

# Cours de mathématiques

---

Julien FAUCHER  
21 décembre 2014

---

HLMA319

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction – Définition d’une limite</b>               | <b>1</b>  |
| <b>0 Comparaison de fonctions et développements limités</b> | <b>3</b>  |
| 0.1 Négligeabilité et équivalence . . . . .                 | 3         |
| 0.2 Développements limités . . . . .                        | 4         |
| <b>1 Suites</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ . . . . .        | 7         |
| 1.2 Suites . . . . .  | 7         |
| 1.3 Convergence . . . . .                                   | 8         |
| 1.4 Suites extraites, Bolzano-Weierstrass . . . . .         | 9         |
| 1.5 Le critère de Cauchy . . . . .                          | 9         |
| <b>2 Séries</b>   | <b>11</b> |
| 2.1 Définition et premières propriétés . . . . .            | 11        |
| 2.2 Séries à termes positifs . . . . .                      | 11        |
| 2.3 Séries à termes quelconques . . . . .                   | 12        |
| 2.3.1 Convergence absolue . . . . .                         | 12        |
| 2.3.2 Critère d’Abel . . . . .                              | 13        |



## Introduction – Définition d’une limite

On se demande quel est le sens de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

Considérons une fonction  $f$  continue quelconque. Si  $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$  est un intervalle centré en  $l$ , il existe  $]a - \delta; a + \delta[$  tel que si  $x \in ]a - \delta; a + \delta[$ ,  $f(x) \in ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

**Définition -1.1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On dit que  $l \in \mathbb{R}$  est la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq si } x \in ]a - \delta; a + \delta[, f(x) \in ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$$

*Notation.* On peut écrire  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  ainsi :  $\lim_a f(x) = l$

*Remarque.* Cela ne fonctionne que pour  $l \in \mathbb{R}$ .

*Remarque.* On a :

$$\begin{aligned} x &\in ]a - \delta; a + \delta[ \\ \Leftrightarrow a - \delta &< x < a + \delta \\ \Leftrightarrow -\delta &< x - a < \delta \\ \Leftrightarrow |x - a| &< \delta \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, |x - a| < \delta, |f(x) - l| < \varepsilon$$

ainsi que les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_a f = +\infty &\text{ si } \forall A > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A \\ \lim_{+\infty} f = l &\text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \text{ tq } \forall x, x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \lim_{+\infty} f = +\infty &\text{ si } \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tq } \forall x, x < B \Rightarrow f(x) > A \end{aligned}$$



# Chapitre 0

## Comparaison de fonctions et développements limités

### 0.1 Négligeabilité et équivalence

*Definition 0.1.* Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Un voisinage de  $a$  est un intervalle de la forme  $]a - \delta; a + \delta[$  ou  $]a - \delta; a + \delta[ \setminus \{0\}$  avec  $\delta > 0$

*Definition 0.2* (Négligeabilité). Soit  $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  en  $a \in \mathbb{R}$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une fonction  $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$  pour  $x \in V$
- $\lim_a \varepsilon(x) = 0$

*Notation.* Si  $f$  est négligeable devant  $g$ , on note  $f \ll_a g$  (Physique) ou  $f = o_a(g)$  (Maths)

*Remarque.* Si  $g$  ne s'annule pas sur  $V$ ,  $f \ll_a g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

*Exemple.*

*Definition 0.3* (Équivalence). Soit  $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions. Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  en  $a$  si on a :

$$f(x) = g(x) + o_a(g(x))$$

C'est à dire si  $f = g +$  quelque chose de négligeable devant  $g$ .

