6D gauged supergravity に於ける アノマリー自由な模型の探索

鈴木　了

東京大学理学系研究科

（立川裕二氏との共同研究 hep-th/0512019 に基づく）

2006 年 5 月 1 日

Introduction

アノマリーとは

アノマリー

連続的対称性を持つ理論のゲージ不変性が量子効果によって破れる現象

Anomalous theory では unitarity, renormalizability が破綻

アノマリーは chiral fermions の経路積分に由来

← ゲージ不変な正則化（Pauli-Villars）ができない

アノマリーは赤外量子効果

- 統一理論への埋め込まれ方に依らない
- 場の理論のトポロジカルな性質で決まる

超重力理論のアノマリー

$D = 2, 6, 10$ 次元では（局所）重力アノマリーが存在

$\Longrightarrow$ 理論のゲージ対称性、スペクトルに厳しい制限

D=10

Anomaly-free な単純超重力理論は 5 種類。

$$SO(32),\ E_8 \times E_8\,,\ SO(16) \times SO(16),\ U(1)^{248} \times E_8\,,\ U(1)^{496}$$

Anomaly-free 10D sugra $\longleftrightarrow$ Type I/Heterotic string

D=6

物質場（hypermultiplet）を入れる自由度のため、一般に anomaly-free models の数は 10D よりも遥かに多い。

6D (ungauged) sugra $\longleftarrow$ String theory on K3

超重力理論とポテンシャル

Hyperscalar manifold の gauging

超重力理論に一般座標変換および超対称性と矛盾せずポテンシャルを入れられる（知られている唯一の）方法

超弦理論による gauged sugra の導出

例：KKLT setup

IIB on CY orientifold with fluxes

$$\longrightarrow \quad (\mathcal{N}=1) \text{ 4D gauged sugra}$$

potential
$$V_4 = e^K \left(D_a W \, \overline{D^a W} - 3 \left| W \right|^2 \right) . \tag{1}$$

6D gauged supergravity

6D gauged sugra の特徴

- Potential が常に非負　$V_{6D} \geq 0.$
- 6 次元の意味で susy de Sitter vacua が存在　$\Lambda_{6D} \geq 0.$

4D, 5D の 8 supercharges を持つ gauged sugra と大きく異なる

◇ 超弦理論からの 6D gauged sugra の導出方法は未知。

超弦理論からの導出の困難

- カイラルな理論のため、anomaly が出る
- Anomaly を消すため、多数の hypermultiplets が必要
- R 対称性に荷電した gravitino の存在

4D supergravity との関係

- Salam-Sezgin compactification

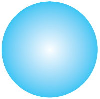
時空の形：$M_4 \times S^2$

ゲージ群：$U(1)_R$ with fluxes over S^2

超対称性：4 susy 以下に落ちる

指数定理

$\Longrightarrow$ $\exists$ massless chiral fermions in $4D$

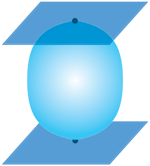


- Compactification with fluxes and branes

時空の形：$M_4\times$ rugby-ball, 両極に 3-branes

Brane が両極の orbifold singularity を解消

ゲージ群、超対称性は $M_4 \times S^2$ の時と同じ



Anomaly freedom

6D $\mathcal{N} = (1,0)$ **gauged** supergravity として、重力・ゲージ・混合アノマリーの消える model（ゲージ群と表現の組み合わせ）は殆ど見つかっていなかった。

