

SOUSIC-第 6 章作业

1. 证明题

三角化问题最终转化为最小二乘问题：

$$\begin{aligned} \min & \|Dy\|_2^2 \\ \text{s.t. } & \|y\| = 1 \end{aligned}$$

因为：

$$\|Dy\|_2^2 = y^T D^T D y$$

对 D 进行 SVD 分解：

$$D = U \Sigma V^T$$

那么：

$$(D^T D)_{4 \times 4} = V \Sigma^T \Sigma V^T = \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 v_i v_i^T$$

D 满秩，且 $\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \sigma_3^2 > \sigma_4^2$

因为 v_1, v_2, v_3, v_4 为一组标准正交基，且 y 维数为四

设 $y = \sum_{i=1}^4 k_i v_i$ ，因为 $\|y\|_2^2 = 1$ ，所以 $\sum_{i=1}^4 k_i^2 = 1$

因此

$$\begin{aligned} y^T D^T D y &= \left(\sum_{i=1}^4 k_i v_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 v_i v_i^T \right) \left(\sum_{i=1}^4 k_i v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 k_i^2 \sigma_i^2 \geq \sigma_4^2 \end{aligned}$$

当且仅当 $y = v_4$ 时等号成立，原问题取最小值

2. 请依据本节课公式，完成特征点三角化代码，并通过仿真测试

- 代码补充：

```

triangulate.cpp 7 x CMakeLists.txt
triangulate.cpp > main()
64  /* your code begin */
65  // step1: D = [d1^t, d2^t, ..., dn^t]^t
66  const int dim = 2 * (end_frame_id - start_frame_id);
67  Eigen::MatrixXd D(dim, 4);
68  D.setZero();
69  int idx = 0;
70  for (size_t i = start_frame_id; i < end_frame_id; i++) {
71      // Pi = [Rcw_i, tcw_i]
72      Eigen::Matrix<double, 3, 4> Pi;
73      Pi.block<3, 3>(0, 0) = camera_pose[i].Rwc.transpose();
74      Pi.block<3, 1>(0, 3) = -camera_pose[i].Rwc.transpose() * camera_pose[i].tcw;
75      // di
76      D.row(idx) = camera_pose[i].uv(0) * Pi.row(2) - Pi.row(0);
77      D.row(idx + 1) = camera_pose[i].uv(1) * Pi.row(2) - Pi.row(1);
78      idx += 2;
79  }
80
81  // step2: D^t*D with SVD
82  Eigen::JacobiSVD<Eigen::MatrixXd> svd(D.transpose() * D, Eigen::ComputeThinU | Eigen::ComputeThinV);
83  P_est = svd.matrixV().topRightCorner(3, 1) / svd.matrixV()(3, 3);
84  // step3: eigen value output
85  std::cout << "singularValues:\n" << svd.singularValues() << std::endl;
86  std::cout << "Ratio_4/3: " << svd.singularValues()(3) / svd.singularValues()(2) << std::endl;
87  std::cout << "error: " << (Pw - P_est).norm() << std::endl;
88  /* your code end */

```

• 运行结果：

```

root@docker-desktop:/home/vio_hw/ch6/course6_hw/build# ./estimate_depth
singularValues:
    468.406
    7.74642
    0.723255
5.30104e-16
Ratio_4/3: 7.32942e-16
error: 3.51787e-14
ground truth:
    -2.9477  -0.330799    8.43792
your result:
    -2.9477  -0.330799    8.43792
root@docker-desktop:/home/vio_hw/ch6/course6_hw/build#

```

• 结论：

- 三角化成立：最小奇异值(5.30104e-16) 比第二小奇异值(0.723255) 量级小很多，即 $\sigma_4 \ll \sigma_3$
- 三角化结果与真值一样，因为没有添加噪声