Integrais duplas

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

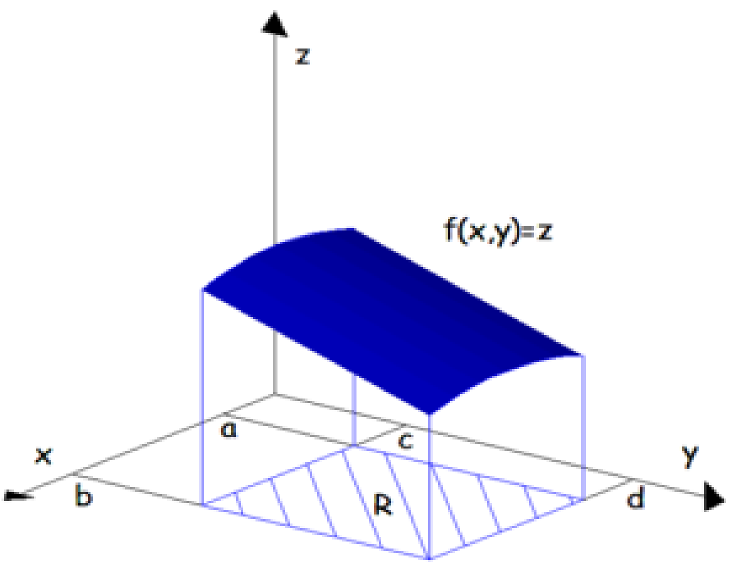
- Revisão
- Integrais duplas
  - Regiões não retangulares [cont.]
  - Inversão da ordem
  - Cálculo da área
  - Coordenadas polares
- Resumo
- Bibliografia

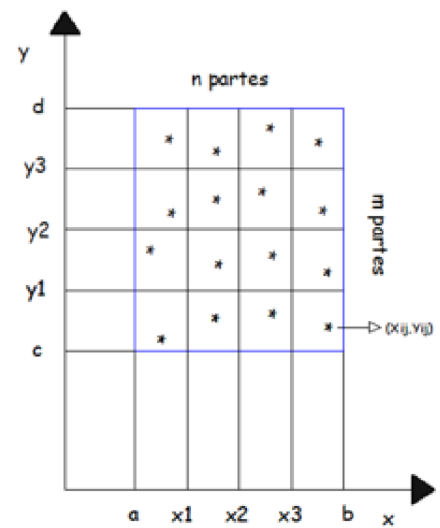
Revisão

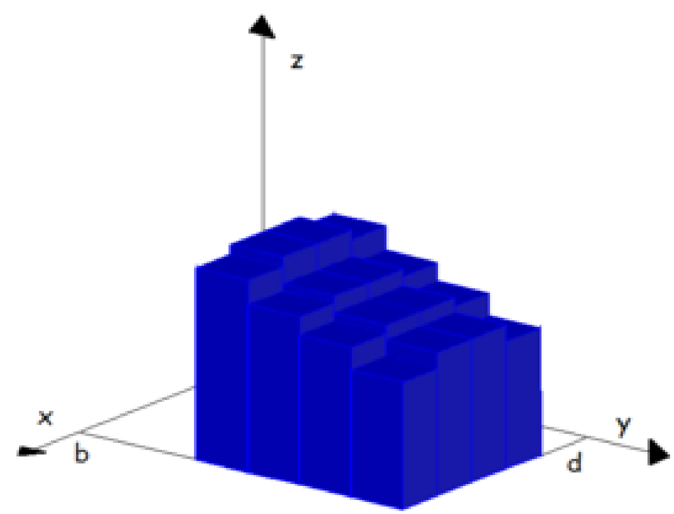
Resumo

- Calculo do volume abaixo de uma superfície
  - Região retangular

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \begin{cases} \displaystyle\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy \\[2ex] \displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx \end{cases}$$



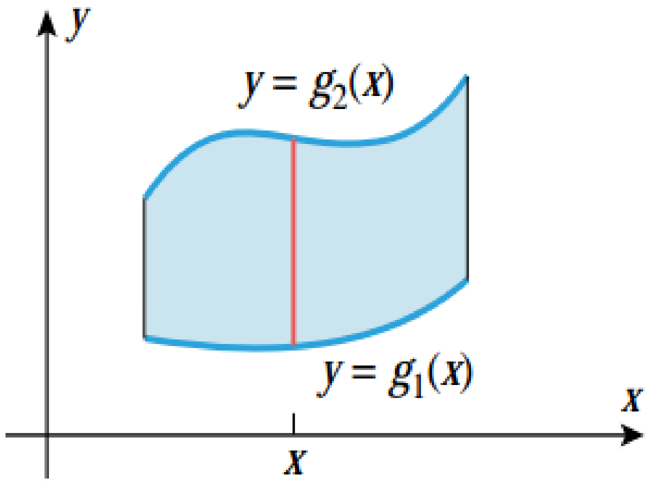


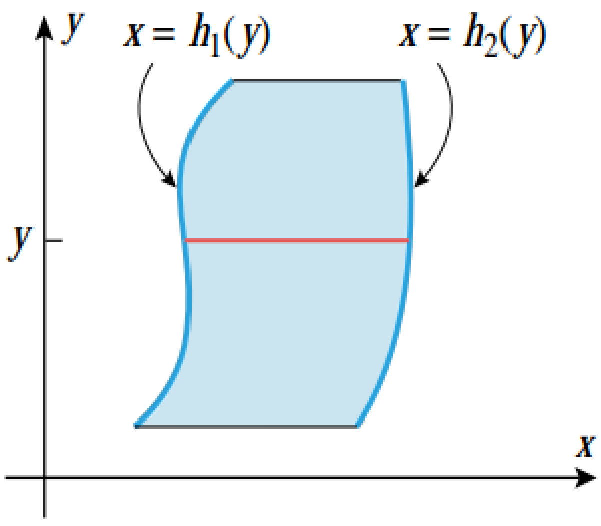


FONTE: https://www.respondeai.com.br/resumos/23/capitulos/1

Resumo

- Calculo do volume abaixo de uma superfície
  - Região não retangular
    - Tipo I $$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$
    - Tipo II $$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

