École Polytechnique Universitaire de Montpellier
Département PEIP

Cours de mathématiques

Julien Faucher
10 décembre 2014

HLMA319

ÉCOLE POLYTECHNIQUE UNIVERSITAIRE DE MONTPELLIER
E-Mail : julien.faucher@gmx.fr

Table des matières

Introduction – Définition d'une limite

On se demande quel est le sens de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Considérons une fonction f continue quelconque. Si $]l - \epsilon; l + \epsilon[$ est un intervalle centré en l, il existe $]a - \delta; a + \delta[$ tel que si $x \in \,]a - \delta; a + \delta[$, $f(x) \in \,]l - \epsilon; l + \epsilon[$

Définition : Soit $f \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la limite de f quand x tend vers a si :

$$\forall \epsilon > 0 \; , \exists \; \delta > 0 \text{ tq si } x \in \,]a - \delta; a + \delta[\; , f(x) \in \,]l - \epsilon; l + \epsilon[$$

Notation : On peut écrire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ainsi : $\lim\limits_{a} f(x) = l$

Remarque : Cela ne fonctionne que pour $l \in \mathbb{R}$.

Remarque : On a :

$$\begin{aligned}
& x \in \,]a - \delta; a + \delta[\\
\Leftrightarrow \quad & a - \delta < x < a + \delta \\
\Leftrightarrow \quad & -\delta < x - a < \delta \\
\Leftrightarrow \quad & |x - a| < \delta
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, \; |x - a| < \delta, \; |f(x) - l| < \epsilon$$

ainsi que les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_{a} f = +_{\infty} & \text{si} & \forall A > 0, \; \exists \delta > 0 \; \text{ tq } \; \forall x, \; |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A \\
\lim\limits_{+\infty} f = l & \text{si} & \forall \epsilon > 0, \; \exists B > 0 \; \text{ tq } \; \forall x, x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \\
\lim\limits_{+\infty} f = +_{\infty} & \text{si} & \forall A > 0, \; \exists B > 0 \; \text{ tq } \; \forall x, x < B \Rightarrow f(x) > A
\end{array}$$

Chapitre 0

Comparaison de fonctions et développements limités

0.1 Négligeabilité et équivalence

Définition (Abus) : Soit $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a est un intervalle de la forme $]a-\delta; a+\delta[$ ou $]a-\delta; a+\delta[\ /\{0\}$ avec $\delta > 0$

Définition : Négligeabilité Soit $f, g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On dit que f est négligeable devant g en $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\epsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ pour $x \in \mathrm{V}$
- $\lim\limits_{a} \epsilon(x) = 0$

Notation : Si f est négligeable devant g, on note $f \ll_a g$ (Physique) ou $f = o_a(g)$ (Maths)

Remarque : Si g ne s'annule pas sur V, $f \ll_a g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple :

Définition : Équivalence Soit $f, g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f est équivalente à g en a si on a :

$$f(x) = g(x) + o_a(g(x))$$

C'est à dire si $f = g+$ quelque chose de négligeable devant g.

Remarque :

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) + o_a(g(x)) \\
\Leftrightarrow f(x) &= g(x) + g(x)\epsilon(x) \\
\Leftrightarrow f(x) &= g(x)(1+\epsilon(x)) \\
\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= 1+\epsilon(x) \\
\Leftrightarrow \lim_a \frac{f(x)}{g(x)} &= 1
\end{aligned}$$

itemize Les deux dernières notations ne sont valides que si $g \neq 0$ au voisinage de a. ϵ est une fonction telle que $\lim_a \epsilon = 0$

Notation : f est équivalente à g en a s'écrit $f \sim_a g$

Remarque : Si $f \sim_a g$ et $\lim_a g = l$ alors,

$$\begin{aligned}
\lim_a f(x) &= \lim_a g(x) * \lim_a (1+\epsilon(x)) \\
&= \lim_a g(x) \\
&= l
\end{aligned}$$

Proposition : Si $f \sim_a g$ et si $\lim_a g$ existe, alors $\lim_a f = \lim_a g$. <u>Attention : la réciproque est fausse !</u>

Démonstration :

Exemple :

0.2 Développements limités

Idée : On va faire l'approximation de fonctions par des polynômes.