*Remarque.*

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) + o_a(g(x)) \\
 \Leftrightarrow f(x) &= g(x) + g(x)\varepsilon(x) \\
 \Leftrightarrow f(x) &= g(x)(1 + \varepsilon(x)) \\
 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 + \varepsilon(x) \\
 \Leftrightarrow \lim_a \frac{f(x)}{g(x)} &= 1
 \end{aligned}$$

itemize Les deux dernières notations ne sont valides que si  $g \neq 0$  au voisinage de  $a$ .  $\varepsilon$  est une fonction telle que  $\lim_a \varepsilon = 0$

*Notation.*  $f$  est équivalente à  $g$  en  $a$  s'écrit  $f \sim_a g$

*Remarque.* Si  $f \sim_a g$  et  $\lim_a g = l$  alors,

$$\begin{aligned}
 \lim_a f(x) &= \lim_a g(x) * \lim_a (1 + \varepsilon(x)) \\
 &= \lim_a g(x) \\
 &= l
 \end{aligned}$$

*Proposition 0.4.* Si  $f \sim_a g$  et si  $\lim_a g$  existe, alors  $\lim_a f = \lim_a g$ . Attention : la réciproque est fausse !

*Démonstration.*

□

*Exemple.* .

## 0.2 Développements limités

*Idée.* On va faire l'approximation de fonctions par des polynômes.

*Definition 0.5.* Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

On dira que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $a$  (noté  $DL_n(a)$ ) s'il existe un polynôme  $P$  de degré  $n$  tel qu'au voisinage de  $a$ ,

$$f(x) = P(x - a) + o_a((x - a)^n)$$

*Remarque.* On a  $f(x + a) = P(x) + o_0(x^n)$  donc on fera les développements limités en 0

*Propriété 0.6.* Si  $f$  admet un  $DL_n(0)$  alors, de développement limité est unique.

*Démonstration.*

□

*Exemple.*

*Théorème 0.7. Formule de Taylor* Soit  $f$  définie au voisinage de 0 et de classe  $\mathcal{C}^n$  ( $n$  fois dérivable avec  $f^{(n)} = \frac{d^n f(0)}{dx^n}$  continue). On a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) + o(x^n)$$

*Démonstration.*

□

Voire Wikipédia.

*Corollaire 0.8.* Si  $f$  est  $\mathcal{C}^n$  alors elle admet un  $DL_n(0)$

*Exemple.* Posons  $f(x) = e^x$ .  $\forall n, f(x)^{(n)} = e^x$  et  $f(0)^{(n)} = 1$ . On a donc

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

Soit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

*Remarque.* C'est LA bonne définition de  $e^n$ .

*Exemple.*

*Remarque.* Taylor c'est bien, mais parfois très complexe (par exemple le  $DL_{10}(0)$  de  $\frac{1+x}{1-x^2}$ )

*Remarque.* Un développement limité est une égalité et non une approximation.

*Propriété 0.9* (Opérations sur les  $DL$  :). Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions. Admettons un  $DL_n(0)$  tel que :

$$— f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$— g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

Avec  $\deg P = \deg Q = n$ . On a alors :

**Addition :**  $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$

**Produit :**  $f(x) * g(x) = R(x) + o(x^n)$  où  $R(x)$  est le polynôme  $P(x)Q(x)$  tronqué à l'ordre  $n$

**Composition :**  $f \circ g(x) = T(x) + o(x^n)$  où  $T(x)$  est le polynôme  $P(x) \circ Q(x)$  ( $\deg R(x) = n^2$ ) tronqué au rang  $n$ .

**Dérivation :** Si  $f$  est dérivable,  $f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$

**Intégration :** Si  $f$  est continue,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x P(t)dt + o(x^{n+1})$

*Propriété 0.10.* Si  $f(x) = P(x) + o(x^n)$  est un  $DL_n(0)$  de  $f$  avec  $\deg P = n$ , alors  $P \sim_0 f$





# Chapitre 1

## Suites

Dans ce chapitre, on pose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{Q}$

### 1.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ .

*Definition 1.1.* On dit que  $M \in \mathbb{R}$  est un majorant / minorant de  $\mathcal{A}$  si  $\forall x \in \mathcal{A}, x \leq M$  /  $x \geq M$

*Definition 1.2.* On dit que  $M$  est une borne supérieure/inférieure de  $\mathcal{A}$  si :

- $M$  est majorant/minorant de  $\mathcal{A}$
- Si  $M'$  est majorant/minorant de  $\mathcal{A}$ , on doit avoir  $M' > M$  /  $M' < M$ . C'est à dire que  $M$  doit être le plus petit/grand majorant/minorant de  $\mathcal{A}$

*Propriété 1.3.* Si  $\mathcal{A}$  admet une borne supérieure ou inférieure, cette borne est unique.

