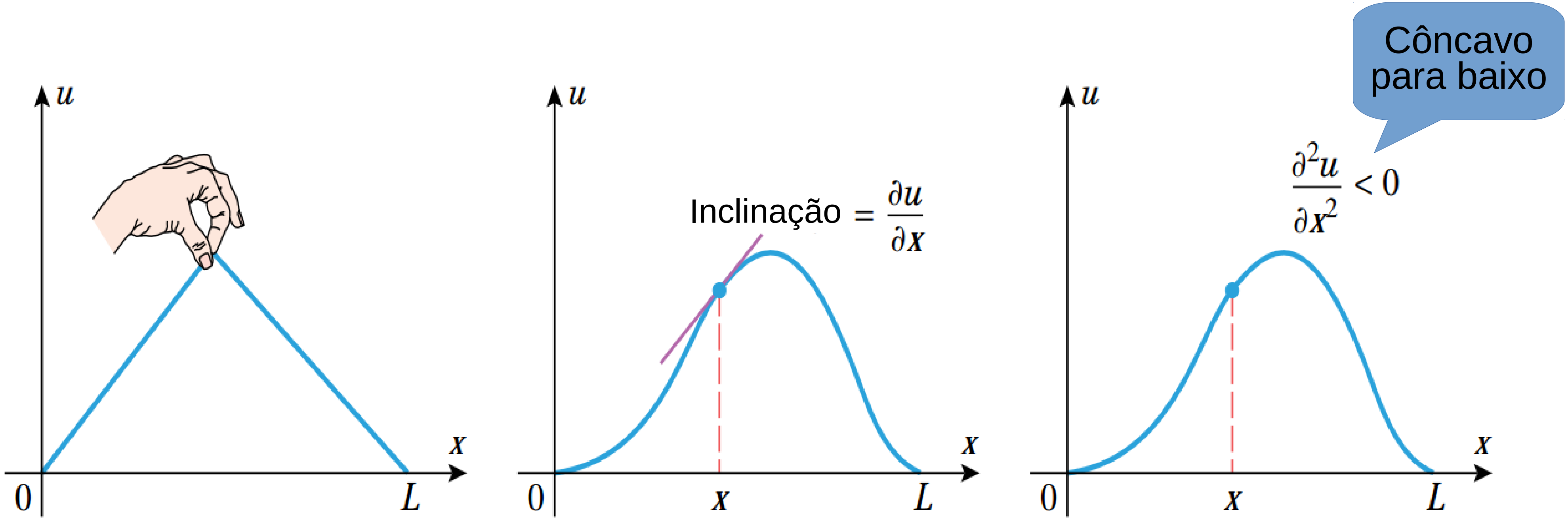
Derivadas parciais

- A equação da onda
  - Com um valor fixado t, a função u(x, t) depende somente de x
    - O gráfico de u versus x descreve a forma da corda
    - *∂u/∂x*: inclinação
    - $\partial^2 u/\partial x^2$: concavidade



Derivadas parciais

- A equação da onda
  - Fixando x, a função u(x, t) depende apenas de t
    - O gráfico de u versus t indica a posição de cada coordenada x no tempo
    - $\partial u/\partial t$: velocidade
    - $\partial^2 u/\partial t^2$: aceleração



Derivadas parciais

- A equação da onda
  - Equação da onda unidimensional
    - É uma equação diferencial parcial.
    - Sob condições apropriadas, a função *u(x, t)* satisfaz uma equação a seguir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

