想定読者：線形代数、微積分を学んだ方（おおよそ大学２年生〜）
目的：曲面上を動くことにより見える景色の流れを導出する。
例：地表をなめるように走るゴーカートから見た風景。
注意：数学的に厳密に説明していない。

０　ベクトル空間、線形空間

定義等、基本的な知識は略。
基本的なもの以外で特に議論に必要な用語は以下である。
・同次座標：
・クロネッカーデルタ
・アインシュタインの縮約記法（３次元と４次元を明確にするためΣは明示しているが、擬標となる添え字の組は常に上下に現れる。ただし、計量テンソルは用いていないため、内積だけは上下に現れない）

１　ベクトルによる物体の位置の表現

必要な線形代数の準備をする。
X: 物体の位置

$$X=\sum_{i=1}^{4}x^{i}\,\mathbf{e}_{i}=\sum_{i=1}^{4}p^{i}\,\mathbf{f}_{i}$$

$\mathbf{e}_i$: 正規直交座標系 e の基底ベクトル（i=1~4、4 次元めは同次座標のために導入）
すなわち、

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$$

x^i: 座標系 e における X の位置ベクトル、座標（i=1~4、4 次元めは常に 1）

$\mathbf{f}_i$: 座標系 f の基底ベクトル（必ずしも正規直交系でなくてもよい）
p^i: 座標系 f における X の位置ベクトル、座標

$$X=\sum_{i=1}^{4}x^{i}\,\mathbf{e}_{i}=\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\delta_{j}^{k}x^{j}\,\mathbf{e}_{k}=\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{4}A_{j}^{i}(A^{-1})_{i}^{k}\right)x^{j}\boldsymbol{e}_{k}$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\left\{(\sum_{j=1}^{4}A_{j}^{i}x^{j})(\sum_{k=1}^{4}(A^{-1})_{i}^{k}\mathbf{e}_{k})\right\}=\sum_{i=1}^{4}\left\{(\sum_{j=1}^{4}A_{j}^{i}x^{j})(\sum_{k=1}^{4}B_{i}^{k}\mathbf{e}_{k})\right\}=\sum_{i=1}^{4}p^{i}\,\mathbf{f}_{i}$$

ただし、

$$p^i = \sum_{j=1}^{4} A^i_j x^j : \boldsymbol{p} = A\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{f}_i = \sum_{k=1}^{4} B^k_i \mathbf{e}_k : (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)B$$

$$B^k_i = (A^{-1})^k_i : B = A^{-1}$$

このとき、二つの座標系で内積は等しくなる。すなわち、

$$X = \sum_{i=1}^{4} x^i\, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{4} p^i\, \mathbf{f}_i$$

$$Y = \sum_{i=1}^{4} y^i\, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{4} q^i\, \mathbf{f}_i$$

とすると、*(X,Y)*は正規直交座標系 e での内積

$$(X,Y) = \sum_{i=1}^{4} x^i\, y^i$$

となる。実際、座標系 f では、

$$(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{4} p^i\, \mathbf{f}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{4} q^j\, \mathbf{f}_j\right) = \sum_{i=1}^{4}\left\{\left(\sum_{k=1}^{4} A^i_k x^k\right)\left(\sum_{l=1}^{4} B^l_i \mathbf{e}_l\right)\right\}\sum_{j=1}^{4}\left\{\left(\sum_{m=1}^{4} A^j_m y^m\right)\left(\sum_{n=1}^{4} B^n_j \mathbf{e}_n\right)\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} x^k \mathbf{e}_l \left(\sum_{i=1}^{4} A^i_k B^l_i\right)\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} y^m \mathbf{e}_n \left(\sum_{j=1}^{4} A^j_m B^n_j\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} x^k \mathbf{e}_l\, \delta^l_k \sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} y^m \mathbf{e}_n\, \delta^n_m = \sum_{k=1}^{4} x^k \mathbf{e}_k \sum_{m=1}^{4} y^m \mathbf{e}_m$$

$$= \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=1}^{4} x^k\, y^m \delta_{km} = \sum_{k=1}^{4} x^k\, y^k$$

となり、正規直交座標系 e の内積と同じになった。

<u>回転の場合</u>

座標系 e から見て座標系 f は z 軸のまわりに θ だけ回転しているとする。

$$\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta \\ -x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