*Démonstration.*

□

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux bornes supérieures de  $\mathcal{A}$ .

Alors  $M_1$  majore  $\mathcal{A} \Rightarrow M_1 \geq M_2$

$M_2$  majore  $\mathcal{A} \Rightarrow M_2 \geq M_1$

Donc  $M_1 = M_2$ .

*Notation.* On note une borne supérieure  $\sup \mathcal{A}$  et une borne inférieure  $\inf \mathcal{A}$ .

*Remarque.* On se place dans  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  et  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$

Alors on a  $\mathcal{A} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{A}$  n'a pas de bornes dans  $\mathbb{Q}$ . En effet, si ces bornes existent, elles valent  $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . C'est une des raisons de la création de l'ensemble des réels.

*Axiome 1.4.* Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  et  $\mathcal{A}$  majorée. Alors  $\sup \mathcal{A} \in \mathbb{R}$  existe.

### 1.2 Suites

*Definition 1.5.* Une suite de  $\mathbb{K}$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{lll} u : \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{K} \\ n & \rightarrow & u(n) \end{array}$$

*Notation.*  $u(n)$  est noté  $u_n$  et la suite  $u$  est notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou simplement  $u_n$ .

*Exemple.*  $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

*Remarque.* On peut dire qu'une suite est une restriction à  $\mathbb{N}$  d'une fonction  $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$

[Récurrence] Soit  $P(n)$  une propriété dépendant de  $n \in \mathbb{N}$ . Si

- il existe  $x$  tel que  $P(x)$  est vérifiée,
  - pour tout  $n > x$ ,  $P(n)$  nous permet de déduire  $P(n+1)$
- alors,  $P(n)$  est vérifiée pour tout  $n > x$ .

*Propriété 1.6. Démonstration.* □

*Définition 1.7 (Monotonie).* Pour  $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$ , soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ , alors  $(u_n)$  est croissante si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \Rightarrow u_p \leq u_q$$

### 1.3 Convergence

*Définition 1.8.* Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$  et  $l \in \mathbb{K}$ . On dit que  $(u_n)$  tend vers  $l$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

*Définition 1.9.* Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on dit que  $(u_n)$  tend vers l'infini si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, n > N, u_n > A$$

*Définition 1.10.* On dit que  $(u_n)$  converge si  $(u_n)$  admet une limite dans  $\mathbb{K}$ . En particulier, une suite tendant vers l'infini diverge<sup>1</sup>.

*Notation.*

$$\begin{aligned} \lim u_n &= l \\ \Leftrightarrow \lim_{+\infty} u_n &= l \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= l \\ \Leftrightarrow u_n &\rightarrow l \\ \Leftrightarrow u_n &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \end{aligned}$$

*Théorème 1.11.* Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$  telle que  $(u_n)$  est majorée et croissante. Alors  $(u_n)$  converge et  $\lim u_n = \sup u_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

*Application (Suites Adjacentes).* Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites dans  $\mathbb{R}$  telles que :

1.  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante.
2.  $\lim v_n - u_n = 0$

Alors  $\forall n, u_n > v_n$  et  $(v_n)$  et  $(u_n)$  convergent vers la même limite.

---

1. Ne converge pas

## 1.4 Suites extraites, Bolzano-Weierstrass

*Définition 1.12.* Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de  $\mathbb{K}$ . On dit que  $(v_n)$  est extraite de  $(u_n)$  s'il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que pour tout  $n$ ,  $v_n = u_{\varphi(n)}$ .

*Notation.*  $v_k = u_{n_k}$ . On dit aussi que  $(v_n)$  est une sous-suite de  $(u_n)$ .

