École Polytechnique Universitaire de Montpellier
Département PEIP

Cours de mathématiques

Julien Faucher

4 janvier 2015

HLMA319

ÉCOLE POLYTECHNIQUE UNIVERSITAIRE DE MONTPELLIER
E-Mail : julien.faucher@gmx.fr

Table des matières

Introduction – Définition d'une limite

On se demande quel est le sens de $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Considérons une fonction f continue quelconque. Si $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ est un intervalle centré en l, il existe $]a-\delta; a+\delta[$ tel que si $x \in]a-\delta; a+\delta[$, $f(x) \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$

Definition -1.1. Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la limite de f quand x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0\ , \exists\ \delta > 0 \text{ tq si } x \in]a-\delta; a+\delta[\ , f(x) \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$$

Notation. On peut écrire $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ainsi : $\lim_{a} f(x) = l$

Remarque. Cela ne fonctionne que pour $l \in \mathbb{R}$.

Remarque. On a :

$$\begin{aligned} & x \in]a-\delta; a+\delta[\\ \Leftrightarrow\ & a-\delta < x < a+\delta \\ \Leftrightarrow\ & -\delta < x-a < \delta \\ \Leftrightarrow\ & |x-a| < \delta \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x,\ |x-a| < \delta,\ |f(x)-l| < \varepsilon$$

ainsi que les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lim_{a} f = +\infty & \text{si} & \forall A > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tq } \ \forall x,\ |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > A \\ \lim_{+\infty} f = l & \text{si} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ \text{ tq } \ \forall x, x < B \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \\ \lim_{+\infty} f = +\infty & \text{si} & \forall A > 0,\ \exists B > 0 \ \text{ tq } \ \forall x, x < B \Rightarrow f(x) > A \end{array}$$

Chapitre 0

Comparaison de fonctions et développements limités

0.1 Négligeabilité et équivalence

Definition 0.1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a est un intervalle de la forme $]a-\delta; a+\delta[$ ou $]a-\delta; a+\delta[\ /\{0\}$ avec $\delta > 0$

Definition 0.2 (Négligeabilité)**.** Soit $f, g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On dit que f est négligeable devant g en $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ pour $x \in \mathrm{V}$
- $\lim\limits_{a} \varepsilon(x) = 0$

Notation. Si f est négligeable devant g, on note $f \ll_a g$ (Physique) ou $f = o_a(g)$ (Maths)

Remarque. Si g ne s'annule pas sur V, $f \ll_a g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple.

Definition 0.3 (Équivalence)**.** Soit $f, g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f est équivalente à g en a si on a :

$$f(x) = g(x) + o_a(g(x))$$

C'est à dire si $f = g+$ quelque chose de négligeable devant g.

Remarque.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + o_a(g(x)) \\ \Leftrightarrow f(x) & = & g(x) + g(x)\varepsilon(x) \\ \Leftrightarrow f(x) & = & g(x)(1+\varepsilon(x)) \\ \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} & = & 1+\varepsilon(x) \\ \Leftrightarrow \lim\limits_a \dfrac{f(x)}{g(x)} & = & 1 \end{array}$$

itemize Les deux dernières notations ne sont valides que si $g \neq 0$ au voisinage de a. ε est une fonction telle que $\lim\limits_a \varepsilon = 0$

Notation. f est équivalente à g en a s'écrit $f \sim_a g$

Remarque. Si $f \sim_a g$ et $\lim\limits_a g = l$ alors,

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_a f(x) & = & \lim\limits_a g(x) * \lim\limits_a (1+\varepsilon(x)) \\ & = & \lim\limits_a g(x) \\ & = & l \end{array}$$

Proposition 0.4. *Si $f \sim_a g$ et si $\lim\limits_a g$ existe, alors $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$. <u>Attention : la réciproque est fausse !</u>*

Démonstration. □

Exemple.

0.2 Développements limités

Idée. On va faire l'approximation de fonctions par des polynômes.