これまで知られていた anomaly-free models

- $U(1)_R \times E_7 \times E_6$ with $(\mathbf{912}, \mathbf{1})/2$ hypers

  S. Randjbar-Daemi, A. Salam, E. Sezgin, J. A. Strathdee, *PLB* **151** (1985)

- $U(1)_R \times E_7 \times G_2$ with $(\mathbf{56}, \mathbf{14})/2$ hypers

  S. D. Avramis, A. Kehagias, S. Randjbar-Daemi, hep-th/0504033

- $U(1)_R \times F_4 \times Sp(9)$ with $(\mathbf{52}, \mathbf{18})/2$ hypers

  S. D. Avramis, A. Kehagias, hep-th/0508172

Our interest

6D $\mathcal{N} = (1, 0)$ gauged sugra に於いて

anomaly-free な模型は

どれほど存在するのか？

6D gauged supergravity

多重項

$\mathcal{N} = (1,0)$ 6次元超重力理論の多重項

$$
\begin{aligned}
\text{supergravity multiplet} &: \quad (e_\mu{}^m, B^-_{\mu\nu}, \psi_\mu{}^{A-}), \\
\text{tensor multiplet} &: \quad (B^+_{\mu\nu}, \chi^{A+}, \varphi), \\
\text{vector multiplet} &: \quad (A_\mu, \lambda^{A-}), \\
\text{hypermultiplet} &: \quad (\phi^\alpha, \psi^{a+})
\end{aligned}
$$

$\mu, \nu = 0, \ldots, 5$（時空）, $m = 0, \ldots, 5$（接空間）, $A = 1, 2$（$Sp(1)_R$ の基本表現）,
$\pm$（Weyl spinor の chirality, 反対称テンソル場の強さの self-duality）,
$\alpha = 1, \ldots, 4\,n_H$, $a = 1, \ldots 2\,n_H$（n_H：hypermultiplets の数）.

$SO(1,5)$ の最小スピノルは symplectic Majorana Weyl.
$\Rightarrow$ Spinor がゲージ群の擬実表現（例：$Sp(1)$ の **2** 表現）を持てば reality condition が課せ、自由度を半分にできる。

Hyperscalar mfd のゲージ化

Gauging

Hyperscalars のなす多様体の (global) isometry を局所対称性に持ち上げる。このとき、hypermultiplets は vector multiplets と結合する。

8 susy の超重力理論では、hyperscalars は quaternionic mfd の座標になる。Quaternionic mfd の形を

$$\mathcal{M}_H = \frac{Sp(1, n_H)}{Sp(1)_R \times Sp(n_H)} \tag{2}$$

と仮定し、その isometry subgroup

$$G_R \times G_H \subset Sp(1)_R \times Sp(n_H) \tag{3}$$

をゲージ化する。

Gauging の一般形

ゲージ群の一般的な形は、

$$Sp(1)_R \times Sp(n_H) \supset G_R$$

$$Sp(n_H) \supset G_H = \underbrace{G_{H1} \times G_{H2} \times \cdots}_{\text{simple Lie group}}$$

G_R は R 対称性の群の一部を含むとする（⇒ “gauged sugra”）

G_R が $Sp(n_H)$ の一部を含む場合を diagonal gauging と呼ぶ。

可能な G_R の選択肢

$T \equiv T^{AB} + (\mathrm{const})\, T^{ab} \in G_R$ たちの交換子が再び G_R に入る条件

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{G_R} \in \{\mathbf{U(1)_R}\,,\mathbf{U(1)_{R+}}\,,\mathbf{Sp(1)_R}\,,\ \mathbf{Sp(1)_{R+}}\}$$

$$U(1)_{R+} \equiv [U(1)_R \times U(1)_H]_{\mathrm{diag}}\,, Sp(1)_{R+} \equiv [Sp(1)_R \times Sp(1)_H]_{\mathrm{diag}}\,.$$

Potential term の生成 [Nishino, Sezgin] hep-th/9703075

ゲージ化により変更される超対称変換（の一部）

$$D_\mu \phi^\alpha = \partial_\mu \phi^\alpha - g_H\, A_\mu^{ab}\, (T_{ab}\phi)^\alpha - g_R\, A_\mu^{AB}\, (T_{AB}\phi)^\alpha$$

$$D_\mu \epsilon^A = \left[\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{mn}\gamma_{mn} + g_R\, A_\mu^{AB} + (D_\mu\phi^\alpha)\, A_\alpha^{AB} \right] \epsilon_B$$

