



深蓝学院  
shenlanxueyuan.com

## 第六章作业提示

主讲人 会打篮球的猫



# 基础题一

- ① 证明式(15)中, 取  $y = u_4$  是该问题的最优解。提示: 设  $y' = u_4 + v$ , 其中  $v$  正交于  $u_4$ , 证明

$$y'^T D^T D y' \geq y^T D^T D y$$

该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

寻找最小二乘解:

$$\min_y \|Dy\|_2^2, \quad s.t. \|y\| = 1 \quad (14)$$

解法: 对  $D^T D$  进行 SVD:

$$D^T D = \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 u_i u_i^T \quad (15)$$

其中  $\sigma_i$  为奇异值, 且由大到小排列,  $u_i, u_j$  正交。

## 三角化的数学描述

- 此时, 取  $y = u_4$  (为什么?), 那么该问题的目标函数值为  $\sigma_4$ 。
- 判断该解有效性的条件:  $\sigma_4 \ll \sigma_3$ 。若该条件成立, 认为三角化有效, 否则认为三角化无效。

now  $\|Dy\|_2^2$ ,  $\|y\|=1$   
 $\downarrow$   
 $\min_y y^T D^T D y$   
由于  $D \xrightarrow{SVD} V \Sigma U^T$ , 则  $D^T D \xrightarrow{SVD} U \Sigma^T \Sigma U^T = \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 u_i u_i^T$ , 且  $\sigma^2 \geq \sigma^2 \geq \sigma^2 \geq \sigma^2$ .  
 $\therefore u_1, u_2, u_3, u_4$  为一组正交基.  
 $\therefore$  设  $y' = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + k_4 u_4$ , 且  $\|y'\|=1 \rightarrow k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 1$   
 $\therefore y'^T D^T D y' = (k_1 u_1^T + k_2 u_2^T + k_3 u_3^T + k_4 u_4^T) \cdot \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 u_i u_i^T \cdot (k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + k_4 u_4)$   
 $\therefore u_1, u_2, u_3, u_4$  两两正交.  
 $\therefore u_i^T u_j = 0 \quad (i \neq j)$   
 $\therefore y'^T D^T D y' = (k_1 \sigma_1^2 u_1^T + \dots + k_4 \sigma_4^2 u_4^T) (k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + k_4 u_4)$   
 $= k_1^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 + k_3^2 \sigma_3^2 + k_4^2 \sigma_4^2$   
 $\geq (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) \sigma_4^2$   
 $= \sigma_4^2$   
当且仅当  $y' = u_4$  时, 等号成立. 此时  $y'^T D^T D y'$  取最小值.  
( $k_1, k_2, k_3 = 0, k_4 = 1$ )  
因此,  $y = u_4$  是原问题最优解.  
 $u_4$  正是路标点齐次坐标归一化后的结果.

# 基础题二

## ② 请依据本节课公式，完成特征点三角化代码，并通过仿真测试

```
/// TODO::homework; 请完成三角化估计深度的代码
// 遍历所有的观测数据，并三角化
Eigen::Vector3d P_est;          // 结果保存到这个变量
P_est.setZero();
/* your code begin */
// 1. D = [d1^t, d2^t, ... , dn^t]^t
const int dim = 2 * (end_frame_id - start_frame_id);
Eigen::MatrixXd D(dim, 4);
D.setZero();
int idx = 0;
for (size_t i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i) {
    // Pi = [Rcw_i, tcw_i]
    Eigen::Matrix<double, 3, 4> Pi;
    Pi.block<3, 3>(0, 0) = camera_pose[i].Rwc.transpose();
    Pi.block<3, 1>(0, 3) = - camera_pose[i].Rwc.transpose() * camera_pose[i].tcw;
    // di
    D.row(idx) = camera_pose[i].uv(0) * Pi.row(2) - Pi.row(0);
    D.row(idx+1) = camera_pose[i].uv(1) * Pi.row(2) - Pi.row(1);
    idx += 2;
}
// 2. D^t*D with SVD
Eigen::JacobiSVD<Eigen::MatrixXd> svd(D.transpose()*D, Eigen::ComputeThinU | Eigen::ComputeThinV);
P_est = svd.matrixV().topRightCorner(3, 1) / svd.matrixV()(3, 3);
// 3. eigen value output
std::cout << "singularValues: \n" << svd.singularValues() << std::endl;
std::cout << "Ratio_4/3: " << svd.singularValues()(3)/svd.singularValues()(2) << std::endl;
std::cout << "error: " << (Pw - P_est).norm() << std::endl;
/* your code end */
```

```
lcx@lcx:~/Desktop/vio_homework/ch6/ch6_code/build$ ./estimate_depth
singularValues:
468.406
7.74642
0.723255
5.30104e-16
Ratio_4/3: 7.32942e-16
ground truth:
-2.9477 -0.330799 8.43792
your result:
-2.9477 -0.330799 8.43792
```