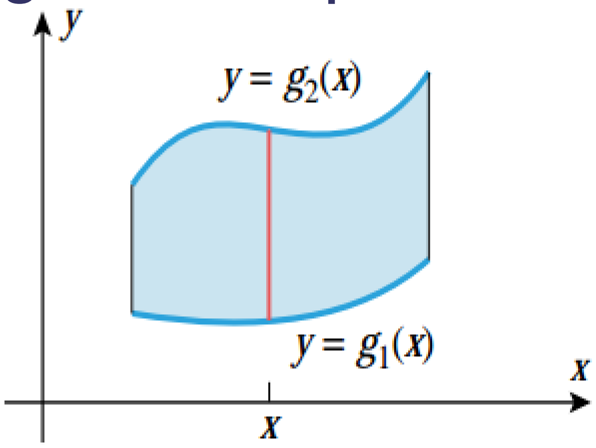


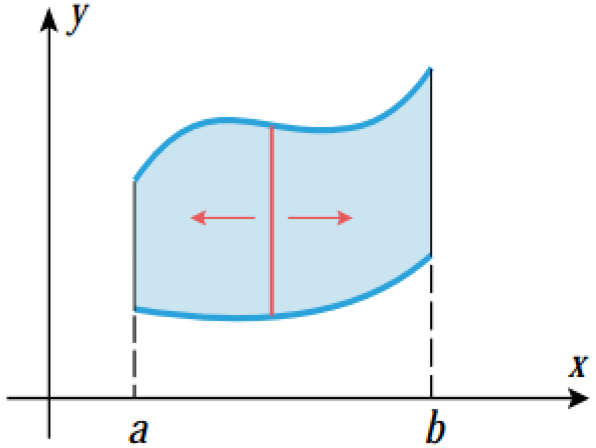


Integrais duplas

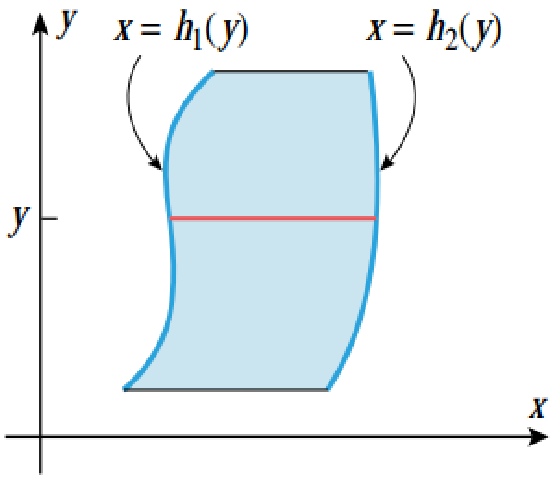
Integrais duplas

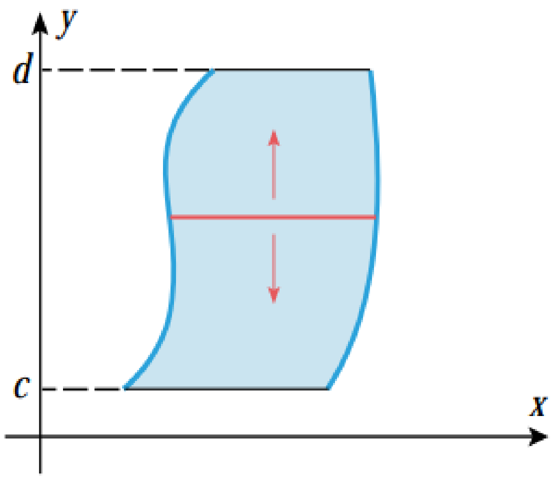
- Determinação dos Limites de Integração:
  - Região do Tipo I





  - Região do Tipo II





Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exemplo: Calcule na região triangular dada:

$$\iint_R (2x - y^2)\, dA \qquad y = -x + 1,\ y = x + 1 \text{ e } y = 3$$

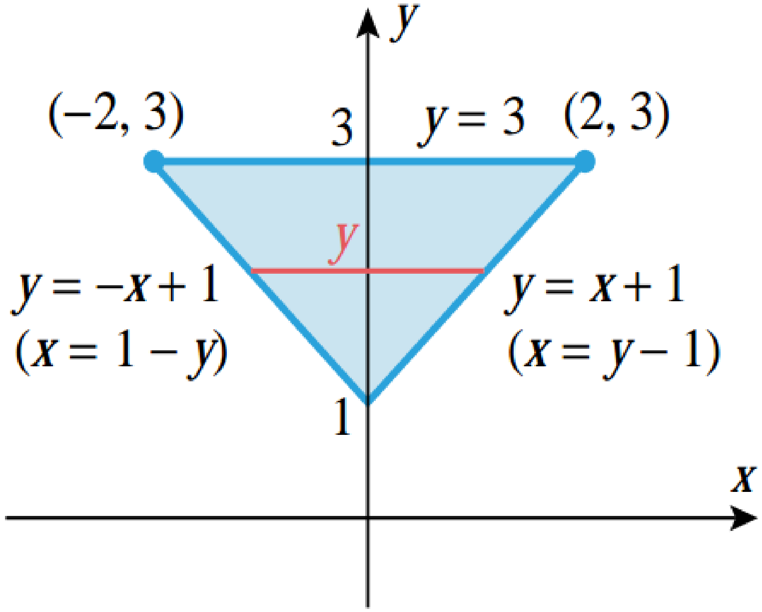
Qual o tipo?

Esboçar o domínio

Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exemplo: Calcule na região triangular dada:

$$\iint_R (2x - y^2)\, dA \qquad y = -x + 1,\ y = x + 1 \text{ e } y = 3$$



Integrais duplas

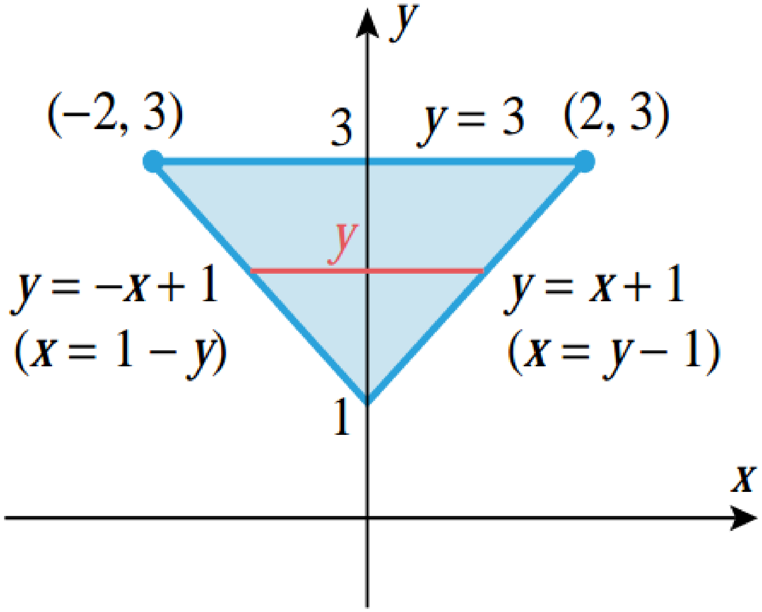
- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exemplo: Calcule na região triangular dada:

$$\iint_R (2x - y^2)\, dA \qquad y = -x + 1,\ y = x + 1 \text{ e } y = 3$$

$$= \int_1^3 \int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2)\, dx\, dy = \int_1^3 \left[x^2 - y^2 x\right]_{x=1-y}^{y-1} dy$$

$$= \int_1^3 [(1 - 2y + 2y^2 - y^3) - (1 - 2y + y^3)]\, dy$$

$$= \int_1^3 (2y^2 - 2y^3)\, dy = \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2}\right]_1^3 = -\frac{68}{3}$$

