Integral tripla

Cálculo Diferencial e Integral III

Suzana M. F. de Oliveira

Índice

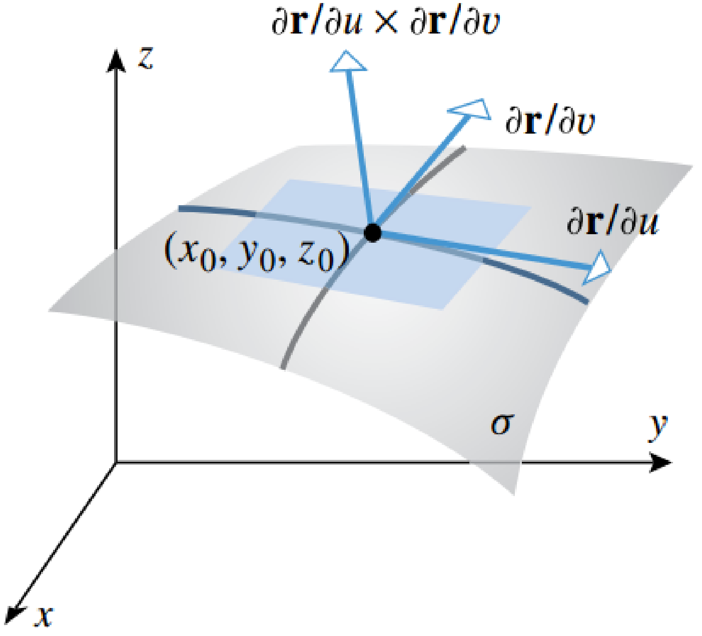
- Revisão
- Integrais triplas
  - Caixas retangulares
  - Regiões mais gerais
  - Cálculo de volume
  - Outras ordens (direções)
  - Coordenadas cilíndricas e esféricas
- Resumo
- Bibliografia

Revisão

Revisão

- Funções vetoriais
  - Derivadas parciais
  - Plano tangente
  - Área de superfícies paramétricas

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| dA$$

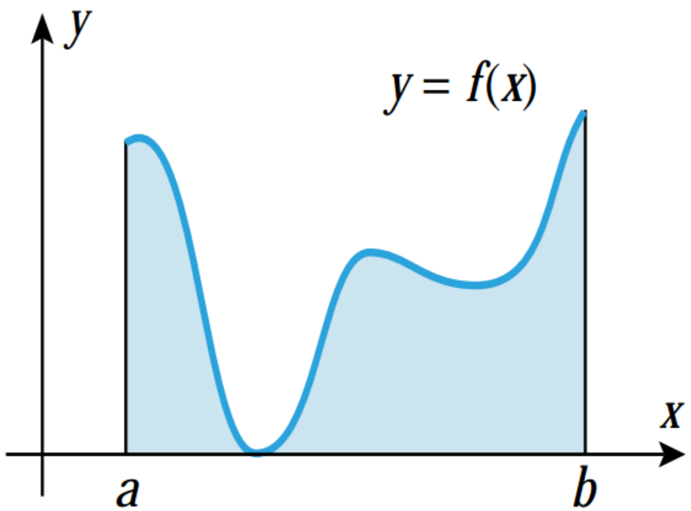


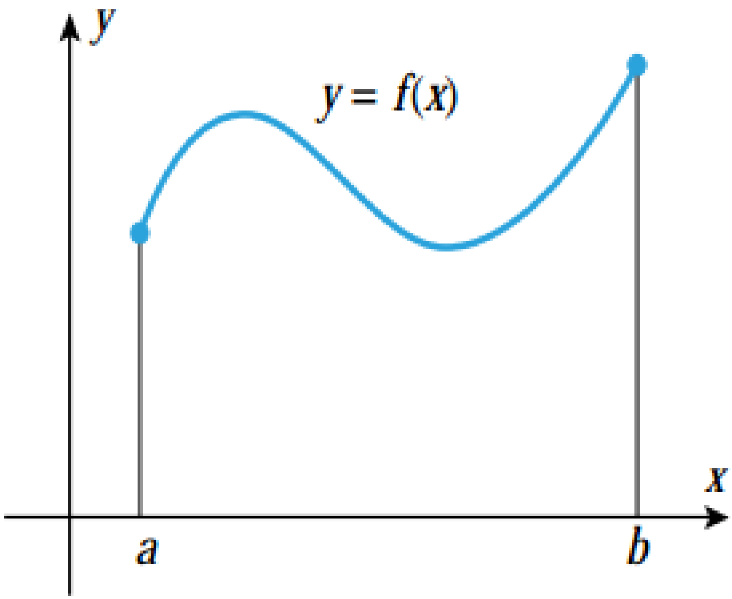
Integrais triplas

Integrais triplas

- Comparação
  - Integral simples
    - Função f(x)
    - Intervalo fechado finito do eixo x

Área sob a curva e comprimento de curva

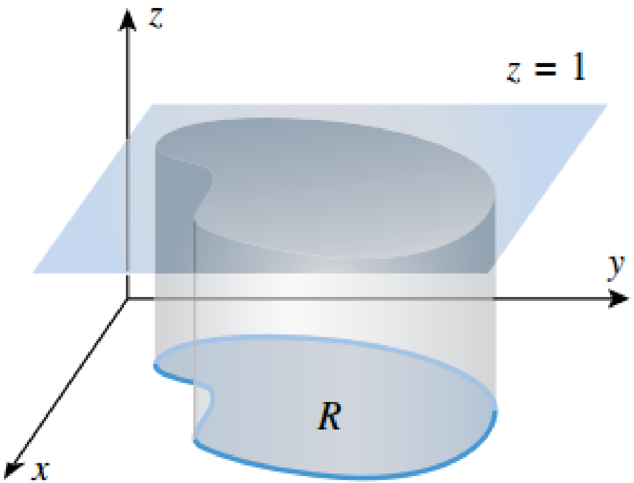


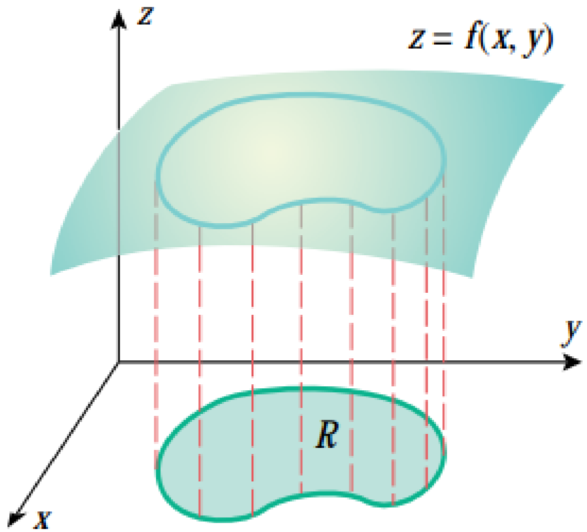


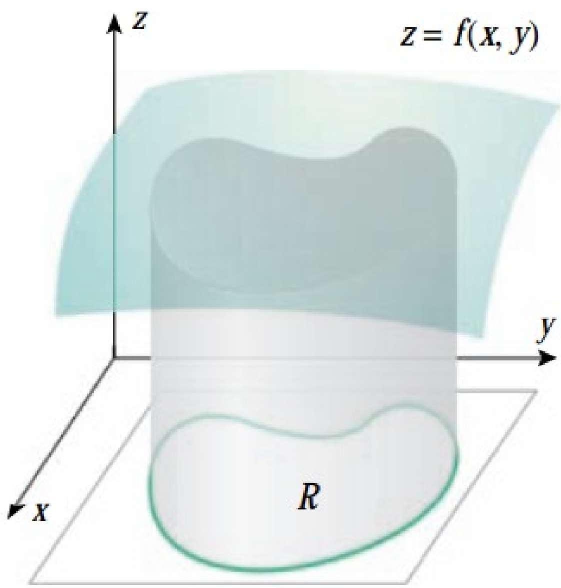
Integrais triplas

Volume sob a superfície,
área de superfície,
área da região R

- Comparação
  - Integral simples
    - Função f(x)
    - Intervalo fechado finito do eixo x
  - Integral dupla
    - Função f(x,y)
    - Região fechada finita R no plano xy



