École Polytechnique Universitaire de Montpellier
Département PEIP

Cours de mathématiques

Julien Faucher
20 décembre 2014

HLMA319

ÉCOLE POLYTECHNIQUE UNIVERSITAIRE DE MONTPELLIER
E-Mail : julien.faucher@gmx.fr

Table des matières

Introduction – Définition d'une limite

On se demande quel est le sens de $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Considérons une fonction f continue quelconque. Si $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ est un intervalle centré en l, il existe $]a - \delta; a + \delta[$ tel que si $x \in \,]a - \delta; a + \delta[$, $f(x) \in \,]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

Definition -1.1. Soit $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la limite de f quand x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \ \delta > 0 \text{ tq si } x \in \,]a - \delta; a + \delta[\ , f(x) \in \,]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$$

Notation. On peut écrire $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ainsi : $\lim_{a} f(x) = l$

Remarque. Cela ne fonctionne que pour $l \in \mathbb{R}$.

Remarque. On a :

$$\begin{aligned} & x \in \,]a - \delta; a + \delta[\\ \Leftrightarrow \quad & a - \delta < x < a + \delta \\ \Leftrightarrow \quad & -\delta < x - a < \delta \\ \Leftrightarrow \quad & |x - a| < \delta \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, \ |x - a| < \delta, \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

ainsi que les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lim_{a} f = +\infty & \text{si} & \forall A > 0, \ \exists \delta > 0 \ \text{ tq } \ \forall x, \ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A \\ \lim_{+\infty} f = l & \text{si} & \forall \varepsilon > 0, \ \exists B > 0 \ \text{ tq } \ \forall x, x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \lim_{+\infty} f = +\infty & \text{si} & \forall A > 0, \ \exists B > 0 \ \text{ tq } \ \forall x, x < B \Rightarrow f(x) > A \end{array}$$

Chapitre 0

Comparaison de fonctions et développements limités

0.1 Négligeabilité et équivalence

Definition 0.1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a est un intervalle de la forme $]a-\delta; a+\delta[$ ou $]a-\delta; a+\delta[\ /\{0\}$ avec $\delta > 0$

Definition 0.2 (Négligeabilité). Soit $f, g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On dit que f est négligeable devant g en $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ pour $x \in \mathrm{V}$
- $\lim\limits_{a} \varepsilon(x) = 0$

Notation. Si f est négligeable devant g, on note $f \ll_a g$ (Physique) ou $f = o_a(g)$ (Maths)

Remarque. Si g ne s'annule pas sur V, $f \ll_a g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple.

Definition 0.3 (Équivalence). Soit $f, g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f est équivalente à g en a si on a :

$$f(x) = g(x) + o_a(g(x))$$

C'est à dire si $f = g+$ quelque chose de négligeable devant g.

Remarque.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + o_a(g(x)) \\ \Leftrightarrow f(x) &= g(x) + g(x)\varepsilon(x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= g(x)(1+\varepsilon(x)) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= 1+\varepsilon(x) \\ \Leftrightarrow \lim_a \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 \end{aligned}$$

itemize Les deux dernières notations ne sont valides que si $g \neq 0$ au voisinage de a. ε est une fonction telle que $\lim\limits_a \varepsilon = 0$

Notation. f est équivalente à g en a s'écrit $f \sim_a g$

Remarque. Si $f \sim_a g$ et $\lim\limits_a g = l$ alors,

$$\begin{aligned} \lim_a f(x) &= \lim_a g(x) * \lim_a (1+\varepsilon(x)) \\ &= \lim_a g(x) \\ &= l \end{aligned}$$

Proposition 0.4. *Si $f \sim_a g$ et si $\lim\limits_a g$ existe, alors $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$. Attention : la réciproque est fausse !*

Démonstration. □

Exemple. .

0.2 Développements limités

Idée. On va faire l'approximation de fonctions par des polynômes.