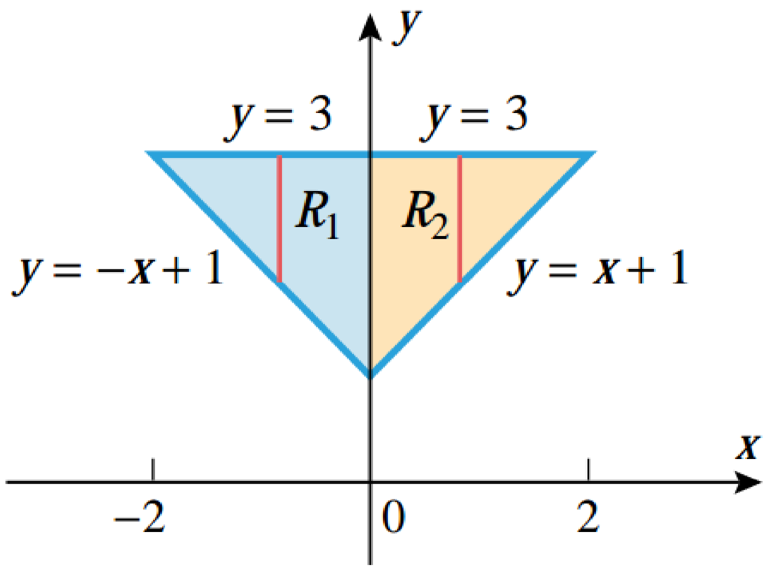


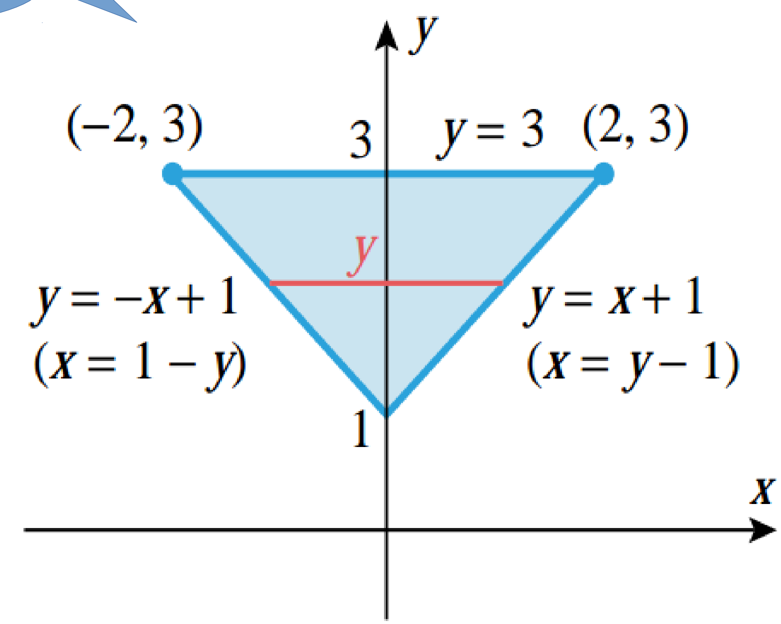
Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exemplo: Calcule na região triangular dada:

$$\iint_R (2x - y^2)\, dA \qquad y = -x + 1,\ y = x + 1 \text{ e } y = 3$$

Caso tratasse como região do tipo I, teria que considerar duas partes da fronteira inferior y = −x + 1 e y = x + 1





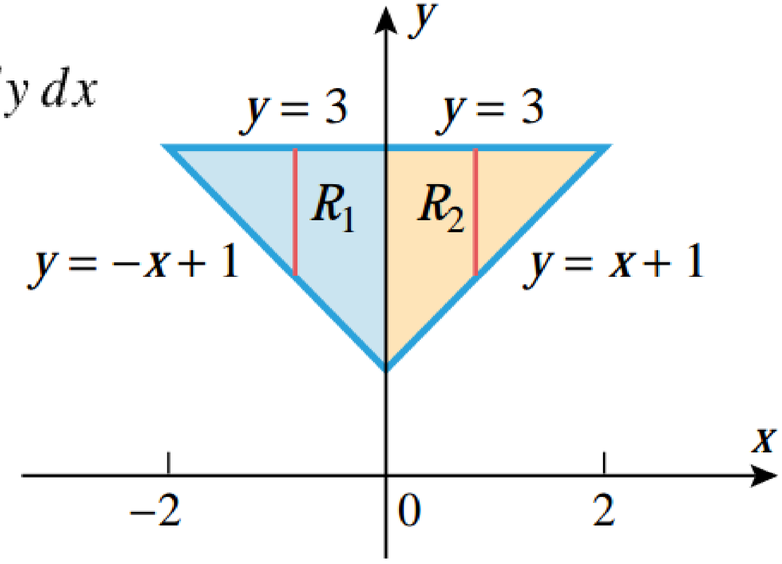
Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exemplo: Calcule na região triangular dada:

$$\iint_R (2x - y^2)\, dA \qquad y = -x + 1,\ y = x + 1 \text{ e } y = 3$$

$$= \iint_{R_1} (2x - y^2)\, dA + \iint_{R_2} (2x - y^2)\, dA$$

$$= \int_{-2}^{0} \int_{-x+1}^{3} (2x - y^2)\, dy\, dx + \int_{0}^{2} \int_{x+1}^{3} (2x - y^2)\, dy\, dx$$



Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exercício: Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro e os planos:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad\qquad y + z = 4 \text{ e } z = 0$$

Esboçar o sólido

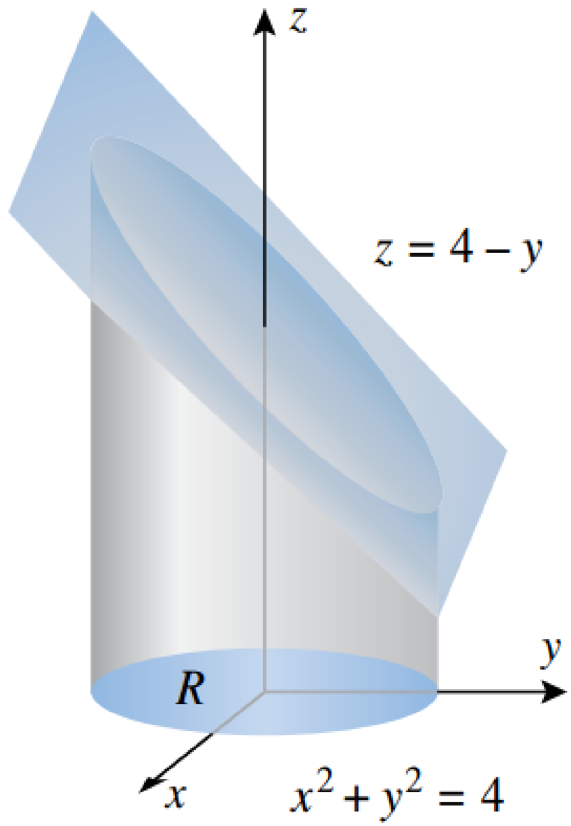
Esboçar o domínio

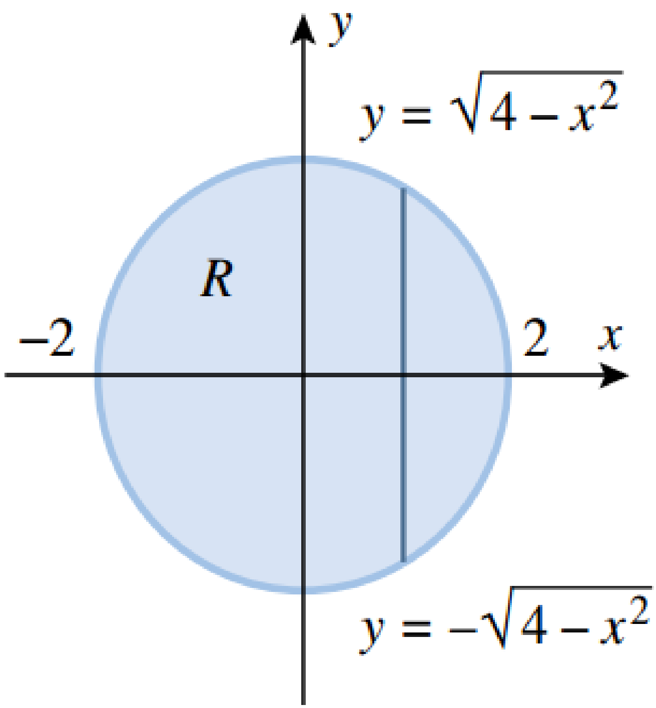
Qual o tipo?

Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exercício: Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro e os planos:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad y + z = 4 \text{ e } z = 0$$



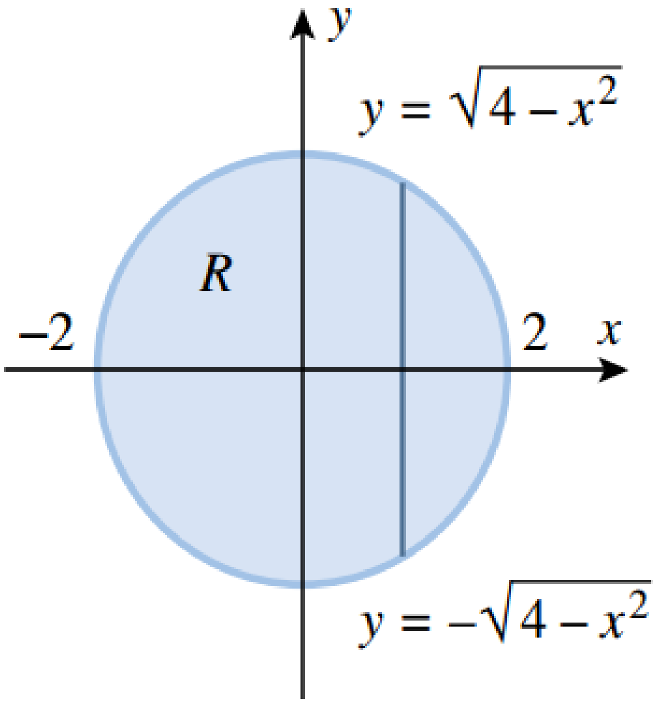


Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exercício: Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro e os planos:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad\qquad y + z = 4 \text{ e } z = 0$$

$$V = \iint_R (4 - y)\, dA$$



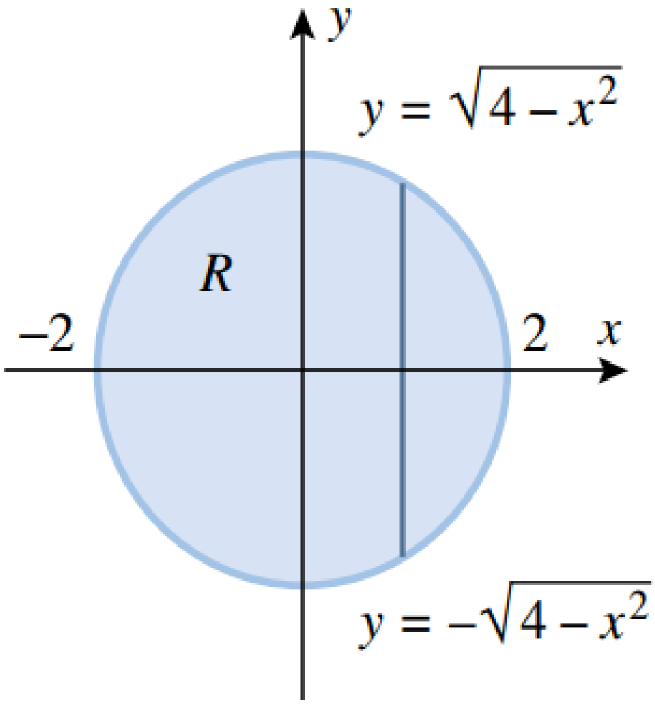
Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exercício: Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro e os planos:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad\qquad y + z = 4 \text{ e } z = 0$$

$$V = \iint_R (4 - y)\, dA$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$$



Integrais duplas

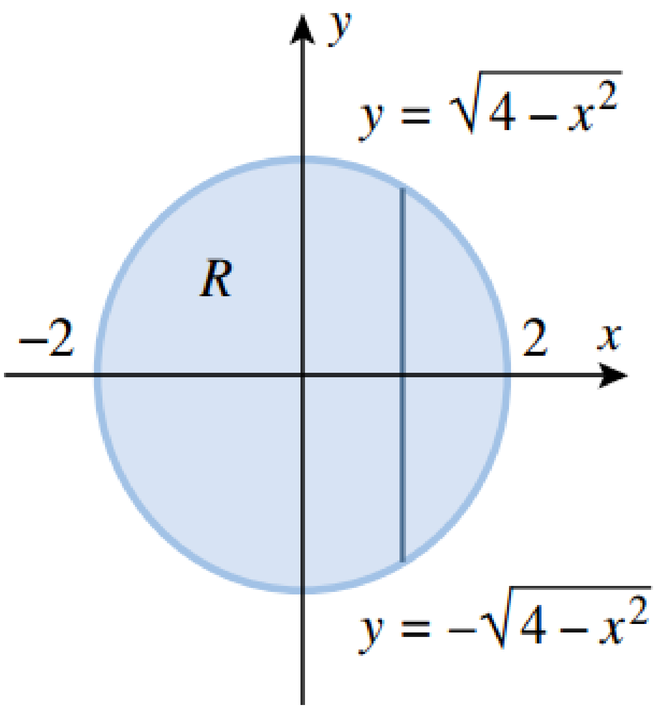
- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exercício: Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro e os planos:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad\qquad y + z = 4 \text{ e } z = 0$$

$$V = \iint_R (4 - y)\, dA$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$



Integrais duplas

- Determinação dos Limites de Integração:
  - Exercício: Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro e os planos:

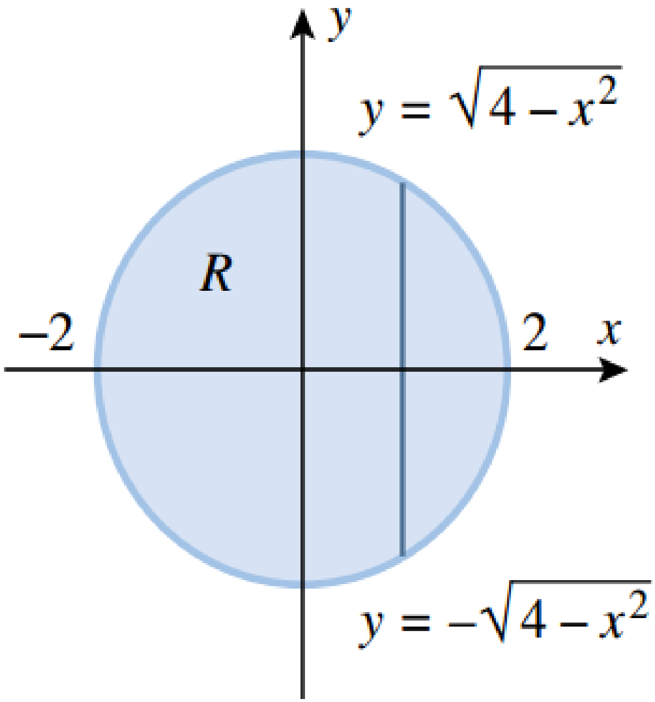
$$x^2 + y^2 = 4 \qquad\qquad y + z = 4 \text{ e } z = 0$$

$$V = \iint_R (4 - y)\, dA$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[4y - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 8\sqrt{4 - x^2}\, dx = 8(2\pi) = 16\pi$$



Integrais duplas

- Inversão da ordem de integração
  - Serve para simplificar a integração

Integrais duplas

- Inversão da ordem de integração
  - Exemplo:

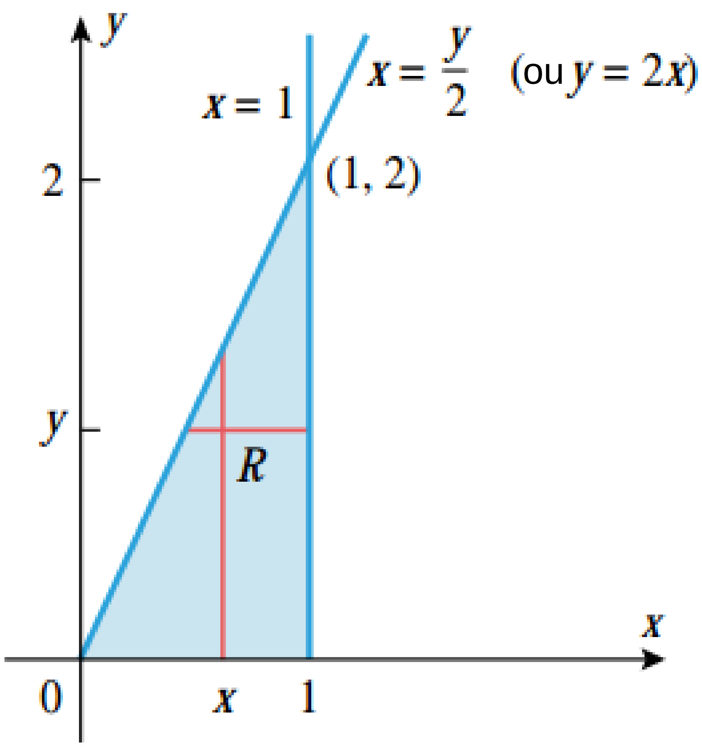
$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

