数列と漸化式
— 基本編 —

Yuta Suzuki *

1　数列と漸化式の基本

1.1　漸化式

そもそも、公式を用いて簡単に解ける漸化式は次の 3 つに限られます。

(i) $a_{n+1} = a_n + d$ →公差 d の等差数列

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \tag{1.1}$$

(ii) $a_{n+1} = ra_n$ →公比 r の等比数列

$$\Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1} \tag{1.2}$$

(iii) $a_{n+1} = a_n + b_n$→階差数列が $\{b_n\}$ の数列 $\{a_n\}$

$$\Rightarrow (n \geqq 2\text{のとき、})\ a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \tag{1.3}$$

以下、(1.1) の形を等差型、(1.2) の形を等比型、(1.3) の形を階差型と呼ぶことにします。この形以外のほぼすべての漸化式はなんとかしてこの形に帰着させることが目的で、多くの場合は等比数列の形に変形してから一般項を求めるということも覚えておくとよいです。

せっかくなので (1.3) の形だけはここで証明しておきましょう。

証明. $a_{n+1} = a_n + b_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = b_n$ であるので、n を $n-1, n-2, \cdots, 2, 1$ として足し合わせると

$$\begin{array}{cccccc}
 & a_n & - & a_{n-1} & = & b_{n-1} \\
 & a_{n-1} & - & a_{n-2} & = & b_{n-2} \\
 & a_{n-2} & - & a_{n-3} & = & b_{n-3} \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
 & a_3 & - & a_2 & = & b_2 \\
+) & a_2 & - & a_1 & = & b_1 \\
\hline
 & a_n & - & a_1 & = & b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_2 + b_1
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \qquad \square$$

* https://github.com/suzuyut4

ここで、証明一行目において $n-1$ 以下のケースを考えることによってこの式を得ています。しかし、この変形ができるのは $n-1 \geqq 1$ すなわち $n \geqq 2$ のときのみです。そのため、階差型においては条件 $n \geqq 2$ を忘れてはいけません。すなわち、一般項を求めたとき、$n=1$ でもその式が成り立っているか必ず確認し、成り立っていればそのように書き、成り立っていなければ場合分けして一般項を示す必要があります。解答の書き方など詳しくは、3 漸化式 基本編で確認してください。

1.2 数列の和 S_n

一般項 a_n で表される数列について第一項から第 n 項までの和を S_n で表すことがあります。すなわち

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

です。以下、特に断りがなければ S_n を数列 $\{a_n\}$ に対する和を表すものとします。

2　数列とその周辺

問題. 次の値を n を用いて表せ。

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+2)}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{(2k-1)\cdot 2^{k-1}\}$
7. $\displaystyle\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+k}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}$
8. $\displaystyle 1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{k}{3^{k-1}}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}$

3　漸化式 基本編

問題. 次の式を満たす数列 $\{a_n\}$ を n を用いて表せ。

1. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3$
2. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 7a_n$
3. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n - 4$
4. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n$
5. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3^n - 4n$
6. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$
7. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 16a_n^5$
8. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 6$
9. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 4a_n + n \cdot 2^n$
10. $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$
11. $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n - 2$
12. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3}$
13. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{a_n - 2}$
14. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{a_n - 1}$
15. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n$
16. $a_1 = 1,\ (n+2)a_{n+1} = na_n$
17. $a_1 = 1,\ na_{n+1} = 2(n+1)a_n + n(n+1)$
18. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n}a_n + 1$

19. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2^{2n-2}(a_n)^2$

20. $S_n = 3a_n + 2n - 1$