Definition 0.5. Soit $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.
On dira que f admet un développement limité d'ordre n en a (noté $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme P de degré n tel qu'au voisinage de a,

$$f(x) = P(x-a) + o_a((x-a)^n)$$

Remarque. On a $f(x+a) = P(x) + o_0(x^n)$ donc on fera les développements limités en 0

Propriété 0.6. Si f admet un $DL_n(0)$ alors, de développement limité est unique.

Démonstration. □

Exemple.

Théorème 0.7. *Formule de Taylor Soit f définie au voisinage de 0 et de classe $\mathscr{C}^n$ (n fois dérivable avec $f^{(n)} = \frac{d^n f(0)}{dx^n}$ continue). On a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k \right) + o(x^n)$$

Démonstration. □

Voire Wikipédia.

Corollaire 0.8. *Si f est $\mathscr{C}^n$ alors elle admet un $DL_n(0)$*

Exemple. Posons $f(x) = e^x$. $\forall n, f(x)^{(n)} = e^x$ et $f(0)^{(n)} = 1$. On a donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n + o(x^n)$$

Soit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Remarque. C'est <u>LA</u> bonne définition de e^n.

Exemple.

Remarque. Taylor c'est bien, mais parfois très complexe (par exemple le $DL_{10}(0)$ de $\frac{1+x}{1-x^2}$

Remarque. Un développement limité est une <u>égalité</u> et non une approximation.

Propriété 0.9 (Opérations sur les DL :). Soit f et g deux fonctions. Admettons un $DL_n(0)$ tel que :
- $f(x) = P(x) + o(x^n)$
- $g(x) = Q(x) + o(x^n)$

Avec $\deg P = \deg Q = n$. On a alors :

Addition : $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$

Produit : $f(x) * g(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(x)$ est le polynôme $P(x)Q(x)$ tronqué à l'ordre n

Composition : $f \circ g(x) = T(x) + o(n)$ où $T(x)$ est le polynôme $P(x) \circ Q(x)$ $(\deg R(x) = n^2)$ tronqué au rang n.

Dérivation : Si f est dérivable, $f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$

Intégration : Si f est continue, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x P(t)dt + o(x^{n+1})$

Propriété 0.10. Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ est un $DL_n(0)$ de f avec $\deg P = n$, alors $P \sim_0 f$

Chapitre 1

Suites

Dans ce chapitre, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$

1.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$.

Definition 1.1. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant / minorant de $\mathcal{A}$ si $\forall x \in \mathcal{A}$, $x \leq M$ / $x \geq M$

Definition 1.2. On dit que M est une borne supérieure/inférieure de $\mathcal{A}$ si :
- M est majorant/minorant de $\mathcal{A}$
- Si M' est majorant/minorant de $\mathcal{A}$, on doit avoir $M' > M$ / $M' < M$. C'est à dire que M doit être le plus petit/grand majorant/minorant de $\mathcal{A}$

Propriété 1.3. Si $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure ou inférieure, cette borne est unique.

Démonstration. □

Soient M_1 et M_2 deux bornes supérieures de $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } M_1 \text{ majore } \mathcal{A} &\Rightarrow M_1 \geq M_2 \\ M_2 \text{ majore } \mathcal{A} &\Rightarrow M_2 \geq M_1 \end{aligned}$$

Donc $M_1 = M_2$.

Notation. On note une borne supérieure $\sup \mathcal{A}$ et une borne inférieure $\inf \mathcal{A}$.

Remarque. On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$
Alors on a $A = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. Dans ce cas, $\mathcal{A}$ n'a pas de bornes dans $\mathbb{Q}$. En effet, si ces bornes existent, elles valent $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. C'est une des raisons de la création de l'ensemble des réels.

Axiome 1.4. *Soit* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ *tel que* $\mathcal{A} \neq \emptyset$ *et* $\mathcal{A}$ *majorée. Alors* $\sup \mathcal{A} \in \mathbb{R}$ *existe.*

1.2 Suites

Definition 1.5. Une suite de $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{K} \\ n & \to & u(n) \end{array}$$

Notation. $u(n)$ est noté u_n et la suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement u_n.