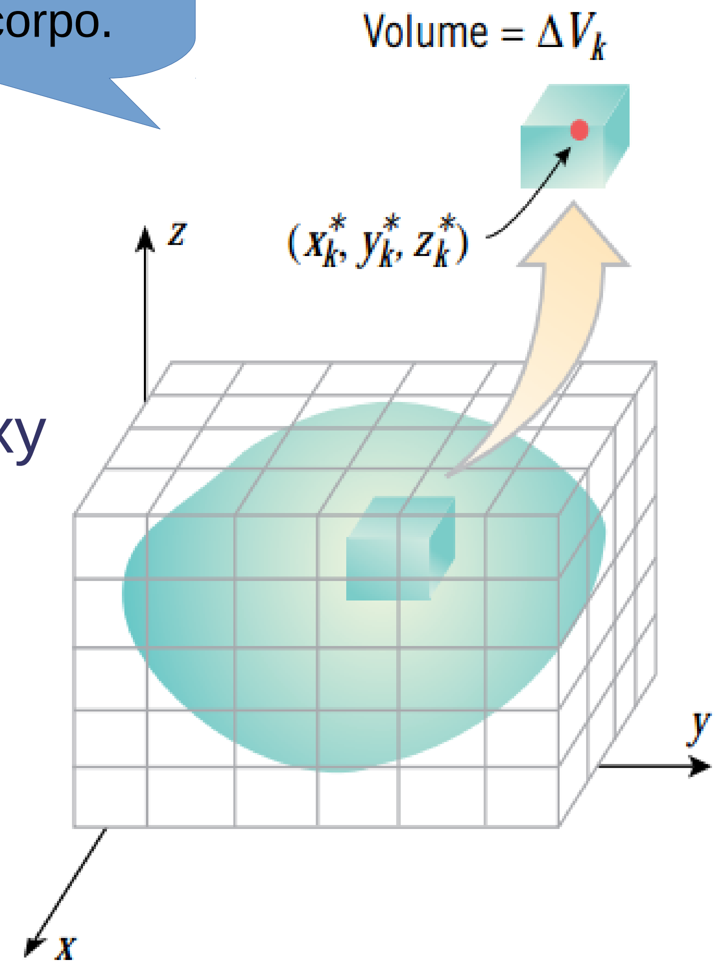




Integrais triplas

- Comparação
  - Integral simples
    - Função f(x)
    - Intervalo fechado finito do eixo x
  - Integral dupla
    - Função f(x,y)
    - Região fechada finita R no plano xy
  - Integral tripla
    - Função f(x,y,z)
    - Região sólida fechada G de um sistema de coordenadas xyz

Pense que a função é da densidade (kg/m³), a integral tripla da a massa do corpo.



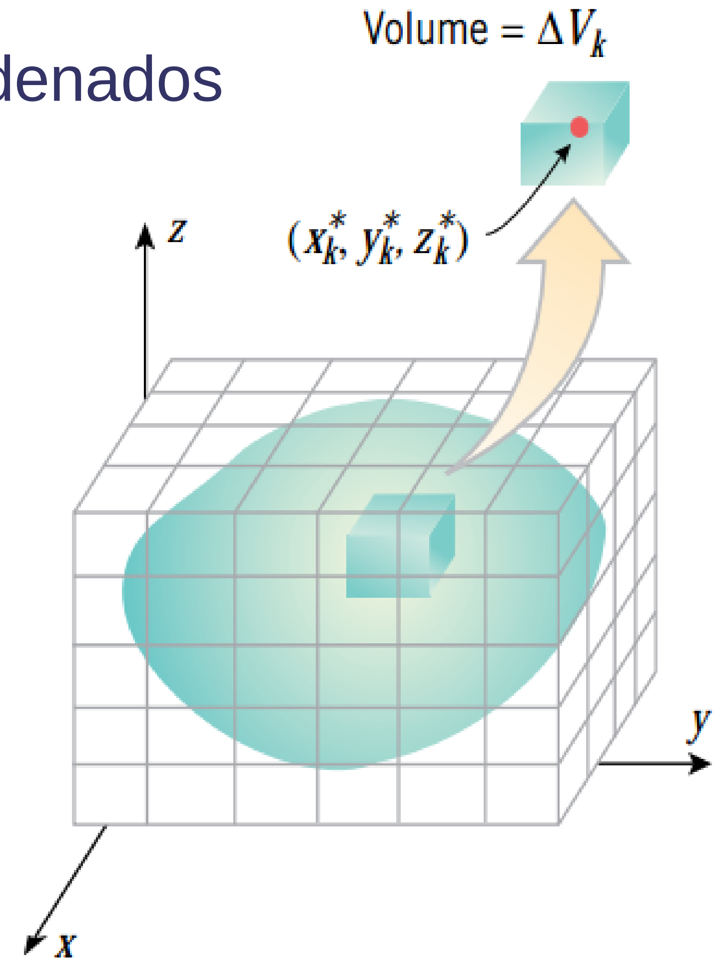
G não pode se estender indefinidamente em alguma direção

G é um sólido finito

Integrais triplas

- Definição
  - Divida G em n subcaixas
    - Planos paralelos aos planos coordenados
  - Descarte as caixas com parte fora de G
  - Escolha um ponto arbitrário (x_k^*, y_k^*, z_k^*)
  - O volume da subcaixa k é ΔV_k
  - Forme o produto

$$f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$



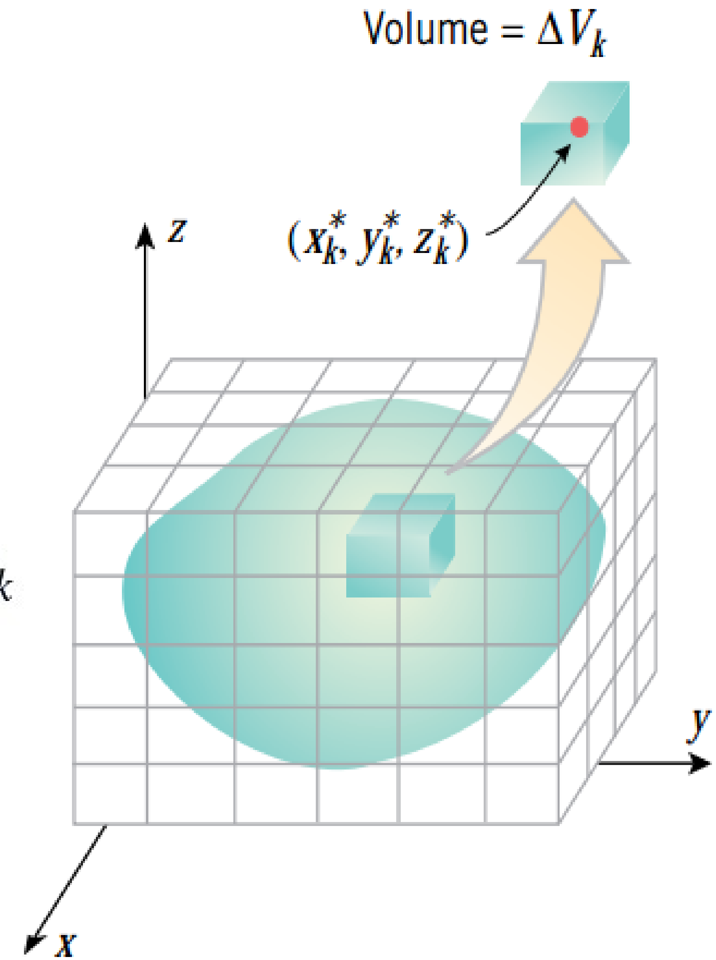
Integrais triplas

- Definição
  - Aplique a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

  - Assuma infinitas subcaixas:

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$



Integrais triplas

- Propriedades

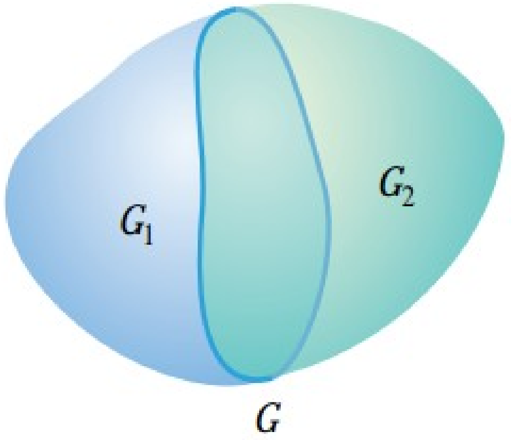
$$\iiint_G cf(x,y,z)\,dV = c\iiint_G f(x,y,z)\,dV \quad (c \text{ uma constante})$$

$$\iiint_G [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dV = \iiint_G f(x,y,z)\,dV + \iiint_G g(x,y,z)\,dV$$

$$\iiint_G [f(x,y,z)-g(x,y,z)]\,dV = \iiint_G f(x,y,z)\,dV - \iiint_G g(x,y,z)\,dV$$

  - Sub-regiões

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iiint_{G_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{G_2} f(x,y,z)\,dV$$



Integrais triplas

- Integrais triplas em caixas retangulares
  - Teorema de Fubini:
    - Seja G a caixa retangular definida pelas desigualdades:

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad k \le z \le l$$

Podem ser calculadas por três integrações sucessivas

Se f for contínua na região G, então:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Além disso, a integral iterada pode ser feita em qualquer ordem

Similar a integrais duplas

Integrais triplas

- Integrais triplas em caixas retangulares
  - Exercício: Calcule a integral tripla na caixa retangular

$$-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2 \qquad \iiint_G 12xy^2z^3\, dV$$

