Sistemas de Equações Lineares

Unidade 1

Álgebra Linear para Computação

Suzana M. F. de Oliveira

Revisão

Revisão

- Combinação linear $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{:1} & a_{:2} & \cdots & a_{:n} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_{:1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_{:2} \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_{:n} \\ | \end{bmatrix}$$

- Solução de sistemas com matrizes
  - Diagonal
  - Triangular
    - Superior: substituição retroativa
    - Inferior: substituição direta
- Operações elementares
  - $L_i \leftarrow \alpha L_i$
  - $L_i \leftrightarrow L_k$
  - $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k$

Eliminação de Gauss

Eliminação de Gauss

- É um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares.
  - Serve tanto para sistemas grandes, que precisam ser resolvidos por computador, como sistemas pequenos, que podem ser resolvidos a mão
  - Aplica operações elementares e faz com que a matriz do sistema fique na **forma escalonada por linhas**

Eliminação de Gauss

- Forma escalonada
  1. Se existirem linhas compostas apenas por zeros, elas devem estar na parte inferior da matriz;
  2. Se uma linha não é composta apenas de zeros, o primeiro elemento não nulo desta linha é chamado de **pivô**;
  3. Se duas linhas sucessivas possuem pivôs, então o pivô da linha superior deve estar à esquerda do pivô da linha inferior;
  4. Abaixo de cada pivô só deve haver zeros.

Eliminação de Gauss

- Forma escalonada
  - Exemplo da aula passada

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array}\right]} \Rightarrow \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]}$$

Eliminação de Gauss

- Forma escalonada
  - Exemplo da aula passada

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

1. OK! Não tem linha de zeros
2. Tem os pivôs: 1, 2 e -1
3. OK! Todos os pivôs acima de outro estão à esquerda
4. OK! Abaixo dos pivôs só tem zero

Eliminação de Gauss

- Forma escalonada
  - Observações:
    - A forma escalonada não é única
      - Exemplo:

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}; \quad L_3 \leftarrow \frac{L_2}{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

- Forma escalonada
  - Observações:
    - Nem sempre o pivô está na diagonal principal
      - Exemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vão existir variáveis livres!

      - OK! A linha de zeros está no final
      - Tem os pivôs: 2, 1
      - OK! Todos os pivôs acima de outro estão à esquerda
      - OK! Abaixo dos pivôs só tem zero

Eliminação de Gauss

- Forma escalonada
  - Observações:
    - Os pivôs pertencem a matriz dos coeficientes
      - Exemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{array}\right]$$

O sistema é inconsistente

- OK! A linha de zeros está no final
- Tem os pivôs: 2, 1
- OK! Todos os pivôs acima de outro estão à esquerda
- OK! Abaixo dos pivôs só tem zero

Eliminação de Gauss-Jordan

Eliminação de Gauss-Jordan

- É um procedimento semelhante a eliminação de Gauss
  - Aplica operações elementares e faz com que a matriz do sistema fique na **forma escalonada *reduzida* por linhas**
- Normalmente utilizado para calcular a matriz inversa de A

Eliminação de Gauss-Jordan

- Forma escalonada reduzida

Igual

1. Se existirem linhas compostas apenas por zeros, elas devem estar na parte inferior da matriz;
2. Se uma linha não é composta apenas de zeros, o primeiro elemento da linha é 1 e é chamado de **pivô**;
3. Se duas linhas sucessivas possuem pivôs, então o pivô da linha superior deve estar à esquerda do pivô da linha inferior;
4. Acima e abaixo de cada pivô só deve haver zeros.

Igual

Se uma matriz estiver na forma escalonada reduzida, também estará na forma escalonada

Eliminação de Gauss-Jordan

- Forma escalonada reduzida
  - Exemplo da aula passada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{3}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss-Jordan

- Forma escalonada reduzida
  - Exemplo da aula passada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right]}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{3} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]}$$

1. OK! Não tem linha de zeros
2. Tem os pivôs unitários
3. OK! Todos os pivôs acima de uma linha estão a esquerda
4. OK! Todas os elementos acima e abaixo dos pivôs são zero

Eliminação de Gauss-Jordan

- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss-Jordan

- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada reduzida e escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada

Eliminação de Gauss-Jordan

- Exemplos:

Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Forma escalonada reduzida e escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss-Jordan

- **Exercício**:
  - Determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss-Jordan

- **Exercício**:
  - Determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ambos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ambos

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nenhuma

Procedimento de eliminação

Procedimento de eliminação

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Passo 1.** Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteiramente de zeros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda

Procedimento de eliminação

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Pivotamento

$L_i \leftrightarrow L_k$

Coluna não nula mais à esquerda

- **Passo 2.** Permutamos a primeira linha com uma outra linha, *se necessário*, para obter uma entrada não nula ao topo da coluna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Foram permutadas a primeira e a segunda linhas da matriz precedente.