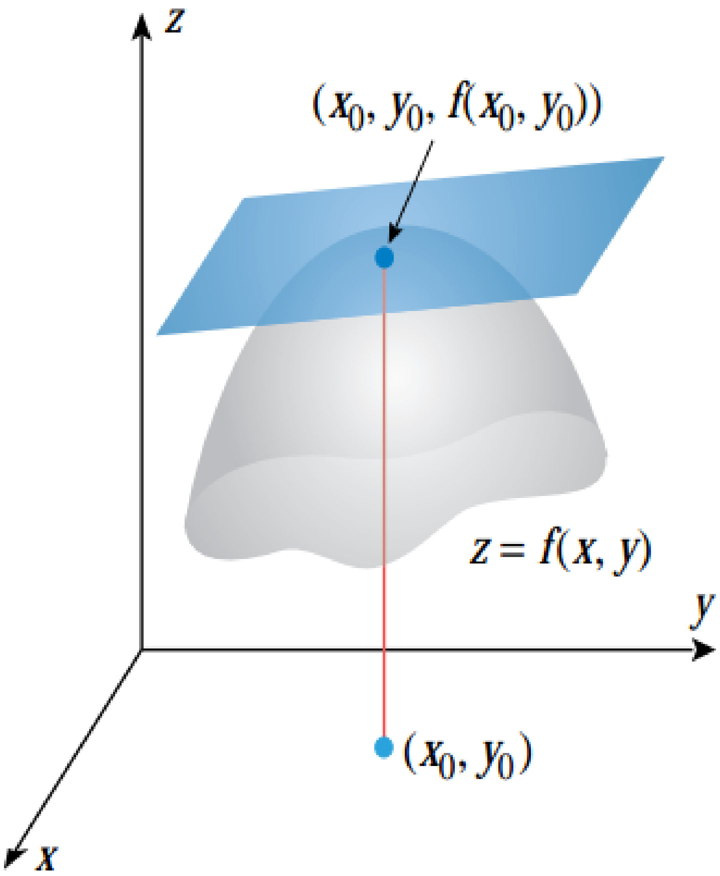
onde c é uma constante positiva que depende das características físicas da corda