Integrais triplas

- Integrais triplas em caixas retangulares
  - Exercício: Calcule a integral tripla na caixa retangular

$$-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2 \qquad \iiint_G 12xy^2z^3\, dV$$

$$\iiint_G 12xy^2z^3\, dV = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{2} 12xy^2z^3\, dz\, dy\, dx$$

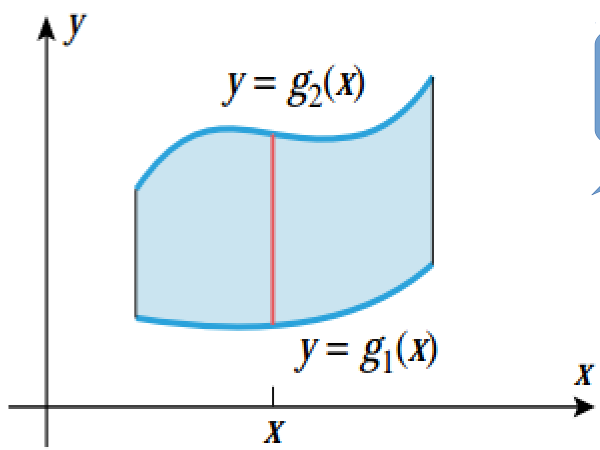
$$= \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3} \left[3xy^2z^4\right]_{z=0}^{2} dy\, dx = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3} 48xy^2\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[16xy^3\right]_{y=0}^{3} dx = \int_{-1}^{2} 432x\, dx$$

$$= 216x^2\Big]_{-1}^{2} = 648$$

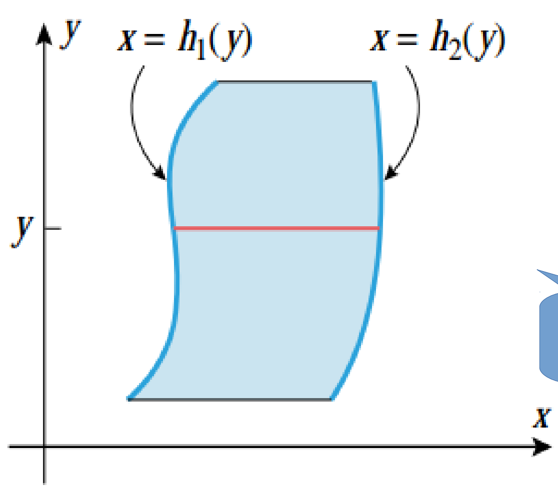
Integrais triplas

- Regiões mais gerais



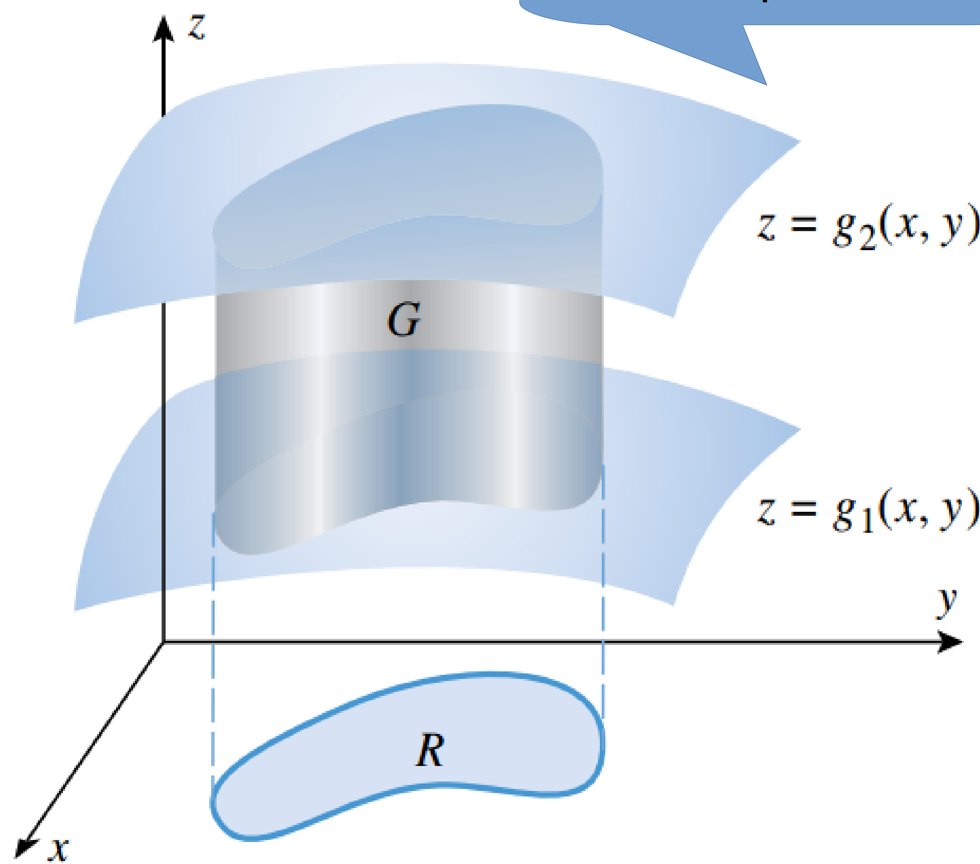
Integral dupla

Tipo I



Tipo II

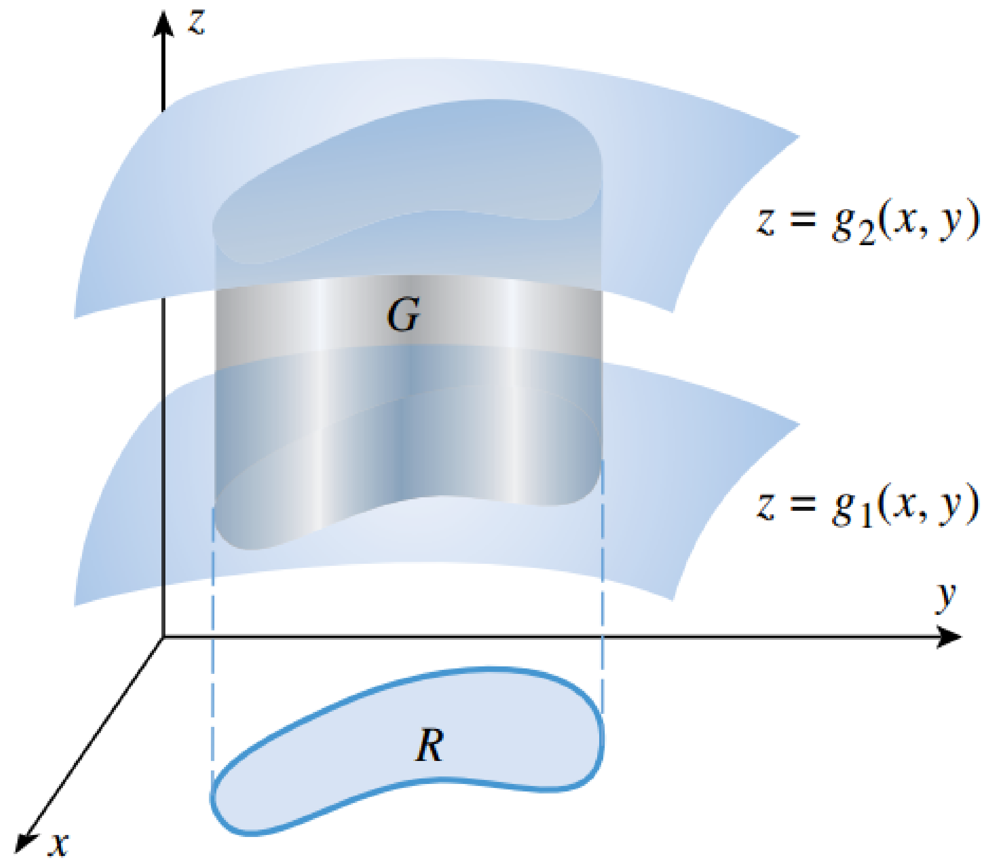
A projeção no plano xy é do tipo I ou II



Integrais triplas

- Regiões mais gerais
  - Sólido simples em xy
    - Suponha que $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ sejam contínuas em R e que $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ em R

Superfícies podem se tocar, mas não podem se intersectar



Integrais triplas

- Regiões mais gerais
  - Teorema: Seja G um sólido simples em xy com superfície superior $z = g_2(x, y)$ e superfície inferior $z = g_1(x, y)$, e seja R a projeção de G no plano xy. Se $f(x, y, z)$ for contínua em G, então

