École Polytechnique Universitaire de Montpellier
Département PEIP

Cours de mathématiques

Julien Faucher
8 novembre 2014

HLMA319

ÉCOLE POLYTECHNIQUE UNIVERSITAIRE DE MONTPELLIER
E-Mail : julien.faucher@gmx.fr

Table des matières

Introduction – Définition d'une limite **1**

0 Comparaison de fonctions et développements limités **3**

0.1 Négligeabilité et équivalence 3

0.2 Développements limités 4

Introduction – Définition d'une limite

On se demande quel est le sens de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Considérons une fonction f continue quelconque. Si $]l - \epsilon; l + \epsilon[$ est un intervalle centré en l, il existe $]a - \delta; a + \delta[$ tel que si $x \in\ ]a - \delta; a + \delta[\ , f(x) \in\ ]l - \epsilon; l + \epsilon[$

Définition : Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la limite de f quand x tend vers a si :

$$\forall \epsilon > 0\ , \exists\ \delta > 0 \text{ tq si } x \in\ ]a - \delta; a + \delta[\ , f(x) \in\ ]l - \epsilon; l + \epsilon[$$

Notation : On peut écrire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ainsi : $\lim\limits_{a} f(x) = l$

Remarque : Cela ne fonctionne que pour $l \in \mathbb{R}$.

Remarque : On a :

$$\begin{aligned} & x \in\ ]a - \delta; a + \delta[\\ \Leftrightarrow\ & a - \delta < x < a + \delta \\ \Leftrightarrow\ & -\delta < x - a < \delta \\ \Leftrightarrow\ & |x - a| < \delta \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x,\ |x - a| < \delta,\ |f(x) - l| < \epsilon$$

ainsi que les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{a} f = +_\infty & \text{si} & \forall A > 0,\ \exists \delta > 0\ \text{ tq }\ \forall x,\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A \\ \lim\limits_{+\infty} f = l & \text{si} & \forall \epsilon > 0,\ \exists B > 0\ \text{ tq }\ \forall x, x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \\ \lim\limits_{+\infty} f = +_\infty & \text{si} & \forall A > 0,\ \exists B > 0\ \text{ tq }\ \forall x, x < B \Rightarrow f(x) > A \end{array}$$

Chapitre 0

Comparaison de fonctions et développements limités

0.1 Négligeabilité et équivalence

Définition (Abus) : Soit $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a est un intervalle de la forme $]a-\delta; a+\delta[$ ou $]a-\delta; a+\delta[\ /\{0\}$ avec $\delta > 0$

Définition : Négligeabilité Soit $f, g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On dit que f est négligeable devant g en $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\epsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ pour $x \in \mathrm{V}$
- $\lim\limits_{a} \epsilon(x) = 0$

Notation : Si f est négligeable devant g, on note $f \ll_a g$ (Physique) ou $f = o_a(g)$ (Maths)

Remarque : Si g ne s'annule pas sur V, $f \ll_a g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple :

Définition : Équivalence Soit $f, g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f est équivalente à g en a si on a :

$$f(x) = g(x) + o_a(g(x))$$

C'est à dire si $f = g+$ quelque chose de négligeable devant g.

Remarque :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + o_a(g(x)) \\ \Leftrightarrow f(x) &= g(x) + g(x)\epsilon(x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= g(x)(1+\epsilon(x)) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= 1+\epsilon(x) \\ \Leftrightarrow \lim_a \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 \end{aligned}$$

itemize Les deux dernières notations ne sont valides que si $g \neq 0$ au voisinage de a. ϵ est une fonction telle que $\lim_a \epsilon = 0$

Notation : f est équivalente à g en a s'écrit $f \sim_a g$

Remarque : Si $f \sim_a g$ et $\lim_a g = l$ alors,

$$\begin{aligned} \lim_a f(x) &= \lim_a g(x) * \lim_a (1+\epsilon(x)) \\ &= \lim_a g(x) \\ &= l \end{aligned}$$

Proposition : Si $f \sim_a g$ et si $\lim_a g$ existe, alors $\lim_a f = \lim_a g$. <u>Attention : la réciproque est fausse !</u>

Démonstration :

Exemple :

0.2 Développements limités

Idée : On va faire l'approximation de fonctions par des polynômes.

Définition : Soit $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.
On dira que f admet un développement limité d'ordre n en a (noté $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme P de degré n tel qu'au voisinage de a,

$$f(x) = P(x-a) + o_a((x-a)^n)$$

Remarque : On a $f(x+a) = P(x) + o_0(x^n)$ donc on fera les développements limités en 0

Propriété : Si f admet un $DL_n(0)$ alors, de développement limité est unique.

Démonstration :

Exemple :

Théorème : Formule de Taylor Soit f définie au voisinage de 0 et de classe $\mathscr{C}^n$ (n fois dérivable avec $f^{(n)} = \frac{d^n f(0)}{dx^n}$ continue). On a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k \right) + o(x^n)$$

Démonstration : Voire Wikipédia.

Corollaire : Si f est $\mathscr{C}^n$ alors elle admet un $DL_n(0)$

Exemple : Posons $f(x) = e^x$. $\forall n, f(x)^{(n)} = e^x$ et $f(0)^{(n)} = 1$. On a donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n + o(x^n)$$

Soit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Remarque : C'est <u>LA</u> bonne définition de e^n.

Exemple :

Remarque : Taylor c'est bien, mais parfois très complexe (par exemple le $DL_{10}(0)$ de $\frac{1+x}{1-x^2}$

Remarque : Un développement limité est une <u>égalité</u> et non une approximation.

Propriété : Opérations sur les DL : Soit f et g deux fonctions. Admettons un $DL_n(0)$ tel que :

- $f(x) = P(x) + o(x^n)$
- $g(x) = Q(x) + o(x^n)$

Avec $\deg P = \deg Q = n$. On a alors :

Addition : $f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$

Produit : $f(x) * g(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(x)$ est le polynôme $P(x)Q(x)$ tronqué à l'ordre n

Composition : $f \circ g(x) = T(x) + o(n)$ où $T(x)$ est le polynôme $P(x) \circ Q(x)$ ($\deg R(x) = n^2$) tronqué au rang n.

Dérivation : Si f est dérivable, $f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$

Intégration : Si f est continue, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x P(t)dt + o(x^{n+1})$

Propriété : Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ est un $DL_n(0)$ de f avec $\deg P = n$, alors $P \sim_0 f$