Esboçar o domínio

Integrais duplas

- Inversão da ordem de integração
  - Exemplo:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$



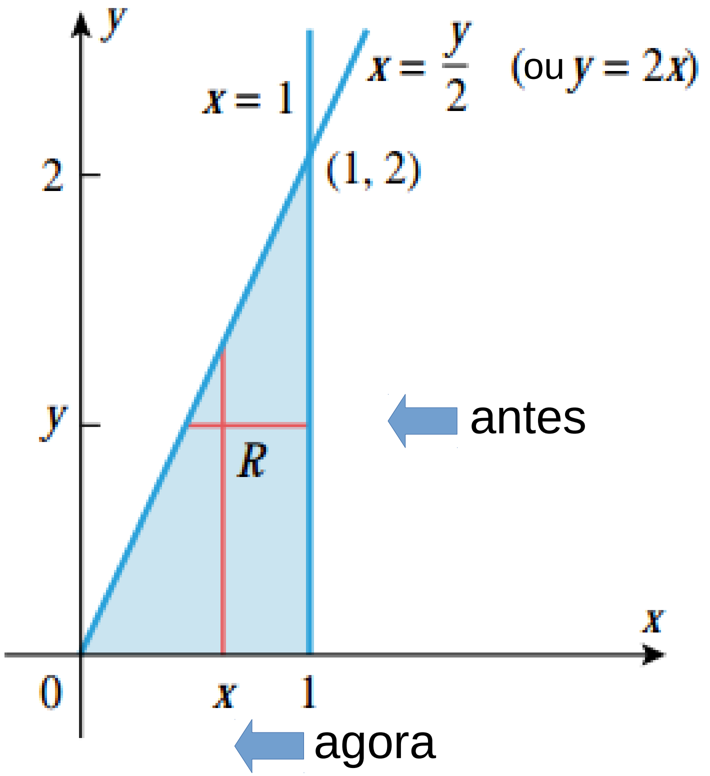
Integrais duplas

- Inversão da ordem de integração
  - Exemplo:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx\, dy = \iint_R e^{x^2}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\, dy\, dx$$



Integrais duplas

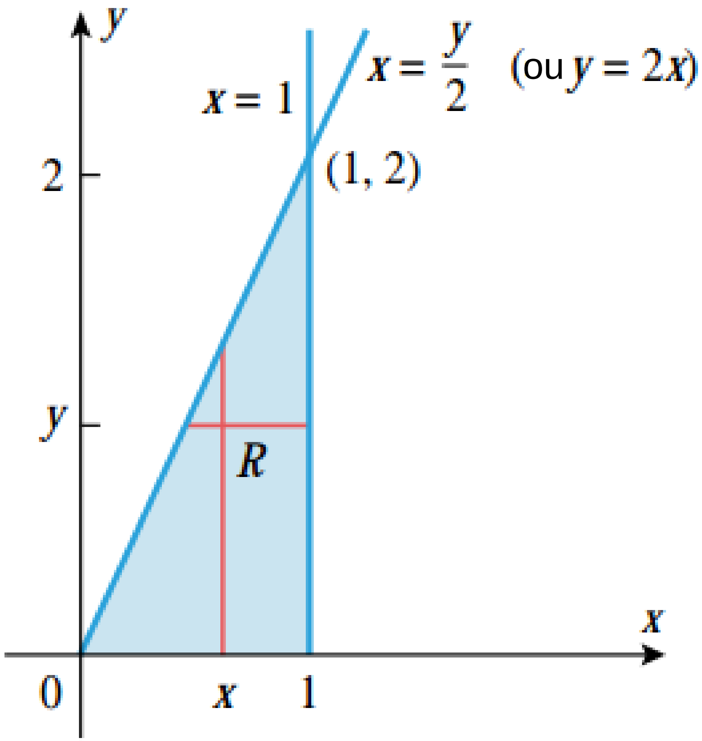
- Inversão da ordem de integração
  - Exemplo:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx\, dy = \iint_R e^{x^2}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \left[e^{x^2} y\right]_{y=0}^{2x} dx$$

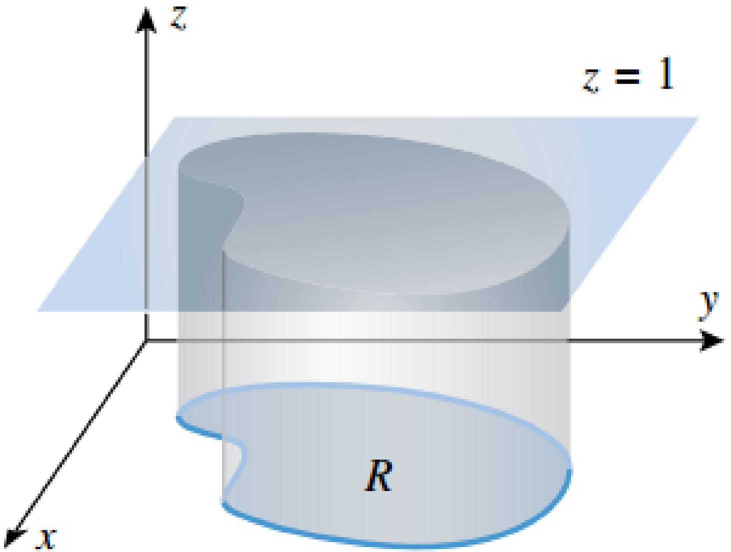
$$= \int_0^1 2x e^{x^2}\, dx = e^{x^2}\Big]_0^1 = e - 1$$



Integrais duplas

- Calculando área com integral dupla

$$\iint_R 1\, dA = (\text{área de } R) \cdot 1$$



Cilindro com base R e altura 1

Integrais duplas

- Calculando área com integral dupla
  - Exemplo: Calcular a área da região compreendida entre uma parábola e uma reta