Supercov. 微分の交換子に新たに現れる項（ϵ：変換パラメータ）

$$[D_\mu, D_\nu]\, \epsilon^A = \frac{1}{4} R_{\mu\nu}{}^{mn}\gamma_{mn}\epsilon^A + D_\mu\phi^\alpha D_\nu\phi^\beta F_{\alpha\beta}^{AB}\epsilon_B - \mathrm{tr}_z\, F_{\mu\nu} C^{AB}\epsilon_B - \mathrm{tr}_R\, F_{\mu\nu} C^{ab}\epsilon_B$$

C は Killing prepotential. $L(\phi)$ を coset $\mathcal{M}_H$ の代表元として

$$C^{AB}{}_{CD} = \left(L^{-1} T^{AB} L \right)_{CD}, \quad C_z{}^{ab}{}_{CD} = \left(L^{-1} T_z^{ab} L \right)_{CD}. \quad (4)$$

Action（の bosonic part）：$S_{\text{gauged}} = S_{\text{ungauged}} + V(\phi)$

Potential の形

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\, e^{-\varphi} \left(g_R^2\, C^{AB}{}_{CD}\, C^{\,ABCD} + \sum_z g_{Hz}^2\, C_z{}^{ab}{}_{CD}\, C_z{}^{abCD} \right) \geq 0.$$

$L(\phi)$ の表示の例：ϕ を n_H 個の 2×2 複素行列とみなす。

$$L(\phi) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\sqrt{1+\phi^\dagger\phi}-1}{\phi^\dagger\phi} \right) \phi\phi^\dagger & \phi \\ \phi^\dagger & \sqrt{1+\phi^\dagger\phi} \end{pmatrix}$$

とくに $G_R = U(1)_R$ のとき、

$$V(\phi) = \frac{1}{16}\, e^{-\varphi} \left(2\, g_R^2\, [1 + \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)]^2 + \sum_z g_{Hz}^2\ \mathrm{tr}\,\left(\phi^\dagger T_z^{ab} \phi\right)^2 \right).$$

potential minimum は $\phi = 0$ にあり、値は $V_{\min} = \frac{1}{8} e^{-\varphi} g_R^2$.

Flat directions in diagonal gauging

Diagonal gauging の場合、prepotential は

$$C^{AB}{}_{CD} = \left(T_R + T_H + \phi^\dagger T_R \phi + \phi T_H \phi^\dagger\right)^{AB}{}_{DC} + \mathcal{O}(\phi^4)$$

となる。T_H の ϕ^α への作用（G_H の表現）は任意に選べるため、**potential minimum の位置が原点（$\phi = 0$）からずれたり、flat direction が現れたりする**可能性がある。

物理的解釈

Flat direction の存在 $\Rightarrow$ Hyperscalars に vev を与え、ゲージ対称性 $G_R \times G_H$ を自発的に破ることができる。
また原点 $\langle \phi^\alpha \rangle = 0$ では symmetry が enhance している。

Anomaly cancellation

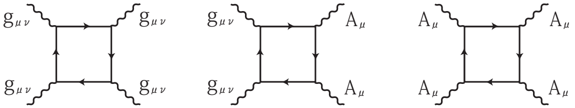
局所アノマリー

[Alvarez-Gaumé, Witten] NPB234 (1983)

局所ゲージ変換の下で有効作用 Γ_{eff} が不変でない

$$\delta\Gamma_{\text{eff}} \propto \int I_6\left(R_2, F_2^a, F_2^b, \ldots\right). \tag{5}$$

I_6 は **box diagram** の計算から求まる。



重力アノマリー　　混合アノマリー　　ゲージアノマリー

さらに $dI_6 = \delta I_7$, $dI_7 = P_8$ と定めると、スピン $3/2, 1/2$ のフェルミオンそれぞれに対し、P_8 が**ある特性多項式の８次項** $I_{3/2}$, $I_{1/2}$ として書ける。

$$I_{3/2} = \left(\frac{245}{360}\ \mathrm{tr}\,R^4 - \frac{43}{288}\ \left(\mathrm{tr}\,R^2\right)^2\right) \mathrm{tr}_r\,1 + \frac{19}{6}\ \mathrm{tr}\,R^2\ \mathrm{tr}_r\,F^2 + \frac{10}{3}\ \mathrm{tr}_r\,F^4, \tag{6}$$