Definition 0.5. Soit $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.
On dira que f admet un développement limité d'ordre n en a (noté $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme P de degré n tel qu'au voisinage de a,

$$f(x) = P(x-a) + o_a((x-a)^n)$$

Remarque. On a $f(x+a) = P(x) + o_0(x^n)$ donc on fera les développements limités en 0

Propriété 0.6. Si f admet un $DL_n(0)$ alors, de développement limité est unique.

Démonstration. □

Exemple.

Théorème 0.7. *Formule de Taylor Soit f définie au voisinage de 0 et de classe $\mathscr{C}^n$ (n fois dérivable avec $f^{(n)} = \frac{d^n f(0)}{dx^n}$ continue). On a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k \right) + o(x^n)$$

Démonstration. Voir Wikipédia. □

Corollaire 0.8. *Si f est $\mathscr{C}^n$ alors elle admet un $DL_n(0)$*

Exemple. Posons $f(x) = e^x$. $\forall n, f(x)^{(n)} = e^x$ et $f(0)^{(n)} = 1$. On a donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n + o(x^n)$$

Soit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Remarque. C'est <u>LA</u> bonne définition de e^n.

Exemple.

Remarque. Taylor c'est bien, mais parfois très complexe (par exemple le $DL_{10}(0)$ de $\frac{1+x}{1-x^2}$

Remarque. Un développement limité est une <u>égalité</u> et non une approximation.

Propriété 0.9 (Opérations sur les DL :)**.** Soit f et g deux fonctions. Admettons un $DL_n(0)$ tel que :
- $f(x) = P(x) + o(x^n)$
- $g(x) = Q(x) + o(x^n)$

Avec $\deg P = \deg Q = n$. On a alors :

Addition : $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$

Produit : $f(x) * g(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(x)$ est le polynôme $P(x)Q(x)$ tronqué à l'ordre n

Composition : $f \circ g(x) = T(x) + o(n)$ où $T(x)$ est le polynôme $P(x) \circ Q(x)$ ($\deg R(x) = n^2$) tronqué au rang n.

Dérivation : Si f est dérivable, $f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$

Intégration : Si f est continue, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x P(t)dt + o(x^{n+1})$

Propriété 0.10. Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ est un $DL_n(0)$ de f avec $\deg P = n$, alors $P \sim_0 f$

Chapitre 1

Suites

Dans ce chapitre, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$

1.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$.

Definition 1.1. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant / minorant de $\mathcal{A}$ si $\forall x \in \mathcal{A}$, $x \leq M$ / $x \geq M$

Definition 1.2. On dit que M est une borne supérieure/inférieure de $\mathcal{A}$ si :
- M est majorant/minorant de $\mathcal{A}$
- Si M' est majorant/minorant de $\mathcal{A}$, on doit avoir $M' > M$ / $M' < M$. C'est à dire que M doit être le plus petit/grand majorant/minorant de $\mathcal{A}$

Propriété 1.3. Si $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure ou inférieure, cette borne est unique.

Démonstration. Soient M_1 et M_2 deux bornes supérieures de $\mathcal{A}$.
Alors M_1 majore $\mathcal{A} \Rightarrow M_1 \geq M_2$
M_2 majore $\mathcal{A} \Rightarrow M_2 \geq M_1$
Donc $M_1 = M_2$. □

Notation. On note une borne supérieure $\sup \mathcal{A}$ et une borne inférieure $\inf \mathcal{A}$.

Remarque. On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$
Alors on a $A = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. Dans ce cas, $\mathcal{A}$ n'a pas de bornes dans $\mathbb{Q}$. En effet, si ces bornes existent, elles valent $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. C'est une des raisons de la création de l'ensemble des réels.

Axiome 1.4. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\mathcal{A}$ majorée. Alors $\sup \mathcal{A} \in \mathbb{R}$ existe.*

1.2 Suites

Definition 1.5. Une suite de $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{K} \\ n & \rightarrow & u(n) \end{array}$$

Notation. $u(n)$ est noté u_n et la suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement u_n.

$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Remarque. On peut dire qu'une suite est une restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$

Axiome 1.6 (Récurrence)**.** *Soit $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si*
- *il existe x tel que $P(x)$ est vérifiée,*
- *pour tout $n > x$, $P(n)$ nous permet de déduire $P(n+1)$*

alors, $P(n)$ est vérifiée pour tout $n > x$.

