Citation: 東京出版 大学への数学 2020-07, 安田 亨

要点の整理／数 I II

不等式 — 基本の総括

1　不等式の 3 つの意味

不等式にはいくつかの意味があり，どの意味で使っているのかを間違えると誤答につながるので注意しよう．

(1) **単なる大小関係をあらわすときに使う**

$$a \geq b \text{ は } a > b \text{ または } a = b$$

の少なくとも一方が成り立つと主張しているだけである．例えば $3 \geq 1$ は $3 > 1$ が成り立つので正しい．

(2) **解集合を表す**

たとえば $x^2 - 3x + 2 = 0$ を解くと x は 1 と 2 となり，$\{1, 2\}$ という解の集合が求められる．$x^2 - 3x + 2 < 0$ を解くと $1 < x < 2$ となり，$1 < x < 2$ を満たす x 全体のことである．

(3) **取りうる値の範囲を表す**

実数 x が 1 と 2 の間のすべての値をとって動くことを $1 < x < 2$ と表す場合がある．

2　不等式を解く

$a < b$ のとき

(1)

$$(x-a)(x-b) > 0 \iff x < a,\ x > b$$
$$(x-a)(x-b) \geq 0 \iff x \leq a,\ x \geq b$$

「a, b の外側」と理解する．

(2)

$$(x-a)(x-b) < 0 \iff a < x < b$$
$$(x-a)(x-b) \leq 0 \iff a \leq x \leq b$$

「a, b の内側」と理解する．

分数不等式を解く場合は，分母を払う人が多いが，符号を考えないでいきなり払ってしまうミスが少なくない．それを防ぐためには「移項して通分」「各区間の x に対して符号を判別」を行う方がよい．

3　不等式証明の基本

「不等式 $A \geq B$ を証明せよ」という問題の場合，$A - B$ を作り，整理し，因数分解か平方完成するというのは基本的手法である．

4　絶対値の外し方

「絶対値をはずすときには符号で場合分けせよ」と習うが，それは基本であり，込み入った問題では場合分けを減らすことが，その後の処理を簡単にしてくれる．

(1)　$|X| = |A|$ のときは，$X = \pm A$ と外す．X の正負には言及しない．

$|X| = A$ のときは $A \geq 0$ かつ $X = \pm A$ と外す．

(2)　$|X| \leq A$ のときは $-A \leq X \leq A$ と外す．

このとき，$A \geq 0$ でなければならないが，$-A \leq X \leq A$ のときには $-A \leq A$ だから $A \geq 0$ となる．A, X の符号に言及する必要はない．

(3)　$|X| \geq A$ の解について，$A < 0$ のとき X は任意，$A \geq 0$ のとき $X \leq -A$，$X \geq A$

実は，A の符号によらず $X \leq -A$, $X \geq A$ を外すことができる．

5　有名な不等式を利用する

5.1　三角不等式

(1)　実数について $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

左の等号は $xy \leq 0$，右の等号は $xy \geq 0$ で成り立つ．

数学 III の複素数ではこの不等式を使うチャンスは多いが，実数では，使う問題がほとんど出ない．

(2)　空間の 3 点 P，Q，R について $\mathrm{PR} \leq \mathrm{PQ} + \mathrm{QR}$

等号は P，Q，R の順で一直線上にあるとき成り立つ．

(3) $\left||\overrightarrow{x}|-|\overrightarrow{y}|\right| \leq |\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}| \leq |\overrightarrow{x}|+|\overrightarrow{y}|$

左の等号は $\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$ の一方が $\overrightarrow{0}$ か逆向きに平行のとき，右の等号は $\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$ の一方が $\overrightarrow{0}$ か同じ向きに平行のとき成り立つ．

5.2　$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

【証明】

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\\
=&\frac{1}{2}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

5.3　相加・相乗平均の不等式 (AM-GM Inequality)

文字はすべて正，n は自然数とする．

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \tag{A}$$

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \tag{B}$$

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots\cdots x_n}$$

(A) の等号は $x=y$ のとき成り立つ．他も同様である．(A) の証明は

$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$

(B) の証明は

$$
\begin{aligned}
&A^3+B^3+C^3-3ABC\\
=&(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)\\
=&(A+B+C)\frac{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2}{2} \geq 0
\end{aligned}
$$

