

# 中国科学院深圳先进技术研究院研究生课程

## 《高性能数值计算及应用》2019 年期末考试题

### 1. 基于开源软件包 PETSc 求解方腔流问题

程序 ex19.c 近似求解定义在二维方腔区域  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的四个椭圆偏微分方程组成的系统：

$$-\Delta u - \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$-\Delta v + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$-\Delta \omega + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} - Gr \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$-\Delta T + Pr \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad (4)$$

其中  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  分别是沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的速度， $\omega(x, y)$  为涡量， $T(x, y)$  为温度。

边界条件被设置为如下形式：

- 下边界 ( $0 < x < 1, y = 0$ ):  $u = v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$
- 上边界 ( $0 < x < 1, y = 1$ ):  $u = V_{lid}, v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$
- 左边界 ( $x = 0, 0 < y < 1$ ):  $u = v = 0, T = 0$
- 右边界 ( $x = 1, 0 < y < 1$ ):  $u = v = 0$ , 如果  $Gr > 0$ , 那么  $T = 1$ , 否则  $T = 0$

在每条边界上， $\omega$  都被涡量的定义给出，即  $\omega(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ 。

参数  $Gr$  和  $Pr$  是无量纲的格拉晓夫数 (Grashof number) 和普朗特数 (Prandtl number)，参数  $V_{lid}$  作为雷诺数 (Reynolds number) 的替代参数。当  $Gr$  比较大时，由温度差引起的自然对流更重要；当雷诺数比较大时，由驱动速度引起的强制对流更重要；当  $Pr$  比较大时，粘性比热传导更重要（普朗特数是流体力学中表征流体流动中动量交换与热交换相对重要性的一个无量纲参数，表明温度边界层和流动边界层的关系，反映流体物理性质对对流传热过程的影响。大多数气体的  $Pr$  均小于 1，但接近于 1，常温下水的  $Pr$  可达 10 以上，但是液体金属的  $Pr$  很小，例如水银的普朗特数  $Pr = 2.72 \times 10^{-2}$ ）。

- (1) 利用有限差分方法离散上述偏微分系统 (1)-(4) 以及边界条件，给出离散后的非线性系统形式 (20 分)。

(2) 首先编译程序 ex19.c, 在命令行中输入

```
$make ex19
```

然后可以运行程序, 如

```
$mpirun -np 4 ./ex19 -da_grid_x 64 -da_grid_y 64 -snes_monitor  
-snes_converged_reason -lidvelocity 10. -prandtl 1. -grashof 1000.
```

请给出运行结果和  $u, v, \omega, T$  的图像 (20 分)。

(3) 基于  $64 \times 64$  的网格, 通过 -lidvelocity, -prandtl 和 -grashof 三个选项改变参数的值, 研究三个无量纲参数对于计算的影响。建议选择 lid velocity  $V_{lid} = 10^{-4}, 0.1, 10$ ,  $Pr = 0.1, 1, 10$ ,  $Gr = 1, 100, 1000$ , 选定参数后, 配合下面的选项运行程序

```
$mpirun -np 4 ./ex19 -da_grid_x 64 -da_grid_y 64 -snes_monitor  
-snes_converged_reason -pc_type asm -sub_ksp_type preonly -sub_pc_type lu
```

给出运行结果和  $u, v, \omega, T$  的图像, 根据这些结果总结该方腔流问题是如何随着这些参数变化而变得更加难求解 (非线性 Newton 迭代步越多, 意味着问题越难求解) (20 分)。

(4) 复制 ex19.c 到 ex19S.c, 修改程序增加第五个变量  $S$  到方腔流问题, 你需要定义一个类似普朗特数  $Pr$  的参数  $A$ , 以及一个类似格拉晓夫数  $Gr$  的参数  $B$ , 结果我们需要求解新的偏微分方程系统具有如下形式:

$$-\Delta u - \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$-\Delta v + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$-\Delta \omega + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} - Gr \frac{\partial T}{\partial x} + B \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$-\Delta T + Pr \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad (8)$$

$$-\Delta S + A \left( u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0, \quad (9)$$

关于变量  $S$  的边界条件设置如下:

- 下边界 ( $0 < x < 1, y = 0$ ):  $S = 0$
- 上边界 ( $0 < x < 1, y = 1$ ):  $S = -1$
- 左边界和右边界 ( $x = 0, 1, 0 < y < 1$ ):  $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$

$S$  的初始猜测值设置为这些边界条件的线性插值。

- 为了求解上述具有 5 个未知量的偏微分系统，请列出在 `ex19.c` 中需要修改的部分，并且附上完整的修改后的程序 `ex19S.c` (20 分)。

- 选择  $A = 1$  和  $B = 0$ , 并且用下面的选项运行程序:

```
$mpirun -np 4 ./ex19 -da_grid_x 64 -da_grid_y 64 -snes_monitor  
-snes_converged_reason -lidvelocity 10. -prandtl 1. -grashof 1000.
```

请给出运行结果和  $S$  的图像。如果  $B = 0$ , 我们改变  $A$  的值, 比如  $A = 10$  和  $A = 100$ , 请画出对应不同  $A$  的  $S$  的图像。根据你的观察,  $S$  的图像发生变化了吗? 如果没有发生变化, 请从方程本身解释其原因 (20 分)。