であるから座標系 e の基底ベクトルから座標系 f の基底ベクトルへの変換は

$$(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4)=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(\mathbf{e}_1\cos\theta+\mathbf{e}_2\sin\theta\ -\mathbf{e}_1\sin\theta+\mathbf{e}_2\cos\theta\ \ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)$$

となる。

平行移動の場合

座標系 e から見て座標系 f は x 軸方向に t だけ進んでいるとする。

$$\begin{pmatrix}p^1\\ p^2\\ p^3\\ p^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^1-tx^4\\ x^2\\ x^3\\ x^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -t\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\\ x^4\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -t\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

であるから座標系 e の基底ベクトルから座標系 f の基底ベクトルへの変換は、

$$(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4)=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ t\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4)$$

となる。つまり座標系 f は座標系 e から見ると斜交していることになる。

回転＋平行移動の場合

座標系 f は座標系 e を回転させてから平行移動をさせる。

つまり、

$$\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta \\ -x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta - tx^4 \\ -x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\boldsymbol{p} = TR(-\theta)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$$

よって、

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4) &= (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)B = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)A^{-1} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)(TR(-\theta))^{-1} \\ &= (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)R(-\theta)^{-1}T^{-1} \\ &= (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{e}_1\cos\theta + \mathbf{e}_2 \sin\theta\ \ -\mathbf{e}_1 \sin\theta + \mathbf{e}_2\cos\theta\ \ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{e}_1\cos\theta + \mathbf{e}_2 \sin\theta\ \ -\mathbf{e}_1 \sin\theta + \mathbf{e}_2\cos\theta\ \ \mathbf{e}_3\ \ t(\mathbf{e}_1\cos\theta + \mathbf{e}_2 \sin\theta) + \mathbf{e}_4) \end{aligned}$$

平行移動の項が座標値では 1 次元めに、基底ベクトルでは 4 次元めにそれぞれ現れることに注意。

<u>基底の変換</u>

基底ベクトルの変換が

$$(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)B$$

であらわされることがわかった。もう一度定義を書いておくと、

$\mathbf{e}_i$: 正規直交座標系 e の基底ベクトル（i=1~4、4 次元めは同次座標のために導入）

すなわち、

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

$\mathbf{f}_i$: 座標系 f の基底ベクトル（必ずしも正規直交系でなくてもよい）

B は逆行列を持つ 4x4 行列であり、

$$B=\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \\ b_1^4 & b_2^4 & b_3^4 & b_4^4 \end{pmatrix}$$

と書ける。あらためて、

$$B=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}^{1,T} \\ \boldsymbol{b}^{2,T} \\ \boldsymbol{b}^{3,T} \\ \boldsymbol{b}^{4,T} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}^1=\begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \\ b_4^1 \end{pmatrix}, \dots$$

とおくと、

$$(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4)=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)B=\mathbf{e}_1\boldsymbol{b}^{1,T}+\mathbf{e}_2\boldsymbol{b}^{2,T}+\mathbf{e}_3\boldsymbol{b}^{3,T}+\mathbf{e}_4\boldsymbol{b}^{4,T}$$

$$\mathbf{e}_1\boldsymbol{b}^{1,T}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(b_1^1\ b_2^1\ b_3^1\ b_4^1)=\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