Définition : Soit $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.
On dira que f admet un développement limité d'ordre n en a (noté $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme P de degré n tel qu'au voisinage de a,

$$f(x) = P(x-a) + o_a((x-a)^n)$$

Remarque : On a $f(x+a) = P(x) + o_0(x^n)$ donc on fera les développements limités en 0

Propriété : Si f admet un $DL_n(0)$ alors, de développement limité est unique.

Démonstration :

Exemple :

Théorème : Formule de Taylor Soit f définie au voisinage de 0 et de classe $\mathscr{C}^n$ (n fois dérivable avec $f^{(n)} = \frac{d^n f(0)}{dx^n}$ continue). On a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k \right) + o(x^n)$$

Démonstration : Voire Wikipédia.

Corollaire : Si f est $\mathscr{C}^n$ alors elle admet un $DL_n(0)$

Exemple : Posons $f(x) = e^x$. $\forall n, f(x)^{(n)} = e^x$ et $f(0)^{(n)} = 1$. On a donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n + o(x^n)$$

Soit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Remarque : C'est LA bonne définition de e^n.

Exemple :

Remarque : Taylor c'est bien, mais parfois très complexe (par exemple le $DL_{10}(0)$ de $\frac{1+x}{1-x^2}$

Remarque : Un développement limité est une égalité et non une approximation.

Propriété : Opérations sur les DL : Soit f et g deux fonctions. Admettons un $DL_n(0)$ tel que :

- $f(x) = P(x) + o(x^n)$
- $g(x) = Q(x) + o(x^n)$

Avec $\deg P = \deg Q = n$. On a alors :

Addition : $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$

Produit : $f(x) * g(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(x)$ est le polynôme $P(x)Q(x)$ tronqué à l'ordre n

Composition : $f \circ g(x) = T(x) + o(n)$ où $T(x)$ est le polynôme $P(x) \circ Q(x)$ ($\deg R(x) = n^2$) tronqué au rang n.

Dérivation : Si f est dérivable, $f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$

Intégration : Si f est continue, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x P(t)dt + o(x^{n+1})$

Propriété : Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ est un $DL_n(0)$ de f avec $\deg P = n$, alors $P \sim_0 f$

Chapitre 1

Suites

Dans ce chapitre, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$

1.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$.

Définition : On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant / minorant de A si $\forall x \in \mathrm{A}$, $x \leq M$ / $x \geq M$

Définition : On dit que M est une borne supérieure/inférieure de A si :
- M est majorant/minorant de A
- Si M' est majorant/minorant de A, on doit avoir $M' > M$ / $M' < M$. C'est à dire que M doit être le plus petit/grand majorant/minorant de A

Propriété : Si A admet une borne supérieure ou inférieure, cette borne est unique.

Démonstration : Soient M_1 et M_2 deux bornes supérieures de A.
Alors M_1 majore A $\Rightarrow$ $M_1 \geq M_2$
M_2 majore A $\Rightarrow$ $M_2 \geq M_1$
Donc $M_1 = M_2$.

Notation : On note une borne supérieure $\sup \mathrm{A}$ et une borne inférieure $\inf \mathrm{A}$.

Remarque : On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$
Alors on a $A = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. Dans ce cas, A n'a pas de bornes dans $\mathbb{Q}$. En effet, si ces bornes existent, elles valent $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. C'est une des raisons de la création de l'ensemble des réels.

Axiome : Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A} \neq \emptyset$ et A majorée. Alors $\sup \mathrm{A} \in \mathbb{R}$ existe.

1.2 Suites

Définition : Une suite de $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{K} \\ n & \to & u(n) \end{array}$$

Notation : $u(n)$ est noté u_n et la suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement u_n.

Exemple : $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Remarque : On peut dire qu'une suite est une restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$

Axiome : Récurrence Soit $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si
- il existe x tel que $P(x)$ est vérifiée,
- pour tout $n > x$, $P(n)$ nous permet de déduire $P(n+1)$

alors, $P(n)$ est vérifiée pour tout $n > x$.

Propriété :

Démonstration :

Définition : Monotonie Pour $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$, soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$, alors (u_n) est croissante si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \Rightarrow u_p \leq u_q$$