として，$A^3+B^3+C^3-3ABC \geq 0$ で $A=\sqrt[3]{x}$，$B=\sqrt[3]{y}$，$C=\sqrt[3]{z}$ とおけばよい．次のコーシーの証明方法も有名である．(A) を 2 回使って，

$$
\begin{aligned}
\frac{x+y+z+w}{4} &\geq \frac{2\sqrt{xy}+2\sqrt{zw}}{4}=\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zw}}{2}\\
&\geq \sqrt{\sqrt{xy}\cdot\sqrt{zw}}=\sqrt[4]{xyzw}
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{x+y+z+w}{4} \geq \sqrt[4]{xyzw}$ となり，ここで $w=\dfrac{x+y+z}{3}$ とおくと，不等式は $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[4]{xyz\cdot\dfrac{x+y+z}{3}}$ となる．両辺を 4 乗し $\dfrac{x+y+z}{3}$ で割ると $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$

両辺の 3 乗根をとると (B) を得る．

5.4　コーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz inequality)

$$
\begin{aligned}
&(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)\\
&\geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2
\end{aligned}
$$

等号は $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$ (分母が 0 の項は分子も 0 とする) のとき成り立つ，と書くのが普通である．厳密には「a_1 から a_n までがすべて 0 か，または a_1 から a_n までの中に 0 でないものがあるときは $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$ (分母が 0 の項は分子も 0 とする)」のときだが，0 の記述は実用上意味がない．

【証明】 $A=a_1^2+\cdots\cdots+a_n$，$B=b_1+\cdots\cdots+b_n$，$C=a_1b_1+\cdots\cdots+a_nb_n$ とおいて $AB \geq C^2$ を示す．

$A=0$ のときは $a_1=\cdots\cdots=a_n=0$ で，証明すべき不等式の等号が成り立つ．$A>0$ のときは

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_kt-b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}(a_k^2t^2+2a_kb_kt+b_k^2)\\
&=At^2-2Ct+B=A\left(t-\frac{C}{A}\right)^2-\frac{C^2}{A}+B
\end{aligned}
$$

が任意の t で成り立つから，特に $t=\dfrac{C}{A}$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\frac{C}{A}-b_k\right)^2=\frac{AB-C^2}{A} \tag{1}$$

左辺は 0 以上なので，右辺も 0 以上であり $AB \geq C^2$

とくに (1) で $AB=C^2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\frac{C}{A}-b_k\right)^2=0$

$a_k\cdot\dfrac{C}{A}-b_k=0$ が $k=1, 2, \cdots, n$ で成り立つから

$$\frac{C}{A}=\frac{b_k}{a_k} \qquad \therefore \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}=\frac{C}{A}$$

$n=2, 3$ のときはベクトルの内積を用いる方法もあります．

5.5　Jensen の定理 (グラフの凹凸の利用)

$f(x)$ のグラフが下に凸のとき，

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

等号は $x_1 = x_2$ のとき成り立つ．曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(x_1, f(x_1))$，$\mathrm{Q}(x_2, f(x_2))$ と線分 PQ の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$ を考え，M は曲線より上側 (または曲線上) にあり，その真下の曲線上の点 $\mathrm{N}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ と y 座標を比べればよい．

5.6　パートナー交換

$a < b, x < y$ のとき $ax + by > ay + bx$

6　最大値・最小値への応用

大小関係 $f(x) \geq m$(m は定数) が任意の x で成り立ち，等号が成り立つような x が存在するならば $f(x)$ の最小値は m である．特に，$x > 0$ のとき，

$x + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$ 等号は $x = \dfrac{1}{x}$，つまり $x = 1$ のとき成り立つ

の形は頻出である．そして，不等式の最大・最小値への応用では「相加・相乗平均の不等式を使った後に右辺が定数になる場合に使えることが**多い**」のであり，その形でなければ使えないわけではない．

【例】 $p^2 + q^2 + p^2q^2 = \dfrac{1}{3}$　(p, q は正の整数) のとき，pq の最大値を求めよ．(2018，2001　一橋大の解答中で)

【解】

$$\frac{1}{3} - p^2q^2 = p^2 + q^2 \geq 2\sqrt{p^2q^2} = 2pq$$

より

$$(pq)^2 + 2(pq) - \frac{1}{3} \leq 0$$

pq について解いて $0 < pq \leq -1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{3}}$

等号は $p = q = \sqrt{-1 + \sqrt{\dfrac{4}{3}}}$ のとき成り立つ．