可以看出最小奇异值比第二小奇异值的比值非常小，说明  $\sigma_4 \ll \sigma_3$ ，三角化成立。

此外没有添加任何噪声，所以三角化结果和真值一样。

# 提升题一

- ① 请对测量值加上不同噪声 (增大测量噪声方差), 观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化, 并绘制比例值的变化曲线。

```
// TODO: 是否添加观测噪声 ? false=基础题 : true=提升题
bool addNoise = true;
for (int i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i) {
    Eigen::Matrix3d Rcw = camera_pose[i].Rwc.transpose();
    Eigen::Vector3d Pc = Rcw * (Pw - camera_pose[i].twc);

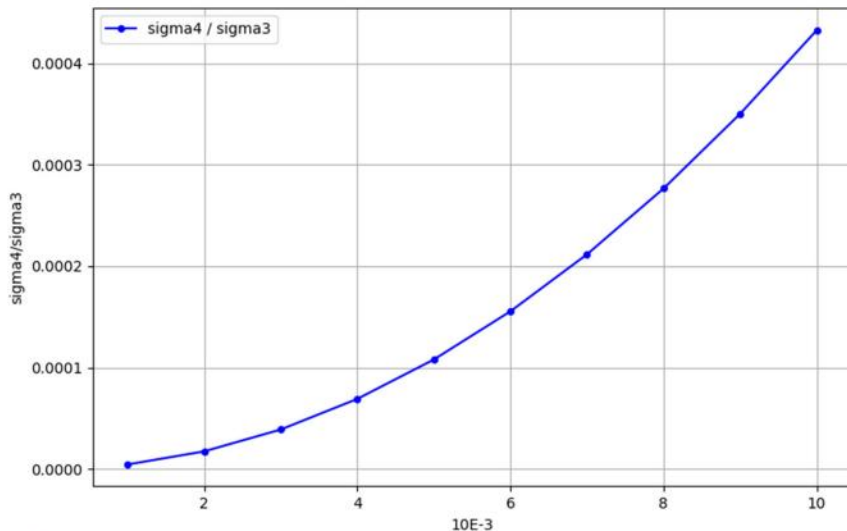
    double x = Pc.x();
    double y = Pc.y();
    double z = Pc.z();
    // Add noise
    if (addNoise) {
        std::normal_distribution<double> noise_pdf(0., 1. / 1000.); // 2pixel / focal
        camera_pose[i].uv = Eigen::Vector2d(x/z+noise_pdf(generator), y/z+noise_pdf(generator));
    } else {
        camera_pose[i].uv = Eigen::Vector2d(x/z, y/z);
    }
}
```

该噪声方差大小是将像素误差反映到归一化平面的结果, 例如 0.001对应的就是2个像素误差。

# 提升题一

- ① 请对测量值加上不同噪声 (增大测量噪声方差), 观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化, 并绘制比例值的变化曲线。

方差大小	比例: $\sigma_4/\sigma_3$
1 / 1000	4.30044 e-6
2 / 1000	1.72137 e-5
3 / 1000	3.87577 e-5
4 / 1000	6.89499 e-5
5 / 1000	1.07808 e-4
6 / 1000	1.55349 e-4
7 / 1000	2.1159 e-4
8 / 1000	2.76548 e-4
9 / 1000	3.5024 e-4
10 / 1000	4.32682 e-4