Propriété 1.7.

Démonstration. □

Definition 1.8 (Monotonie)**.** Pour $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$, soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$, alors (u_n) est croissante si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \Rightarrow u_p \leq u_q$$

1.3 Convergence

Definition 1.9. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ et $l \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) tend vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Definition 1.10. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que (u_n) tend vers l'infini si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, n > N, u_n > A$$

Definition 1.11. On dit que (u_n) converge si (u_n) admet une limite dans $\mathbb{K}$. En particulier, une suite tendant vers l'infini diverge[1].

Notation.

$$\begin{aligned}
&\lim u_n = l \\
\Leftrightarrow &\lim_{+\infty} u_n = l \\
\Leftrightarrow &\lim_{n\to+\infty} u_n = l \\
\Leftrightarrow &u_n \to l \\
\Leftrightarrow &u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l
\end{aligned}$$

Théorème 1.12. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ telle que (u_n) est majorée et croissante. Alors (u_n) converge et $\lim u_n = \sup u_n$ $(n \in \mathbb{N})$*

Application (Suites Adjacentes). Soit (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathbb{R}$ telles que :

1. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
2. $\lim v_n - u_n = 0$

Alors $\forall n, u_n > v_n$ et (v_n) et (u_n) convergent vers la même limite.

1. Ne converge pas

1.4 Suites extraites, Bolzano-Weierstrass

Definition 1.13. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}$. On dit que (v_n) est extraite de (u_n) s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout n, $v_n = u_{\varphi(n)}$

Notation. $v_k = u_{n_k}$. On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n).

Remarque.

1. Toute suite (u_n) est extraite d'elle même. Il suffit de prendre $\varphi(n) = n$.
2. Soit $(u_n) = (-1)^n$ et $\varphi(n) = 2n$. On a alors $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n} = 1$.
   Ou, si $\varphi(n) = 2n+1$, $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n+1} = -1$.

Lemme 1.14. *Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$. Alors : $u_n \to l \Leftrightarrow$ pour toute suite (v_n) extraite de (u_n), $v_n \to l$*

Démonstration. □

.

Théorème 1.15 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit (u_n) une suite bornée (minorée et majorée). Il existe au moins une suite (v_n) extraite de (u_n) convergente.*

1.5 Le critère de Cauchy

Interêt. Le critère de Cauchy permet de montrer qu'une suite converge sans connaître sa limite et même sans savoir à priori s'il y en a une.

Definition 1.16. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists N \text{ tq } \forall\, p,\, q \text{ si } p,\, q > N,\, |u_p - i_q| < \varepsilon$$

Propriété 1.17. Si (u_n) est convergente, (u_n) est de Cauchy

Remarque. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, prenons $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ tq $\alpha_n \to \sqrt{2}$. Alors, (α_n) est de Cauchy mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ donc (α_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ et la réciproque de Cauchy est fausse dans $\mathbb{Q}$. C'est d'ailleurs la raison historique de la création de $\mathbb{R}$

Lemme 1.18. *Toute suite de Cauchy est bornée*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy. On prend $\varepsilon = 1$. Il existe N tel que pout p, $q \geq N$, $|u_p - u_q| < 1$ et notamment si $q = N$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } M &= \max(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, u_N + 1) \\ m &= \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, u_N - 1) \end{aligned}$$

Alors, M majore (u_n) et m minore (u_n) □

Lemme 1.19. *Soit (u_n) une suite de Cauchy telle qu'il existe une sous suite convergente $(u_{\varphi(n)})$ ou (v_n), alors (u_n) converge.*

Démonstration. □

Théorème 1.20 (Théorème de Cauchy)**.** *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$.*

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow (u_n) \text{ est de Cauchy}$$

Chapitre 2

Séries

2.1 Définition et premières propriétés

Definition 2.1. Une série est une suite (S_n) telle qu'il existe (u_n) avec $S_n = \sum\limits_{h=0}^{n} u_k$. Dans ce cas, u_k est appelé terme général de la série.

Remarque. Une série peut aussi être définie avec $k > 0$.