*Remarque.*

1. Toute suite  $(u_n)$  est extraite d'elle même. Il suffit de prendre  $\varphi(n) = n$ .
2. Soit  $(u_n) = (-1)^n$  et  $\varphi(n) = 2n$ . On a alors  $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n} = 1$ .  
Ou, si  $\varphi(n) = 2n + 1$ ,  $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n+1} = -1$ .

*Lemme 1.13.* Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ . Alors :  $u_n \rightarrow l \Leftrightarrow$  pour toute suite  $(v_n)$  extraite de  $(u_n)$ ,  $v_n \rightarrow l$

*Démonstration.* □

*Théorème 1.14* (Théorème de Bolzano-Weierstrass). Soit  $(u_n)$  une suite bornée (minorée et majorée). Il existe au moins une suite  $(v_n)$  extraite de  $(u_n)$  convergente.

## 1.5 Le critère de Cauchy

*Interêt.* Le critère de Cauchy permet de montrer qu'une suite converge sans connaître sa limite et même sans savoir à priori s'il y en a une.

*Définition 1.15.* Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ . On dit que  $(u_n)$  est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall p, q \text{ si } p, q > N, |u_p - u_q| < \varepsilon$$

*Propriété 1.16.* Si  $(u_n)$  est convergente,  $(u_n)$  est de Cauchy

*Remarque.* Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ , prenons  $\alpha_n \in \mathbb{Q}$  tq  $\alpha_n \rightarrow \sqrt{2}$ . Alors,  $(\alpha_n)$  est de Cauchy mais  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  donc  $(\alpha_n)$  ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$  et la réciproque de Cauchy est fausse dans  $\mathbb{Q}$ . C'est d'ailleurs la raison historique de la création de  $\mathbb{R}$

*Lemme 1.17.* Toute suite de Cauchy est bornée

*Démonstration.* Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy. On prend  $\varepsilon = 1$ . Il existe  $N$  tel que pour  $p, q \geq N$ ,  $|u_p - u_q| < 1$  et notamment si  $q = N$ .

$$\begin{aligned} \text{Soit } M &= \max(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N + 1) \\ m &= \min(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N - 1) \end{aligned}$$

Alors,  $M$  majore  $(u_n)$  et  $m$  minore  $(u_n)$  □

*Lemme 1.18.* Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy telle qu'il existe une sous suite convergente  $(u_{\varphi(n)})$  ou  $(v_n)$ , alors  $(u_n)$  converge.

*Démonstration.* □

*Théorème 1.19* (Théorème de Cauchy). Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ .

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow (u_n) \text{ est de Cauchy}$$



# Chapitre 2

## Séries

### 2.1 Définition et premières propriétés

*Definition 2.1.* Une série est une suite  $(S_n)$  telle qu'il existe  $(u_n)$  avec  $S_n = \sum_{h=0}^n u_h$ . Dans ce cas,  $u_k$  est appelé terme général de la série.

*Remarque.* Une série peut aussi être définie avec  $k > 0$ .

*Notation.*  $(S_n)$  est notée  $\sum u_k$  ou  $\sum_{k>x} u_k$  où  $x$  est le premier indice pris en compte pour le calcul de  $(S_n)$ .

Deux problèmes se posent alors :

- Les séries convergent-elles ? Lorsque c'est le cas, on note  $\sum_{k=x}^{\infty} = \lim_{+\infty} S_n$
- Si elles convergent, comment calculer leurs limites ?

*Propriété 2.2.*  $\sum u_k$  converge si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall p, q, \quad q > p \geq N, \left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| < \varepsilon$$

*Démonstration.*  $S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^q u_k$  puis utilisation du critère de Cauchy. □

*Propriété 2.3.* Si  $\sum u_k$  converge, alors  $u_k \rightarrow 0$ .

*Remarque.* La propriété 2.3 s'utilise plutôt sous la forme  $u_k \not\rightarrow 0$  alors  $\sum u_k$  diverge. Attention : la réciproque est fausse, on peut avoir  $u_k \rightarrow 0$  et  $\sum u_k$  divergent.