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad y = 2x$$

Esboçar o domínio

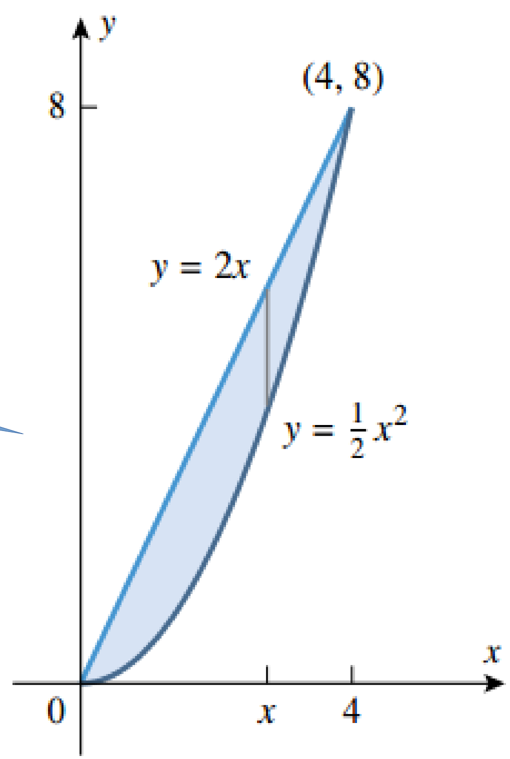
Integrais duplas

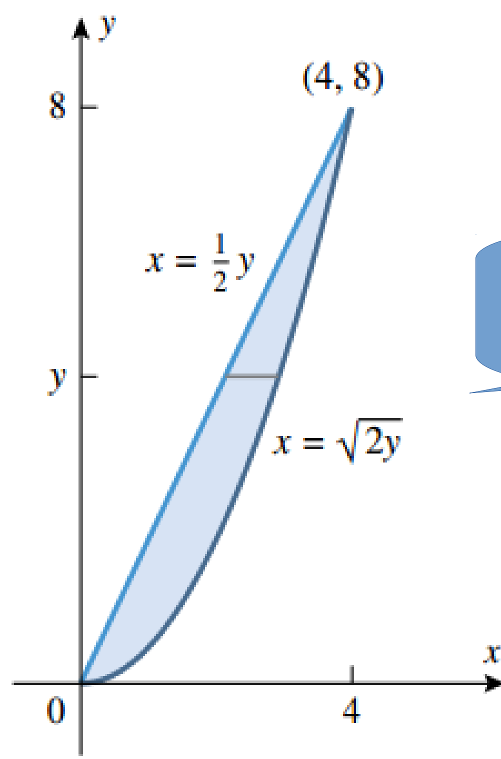
- Calculando área com integral dupla
  - Exemplo: Calcular a área da região compreendida entre uma parábola e uma reta

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad y = 2x$$

Tipo I: x parado
y em função de x

A integral de fora é dx





Tipo II: y parado
x em função de y

A integral de fora é dy

Integrais duplas

- Calculando área com integral dupla
  - Exemplo: Calcular a área da região compreendida entre uma parábola e uma reta

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad\qquad y = 2x$$

- Como Tipo I

$$\text{área de } R = \iint_R dA = \int_0^4 \int_{x^2/2}^{2x} dy\,dx = \int_0^4 [y]_{y=x^2/2}^{2x}\,dx$$

$$= \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

- Como Tipo II

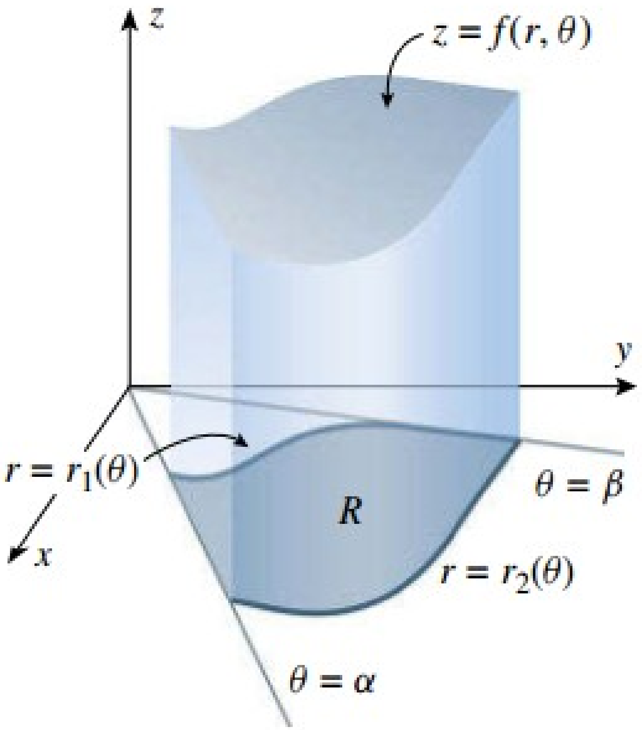
$$\text{área de } R = \iint_R dA = \int_0^8 \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} dx\,dy = \int_0^8 [x]_{x=y/2}^{\sqrt{2y}}\,dy$$

$$= \int_0^8 \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{2}y\right) dy = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} - \frac{y^2}{4}\right]_0^8 = \frac{16}{3}$$

Integrais duplas

- O problema do volume em coordenadas polares
  - Dada uma função f(r, θ), contínua e não negativa em uma região polar simples R, calcule o volume do sólido delimitado pela região R e a superfície cuja equação, em coordenadas cilíndricas, é z = f(r, θ)

Semelhante as coordenadas cartesianas

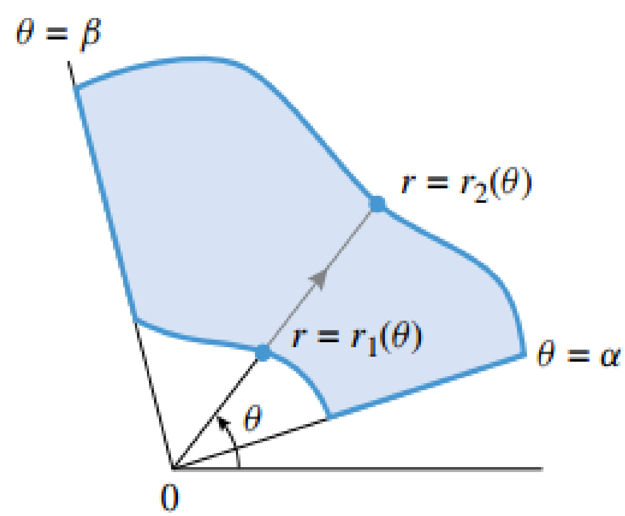


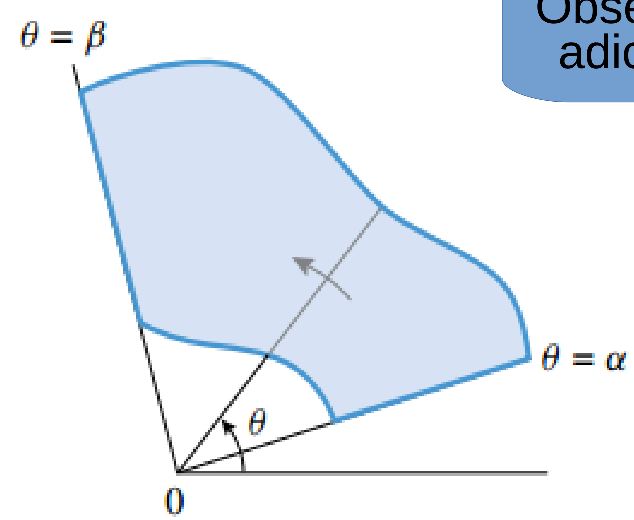
Integrais duplas

- Teorema: Integrais duplas em coordenadas polares
  - Se R for uma região polar simples cujos limites são os raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e as curvas $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$ e se $f(r, \theta)$ for contínua em R, então

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$$

Observe o fator adicional de r

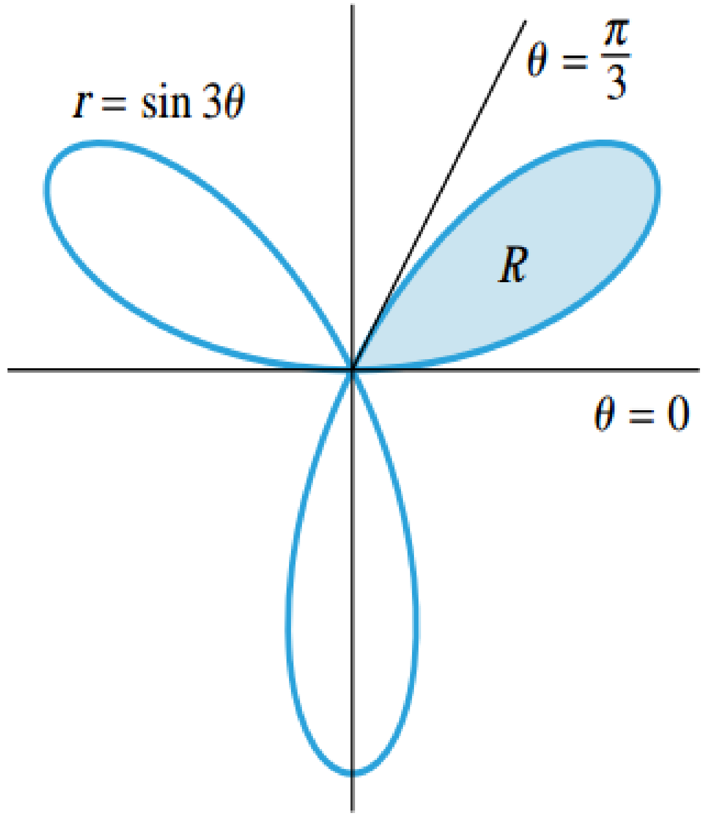




Integrais duplas

- Integrais duplas em coordenadas polares
  - Exemplo: Calcule a área compreendida pela rosácea de três pétalas

