数列と漸化式
— 標準編 —

Yuta Suzuki [*]

問題.

n を自然数として次の条件で定められた数列 $\{a_n\}$ について 2 通りの解き方を考えよう。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \quad \cdots(*) \tag{0.1}$$

(1) a_2, a_3, a_4 を計算せよ。

(2) 一般項 $\{a_n\}$ を推定し、それが正しいことを数学的帰納法を用いて示せ。

(3) 上の漸化式 $(*)$ について、$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$ を a_n と n を用いて表せ。

(4) a_{n+1} と a_n の関係を導いた上で、一般項 a_n を n を用いて表せ。

問題.

(1) 次の初項、二つの漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$a_1 = 5, \quad b_1 = 3 \tag{0.2}$$
$$a_{n+1} = 5a_n + 3b_n \tag{0.3}$$
$$b_{n+1} = 3a_n + 5b_n \tag{0.4}$$

2 つの数列 $\{a_n \pm b_n\}$ を求め、一般項 a_n, b_n を求めよ。

(2) (1) を踏まえて次の初項、二つの漸化式で与えられる数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

$$p_1 = 1, \quad q_1 = 4 \tag{0.5}$$
$$p_{n+1} = 2p_n + q_n \tag{0.6}$$
$$q_{n+1} = 4p_n - q_n \tag{0.7}$$

問題.

* https://github.com/suzuyut4

n を自然数、$x_1 = \sqrt{a}$ として次の漸化式で与えられる数列 $\{x_n\}$ を考える。

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} \tag{0.8}$$

すなわち、

$$x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \qquad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \qquad \ldots \tag{0.9}$$

である。この数列が収束するかどうかを調べたい。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ が収束すると仮定して、その極限値を求めよ。
(2) 数列 $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ が (1) で得た値に実際に収束することを示せ。

問題.

n を自然数とする。次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ を n を用いて表せ。

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$
(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 6$
(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + n \cdot 2^n$
(4) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$
(5) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{a_n - 2}$
(6) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{a_n - 1}$

問題.

初項 $a_1 = 1$ として，下の漸化式を解け。

(1) $a_{n+1} = (n+1)a_n$
(2) $(n+2)a_{n+1} = na_n$
(3) $na_{n+1} = 2(n+1)a_n + n(n+1)$

問題.

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) $n \geq 2$ のとき，$a_n > 1$ となることを示せ。
(2) $\alpha^2 = \dfrac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

$\{a_n\}$ がある値に収束するとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ であるので，その極限は α である。そこで，以

下の手順で実際に α に収束することを示そう。

(3) すべての自然数 n に対して，$a_n < \alpha$ となることを示せ。

(4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して，不等式 $\dfrac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq r$ が成り立つことを示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

問題.

n が 2 以上の自然数のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

問題.

数列 $\{a_n\}$ を、$a_1 = 1,\ a_2 = 2\cos\theta \cdot a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$ で定める。このとき、$a_n = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} (n \geq 1)$ となることを示せ。

問題.

さいころを 101 回振るとき、1 の目は何回出る確率が最大か。

問題.

一辺の長さが 1 の正方形 ABCD の上を次の規則で反時計回りに動く点 Q を考える。さいころを振って偶数の目が出れば、出た目の長さだけ順次正方形の周上を移動させ、奇数の目が出れば移動させない。Q は最初 A にあったとする。さいころを n 回振ったあとで、Q が C にある確率を p_n とする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) p_{n+1} と p_n との間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) p_n を n の式で表せ。

問題.

先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし、$n \geq 2$ とする。各車両を赤色、青色、黄色のいずれか 1 色で塗るとき、隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

問題.

どの目も出る確率が等しいさいころを 1 つ用意し、次のように左から順に文字を書く。さいころを投げ、出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き、4 のときは文字 B を、5 のときは文字 C を、6 のときは文字 D を書く。更に繰り返しさいころを投げ、同じ規則に従って、AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。例えば、さいころを 5 回投げ、その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると、得られる文字列は AACDAAB となる。このとき、左から 4 番目の文字は D、5 番目の文字は A である。

n を正の整数とする。n 回さいころを投げ文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A とな

る確率を求めよ。

問題.

平行な三直線 l_1, l_2, l_3 の各々に n 個の点 A_n, B_n, C_n をとる。いま $j(=1,2,\cdots,n)$ に対し確率 $\dfrac{1}{2}$ で A_j, C_j の一方を選び B_j と結ぶとき、l_1 の始点 X から l_1, l_2, l_3 の終点 P, Q, R へあみだくじを以下のルールで行う。

ルール

- 縦の直線に沿って進む。
- 縦に進むうえで横の線分に接触したらその線分に沿って進む。
- 上の 2 つを繰り返し P, Q, R のいずれかに到達するまで行う。

P, Q に到達する確率をそれぞれ n を用いて表せ。

問題.

座標平面上を次の規則 (i)、(ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i) 最初に、P は点 (2, 1) にいる。
(ii) ある時刻で P が点 $(a,\ b)$ にいるとき、その 1 秒後には P は
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし、(1) については、結論のみを書けばよい。

(1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ。
(2) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 (2, 1) にいる確率と、最初から n 秒後に P が点 $(-2,\ -1)$ にいる確率にいる確率は等しいことを示せ。
(3) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 (2, 1) にいる確率を求めよ。