从以上表格和图片不难看出, 所有测试结果 $\sigma_4/\sigma_3$ 均小于等于  $e-4$  量级, 即满足 $\sigma_4 \ll \sigma_3$ , 三角化有效。

同时, 随着观测噪声的增大, 比例值 $\sigma_4/\sigma_3$ 逐渐增大, 反映了三角化的误差是在逐渐增大。



## 提升题二

- ② 固定噪声方差参数，将观测图像帧扩成多帧（如 3，4，5 帧等），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。

在前一小题的基础上，固定观测噪声方差大小为  $1/1000$ ，通过修改代码中的 `start_frame_id` 来实现观测图像帧数的改变。

图像帧数的上限为 10 帧，根据三角化原理，只有单帧图像观测到路标点时，无法计算路标点的三维坐标，所以在此处，将观测帧数设为 1，看下测试结果，可以做一下简单验证。结果如下图所示：

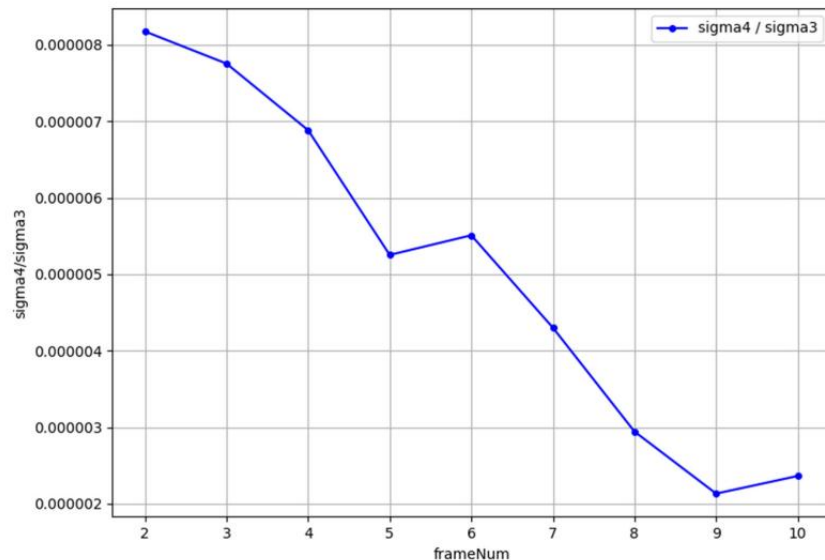
```
lcx@lcx:~/Desktop/vio_homework/ch6/ch6_code/build$ ./estimate_depth
singularValues:
  117.146
   1.08497
  7.12253e-16
  1.90069e-16
Ratio 4/3: 0.266856
ground truth:
 -2.9477 -0.330799  8.43792
your result:
 -8.57583 11.8619 -3.60263
```

由上图可以看出， $\sigma_4/\sigma_3$  已经达到了约 0.267，具有二维的零空间，不再满足  $\sigma_4 \ll \sigma_3$ ，说明了此时三角化是无效的，另外计算结果也与真实值相差甚远，完成验证。

## 提升题二

- ② 固定噪声方差参数，将观测图像帧扩成多帧（如 3，4，5 帧等），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。

观测图像帧数	比例: $\sigma_4/\sigma_3$
2	8.1738 e-6
3	7.75341 e-6
4	6.88268 e-6
5	5.25209 e-6
6	5.50874 e-6
7	4.30044 e-6
8	2.94257 e-6
9	2.13146 e-6
10	2.36182 e-6



可以看出，首先所有结果均满足 $\sigma_4 \ll \sigma_3$ 的条件，三角化有效；随着观测帧数的增多，比例值 $\sigma_4/\sigma_3$ 总体呈现下降趋势，结果更准确、有效。

感谢各位聆听 !  
Thanks for Listening