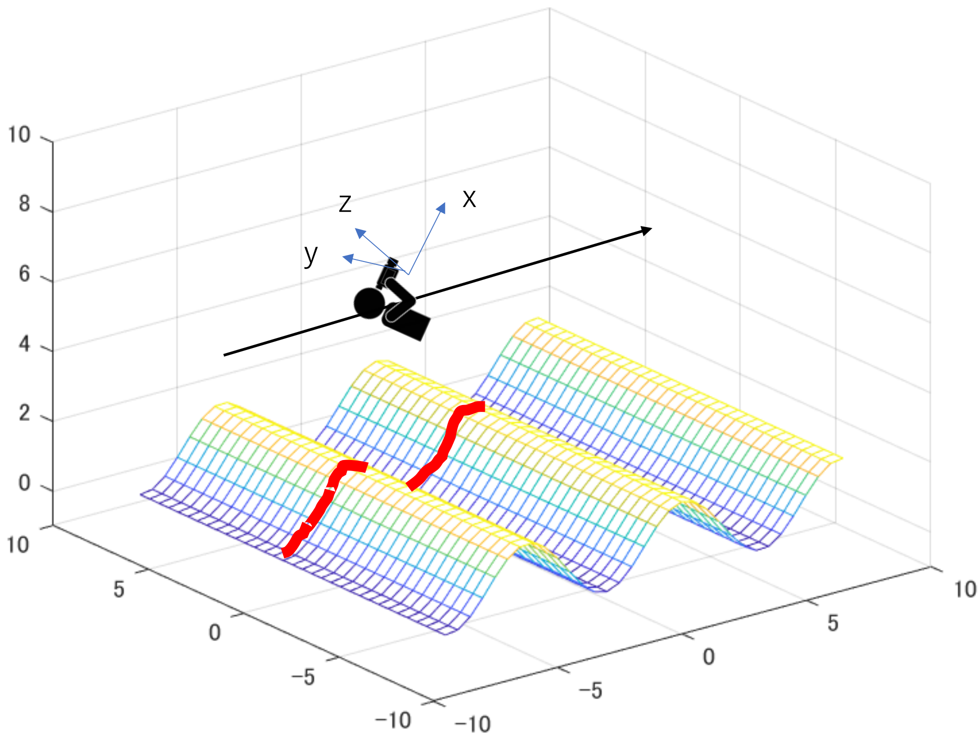
だから、

$$(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4)=B$$

であり、座標系 f の基底ベクトルを求めることができれば B を導ける。

2　曲面上を移動する座標系

曲面上を動くカメラに映る映像をシミュレートするため、曲面の上に動く座標系を導入する。曲面を地上、曲線をカメラの動線と考えれば想像しやすい。曲面上に引いた曲線の上を移動する座標系にカメラを固定すると考えよう。曲面、曲線ともに微分可能であるとする。



動座標系の原点は時間にそって曲線上を動く。議論を簡単にするため、この動座標系の x 軸を動く方向に向かってとり、z 軸は曲面の法ベクトル方向にとる。y 軸は右手系になるように x, z 軸に直交するように設定する（図）。

一般に曲面は、

$$w(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

と表せる。本論においては

$$x = u, y = v, z = f(u,v)$$

$$w(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

として十分である。ここで、

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

とおく。

曲面上の曲線は実数パラメータ t に対し（時間とみなしてよい）、u-v の 2 次元空間上に曲

線を描き、さらにこれを曲面上に写像することで得られる。

$$l(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$w(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} x\big(l(t)\big) \\ y\big(l(t)\big) \\ z\big(l(t)\big) \end{pmatrix}$$

この時、接ベクトルは、

$$\frac{d}{dt} w(u(t), v(t)) = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dt} = w_u \frac{du}{dt} + w_v \frac{dv}{dt} = \xi w_u + \eta w_v$$

と書ける。ここで、w_u、w_vを$x = u, y = v$として計算すると、

$$w_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

$$w_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix}$$

と簡単にすることができる。また、任意の接ベクトルはこのw_uとw_vの線形結合であらわすことができる。このとき、曲面の単位法ベクトルは接平面の法ベクトル、すなわちw_uとw_vに直交するベクトルとなるため、

$$e = \frac{w_u \times w_v}{|w_u \times w_v|} = \left(\frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)^T$$

である。z 軸の単位法線ベクトルはこの法線ベクトルに相当するから、

$$\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \\ \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。

3　座標変換（特別な場合）

ここで $v = v_0$（一定）$= y$、さらに$z = f(u) = f(x)$とする（すなわち y 軸にそってfは一定)。

$$w(u, v_0) = \begin{pmatrix} x(u, v_0) \\ y(u, v_0) \\ z(u, v_0) \end{pmatrix}$$

この時 u が増加する方向（すなわち x 軸の正の方向）に動座標系の x 軸をとることにすると、

$$\frac{d}{dt}w(u(t),v_0)=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dt}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dt}+0=w_u\frac{du}{dt}=(1,0,p)^T\frac{dx}{dt}$$

である。よって、

$$\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{w_u\dfrac{du}{dt}}{\left|w_u\dfrac{du}{dt}\right|}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\\ \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

となる。また、$q=\frac{\partial f}{\partial y}=0$となるから、

$$\mathbf{f}_3=\begin{pmatrix}e\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

となる。

$\mathbf{f}_2$は

$$\mathbf{f}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{f}_3\times\mathbf{f}_1}{|\mathbf{f}_3\times\mathbf{f}_1|}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