Notation. (S_n) est notée $\sum u_k$ ou $\sum\limits_{k>x} u_k$ où x est le premier indice pris en compte pour le calcul de (S_n).

Deux problèmes se posent alors :

- Les séries convergent-elles ? Lorsque c'est le cas, on note $\sum\limits_{k=x}^{\infty} = \lim\limits_{+\infty} S_n$
- Si elles convergent, comment calculer leurs limites ?

Propriété 2.2. $\sum u_k$ converge si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall p, q, \quad q > p \geq N, \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right| < \varepsilon$$

Démonstration. $S_q - S_p = \sum\limits_{k=p+1}^{q} u_k$ puis utilisation du critère de Cauchy. □

Propriété 2.3. Si $\sum u_k$ converge, alors $u_k \to 0$.

Remarque. La propriété 2.3 s'utilise plutôt sous la forme $u_k \nrightarrow 0$ alors $\sum u_k$ diverge. Attention : la réciproque est fausse, on peut avoir $u_k \to 0$ et $\sum u_k$ divergent.

2.2 Séries à termes positifs

On cherche à trouver des critères permettant d'assurer la convergence d'une série.

Dans cette section, on supposera que (u_n) est une suite telle que pour tout n, $u_n \geq 0$

Remarque. Pour toute série (S_n), on a $S_{k+1} - S_k = u_{k+1} \geq 0$ donc $S_{k+1} \geq S_k$ pour tout k. Donc (S_n) est croissante. Pour que cette série converge, il suffit donc qu'elle soit majorée.

Propriété 2.4 (Comparaison série-intégrale)**.** Soit $f =]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, décroissante et positive. Alors, $(S_n) = \sum\limits_k f(k)$ converge si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ existe.

Démonstration. □

Propriété 2.5 (Critères de convergence)**.** Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives. Soit $i \in \mathbb{N}$

1. Si il existe i tel que $0 \geq u_i \geq v_i$ alors si $\sum\limits_{k=i}^{\infty} v_k$ converge alors $\sum\limits_{k=i}^{\infty} u_k$ converge. (Comparaison)
2. Si $u_n = o(v_n)$ alors si $\sum v_k$ converge, $\sum u_k$ converge. (Négligeabilité)
3. Si $u_n \sim_\infty v_n$ et si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge. (Équivalence)

Propriété 2.6 (Règle de Riemann)**.** Soit (u_n) positive telle qu'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$n^\alpha u_n \to 0$$

alors $\sum u_k$ converge.

Propriété 2.7 (Critères de Cauchy et d'Alembert)**.** Soit (u_n) une suite positive. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ (d'Alembert) ou que $\sqrt[n]{u_n} = u_n^{\frac{1}{n}} = l$ (Cauchy) Alors,
- Si $l < 1$, la série $\sum u_k$ converge.
- Si $l > 1m$, la série $\sum u_k$ diverge.

Remarque. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Remarque. Il faut vraiment calculer la valeur de la limite.

2.3 Séries à termes quelconques

Problème : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ n'est plus croissante donc tous les critères tombent à l'eau...

2.3.1 Convergence absolue

Théorème 2.8. *Si $\sum |u_k|$ converge, alors $\sum u_k$ converge. Attention, la réciproque est fausse.*

Definition 2.9.

1. Une série telle que $\sum |u_k|$ converge est dite "absolument" convergente.
2. Une série convergente mais non absolument convergente est dite "semi-convergente".

2.3.2 Critère d'Abel

Soit (S_n) une série de la forme $\sum u_k v_k$ où (u_n) et (v_n) appartiennent à $\mathbb{K}$.

Lemme 2.10 (Transformation d'Abel)**.** *Soient* (u_n) *et* (v_n) *appartenant à* $\mathbb{K}$*. On pose* $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ *alors on a :*

$$S_n = u_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) B_k$$

Remarque. Cette égalité est appelée "sommation par partie".

Théorème 2.11 (Critère d'abel)**.** *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites telles que :*

1. $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ *est bornée.*
2. *La série* $\sum |u_{n+1} - u_n|$ *converge.*
3. $u_n \to 0$

Alors $\sum u_k v_k$ *converge.*

Remarque.