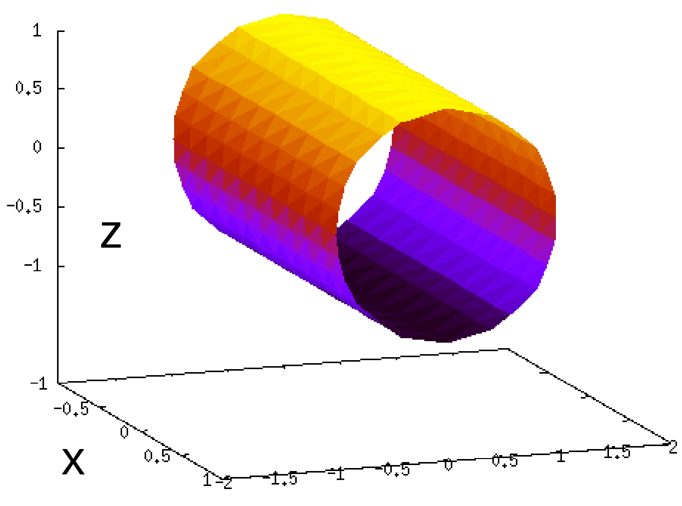
$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

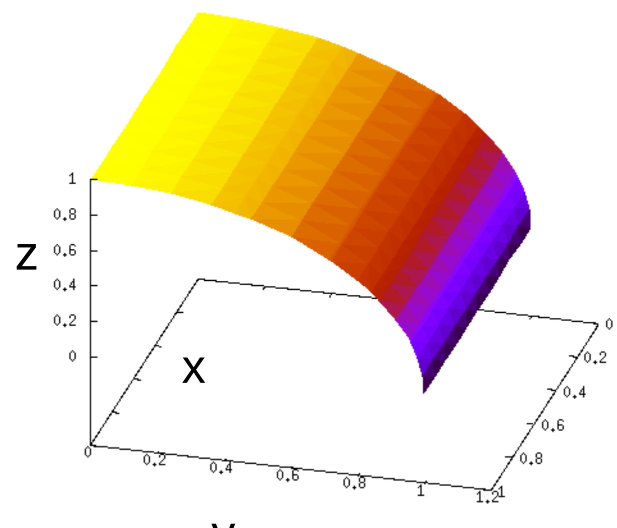
Integrais triplas

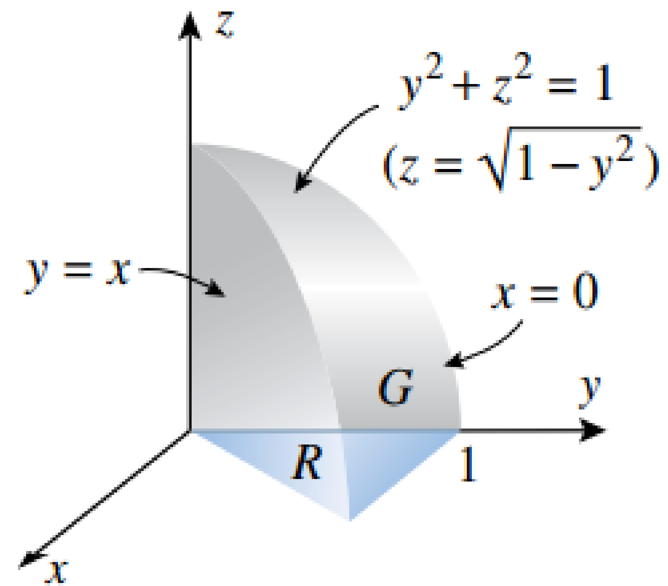
- Regiões mais gerais
  - Determinação dos Limites de Integração: sólido simples em xy
    - Encontre uma equação $z = g_2(x, y)$ para a superfície superior e uma equação $z = g_1(x, y)$ para a superfície inferior de G
    - Faça um esboço bidimensional da projeção R do sólido no plano xy.

Integrais triplas

- Regiões mais gerais
  - Exemplo: Seja G a cunha no primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos y = x e x = 0. Calcule: $\displaystyle\iiint_G z\,dV$





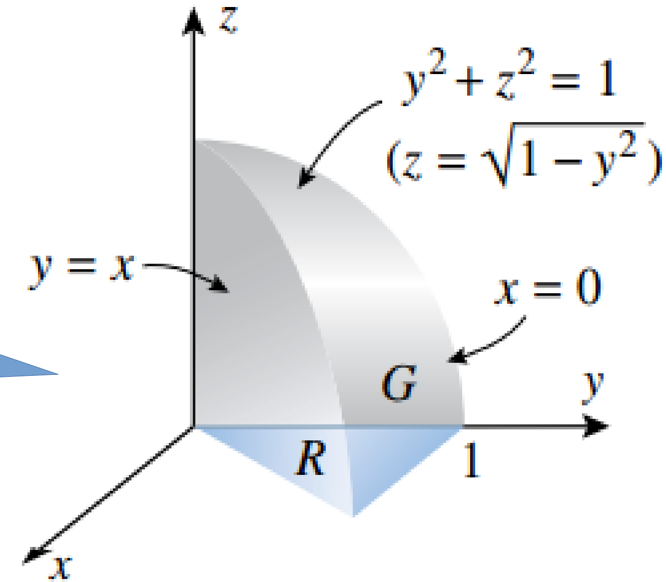


Integrais triplas

- Regiões mais gerais
  - Exemplo: Seja G a cunha no primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos y = x e x = 0. Calcule: $\iiint_G z\, dV$

$$\iiint_G z\, dV = \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\, dz \right] dA$$

A integral dupla pode ser qualquer uma (tipo I ou II)



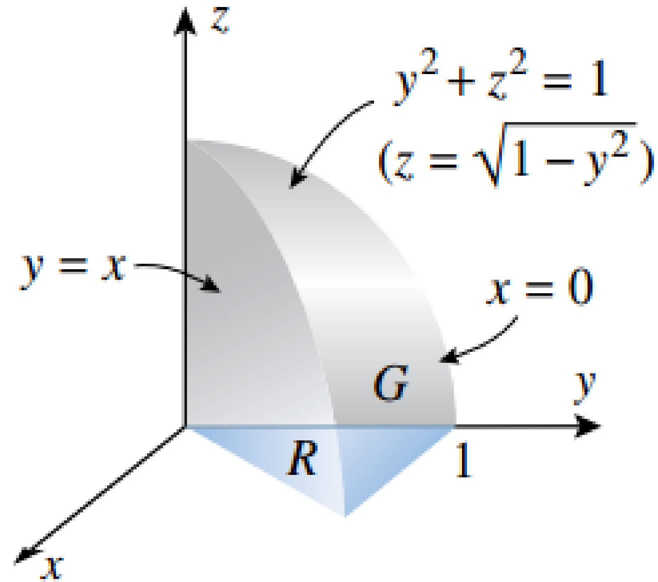
Integrais triplas

- Regiões mais gerais
  - Exemplo: Seja G a cunha no primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos y = x e x = 0. Calcule: $\iiint\limits_G z\,dV$

$$\iiint\limits_G z\,dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2}z^2\Big]_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2}(1-y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)x\Big]_{x=0}^{y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y-y^3)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$



Integrais triplas

- Calculando volume
  - Assumindo função contante 1

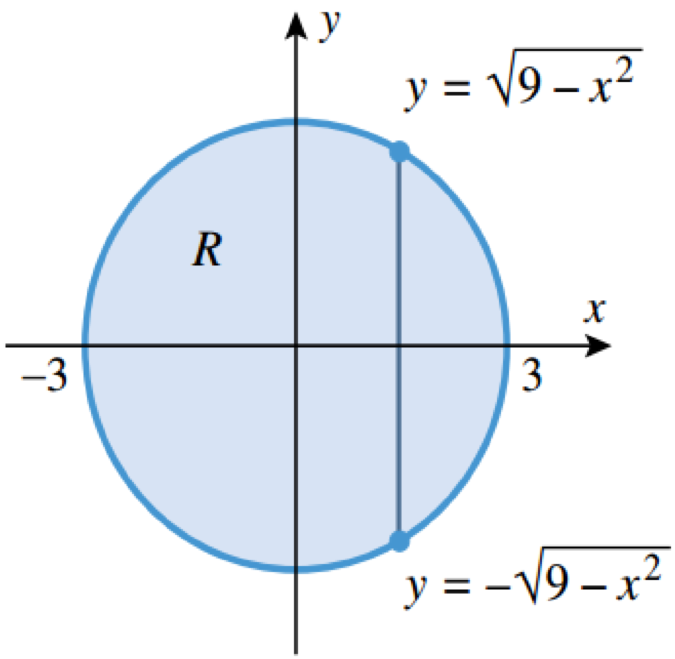
Similar ao cálculo da área com a integral dupla