である。$\mathbf{f}_1$~$\mathbf{f}_3$は直交するように設定した。確認すると、

$$\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\\ \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=0$$

$$\mathbf{f}_2\cdot\mathbf{f}_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\end{pmatrix}=0$$

$$\mathbf{f}_3\cdot\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\\ 0\\ \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\end{pmatrix}=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0$$

（4 次元めは計算に関係ないので省いている。）

動座標系の原点が、元の座標系の x 軸方向に動いているとする。同座標系の原点の座標がそのまま$\mathbf{f}_4$になるから（1 の「平行移動の場合」を参照)、

$$\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ f(x(t), y(t)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすることができる。1 の「基底の変換」で示したように、

$$(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4) = B$$

であるから、それぞれの時間tにおいて

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} & 0 & \frac{-p}{\sqrt{1+p^2}} & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} & f(x(t), y(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができた。ここで、$\mathbf{f}_1$~$\mathbf{f}_3$は直交するように設定したが、$\mathbf{f}_4$は必ずしも他の基底と直交しないことに注意する。

ここであらためて物体 Xの位置は

$$X = \sum_{i=1}^{4} x^i\, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{4} p^i\, \mathbf{f}_i$$

としたことを思い出す。今、正規直交座標系 e における Xの座標がわかっているとすると、動座標系における Xの座標は次のように書ける（1 参照)。

$$p^i = \sum_{j=1}^{4} A^i_j x^j$$

$$\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{x} = B^{-1}\boldsymbol{x}$$

すなわち、t、$f(x(t), y(t))$、$p = \frac{\partial f}{\partial x}$がわかれば、$x$ 軸方向に沿って動く同座標系における任意の物体の座標を算出することができた。

パラメータ tを時間とみなすのであれば単位時間の取り方に不自然さがでるため、何らかの処置が必要である。そこで、例えば曲線・曲面論でよく用いられる距離パラメータに変換するとよいかもしれない。

$$ds = \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2}\, dt = \sqrt{\frac{du}{dt}^2 + \frac{dv}{dt}^2 + \frac{df}{dt}^2}\, dt$$

同座標系に固定したカメラの画像面への投影は通常用いられているやり方に従えばよい

（もう少し詳しく説明する予定だが、例えば「3 次元ビジョン　徐剛・辻三郎」、「コンピュータビジョン―視覚の幾何学―　佐藤淳」を参照のこと）。

3　座標変換（一般の曲線の場合）

より一般に曲面上を動く動座標系に対しては、動座標系が動く曲線を

$$l(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$w(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} x\big(l(t)\big) \\ y\big(l(t)\big) \\ z\big(l(t)\big) \end{pmatrix}$$

として、

$$\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ f(u(t), v(t)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

（続く）

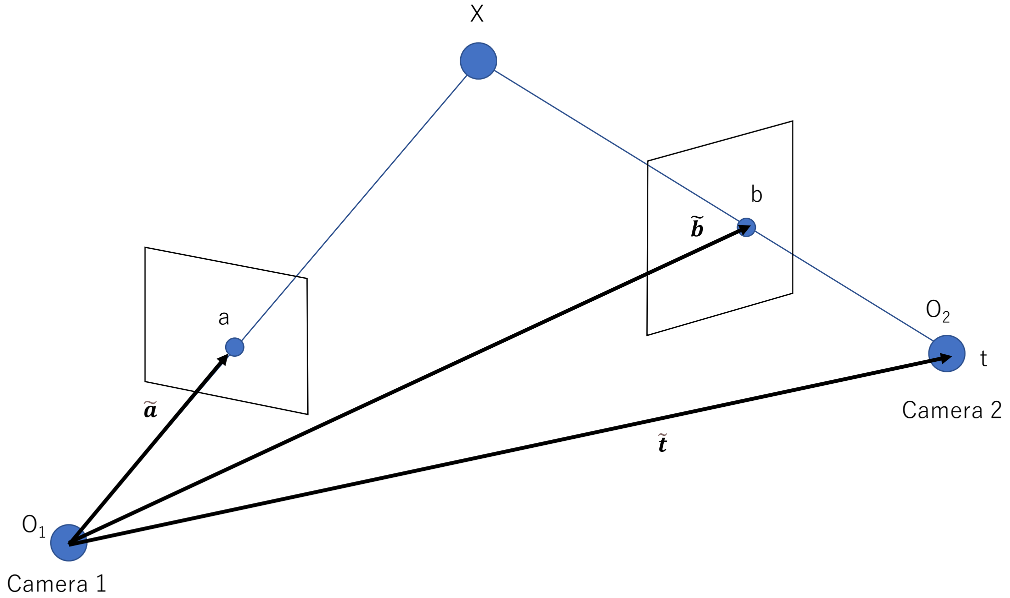
付録 1　エピポーラ幾何

エピポーラ方程式の導出

図で O1 を原点とした座標系と O2 を原点とした座標系それぞれから見た物体の像の関係のことをエピポーラ方程式といい、

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{T}} E \tilde{\boldsymbol{p}} = 0$$