$$r = \text{sen } 3\theta$$

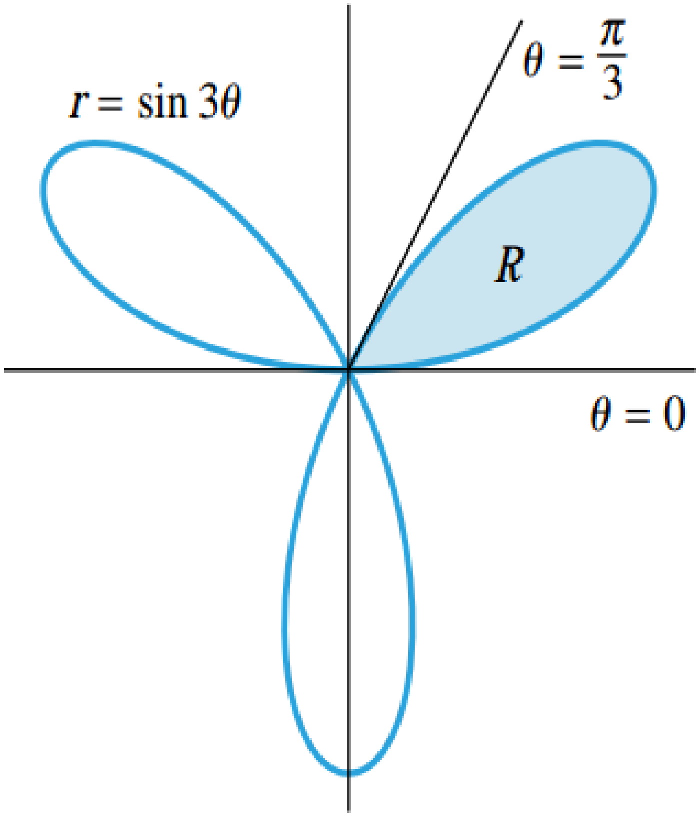


Integrais duplas

- Integrais duplas em coordenadas polares
  - Exemplo: Calcule a área compreendida pela rosácea de três pétalas

$$r = \text{sen } 3\theta$$

$$A = 3 \iint_R dA$$

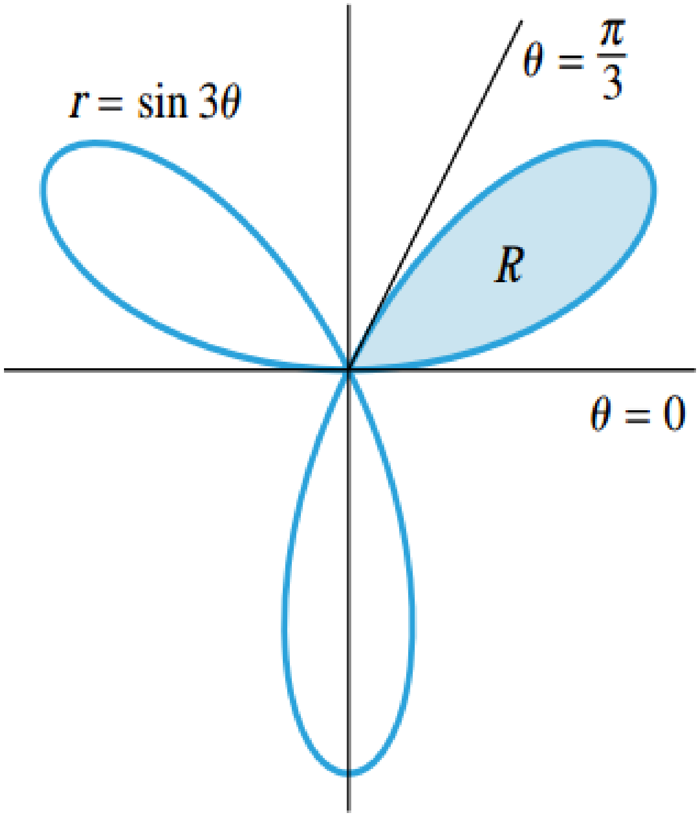


Integrais duplas

- Integrais duplas em coordenadas polares
  - Exemplo: Calcule a área compreendida pela rosácea de três pétalas

$$r = \text{sen}\, 3\theta$$

$$A = 3 \iint_R dA = 3 \int_0^{\pi/3} \int_0^{\text{sen}\, 3\theta} r\, dr\, d\theta$$



Integrais duplas

- Integrais duplas em coordenadas polares
  - Exemplo: Calcule a área compreendida pela rosácea de três pétalas

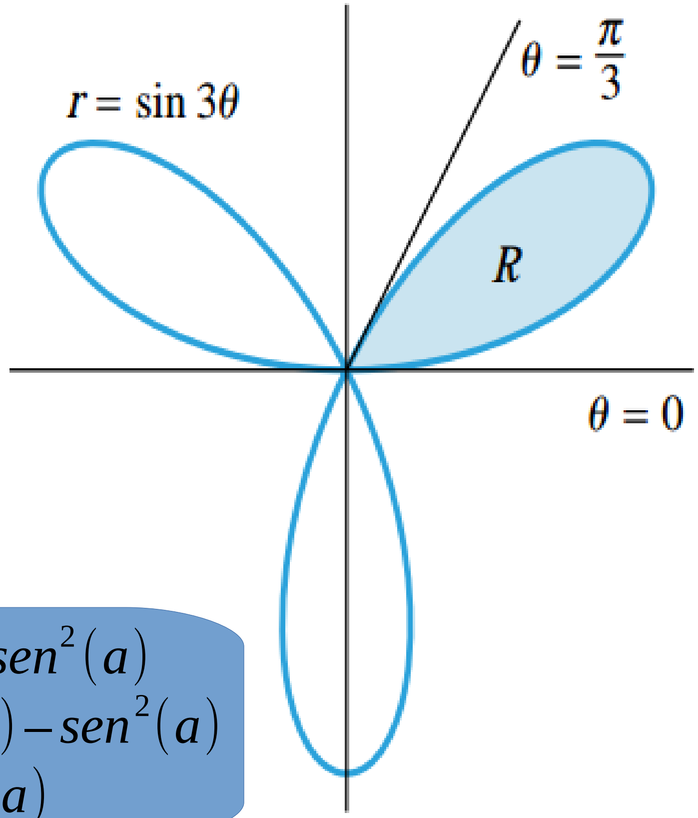
$$r = \text{sen } 3\theta$$

$$A = 3\iint_R dA = 3\int_0^{\pi/3}\int_0^{\text{sen } 3\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3} \text{sen}^2 3\theta\,d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\left[\theta - \frac{\text{sen } 6\theta}{6}\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{4}\pi$$