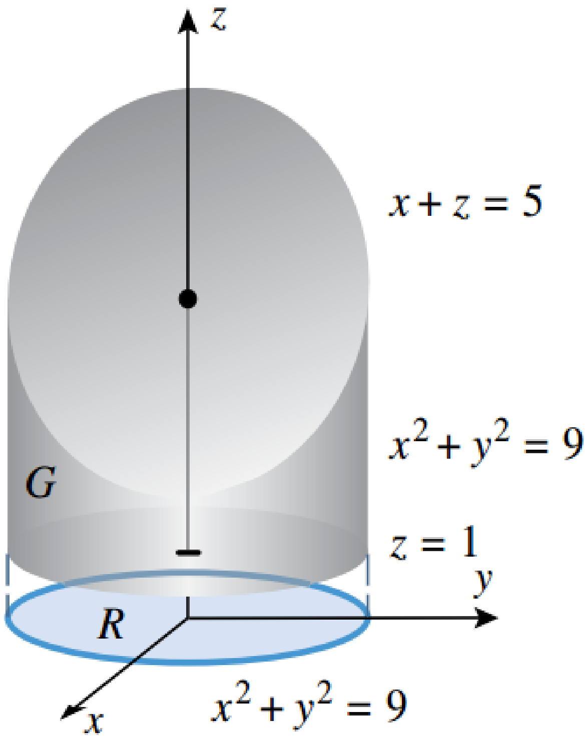
$$\text{volume de } G = \iiint_G dV$$

Integrais triplas

- Calculando volume
  - Exercício: **Defina** a integral tripla para calcular o volume do sólido contido no cilindro e entre os planos

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad\qquad z = 1 \text{ e } x + z = 5$$



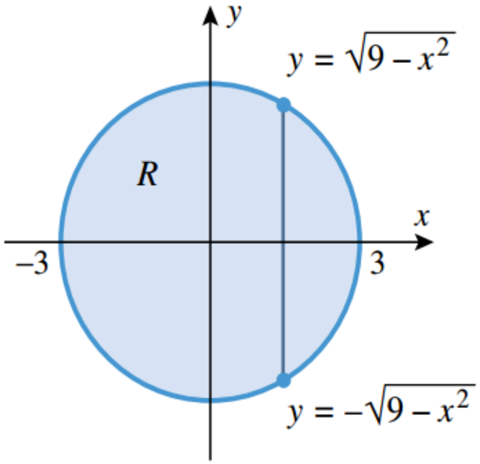


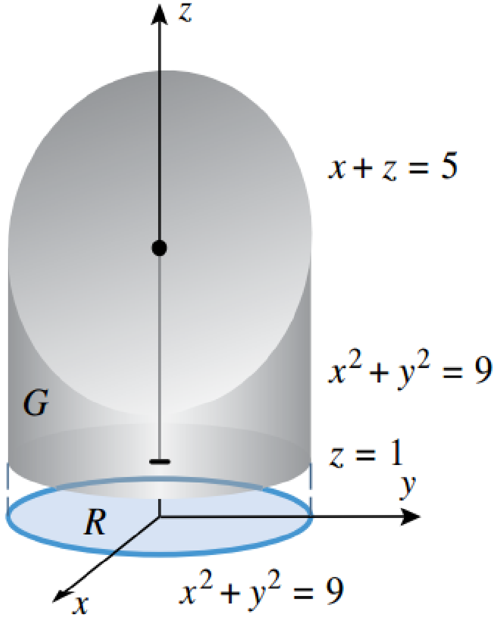
Integrais triplas

- Calculando volume
  - Exercício: **Defina** a integral tripla para calcular o volume do sólido contido no cilindro e entre os planos

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad\qquad z = 1 \text{ e } x + z = 5$$

$$\text{volume de } G = \iiint_G dV = \iint_R \left[\int_1^{5-x} dz\right] dA$$



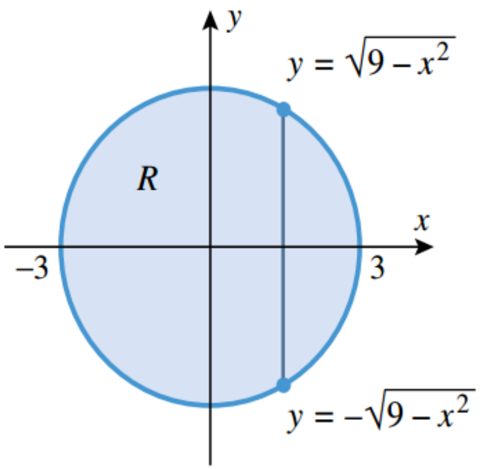


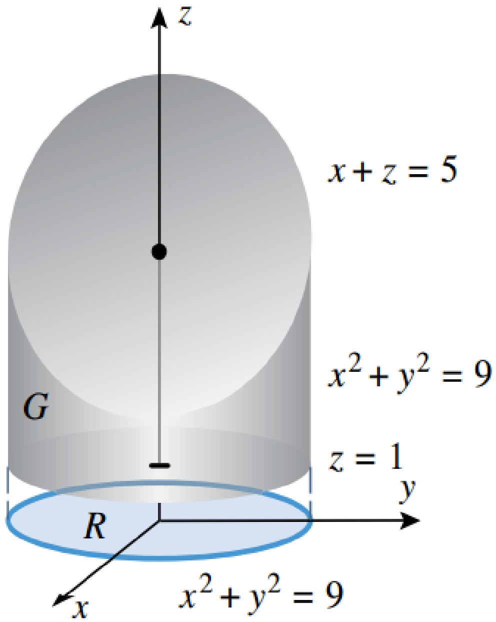
Integrais triplas

- Calculando volume
  - Exercício: **Defina** a integral tripla para calcular o volume do sólido contido no cilindro e entre os planos

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad\qquad z = 1 \text{ e } x + z = 5$$

$$\text{volume de } G = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{1}^{5-x} dz\, dy\, dx$$

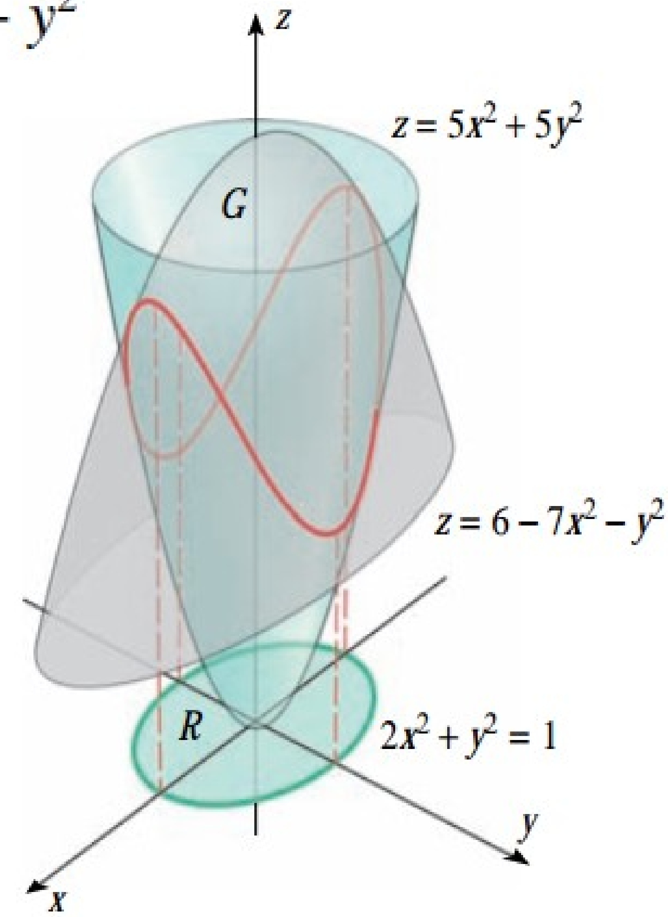




Integrais triplas

- Calculando volume
  - Exercício: **Defina** a integral tripla para calcular o volume do sólido delimitado pelos paraboloides

$$z = 5x^2 + 5y^2 \quad \text{e} \quad z = 6 - 7x^2 - y^2$$

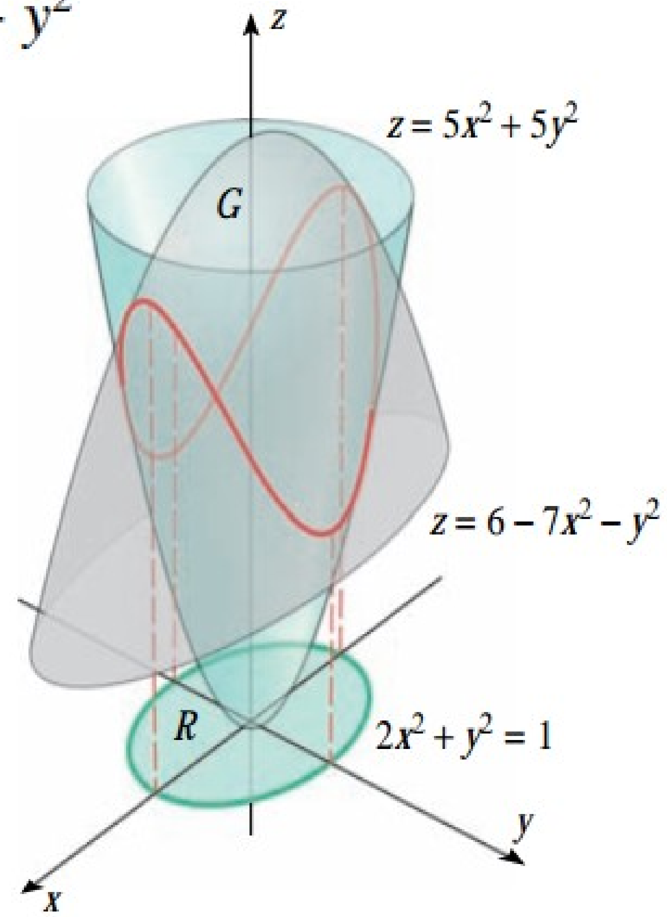


A projeção R é obtida ao se determinar onde os paraboloides se intersectam

Integrais triplas

- Calculando volume
  - Exercício: **Defina** a integral tripla para calcular o volume do sólido delimitado pelos paraboloides

$$z = 5x^2 + 5y^2 \quad \text{e} \quad z = 6 - 7x^2 - y^2$$



- Achando R (igualando z)