と表せる。ここで、Eは基本行列（essential matrix）と呼ばれる 3x3 行列、$\tilde{\boldsymbol{a}}$は物体 X の座



標系 e における camera 1 のスクリーンの空間座標、$\tilde{\boldsymbol{p}}$は物体 X の座標系 f における camera 2 のスクリーンの空間座標を表す。つまり、$\tilde{\boldsymbol{a}}$は座標系 e における a の座標の最初の 3 つの次元（$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$の係数)、$\tilde{\boldsymbol{p}}$は座標系 f における b の座標の最初の 3 つの次元（$\mathbf{f}_1$、$\mathbf{f}_2$、$\mathbf{f}_3$の係数）に相当する。(～はそのベクトルが 3 次元であることを示す。)
エピポーラ方程式は

$$\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{t}}\times\left(\tilde{\boldsymbol{b}}-\tilde{\boldsymbol{t}}\right)\right)=\mathbf{0}$$

という関係から得られる。
ここからの目的はこれまで議論してきたフレームワークからエピポーラ方程式を記載することである。

$$X=\sum_{i=1}^{4}x^i\,\mathbf{e}_i$$

$$a=\sum_{i=1}^{4}a^i\,\mathbf{e}_i$$

$$b=\sum_{i=1}^{4}b^i\,\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{4}p^i\,\mathbf{f}_i$$

$$t=\sum_{i=1}^{4}t^i\,\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{4}s^i\,\mathbf{f}_i$$

とおくと、エピポーラ方程式は座標系 e のa^iと座標系 f のp^iの関係を表す。そこで座標系 e のb^iをp^iであらわすことにしよう。

$$b=\sum_{i=1}^{4}p^i\,\mathbf{f}_i=(\mathbf{f}_1\;\mathbf{f}_2\;\mathbf{f}_3\;\mathbf{f}_4)\boldsymbol{p}=(\mathbf{e}_1\;\mathbf{e}_2\;\mathbf{e}_3\;\mathbf{e}_4)R(-\theta)^{-1}T^{-1}\boldsymbol{p}=(\mathbf{e}_1\;\mathbf{e}_2\;\mathbf{e}_3\;\mathbf{e}_4)\begin{pmatrix}r(\theta) & r(\theta)\tilde{\boldsymbol{t}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{p}$$

ただし、

$$R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} r(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t^1 \\ 0 & 1 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \tilde{\boldsymbol{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(-\theta)^{-1}T^{-1} = \begin{pmatrix} r(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \tilde{\boldsymbol{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta) & r(\theta)\tilde{\boldsymbol{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおいた。これを分解すると、

$$b = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix} r(\theta) & r(\theta)\tilde{\boldsymbol{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix} r(\theta) & r(\theta)\tilde{\boldsymbol{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix} r(\theta)\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} + r(\theta)\tilde{\boldsymbol{t}} \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ )r(\theta)(\widetilde{\boldsymbol{p}} + \tilde{\boldsymbol{t}}) + \ \mathbf{e}_4 = \widetilde{\boldsymbol{b}} + \mathbf{e}_4$$

$\widetilde{\boldsymbol{b}}$は 3 次元空間の基底ベクトル$(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ )$で書き表せるから、通常の 3 次元空間上での議論ができる。

これを参考に、

$$b - t = \sum_{i=1}^{4}(p^i - s^i)\,\mathbf{f}_i = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s}) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix} r(\theta) & r(\theta)\tilde{\boldsymbol{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s})$$

$$= (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix} r(\theta) & r(\theta)\tilde{\boldsymbol{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^1 - s^1 \\ p^2 - s^2 \\ p^3 - s^3 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4)\begin{pmatrix} r(\theta) & r(\theta)\tilde{\boldsymbol{t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{p}} - \tilde{\mathbf{s}} \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ )r(\theta)(\widetilde{\boldsymbol{p}} - \tilde{\mathbf{s}}) + 0\ \mathbf{e}_4$$

$$= (\widetilde{\boldsymbol{b}} - \tilde{\boldsymbol{t}}) + 0\mathbf{e}_4$$

ところが、座標系 f での t は原点であるから、

$$\begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} - \tilde{\boldsymbol{t}} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ )r(\theta)\widetilde{\boldsymbol{p}}$$