Existem métodos numéricos para resolver

Diferenciabilidade

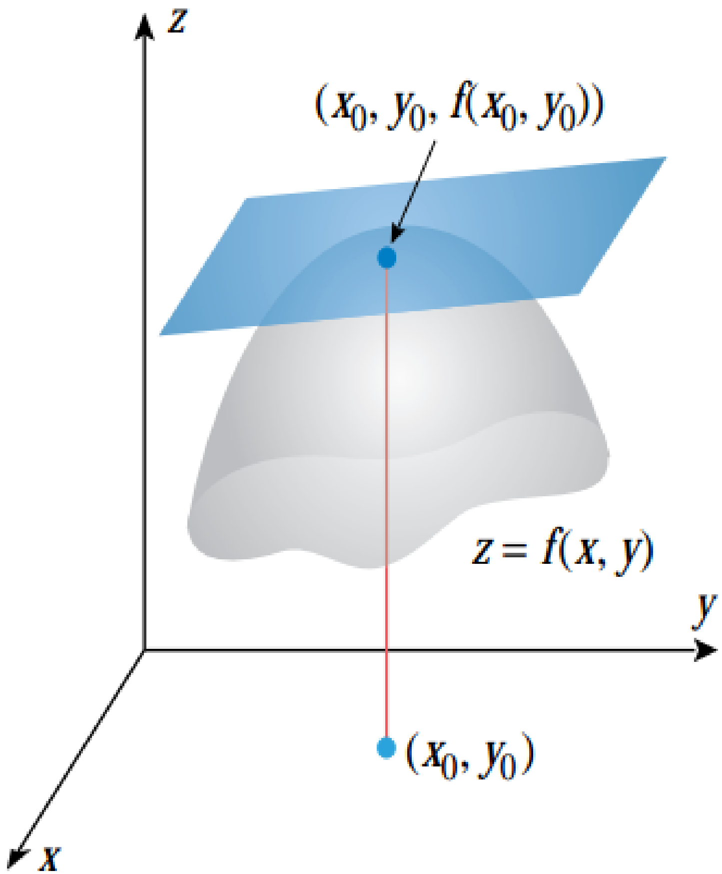
Diferenciabilidade

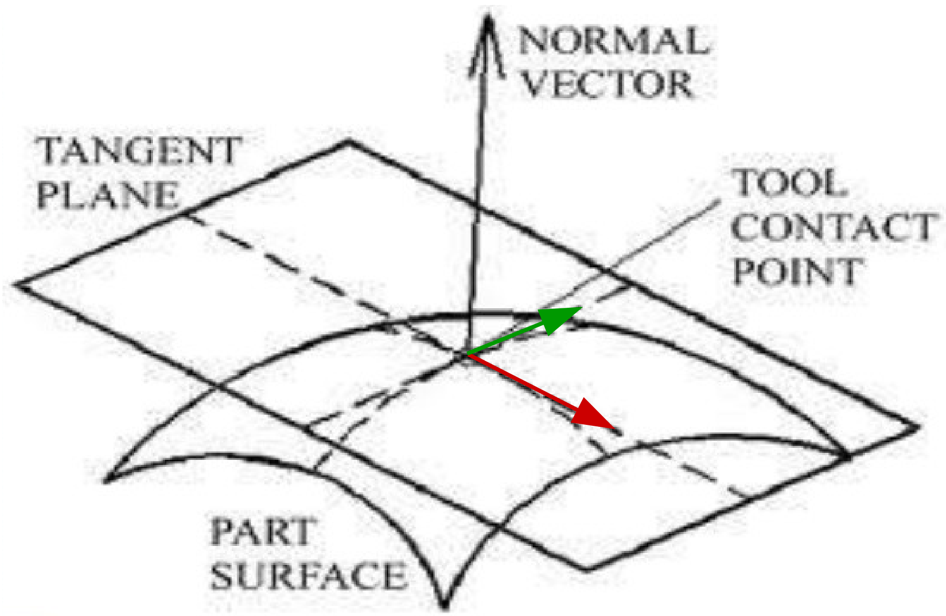
- Plano tangente



Diferenciabilidade

- Plano tangente
  - Vetor normal: calculado a partir dos vetores direção das retas tangentes dadas pelas derivadas parciais





Diferenciabilidade

- Plano tangente
  - Equação geral do plano π passando pelo ponto $(x_0, y_0, z_0=f(x_0,y_0))$ com o vetor normal (A,B,C)

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Diferenciabilidade

- Plano tangente
  - Equação geral do plano π passando pelo ponto $(x_0, y_0, z_0=f(x_0,y_0))$ com o vetor normal (A,B,C)

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

  - Se C≠0, pode-se reescrever como:

$$z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0)$$

$$\text{onde } a=-\frac{A}{C} \text{ é } b=-\frac{B}{C}$$

Diferenciabilidade

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

- Plano tangente
  - A interseção de π com o plano $y = y_0$ é a reta tangente T_x na direção x

$$z - z_0 = a(x - x_0)$$

Diferenciabilidade

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

- Plano tangente
  - A interseção de π com o plano y=y_0 é a reta tangente T_x na direção x

$$z - z_0 = a(x - x_0)$$

    - Inclinação

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

  - De forma semelhante, temos a tangente T_y:

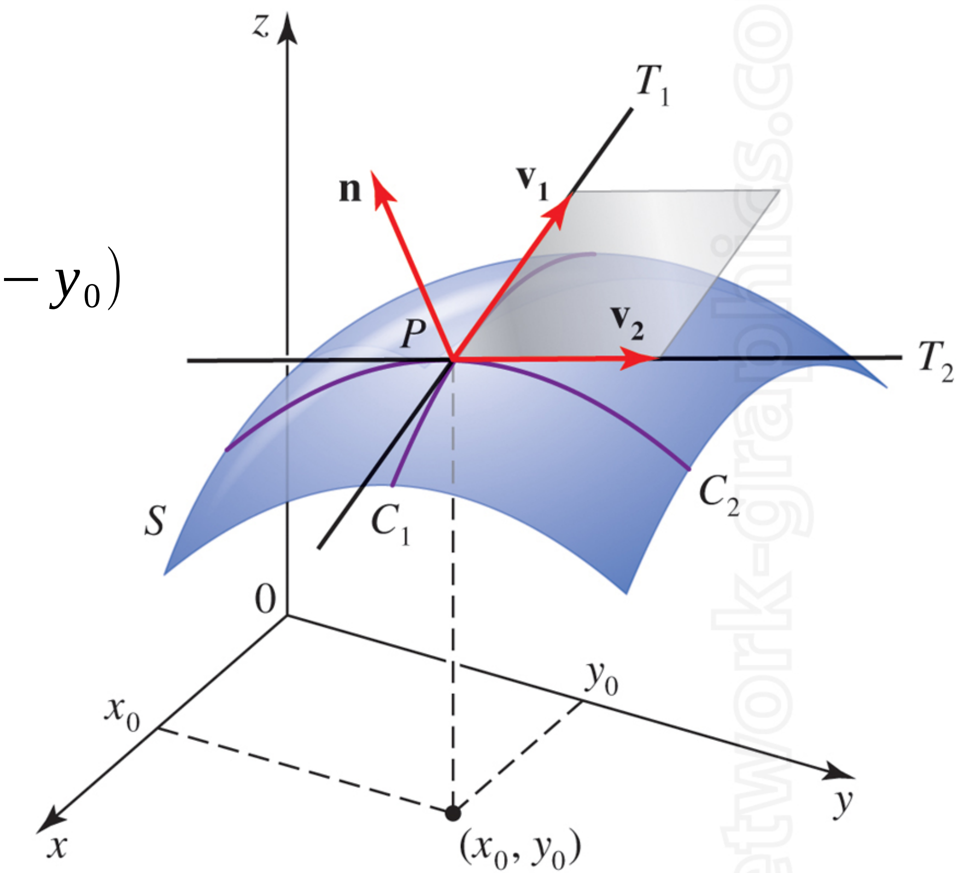
$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