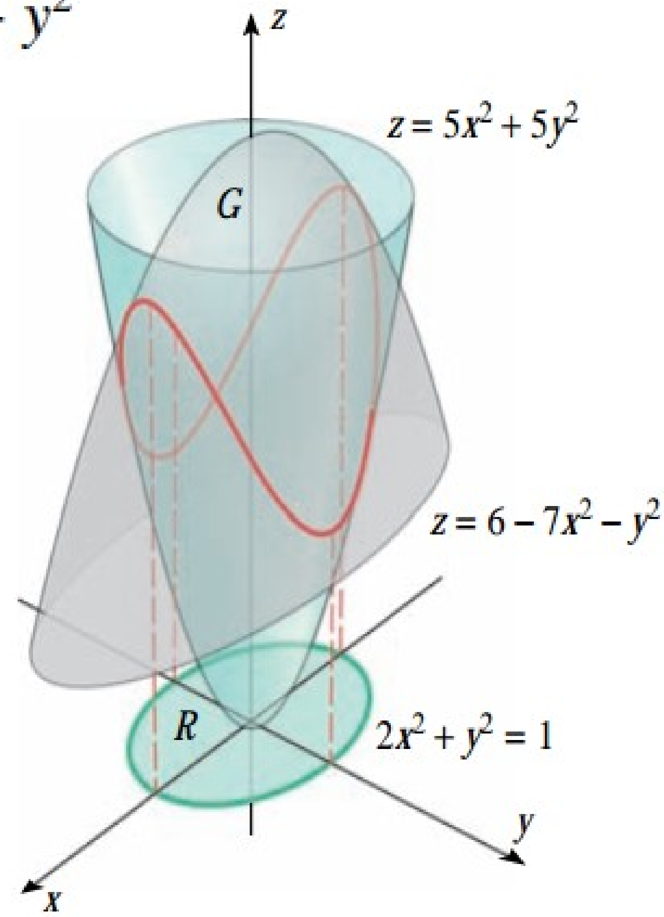
$$5x^2 + 5y^2 = 6 - 7x^2 - y^2 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 1$$

Cilindro elíptico

Integrais triplas

- Calculando volume
  - Exercício: **Defina** a integral tripla para calcular o volume do sólido delimitado pelos paraboloides

$$z = 5x^2 + 5y^2 \quad \text{e} \quad z = 6 - 7x^2 - y^2$$



- Achando R (igualando z)

$$5x^2 + 5y^2 = 6 - 7x^2 - y^2 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 1$$

- Integral tripla

$$\text{Volume de } G = \iiint_G dV = \iint_R \left[\int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz \right] dA$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz\, dy\, dx$$

Integrais triplas

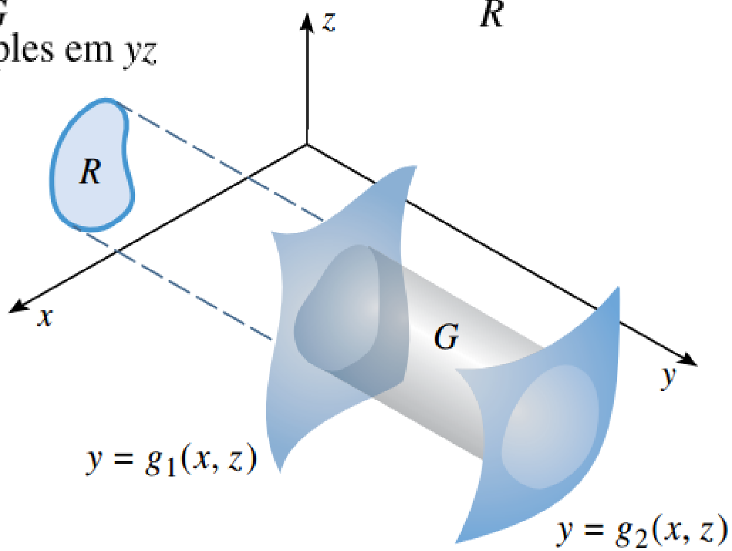
- Integrando em outras ordens (direção)
  - Sólido simples xz

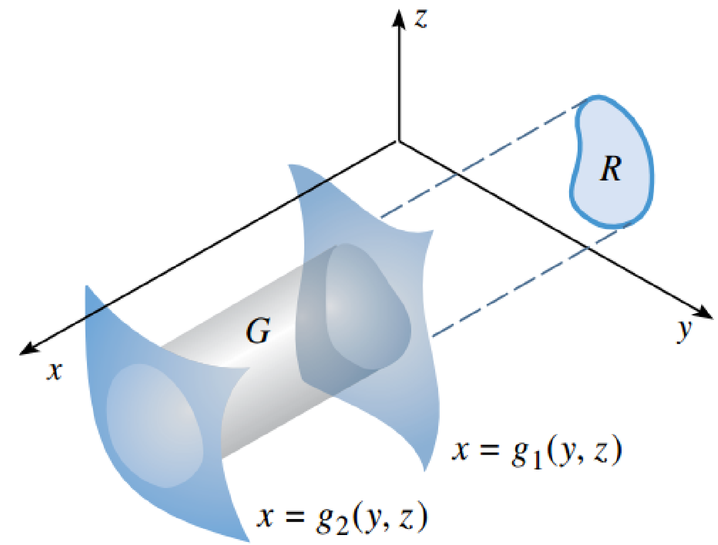
Indica onde fica a base

$$\underset{\substack{G \\ \text{sólido simples em } xz}}{\iiint} f(x,y,z)\,dV = \underset{R}{\iint}\left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA$$

  - Sólido simples yz

$$\underset{\substack{G \\ \text{sólido simples em } yz}}{\iiint} f(x,y,z)\,dV = \underset{R}{\iint}\left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$