$$I_{1/2} = \left(\frac{1}{360}\ \mathrm{tr}\,R^4 + \frac{1}{288}\ \left(\mathrm{tr}\,R^2\right)^2\right) \mathrm{tr}_r\,1 - \frac{1}{6}\ \mathrm{tr}\,R^2\ \mathrm{tr}_r\,F^2 + \frac{2}{3}\ \mathrm{tr}_r\,F^4. \tag{7}$$

Green-Schwarz 機構

２階反対称テンソル場 B_2 があれば、以下のように action とゲージ変換則を修正して局所アノマリーを相殺できる。

まず $\vec{K}_4 \equiv (\mathrm{tr}(R_2)^2, \mathrm{tr}(F_2^a)^2, \mathrm{tr}(F_2^b)^2, \ldots)$ とおき、P_8 が

$$P_8 = \left(\sum_j \alpha_j \, K_4^j \right) \cdot \left(\sum_k \gamma_k \, K_4^k \right) \tag{8}$$

の形に書けると仮定する。

次に $K_4^k = d\Omega_{\mathrm{CS}}^k$, $\delta\Omega_{\mathrm{CS}}^k = d\omega_2^k$ と定め、B_2 のゲージ変換則を $\delta B_2 = 0 \ \rightarrow \ -\alpha_k \omega_2^k$ と変えると、

$$\Delta\mathcal{L} = \gamma_j \, K_4^j \wedge B_2 + \frac{1}{4} \left(\alpha_j \gamma_k - \alpha_k \gamma_j \right) \Omega_{\mathrm{CS}}^j \wedge \Omega_{\mathrm{CS}}^k \tag{9}$$

のゲージ変分は $\delta\Gamma_{\mathrm{eff}}$ を打ち消す。

アノマリー多項式、アノマリー行列

GS cancellation を起こすためには、**アノマリー多項式 P_8 が因数分解すること**が必要十分

$$P_8 = -\left(I_{3/2} + I_A\right) + \sum_{\text{tensor}}^{n_T=1} \left(I_A + I_{1/2}\right) - \sum_{\text{vector}}^{n_V} I_{1/2} + \sum_{\text{hyper}}^{n_H} I_{1/2}\,,$$

そのためには特に、$\mathrm{tr}\, R^4$ と $\mathrm{tr}\, F^4$ の係数が消える必要がある

$$\left(\mathrm{tr}\, R^4 \text{ の係数}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad n_H = 244 + n_V - 29\,(n_T - 1)\,.$$

さらに A_1, A_2, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 の既約表現については、
$\mathrm{tr}\, F^4 \propto \left(\mathrm{tr}\, F^2\right)^2$ が成り立つ（比例係数は表現論的に求まる）

$\mathrm{tr}\, R^4$, $\mathrm{tr}\, F^4$ の係数が消えるとき、$P_8 \equiv \sum_{jk} \beta_{jk} K^j K^k$ で行列 β_{jk} を定め、**アノマリー行列**と呼ぶことにする。

大域アノマリー

トポロジー的に非自明なゲージ変換で、有効作用が不変でない

大域的ゲージ変換 ⇔ ゲージ場の非自明な配位

時空のトポロジーを $S^6 = \{北半球\} \cup \{南半球\}$ と仮定する。
北半球のゲージ場と南半球のゲージ場を、赤道上の大域的ゲージ変換 $U(x)$ でひねって貼り合わせる。

$$A_M^{(N)}(x) = U^{-1}(x)\left(A_M^{(S)}(x) + \partial_M\right)U(x)$$

上の貼り合わせは、ゲージ場（$= S^6$ からゲージ群 H への写像）の空間が非自明なトポロジー $\pi_6(H) \neq 0$ を持つときに生じうる

時空が S^6 のとき大域重力・混合アノマリーは消える。

[Bergshoeff,Kephart,Salam,Sezgin] MPLA1 (1986)