Diferenciabilidade

$$z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0)$$

- Plano tangente
  - Equação do plano tangente
    - Substituindo

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$



Diferenciabilidade

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

- Plano tangente
  - Exemplo: Descubra o plano tangente ao ponto (1,0,-1) na curva:

$$z = f(x, y) = xy - x^2$$

Diferenciabilidade

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

- Plano tangente
  - Exemplo: Descubra o plano tangente ao ponto (1,0,-1) na curva:

$$z = f(x, y) = xy - x^2$$

    - Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - 2x \quad \Rightarrow \quad f_x(1,0) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \quad \Rightarrow \quad f_y(1,0) = 1$$

Diferenciabilidade

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

- Plano tangente
  - Exemplo: Descubra o plano tangente ao ponto (1,0,-1) na curva:

$$z = f(x, y) = xy - x^2$$

- Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - 2x \quad \Rightarrow \quad f_x(1,0) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \quad \Rightarrow \quad f_y(1,0) = 1$$

- Equação do plano

$$z + 1 = -2(x - 1) + 1(y - 0)$$
$$-2x + y - z + 1 = 0$$

Diferenciabilidade

- Plano tangente
  - É possível fazer uma aproximação linear na vizinhança de um ponto em uma curva

Diferenciabilidade

- Plano tangente
  - É possível fazer uma aproximação linear na vizinhança de um ponto em uma curva
    - Exemplo: no ponto (1,0,-1)

$$(C)\ z = f(x,y) = xy - x^2$$
$$(\pi)\ z = l(x.y) = -2x + y + 1$$

Diferenciabilidade

- Plano tangente
  - É possível fazer uma aproximação linear na vizinhança de um ponto em uma curva
    - Exemplo: no ponto (1,0,-1)

$$(C)\ z = f(x,y) = xy - x^2$$
$$(\pi)\ z = l(x.y) = -2x + y + 1$$

  - Para um ponto (1,0), f(1,0) = l(1,0) = -1
  - Para um ponto próximo ($1+\epsilon_x$, $0+\epsilon_y$)?

Termos de segunda ordem desprezados por ser uma aproxi-mação linear!

$$(C)\ f(Q) = f(1+\varepsilon_x, 0+\varepsilon_y) = (1+\varepsilon_x)(0+\varepsilon_y) - (1+\varepsilon_x)^2 = \varepsilon_y + \cancel{\varepsilon_x \varepsilon_y} - 1 - 2\varepsilon_x - \cancel{\varepsilon_x^2}$$
$$(\pi)\ l(Q) = l(1+\varepsilon_x, 0+\varepsilon_y) = -2(1+\varepsilon_x) + (0+\varepsilon_y) + 1 = -1 - 2\varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Diferenciabilidade

- Plano tangente
  - É possível fazer uma aproximação linear na vizinhança de um ponto em uma curva
    - Exemplo: no ponto (1,0,-1)

$$(C)\ z = f(x,y) = xy - x^2$$
$$(\pi)\ z = l(x.y) = -2x + y + 1$$

Termos de segunda ordem desprezados por ser uma aproxi-mação linear!