### 2.2 Séries à termes positifs

On cherche à trouver des critères permettant d'assurer la convergence d'une série.

Dans cette section, on supposera que  $(u_n)$  est une suite telle que pour tout  $n$ ,  $u_n \geq 0$

*Remarque.* Pour toute série  $(S_n)$ , on a  $S_{k+1} - S_k = u_{k+1} \geq 0$  donc  $S_{k+1} \geq S_k$  pour tout  $k$ . Donc  $(S_n)$  est croissante. Pour que cette série converge, il suffit donc qu'elle soit majorée.

*Propriété 2.4* (Comparaison série-intégrale). Soit  $f = ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, décroissante et positive.

Alors,  $(S_n) = \sum_k f(k)$  converge si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$  existe.

*Démonstration.* □

*Propriété 2.5* (Critères de convergence). Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites positives. Soit  $i \in \mathbb{N}$

1. Si il existe  $i$  tel que  $0 \leq u_i \leq v_i$  alors si  $\sum_{k=i}^{\infty} v_k$  converge alors  $\sum_{k=i}^{\infty} u_k$  converge. (COMPARAISON)
2. Si  $u_n = o(v_n)$  alors si  $\sum v_k$  converge,  $\sum u_k$  converge. (NÉGLIGEABILITÉ)
3. Si  $u_n \sim_{\infty} v_n$  et si  $\sum v_k$  converge, alors  $\sum u_k$  converge. (ÉQUIVALENCE)

*Propriété 2.6* (Règle de Riemann). Soit  $(u_n)$  positive telle qu'il existe  $\alpha > 1$  tel que

$$n^\alpha u_n \rightarrow 0$$

alors  $\sum u_k$  converge.

*Propriété 2.7* (Critères de Cauchy et d'Alembert). Soit  $(u_n)$  une suite positive. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l$  (d'Alembert) ou que  $\sqrt[n]{u_n} = u_n^{\frac{1}{n}} = l$  (Cauchy) Alors,

- Si  $l < 1$ , la série  $\sum u_k$  converge.
- Si  $l > 1$ , la série  $\sum u_k$  diverge.

*Remarque.* Si  $l = 1$ , on ne peut rien conclure.

*Remarque.* Il faut vraiment calculer la valeur de la limite.

## 2.3 Séries à termes quelconques

**Problème :**  $\sum_{k=0}^n u_k$  n'est plus croissante donc tous les critères tombent à l'eau...

### 2.3.1 Convergence absolue

*Théorème 2.8.* Si  $\sum |u_k|$  converge, alors  $\sum u_k$  converge. Attention, la réciproque est fausse.

*Définition 2.9.*

1. Une série telle que  $\sum |u_k|$  converge est dite "absolument" convergente.
2. Une série convergente mais non absolument convergente est dite "semi-convergente".

### 2.3.2 Critère d'Abel

Soit  $(S_n)$  une série de la forme  $\sum u_k v_k$  où  $(u_n)$  et  $(v_n)$  appartiennent à  $\mathbb{K}$ .

*Lemme 2.10* (Transformation d'Abel). *Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  appartenant à  $\mathbb{K}$ . On pose  $B_n = \sum_{k=0}^n v_k$  alors on a :*

$$S_n = u_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) B_k$$

*Remarque.* Cette égalité est appelée "sommation par partie".

*Théorème 2.11* (Critère d'abel). *Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suite stelles que :*

1.  $B_n = \sum_{k=0}^n v_k$  est bornée.
2. La série  $\sum |u_{n+1} - u_n|$  converge.
3.  $u_n \rightarrow 0$

*Alors  $\sum u_k v_k$  converge.*

*Remarque.*

*Corollaire 2.12.* *Si  $(u_n)$  est monotone,  $u_n \rightarrow 0$  et  $n$  bornée, alors  $\sum u_n v_n$  converge.*

*Corollaire 2.13* (Critère de Liebnitz). *Si on a une suite  $(u_n)$  décroissante et tendant vers 0, alors la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge.*