ゲージ場の配位空間のトポロジー

$\pi_6(H) \neq 0$ なる Lie 群は次の 3 つ

$$\pi_6(SU(2)) = \mathbb{Z}_{12}\,,\ \pi_6(SU(3)) = \mathbb{Z}_6\,,\ \pi_6(\mathsf{G}_2) = \mathbb{Z}_3\,.$$

大域アノマリーとの対応

S^4 の 4D $SU(2)$ 理論を考えると、$\pi_4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2$ より global $SU(2)$ anomaly が存在。この $\mathbb{Z}_2$ 変換の下で、**2 表現**の Weyl fermion を回すと、有効作用 $\Gamma_{\rm eff}$ が $e^{\pi i}$ ずれる。
任意の表現の Weyl fermion からの phase shift の値は、$SU(2)$ を $SU(3)$ の Chern-Simons 項に埋め込むと求まる

$\Rightarrow$ 可能な hypermultiplet の表現の組み合わせに更なる制限

Chern-Simons 項の計算

Effective action の位相のずれの式は局所ゲージ変換の式と同じ

$$\delta\Gamma_{\text{eff}} \propto \int_{S^6} I_6\left(R_2, F_2^a, F_2^b, \dots\right) = \int_{S^7} \Omega_7^{\text{CS}} = \int_{S^8} P_8$$

- $SU(4)$ の基本表現をもつ Weyl fermion と結合したゲージ場が、$\pi_7(SU(4)) = \mathbb{Z}$ の generator g に対応するゲージ配位をとるとき $\int_{S^7} \Omega_7^{\text{CS}}(g) = 2\pi$.
- ゲージ場が任意の表現 R の Weyl fermion と結合しているとき、Ω_7^{CS} の積分の値は $A(R;G)$ 倍になる。ただし

$$\operatorname{tr}_R F^4 = A(R;G)\operatorname{tr}_f F^4 + B(R;G)\left(\operatorname{tr}_R F^2\right)^2 \tag{10}$$

第 2 項は全微分になるため効かない。

Global gauge anomaly の計算

H の表現 r を持つ Weyl fermion からの global gauge anomaly への寄与は、H をより大きな群 G（s.t. $\pi_6(G) = 0, \pi_7(G) = \mathbb{Z}$）に埋め込んで計算する。

1. G の表現 R を H の表現 r_i によって分解：$R = \oplus_i r_i$
2. 表現 R の Weyl fermion についての位相のずれは、G の Chern-Simons 項の積分から求まった値を $1/p$ 倍する ($\pi_6(H) = \mathbb{Z}_p$)
3. いろいろな R について計算を行い、結果を H の表現 r_i について逆に解く

結果は、$\mathrm{tr}_R\, F_H^4 = C_4(R; H)\big(\,\mathrm{tr}_f\, F_H^2\big)^2$ で定まる定数 C_4 を用いて表せる

Remark

$SU(2)$ には擬実表現が存在、symplectic Majorana Weyl fermion からの寄与を求める必要がある。

$\Longrightarrow$ symplectic structure を保つため、$SU(2)$ を一度 $Sp(2)$ に埋め込む　$SU(2) \subset Sp(2) \subset SU(4)$

$$
\begin{aligned}
1 - 4\,C_4\left(\rho^H; \mathsf{G}_2\right) &\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 3) \qquad \text{for } \mathsf{G}_2\,, && (11)\\
8 - \quad D_4\left(\rho^H; SU(2)\right) &\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 12) \qquad \text{for } SU(2), && (12)\\
-\,2\,C_4\left(\rho^H; SU(3)\right) &\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 6) \qquad \text{for } SU(3)\,, && (13)\\
n_V - D_4\left(\rho^H; Sp(1)\right) &\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 12) \qquad \text{for } Sp(1)_{R(+)}\,. && (14)
\end{aligned}
$$