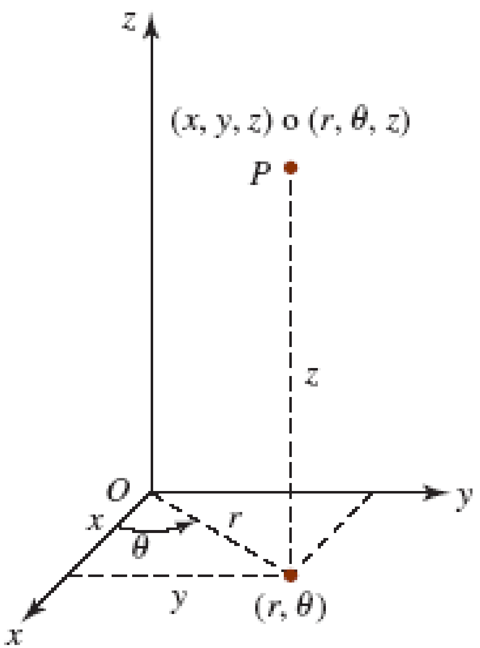
Integrais triplas

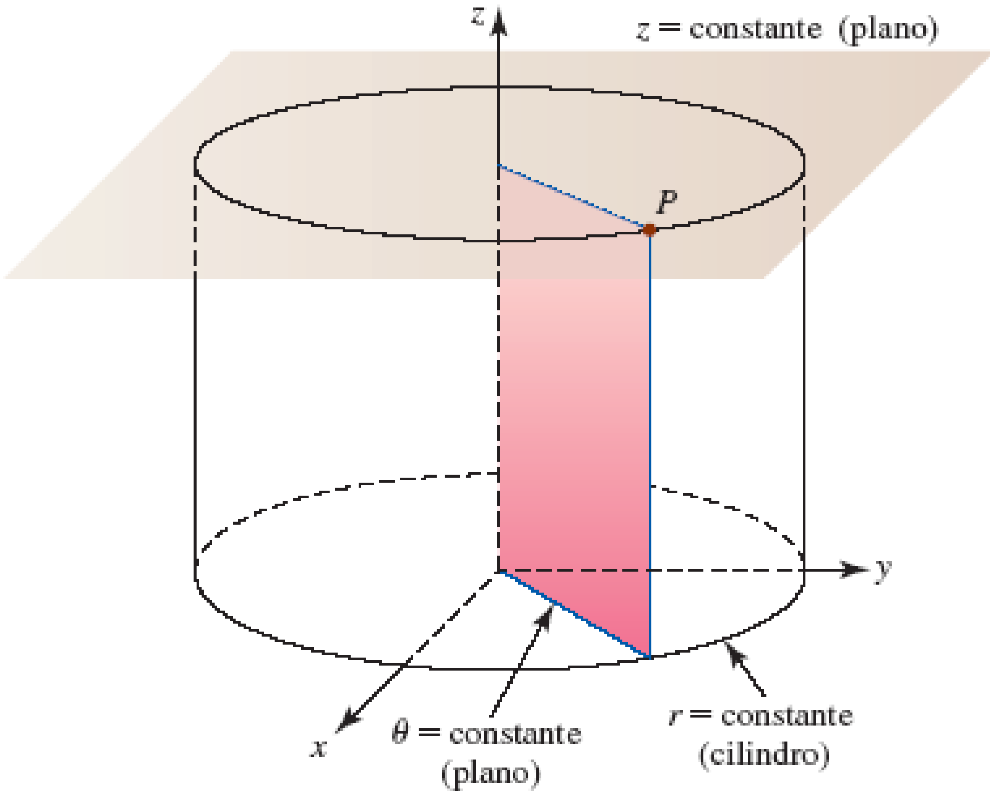
- Coordenadas cilíndricas

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\theta = atan(y/x)$$
$$z = z$$

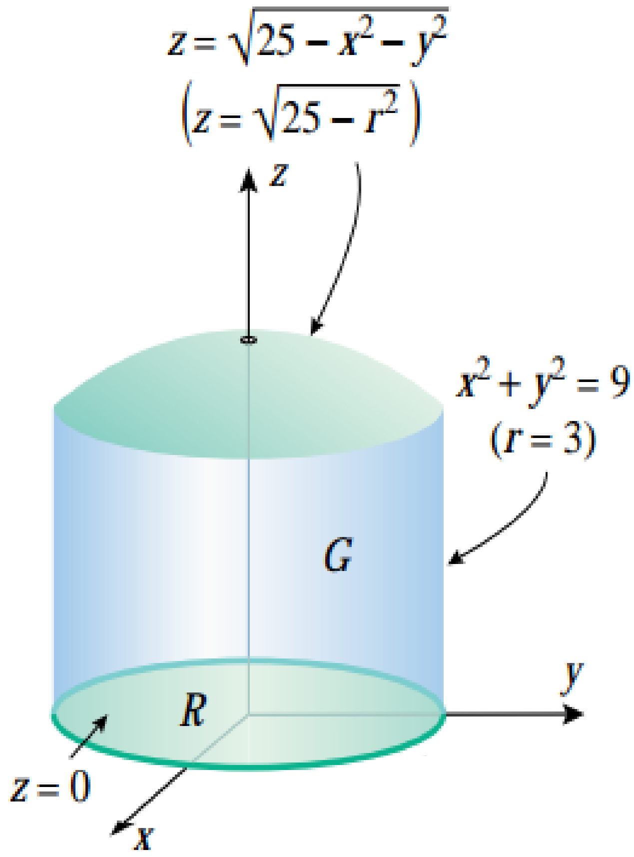




FONTE: https://sites.google.com/site/calculovectorialhakim/_/rsrc/1431822664058/coordenadas-cilindricas-y-esfericas/a13.png

Integrais triplas

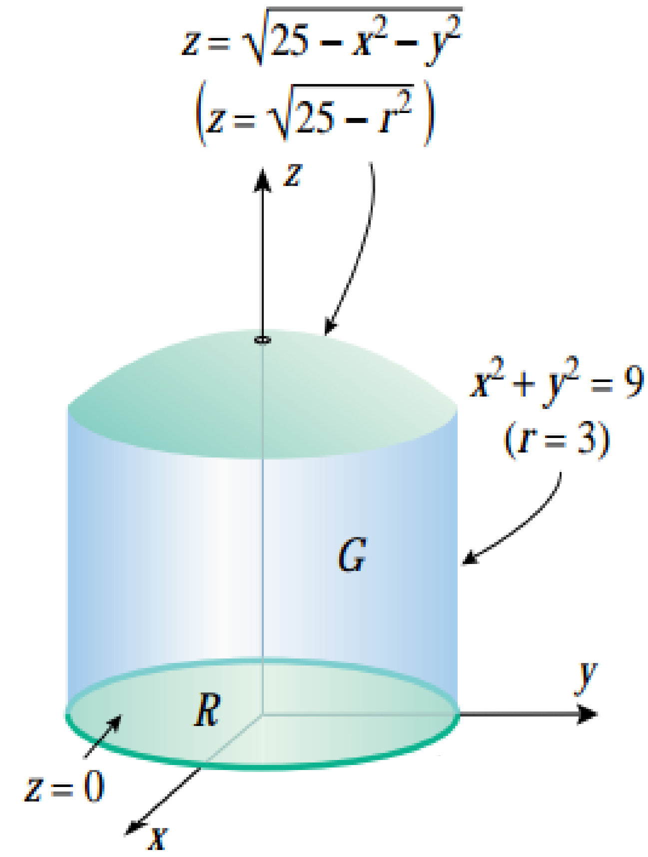
- Coordenadas cilíndricas
  - Exemplo: **Defina** como é feito o calculo do volume do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, pelo plano xy e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$



Integrais triplas

- Coordenadas cilíndricas
  - Exemplo: **Defina** como é feito o calculo do volume do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, pelo plano xy e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$

$$V = \iiint_G dV = \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{25-r^2}} dz \right] dA$$

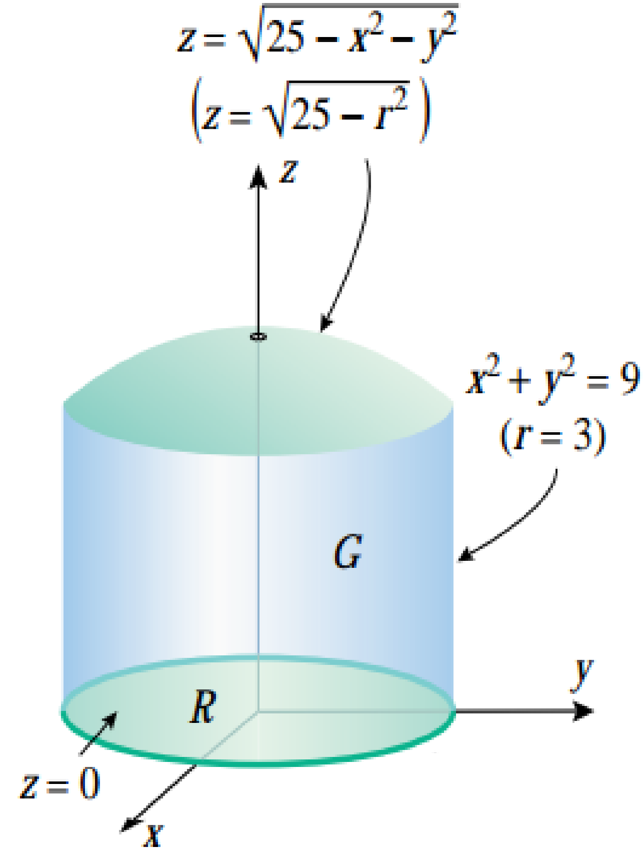


Integrais triplas

- Coordenadas cilíndricas
  - Exemplo: **Defina** como é feito o calculo do volume do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, pelo plano xy e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$

$$V = \iiint_G dV = \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{25-r^2}} dz \right] dA$$

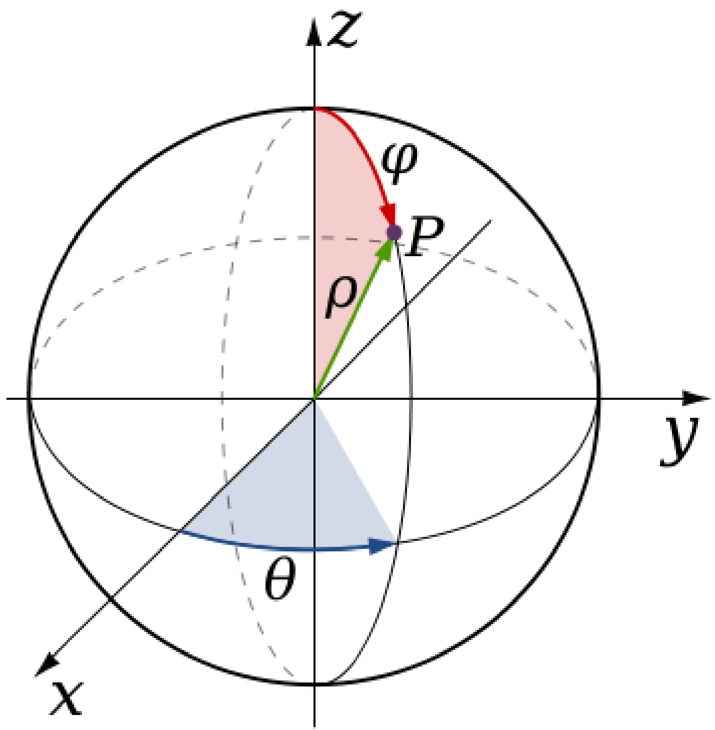
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$$