Corollaire 2.12. *Si* (u_n) *est monotone,* $u_n \to 0$ *et* $\sum B_n$ *bornée, alors* $\sum u_n v_n$ *converge.*

Corollaire 2.13 (Critère de Liebnitz)**.** *Si on a une suite* (u_n) *décroissante et tendant vers 0, alors la série* $\sum (-1)^n u_n$ *converge.*

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

3.1 Norme infinie

Soit I un intervalle de $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B}(\mathrm{I}) = \{f : \mathrm{I} \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ bornée}\}$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ bornées. On remarque que $\mathcal{B}(\mathrm{I})$ est un espace vectoriel. On rappelle que "*f est bornée*" signifie qu'il existe une valeur M telle que $\forall x \in \mathrm{I}, |f(x)| < M$

Definition 3.1 (Norme infinie)**.** La norme infinie de $f \in \mathcal{B}(\mathrm{I})$ est la valeur maximale que prend la valeur absolue de $f(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$. Elle est notée

$$||f||_\infty = \sup_{x \in \mathrm{I}} |f(x)|$$

Propriété 3.2.

1. $||f(x)||_\infty = 0$ signifie que, pour tout x appartenant à I, $f(x) = 0$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $||\lambda f(x)||_\infty = |\lambda| * ||f(x)||_\infty$.
3. $||f \circ g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$

Remarque. La norme infinie dépend de l'ensemble I su lequel on travaille. S'il y a une ambiguïté, on écrira $||f(x)||_{\infty,\mathrm{I}}$.

Exemple. Si J appartient à I, alors $||f(x)||_{\infty,\mathrm{J}} \leq ||f(x)||_{\infty,\mathrm{I}}$

3.2 Convergence simple et convergence uniforme

Pour un intervalle I quelconque appartenant à $\mathbb{K}$, on se donne une fonction f telle que :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{f}: & \mathrm{I} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \rightarrow & f_n(x) \end{array}$$

Definition 3.3 (Convergence simple)**.** On dit que la suite (f_n) converge <u>simplement</u> vers $f : \mathrm{I} \rightarrow \mathbb{K}$ si, pour tout x, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Definition 3.4 (Convergence uniforme)**.** On dit que (f_n) converge uniformément si $f_n - f$ est bornée et si :

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

Remarque. Pour tout x appartenant à I :

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

Donc, si on a convergence uniforme, alors on a convergence simple.

Note (Explications sur la convergence uniforme)*.* L'expression donnée ci-dessous n'est pas toujours très claire. Pour détailler, on peut dire que :

- Nous sommes en présence de deux variables : n et x.
- Lorsque l'on travaille sur la fonction $f(x)$, la variable est x. Lorsque l'on travaille sur la suite (f_n), la variable est n.
- La notation $f(x)$ désigne $f_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

Si l'on explicite au maximum la définition 3.4 de la convergence uniforme, on obtient ceci :

On dit que la suite $(f_n(x))$ converge uniformément si on a :

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left\| f_n(x) - \lim_{n\to\infty} [f_n(x)] \right\|_{\infty,\mathrm{I}} \right] = 0$$

Dans cette expression, la valeur de x est en fait fixée. En effet, l'utilisation de la norme infinie force une (ou des) valeurs de x pour lesquelles l'expression $f_n - f$ est maximale.

La convergence uniforme montre que, pour une suite de fonction donnée et pour une valeur de x telle que $f_n(x) - f_\infty(x)$ est maximal, lorsque n tend vers l'infini, f_n tend vers f_∞, indépendamment de x.

On peut donc dire que la convergence uniforme est la généralisation de la convergence simple à un intervalle I donné.

Note (Détermination d'une convergence uniforme)*.* Pour déterminer si une suite de fonction converge uniformément, il faut :

1. Trouver une borne maximale, notée $\varepsilon(n)$ à l'expression $|f_n(x) - f(x)|$. Cette borne doit dépendre de n
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$ indépendamment des valeurs de x

Propriété 3.5 (Critère de Cauchy uniforme)**.** (f_n) converge uniformément si elle est uniformément de Cauchy

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall p,\, q\,,\, p, q \geq N \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$$