D_4 もゲージ群 G とその表現 R から決まる定数。ρ^H はハイパー多重項全体の表現

Anomaly-free models

探索の方針

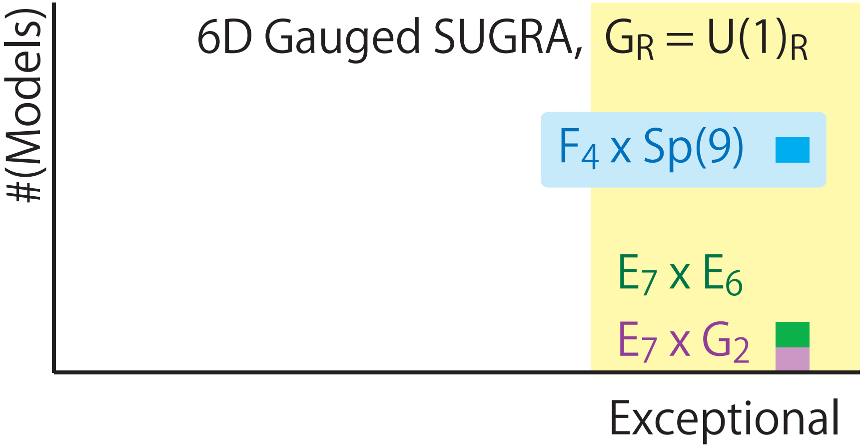
1. Tensor multiplet の数は 1 とする。
2. Hyperscalar manifold は
   $G/H = Sp(n_H, 1)/[Sp(n_H) \times Sp(1)_R]$ とする。
   （H の部分群がゲージ化される。）
3. $\mathrm{tr}\, F^4 \propto \left(\mathrm{tr}\, F^2\right)^2$ を満たす Lie 群からゲージ群を選ぶ。
   （$U(1), SU(2), SU(3)$ および例外群）
4. No drone $U(1)$'s
   （どのハイパー多重項も荷電していない $U(1)$ vector mult.）
5. No singlet hypermultiplets
   （どのゲージ群にも荷電していない hypermult.）

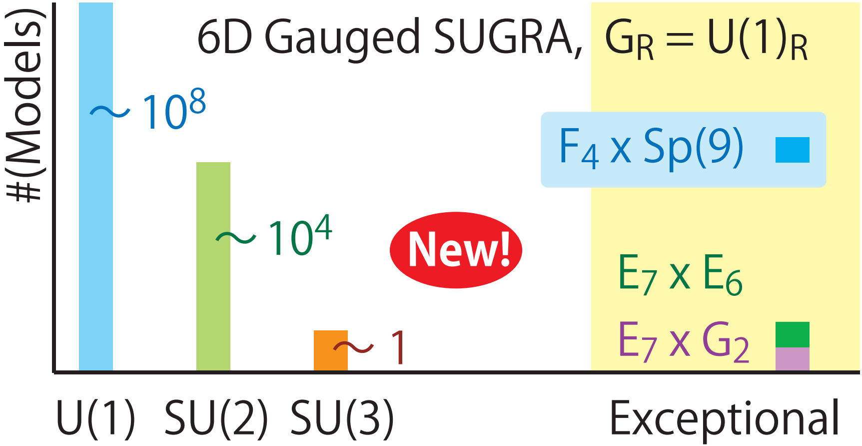
以上の条件を満たすゲージ群 $G = G_{R(+)} \times G_H$ として特に

$$G_{R(+)} = U(1) \text{ or } SU(2), \quad G_H = U(1) \text{ or } SU(2)$$

をとり、局所および大域アノマリーのないゲージ群と表現の組を探した。

$\Longrightarrow$ **莫大な数のアノマリー自由な模型を発見。**


6D Gauged SUGRA, $G_R = U(1)_R$
#(Models)
F_4 x $Sp(9)$
E_7 x E_6
E_7 x G_2
Exceptional


#(Models)
6D Gauged SUGRA, $G_R = U(1)_R$
$\sim 10^8$
$\sim 10^4$
~ 1
New!
$F_4 \times Sp(9)$
$E_7 \times E_6$
$E_7 \times G_2$
U(1)
SU(2)
SU(3)
Exceptional