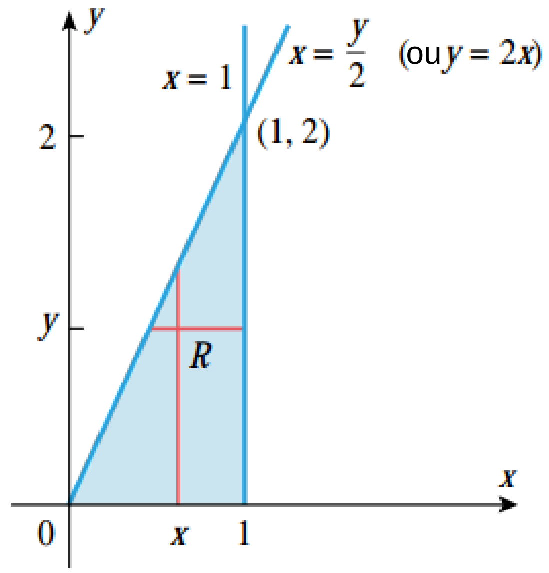
$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - sen^2(a)\\ &= 1 - sen^2(a) - sen^2(a)\\ &= 1 - 2\,sen^2(a)\end{aligned}$$

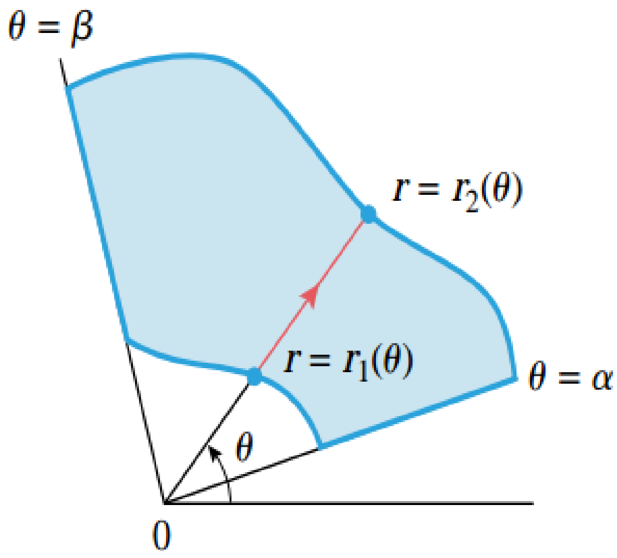


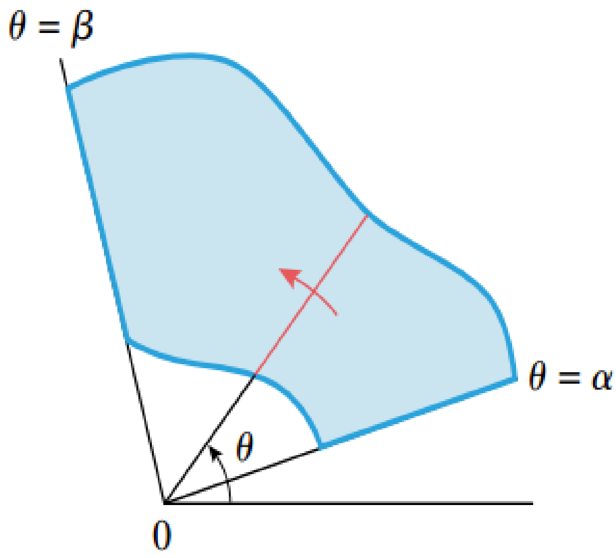
Resumo

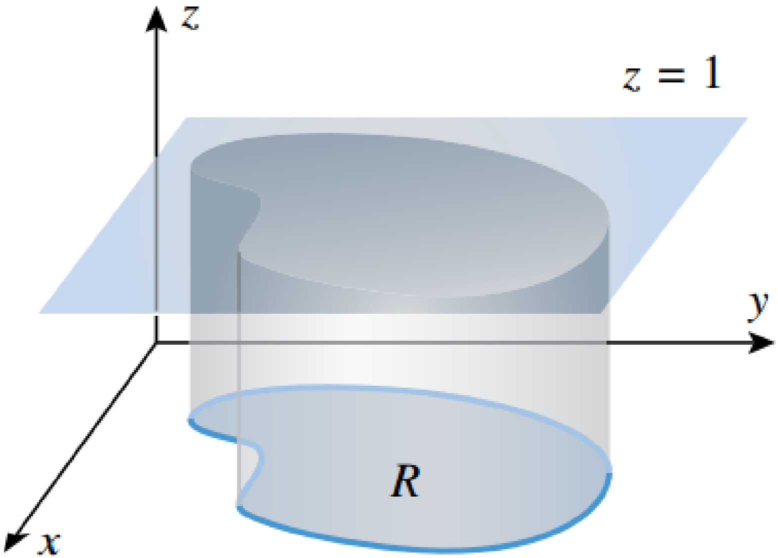
Resumo

- Integral dupla
  - Inversão da ordem de integração
  - Calculo da área da região
  - Coordenadas polares







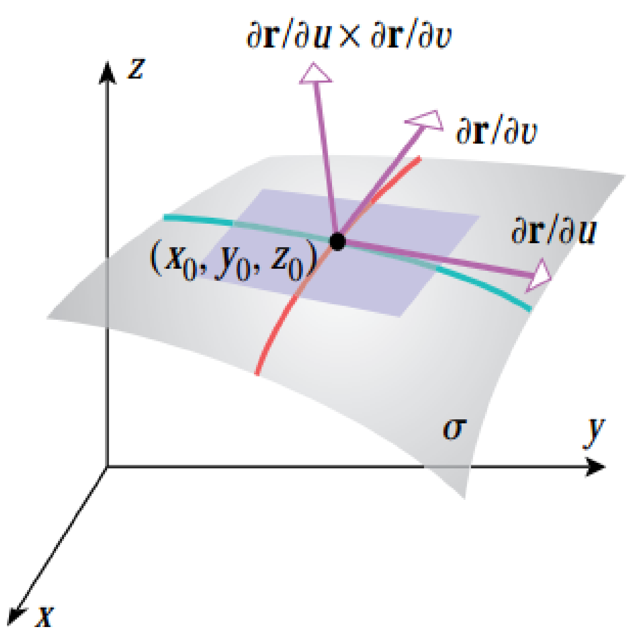


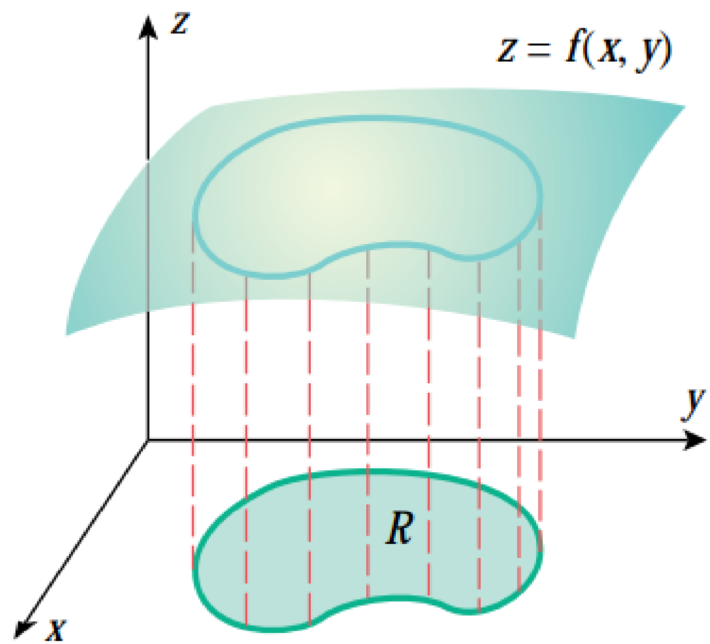
Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 14.2
    - 25
  - Seção 14.3
    - 1-10

Resumo

- Próxima aula:
  - Área de superfícies
  - Funções vetoriais de duas variáveis
  - Planos tangentes de funções paramétricas
  - Área de superfícies paramétricas





Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 14.2, 14.3 e 14.4