  - Para um ponto (1,0), f(1,0) = l(1,0) = -1
  - Para um ponto próximo $(1+\epsilon_x, 0+\epsilon_y)$?

$$(C)\ f(Q) = f(1+\varepsilon_x, 0+\varepsilon_y) = (1+\varepsilon_x)(0+\varepsilon_y) - (1+\varepsilon_x)^2 = \varepsilon_y + \cancel{\varepsilon_x \varepsilon_y} - 1 - 2\varepsilon_x - \cancel{\varepsilon_x^2}$$
$$(\pi)\ l(Q) = l(1+\varepsilon_x, 0+\varepsilon_y) = -2(1+\varepsilon_x) + (0+\varepsilon_y) + 1 = -1 - 2\varepsilon_x + \varepsilon_y$$

- Para $\epsilon_x = \epsilon_y = 0.01$

$$f(1.01, 0.01) \approx l(1.01, 0.01) = -1.01$$

Diferenciabilidade

- Aproximação linear
  - Para uma função z=f(x,y) em um ponto (x_0,y_0), a aproximação linear é dada por:

$$z=l(x,y)=z_0+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

- Para uma vizinhança próxima, temos:

$$f(x,y)\approx l(x,y)$$

Quanto mais longe, pior a aproximação!

Diferenciabilidade

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

- Aproximação linear
  - Exemplo: Calcule f(0.01, 1.01)

Aproximação pelo ponto (0,1)

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Diferenciabilidade

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

- Aproximação linear
  - Exemplo: Calcule f(0.01, 1.01)

Aproximação pelo ponto (0,1)

$$f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

- Função no ponto aproximado $f(0,1) = 1$
- Aproximação com a equação do plano

$$l(0.01, 1.01) = f(0,1) + f_x(0,1)\,dx + f_y(0,1)\,dy$$

  - Calculando as derivadas parciais

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow f_x(0,1) = 0 \qquad f_x = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow f_y(0,1) = 1$$

  - Pegando dx = dy = 0.01, temos que:

$$l(0.01, 1.01) = 1 + 0(0.01) + 1(0.01) = 1.01 \approx f(0.01, 1.01)$$

Resumo

Resumo

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)

Resumo

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
  - Trata como uma variável dependente

Resumo

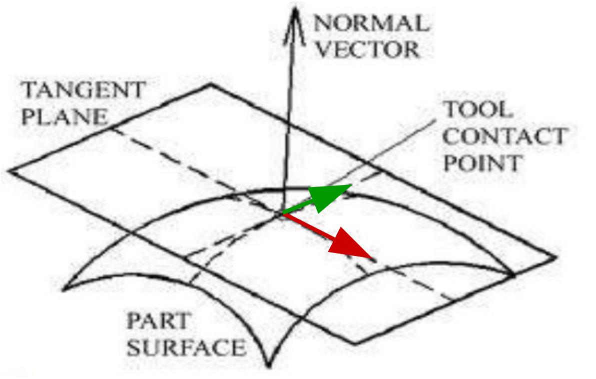
- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
  - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
  - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele

Resumo

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
  - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
  - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele
- Derivada parciais de ordens superiores
  - A derivada parcial é uma função de duas ou mais variáveis, assim também pode ser derivada

Resumo

- Derivadas parciais a partir de tabelas (aproximação)
- Derivadas parciais implícitas
  - Trata como uma variável dependente
- Derivadas parciais e continuidade
  - Não é só porque as derivadas parciais em um ponto existem que uma função é contínua nele
- Derivada parciais de ordens superiores
  - A derivada parcial é uma função de duas ou mais variáveis, assim também pode ser derivada
- O plano tangente pode ser calculado a partir das derivadas parciais e aproxima valores próximos



Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 13.3
    - Exercícios de compreensão 13.3 (3 e 4)
    - 43-50
  - Seção 13.4
    - 33-40

Resumo

- Próxima aula:
  - Função diferenciável
  - Regra da cadeia

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seções 13.3 e 13.4