Integrais triplas

- Coordenadas esféricas

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\,dV = \iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$



$$x = \rho\cos(\theta)\sin(\phi)$$
$$y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = \rho\cos(\phi)$$

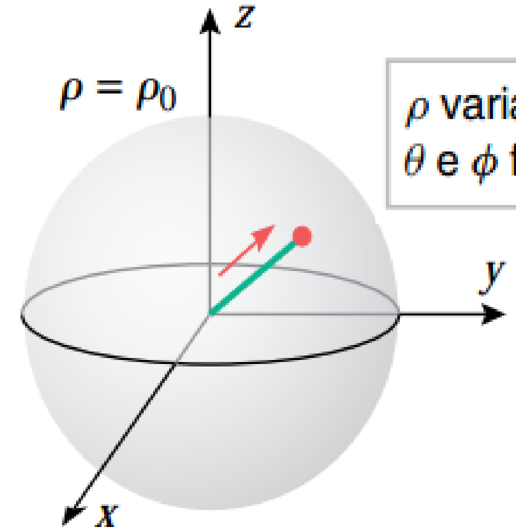
$$\Updownarrow$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\theta = atan(y/x)$$
$$\phi = acos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

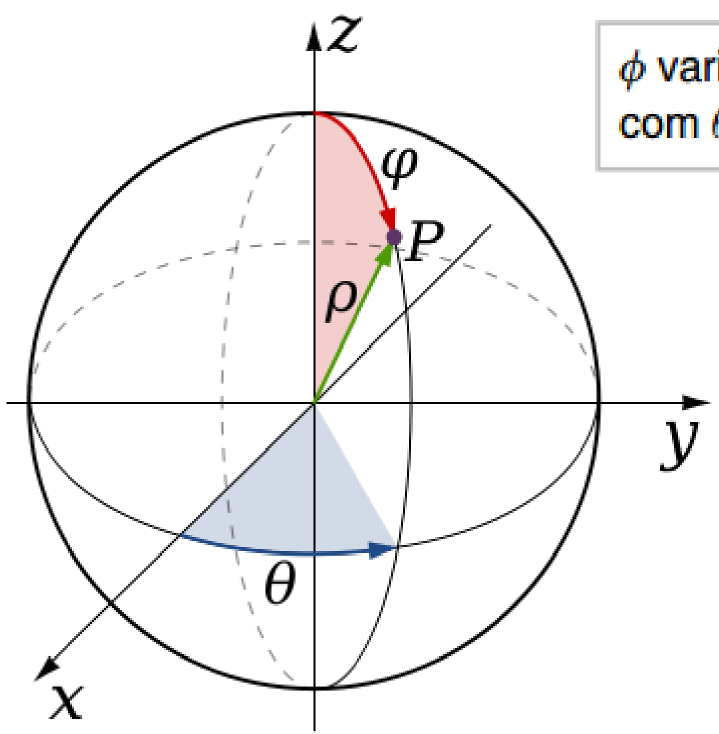
Integrais triplas

- Coordenadas esféricas

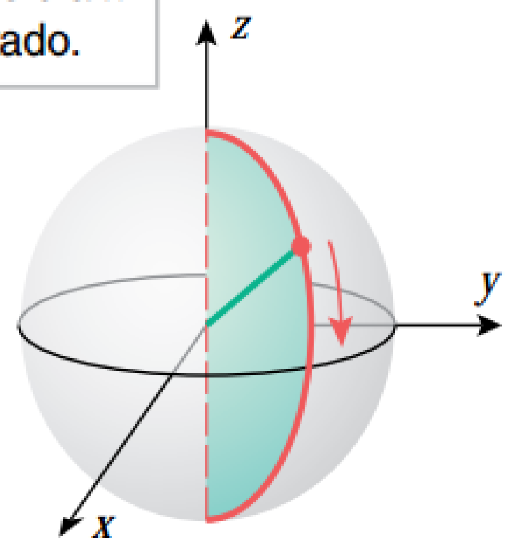
Recomendo olhar a Tabela 14.6.1 do Anton

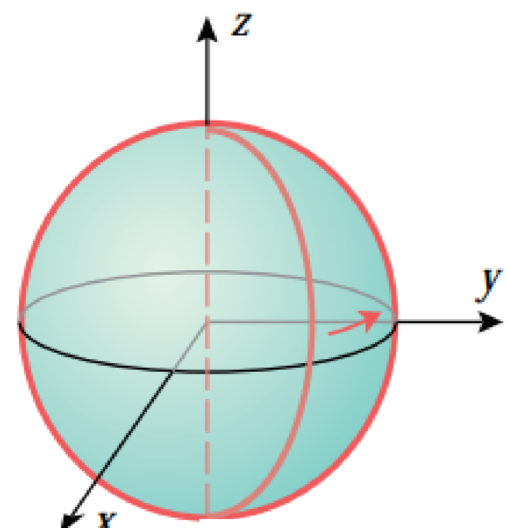


ρ varia de 0 a ρ_0 com θ e ϕ fixados.



ϕ varia de 0 a π com θ fixado.



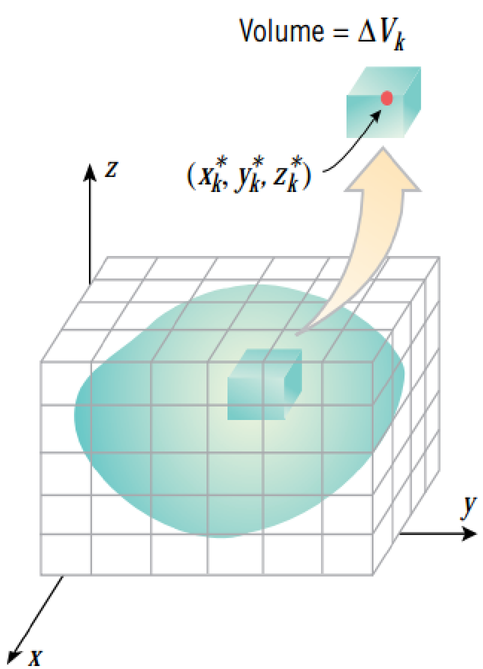


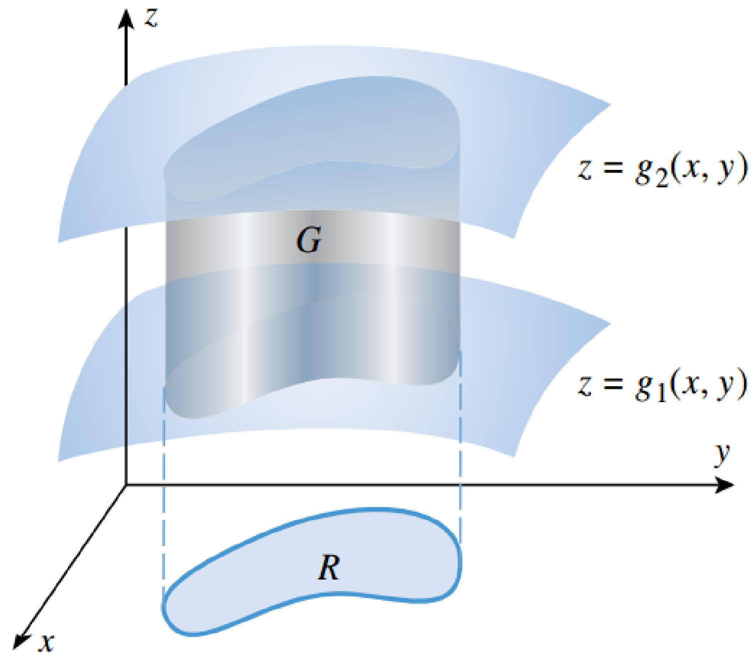
θ varia de 0 a 2π.

Resumo

Resumo

- Integrais triplas
  - Caixas retangulares
  - Forma mais geral
  - Cálculo de da área





Resumo

- Exercícios de fixação:
  - Seção 14.5
    - Exercícios de compreensão 14.5
    - 1-12
  - Seção 14.6
    - Exercícios de compreensão 14.6

Resumo

- Próxima aula:
  - Mudança de variável em integrais múltiplas
    - Jacobiano

Bibliografia

Bibliografia

- Bibliografia básica:
  - ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo, v. 2**. 10a ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
    - Seção 14.5, 14.6