微分積分
— 標準問題 —

Yuta Suzuki *

問題.

(1) 間接的に定積分を求める方法として King Property という性質が知られている。$f(x)$ が積分区間で連続であるとして、次の式を証明せよ。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

(2) 次の定積分 I, J を求めよ。

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\sin 2x + 2\cos^2 x}dx$

問題.

$$\text{双曲線関数：}\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

を用いて、次の不定積分 I を求めることを考える。

$$I = \int \sqrt{x^2+1}dx$$

まず、被積分関数 $y = \sqrt{x^2+1}$ について考える。この関数は両辺を二乗して整理することで

$$y^2 - x^2 = 1$$

という双曲線の一部であることがわかる。また、双曲線関数について、一般に成り立つ性質

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

と比較して、$x = \sinh t$ と置換することで不定積分を求めよう。

(1) 上のように置換したとき、t を x で表し、dx を t および dt で表せ。

---

* https://github.com/suzuyut4

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。

(3) 以上の結果を踏まえて不定積分 I を求めよ。

問題.

連続関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{t-x} f(t)dt$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。また、$f'(x) = 2(x-1)\cos x$ を示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ が $0 < x < \pi$ の範囲でただ一つの解を持つことを示せ。$0 \leq x \leq \alpha$ の面積を S_1、$\alpha \leq x \leq \pi$ の面積を S_2 とするとき、S_1, S_2 の大小を判定せよ。

問題.

点 $\mathrm{P}(a,b)$ は xy平面 上の点とする。点 P から曲線 $y = x^3 - x$ に接線がちょうど 2 本だけひけ、この 2 本が直交するとき、点 P の座標を求めよ。

問題.

関数

$$f(x) = \int_0^1 |2t^2 - 3xt + x^2| dt$$

(1) $f(1)$ を求めよ。

(2) $1 \leq x \leq 2$ のとき、関数 $f(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx$ を求めよ。

問題.

e を自然対数の底とする。$e \leq p < q$ のとき、不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを示せ。