Procedimento de eliminação

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$L_i \leftarrow \alpha L_i$

- **Passo 3.** Se a entrada que agora está no topo da coluna *a*, multiplicamos a primeira linha inteira por 1/*a* para introduzir um pivô.

Desnecessário para a Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da matriz precedente foi multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Procedimento de eliminação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k$

$\alpha = \dfrac{\text{quem se quer zerar}}{\text{pivô}}$

- **Passo 4.** Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

−2 vezes a primeira linha da matriz precedente foi somada à terceira linha.

Procedimento de eliminação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

- **Passo 5.** Escondemos a primeira linha da matriz e recomeçamos aplicando o Passo 1 à submatriz resultante. Continuamos dessa maneira até que toda a matriz esteja em forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda da submatriz

Procedimento de eliminação

P1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

P2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da submatriz foi multiplicada por $\frac{1}{2}$ para introduzir um pivô.

P3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

-5 vezes a primeira linha da submatriz foi somada à segunda linha da submatriz para introduzir um zero debaixo do pivô.

P4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

P5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A primeira (e única) linha da nova submatriz foi multiplicada por 2 para introduzir um pivô.

Escalonada por linha com pivôs unitários

Procedimento de eliminação

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

- **Passo 6.** Começando com a última linha não nula e trabalhando para cima, somamos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores para introduzir zeros acima dos líderes.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\frac{7}{2}$ vezes a terceira linha da matriz precedente foi somada à segunda linha.

Procedimento de eliminação

P6 ➡ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\frac{7}{2}$ vezes a terceira linha da matriz precedente foi somada à segunda linha.

P6 ➡ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-6 vezes a terceira linha foi somada à primeira linha.

P6 ➡ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5 vezes a segunda linha foi somada à primeira linha.

Escalonada reduzida por linha
com pivôs unitários

Procedimento de eliminação

- Eliminação de Gauss:
  - Passos: 1, 2, 4 e 5

Parte do Trabalho 1

- Eliminação de Gauss-Jordan:
  - Todos os passos
    - Pode haver alterações de não precisar deixar o pivô unitário

Procedimento de eliminação

- **Exercício**:
  - Aplique o processo de eliminação de Gauss no sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 10 & 14 & 7 \end{array}\right]$$

Procedimento de eliminação

- **Exercício**:
  - Aplique o processo de eliminação de Gauss no sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 10 & 14 & 7 \end{array}\right]$$

$$\alpha=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{2}{1}=2;\quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1$$
$$\alpha=\frac{a_{31}}{a_{11}}=\frac{4}{1}=4;\quad L_3 \leftarrow L_3-4L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\alpha=\frac{a_{32}}{a_{22}}=\frac{2}{1}=2;\quad L_3 \leftarrow L_3-2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sistema inconsistente

Sistemas homogêneos

Sistemas homogêneos

- É um sistema A**x**=**b**, onde **b**=**0**
- Possibilidade de solução
  - Sempre é consistente
    - Possui sempre a **solução trivial** ou **solução nula**

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

    - Outras soluções são ditas **não triviais**

Se **b≠0** então é dito sistema não-homogêneo

Sistemas homogêneos

- É um sistema A**x**=**b**, onde **b**=**0**
- Possibilidade de solução
  - Sempre é consistente
    - Possui sempre a **solução trivial** ou **solução nula**