Abelian groups

仮定

1. $U(1)$ charge は量子化されているとする。
2. unit $U(1)$ charge の rescale で同一になる組み合わせは除外。
3. $\mathrm{tr}(F_{U(1)})^{\mathrm{odd}}$ が消えるような対称性をもつ charge の組み合わせに限る。

$U(1)$ charge q の hyperino の数を n_q で表し、

$$C_2 \equiv C_2(\rho^H; U(1)) = \sum_q n_q\, q^2, \quad C_4 \equiv C_4(\rho^H; U(1)) = \sum_q n_q\, q^4$$

とおく。アノマリー多項式が因子分解する条件は

$$C_4 = \frac{(C_2)^2}{150}\,. \tag{15}$$

$U(1)_R \times U(1)$

n_1	n_2	n_3	n_4	$C_2/6$	n_1	n_2	n_3	n_4	$C_2/6$
243	0	3	0	45	112	109	24	1	130
173	70	3	0	80	108	96	42	0	145
138	96	12	0	105	108	54	84	0	180
123	102	21	0	120	123	0	123	0	205

アノマリー多項式の因子分解：

$$\left(\mathrm{tr}\, R^2 - 4\, F^2_{U(1)_R} - \frac{2\, C_2}{15}\, F^2_{U(1)}\right)\left(\mathrm{tr}\, R^2 + F^2_{U(1)_R} - \frac{C_2}{30}\, F^2_{U(1)}\right)$$

Drone $U(1)$ があるとき **anomaly-free model の無限系列**が存在

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (243, 0, 3 + n_{\mathrm{drone}}, 0)\,, \tag{16}$$

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (173, 70, 3, n_{\mathrm{drone}})\,. \tag{17}$$

Non-abelian groups (classical)

表現 r のハイパー多重項の数を n_r と書く。ハイパー多重項全体の表現は $\rho^H = \sum_r [\mathbf{r}]^{\oplus n_r}$ と既約分解する。

$$C_2(\rho^H; G) = \sum_r n_r\, C_2(r; G), \quad C_4(\rho^H; G) = \sum_r n_r\, C_4(r; G).$$

アノマリー多項式が因子分解する条件：

$$C_4 = \frac{1}{128}(C_2^2 - 56\, C_2 - 496). \tag{18}$$

Global $SU(2)$ anomaly の消える条件：

$$4 - 2\, C_4 \equiv 0 \pmod 6. \tag{19}$$

$U(1)_R \times SU(2)$

n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
0	4	1	11	26	3	0
0	7	0	2	0	31	0
1	0	12	0	33	0	0
1	3	1	3	7	24	1

n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
2	1	29	25	0	0	0
3	0	0	0	11	0	22
5	0	0	0	37	0	2
124	0	0	0	0	0	0

アノマリー多項式の因子分解

$$\left(\mathrm{tr}\, R^2 - 4\, F^2_{U(1)R} - \frac{20 + C_2}{8}\; \mathrm{tr}_2\, F^2_{SU(2)}\right)\left(\mathrm{tr}\, R^2 + \frac{4}{3}\, F^2_{U(1)R} + \frac{76 - C_2}{24}\; \mathrm{tr}_2\, F^2_{SU(2)}\right).$$

Diagonal gauging

Global $Sp(1)_R$ anomaly

$Sp(1)_R$, $Sp(1)_R \times U(1)$, $Sp(1)_R \times SU(2)$ は全て global $Sp(1)_R$ anomaly を持つ。

$\longrightarrow$ R 対称性に荷電した hyper が重要（diagonal gauging）

アノマリー多項式が因子分解する条件：

$$\Lambda \equiv 4\,C_2^2 + 36\,C_2 + 8433 - 384\,C_4 \geq 0. \tag{20}$$

$$P_8 = \left(\mathrm{tr}\,R^2 - \frac{9 + 2\,C_2 + \sqrt{\Lambda}}{24}\,\mathrm{tr}_2\,F^2_{Sp(1)R}\right)\left(\mathrm{tr}\,R^2 - \frac{9 + 2\,C_2 - \sqrt{\Lambda}}{24}\,\mathrm{tr}_2\,F^2_{Sp(1)R}\right)$$