Exemple. $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Remarque. On peut dire qu'une suite est une restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$

[Récurrence] Soit $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si

— il existe x tel que $P(x)$ est vérifiée,

— pour tout $n > x$, $P(n)$ nous permet de déduire $P(n+1)$

alors, $P(n)$ est vérifiée pour tout $n > x$.

Propriété 1.6. *Démonstration.* □

Definition 1.7 (Monotonie). Pour $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$, soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$, alors (u_n) est croissante si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \Rightarrow u_p \leq u_q$$

1.3 Convergence

Definition 1.8. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ et $l \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) tend vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Definition 1.9. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que (u_n) tend vers l'infini si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, n > N, u_n > A$$

Definition 1.10. On dit que (u_n) converge si (u_n) admet une limite dans $\mathbb{K}$. En particulier, une suite tendant vers l'infini diverge[1].

Notation.

$$\begin{aligned}
&\lim u_n = l \\
\Leftrightarrow &\lim_{+\infty} u_n = l \\
\Leftrightarrow &\lim_{n\to+\infty} u_n = l \\
\Leftrightarrow &u_n \to l \\
\Leftrightarrow &u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l
\end{aligned}$$

Théorème 1.11. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ telle que (u_n) est majorée et croissante. Alors (u_n) converge et* $\lim u_n = \sup u_n$ *($n \in \mathbb{N}$)*

Application (Suites Adjacentes). Soit (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathbb{R}$ telles que :

1. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
2. $\lim v_n - u_n = 0$

Alors $\forall n, u_n > v_n$ et (v_n) et (u_n) convergent vers la même limite.

1. Ne converge pas

1.4 Suites extraites, Bolzano-Weierstrass

Definition 1.12. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}$. On dit que (v_n) est extraite de (u_n) s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout n, $v_n = u_{\varphi(n)}$

Notation. $v_k = u_{n_k}$. On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n).

Remarque.

1. Toute suite (u_n) est extraite d'elle même. Il suffit de prendre $\varphi(n) = n$.
2. Soit $(u_n) = (-1)^n$ et $\varphi(n) = 2n$. On a alors $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n} = 1$.
   Ou, si $\varphi(n) = 2n+1$, $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n+1} = -1$.

Lemme 1.13. *Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$. Alors : $u_n \to l \Leftrightarrow$ pour toute suite (v_n) extraite de (u_n), $v_n \to l$*

Démonstration. □

.

Théorème 1.14 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Soit (u_n) une suite bornée (minorée et majorée). Il existe au moins une suite (v_n) extraite de (u_n) convergente.*

1.5 Le critère de Cauchy

Interêt. Le critère de Cauchy permet de montrer qu'une suite converge sans connaître sa limite et même sans savoir à priori s'il y en a une.

Definition 1.15. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists N \text{ tq } \forall p,\, q \text{ si } p,\, q > N,\, |u_p - i_q| < \varepsilon$$

Propriété 1.16. Si (u_n) est convergente, (u_n) est de Cauchy

Remarque. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, prenons $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ tq $\alpha_n \to \sqrt{2}$. Alors, (α_n) est de Cauchy mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ donc (α_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ et la réciproque de Cauchy est fausse dans $\mathbb{Q}$. C'est d'ailleurs la raison historique de la création de $\mathbb{R}$

Lemme 1.17. *Toute suite de Cauchy est bornée*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy. On prend $\varepsilon = 1$. Il existe N tel que pout $p,\, q \geq N$, $|u_p - u_q| < 1$ et notamment si $q = N$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } M &= \max(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, u_N + 1) \\ m &= \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, u_N - 1) \end{aligned}$$

Alors, M majore (u_n) et m minore (u_n) □

Lemme 1.18. *Soit (u_n) une suite de Cauchy telle qu'il existe une sous suite convergente $(u_{\varphi(n)})$ ou (v_n), alors (u_n) converge.*

Démonstration. □

Théorème 1.19 (Théorème de Cauchy). *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$.*

$$(u_n) \textit{ converge} \Leftrightarrow (u_n) \textit{ est de Cauchy}$$