となる。成分表示で書き下すと、

$$\widetilde{\boldsymbol{b}}-\tilde{\boldsymbol{t}}=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} r_i^1\, p^i \\ \sum_{i=1}^{3} r_i^2\, p^i \\ \sum_{i=1}^{3} r_i^3\, p^i \end{pmatrix}=\sum_{i,j=1}^{3} r_i^j\, p^i \mathbf{e}_j$$

よって、

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{t}}\times\left(\widetilde{\boldsymbol{b}}-\tilde{\boldsymbol{t}}\right)\right)=\sum_{i=1}^{3} a^i\,\mathbf{e}_i\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} t^j\,\mathbf{e}_j\times\sum_{k,l=1}^{3} r_k^l\, p^k \mathbf{e}_l\right)=\sum_{i=1}^{3} a^i\,\mathbf{e}_i\cdot\left(\sum_{j,k,l=1}^{3} t^j\, r_k^l p^k \mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_l\right)$$

$$=\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a^i t^j r_k^l p^k \mathbf{e}_i\cdot\left(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_l\right)$$

ここで、$i\neq j, j=l$の時は 0 なので、

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{t}}\times\left(\widetilde{\boldsymbol{b}}-\tilde{\boldsymbol{t}}\right)\right)$$

$$=a^1t^2\sum_{k=1}^{3} r_k^3 p^k+a^2t^3\sum_{k=1}^{3} r_k^1 p^k+a^3t^1\sum_{k=1}^{3} r_k^2 p^k-a^1t^3\sum_{k=1}^{3} r_k^2 p^k$$
$$-a^3t^2\sum_{k=1}^{3} r_k^1 p^k-a^2t^1\sum_{k=1}^{3} r_k^3 p^k$$
$$=a^1\left(t^2\sum_{k=1}^{3} r_k^3 p^k-t^3\sum_{k=1}^{3} r_k^2 p^k\right)+a^2\left(t^3\sum_{k=1}^{3} r_k^1 p^k-t^1\sum_{k=1}^{3} r_k^3 p^k\right)$$

$$+a^3\left(t^1\sum_{k=1}^{3} r_k^2 p^k-t^2\sum_{k=1}^{3} r_k^1 p^k\right)=(a^1\ a^2\ a^3)\begin{pmatrix} 0 & -t^3 & t^2 \\ t^3 & 0 & -t^1 \\ -t^2 & t^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} r_i^1\, p^i \\ \sum_{i=1}^{3} r_i^2\, p^i \\ \sum_{i=1}^{3} r_i^3\, p^i \end{pmatrix}$$

$$=(a^1\ a^2\ a^3)\begin{pmatrix} 0 & -t^3 & t^2 \\ t^3 & 0 & -t^1 \\ -t^2 & t^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{T}}E\widetilde{\boldsymbol{p}}=0, E=\begin{pmatrix} 0 & -t^3 & t^2 \\ t^3 & 0 & -t^1 \\ -t^2 & t^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix}$$

付録２　微小移動による基底ベクトルの変位
予定。

参考文献

曲線と曲面の微分幾何　小林昭七
https://www.shokabo.co.jp/mybooks/ISBN978-4-7853-1091-2.htm

微分形式とその応用　栗田稔
https://www.gensu.jp/product/%E6%96%B0%E8%A3%85%E7%89%88-%E5%BE%AE%E5%88%86%E5%BD%A2%E5%BC%8F%E3%81%A8%E3%81%9D%E3%81%AE%E5%BF%9C%E7%94%A8%E2%80%95%E6%9B%B2%E7%B7%9A%E3%83%BB%E6%9B%B2%E9%9D%A2%E3%81%8B%E3%82%89%E8%A7%A3%E6%9E%90/

3 次元ビジョン　徐剛・辻三郎
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320085220

コンピュータビジョン―視覚の幾何学―　佐藤淳
https://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339023633/

3 次元コンピュータビジョン計算ハンドブック　金谷健一・菅谷保之・金澤靖
https://www.morikita.co.jp/books/mid/081791