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

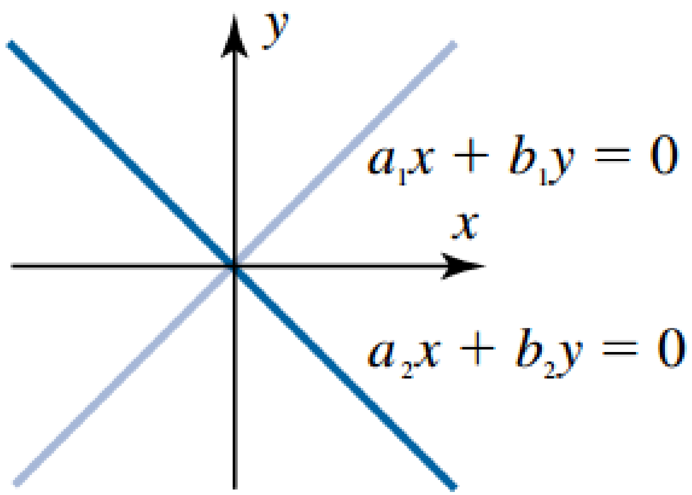
    - Outras soluções são ditas **não triviais**
  - Só há duas possibilidades para suas soluções:
    - O sistema tem somente a solução trivial.
    - O sistema tem uma infinidade de soluções além da solução trivial.

Se **b≠0** então é dito sistema não-homogêneo

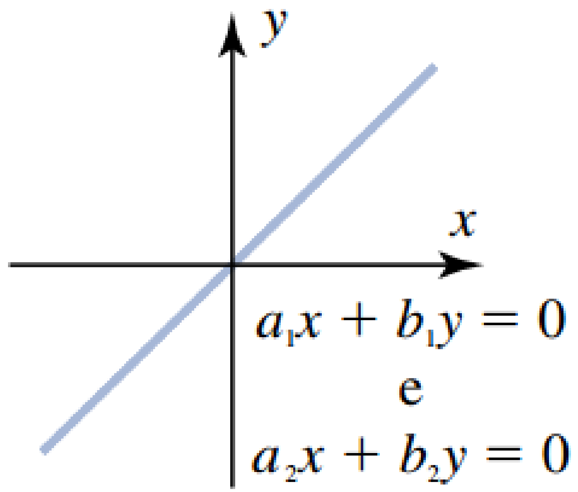
Sistemas homogêneos

- É um sistema A**x**=**b**, onde **b**=**0**
- Possibilidade de solução
  - Exemplo:

$$a_1x + b_1y = 0 \quad (\boldsymbol{a_1, b_1} \textbf{ não ambas nulas})$$
$$a_2x + b_2y = 0 \quad (\boldsymbol{a_2, b_2} \textbf{ não ambas nulas})$$



Somente a solução trivial



Uma infinidade de soluções

Sistemas homogêneos

- **Exercício**:
  - Encontre a solução do sistema homogêneo

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Desnecessário representar o vetor b

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Sistemas homogêneos

- **Exercício**:
  - Encontre a solução do sistema homogêneo
    - Escalonando

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2; \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\alpha = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2; \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\alpha = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{-1}{1} = -1; \quad L_4 \leftarrow L_4 - (-1)L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{a_{33}}{a_{23}} = \frac{1}{1} = 1; \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemas homogêneos

- **Exercício**:
  - Encontre a solução do sistema homogêneo
    - Retrosubstituição

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Variáveis livres: x_2, x_4 e x_6

$$x_6 = r, \quad x_5 = -5t,$$
$$x_4 = s, \quad x_3 = -3s - 4r,$$
$$x_2 = t, \quad x_1 = 2t + 14s + 37r$$

Variáveis líderes: x_1, x_3 e x_5, correspondem aos pivôs

Resumo

Resumo

- Escalonamento
  - Forma escalonada por linhas
  - Forma escalonada reduzida
- Métodos
  - Eliminação de Gauss
  - Eliminação de Gauss-Jordan
- Sistemas homogêneos
  - São sempre consistentes
    - Têm pelo menos a solução trivial

Resumo

- Exercícios de fixação
  - Anton
    - 1.2.1-1.2.5
    - 1.2.9
    - (V/F) 1.2(d, e, h, i)
  - Araujo
    - 1.2.7

Resumo

- Próxima aula
  - Decomposição LU

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L \qquad U \qquad \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \begin{aligned} U\mathbf{x} &= \mathbf{y} \\ L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Bibliografia

Bibliografia

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
  - Seção 1.2
- DE ARAUJO, Thelmo. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
  - Seção 1.2