Global $Sp(1)_{R+}$ anomaly の消える条件:

$$3 - D_4 \equiv 0 \pmod{12}. \tag{21}$$

$Sp(1)_{R+}$

n_2	n_3	n_4	n_5
$107 + 1/2$	0	8	0
$109 + 1/2$	8	1	0
$117 + 1/2$	1	1	1
$119 + 1/2$	0	2	0

N.B. $G_R = Sp(1)_{R+}$ のときの D_4 の値：

$$\mathbf{2}\ \text{(Majorana-Weyl)}\ \ e^{2\pi i/12}, \quad \mathbf{3}\ \text{(Weyl)}\ \ e^{4\pi i/3},$$

$$\mathbf{4}\ \text{(Majorana-Weyl)}\ \ e^{-\pi i/3}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{gravitini in a supergravity multiplet:} & 5 & \mod 12, \\
\text{tensorini in a tensor multiplet:} & -1 & \mod 12, \\
\text{the } Sp(1)_R \text{ gaugini:} & -1 & \mod 12, \\
\text{other gaugini in a vector multiplet:} & 1 & \mod 12.
\end{array}$$

上記以外のゲージ群の組み合わせ

- $U(1)_R$
  Singlet hypermultiplet のみの解が存在。
- $U(1)_{R+}$
  rank $\beta_{ij} \leq 2$ により、無限個のアノマリーのない模型が存在。
- $(\,U(1)_{R+}$ or $Sp(1)_{R+}\,) \times (\,U(1)$ or $SU(2)\,)$
  莫大な数の anomaly-free な模型を具体的に構成できる。
- $U(1)_R \times SU(3)$
  $SU(3)$ の基本表現の添え字 21 個をもつ完全反対称テンソル表現一つからなる模型は anomaly-free.

Non-abelian groups (exceptional)

$n_H = n_V + 244 \;\Rightarrow\;$ diagonal gauging 以外に限ると、ゲージ群を固定すれば（原理的には）全ての可能な表現の組み合わせを調べつくすことが可能。

$G_H =$ 例外群、$G_H =$ 例外群 $\times$ 例外群の場合
singlet hypermultiplet がないとして、可能な表現の組み合わせは $\sim \mathcal{O}(10^6)$ 通り存在。

- $U(1)_R \times$ 例外群（$\times$ 例外群）：解は前述の 2 つ
- $Sp(1)_R \times$ 例外群（$\times$ 例外群）：解なし

Anomaly-free な組み合わせは**非常に稀**にしか存在しない

Discussion and Outlook

まとめ

- 6次元での**局所および大域アノマリー**を具体的に評価した。（とくに、6D Majorana-Weyl fermions の global $SU(2)$ anomaly への寄与を初めて求めた。）
- 莫大な数の**アノマリー自由な模型**を発見した。
- Diagonal gauging の時のポテンシャルを初めて考察し、一般には **flat directions** が現れることを示した。

Comments on n_T

Covariant Lagrangian formulation

- $n_T > 1$ のとき、covariant Lagrangian が書けない。
- $n_T = 1$ でも、6D では、Green-Schwarz counterterm が **susy & Lorentz covariant** に入れられるか微妙。

$n_T > 1$ への拡張

- String theory のコンパクト化では頻繁に登場。
- **rank** $\beta_{ij} \leq 1 + n_T$ ならば局所アノマリーを相殺できる。

  $\rightsquigarrow$ より大きなゲージ群でも anomaly-free な組み合わせが存在？

今後の課題

- 超弦理論の（フラックス？）コンパクト化による $6D$ **gauged supergravity の導出**。
- 6D gauged supergravity での anomaly-free models の再現。Potential の **flat direction** の解釈。
- 更に４次元にコンパクト化したときのアノマリー **（anomaly inflow）** の考察。